5-8.

(2) $\forall x, y \in G$. 若 $x \neq y$

则 $f(x) = a * x * a^{-1} \neq a * y * a^{-1} = f(y)$.

则 f 是入射.

$\forall y \in G$. ∵ $a \in G$. 则 $a^{-1} * y * a \in G$.
且 $\langle G, * \rangle$ 是群

令 $a^{-1} * y * a = x$

$\Rightarrow y = a * x * a^{-1} = f(x)$.

∴对 $\forall y \in G$. 均有一个 x 使 $y = f(x)$.

则 f 是 G 上的满射 $\Rightarrow$ f 是 G 上的双射

对 $\forall x, y \in G$. 有 $f(x * y) = a * (x * y) * a^{-1}$

$= (a * x * a^{-1}) * (a * x * a^{-1})$

$= f(x) * f(y)$

则 f 即为从 G 到 G 的一个自同构.

(3) 作 G 到 S 的映射 $f(p_1) = q_3$ $f(p_2) = q_2$ $f(p_3) = q_1$ $f(p_4) = q_4$

$f(p_1 \star p_1) = f(p_1) = q_3 = q_3 * q_3 = f(p_1) * f(p_1)$

$f(p_1 \star p_2) = f(p_2) = q_2 = q_3 * q_2 = f(p_1) * f(p_2)$

$f(p_1 \star p_3) = f(p_3) = q_1 = q_3 * q_1 = f(p_1) * f(p_3)$

$f(p_1 \star p_4) = f(q_4) = q_4 = q_4 * q_2 = f(p_1) * f(p_4)$

……

故 $\langle G, \star \rangle$ 和 $\langle S, * \rangle$ 同构