From cqquantum　如有错误欢迎指出

第一章 逻辑

表 6　逻辑等价式

等价式	名称
$p \wedge \mathbf{T} \equiv p$ $p \vee \mathbf{F} \equiv p$	恒等律
$p \vee \mathbf{T} \equiv \mathbf{T}$ $p \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$	支配律
$p \vee p \equiv p$ $p \wedge p \equiv p$	幂等律
$\neg(\neg p) \equiv p$	双重否定律
$p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$	交换律
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	结合律
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	分配律
$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	德·摩根律
$p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $p \wedge (p \vee q) \equiv p$	吸收律
$p \vee \neg p \equiv \mathbf{T}$ $p \wedge \neg p \equiv \mathbf{F}$	否定律

表 7　条件命题的逻辑等价式

$p \to q \equiv \neg p \vee q$

$p \to q \equiv \neg q \to \neg p$

$p \vee q \equiv \neg p \to q$

$p \wedge q \equiv \neg(p \to \neg q)$

$\neg(p \to q) \equiv p \wedge \neg q$

$(p \to q) \wedge (p \to r) \equiv p \to (q \wedge r)$

$(p \to r) \wedge (q \to r) \equiv (p \vee q) \to r$

$(p \to q) \vee (p \to r) \equiv p \to (q \vee r)$

$(p \to r) \vee (q \to r) \equiv (p \wedge q) \to r$

表 8　双条件命题的逻辑等价式

$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$

$p \leftrightarrow q \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q$

$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

$\neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q$

$\exists! x\, P(x)$表示存在唯一的一个x使$P(x)$ 为真。

唯一性量词不是必要的，因为存在一个唯一的 x， 使得$P(x)$为真可以表示为:

$$\exists x\, (P(x) \wedge \forall y\, (P(y) \to y = x))$$

$$\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$$

$$\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$$

量词辖域的扩张与收缩

- 量词辖域中如果有合取或析取项，且其中有一个是命题，则可将该命题移至量词辖域之外。如：
  - $(\forall x)(A(x) \vee B) \Leftrightarrow (\forall x)A(x) \vee B$
  - $(\forall x)(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow (\forall x)A(x) \wedge B$
  - $(\exists x)(A(x) \vee B) \Leftrightarrow (\exists x)A(x) \vee B$
  - $(\exists x)(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow (\exists x)A(x) \wedge B$
  - $(\forall x)A(x) \rightarrow B \Leftrightarrow (\exists x)(A(x) \rightarrow B)$
  - $(\exists x)A(x) \rightarrow B \Leftrightarrow (\forall x)(A(x) \rightarrow B)$
  - $B \rightarrow (\forall x)A(x) \Leftrightarrow (\forall x)(B \rightarrow A(x))$
  - $B \rightarrow (\exists x)A(x) \Leftrightarrow (\exists x)(B \rightarrow A(x))$

$$p \oplus q \equiv (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \equiv (p \rightarrow \neg q) \wedge (\neg q \rightarrow p)$$

表 1 推理规则

推理规则	永真式	名称
p $\underline{p \rightarrow q}$ $\therefore q$	$(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$	假言推理
$\neg q$ $\underline{p \rightarrow q}$ $\therefore \neg p$	$(\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p$	取拒式
$p \rightarrow q$ $\underline{q \rightarrow r}$ $\therefore p \rightarrow r$	$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$	假言三段论
$p \vee q$ $\underline{\neg p}$ $\therefore q$	$((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q$	析取三段论
$\underline{p}$ $\therefore p \vee q$	$p \rightarrow (p \vee q)$	附加律
$\underline{p \wedge q}$ $\therefore p$	$(p \wedge q) \rightarrow p$	化简律
p $\underline{q}$ $\therefore p \wedge q$	$((p) \wedge (q)) \rightarrow (p \wedge q)$	合取律
$p \vee q$ $\underline{\neg p \vee r}$ $\therefore q \vee r$	$((p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)) \rightarrow (q \vee r)$	消解律

推理规则	名称
$\dfrac{\forall x P(x)}{\therefore P(c)}$	全称实例
$\dfrac{P(c)\text{，任意 } c}{\therefore \forall x P(x)}$	全称引入
$\dfrac{\exists x P(x)}{\therefore P(c)\text{，对某个元素 } c}$	存在实例
$\dfrac{P(c)\text{，对某个元素 } c}{\therefore \exists x P(x)}$	存在引入

对偶与范式：P29

第二章 集合

定义 4 令 S 为集合。如果 S 中恰有 n 个不同的元素，这里 n 是非负整数，我们就说 S 是有限集，而 n 是 S 的基数。S 的基数记为 $|S|$。

定义 6 给定集合 S，S 的幂集（power set）是集合 S 所有子集的集合。S 的幂集记为 $\mathcal{P}(S)$。

定义 8 令 A 和 B 为集合。A 和 B 的笛卡儿积(Cartesian product)用 $A\times B$ 表示，是所有序偶(a, b)的集合，其中 $a\in A$ 且 $b\in B$。于是，

$$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A\wedge b\in B\}$$

一个元素 x 属于 A 和 B 的差集当且仅当 $x\in A$ 且 $x\notin B$，这说明

$$A-B=\{x\mid x\in A\wedge x\notin B\}$$

一个元素 x 属于 $\overline{A}$ 当且仅当 $x\notin A$。这说明

$$\overline{A}=\{x\in U\mid x\notin A\}$$

可以用 A 和 B 的补集的交集来表示 A 和 B 的差集。即

$A-B=A\cap\overline{B}$

集合 **A** 和 **B**的对称差，记为 $A\oplus B$ ，是集合

$$(A-B)\cup(B-A)$$

$$\forall x\big(x\in A\rightarrow\exists y\big(y\in B\wedge(x,y)\in f\big)\big)\quad\text{（存在性）}$$

和 $\forall x\forall y_1\forall y_2\big(\big((x,y_1)\in f\wedge(x,y_2)\in f\big)\rightarrow y_1=y_2\big)$

（唯一性）

函数 f 是一对一的当且仅当只要 $a\neq b$ 就有 $f(a)\neq f(b)$。

一个函数 f 是映上的如果 $\forall y\exists x(f(x)=y)$

如果它既是一对一的又是映上的，这样的函数称为是双射的。

一个集合或者是有限集或者与自然数集具有相同的基数，这个集合就称为可数的

正奇数集合是可数集。所有整数的集合是可数的。正有理数集合是可数的。实数集合是不可数集合。

如果 A 和 B 是可数集合，则 $A\cup B$ 也是可数集合。

定理 2 **SCHRÖDER-BERNSTEIN 定理** 如果 A 和 B 是集合且 $|A|\leqslant|B|$ 和 $|B|\leqslant|A|$，则 $|A|=|B|$。换言之，如果存在一对一函数 f 从 A 到 B 和 g 从 B 到 A，则存在 A 和 B 之间的一一对应函数。

$$b_1 \wedge b_2 = \begin{cases} 1 & \text{如果 } b_1 = b_2 = 1 \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

$$b_1 \vee b_2 = \begin{cases} 1 & \text{如果 } b_1 = 1 \text{ 或者 } b_2 = 1 \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

定义 8 令 $\mathbf{A}=[a_{ij}]$和 $\mathbf{B}=[b_{ij}]$为 $m\times n$ 阶 0-1 矩阵。$\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的并是 0-1 矩阵，其(i, j)元素为 $a_{ij}\vee b_{ij}$。$\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的并记作 $\mathbf{A}\vee\mathbf{B}$。$\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的交是 0-1 矩阵，其(i, j)元素是 $a_{ij}\wedge b_{ij}$。$\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的交记作 $\mathbf{A}\wedge\mathbf{B}$。

定义 9 令 $\mathbf{A}=[a_{ij}]$为 $m\times k$ 阶 0-1 矩阵，$\mathbf{B}=[b_{ij}]$为 $k\times n$ 阶 0-1 矩阵。$\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的布尔积(Boolean product)，记作 $\mathbf{A}\odot\mathbf{B}$，是 $m\times n$ 矩阵$[c_{ij}]$，其中

$$c_{ij} = (a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2j}) \vee \cdots \vee (a_{ik} \wedge b_{kj})$$

注意 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的布尔积的计算方法类似于这两个矩阵的普通乘积，但要用运算 $\vee$ 代替加法，用运算 $\wedge$ 代替乘法。下面给出一个矩阵布尔乘法的例子。

第三章第四章 计数

定理 2 **广义鸽巢原理** 如果 N 个物体放入 k 个盒子，那么至少有一个盒子包含了至少$\lceil N/k\rceil$个物体。

定理 1 **二项式定理** 设 x 和 y 是变量，n 是非负整数，那么

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^{n-j}y^j = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n \qquad \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0 \qquad \sum_{k=0}^{n}2^k\binom{n}{k} = 3^n$$

定理 2 **帕斯卡恒等式** 设 n 和 k 是满足 $n\geqslant k$ 的正整数，那么有

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

定理 1 具有 n 个对象的集合允许重复的 r 排列数是 n^r。

定理 2 n 个元素的集合中允许重复的 r 组合有 $C(n+r-1, r)=C(n+r-1, n-1)$个。

定理 3 设类型 1 的相同的物体有 n_1 个，类型 2 的相同的物体有 n_2 个，…，类型 k 的相同的物体有 n_k 个，那么 n 个物体的不同排列数是

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

$$
\begin{aligned}
&C(n,n_1)C(n-n_1,n_2)\cdots C(n-n_1-\cdots-n_{k-1},n_k)\\
&=\frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}\cdots\frac{(n-n_1-\cdots-n_{k-1})!}{n_k!0!}\\
&=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}
\end{aligned}
$$

计数技术见课本

第五章 关系

- 假设任意非空集合A，可以定义集合A上的：
  - 空关系：$\emptyset$
  - 恒等关系：$I_A = \{(a,a) \mid \forall a \in A\}$
  - 全域关系：$U_A = A \times A = \{(x,y) \mid \forall x\,\forall y(x \in A \wedge y \in A)\}$

定义：若对每个元素$a \in A$都有$(a,a) \in R$，那么称定义在集合A上的关系R为自反的，即：

$$\forall x(x \in A \longrightarrow (x,x) \in R)$$

定义：若对每个元素$a \in A$都有$(a,a) \in R$，那么称定义在集合A上的关系R为反自反的，即：

$$\forall x(x \in A \longrightarrow (x,x) \notin R)$$

- 一个不是自反的关系，不一定就是反自反的

定义：对于任意$a, b \in A$，若只要/每当$(a,b) \in R$就有$(b,a) \in R$，则称定义在集合A上的关系R是对称的。R是对称的，即：

$$\forall x \forall y((x,y) \in R \longrightarrow (y,x) \in R)$$

定义：对于任意$a, b \in A$，若$(a,b) \in R$并且$(b,a) \in R$，则一定有$a = b$，则定义在集合A上的关系R为反对称的。即R是反对称的当且仅当

$$\forall x \forall y((x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \longrightarrow x = y)$$

$$\Leftrightarrow \forall x \forall y(x \in A \wedge y \in A \wedge x \neq y \wedge xRy \rightarrow (y,x) \notin R)$$

- 可能有某种关系既是对称的，又是反对称的(如I_A)

定义：若对于任意$a, b, c \in A$, $(a,b) \in R$**且**$(b,c) \in R$则$(a,c) \in R$，那么定义在集合A上的关系R就满足传递性。即，R是传递的当且仅当 $\forall a \forall b \forall c(((a,b) \in R \wedge (b,c) \in R) \longrightarrow (a,c) \in R)$

- 前提$((a,b) \in R \wedge (b,c) \in R)$不成立，R也是传递的

- **定义**：假设R_1是集合A到集合B的关系，R_2是集合B到集合C的关系。则R_2和R_1的合成是A到C的关系，其元素满足：
  - 若$\exists y \in B$，使得$(x, y) \in R_1$且$(y, z) \in R_2$，则$(x, z) \in R_2 \circ R_1$。

- 设R是集合X到集合Y的二元关系，则其逆关系R^c是从Y到X的二元关系：

$$R^c = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}.$$

- 很显然，$(R^c)^c = R$。

- **定理4**：假设R为集合A上的二元关系，则有如下等价命题：
  - R是自反的 $\equiv I_A \subseteq R$
  - R是对称的 $\equiv R = R^c$
  - R是反对称的 $\equiv R \cap R^c \subseteq I_A$
  - R是传递的 $\equiv R \circ R \subseteq R$

- 集合A上的关系R是自反的：
  - $I_A \subseteq R$
  - M_R主对角线上的元素全为1。
  - G_R的每个顶点处均有环。

- 集合A上的关系R是对称的：
  - M_R是对称矩阵。
  - G_R任意一对节点之间要么没有边，要么有一对方向相反的有向边。

自反性：所有顶点上都有（自）环。

反自反性：所有顶点都没有环。

对称性：如果(x, y)有一条边，那么(y, x)也有一条边。

反对称性：如果$x \neq y$时，(x, y) 有边，则(y, x)没有边。

传递性：如果(x,y)和(y, z)有边，那么(x, z)也有边。

- 包含给定关系R的最小自反关系，称为R的自反闭包，记作$r(R)$。
  - $r(R)$是自反的；
  - $R \subseteq r(R)$；
  - $(\forall S)((R \subseteq S \wedge S自反) \rightarrow r(R) \subseteq S)$。

- 包含给定关系R的最小对称关系，称为R的对称闭包，记作$s(R)$。
  - $s(R)$是对称的；
  - $R \subseteq s(R)$；
  - $(\forall S)((R \subseteq S \wedge S对称) \rightarrow s(R) \subseteq S)$。

- 包含给定关系R的最小传递关系，称为R的传递闭包，记作$t(R)$，有时也记为R^*或R^+。
  - $t(R)$是传递的；
  - $R \subseteq t(R)$；
  - $(\forall S)((R \subseteq S \wedge S传递) \rightarrow t(R) \subseteq S)$。

- **定理4**：对于非空集合A上的关系R，存在如下几组等式：
  - $rs(R) = sr(R)$
  - $rt(R) = tr(R)$
  - $st(R) \subseteq ts(R)$

- $r(R) = R \cup I_A$
- $s(R) = R \cup R^c$
- $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$

- Warshall 在1962年提出了R^+的一个有效算法如下：
  - (1) 置新矩阵$A = M_R$
  - (2) 置$i = 1$
  - (3)对所有j，如果$A[j, i] = 1$，则对$k=1, 2, \ldots, n$，计算
    $A[j, k] = A[j, k] + A[i, k]$
  - (4) $i = i+1$
  - (5)如果 $i \leq n$，则转到步骤(3)。否则，算法停止。

定义 1 定义在集合 A 上的关系叫作等价关系，如果它是自反的、对称的和传递的。

最广泛使用的等价关系之一是模 m 同余关系，其中 m 是大于 1 的整数。

例 3 模 m 同余 设 m 是大于 1 的整数。证明以下关系是定义在整数集上的等价关系。

$$R = \{(a,b) \mid a \equiv b(\bmod m)\}$$

定义 3 设 R 是定义在集合 A 上的等价关系。与 A 中的一个元素 a 有关系的所有元素的集合叫作 a 的等价类。A 的关于 R 的等价类记作 $[a]_R$。当只考虑一个关系时，我们将省去下标 R 并把这个等价类写作 $[a]$。

换句话说，如果 R 是定义在集合 A 上的等价关系，则元素 a 的等价类是

$$[a]_R = \{s \mid (a,s) \in R\}$$

如果 $b \in [a]_R$，b 叫做这个等价类的**代表元**。一个等价类的任何元素都可以作为这个类的代表元。也就是说，选择特定元素作为一个类的代表元没有特殊要求。

以推广。模 m 同余关系的等价类叫作**模 m 同余类**。整数 a 模 m 的同余类记作 $[a]_m$，满足 $[a]_m = \{\cdots, a-2m, a-m, a, a+m, a+2m, \cdots\}$。例如，从例 9 得出 $[0]_4 = \{\cdots, -8, -4, 0, 4, 8, \cdots\}$ 和 $[1]_4 = \{\cdots, -7, -3, 1, 5, 9, \cdots\}$。

集合 S 的**划分**是 S 的不相交的非空子集构成的集合，且它们的并集就是 S。换句话说，一族子集 A_i，$i \in I$，(其中 I 是下标的集合)构成 S 的划分，当且仅当

$$A_i \neq \varnothing \quad i \in I$$

$$A_i \cap A_j = \varnothing \quad i \neq j$$

和

$$\bigcup_{i \in I} A_i = S$$

- **定义：**给定集合A上的关系R，若R是自反的，对称的，则称R是集合A上的相容关系。

。

- **定义：**设R是集合A上的相容关系，不能真包含于任何其它相容类的相容类，称为最大相容类。记作C_R。

- **定理：**给定集合A的划分$\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$，由它确定的关系$R = A_1 \times A_1 \cup A_2 \times A_2 \cup \ldots \cup A_n \times A_n$ 是等价关系。
- **定理：**给定集合A的覆盖$\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$，由它确定的关系$R = A_1 \times A_1 \cup A_2 \times A_2 \cup \ldots \cup A_n \times A_n$ 是相容关系。
- **定理：**集合A上的相容关系R与完全覆盖$C_R(A)$存在一一对应。

定义 1 定义在集合 S 上的关系 R，如果它是自反的、反对称的和传递的，就称为偏序。集合 S 与定义在其上的偏序 R 一起称为偏序集，记作 (S, R)。集合 S 中的成员称为偏序集的元素。

定义 2 偏序集 $(S, \preccurlyeq)$ 中的元素 a 和 b 称为可比的，如果 $a \preccurlyeq b$ 或 $b \preccurlyeq a$。当 a 和 b 是 S 中的元素并且既没有 $a \preccurlyeq b$，也没有 $b \preccurlyeq a$，则称 a 与 b 是不可比的。

定义 3 如果 $(S, \preccurlyeq)$ 是偏序集，且 S 中的每对元素都是可比的，则 S 称为全序集或线序集，且 $\preccurlyeq$ 称为全序或线序。一个全序集也称为链。

定义 4 对于偏序集 $(S, \preccurlyeq)$，如果 $\preccurlyeq$ 是全序，并且 S 的每个非空子集都有一个最小元素，就称它为良序集。

定理 1 **良序归纳原理** 设 S 是一个良序集。如果(归纳步骤)对所有 $y \in S$，如果 $P(x)$ 对所有 $x \in S$ 且 $x \prec y$ 为真，则 $P(y)$ 为真，那么 $P(x)$ 对所有的 $x \in S$ 为真。

首先，我们将说明怎样在两个偏序集 $(A_1, \preccurlyeq_1)$ 和 $(A_2, \preccurlyeq_2)$ 的笛卡儿积上构造一个偏序。在 $A_1 \times A_2$ 上的**字典顺序** $\preccurlyeq$ 定义如下：如果第一个有序对的第一个元素(在 A_1 中)小于第二个有序对的第一个元素，或者第一个元素相等，但是第一个有序对的第二个元素(在 A_2 中)小于第二个有序对的第二个元素，那么第一个有序对小于第二个有序对。换句话说，(a_1, a_2) 小于 (b_1, b_2)，即

$$(a_1, a_2) \prec (b_1, b_2)$$

或者 $a_1 \prec_1 b_1$，或者 $a_1 = b_1$ 且 $a_2 \prec_2 b_2$。

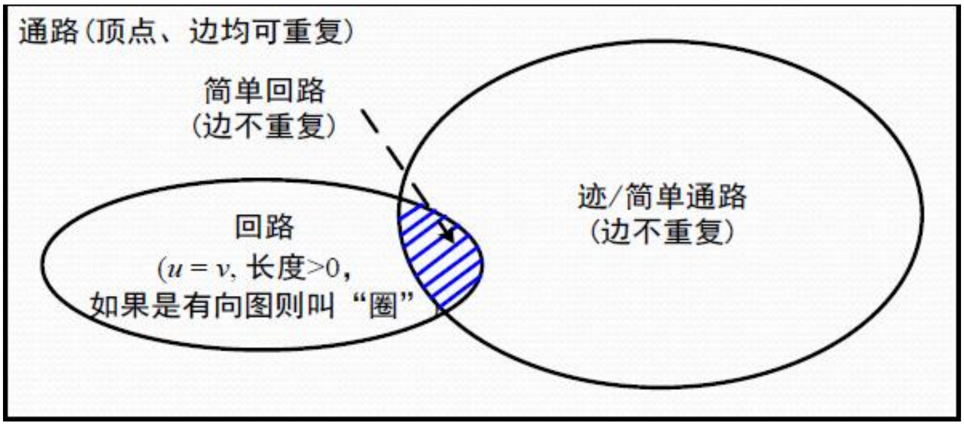
设 $(S, \preccurlyeq)$ 是一个偏序集。若 $x \prec y$ 且不存在元素 $z \in S$ 使得 $x \prec z \prec y$，则称元素 $y \in S$ **覆盖**元素 $x \in S$。y 覆盖 x 的有序对 (x, y) 的集合称为 $(S, \preccurlyeq)$ 的**覆盖关系**。从对偏序集的哈塞图的

具有极值性质的偏序集中的元素有许多重要应用。偏序集中的一个元素称为极大元，当它不小于这个偏序集的任何其他元素。即当不存在 $b \in S$ 使得 $a \prec b$，a 在偏序集 $(S, \preccurlyeq)$ 中是**极大元**。类似地，偏序集的一个元素称为极小元，如果它不大于这个偏序集的任何其他元素。即如果不存在 $b \in S$ 使得 $b \prec a$，则 a 在偏序集 $(S, \preccurlyeq)$ 中是**极小元**。使用哈塞图很容易识别极大元与极小元。它们是图中的“顶”元素与“底”元素。

定义 2 图 $G=(V, E)$ 中，顶点 v 的所有相邻顶点的集合，记作 $N(v)$，称为顶点 v 的邻居。若 A 是 V 的子集，我们用 $N(A)$ 表示图 G 中至少和 A 中一个顶点相邻的所有顶点的集合。所以 $N(A) = \bigcup_{v \in A} N(v)$。

定理 2 无向图有偶数个度为奇数的顶点。

定理 5 **霍尔婚姻定理** 带有二部划分 (V_1, V_2) 的二分图 $G=(V, E)$ 中有一个从 V_1 到 V_2 的完全匹配当且仅当对于 V_1 的所有子集 A，有 $|N(A)| \geqslant |A|$。



定义：在无向图中，顶点u和v之间若存在一条通路，则称u和v之间是连通的，表示为$[u, v]$。

- 定义：点割集和割点
  - 设无向图$G = (V, E)$为连通的，若有顶点集$V_1 \subseteq V$，使得图G删除了V_1所有结点后，所得的子图是不连通的；而删除了V_1的任意真子集后，所得的子图仍然是连通图。则称集合V_1为图G的点割集。若某一顶点就构成点割集，则称该结点为割点。

- 定义：点连通度
  - 若G不是完全图，我们定义$k(G) = \min\{|V_1| \mid V_1$是G的点割集$\}$为G的点连通度(或连通度)。
  - 换句话说，连通度$k(G)$是为了产生一个不连通图需要删去的点的最少数目。

- 定义：边割集、割边
  - 设无向图$G = (V, E)$为连通的，若有边集$E_1 \subseteq E$，使得图G删除了E_1所有边后，所得的子图是不连通的，而删除了E_1的任意真子集后，所得的子图仍然是连通图。则称集合E_1为图G的边割集。若某一边构成边割集，则称该边为割边(或桥)。

- 与点连通度相似，我们定义非平凡的连通图G的边连通度为：$\lambda(G) = \min\{|E_1| \mid E_1$是G的边割集$\}$。边连通度$\lambda(G)$是为了产生一个不连通图需要删去边的最少数目。

- 定理：对于任何一个图$G = (V, E)$，有

$$k(G) \le \lambda(G) \le \delta(G)$$

- 简单有向图$G = (V, E)$中，任意一对顶点间，至少存在一个顶点到另一个顶点的有向通路，则称这个图为单侧连通。如果对于图G中的任意一对顶点间都存在双向的有向通路，则称这个图为强连通的。如果在图G中略去方向，将它看成是无向图，图是连通的，则称该有向图为弱连通的。

- 定理：一个有向图是强连通的，当且仅当G中有一个回路，它至少包含每个顶点一次。
  - 在简单有向图中，具有强连通性质的最大子图，称为强分图；具有单侧连通性质的最大子图，称为单侧分图；具有弱连通性质的最大子图，称为弱分图。

定理：包含至少有两个顶点的连通多重图具有欧拉回路当且仅当它的每个顶点的度都为偶数。

- **狄拉克定理：**如果G是有n个顶点的简单图，其中$n \geq 3$并且对G中每个顶点的度都至少为$n/2$, 则G有哈密顿回路。
- **欧尔定理**：如果G是由n个顶点的简单图，其中$n \geq 3$并且对于G中每一对不相邻的顶点u和v来说，都有$\deg(u) + \deg(v) \geq n$，则G有哈密顿回路。

- 定理（欧拉公式，平面图的必要条件）：
  - 设有一个连通平面图G，共有v个顶点e条边r块面，则欧拉公式 $v-e+r=2$ 成立。

- 推论1：
  - 设G为有v个顶点和e条边的<u>连通</u>平面简单图，若$v \geq 3$，则$e \leq 3v - 6$。
- 推论2：
  - 若G是连通平面简单图，则G中有度数不超过5的顶点。
- 推论3：
  - 设G为有v个顶点和e条边的连通平面简单图，若$v \geq 3$且没有长度为3的回路，则$e \leq 2v - 4$。

- 给定图T，以下关于树的定义是等价的：
  - 无回路的连通图；
  - 无回路且$e = v - 1$，其中e为边数，v为结点数；
  - 连通且$e = v - 1$；
  - 无回路且增加一条新边，得到一个且仅一个回路；
  - 连通且删去任何一个边后不连通；
  - 每一对顶点之间有一条且仅一条路。