pp. 21-37

2018年5月7日

第2回 パーセプトロン

秋山研　M2　伊井良太

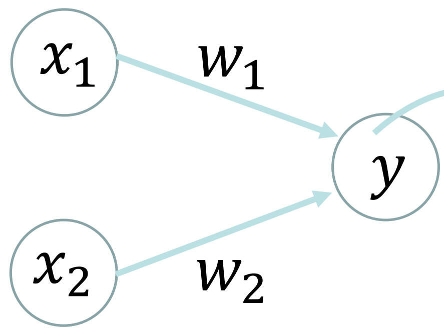
今日やること

- 単層パーセプトロンの実装
  - ANDゲート、NANDゲート、ORゲート
- 重みとバイアスの導入
- 多層パーセプトロンの実装
  - XORゲート
- 演習

パーセプトロンとは

- 複数の信号を入力として受け取り、1つの信号(1もしくは0)を出力するアルゴリズム
- 信号を流すか流さないの二値の値

- ○はニューロン
- x_1, x_2は入力信号
- yは出力信号
- w_1, w_2は重み



$w_1x_1 + w_2x_2$を受け取る

出力

$$y = \begin{cases} 0 & (w_1x_1 + w_2x_2 \leq \theta) \\ 1 & (w_1x_1 + w_2x_2 > \theta) \end{cases}$$

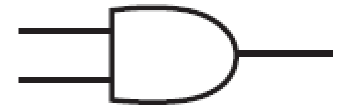
重みは各信号の重要性をコントロールする

真理値表と論理式

- 論理式
  - ある論理変数について、真となる条件のみを論理演算の形で表したもの

- 真理値表
  - 論理式が1となる場合の、各場合の論理変数の値を見る
  - 1ならそのまま、0なら変数を否定する
  - 結果の論理積をとり、これらすべてを論理和でつなげる

ANDゲート



- 2つの入力が1のときだけ1を出力し、それ以外は0を出力

x_1	x_2	y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$(w_1, w_2, \theta) = (1.1, 2.1, 2.2)$の場合　　出力

$0 \times 1.1 + 0 \times 2.1 = 0$	0
$0 \times 1.1 + 1 \times 2.1 = 2.1$	0
$1 \times 1.1 + 0 \times 2.1 = 1.1$	0
$1 \times 1.1 + 1 \times 2.1 = 3.2$	1

$(w_1, w_2, \theta) = (0.5, 0.5, 0.8)$
$(w_1, w_2, \theta) = (1.0, 1.0, 1.0)$

の場合は実現できるか？

ANDゲートの作成

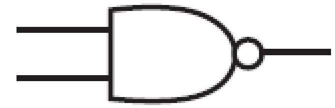
- ANDゲートが動作するようにパラメータの数値を自分で決めて実装しよう

- ニューロンが発火するかどうかの条件

$$y = \begin{cases} 0 & (w_1 x_1 + w_2 x_2 \leq \theta) \\ 1 & (w_1 x_1 + w_2 x_2 > \theta) \end{cases}$$

- 実装したANDゲートに入力値(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)を与えて動作確認をしよう

NANDゲート



- 入力が両方1の場合、出力が0
- AND ゲートの出力を反転したもの

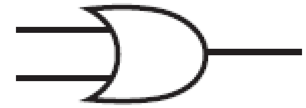
x_1	x_2	y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$(w_1, w_2, \theta) = (-1.1, -2.1, -2.2)$の場合　　出力

$$0 \times (-1.1) + 0 \times (-2.1) = 0 \qquad 1$$
$$0 \times (-1.1) + 1 \times (-2.1) = -2.1 \qquad 1$$
$$1 \times (-1.1) + 0 \times (-2.1) = -1.1 \qquad 1$$
$$1 \times (-1.1) + 1 \times (-2.1) = -3.2 \qquad 0$$

ANDゲートのパラメータ値の符号をすべて反転することでNANDゲートを実現できる

ORゲート



- 入力が一つでも1の場合、出力が1

x_1	x_2	y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$(w_1, w_2, \theta) = (0.5, 0.2, 0.0)$の場合　　出力

$$0 \times 0.5 + 0 \times 0.2 = 0 \qquad 0$$
$$0 \times 0.5 + 1 \times 0.2 = 0.2 \qquad 1$$
$$1 \times 0.5 + 0 \times 0.2 = 0.5 \qquad 1$$
$$1 \times 0.5 + 1 \times 0.2 = 0.7 \qquad 1$$

$(w_1, w_2, \theta) = (0.5, 0.5, 0.2)$
$(w_1, w_2, \theta) = (1.0, 1.0, 0.5)$

の場合は実現できるか？

単層パーセプトロンのまとめ

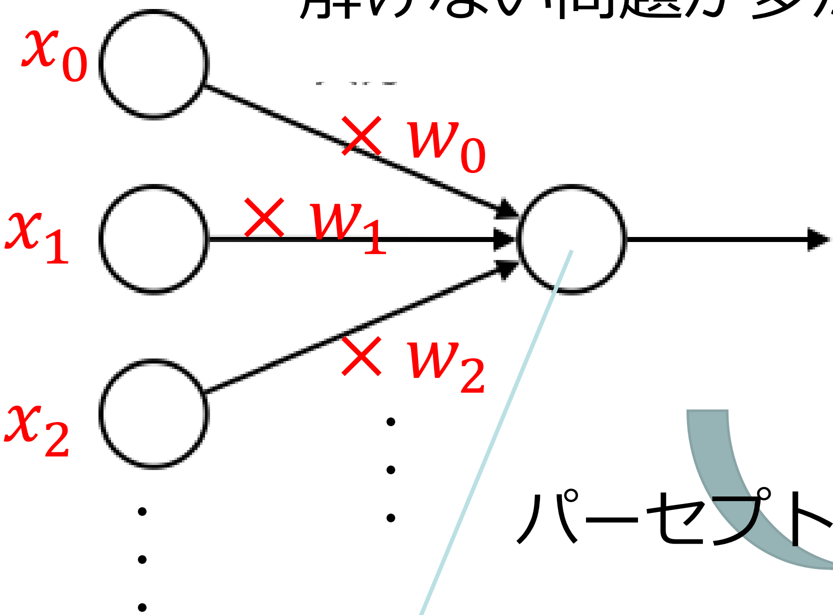
- パーセプトロンの構造は、AND、NAND、OR ゲートのすべてで同じ
  - パラメータの値を調整することでAND、NAND、ORの論理回路を表現できる
- 機械学習の場合、パラメータの値を決める作業をコンピュータに自動で行わせる

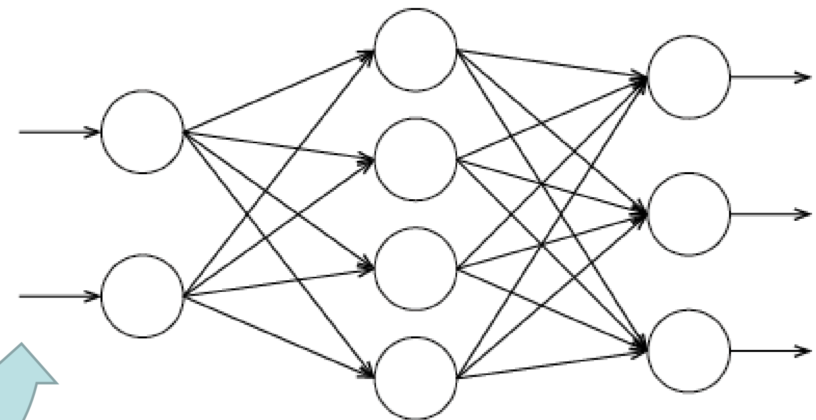
[演習]

- 手計算でやってきたことを、AND、NAND、ORの関数を実装して結果を確認しよう

ニューラルネットワークへ

パーセプトロン（線形分離可能な問題）では
解けない問題が多かった





パーセプトロンを多層化

入力1 × 重み1 + 入力2 × 重み2 + ⋯ + 入力n × 重みn

$=x_1w_1 + x_2w_2 + \cdots + x_nw_n$

$=\sum_{i=1}^{n} x_iw_i$

重みとバイアスの導入

- パーセプトロンの動作　　θを$-b$とすると

$$y = \begin{cases} 0 & (w_1 x_1 + w_2 x_2 + b \leq 0) \\ 1 & (w_1 x_1 + w_2 x_2 + b > 0) \end{cases}$$

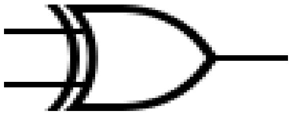
・bはバイアス
・w_1, w_2は重み

- 重みは入力信号への重要度をコントロールする
- バイアスはニューロンの発火のしやすさを調整するパラメータ
  - バイアスを-0.1から-20.0にすると、ニューロンは発火しにくくなる

[演習]

- 重みとバイアスによる方式を用いてAND、NAND、ORゲートを実装しよう

XORゲート



- x_1とx_2のどちらかが1のときだけ出力が1

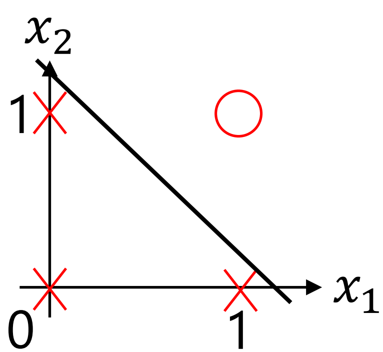
x_1	x_2	y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- 単層パーセプトロンでは実装できない
  - 単層パーセプトロンは式から見ても明らかなように、線形領域でしか分類できないから

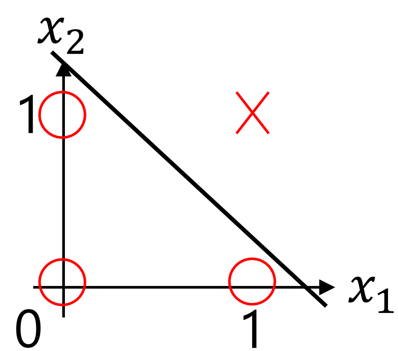
論理演算の識別器

- 線形と非線形

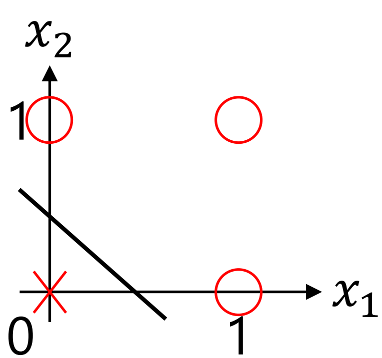
True=1
False=0



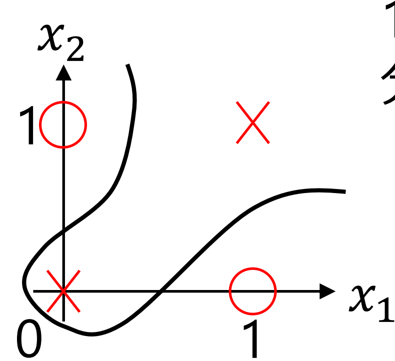
AND



NAND



OR



XOR

1本の直線では○と×を
分けることはできない

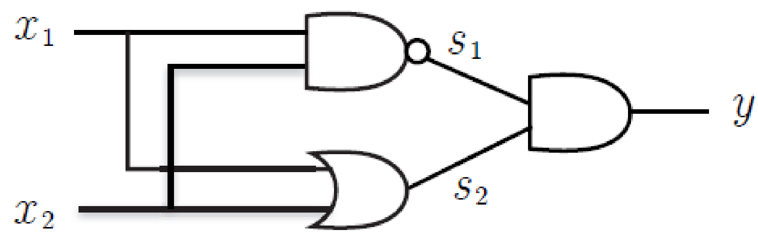
曲線であれば
分けられる！

既存ゲートでXORを実現

- AND、NAND、ORの組み合わせでXORを実現

$$
\begin{aligned}
&\overline{x_1}x_2 + x_1\overline{x_2} \\
&= \overline{x_1}(x_1 + x_2) + \overline{x_2}(x_1 + x_2) \\
&= (x_1 + x_2)(\overline{x_1} + \overline{x_2}) \\
&= (x_1 + x_2)(\overline{x_1 x_2})
\end{aligned}
$$

OR　AND　NAND



x_1	x_2	s_1	s_2	y
0	0	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0

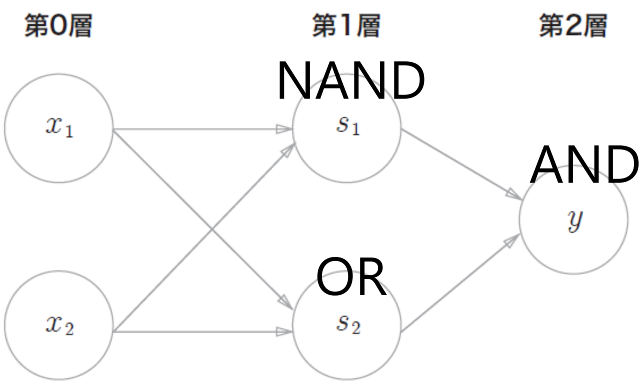
XORのパーセプトロン

- XORゲートの実装

```
def XOR(x1, x2):
    s1 = NAND(x1, x2)
    s2 = OR(x1, x2)
    y = AND(s1, s2)
    return y
```

```
XOR(0, 0) # 0 を出力
XOR(0, 1) # 1 を出力
XOR(1, 0) # 1 を出力
XOR(1, 1) # 0 を出力
```

- XORは2層のパーセプトロン



単層パーセプトロンは線形領域だけしか表現できないのに対して、多層パーセプトロンは非線形領域を表現することができる

多層パーセプトロンのまとめ

- 重みの値を適切に学習できさえすれば線形識別不可能な問題も解くことが可能
- 教師データ
  - 入力層に入力するパラメータ
  - 出力層から出力される値に対応する正解ラベル
- 中間層ユニットの各出力に対応する正解ラベルはない
- 実際に多層パーセプトロンでどのように重みを更新していくのかは今後…

演習

- XORゲートをNANDゲート4個ないし5個で構成せよ。

$$\overline{x_1}x_2 + x_1\overline{x_2}$$
$$= \overline{\overline{\overline{x_1}y + x\overline{y}}}$$

⋮

・ド・モルガン

$$= \overline{\overline{\overline{x_1 \cdot x_1} \cdot x_2} \cdot \overline{x_1 \cdot \overline{x_2 \cdot x_2}}}$$

⋮

・$a \cdot \bar{a} = 0$
・分配則
・ド・モルガン

$$= \overline{\overline{\overline{x_1 \cdot x_2} \cdot x_2} \cdot \overline{x_1 \cdot \overline{x_1 \cdot x_2}}}$$

参考

- すべての論理演算はNAND回路を組み合わせれば実現できる
- 多層のパーセプトロンは、(理論上)コンピュータが行う処理を表現できる

- O’Reilly Japan – コンピュータシステムの理論と実装
  - NANDゲートだけ与えられた状態から、最終的にテトリスを動作させる