

Mathematical Experiments

数学建模初步

——Malthus人口模型



重庆大学数学与统计学院

- 研究人口模型的意义
- 指数增长模型的建立
- 美国人口数据的拟合
- 指数增长模型的应用及局限性



- 人口控制
- 人口系统工程
- 社会保障
- 寿险精算
- 种群生态学

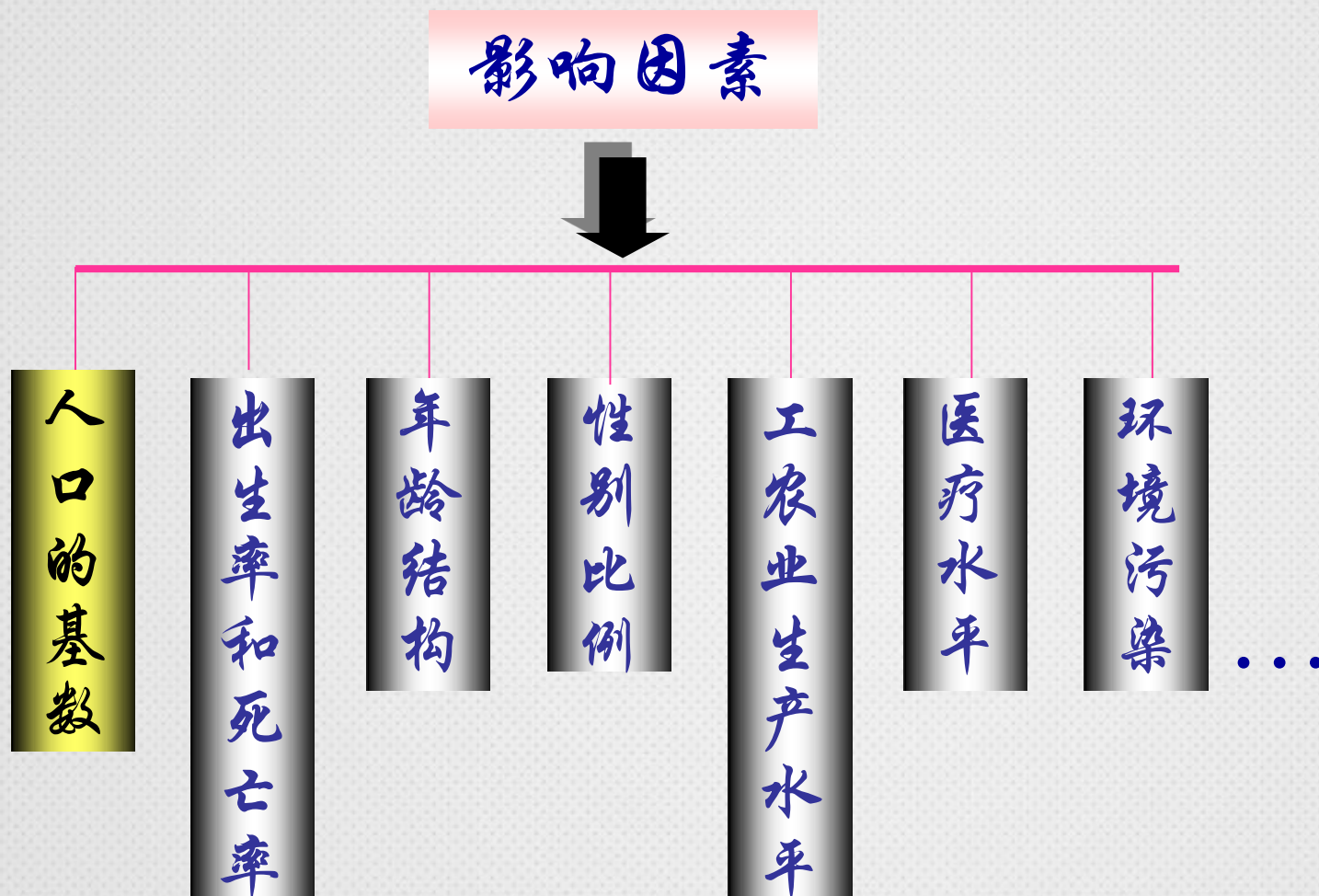


指数增长模型 (Malthus模型)

马尔萨斯1798年提出

基本假设：人口(相对)增长率 r 是常数(r 很小)





指数增长模型 (Malthus模型)

马尔萨斯1798年提出

基本假设：人口(相对)增长率 r 是常数(r 很小)

$x(t)$ ~时刻 t 的人口

$$x(t + \Delta t) - x(t) = rx(t)\Delta t$$

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = rx(t) \quad \frac{dx}{dt} = rX, \quad x(0) = x_0$$

$$x(t) = x_0 e^{rt}$$

随着时间增加，人口按指数规律无限增长



数据(美国人口1790-2000)

美国人口增长概况（单位：百万）

1790	1800	1810	1960	1970	1980	1990	2000
3.9	5.3	7.2	179.3	204.0	226.5	251.4	281.4

Malthus模型 $x(t) = x_0 e^{rt}$

线性拟合： $\ln x = \ln x_0 + rt$,

由线性最小二乘法得 $\ln x_0$ 和 r 。



```
t=[1790 1800 1810 1820 1830 1840 1850 1860 1870 1880 1890 1900 ];
```

```
p=[3.9 5.3 7.2 9.6 12.9 17.1 23.2 31.4 38.6 50.2 62.9 76.0 ];
```

```
y=log(p);           %求ln(p)的函数值，取对数转化为线性拟合
```

```
a=polyfit(t,y,1)     %用1次多项式来拟合数据t,y
```

```
z=polyval(a,t);      % 求以a为系数的多项式在t处的函数值
```

```
z1=exp(z)
```

```
r=a(1)
```

```
plot(t,p,'bo',t,z1,'r')
```

```
xlabel('时间');
```

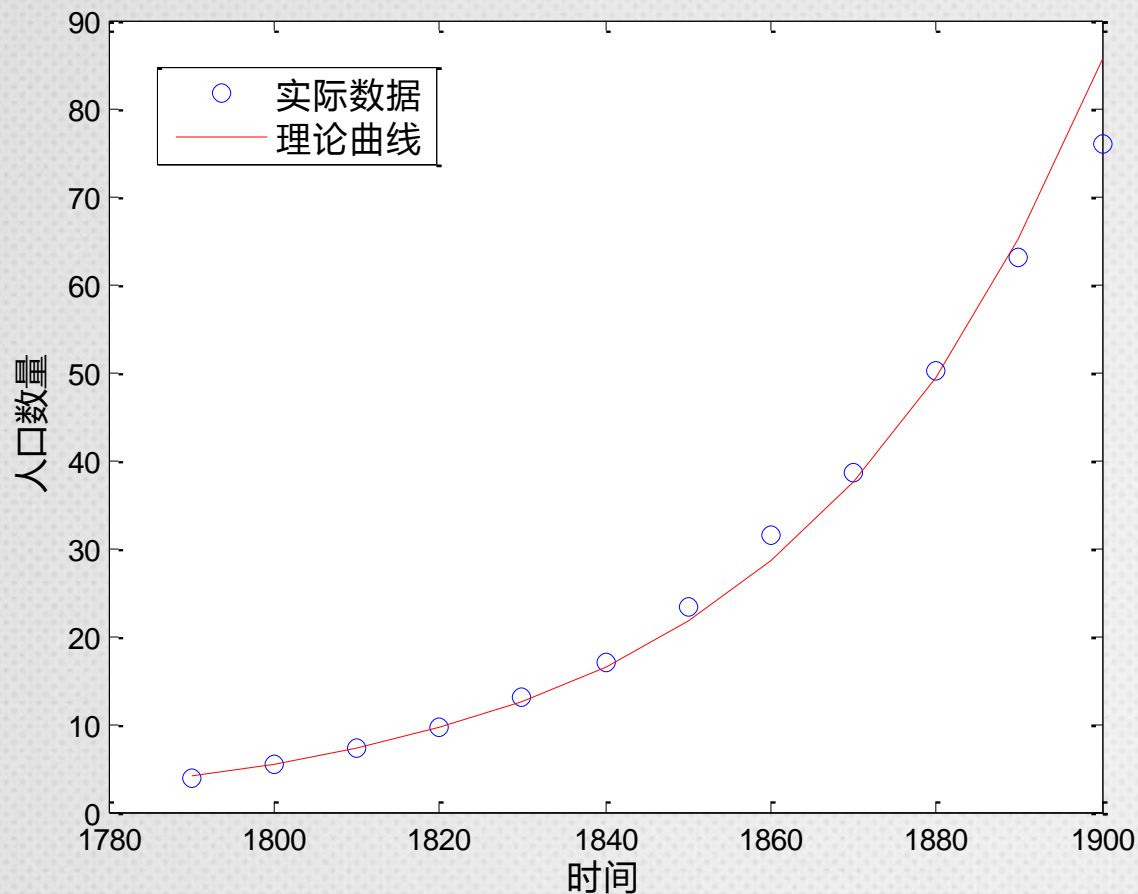
```
ylabel('人口数量');
```

```
legend('实际数据','理论曲线')
```



短期数据拟合(1790-1900)

Mathematical Laboratory

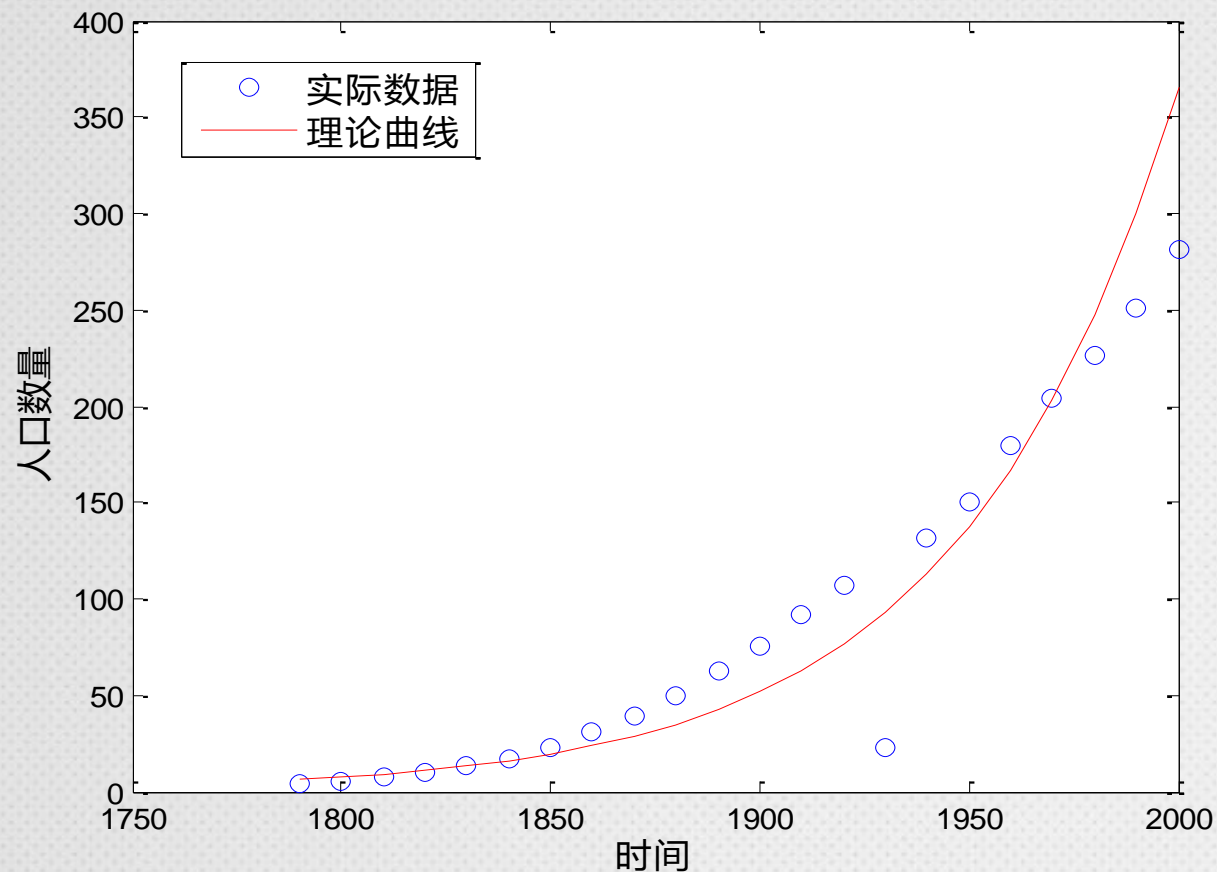


误差不大

$$r = 0.0274 \quad x(1790) = 4.1884 \quad x(1900) = 85.6179$$



```
t=[1790 1800 1810 1820 1830 1840 1850 1860 1870 1880 ...  
1890 1900 1910 1920 1930 1940 1950 1960 1970 1980 1990 2000];  
p=[3.9 5.3 7.2 9.6 12.9 17.1 23.2 31.4 38.6 50.2 62.9 76.0 92.0 106.5 ...  
123.2 131.7 150.7 179.3 204.0 226.5 251.4 281.4];  
y=log(p);           %求ln(p)的函数值, 取对数转化为线性拟合  
a=polyfit(t,y,1)     %用1次多项式来拟合数据t, y  
z=polyval(a,t);      % 求以a为系数的多项式在t处的函数值  
z1=exp(z), r=a(1)  
plot(t,p,'bo',t,z1,'r')  
xlabel('时间');  
ylabel('人口数量');  
legend('实际数据','理论曲线')
```



误差很大

$$r = 0.0202, \quad x(1790) = 6.045, \quad x(2000) = 422.1$$

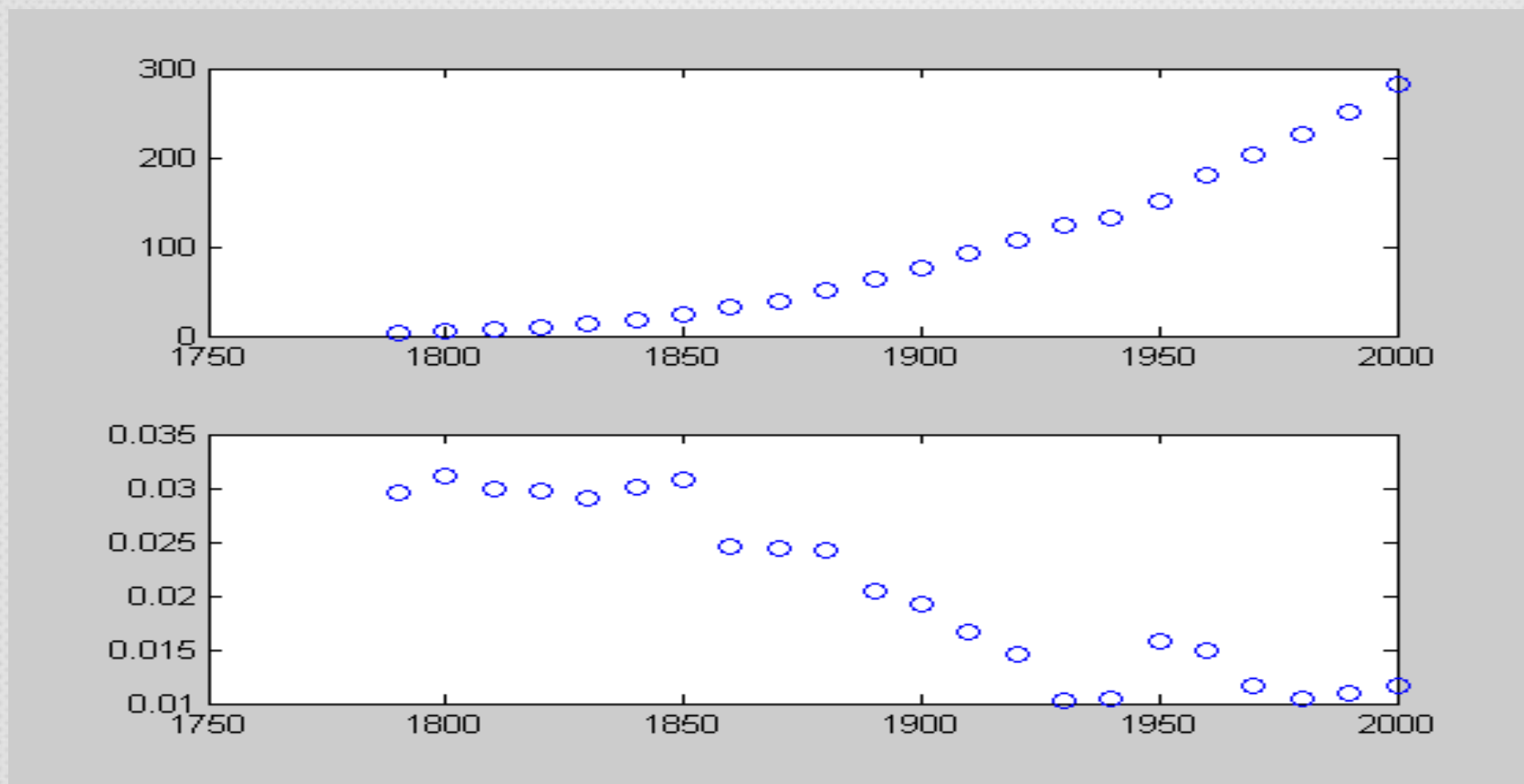


- 可用于短期人口增长预测
- 与19世纪以前欧洲一些地区人口统计数据吻合
- 不符合19世纪后多数地区人口增长规律
- 不能预测较长期的人口增长过程





19世纪后人口数据 人口增长率 r 不是常数(逐渐下降)



Thanks



重庆大学数学与统计学院