# 2020～2021 学年高二寒假数学作业七、 导数 1 答案

1． $y'=a-\mathrm{e}^{x-1}$，$\because$ $y'\big|_{x=1}=a-1=2$，则 $a=3$．故选：D

2． $f'\left(x\right)=3x^2-2ax$，由 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,2\right)$ 单调递减，$\therefore\begin{cases}f'\left(0\right)\le 0\\ f'\left(2\right)\le 0\end{cases}$，$\therefore\begin{cases}0\le 0\\ 12-4a\le 0\end{cases}$，

$\therefore a\ge 3$.故选：A

3． 由题意，函数 $f(x)=\left(x^2-ax-1\right)e^x$，可得 $f'(x)=e^x\left[x^2+(2-a)x-1-a\right]$，

所以 $f'(1)=(2-2a)e=0$，解得 $a=1$，故 $f(x)=\left(\ x^2-x-1\ \right)e^x$，

可得 $f'(x)=e^x\left(x+2\right)\left(x-1\right)$，则 $f\left(x\right)$ 在 $(-\infty,-2)$ 上单调递增，在 $\left(-2,1\right)$ 上单调递减，

在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f\left(x\right)$ 的极大值为 $f(-2)=5e^{-2}$． 故选：C.

4．解：因为 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-x+alnx$ 有两个不同的极值点，

所以 $f'(x)=x-1+\dfrac{a}{x}=\dfrac{x^2-x+a}{x}=0$ 在 $(0,+\infty)$ 有 2 个不同的零点，所以 $x^2-x+a=0$ 在

$(0,+\infty)$ 有 2 个不同的零点，所以 $\begin{cases}\ =1-4a>0\\ a>0\end{cases}$，解得 $0<a<\dfrac{1}{4}$． 故选：$D$．

5． $\because e^x g(x)=f(x)$，$\therefore g(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}$，则 $g'(x)=\dfrac{f'(x)-f(x)}{e^x}$， $x>2$ 时， $f'(x)-f(x)>0$，

故 $y=g(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 递增，选项 $A$ 正确；$x<2$ 时，$f'(x)-f(x)<0$，故 $y=g(x)$ 在 $\left(-\infty,2\right)$

递减，故 $x=2$ 是函数 $y=g(x)$ 的极小值点，故选项 $B$ 正确；

由 $y=g(x)$ 在 $(-\infty,2)$ 递减，则 $y=g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 递减，

由 $g(0)=\dfrac{f(0)}{e^0}=2$，得 $x\ \ 0$时， $g(x)\ \ g(0)$，故 $\dfrac{f(x)}{e^x}\ \ 2$，故 $f(x)\ \ 2e^x$，故选项 $C$ 错误；

若 $g$ （2）$<0$，则 $y=g(x)$ 有 2 个零点，若 $g$ （2）$=0$，则函数 $y=g(x)$ 有 1 个零点，

若 $g$ （2）$>0$，则函数 $y=g(x)$ 没有零点，故选项 $D$ 正确．故选：ABD

6． 由 $\ln x>\ln y$ 得：$x>y>0$ .对于 A，令 $f\left(t\right)=t^m$，又 $0<m<1$，$\therefore f\left(t\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$

上单调递增，$\therefore x^m>y^m$，A 正确；对于 B，令 $f\left(t\right)=t\ln t$，则 $f'\left(t\right)=\ln t+1$，

$\therefore$ 当 $t\in\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$ 时，$f'\left(t\right)<0$；当 $t\in\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$ 时，$f'\left(t\right)>0$；$\therefore$ 当 $t\in\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$ 时，$f\left(t\right)$ 单

调递减；当$t\in\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$时，$f\left(t\right)$单调递增；$\because x>y>0$，$\therefore x+1>y+1>1$，

$\therefore\left(x+1\right)\ln\left(x+1\right)>\left(y+1\right)\ln\left(y+1\right)>0$，$\therefore 0<\frac{1}{\left(x+1\right)\ln\left(x+1\right)}<\frac{1}{\left(y+1\right)\ln\left(y+1\right)}$，

$\because 0<m<1$，$\therefore\ln m<0$，$\therefore\frac{\ln m}{\left(x+1\right)\ln\left(x+1\right)}>\frac{\ln m}{\left(y+1\right)\ln\left(y+1\right)}$，

$\therefore\frac{\left(y+1\right)\ln m}{\ln\left(x+1\right)}>\frac{\left(x+1\right)\ln m}{\ln\left(y+1\right)}$，即$\left(x+1\right)\log_{y+1}m<\left(y+1\right)\log_{x+1}m$，B 正确；

对于 C，$x^{\frac{y}{m}}>y^{\frac{x}{m}}$等价于$\left(x^{y}\right)^{\frac{1}{m}}>\left(y^{x}\right)^{\frac{1}{m}}$，

当$x=4$，$y=3$时，$x^{y}=4^{3}=64$，$y^{x}=3^{4}=81$，此时$0<x^{y}<y^{x}$，

令$f\left(t\right)=t^{\frac{1}{m}}$，由$0<m<1$知：$f\left(t\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上单调递增，$\therefore f\left(64\right)<f\left(81\right)$，

即$f\left(x^{y}\right)<f\left(y^{x}\right)$，$\therefore x^{\frac{y}{m}}<y^{\frac{x}{m}}$，C 错误；

对于 D，若$x=2$，$y=\frac{1}{2}$，$m=\frac{1}{2}$，则$\log_{x}m=\log_{2}\frac{1}{2}=-1$，$\log_{m}y=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}=1$，

此时$\log_{x}m\cdot\log_{m}y=-1<0$，D 错误. 故选：AB.

7． 解：$\because f\left(x\right)\cos x<f'\left(x\right)\sin x\ \therefore f'\left(x\right)\sin x-f\left(x\right)\cos x>0$，

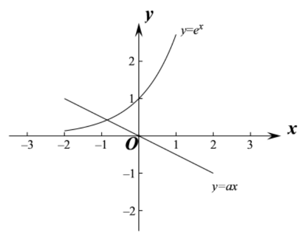
构造函数$g\left(x\right)=\frac{f\left(x\right)}{\sin x}$，则$g'\left(x\right)=\frac{f'\left(x\right)\sin x-f\left(x\right)\cos x}{sin^{2}x}$，当$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$g'\left(x\right)>0$，

$\therefore g\left(x\right)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$单调递增，$\therefore$不等式$f\left(x\right)>2\sqrt{2}\sin x$，即$\frac{f\left(x\right)}{\sin x}>2\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\frac{\pi}{6}}$

即$g\left(x\right)>g\left(\frac{\pi}{6}\right)$，$\therefore\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{2}$故不等式的解集为$\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$.故答案为：$\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$.

8．$\because$ $f(x)=e^{x}-\frac{1}{2}ax^{2}$是$R$上的增函数，

$\therefore f'\left(x\right)=e^{x}-ax\geq 0$在$R$上恒成立，即$e^{x}\geq ax$，令




$y_1=e^x,y_2=ax$，当$a=0$时，$e^{x}\geq 0$恒成立，符合题意；当$a<0$

时，如图，不符合题意；

当$a>0$时，令$g\left(x\right)=e^{x}-ax$，则$g'\left(x\right)=e^{x}-a$，令$g'\left(x\right)=0$，解得$x=\ln a$，

则当$x\in\left(-\infty,\ln a\right)$，$g'\left(x\right)<0$，$g\left(x\right)$单调递减，当$x\in\left(\ln a,+\infty\right)$，$g'\left(x\right)>0$，$g\left(x\right)$单调递增，$\therefore g\left(x\right)_{\min}=g\left(\ln a\right)=e^{\ln a}-a\ln a\geq 0$，解得$0<a\leq e$，

综上，$a$的取值范围是$[0,e]$.

9．因为$x_1\in[0,1]$，所以$\pi x_1\in[0,\pi]$，因此$f(x_1)$在$x_1\in[0,1]$时，单调递减，

所以有$f(1)\leq f(x_1)\leq f(0)\Rightarrow -1\leq f(x_1)\leq 1$.当$a>0$时，函数$g(x)=e^{ax}-a+\dfrac{1}{2}$是单调递增函数，当$x_2\in[0,1]$时，$g(0)\leq g\left(x_2\right)\leq g(1)$，即$\dfrac{3}{2}-a\leq g(x_2)\leq e^{a}-a+\dfrac{1}{2}$，

令$h(a)=e^{a}-a+\dfrac{1}{2}(a>0)\Rightarrow h^{'}(a)=e^{a}-1$，

因为$a>0$，所以$h^{'}(a)>0$，因此函数 $h(a)$单调递增，所以有$h(a)>h(0)=\dfrac{3}{2}$，

因为$\exists x_1$、$x_2\in[0,1]$，使得$f\left(x_1\right)=g\left(x_2\right)$，所以有：$\begin{cases}\dfrac{3}{2}-a\leq 1\\ e^{a}-a+\dfrac{1}{2}\geq 1\end{cases}$ (1)，

因此不等式组(1)的解集为：$a\geq\dfrac{1}{2}$，而$a>0$，所以$a\geq\dfrac{1}{2}$；

当$a<0$时，函数$g(x)=e^{ax}-a+\dfrac{1}{2}$是单调递减函数，当$x_2\in[0,1]$时，

$g(1)\leq g\left(x_2\right)\leq g(0)$，即$e^{a}-a+\dfrac{1}{2}\leq g(x_2)\leq\dfrac{3}{2}-a$，而 3/2- a>1,

因为$\exists x_1$、$x_2\in[0,1]$，使得$f\left(x_1\right)=g\left(x_2\right)$，所以有$\begin{cases}e^{a}-a+\dfrac{1}{2}\leq 1\\ \dfrac{3}{2}-a\geq 1\end{cases}$ (2)：,

令$h(a)=e^{a}-a+\dfrac{1}{2}(a<0)\Rightarrow h^{'}(a)=e^{a}-1$，

因为$a<0$，所以$h^{'}(a)<0$，因此函数 $h(a)$单调递减，所以有$h(a)>h(0)=\dfrac{3}{2}$，

因此不等式组 (2)的解集为空集，综上所述：$a\geq\dfrac{1}{2}$.故答案为：$\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$

10．

$4x-\ln\left(3x\right)\leq ae^{x}-\ln a\Leftrightarrow 3x-\ln\left(3x\right)\leq ae^{x}-\ln a-x\Leftrightarrow 3x-\ln\left(3x\right)\leq ae^{x}-\ln\left(ae^{x}\right)$

令 $f\left(x\right)=x-\ln x$，$f'\left(x\right)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$，$\therefore f\left(x\right)$在$\left[1,+\infty\right)$上单调递增.$\because a>1$，

$x\in[\frac{1}{3},+\infty)$，$\therefore 3x,ae^{x}\in\left[1,+\infty\right)$，$\therefore\Leftrightarrow 3x\le ae^{x}\Leftrightarrow\frac{3x}{e^{x}}\le a$ 恒成立，

令 $g\left(x\right)=\frac{3x}{e^{x}}$，只需 $a\ge g(x)_{\max}$，$g'\left(x\right)=\frac{3-3x}{e^{x}}$，$\therefore x\in[\frac{1}{3},1),g'(x)>0,g(x)$ 单调递增，

$\therefore x\in(1,+\infty),g'(x)<0,g(x)$ 单调递减，$\therefore x=1$ 时，$g\left(x\right)$的最大值为$\frac{3}{e}$，

$\therefore a\ge\frac{3}{e}$，$\therefore a$ 的最小值为$\frac{3}{e}$.故答案为：$\frac{3}{e}$

11．解：（1）$\because f'\left(x\right)=1+\ln x$，$g\left(x\right)=\frac{1+\ln x}{x}$，$\therefore g'\left(x\right)=-\frac{\ln x}{x^{2}}$，

显然，当 $x\in\left(0,1\right)$时，$g'\left(x\right)>0$，当 $x\in\left(1,+\infty\right)$时，$g'\left(x\right)<0$，

$\therefore$ 函数 $g\left(x\right)$的单调递增区间为$\left(0,1\right)$，单调递减区间为$\left(1,+\infty\right)$，故 $x=1$ 是函数的极大值点；

（2）对于$\frac{m}{2}\left(x_{2}^{2}-x_{1}^{2}\right)>f\left(x_{2}\right)-f\left(x_{1}\right)$可化为$f\left(x_{1}\right)-\frac{m}{2}x_{1}^{2}>f\left(x_{2}\right)-\frac{m}{2}x_{2}^{2}$，

令 $m\left(x\right)=f\left(x\right)-\frac{m}{2}x^{2}$，$\because x_{2}>x_{1}>0$，$\therefore m\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上单调递减，

$\therefore m'\left(x\right)=1+\ln x-mx\le 0$ 在$\left(0,+\infty\right)$上恒成立，即 $m\ge\frac{1+\ln x}{x}$，

又 $g\left(x\right)=\frac{1+\ln x}{x}$ 在$\left(0,1\right)$上单调递增，在$\left(1,+\infty\right)$上单调递减，$\therefore g\left(x\right)$的最大值为$g\left(1\right)=1$，

$\therefore m\ge 1$，即实数 $m$ 的取值范围为$\left[1,+\infty\right)$.

12．解：（1）函数 $f(x)$ 的定义域为$\left(0,+\infty\right)$，$f'(x)=3x^{2}-\frac{a}{x}=\frac{3x^{3}-a}{x}\left(x>0\right)$，

①若 $a\le 0$ 时，$f'(x)>0$，此时函数在$\left(0,+\infty\right)$上单调递增；

②若 $a>0$ 时，令 $f'(x)>0$，可得 $x>\sqrt[3]{\frac{a}{3}}$，$f'(x)<0$，可得 $0<x<\sqrt[3]{\frac{a}{3}}$，

所以函数在$\left(0,\sqrt[3]{\frac{a}{3}}\right)$上单调递减，在$\left(\sqrt[3]{\frac{a}{3}},+\infty\right)$上单调递增.

（2）$g'(x)=f'(x)-18=3x^{2}-\frac{a}{x}-18=\frac{3x^{3}-18x-a}{x}$，

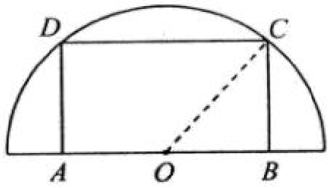
若函数 $g(x)=f(x)-18x$ 在区间 $[1,e]$ 上是增函数，又当 $x\in[1,e]$ 时，$a\le 3x^3-18x$ 恒成立，

令 $h(x)=3x^3-18x$，$x\in[1,e]$，则 $h'(x)=9x^2-18=9\left(x^2-2\right)$，

令 $h'(x)>0$，有 $\sqrt{2}<x<e$，可得函数 $h(x)$ 的增区间为 $\left(\sqrt{2},e\right)$，减区间为 $\left(1,\sqrt{2}\right)$，

所以 $h(x)_{\min}=h(\sqrt{2})=6\sqrt{2}-18\sqrt{2}=-12\sqrt{2}$，有 $a\le -12\sqrt{2}$，

故实数 $a$ 的取值范围为 $\left(-\infty,-12\sqrt{2}\right]$.




13. （1）连结 $OC$.
设 $BC=x$，矩形 $ABCD$ 的面积为 $S$.
则 $AB=2\sqrt{900-x^2}$，其中 $0<x<30$.

所以 $S=2x\sqrt{900-x^2}=2\sqrt{x^2\left(900-x^2\right)}\le x^2+\left(900-x^2\right)=900$.

当且仅当 $x^2=900-x^2$，即 $x=15\sqrt{2}$ 时，$S$ 取最大值为 $900\text{cm}^2$.

所以，取 $BC$ 为 $15\sqrt{2}\text{cm}$ 时，矩形 $ABCD$ 的面积最大，最大值为 $900\text{cm}^2$.

（2）设圆柱底面半径为 $r$，高为 $x$，体积为 $V$.由 $AB=2\sqrt{900-x^2}=2\pi r$，

得 $r=\dfrac{\sqrt{900-x^2}}{\pi}$，所以 $V=\pi r^2 h=\dfrac{1}{\pi}\left(900x-x^3\right)$，其中 $0<x<30$.

由 $V'=\dfrac{1}{\pi}\left(900-3x^2\right)=0$，得 $x=10\sqrt{3}$，

因此 $V=\dfrac{1}{\pi}\left(900x-x^3\right)$ 在 $\left(0,10\sqrt{3}\right)$ 上是增函数，在 $\left(10\sqrt{3},30\right)$ 上是减函数.

所以当 $x=10\sqrt{3}$ 时，$V$ 的最大值为 $\dfrac{6000\sqrt{3}}{\pi}$.

取 $BC$ 为 $10\sqrt{3}\text{cm}$ 时，做出的圆柱形罐子体积最大，最大值为 $\dfrac{6000\sqrt{3}}{\pi}\text{cm}^3$.

14.（1）由 $b=c$，可得 $f(x)=(x-a)(x-b)^2=x^3-(a+2b)x^2+b(2a+b)x-ab^2$，

则 $f'(x)=3(x-b)\left(x-\dfrac{2a+b}{3}\right)$. 令 $f'(x)=0$，得 $\mathrm{x}=\mathrm{b}$ 或 $x=\dfrac{2a+b}{3}$.

因为 $a,b,\dfrac{2a+b}{3}$，都在集合 $\{-3,1,3\}$ 中，且 $a^{1}\quad b$，所以 $\dfrac{2a+b}{3}=1$，$a=3$，$b=-3$.

此时 $f(x)=(x-3)(x+3)^2$，$f'(x)=3(x+3)(x-1)$.

令 $f'(x)=0$，得 $x=-3$ 或 $x=1$，

列表如下：

| $x$ | $(-\infty,-3)$ | $-3$ | $(-3,1)$ | $1$ | $(1,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | | 极大值 | | 极小值 | |

所以 $f(x)$ 的极小值为 $f(1)=(1-3)(1+3)^2=-32$．

（2）因为 $a=0$，$c=1$，所以 $f(x)=x(x-b)(x-1)=x^3-(b+1)x^2+bx$，

可得 $f'(x)=3x^2-2(b+1)x+b$．因为 $0<b\le 1$，所以 $\Delta=4(b+1)^2-12b=(2b-1)^2+3>0$，

则 $f'(x)$ 有 2 个不同的零点，设为 $x_1$，$x_2\left(x_1<x_2\right)$．

由 $f'(x)=0$，解得 $x_1=\dfrac{b+1-\sqrt{b^2-b+1}}{3}$，$x_2=\dfrac{b+1+\sqrt{b^2-b+1}}{3}$．

列表如下：

| $x$ | $(-\infty,x_1)$ | $x_1$ | $\left(x_1,x_2\right)$ | $x_2$ | $\left(x_2,+\infty\right)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | | 极大值 | | 极小值 | |

所以 $f(x)$ 的极大值 $M=f\left(x_1\right)$．

$$M=f\left(x_1\right)=x_1^3-(b+1)x_1^2+bx_1=\left(3x_1^2-2(b+1)x_1+b\right)\left(\frac{x_1}{3}-\frac{b+1}{9}\right)-\frac{2\left(b^2-b+1\right)}{9}x_1+\frac{b(b+1)}{9}$$

$$=\frac{-2\left(b^2-b+1\right)(b+1)}{27}+\frac{b(b+1)}{9}+\frac{2}{27}\left(\sqrt{b^2-b+1}\right)^3$$

$$=\frac{b(b+1)}{27}-\frac{2(b-1)^2(b+1)}{27}+\frac{2}{27}(\sqrt{b(b-1)+1})^3\le\frac{b(b+1)}{27}+\frac{2}{27}\le\frac{4}{27}.$$

因此 $M\le\dfrac{4}{27}$．

# 2020～2021 学年高二寒假数学作业八、 导数 2 答案

1．D 由 $f\left(x\right)=\dfrac{1}{2}x^2-f\left(0\right)x+f'\left(1\right)e^{x-1}$，得 $f\left(0\right)=f'\left(1\right)e^{-1}$，

$f'\left(x\right)=x-f\left(0\right)+f'\left(1\right)e^{x-1}$，

$\therefore f'\left(1\right)=1-f'\left(1\right)e^{-1}+f'\left(1\right)$，$\therefore f'\left(1\right)=e$，

则 $f\left(0\right)=e\cdot e^{-1}=1$，则 $f\left(x\right)=\dfrac{1}{2}x^2-x+e^x$，

$\therefore g\left(x\right)=f\left(x\right)-\dfrac{1}{2}x^2+x=e^x$，

方程 $g\left(x\right)-ax=0$ 即 $e^x=ax$，

$x=0$ 时方程显然无解；

$x<0$ 时，对于任意 $a<0$，函数 $y=e^x$ 与 $y=ax$ 有一个交点，满足题意；

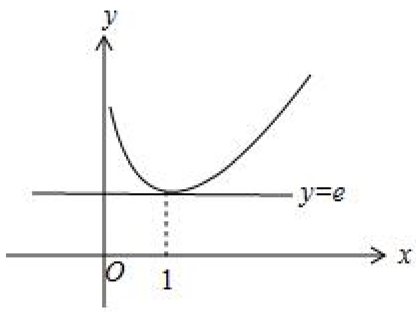
$x>0$ 时，则 $a=\dfrac{e^x}{x}$，令 $h\left(x\right)=\dfrac{e^x}{x}$，则 $h'\left(x\right)=\dfrac{xe^x-e^x}{x^2}=\dfrac{e^x\left(x-1\right)}{x^2}$．

当 $x\in(0,1)$ 时，$h'\left(x\right)<0$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'\left(x\right)>0$，

$\therefore h\left(x\right)$ 在 $\left(0,1\right)$ 上单调递减，在 $\left(1,+\infty\right)$ 上单调递增，

又当 $x\to 0^+$ 时，$h\left(x\right)\to+\infty$，当 $x\to+\infty$ 时，$h\left(x\right)\to+\infty$．

$\therefore h\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 时的图象如图：




由图可知，$a=e$ 时，方程 $a=\dfrac{e^x}{x}$ 有一根，

综上，$a$ 的取值范围为 $\left(-\infty,0\right)\cup\left\{e\right\}$，故选 D．

2．D$\because \left(x\ln x\right)f'(x)\left\langle f\left(x\right),x\right\rangle 0$，

$\therefore \ln x f'(x) < \frac{f(x)}{x}$，$\therefore \ln x f'(x) - \frac{f(x)}{x} < 0$，

即$\left(\frac{f(x)}{\ln x}\right)' < 0$，设$g(x) = \frac{f(x)}{\ln x}$，

则$g(x)$为$(0,+\infty)$上的减函数，

$\therefore g(e) = \frac{f(e)}{\ln e} = f(e)$，$g(\sqrt{e}) = \frac{f(\sqrt{e})}{\ln\sqrt{e}} = 2f(\sqrt{e})$，

$g\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{f\left(\frac{1}{e}\right)}{\ln\frac{1}{e}} = -f\left(\frac{1}{e}\right)$，$g\left(\frac{1}{e^2}\right) = \frac{f\left(\frac{1}{e^2}\right)}{\ln\frac{1}{e^2}} = -2f\left(\frac{1}{e^2}\right)$，

$\because g(x)$为$(0,+\infty)$上的减函数，

$\therefore g(e) < g\left(\frac{1}{e}\right)$，即$f(e) < -f\left(\frac{1}{e}\right)$，故$A$错误；

$g(\sqrt{e}) < g\left(\frac{1}{e}\right)$，即$2f(\sqrt{e}) < -f\left(\frac{1}{e}\right)$，故$B$错误；

$g\left(\frac{1}{e}\right) > g\left(\frac{1}{e^2}\right)$，即$f\left(\frac{1}{e^2}\right) < 2f\left(\frac{1}{e}\right)$,$C$错；

$g(\sqrt{e}) < g(e)$，即$2f(\sqrt{e}) > f(e)$，$D$正确，故选 D.

3．A 当$x=0$时，不等式成立，$a \in R$

当$x \neq 0$时　关于$x$的不等式$x^3 - ax^2+1 \geq 0$在$x \in [-1,0) \cup (0,1]$恒成立，

即$a \leq x + \frac{1}{x^2}$在$x \in [-1,0) \cup (0,1]$恒成立，

令$g(x) = x + \frac{1}{x^2}$，$g'(x) = 1 - \frac{2}{x^3} = 0 \Rightarrow x = 2^{\frac{1}{3}}$，

当$x \in [-1,0)$时，$g'(x) > 0$，当$x \in (0,1]$时，$g'(x) < 0$.

所以$g(x)$在$[-1,0)$递增，在$(0,1]$递减

当$x \in [-1,0)$时，$g_{\min}(x) = g(-1) = 0$

当 $x\in(0,1]$ 时，$g_{\min}(x)=g(1)=2$

所以 $g(x)$ 的最小值为 0.所以 $a\le 0$

4．B 设切点为 $(x_0,y_0)$,则 $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{a}{x^2}$,又直线 $y=-x+3$ 与曲线 $y=f(x)$ 相切故

$\begin{cases}\frac{1}{x_0}-\frac{a}{{x_0}^2}=-1\\ y_0=-x_0+3\\ y_0=\ln x_0+\frac{a}{x_0}\end{cases}$ ,消去 $y_0$ 有 $-x_0+3=\ln x_0+\frac{a}{x_0}\Rightarrow\frac{a}{x_0}=-x_0+3-\ln x_0$ ,代入第一个式子有

$1-(-x_0+3-\ln x_0)=-x_0\Rightarrow 2x_0+\ln x_0-2=0$ .易得 $x_0=1$ .代入 $\frac{1}{x_0}-\frac{a}{{x_0}^2}=-1$ 有 $a=2$ .

5．AD 设 $g(x)=\frac{f(x)}{x}=\ln x$ ，函数单调递增，所以 $g(x_2)>g(x_1)$ ，所以 $\frac{f(x_2)}{x_2}>\frac{f(x_1)}{x_1}$ ，

即有 $x_1f(x_2)>x_2f(x_1)$ ，故 A 正确；

设 $h(x)=f(x)+x$ ，则 $h'(x)=lnx+2$ 不是恒大于零，所以 $x_1+f(x_1)<x_2+f(x_2)$ 不恒成立，故 B 错误；

$f(x)=xlnx$ ， $f'(x)=lnx+1$ 不是恒小于零，所以 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$ 不恒成立，故 C 错误；当 $x>\frac{1}{e}$ 时， $lnx>-1$ ，故 $f'(x)=lnx+1>0$ ，函数 $f(x)=x\ln x,x>\frac{1}{e}$ 单调递增，

故 $(x_2-x_1)\left[f(x_2)-f(x_1)\right]=x_1f(x_1)+x_2f(x_2)-x_2f(x_1)-x_1f(x_2)>0$ ，

即 $x_1f(x_1)+x_2f(x_2)>x_2f(x_1)+x_1f(x_2)$ ，又 $\ln x_2=\frac{f(x_2)}{x_2}>\frac{f(x_1)}{x_1}=\ln x_1$ ，所以

$x_1f(x_2)>x_2f(x_1)$ ，

所以 $x_2f(x_1)+x_1f(x_2)>2x_2f(x_1)$ ，所以有 $x_1f(x_1)+x_2f(x_2)>2x_2f(x_1)$ ，故 D 正确.

6．BD 依题意得 $f'(x)=\frac{m}{x}-2\ln x=\frac{m-2x\ln x}{x}(x>0)$ ,

若函数 $f(x)$ 具有“凹凸趋向性”，则 $m=2x\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上有 2 个不同的实数根，

令 $g(x)=2x\ln x$ ，则 $g'(x)=2(1+\ln x)$ ,

令 $g'(x)>0$，解得 $x>\frac{1}{e}$；令 $g'(x)<0$，解得 $0<x<\frac{1}{e}$，

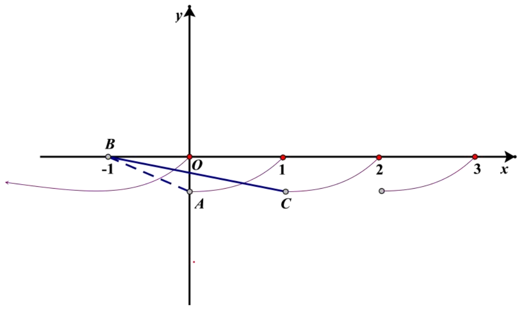
$\therefore g(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ 上单调递增，

故 $g(x)$ 的最小值是 $g\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{2}{e}$，当 $x\to 0$ 时，$g(x)\to 0$，故 $-\frac{2}{\mathrm{e}}<m<0$，

7．$\left(-\frac{1}{e},-\frac{1}{2e}\right]$ 当 $x<0$ 时，$f'(x)=(x+1)e^{x}$，

当 $x<-1$ 时，$f'(x)<0$，当 $-1<x<0$ 时，$f'(x)>0$，

又当 $x>0$ 时，$f(x)=f(x-1)$，所以根据周期为 1 可得 $x>0$ 时 $f(x)$ 的图像，故 $f(x)$ 的图像如图所示：




函数 $g(x)=k(x+1)$ 的图像恒过 $(-1,0)$，因为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图像有两个不同的交点，

故 $k_{AB}<k\le k_{BC}$，又 $A\left(0,-\frac{1}{e}\right)$，故 $k_{AB}=-\frac{1}{e}$，$k_{AB}=-\frac{1}{2e}$，

所以 $-\frac{1}{e}<k\le-\frac{1}{2e}$，填 $\left(-\frac{1}{e},-\frac{1}{2e}\right]$.

8．$-\frac{27}{4}$ 设切点坐标为 $\left(\mathrm{t},2\mathrm{t}^{3}+\mathrm{at}+\mathrm{a}\right),\because \mathrm{y}'=6\mathrm{x}^{2}+\mathrm{a},\therefore 6\mathrm{t}^{2}+\mathrm{a}=\frac{2\mathrm{t}^{3}+\mathrm{at}+\mathrm{a}}{\mathrm{t}+1}$, 即

$4\mathrm{t}^{3}+6\mathrm{t}^{2}=0$, 解得 t=0 或 t=$-\frac{3}{2}$, $\because |\mathrm{MA}|=|\mathrm{MB}|\therefore$ 两切线的斜率互为相反数，即

$2\mathrm{a}+6\times\left(-\frac{3}{2}\right)^{2}=0$, 解得 $\mathrm{a}=-\frac{27}{4}$

9．$[\sqrt{2},+\infty)$

$f(x)=\cos 2x+a\sin x-a\cos x$，则 $f'(x)=-2\sin 2x+a\cos x+a\sin x$，

因为函数 $f(x)$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上单调增，可得 $f'(x)\ge 0$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上恒成立，

即 $a(\sin x+\cos x)\ge 2\sin 2x$，令 $\sin x+\cos x=t$，则 $\sin 2x=t^2-1$，$t\in[1,\sqrt{2}]$，

所以 $a\ge\dfrac{2t^2-2}{t}=2(t-\dfrac{1}{t})$，因为 $t-\dfrac{1}{t}$ 在 $t\in[1,\sqrt{2}]$ 上是增函数，

所以其最大值为 $a\ge 2(\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2})=\sqrt{2}$，

所以实数 $\alpha$ 的取值范围是 $[\sqrt{2},+\infty)$.

10．$-\dfrac{1}{2}<a<0$

$f(x)=xlnx+ax^2(x>0)$，$f'(x)=lnx+1+2ax$．令 $g(x)=lnx+1+2ax$，由于函数函数

$f\left(x\right)=ax^2+x\ln x$ 有两个极值点点 $\Leftrightarrow g(x)=0$ 在区间（0，$+\infty$）上有两个实数

根．$g'(x)=\dfrac{1}{x}+2a=\dfrac{1+2ax}{x}$，

当 $a\ge 0$ 时，$g'(x)>0$，则函数 $g(x)$ 在区间（0，$+\infty$）单调递增，因此 $g(x)=0$ 在区间（0，$+\infty$）上不可能有两个实数根，应舍去.

当 $a<0$ 时，令 $g'(x)=0$，解得 $x=-\dfrac{1}{2a}$，

令 $g'(x)>0$，解得 $0<x<-\dfrac{1}{2a}$，此时函数 $g(x)$ 单调递增；

令 $g'(x)<0$，解得 $x>-\dfrac{1}{2a}$，此时函数 $g(x)$ 单调递减.

$\therefore$ 当 $x=-\dfrac{1}{2a}$ 时，函数 $g(x)$ 取得极大值．要使 $g(x)=0$ 在区间（0，$+\infty$）上有两个实数根，

则 $g(-\dfrac{1}{2a})=ln\left(-\dfrac{1}{2a}\right)>0$,，解得 $-\dfrac{1}{2}<a<0$.

$\therefore$ 实数 $a$ 的取值范围是（$-\dfrac{1}{2}<a<0$.

11．（1）$f\left(\theta\right)=tR^2\left(\sqrt{3}\sin 2\theta-2\cos\theta+\sqrt{3}\right),\theta\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right)$（2）$\theta=\dfrac{\pi}{3}$，最大值为

$\left(1+2\sqrt{3}\right)tR^2$（1）由图可知在矩形 $ABCD$ 中，$BC=R\sin\theta,OB=R\cos\theta$，

所以，$S_{ABCD}=2OB\times BC=2R^2\sin\theta\cos\theta=R^2\sin 2\theta$.

在矩形 $BEFG$ 中，$EF=R\sin\frac{\pi}{6}=\frac{R}{2},BE=R\cos\frac{\pi}{6}-R\cos\theta=R\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos\theta\right)$，

所以，$2S_{BEFG}=2EF\times BE=R^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos\theta\right)$

因为游泳池每平方米的造价为 $\sqrt{3}t$，休息区每平方米造价为 $2t(t>0)$

所以，$f(\theta)=S_{ABCD}\times\sqrt{3}t+2S_{BEFG}\times 2t=tR^2\left(\sqrt{3}\sin 2\theta-2\cos\theta+\sqrt{3}\right),\theta\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$

（2）由（1）得，$f'(\theta)=tR^2\left(2\sqrt{3}\cos 2\theta+2\sin\theta\right)=2tR^2\left(\sqrt{3}-2\sqrt{3}\sin^2\theta+\sin\theta\right)$

$=-2tR^2\left(2\sin\theta-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}\sin\theta+1\right)$，

因为 $\theta\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\sin\theta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$.

令 $f'(\theta)=0$，解得 $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$.因为 $\theta\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\theta=\frac{\pi}{3}$.

列表如下：

| $\theta$ | $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$ |
|---|---|---|---|
| $f'(\theta)$ | + | 0 | − |
| $f(\theta)$ | | 极大值 | |

所以，当 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 时，总造价 $f(\theta)$ 取得极大值 $\left(1+2\sqrt{3}\right)tR^2$，即最大值为 $\left(1+2\sqrt{3}\right)tR^2$

12．解：（1）$\because g(x)=\frac{x^2}{2a}-3x+a\ln x-\frac{x^2}{2a}=a\ln x-3x$，

$\therefore g'(x)=\frac{a}{x}-3=-\frac{3x-a}{x}(x>0)$，

当 $a\le 0$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递减，

当 $a>0$ 时，令 $g'(x)>0$，解得：$0<x<\frac{a}{3}$，

令 $g'(x)<0$，解得：$x>\frac{a}{3}$，

故 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{a}{3}\right)$ 递增，在 $\left(\frac{a}{3},+\infty\right)$ 递减；

综上：当 $a\le 0$ 时，$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递减，

当 $a>0$ 时，$g(x)$ 在 $\left(0,\frac{a}{3}\right)$ 递增，在 $\left(\frac{a}{3},+\infty\right)$ 递减；

（2）$f'(x)=\frac{x^2-3ax+a^2}{ax}$，

设 $h(x)=x^2-3ax+a^2\ (a>0)$ 的两个零点为 $x_1,x_2\ (x_1<x_2)$，

则 $x_1=\frac{3-\sqrt{5}}{2}a$，$x_2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}a$，

$\because 0<a<\frac{3+\sqrt{5}}{2}$，$\therefore 0<x_1<1$，

当 $0<x_2\le 1$，即 $0<\frac{3+\sqrt{5}}{2}a\le 1$ 时，$0<a\le\frac{3-\sqrt{5}}{2}$，

此时 $h(x)\ge 0$，即 $f'(x)\ge 0$ 对 $x\in(1,+\infty)$ 恒成立，

从而 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调增加，

$\therefore f(x)>f(1)=\frac{1}{2a}-3=\frac{1-6a}{2a}$，

当 $\frac{3-\sqrt{5}}{2}<a<\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ 时，

令 $f'(x)<0$，得 $1<x<x_2$，令 $f'(x)>0$，得 $x>x_2$，

$\therefore f(x)$ 在 $x=x_2$ 处取得极小值，

$\therefore f(x_2)<f(1)=\frac{1}{2a}-3$，

这与 $f(x)>\frac{1}{2a}-3$ 对 $x\in(1,+\infty)$ 恒成立矛盾，则 $x_1>1$ 不合题意，

综上，$a$ 的取值范围为 $\left(0,\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right]$.

13．（Ⅰ）当$a=2$时，$f\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-2x+\sin x-1$，则$f'\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-2+\cos x$，可得

$f''\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-\sin x$.当$x\in\left(0,+\infty\right)$时，$\mathrm{e}^{x}>1$，$\therefore f''\left(x\right)>1-\sin x\geq 0$，$\therefore f'\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$

单调递增，$\therefore f'\left(x\right)>f'\left(0\right)=0$，$\therefore f\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$单调递增.

当$x\in\left(-\infty,0\right]$时，可得$\mathrm{e}^{x}\leq 1$，$\therefore f'\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-2+\cos x\leq -1+\cos x\leq 0$，$\therefore f\left(x\right)$在

$\left(-\infty,0\right]$单调递减；综上，$f\left(x\right)$在$\left(-\infty,0\right]$单调递减，在$\left(0,+\infty\right)$单调递增.

（Ⅱ）当$x=0$时，$f\left(0\right)=\mathrm{e}^{0}-0-1+\sin 0=0$，$\therefore x=0$是$f\left(x\right)$的一个零点，

由$f'\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-a+\cos x$，可得$f''\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-\sin x$.

因为$1\leq a<2$，

①当$x\in\left(0,+\infty\right)$时，$\mathrm{e}^{x}>1$，$\therefore f''\left(x\right)>1-\sin x\geq 0$，$\therefore f'\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$单调递增，

$\therefore f'\left(x\right)>f'\left(0\right)=2-a>0$，

$\therefore f\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$单调递增，$\therefore f\left(x\right)>f\left(0\right)=0$，此时$f\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$无零点.

②当$x\in\left(-\infty,-\pi\right]$时，$-ax\geq\pi$，有$f\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-ax+\sin x-1\geq\mathrm{e}^{x}+\pi+\sin x-1>0$，此时$f\left(x\right)$在$\left(-\infty,-\pi\right]$无零点.

③当$x\in\left(-\pi,0\right)$时，$\sin x<0$，$f''\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-\sin x>0$，$\therefore f'\left(x\right)$在$\left(-\pi,0\right)$单调递增，又

$f'\left(0\right)=2-a>0$，$f'\left(\pi\right)=\mathrm{e}^{-\pi}-1-a<0$，

由零点存在性定理知，存在唯一$x_0\in\left(-\pi,0\right)$，使得$f'\left(x_0\right)=0$.

当$x\in\left(-\pi,x_0\right)$时，$f'\left(x\right)<0$，$f\left(x\right)$在$\left(-\pi,x_0\right)$单调递减；当$x\in\left(x_0,0\right)$时，$f'\left(x\right)>0$，

$f\left(x\right)$在$\left(x_0,0\right)$单调递增；

又$f\left(-\pi\right)=\mathrm{e}^{-\pi}+a\pi-1>0$，$f\left(x_0\right)<f\left(0\right)=0$，所以$f\left(x\right)$在$\left(-\pi,0\right)$上有 1 个零点.

综上，当$1\leq a<2$时，$f\left(x\right)$有 2 个零点.

14．(1) 当$a=1$时，由$f(x)=-x^3+3x+b$，得$f'(x)=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$，

令$f'(x)=0$，得$x=-1$或$x=1$.

当$x$变化时，$f^{'}(x)$，$f(x)$在$x\in\left[-3,2\right)$的变化情况如下表：

| $x$ | $-3$ | $(-3,-1)$ | $-1$ | $(-1,1)$ | 1 | $(1,2)$ | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f^{'}(x)$ | | − | 0 | + | 0 | − | |
| $f(x)$ | $18+b$ | 单调递减 | 极小值 $-2+b$ | 单调递增 | 极大值 $2+b$ | 单调递减 | $-2+b$ |

所以$f(x)$在$x\in\left[-3,2\right)$上的最大值为$f(-3)=18+b=10$，得$b=-8$.

（2）由$g(x)+b\geq f(x)$，得$(x-\ln x)a\leq x^2-2x$，

因为$x\in\left[1,\mathrm{e}\right]$，$\ln x\leq 1\leq x$且等号不能同时取得，

所以$\ln x<x$，即$x-\ln x>0$，

所以$a\leq\dfrac{x^2-2x}{x-\ln x}$恒成立，即$a\leq\left(\dfrac{x^2-2x}{x-\ln x}\right)_{\min}$.

令$h(x)=\dfrac{x^2-2x}{x-\ln x}$，$x\in\left[1,\mathrm{e}\right]$，则$h'(x)=\dfrac{(x-1)(x+2-2\ln x)}{(x-\ln x)^2}$，

当$x\in\left[1,\mathrm{e}\right]$时，$\ln x\leq 1$，$x+2-2\ln x>0$，从而$h^{'}(x)\geq 0$，

所以$h(x)$在$\left[1,\mathrm{e}\right]$上为增函数，所以$h(x)_{\min}=h(1)=-1$，

所以$a\leq -1$.

## 2020～2021学年高二寒假数学作业十、 综合训练（答案）

1．D【详解】满足$\{x\,|\,\ln(x+2)<0\}$为真，即$\{x\,|\,\ln(x+2)<0\}=\left\{x\middle|-2<x<-1\right\}$，

$x\in\left(-\dfrac{3}{2},-1\right)$是其充分不必要条件，$x\in(-\infty,-2)$是其既不充分也不必要条件，

$x\in(-2,-1)$是其充要条件，$x\in(-\infty,2)$是其必要不充分条件.故选：D

2．C【详解】因为抛物线的焦点为$(\dfrac{p}{2},0)$，双曲线的渐近线为$x\pm y=0$，

所以抛物线的焦点到双曲线的渐近线的距离为$d=\dfrac{\left|\dfrac{p}{2}\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

又因为 $p>0$，所以 $p=2$，故选：C.

3．C【详解】设等差数列首项为 $a_1$，公差为 $d$，由题意可知 $4a_1+33d=0$，$a_1>0$

$S_n=na_1+\frac{n(n-1)d}{2}=\frac{a_1}{33}(35n-2n^2)$，二次函数的对称轴为 $n=\frac{35}{4}=8.75$，开口向下，

又因为 $n\in N^*$，所以当 n=9 时，$S_n$ 取最大值．选 C.

4．C【详解】设 $g\left(x\right)=\frac{f\left(x\right)}{x}$（$x\neq 0$），则 $g'\left(x\right)=\frac{xf'\left(x\right)-f\left(x\right)}{x^2}$，

$\because$ 当 $x\in\left(0,+\infty\right)$ 时，$xf'\left(x\right)-f\left(x\right)>0$，$\therefore g'\left(x\right)>0$，即 $g\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增，

又 $f\left(x\right)$ 是 *R* 上的偶函数，$\therefore g\left(-x\right)=\frac{f\left(-x\right)}{-x}=-\frac{f\left(x\right)}{x}=-g\left(x\right)$，

即 $g\left(x\right)$ 是 $\left(-\infty,0\right)\cup\left(0,+\infty\right)$ 上的奇函数，$\therefore g\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,0\right)$ 上单调递增，

$\because f\left(3\right)=0$，$\therefore g\left(-3\right)=-g\left(3\right)=-\frac{f\left(3\right)}{3}=0$.

而不等式 $\frac{f\left(x\right)}{x}>0$ 等价于 $g\left(x\right)>0$，$\therefore -3<x<0$ 或 $x>3$.故选：C.

5．BC【详解】在平面直角坐标系 *xOy* 中，*A*（﹣2，0），*B*（4，0），点 *P* 满足 $\frac{|PA|}{|PB|}=\frac{1}{2}$，

设 *P*（*x*，*y*），则 $\frac{\sqrt{\left(x+2\right)^2+y^2}}{\sqrt{\left(x-4\right)^2+y^2}}=\frac{1}{2}$，化简可得（*x*+4）²+*y*²＝16，故 *A* 错误；

假设在 *x* 轴上存在异于 *A*，*B* 的两定点 *D*，*E*，使得 $\frac{|PD|}{|PE|}=\frac{1}{2}$，

可设 *D*（*m*，0），*E*（*n*，0），可得 $\sqrt{(x-n)^2+y^2}=2\sqrt{(x-m)^2+y^2}$，

化简可得 $3x^2+3y^2-(8m-2n)x+4m^2-n^2=0$，

由 *P* 的轨迹方程为 $x^2+y^2+8x=0$，可得 $8m-2n=-24$，$4m^2-n^2=0$，解得 $m=-6$，$n=-12$ 或 $m=-2$，$n=4$（舍去），即存在 *D*（﹣6，0），*E*（﹣12，0），故 *B* 正确；

当 *A*，*B*，*P* 不共线时，由 $\frac{|OA|}{|OB|}=\frac{1}{2}=\frac{|PA|}{|PB|}$，可得射线 *PO* 是∠*APB* 的平分线，故 *C* 正确；

若在 $C$ 上存在点 $M$，使得$|MO|=2|MA|$，可设 $M(x,y)$，即有 $\sqrt{x^2+y^2}=2\sqrt{(x+2)^2+y^2}$，化简可得 $x^2+y^2+\frac{16}{3}x+\frac{16}{3}=0$，联立 $x^2+y^2+8x=0$，可得方程组无解，故不存在 $M$，故 $D$ 错误．故选：$BC$.

**6．** BD【详解】$A$ 错，如图，连接 $B_1D_1$，$A_1C_1$，由正方体可得 $A_1C_1\perp B_1D_1$，且 $BB_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，则 $BB_1\perp A_1C_1$，$BB_1\cap B_1D_1=B_1$ 所以 $A_1C_1\perp$ 平面 $BD_1B_1$，故 $A_1C_1\perp BD_1$；

同理，连接 $AD_1$，易证得 $A_1D\perp BD_1$，则 $BD_1\perp$ 平面 $A_1C_1D$，

若直线 $BD_1\perp$ 平面 $A_1B_1CD$，则平面 $A_1B_1CD//$ 平面 $A_1C_1D$

这与平面 $A_1B_1CD$ 与平面 $A_1C_1D$ 相交矛盾，所以 $A$ 错；

$B$ 正确，$V_{M-A_1C_1D}=V_{C_1-A_1MD}$，因为点 $M$ 在线段 $B_1C$ 上运动，所以 $S_{\triangle A_1DM}=\frac{1}{2}A_1D\cdot AB$，面积为定值，且 $C_1$ 到平面 $A_1MD_1$ 的距离即为 $C_1$ 到平面 $A_1B_1CD$ 的距离，也为定值，故体积为定值；

$C$ 错，由 $A_1D//B_1C$，当点 $M$ 与线段 $B_1C$ 的端点重合时，$AM$ 与 $A_1D$ 所成角为 60°；

设 $B_1C$ 的中点为 $M_0$,当点 $M$ 由 $B_1C$ 的端点向中点 $M_0$ 运动时，$\angle AMM_0$ 为异面直线 $AM$ 与 $A_1D$ 所成角。在 $ACB_1$ 中, $AC=AB_1$，所以 $AM_0\perp B_1C$

在 $AMM_0$ 中，$|AM_0|$ 不变，$|MM_0|$ 逐渐变小.所以 $\tan\angle AMM_0=\frac{|AM_0|}{|MM_0|}$ 逐渐增大，

当点 $M$ 与 $M_0$ 重合时，异面直线 $AM$ 与 $A_1D$ 所成角为 $90°$

所以异面直线 $AM$ 与 $A_1D$ 所成角的取值范围是 $\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$,所以 C 不正确.

$D$ 正确，以 $D$ 为原点，$DA$ 为 $x$ 轴，$DC$ 为 $y$ 轴，$DD_1$ 为 $z$ 轴，建立空间直角坐标系，

设正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中棱长为 1， 则 $D(0,0,0),A_1(1,0,1),C_1(0,1,1)$，$M(a,1,a)$

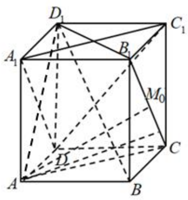
$\overrightarrow{DA_1}=(1,0,1),\overrightarrow{DC_1}=(0,1,1)$，$\overrightarrow{C_1M}=(a,0,a-1)$

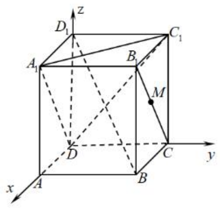
由前面可得，$BD_1\perp$ 平面 $A_1C_1D$，所以 $\overrightarrow{BD_1}=(-1,-1,1)$ 为平面 $A_1C_1D$ 的一个法向量

∴直线 $C_1M$ 与平面 $A_1C_1D$ 所成角的正弦值为 $\theta$ ：

$$\sin\theta=\cos\left\langle\overrightarrow{C_1M}\cdot\overrightarrow{BD_1}\right\rangle=\frac{\left|\overrightarrow{C_1M}\cdot\overrightarrow{BD_1}\right|}{\left|\overrightarrow{C_1M}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BD_1}\right|}=\frac{1}{\sqrt{3}\times\sqrt{a^2+(a-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}\times\sqrt{2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}}$$

当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$\sin\theta$ 有最大值 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 所以直线 $C_1M$ 与平面 $A_1C_1D$ 所成角的正弦值的最大值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$，故 $D$ 正确．故选：$BD$．




7．$\frac{3}{4}$【详解】因 $a_3=3$,故当 $a_1<a_2$ 时,$2a_2=3$,$a_2=\frac{3}{2}$,即 $a_1<\frac{3}{2}$ 时,$a_2=\frac{3}{2}$,即 $2a_1=\frac{3}{2}$,所以 $a_1=\frac{3}{4}$;当 $a_1>a_2$ 时,$a_2+2=3$,$a_2=1$,即 $a_1>1$ 时,$a_1+2=1$ 可得 $a_1=-1<1$,不成立,所以 $a_1=\frac{3}{4}$,应填 $\frac{3}{4}$.

8．-2【详解】由题意得，y′=$\frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2}=\frac{-2}{(x-1)^2}$，∵在点（3，2）处的切线与直线 ax+y+3=0 垂直，∴ $\frac{-2}{(3-1)^2}=\frac{1}{a}$，解得 a=－2，故答案为：-2.

9．$\frac{3}{2}$　　$\frac{\sqrt{10}}{2}$

【详解】因为复数 $z$ 满足 $z(1+\mathrm{i})=-2+\mathrm{i}$，所以 $z=\frac{-2+i}{1+i}=\frac{(-2+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$

所以 $z$ 的虚部是 $\frac{3}{2}$，$|z|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$，故答案为：①$\frac{3}{2}$；②$\frac{\sqrt{10}}{2}$

10．$x+y-2=0$ 或 $x-y+2=0$

【详解】圆 $C$ 的圆心为坐标原点 $C(0,0)$，半径长为 $r=4\sqrt{2}$，

由题意可知，圆心 $C$ 到直线 $l$ 的距离 $d$ 满足 $d+r=5\sqrt{2}$，$\therefore d=\sqrt{2}$．

①当直线$l$的斜率不存在时，则直线$l$的方程为$x=0$，此时圆心在直线$l$上，不合乎题意；

②当直线$l$的斜率存在时，可设直线$l$的方程为$y=kx+2$，即$kx-y+2=0$，

由点到直线的距离公式可得$d=\frac{2}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{2}$，解得$k=\pm1$.

综上所述，直线$l$的方程为$x+y-2=0$或$x-y+2=0$.

11.（1）$a_n=2^n-1\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$；（2）$\mathrm{T}_n=2-\frac{n+2}{2^n}$.

【详解】(1）∵$S_{n+1}=2S_n+n+1$，当$n\geq2$时，$S_n=2S_{n-1}+n$，∴$a_{n+1}=2a_n+1$，

∴$a_{n+1}+1=2\left(a_n+1\right)$，即$\frac{a_{n+1}+1}{a_n+1}=2$，又$S_2=2S_1+1$，$a_1=S_1=1$，∴$a_2=3$，∴$\frac{a_2+1}{a_1+1}=2$，

∴$a_n+1=2^n$，即$a_n=2^n-1\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$.

（2）∵$a_n=2^n-1$，∴$b_n=\frac{n}{\left(2^{n+1}-1\right)-\left(2^n-1\right)}=\frac{n}{2^{n+1}-2^n}=\frac{n}{2^n}$.

∴$T_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}$.$\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\cdots+\frac{n-1}{2^n}+\frac{n}{2^{n+1}}$.

∴$T_n=2(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}})=2-\frac{n+2}{2^n}$.

2.（1）$\frac{x^2}{4}+y^2=1$；离心率$e=\frac{\sqrt{3}}{2}$（2）直线 *PQ* 与 *x* 轴平行；证明见解析

【详解】(1)依题 *a*＝2，*b*＝1，所以椭圆 *C* 方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$，$c=\sqrt{3}$，离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

（2）解法一、因为 *M*，*N* 是 *y* 轴上不同的两点，两点的纵坐标互为倒数，

设 *M*，*N* 坐标为（0，*m*），（0，*n*），则$n=\frac{1}{m}$，*m*≠0，*n*≠0

由 *A*（2，0），*M*（0，*m*）得直线 *AM* 的方程为$y=\frac{m}{-2}x+m$，$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1\\ y=\frac{m}{-2}x+m\end{cases}$，

整理得（$m^2$+1）$y^2$ - 2*my*＝0 或（$m^2$+1）$x^2$ - 4$m^2x$+4$m^2$ - 4＝0，

得交点 *P* 的纵坐标为$y_P=\frac{2m}{m^2+1}$，同理$y_Q=\frac{2n}{n^2+1}=\frac{2\cdot\frac{1}{m}}{\left(\frac{1}{m}\right)^2+1}=\frac{2m}{m^2+1}$，

所以 $y_P=y_Q\neq0$，直线 $PQ$ 与 $x$ 轴平行.

解法二、设直线 $AM$ 的方程为 $x=ty+2$（$t\neq0$），直线 $AN$ 的方程为 $x=sy+2$（$s\neq0$），

令 $x=0$ 得 $ty_M=-2$，$M$ 坐标为 $\left(0,\frac{-2}{t}\right)$，同理 $N$ 坐标为 $\left(0,\frac{-2}{s}\right)$，

因为 $M$，$N$ 是 $y$ 轴上不同的两点，两点的纵坐标互为倒数，所以 $st=4$，$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1\\ x=ty+2\end{cases}$，

整理得（$t^2+4$）$y^2+4ty=0$ 或（$t^2+4$）$x^2-16x+16-4t^2=0$，

得交点 $P$ 的纵坐标为 $y_P=\frac{-4t}{t^2+4}$，同理得 $y_Q=\frac{-4s}{s^2+4}=\frac{-4\cdot\frac{4}{t}}{\left(\frac{4}{t}\right)^2+4}=\frac{-4t}{t^2+4}$，

所以 $y_P=y_Q\neq0$，直线 $PQ$ 与 $x$ 轴平行.

解法三、设直线 $AM$ 的方程为 $y=k_1$（$x-2$），$k_1\neq0$，直线 $AN$ 的方程为 $y=k_2$（$x-2$），$k_2\neq0$

令 $x=0$ 得 $M$ 坐标为（0，$-2k_1$），同理 $N$ 坐标为（0，$-2k_2$），

因为 $M$，$N$ 是 $y$ 轴上不同的两点，两点的纵坐标互为倒数，所以 $4k_1k_2=1$，

代入椭圆方程得$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1\\ y=k_1\left(x-2\right)\end{cases}$，$\left(4k_1^{\ 2}+1\right)x^2-16k_1^{\ 2}x+16k_1^{\ 2}-4=0$，

或$\left(4k_1^{\ 2}+1\right)y^2+4k_1y=02x_P=\frac{16k_1^{\ 2}-4}{4k_1^{\ 2}+1}$所以 $x_P=\frac{8k_1^{\ 2}-2}{4k_1^{\ 2}+1}$，

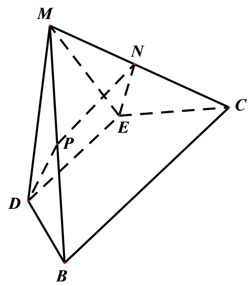
得交点 $P$ 的纵坐标为 $y_P=k_1\cdot\left(\frac{8k_1^{\ 2}-2}{4k_1^{\ 2}+1}-2\right)=\frac{-4k_1}{4k_1^{\ 2}+1}$，

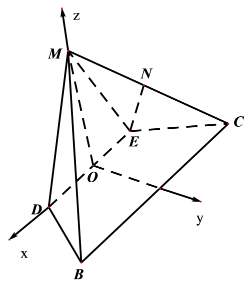
同理得 $y_Q=\frac{-4k_2}{4k_2^{\ 2}+1}=\frac{-4\frac{1}{4k_1}}{4(\frac{1}{4k_1})^2+1}=\frac{-4k_1}{4k_1^{\ 2}+1}$，所以 $y_P=y_Q\neq0$，直线 $PQ$ 与 $x$ 轴平行。

13．(1) $\lambda=\frac{1}{2}$;(2)-2.

**【详解】**(1)证明：取 $MB$ 的中点为 $P$，连接 $DP,PN$，因为 $MN=CN,MP=BP$，所以 $NP//BC$，又 $DE//BC$，所以 $NP//DE$，即 $N,E,D,P$ 四点共面，又 $EN//$ 面 $BMD$，$EN\subset$ 面 $NEDP$，平面 $NEDP\cap$ 面 $MBD=DP$，所以 $EN//PD$，即 $NEDP$ 为平行四边形，

所以 $NP//DE$，且 $NP=DE$，即 $DE=\frac{1}{2}BC$，即 $\lambda=\frac{1}{2}$.




(2)取 $DE$ 的中点 $O$，由平面 $MDE\perp$ 平面 $DECB$，且 $MO\perp DE$，所以 $MO\perp$ 平面 $DECB$，

如图建立空间直角坐标系，不妨设 $BC=2$，则 $M\left(0,0,\sqrt{3}\lambda\right),D\left(\lambda,0,0\right)$,

$B\left(1,\sqrt{3}\left(1-\lambda\right),0\right)$，所以 $\overrightarrow{MD}=\left(\lambda,0,-\sqrt{3}\lambda\right),\overrightarrow{DB}=\left(1-\lambda,\sqrt{3}\left(1-\lambda\right),0\right)$,

设平面 $BMD$ 的法向量为 $\vec{m}=\left(x,y,z\right)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{MD}\cdot\vec{m}=\lambda x-\sqrt{3}\lambda z=0\\ \overrightarrow{DB}\cdot\vec{m}=\left(1-\lambda\right)x+\sqrt{3}\left(1-\lambda\right)y=0\end{cases}$，

即 $\begin{cases}x=\sqrt{3}z\\ x=-\sqrt{3}y\end{cases}$，令 $x=\sqrt{3}$，即 $\vec{m}=\left(\sqrt{3},-1,1\right)$，又平面 $EMD$ 的法向量 $\vec{n}=\left(0,1,0\right)$,

所以 $\cos\left\langle\vec{m},\vec{n}\right\rangle=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{\left|\vec{m}\right|\left|\vec{n}\right|}=\frac{-1}{\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，即λ值的变化，二面角 B－MD－E 的正切值不变.

又 $\sin\left\langle\vec{m},\vec{n}\right\rangle=\sqrt{1-\cos^2\left\langle\vec{m},\vec{n}\right\rangle}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，则 $\tan\left\langle\vec{m},\vec{n}\right\rangle=\frac{\sin\left\langle\vec{m},\vec{n}\right\rangle}{\cos\left\langle\vec{m},\vec{n}\right\rangle}=-2$

因为二面角 B－MD－E 为钝二面角，所以二面角 B－MD－E 的正切值为 $-2$ .

7.（1）12.(2) $\frac{8}{27}$.【详解】（1）证明：令 $f'\left(x\right)=3x^2-6x=0$ 得 $x_1=0,x_2=2$.

（列表）∴ $f\left(x\right)$ 的极大值为 $f\left(0\right)=0$，极小值为 $f\left(2\right)=-4$.

$\because a<b,\therefore a=-4,b=0$ ,令 $f\left(x\right)=0,得x=0$ 或 3；

令 $f\left(x\right)=-4,得x^3-3x^2+4=x^3-2x^2-x^2+4=\left(x-2\right)^2\left(x+1\right)=0$

∴这四个交点分别为（0，0)，（3，0)，（-1，-4)，（2，-4）

∵3-0=2-（-1）=3∴这四个交点可以构成一个平行四边形，且其面积为 $3\times4=12$.

(2)解：因为 $g\left(x\right)=2x^3-3\left(a+1\right)x^2+6ax$

所以 $g'\left(x\right)=6x^2-6\left(a+1\right)x+6a=6\left(x-1\right)\left(x-a\right)$　令 $g'\left(x\right)=0$，得 $x=1$ 或 $a$，

① 当$1<a\le\dfrac{5}{3}$时，

$g(x)$在$(1,a)$上单调递减，在$(a,2)$上单调递增.

又因为$g(1)\le g(2)$，所以$q(a)=g(2)=4, p(a)=g(a)=-a^3+3a^2,$

所以$\varphi(a)=4-(-a^3+3a^2)=a^3-3a^2+4, \therefore \varphi'(a)=3a^2-6a+3=3a(a-2)<0,$

所以$\varphi(a)$在$\left(1,\dfrac{5}{3}\right]$上单调递减，所以当$a\in\left(1,\dfrac{5}{3}\right]$时，$\varphi(a)$的最小值为$\varphi\left(\dfrac{5}{3}\right)=\dfrac{8}{27}$.

② 当$\dfrac{5}{3}<a<2$时，

$g(x)$在$(1,a)$上单调递减，在$(a,2)$上单调递增.

又因为$g(1)>g(2)$，所以$q(a)=g(1)=3a-1, p(a)=g(a)=-a^3+3a^2,$

所以$\varphi(a)=3a-1-(-a^3+3a^2)=a^3-3a^2+3a-1, \therefore \varphi'(a)=3a^2-6a+3=3(a-1)^2$

所以$\varphi(a)$在$\left(\dfrac{5}{3},2\right)$上单调递增，所以当$a\in\left(\dfrac{5}{3},2\right)$时，$\varphi(a)>\varphi\left(\dfrac{5}{3}\right)=\dfrac{8}{27}$.

③当$a\ge2$时，

$g(x)$在$(1,2)$上单调递减；所以$q(a)=g(1)=3a-1, p(a)=g(2)=4,$

所以$\varphi(a)=3a-1-4=3a-5, \therefore \varphi'(a)=3a^2-6a+3=3(a-1)^2\ge0,$

所以$\varphi(a)$在$[2,+\infty)$上的最小值为$h(2)=1$.　　　综上，$\varphi(a)$的最小值为$\dfrac{8}{27}$.