

# 循環鐘擺

隊名:物理哇哇哇

# 大綱

- ◆ 問題與討論
- ◆ 研究方法
- ◆ 研究結果
- ◆ 誤差
- ◆ 結論

# 實驗介紹

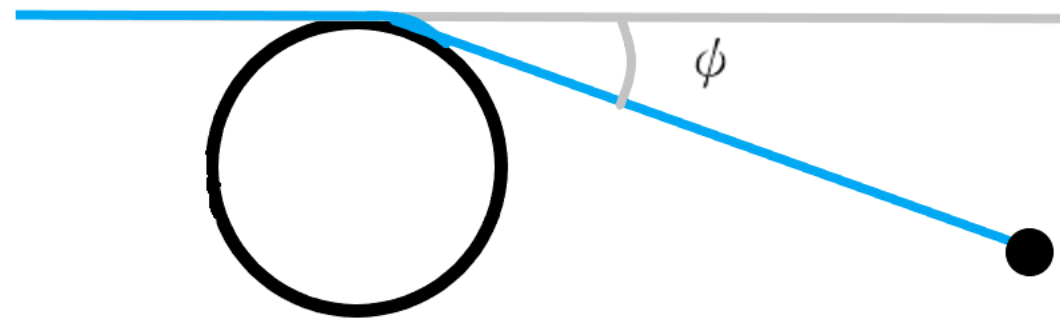
用繩子連接兩個負載在水平桿上，  
一個重負載和一個輕負載，通過  
拉下輕的負載來抬起重負載。釋  
放輕負載並且它會掃過桿子，保  
持重負載不會掉到地上



# 理論研究

## (一) 絞盤方程式(capstan equation)

如圖，令小球端的繩張力是 $T$ ，另一端的張力是 $t$ ，繩張力差為摩擦力，而摩擦力  $T \sin \phi = \mu T$ ， $\mu$  是動摩擦係數，當角度極小時  $\sin \phi = \phi$ ，又摩擦力為繩張力差，故可得  $dT = \mu T d\phi$ ，積分後可得  $\ln T - \ln t = \mu \phi$ ，化簡後可得  $T = te^{\mu \phi}$



## (二) 摩擦係數

假設大球端的張力是 $t$ , 小球端的張力是 $T$ ,  $a$ 為自由落下時的加速度可得聯立方程組

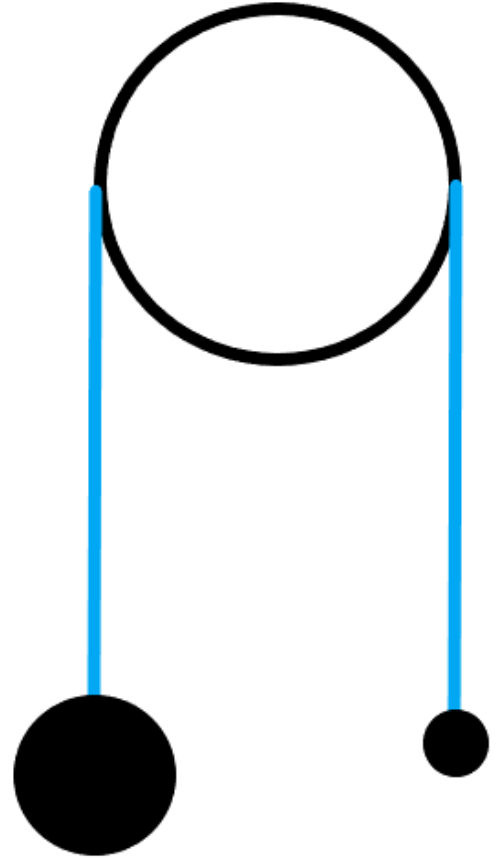
$$Mg - t = (M + m)a$$

$$T - mg = (M + m)a$$

$$t = Te^{\mu\pi}$$

可解得

$$\mu = \frac{\ln\left(\frac{Mg - Ma - ma}{mg + Ma + ma}\right)}{\pi}$$

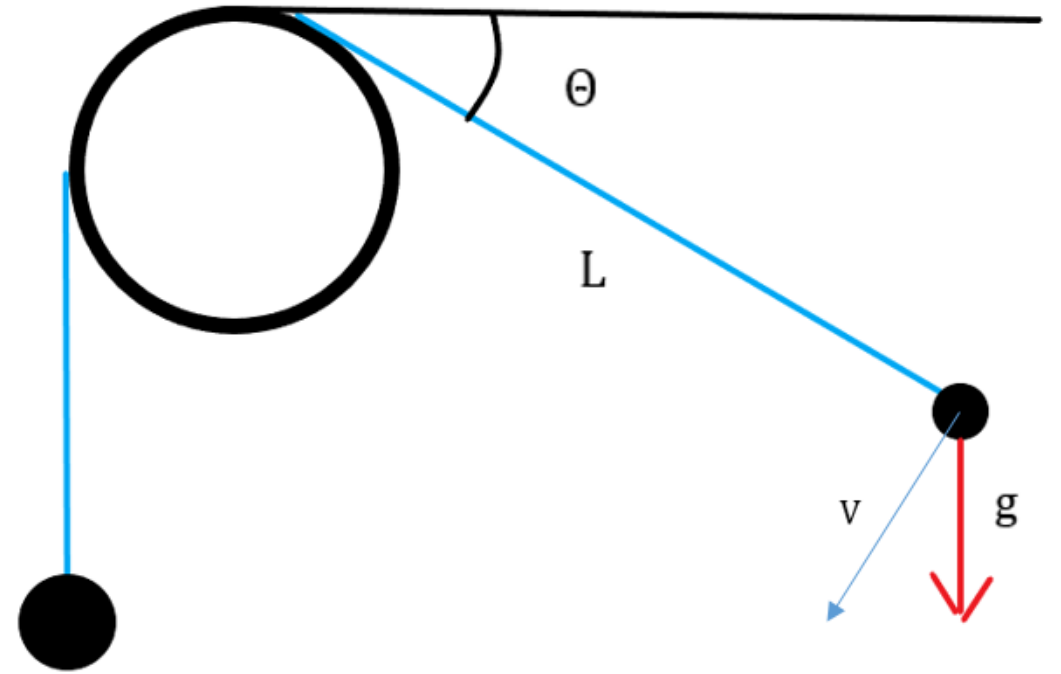


### (三) 分析

由分析力圖可知，輕物端的繩張力為向心力加上重力的分力，量值為

$$m \frac{v^2}{L} + mg \sin \theta$$

後面會以此來討論各種現象



# 實驗裝置





# 實驗方法

## （一）測量摩擦係數

測量兩邊不等重（重物100克，輕物80克）的物體垂直下落及上升時的加速度，藉以由公式推得摩擦係數

## （二）軌跡測量

將實驗影片匯入Tracker，追蹤描點可得





### (三) 質量比與重物落下距離

將輕重物端質量比設為5、6、7、8、9、10、11、12  
(輕物端為5個金屬墊片) 置於兩端進行實驗

### (四) 輕物端質量不同但相同質量比與重物落下距離

將輕物端置換成2、3、4、5個金屬墊片，質量比同實驗三進行實驗

## （五）初始水平繩長與重物落下距離

將固定長度為85cm的粗棉繩，每間隔5cm標記一次，以5cm為間隔改變水平繩長

## （六）釋放角度與重物落下距離

改變輕物釋放角度，以10 度為間隔進行實驗

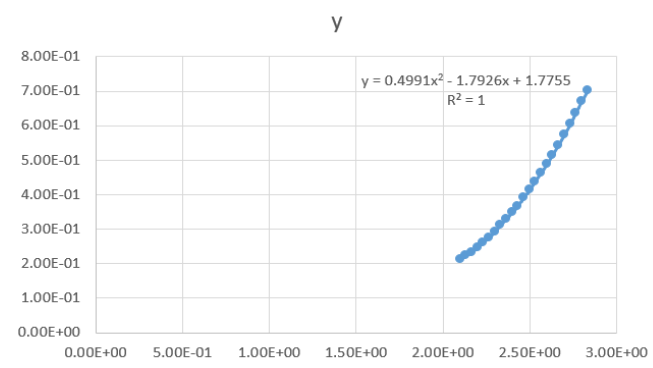
## （七）質量比與重物停止時與初始水平夾角

將各質量比的影片以Tracker分析後找到重物停止的點，並找出此時輕物與初始狀態所夾的角度

# 實驗結果

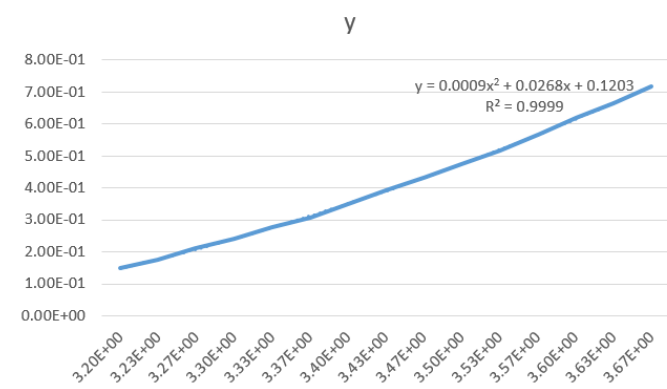
## 摩擦係數

### 粗棉線



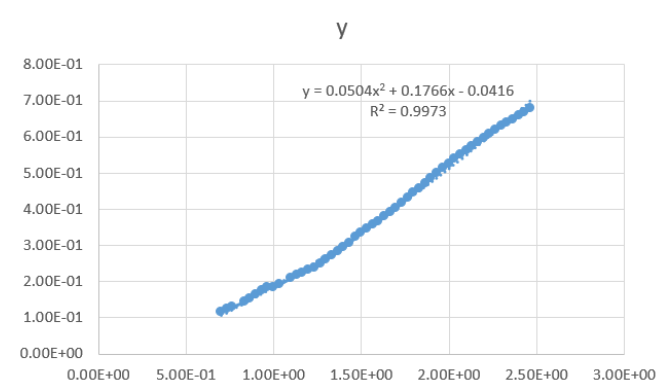
$a = 0.4991 m/s^2$   
 $\mu = 0.0185$

### 細棉線



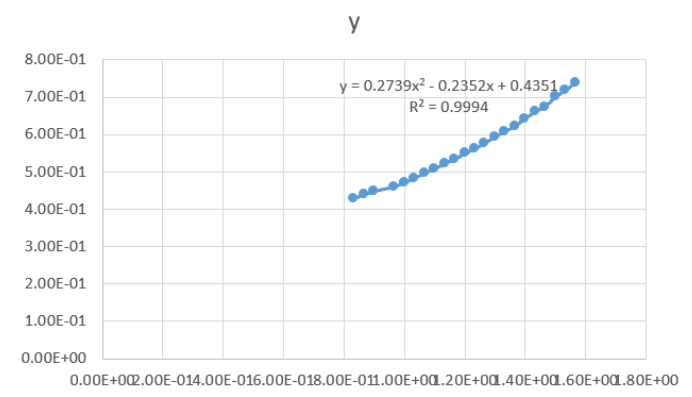
$a = 0.0009 m/s^2$   
 $\mu = 0.2228$

### 粗釣線



$a = 0.0504 m/s^2$   
 $\mu = 0.2023$

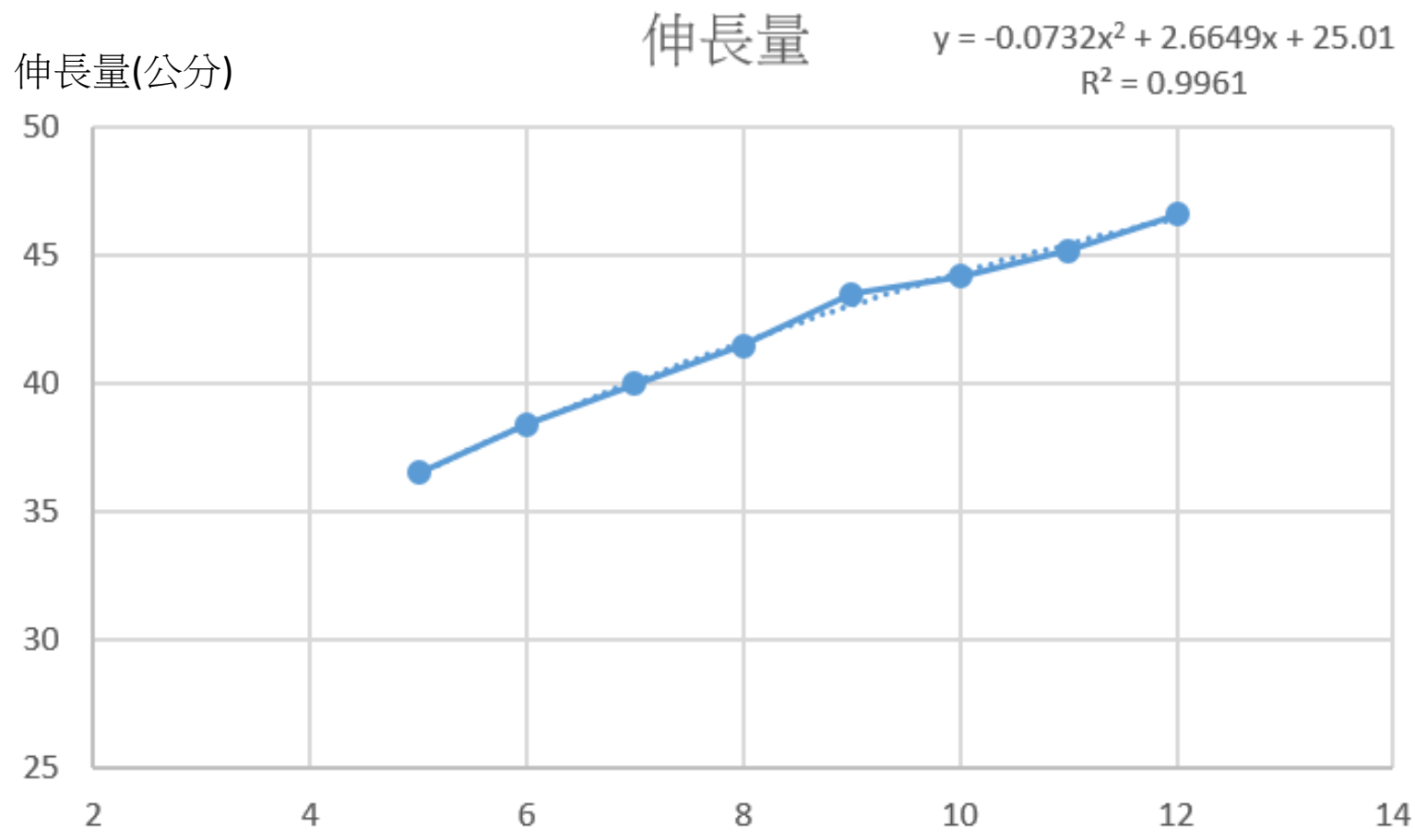
### 細釣線



$a = 0.2739 m/s^2$   
 $\mu = 0.0630$

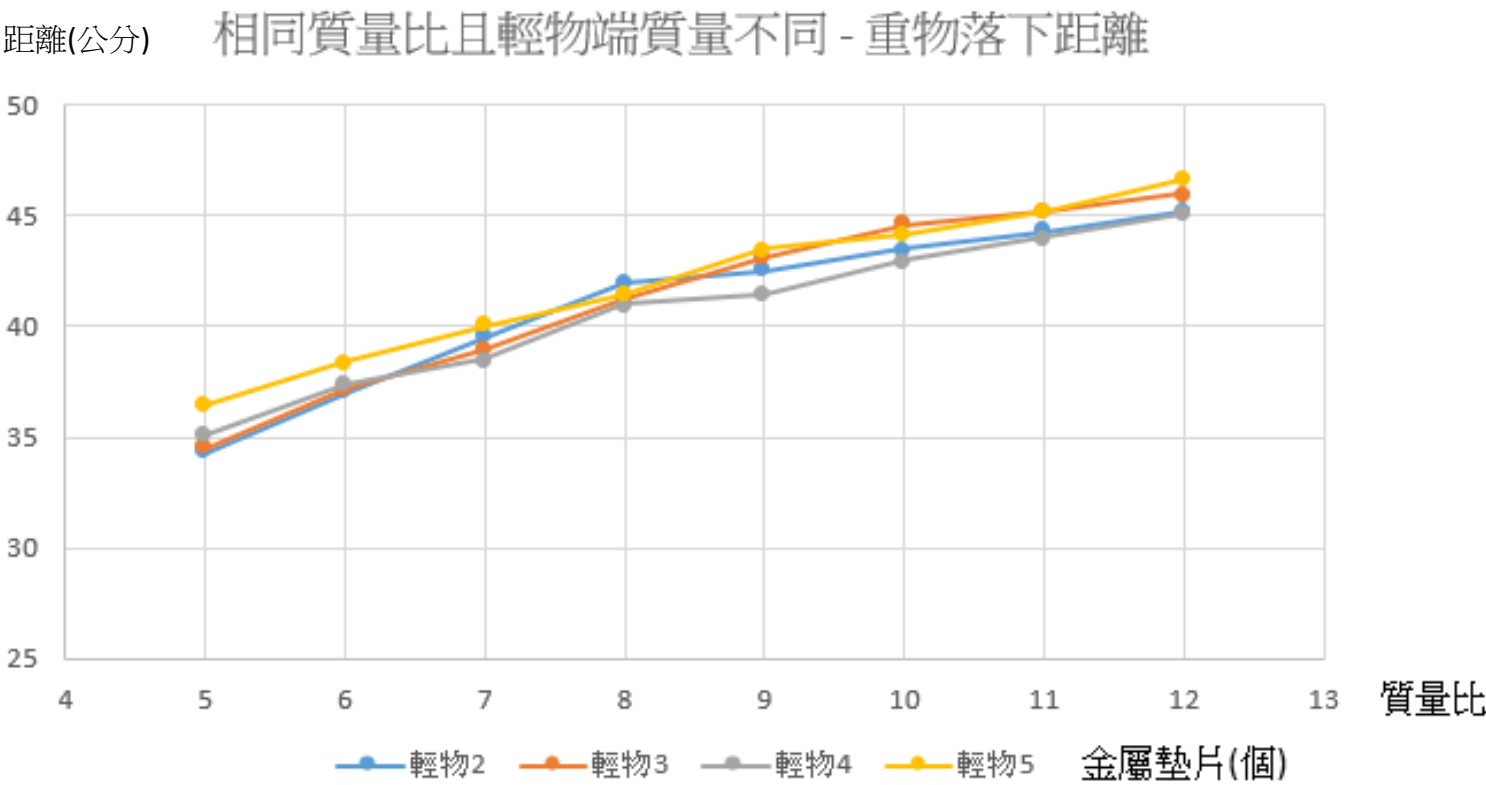
# 質量比－重物落下距離

固定輕物端為5金屬墊片



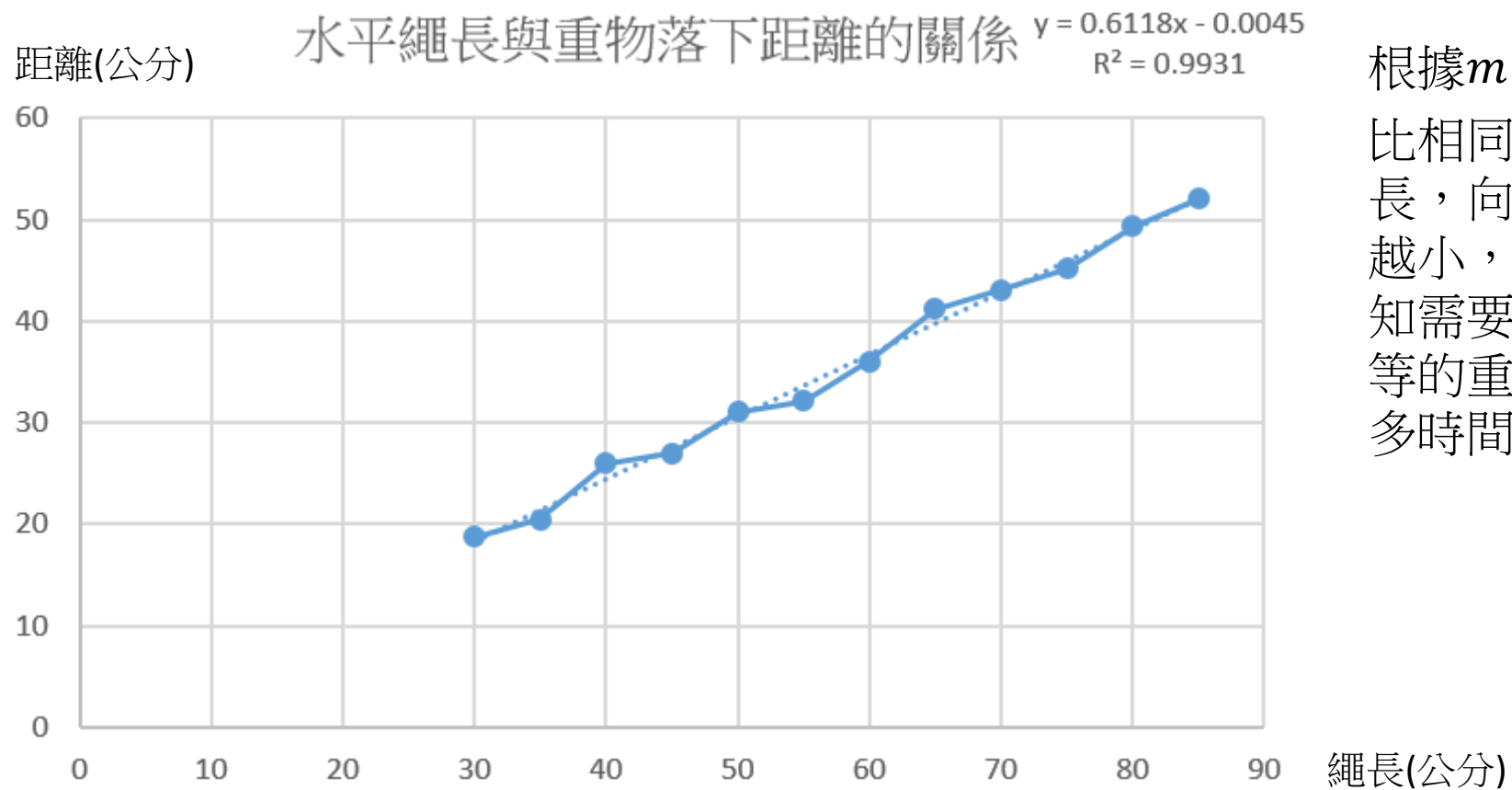
在初始水平繩長、輕物質量固定的情況下，根據絞盤方程式可知，重物質量越大，輕物端需旋轉的角度會變得更大，雖然因為重物質量越大而使得輕物在運動時L減小，但同時會造成重力對輕物的分力減少而使得速度相對減小，使我們無法正確推得輕物端張力是增加亦或是減少，但根據實驗結果，隨著質量比增加重物落下距離也增加，我們合理推測是由於在絞盤方程式中角度的影響大於張力的增減，最後造成質量比大，輕物旋轉角度大，重物落下距離長的情況。

# 相同質量比且輕物端質量不同－重物落下距離



由輕物端不同，但同質量比做出來的重物落下距離相差不大可推得主要影響落下距離的是質量比而不是整體的質量大小。另外我們仍由實驗結果可看出質量大的受繩子影響的誤差較小實驗結果較其他平滑。

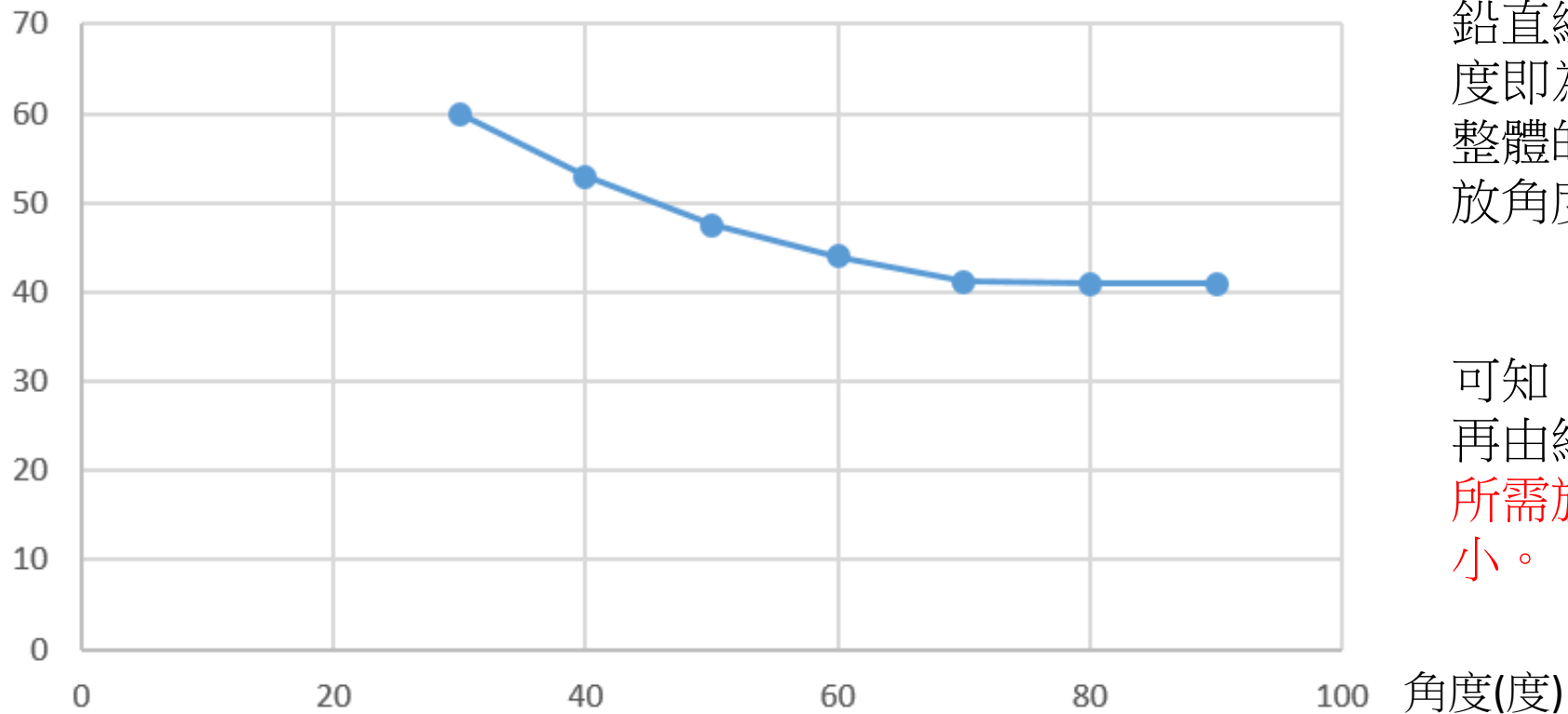
# 重物落下距離－初始水平繩長



根據  $m \frac{v^2}{L} + mg \sin \theta$ ，在質量比相同的情況下，水平繩長越長，向心力越小，輕物端張力越小，再根據絞盤方程式，得知需要轉**更多角度**才能平衡相等的重力，因此重物端能有更多時間下落**更大的距離**

# 初始釋放角度－落下距離

落下距離 (公分)



本實驗所取的釋放角度是繩子與鉛直線的夾角 $\varphi$ ，因此切線加速度即為 $g \cos \varphi$ ，在釋放角度大時整體的釋放後輕物的速度會比釋放角度小的速度來的大，根據

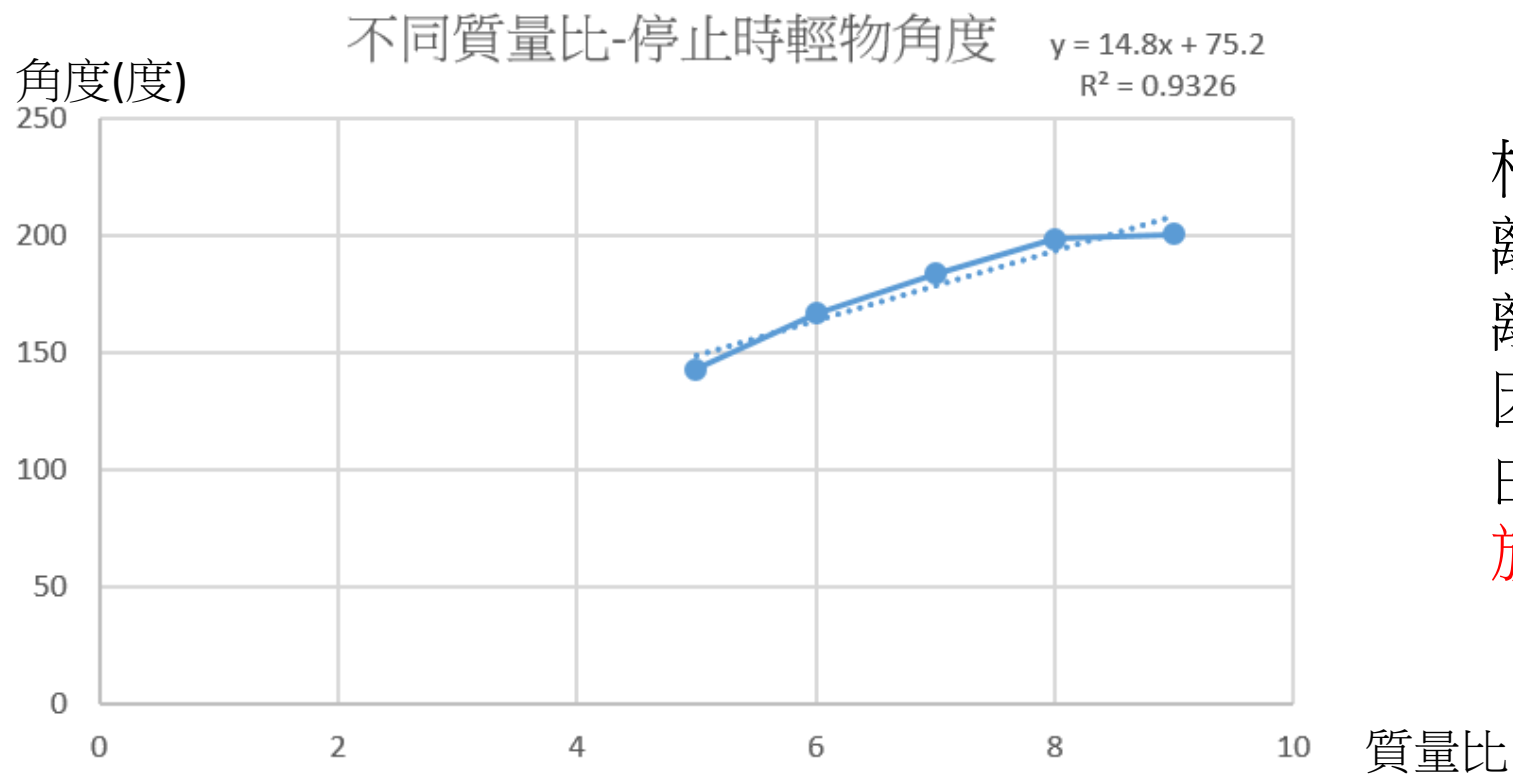
$$m \frac{v^2}{L} + mg \sin \theta$$

可知，釋放角度大的向心力較大再由絞盤方程式可知：

所需旋轉角度較小，落下距離較小。



# 質量比－重物停止時與初始水平夾角



根據前述質量比與重物落下距離的關係，可知道重物落下距離隨著質量比增加而增加的原因是輕物旋轉的角度增加，而由此圖可知真的如我們的推測：  
旋轉角度是會隨質量比增加的。

# 正常輕物軌跡

(公尺)

8.50E-01

7.50E-01

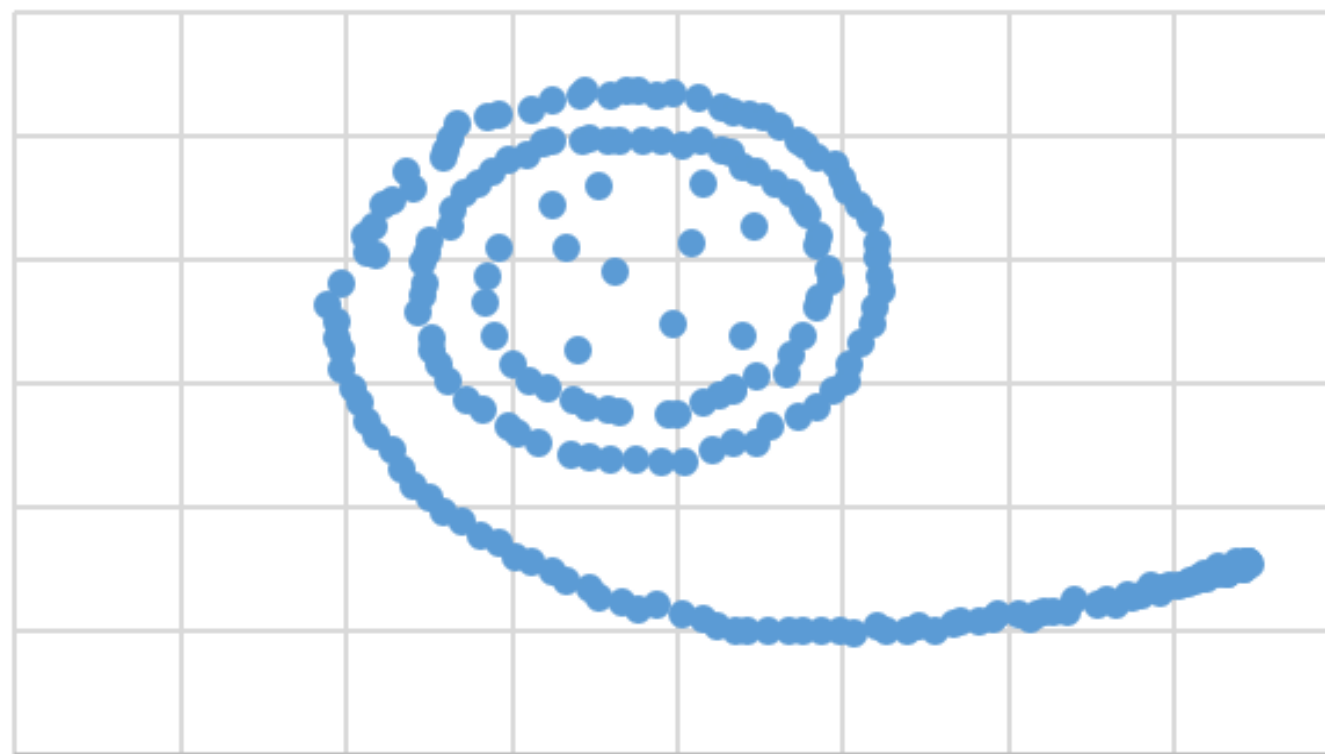
6.50E-01

5.50E-01

4.50E-01

3.50E-01

2.50E-01

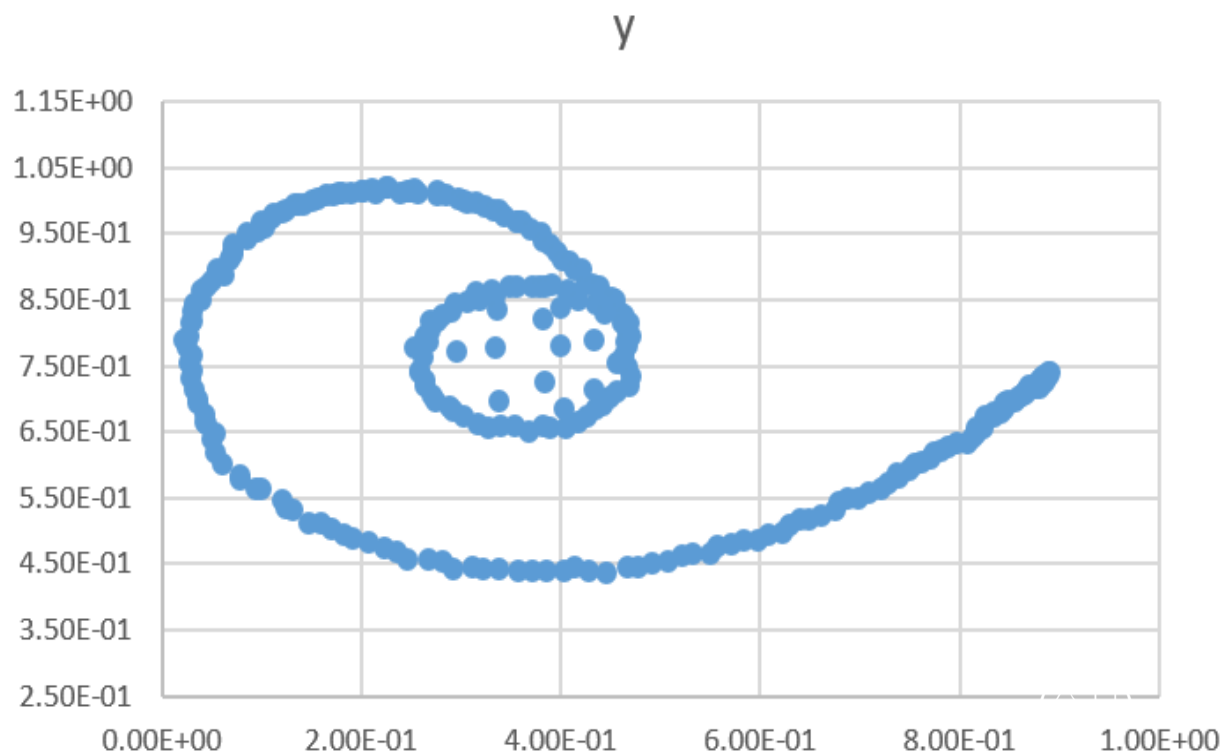


(公尺)

0.00E+00 1.00E-01 2.00E-01 3.00E-01 4.00E-01 5.00E-01 6.00E-01 7.00E-01 8.00E-01

# 特殊情形討論 - 重物下拉

此圖為重物下拉發生時之輕物軌跡，由圖中可以明顯看出輕物運動至一半被重物拉得偏離了原本軌道。

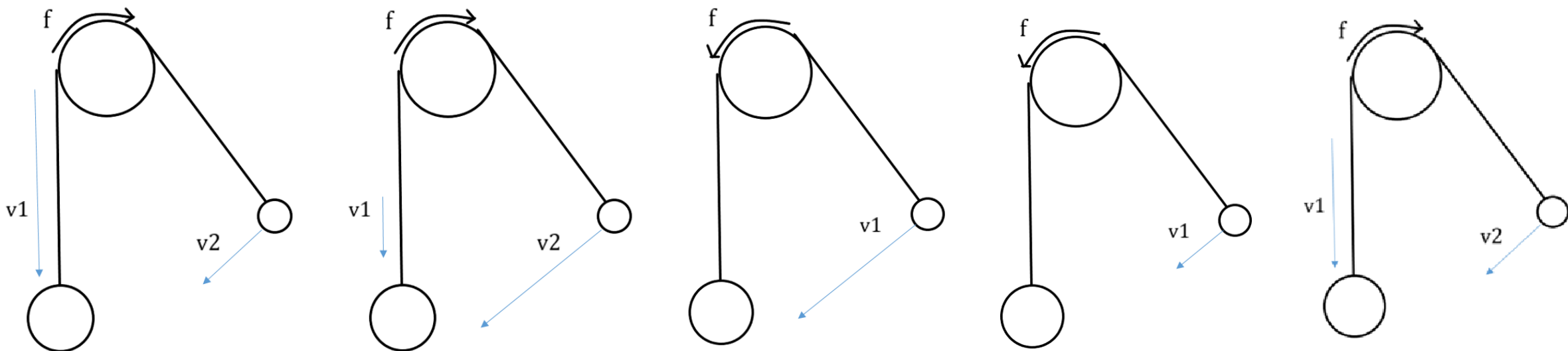


重物再次下拉是因為**摩擦力方向改變**而形成的特殊情況。摩擦力方向的改變使細繩兩端張力會互相變化。在運動初期，重物端張力較輕物端張力大，因此摩擦力方向和輕物端張力同向，最終造成重物的短暫靜止。而當重物短暫靜止時，摩擦力的方向改變了進而使輕物速率和輕物端張力減小，最後使重物脫離束縛再次下落。

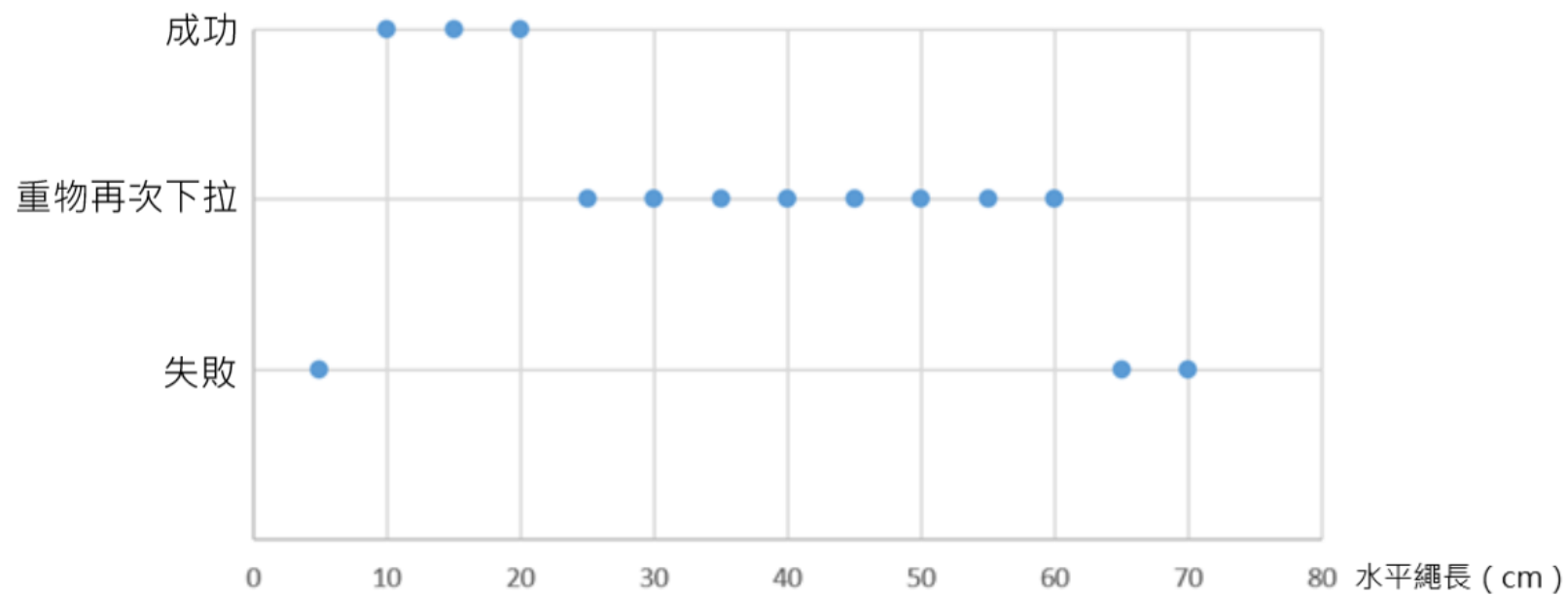
$T_{\text{重物}} > T_{\text{輕物}}$

$T_{\text{重物}} < T_{\text{輕物}}$

$T_{\text{重物}} > T_{\text{輕物}}$



此圖為**固定質量比**並改變水平繩長並觀察是否有重物下拉的情形



# 誤差討論

- (一) 本報告未討論空氣阻力對運動造成的影響
- (二) 繩子的粗細會對運動和受力造成影響，但本實驗基於操作方面的因素選擇粗棉繩
- (三) 釋放時的人為誤差
- (四) 使用**Tracker**分析影片的時間隔太大，對實驗結果的呈現造成影響

# 結論

- 1、質量比越大，輕物旋轉角度增大，重物落下距離越大
- 2、水平繩長越大，重物落下距離越大
- 3、釋放角度越大，重物落下距離越小
- 4、特定質量比下改變水平繩長會出現重物下拉的過渡情況