数学规划模型

什么是数学规划模型？

4.1　奶制品的生产与销售(线性规划，Lindo)

4.2　自来水输送与货机装运(运输问题，Lingo, 规模大)

4.3　汽车生产与原油采购 (整数规划, 0-1变量技巧)

4.4　接力队选拔和选课策略（0-1规划，多目标规划）

4.5　饮料厂的生产与检修

4.6　钢管和易拉罐下料(非线性规划, Lingo)

数学规划模型

实际问题中的优化模型

$$Min(\text{或}Max) \ \ z = f(x), \ \ x = (x_1, \cdots x_n)^T$$

$$s.t. \ \ g_i(x) \le 0, \ \ i = 1,2,\cdots m$$

x~决策变量 **$f(x)$~目标函数** **$g_i(x)\le 0$~约束条件**

多元函数条件极值

n和m较大

不等式约束

最优解在边界上取得

无法用微分法求解

数学规划

线性规划

非线性规划

整数规划

多目标规划

……

数学规划模型的一般形式

- min----minimize
- max---maximize
- s.t.----subject to

min(或max) $z = f(\boldsymbol{x})$

$s.t.\ h_i(\boldsymbol{x}) = 0,\ i = 1, \cdots, l$

$g_j(\boldsymbol{x}) \le 0,\ j = 1, \cdots, m$

$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D \subseteq R^n$

三个要素：

•决策变量 decision variable， $\sim \boldsymbol{x}$

•目标函数 objective function， $\sim f(\boldsymbol{x})$

•约束条件 constraints, $\sim h_i(\boldsymbol{x}) = 0$， $g_j(\boldsymbol{x}) \le 0$

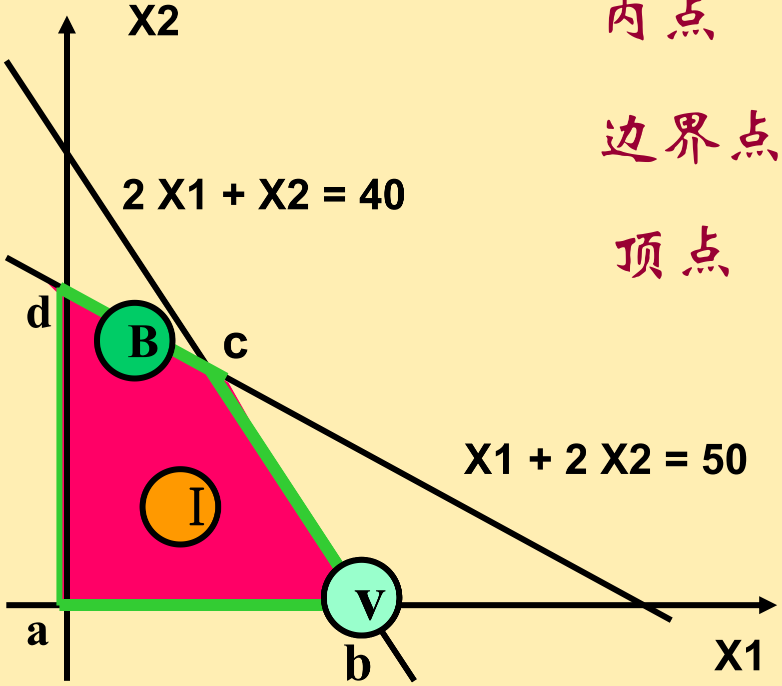
数学规划的基本概念

- 可行域 feasible region
- 可行解 feasible solution
- 最优解 optimal solution
- 全局最优解 global optimal solution
- 局部最优解 local optimal solution
- 最优值 optimal value
- 目标值 objective value

线性规划模型

线性规划解的若干概念

$$
\begin{aligned}
&\max\ \ z = 5x_1+3x_2\\
&\text{s.t.}\quad 2x_1+x_2\leq 40\\
&\qquad\quad x_1+2x_2\leq 50\\
&\qquad\quad x_1,\ x_2\geq 0
\end{aligned}
$$



内点

边界点

顶点

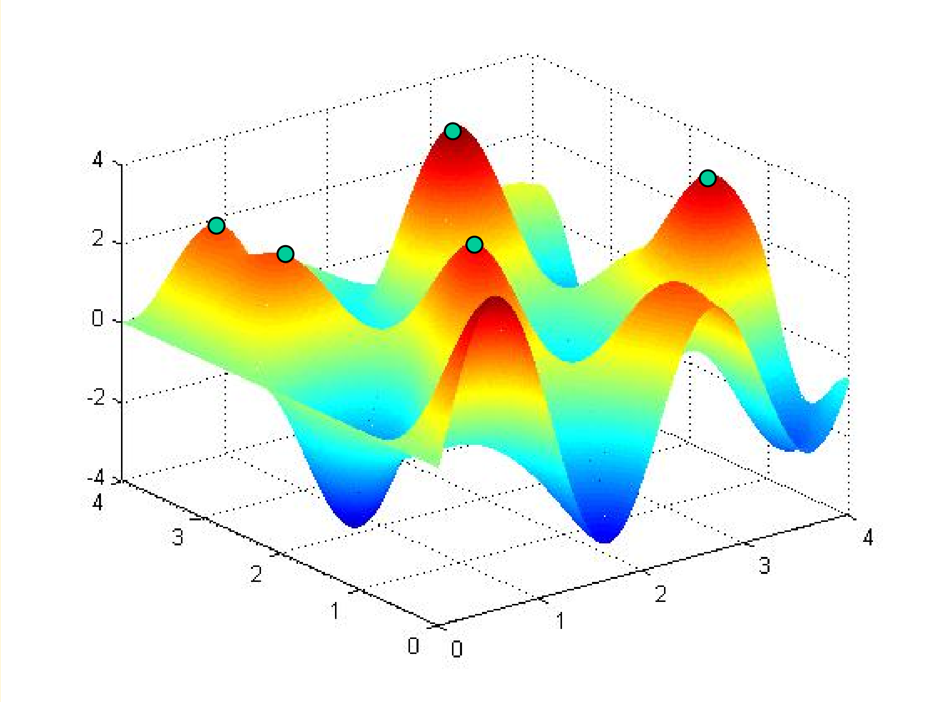
可行点

可行域

凸多面体

非线性规划基本概念

图形解释



函数曲面图形

多峰函数，存在局部最大(小)和整体最大(小)

编程功能强

Matlab能求解的优化模型

优化与全局优化工具箱 (MATLAB R2016 b)

- 连续优化
  - 无约束优化
    - 非线性极小 fminunc
    - 非光滑(不可微)优化 fminsearch
    - 非线性方程(组) fzero fsolve
    - 非线性最小二乘拟合 lsqnonlin lsqcurvefit
    - 全局优化智能算法 run ga(遗传算法） particalswarm GlobalSearch MultiStart Patternsearch Simulannealbnd gamultiobj
  - 约束优化
    - 线性规划 linprog
    - 二次规划 quadprog
    - 非线性规划 fmincon fminimax fgoalattain fseminf
    - 约束线性最小二乘 lsqnonneg lsqlin
    - 上下界约束 fminbnd fmincon lsqnonlin lsqcurvefit
- 离散优化
  - 纯0-1规划 bintprog
  - 混合整数线性规划 intlinprog

无灵敏度分析函数

Matlab解法

$$\max z = 72x_1 + 64x_2$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 \le 50 \\ 12x_1 + 8x_2 \le 480 \\ 3x_1 \le 100 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

- linprog

```
>>  c=[-72 -64];A=[1 1;12 8;3 0];b=[50;480;100];
>> [x,f]=linprog(c,A,b,[],[],zeros(2,1))
```

Optimization terminated.

x = 20.0000

    30.0000

f = -3.3600e+03

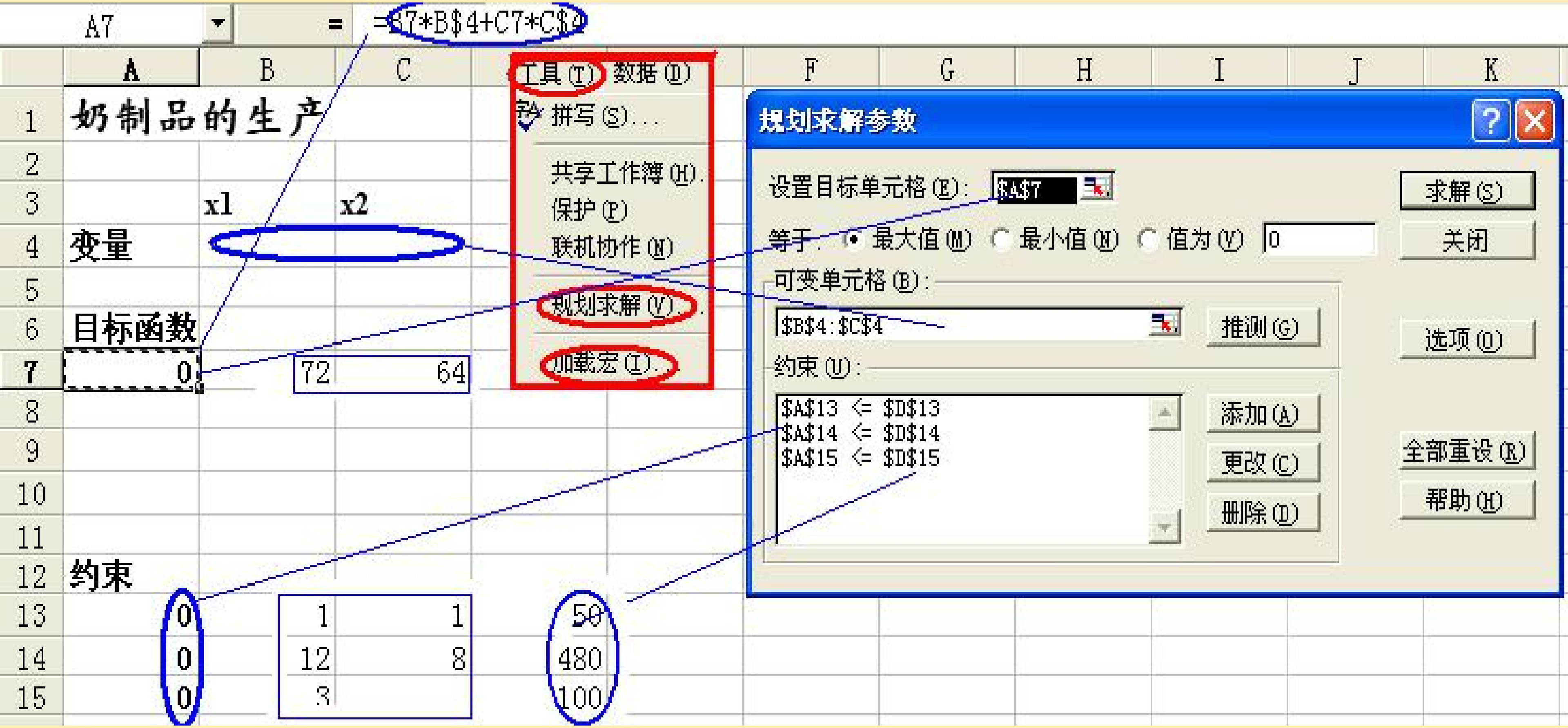
Spreadsheet (Excel规划求解)能求解的优化模型

- 线性规划
- 整数规划
- 非线性规划

- 可做灵敏度分析

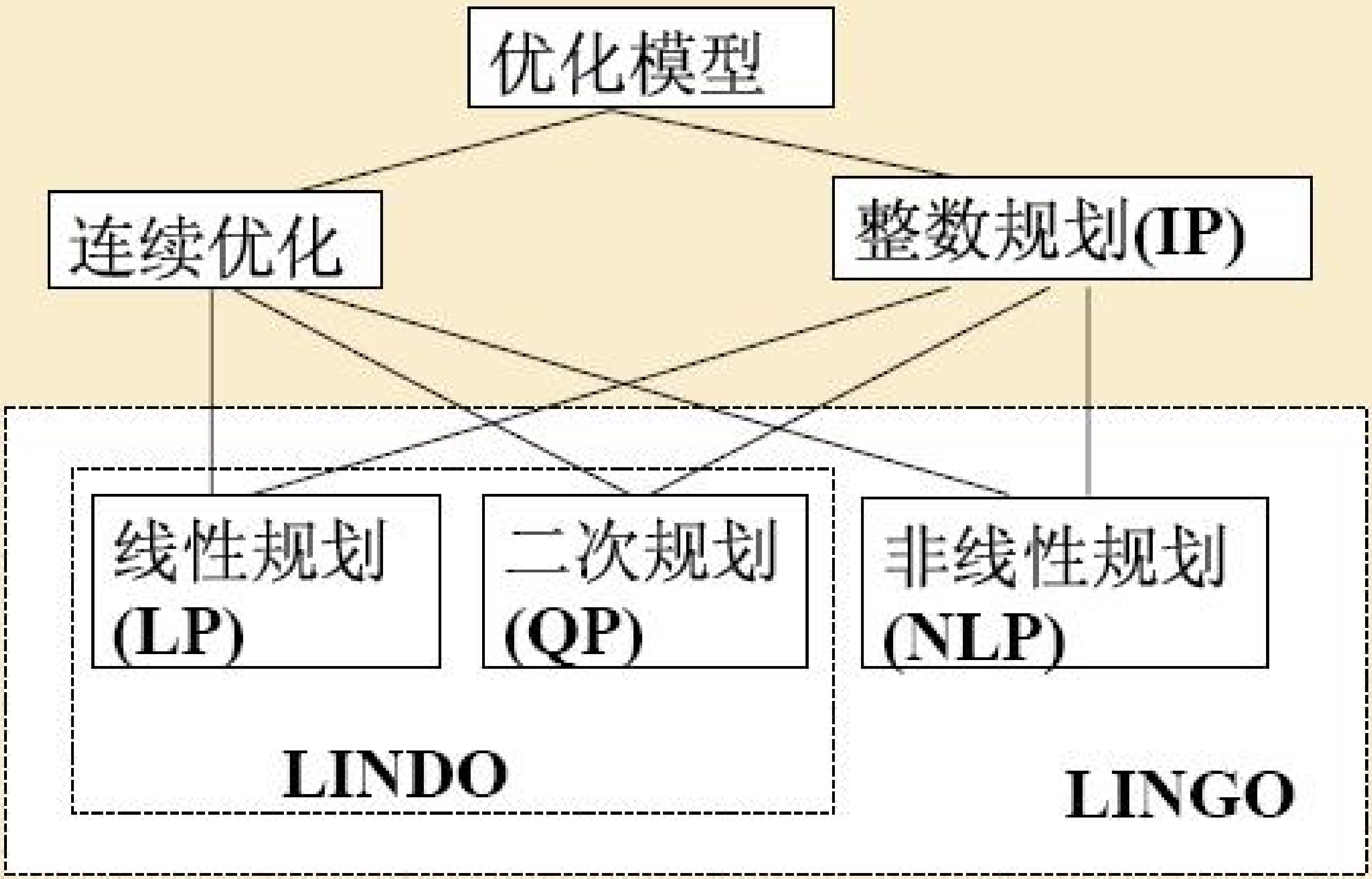
- Excel预设置: 工具\加载宏\规划求解
- 模型定义:
  - 目标单元格: 目标函数值
  - 可变单元格: 决策变量值
  - 约束条件

Excel解法



A7
=B7*B$4+C7*C$4
工具(T) 数据(D)
拼写(S)...
共享工作簿(H).
保护(P)
联机协作(N)
规划求解(V).
加载宏(I).
奶制品的生产
x1
x2
变量
目标函数
0
72
64
约束
0
0
0
1
1
12
8
3
50
480
100
规划求解参数
设置目标单元格(E): $A$7
求解(S)
等于: 最大值(M) 最小值(N) 值为(V) 0
关闭
可变单元格(B):
$B$4:$C$4
推测(G)
选项(O)
约束(U):
$A$13 <= $D$13
$A$14 <= $D$14
$A$15 <= $D$15
添加(A)
更改(C)
删除(D)
全部重设(R)
帮助(H)

LINDO和LINGO软件能求解的优化模型



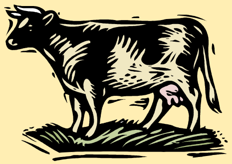
Lindo解法

```
max 72x1+64x2
st
x1+x2<50
12x1+8x2<480
3x1<100
end
```

Lingo解法

```
Model:
Max=72*x1+64*x2;
x1+x2<50;
12*x1+8*x2<480;
3*x1<100;
end
```

4.1 奶制品的生产与销售



企业生产计划

空间层次

工厂级：根据外部需求和内部设备、人力、原料等条件，以最大利润为目标制订产品生产计划；

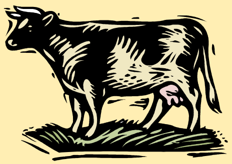
车间级：根据生产计划、工艺流程、资源约束及费用参数等，以最小成本为目标制订生产批量计划。

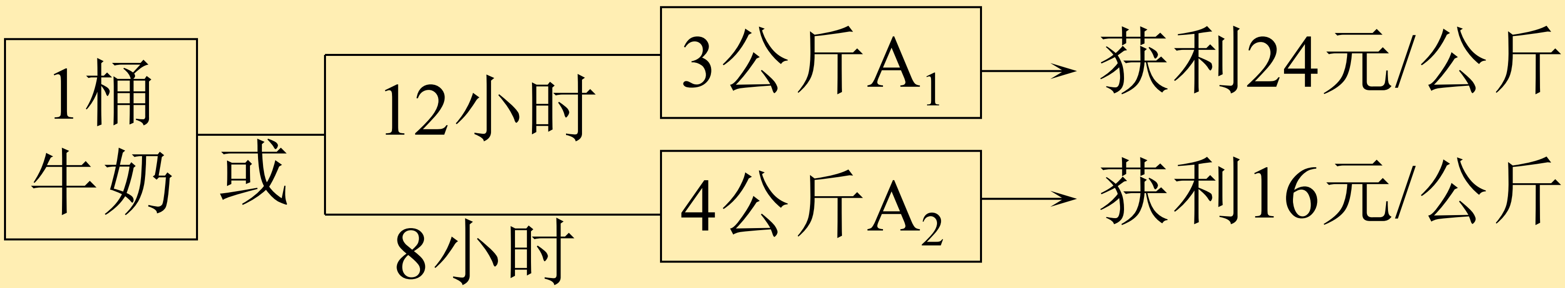
时间层次

若短时间内外部需求和内部资源等不随时间变化，可制订单阶段生产计划，否则应制订多阶段生产计划。

本节课题

例1　加工奶制品的生产计划

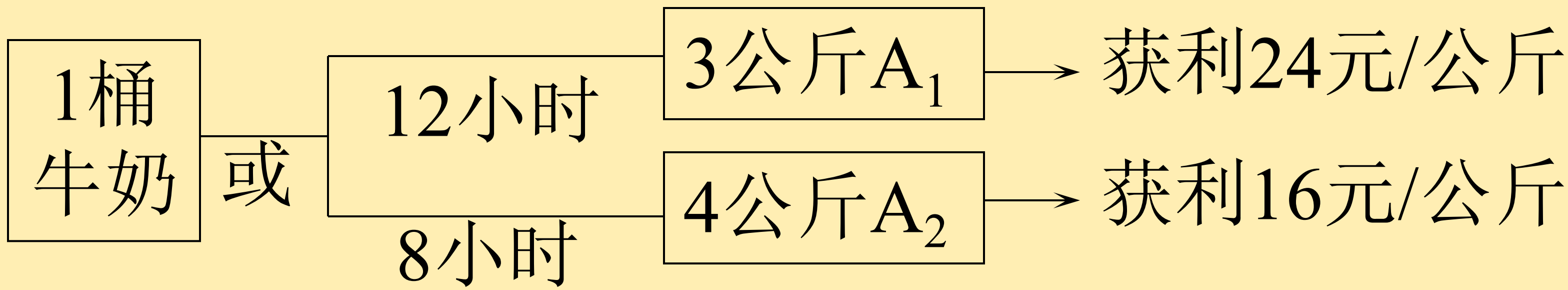




每天：　**50桶牛奶　工时480小时　至多能加工100公斤A_1**

制订生产计划，使每天获利最大

- **35元可买到1桶牛奶，买吗？若买，每天最多买多少?**
- **可聘用临时工人，付出的工资最多是每小时几元?**
- **A_1的获利增加到 30元/公斤，应否改变生产计划?**



每天　50桶牛奶　时间480小时　至多加工100公斤A$_1$

决策变量　　x_1桶牛奶生产A$_1$　　x_2桶牛奶生产A$_2$

获利 $24\times3x_1$　　　　获利 $16\times4\,x_2$

目标函数　　每天获利　　$Max\ \ z = 24\times3x_1 + 16\times4x_2$

约束条件

原料供应	$x_1 + x_2 \le 50$
劳动时间	$12x_1 + 8x_2 \le 480$
加工能力	$3x_1 \le 100$
非负约束	$x_1, x_2 \ge 0$

线性规划模型(LP)

例1的另一模型

- 设A_1, A_2每天的加工量分别为y_1,y_2
- Max $z=24y_1+16y_2$

Subject to

$y_1/3+y_2/4<=50$

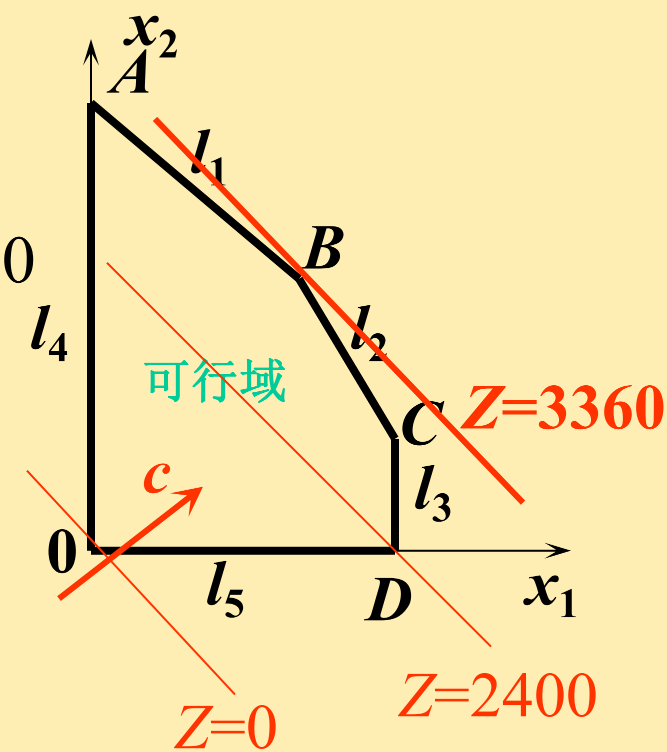
$12y_1/3+8y_2/4<=480$

$y_1<=100$

y_1, $y_2>=0$

模型求解

图解法



约束条件

$$x_1 + x_2 \le 50 \quad \Rightarrow \quad l_1: x_1 + x_2 = 50$$

$$12x_1 + 8x_2 \le 480 \quad \Rightarrow \quad l_2: 12x_1 + 8x_2 = 480$$

$$3x_1 \le 100 \quad \Rightarrow \quad l_3: 3x_1 = 100$$

$$x_1, x_2 \ge 0 \quad \Rightarrow \quad l_4: x_1 = 0,\ l_5: x_2 = 0$$

目标函数

$$Max \quad z = 72x_1 + 64x_2$$

$z=c$ (常数) ~等值线

在$B(20,30)$点得到最优解

目标函数和约束条件是线性函数

可行域为直线段围成的凸多边形

目标函数的等值线为直线

$\Rightarrow$ 最优解一定在凸多边形的某个顶点取得。

模型求解

软件实现

LINDO 6.1

```
max 72x1+64x2
st
2）x1+x2<50
3）12x1+8x2<480
4）3x1<100
end
```

DO RANGE (SENSITIVITY) ANALYSIS? No

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 3360.000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	20.000000	0.000000
X2	30.000000	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	48.000000
3)	0.000000	2.000000
4)	40.000000	0.000000

NO. ITERATIONS= 2

20桶牛奶生产A_1, 30桶生产A_2，利润3360元。

单纯形表

基变量（可以非零）

非基变量=0

c_j		c_1	c_2	$\cdots$	c_m	c_{m+1}	$\cdots$	c_n	b_i
c_B	x_B	x_1	x_2	$\cdots$	x_m	x_{m+1}	$\cdots$	x_n	
c_1	x_1	1	0	$\cdots$	0	a_{1m+1}	$\cdots$	a_{1n}	b_1
c_2	x_2	0	1	$\cdots$	0	a_{2m+1}	$\cdots$	a_{2n}	b_2
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
c_m	x_m	0	0	$\cdots$	1	a_{mm+1}	$\cdots$	a_{mn}	b_m
z_j									z_0

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1)	3360.000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	20.000000	0.000000
X2	30.000000	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	48.000000
3)	0.000000	2.000000
4)	40.000000	0.000000

NO. ITERATIONS= 2

表示当该非基变量增加一个单位时（其他非基变量保持不变）目标函数减少的量(对max型问题)

也可理解为：

为了使该非基变量变成基变量，目标函数中对应系数应增加的量

这里x1, x2已经是基变量，所以reduced cost 为0

结果解释

max 72x1+64x2

st

2）x1+x2<50

3）12x1+8x2<480

4）3x1<100

end

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 3360.000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	20.000000	0.000000
X2	30.000000	0.000000

	ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
原料无剩余	2)	0.000000	48.000000
时间无剩余	3)	0.000000	2.000000
加工能力剩余40	4)	40.000000	0.000000

NO. ITERATIONS= 2

三种资源

"资源" 剩余为零的约束为紧约束（有效约束）

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 3360.000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	20.000000	0.000000
X2	30.000000	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	48.000000
3)	0.000000	2.000000
4)	40.000000	0.000000

NO. ITERATIONS= 2

结果解释

最优解下“资源”增加1单位时“效益”的增量

影子价格

原料增加1单位, 利润增长48

时间增加1单位, 利润增长2

加工能力增长不影响利润

- 35元可买到1桶牛奶，要买吗？ 35 <48, 应该买！
- 聘用临时工人付出的工资最多每小时几元？ 2元！

DO RANGE(SENSITIVITY) ANALYSIS? Yes

保持最优解不变的目标函数系数变化范围

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

OBJ COEFFICIENT RANGES

(约束条件不变)

VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X1	72.000000	24.000000	8.000000
X2	64.000000	8.000000	16.000000

x_1系数范围(64,96)

x_2系数范围(48,72)

RIGHTHAND SIDE RANGES

ROW	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2	50.000000	10.000000	6.666667
3	480.000000	53.333332	80.000000
4	100.000000	INFINITY	40.000000

x_1系数由24 ×3=72增加为30×3=90，在允许范围内

- A_1获利增加到 30元/千克，应否改变生产计划

不变！

结果解释

保持影子价格不变的约束右端的变化范围

(目标函数不变)

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

OBJ COEFFICIENT RANGES

VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X1	72.000000	24.000000	8.000000
X2	64.000000	8.000000	16.000000

RIGHTHAND SIDE RANGES

ROW	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2	50.000000	10.000000	6.666667
3	480.000000	53.333332	80.000000
4	100.000000	INFINITY	40.000000

否则影子价格48会变

原料最多增加10

时间最多增加53

- 35元可买到1桶牛奶，每天最多买多少？ 最多买10桶!否则…

例2　奶制品的生产销售计划

在例1基础上精加工

50桶牛奶, 480小时

至多100公斤A_1

制订生产计划，使每天净利润最大

- 30元可增加1桶牛奶，3元可增加1小时时间，应否投资？现投资150元，可赚回多少？

- B_1，B_2的获利经常有10%的波动，对计划有无影响？

直接从例1修改的模型

- 设用y1千克A1生产B1, y2千克A2生产B2

目标函数 $Max\ \ z = 24\times(3x_1 - y_1) + 16\times(4x_2 - y_2)$
$+ 44\times 0.8y_1 + 32\times 0.75y_2 - 3(y_1 + y_2)$

劳动时间 $12x_1 + 8x_2 + 2(y_1 + y_2) \le 480$

其他约束条件不变

另一模型(课本)

1桶牛奶 或

12小时 → 3千克 A_1 → 获利24元/千克

1千克 → 2小时,3元 → 0.8千克 B_1 → 获利44元/千克

8小时 → 4千克 A_2 → 获利16元/*kg*

1千克 → 2小时,3元 → 0.75千克 B_2 → 获利32元/千克

决策变量

出售x_1千克 A_1, x_2千克 A_2， x_3千克 B_1, x_4千克 B_2

x_5千克 A_1加工B_1， x_6千克 A_2加工B_2 可简略!

目标函数

利润 $$Max\ \ z = 24x_1 + 16x_2 + 44x_3 + 32x_4 - 3x_5 - 3x_6$$

约束条件

原料供应 $$\frac{x_1 + x_5}{3} + \frac{x_2 + x_6}{4} \le 50$$

劳动时间 $$4(x_1 + x_5) + 2(x_2 + x_6) + 2x_5 + 2x_6 \le 480$$

加工能力 $$x_1 + x_5 \le 100$$

附加约束 $$x_3 = 0.8x_5$$ $$x_4 = 0.75x_6$$

非负约束 $$x_1, \cdots x_6 \ge 0$$

使用LINDO的一些注意事项

1. “>”（或“<”）号与“>=”（或“<=”）功能相同
2. 变量与系数间可有空格(甚至回车)，但无运算符
3. 变量名以字母开头，不能超过8个字符
4. 变量名不区分大小写（包括**LINDO**中的关键字）
5. 目标函数所在行是第一行，第二行起为约束条件
6. 行号(行名)自动产生或人为定义。行名以“）”结束
7. 行中注有“!”符号的后面部分为注释。如：

   ! It’s Comment.

8. 在模型的任何地方都可以用“**TITLE**” 对模型命名（最多72个字符），如：

   TITLE This Model is only an Example

使用LINDO的一些注意事项

9. 变量不能出现在一个约束条件的右端
10. 表达式中不接受括号"( )"和逗号","等任何符号，例：400(X1+X2)需写为400X1+400X2
11. 表达式应化简，如2X1+3X2- 4X1应写成 -2X1+3X2
12. 缺省假定所有变量非负；可在模型的"END"语句后用"FREE name"将变量name的非负假定取消
13. 可在 "END"后用"SUB" 或"SLB" 设定变量上下界

    例如： "sub x1 10"的作用等价于"x1<=10"

    但用"SUB"和"SLB"表示的上下界约束不计入模型的约束，也不能给出其松紧判断和敏感性分析。
14. "END"后对0-1变量说明：INT n 或 INT name
15. "END"后对整数变量说明：GIN n 或 GIN name

模型求解

软件实现 **LINDO 6.1**

$$2)\ \frac{x_1+x_5}{3}+\frac{x_2+x_6}{4}\le 50$$

$$\Downarrow$$

$$2)\ 4x_1+3x_2+4x_5+3x_6\le 600$$

$$3)\ 4(x_1+x_5)+2(x_2+x_6)+2x_5+2x_6\le 480$$

$$\Downarrow$$

$$3)\ 4x_1+2x_2+6x_5+4x_6\le 480$$

DO RANGE (SENSITIVITY) ANALYSIS? No

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 3460.800

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	0.000000	1.680000
X2	168.000000	0.000000
X3	19.200001	0.000000
X4	0.000000	0.000000
X5	24.000000	0.000000
X6	0.000000	1.520000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	3.160000
3)	0.000000	3.260000
4)	76.000000	0.000000
5)	0.000000	44.000000
6)	0.000000	32.000000

NO. ITERATIONS= 2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 3460.800

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	0.000000	1.680000
X2	168.000000	0.000000
X3	19.200001	0.000000
X4	0.000000	0.000000
X5	24.000000	0.000000
X6	0.000000	1.520000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	3.160000
3)	0.000000	3.260000
4)	76.000000	0.000000
5)	0.000000	44.000000
6)	0.000000	32.000000

NO. ITERATIONS= 2

结果解释

每天销售168 千克A_2和19.2 千克B_1，利润3460.8（元）

8桶牛奶加工成A_1，42桶牛奶加工成A_2，将得到的24千克A_1全部加工成B_1

除加工能力外均为紧约束

30元可增加1桶牛奶，3元可增加1小时时间，应否投资？现投资150元，可赚回多少？

注意变形后结果解释的变化

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 3460.800

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	0.000000	1.680000
X2	168.000000	0.000000
X3	19.200001	0.000000
X4	0.000000	0.000000
X5	24.000000	0.000000
X6	0.000000	1.520000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	3.160000
3)	0.000000	3.260000
4)	76.000000	0.000000
5)	0.000000	44.000000
6)	0.000000	32.000000

$$2)\ \frac{x_1+x_5}{3}+\frac{x_2+x_6}{4}\le 50$$

$$\Downarrow$$

$$2)\ 4x_1+3x_2+4x_5+3x_6\le 600$$

增加1桶牛奶使利润增长3.16×12=37.92

增加1小时时间使利润增长3.26

投资150元增加5桶牛奶，可赚回189.6元。（每3元牛奶投资回报大于每3元时间投资回报，3.792>3.26, 且灵敏度分析可知，该影子价格在增加120/12=10桶内都有效)

结果解释

B_1,B_2的获利有10%的波动，对计划有无影响

DO RANGE (SENSITIVITY) ANALYSIS? Yes

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

OBJ COEFFICIENT RANGES

VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X1	24.000000	1.680000	INFINITY
X2	16.000000	8.150000	2.100000
X3	44.000000	19.750002	3.166667
X4	32.000000	2.026667	INFINITY
X5	-3.000000	15.800000	2.533334
X6	-3.000000	1.520000	INFINITY

…… ……

B_1获利下降10%，超出X3 系数允许范围

B_2获利上升10%，超出X4 系数允许范围

波动对计划有影响

生产计划应重新制订：如将x_3的系数改为39.6(下降10%)计算，会发现结果有很大变化(自己试试看)。

Lingo程序
（不必变形，敏感性结果更易读）

```
model:
max=24*x1+16*x2+44*x3+32*x4-3*x5-3*x6;
(x1+x5)/3+(x2+x6)/4<50;
4*(x1+x5)+2*(x2+x6)+2*x5+2*x6<480;
x1+x5<100;
x3=0.8*x5;
x4=0.75*x6;
end
```

原料影子价格37.92;

时间影子价格3.26.

一句话小结

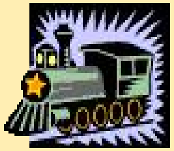
- 线性规划是管理科学的利器；
- 敏感性分析赋予线性规划更丰富的意义，对模型参数变化时计算结果的有效性作了深入的分析。

4.2　自来水输送与货机装运

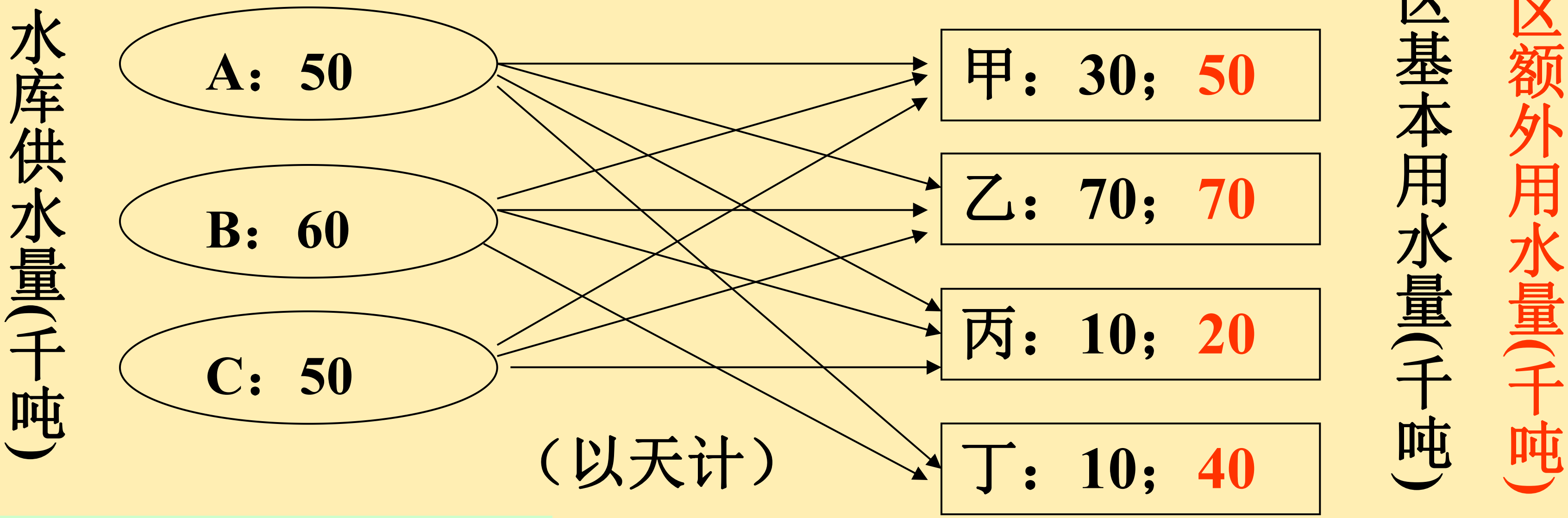
运输问题

生产、生活物资从若干供应点运送到一些需求点，怎样安排输送方案使运费最小，或利润最大?

各种类型的货物装箱，由于受体积、重量等限制，如何搭配装载，使获利最高，或装箱数量最少?



例1 自来水输送



收入：900元/千吨

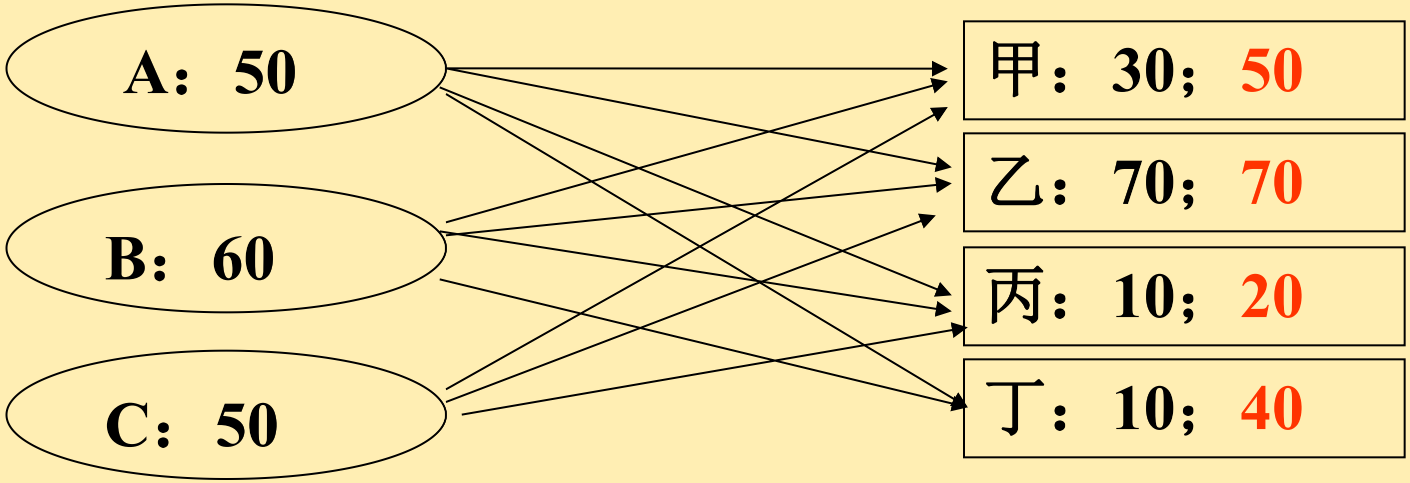
支出 引水管理费

元/千吨	甲	乙	丙	丁
A	160	130	220	170
B	140	130	190	150
C	190	200	230	/

其他费用:450元/千吨

- 应如何分配水库供水量，公司才能获利最多？
- 若水库供水量都提高一倍，公司利润可增加到多少？

问题分析



总供水量：160　　< 总需求量：120+180=300

收入：900元/千吨　　总收入900×160=144,000(元)

支出　　引水管理费

其他费用:450元/千吨　其他支出450×160=72,000(元)

确定送水方案使利润最大 ⟺ **使引水管理费最小**

模型建立 确定3个水库向4个小区的供水量

决策变量 水库i 向j 区的日供水量为 x_{ij}（$x_{34}=0$）

目标函数

$$Min \quad Z = 160x_{11} + 130x_{12} + 220x_{13} + 170x_{14} + 140x_{21} + 130x_{22} + 190x_{23} + 150x_{24} + 190x_{31} + 200x_{32} + 230x_{33}$$

约束条件

供应限制

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 50$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 60$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 50$$

需求限制

$$30 \le x_{11} + x_{21} + x_{31} \le 80$$
$$70 \le x_{12} + x_{22} + x_{32} \le 140$$
$$10 \le x_{13} + x_{23} + x_{33} \le 30$$
$$10 \le x_{14} + x_{24} \le 50$$

线性规划模型(LP)

模型求解

MATLAB程序

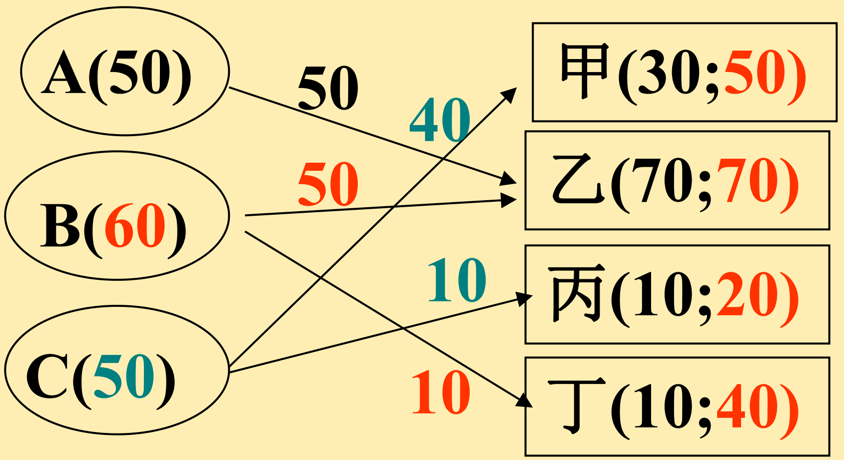
```
c=[160,130,220,170,140,130,190,150,190,200,230];
A=[1,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0;
   -1,0,0,0,-1,0,0,0,-1,0,0;
   0,1,0,0,0,1,0,0,0,1,0;
    0,-1,0,0,0,-1,0,0,0,-1,0;
    0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,1;
    0,0,-1,0,0,0,-1,0,0,0,-1;
    0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0;
   0,0,0,-1,0,0,0,-1,0,0,0];
B=[80,-30,140,-70,30,-10,50,-10]' ;
Aeq=[1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0;0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1];
Beq=[50 60 50]' ;
[x,fv]=linprog(c,A,B,Aeq,Beq,zeros(11,1))
```

MATLAB程序运行结果

```
Optimization terminated.

x =
      0.0000
     50.0000
      0.0000
      0.0000
      0.0000
     50.0000
      0.0000
     10.0000
     40.0000
      0.0000
     10.0000

fv =
     2.4400e+04
```



引水管理费 24400(元)

利润=总收入-其它费用 - 引 水 管 理 费 =144000-72000-24400 = 47600（元）

模型求解

Lingo求解部分结果：

Objective Value: 24400.00

Variable	Value	Reduced Cost
X11	0.000000	30.000000
X12	50.000000	0.000000
X13	0.000000	50.000000
X14	0.000000	20.000000
X21	0.000000	10.000000
X22	50.000000	0.000000
X23	0.000000	20.000000
X24	10.000000	0.000000
X31	40.000000	0.000000
X32	0.000000	10.000000
X33	10.000000	0.000000

问题讨论

每个水库最大供水量都提高一倍

总供水量(320) > 总需求量(300) 确定送水方案使利润最大

利润 = 收入(900) –其它费用(450) –引水管理费

利润(元/千吨)	甲	乙	丙	丁
A	290	320	230	280
B	310	320	260	300
C	260	250	220	/

目标函数

$$Max \quad Z = 290x_{11} + 320x_{12} + 230x_{13} + 280x_{14}$$
$$+310x_{21} + 320x_{22} + 260x_{23} + 300x_{24} + 260x_{31} + 250x_{32} + 220x_{33}$$

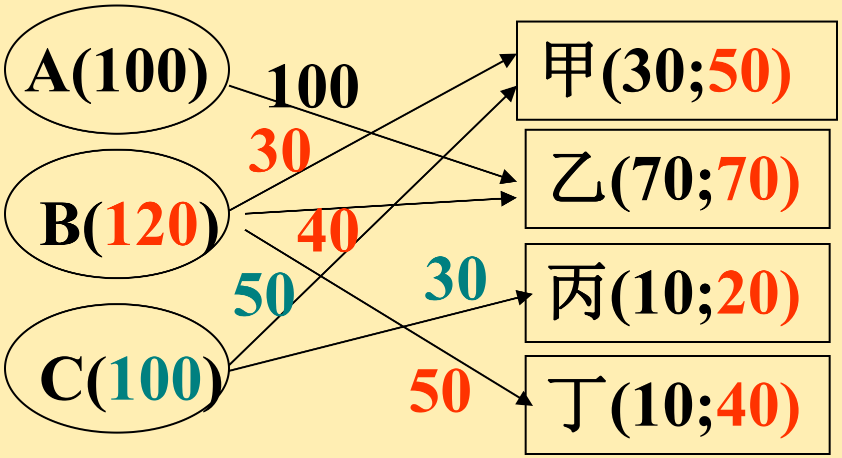
供应限制

$$A: \ x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 50 \ \Rightarrow \ x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \le 100$$

B, C 类似处理

需求约束可以不变

求解



总利润 88700（元）

运输问题

$\text{供应点} \xrightarrow{\text{物资}} \text{需求点}$

供需平衡或不平衡

部分结果：

Objective Value: 88700.00

Variable	Value	Reduced Cost
X11	0.000000	20.000000
X12	100.000000	0.000000
X13	0.000000	40.000000
X14	0.000000	20.000000
X21	30.000000	0.000000
X22	40.000000	0.000000
X23	0.000000	10.000000
X24	50.000000	0.000000
X31	50.000000	0.000000
X32	0.000000	20.000000
X33	30.000000	0.000000

例2 货机装运 三个货舱最大载重(吨), 最大容积(米^3)

前仓：	中仓：	后仓：
10；6800	16；8700	8；5300

飞机平衡

三个货舱中实际载重必须与其最大载重成比例

	重量（吨）	空间（米^3/吨）	利润（元/吨）
货物1	18	480	3100
货物2	15	650	3800
货物3	23	580	3500
货物4	12	390	2850

如何装运，使本次飞行获利最大？

货机装运

已知参数

i=1,2,3,4（货物）

j=1,2,3 (分别代表前、中、后仓)

货舱j的重量限制WET_j

体积限制VOL_j

第i种货物的重量w_i，体积v_i，利润p_i

WET=(10,16,8), VOL=(6800,8700,5300);

w=(18,15,23,12), v=(480,650, 580,390),

p=(3100,3800,3500,2850).

货机装运

模型假设

每种货物可以分割到任意小；

每种货物可以在一个或多个货舱中任意分布；

多种货物可以混装，并保证不留空隙；

所给出的数据都是精确的，没有误差.

模型建立

决策变量

x_{ij}——第i 种货物装入第j 个货舱的重量(吨)

i=1,2,3,4, j=1,2,3 (分别代表前、中、后仓)

货机装运

模型建立

x_{ij}--第i 种货物装入第j 个货舱的重量

目标函数(利润)

$$Max \quad Z = \sum_{i=1}^{4} p_i \left(\sum_{j=1}^{3} x_{ij} \right)$$

约束条件

货舱重量

$$\sum_{i=1}^{4} x_{ij} \le WET_j$$

10; 6800 | 16; 8700 | 8; 5300

货舱容积

$$\sum_{i=1}^{4} v_i x_{ij} \le VOL_j$$

货机装运

模型建立

x_{ij}--第i 种货物装入第j 个货舱的重量

10; 6800	16; 8700	8; 5300

约束条件

平衡要求

$$\sum_{i=1}^{4} x_{ij} / WET_j = \sum_{i=1}^{4} x_{ik} / WET_k$$

$j,k=1,2,3;\ j\neq k$

货物供应

$$\sum_{j=1}^{3} x_{ij} \le w_i$$

货机装运

LINGO程序

```
!定义集合及变量;
sets:
  cang/1..3/:WET,VOL;
  wu/1..4/:w,v,p;
  link(wu,cang):x;
endsets
!对已知变量赋值;
data:
  WET=10,16,8; VOL=6800,8700,5300;
  w=18,15,23,12; v=480,650, 580,390;
  p=3100,3800,3500,2850;
enddata
max=@sum(wu(i):p(i)*@sum(cang(j):x(i,j)));
@for(wu(i):@sum(cang(j):x(i,j))<w(i));
@for(cang(j):@sum(wu(i):x(i,j))<WET(j));
@for(cang(j):@sum(wu(i):v(i)*x(i,j))<VOL(j));
@for(cang(j):
    @for(cang(k)|k #GT# j:          !#GT#是大于等于的含义;
    @sum(wu(i):x(i,j)/WET(j))=@sum(wu(i):x(i,k)/WET(k)));
);
END
```

$$Max \quad Z=\sum_{i=1}^{4} p_i\left(\sum_{j=1}^{3} x_{ij}\right)$$

$$\sum_{j=1}^{3} x_{ij} \le w_i$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_{ij} \le WET_j$$

$$\sum_{i=1}^{4} v_i x_{ij} \le VOL_j$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_{ij}/WET_j = \sum_{i=1}^{4} x_{ik}/WET_k$$

$j,k=1,2,3;\ j\neq k$

货机装运

模型求解

Global optimal solution found.
Objective value: 121515.8
Total solver iterations: 12

Variable	Value	Reduced Cost
X(1, 1)	0.000000	400.0000
X(1, 2)	0.000000	57.89474
X(1, 3)	0.000000	400.0000
X(2, 1)	7.000000	0.000000
X(2, 2)	0.000000	239.4737
X(2, 3)	8.000000	0.000000
X(3, 1)	3.000000	0.000000
X(3, 2)	12.94737	0.000000
X(3, 3)	0.000000	0.000000
X(4, 1)	0.000000	650.0000
X(4, 2)	3.052632	0.000000
X(4, 3)	0.000000	650.0000

货物2：前仓7, 后仓8；

货物3：前仓3, 中仓13；

货物4：中仓3。

最大利润约121516元

货物~供应点
货舱~需求点

运输问题

装载平衡要求

运输问题的扩展

4.3 汽车生产与原油采购

例1 汽车厂生产计划

汽车厂生产三种类型的汽车，已知各类型每辆车对钢材、劳动时间的需求，利润及工厂每月的现有量。

	小型	中型	大型	现有量
钢材（吨）	1.5	3	5	600
劳动时间（小时）	280	250	400	60200
利润（万元）	2	3	4	

- 制订月生产计划，使工厂的利润最大。
- 如果生产某一类型汽车，则至少要生产80辆，那么最优的生产计划应作何改变？

汽车厂生产计划

LP模型建立

	小型	中型	大型	现有量
钢材	1.5	3	5	600
时间	280	250	400	60200
利润	2	3	4	

设每月生产小、中、大型汽车的数量分别为x_1, x_2, x_3

$$Max \quad z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

$$s.t. \quad 1.5x_1 + 3x_2 + 5x_3 \le 600$$

$$280x_1 + 250x_2 + 400x_3 \le 60200$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

数量级差别大，最好两边同除以100

```
Max=2*x1+3*x2+4*x3;
1.5*x1+3*x2+5*x3<600;
2.8*x1+2.5*x2+4*x3<602;
```

LP模型求解

Variable	Value	Reduced Cost
X1	65.80645	0.000000
X2	167.0968	0.000000
X3	0.000000	0.9462366
Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	632.9032	1.000000
2	0.000000	0.7311828
3	0.000000	0.3225806

结果为小数，怎么办？

1）舍去小数：取x_1=65，x_2=167，x3=0, 算出目标函数值z=631，与LP最优值632.9032相差不大。

2）试探：如取x_1=65，x_2=167；x_1=66，x_2=168等，计算函数值z，通过比较可能得到更优的解。可能找不到最优！

• 但必须检验它们是否满足约束条件。可能不是可行解！

3）正确方案： 模型中增加条件：x_1, x_2, x_3 均为整数，重新求解。

IP模型

整数规划（Integer Programming, 简记IP）

$$Max \quad z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

$$s.t. \quad 1.5x_1 + 3x_2 + 5x_3 \le 600$$

$$2.8x_1 + 2.5x_2 + 4x_3 \le 602$$

x_1, x_2, x_3为非负整数

IP可用LINGO直接求解

```
Max=2*x1+3*x2+4*x3;
1.5*x1+3*x2+5*x3<600;
2.8*x1+2.5*x2+4*x3<602;
@gin(x1);@gin(x2);@gin(x3);
```

IP 结果输出

```
OBJECTIVE FUNCTION VALUE
      1)        632.0000
VARIABLE  VALUE   REDUCED COST
      X1        64.000000        -2.000000
      X2       168.000000        -3.000000
      X3         0.000000        -4.000000
```

IP 的最优解x_1=64，x_2=168，x_3=0，最优值z=632

MATLAB的intlinprog求解

```
>> c=[-2 -3 -4]; A=[1.5 3 5;2.8 2.5 4]; b=[600,602]';

>> [x,fv]=intlinprog(c,1:3,A,b,[],[],zeros(3,1))
```

```
x =
   64.0000
  168.0000
         0

fv =
 -632.0000
```

汽车厂生产计划

- 若生产某类汽车，则至少生产80辆，求生产计划。

$$Max \quad z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

$$s.t. \quad 1.5x_1 + 3x_2 + 5x_3 \le 600$$

$$2.8x_1 + 2.5x_2 + 4x_3 \le 602$$

x_1, x_2, x_3=0 或 ≥80

$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 \ge 80$

$x_1 = 0, x_2 \ge 80, x_3 = 0$

$x_1 = 0, x_2 \ge 80, x_3 \ge 80$ ×

$x_1 \ge 80, x_2 = 0, x_3 = 0$

$x_1 \ge 80, x_2 \ge 80, x_3 = 0$

$x_1 \ge 80, x_2 = 0, x_3 \ge 80$

$x_1 \ge 80, x_2 \ge 80, x_3 \ge 80$ ×

$x_1, x_2, x_3 = 0$ ×

方法1：分解为8个LP子模型

其中3个子模型应去掉，然后逐一求解，比较目标函数值，再加上整数约束，得最优解：

x_1=80，x_2= 151，x_3=0，最优值z=613

• 若生产某类汽车，则至少生产80辆，求生产计划。

方法2：引入0-1变量，化为0-1整数规划

x_1=0 或 ≥80 ⇨ $x_1 \le My_1,\ x_1 \ge 80y_1,\ y_1 \in \{0,1\}$

x_2=0 或 ≥80 ⇨ $x_2 \le My_2,\ x_2 \ge 80y_2,\ y_2 \in \{0,1\}$

x_3=0 或 ≥80 ⇨ $x_3 \le My_3,\ x_3 \ge 80y_3,\ y_3 \in \{0,1\}$

M为足够大的正数(可取x_1，x_2，x_3的上界，如取1000)

LINGO中对0-1变量的限定：

@bin(y1);

@bin(y2);

@bin(y3);

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 613.0000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	80.000000	-2.000000
X2	151.000000	-3.000000
X3	0.000000	-4.000000
Y1	1.000000	0.000000
Y2	1.000000	0.000000
Y3	0.000000	0.000000

最优解同前

- 若生产某类汽车，则至少生产80辆，求生产计划。

方法3：化为非线性规划(不提倡, 不一定得到最优)

x_1=0 或 ≥80 $\Rightarrow$ $x_1(x_1-80)\ge 0$

x_2=0 或 ≥80 $\Rightarrow$ $x_2(x_2-80)\ge 0$

x_3=0 或 ≥80 $\Rightarrow$ $x_3(x_3-80)\ge 0$

非线性规划（**Non- Linear Programming**，简记**NLP**）

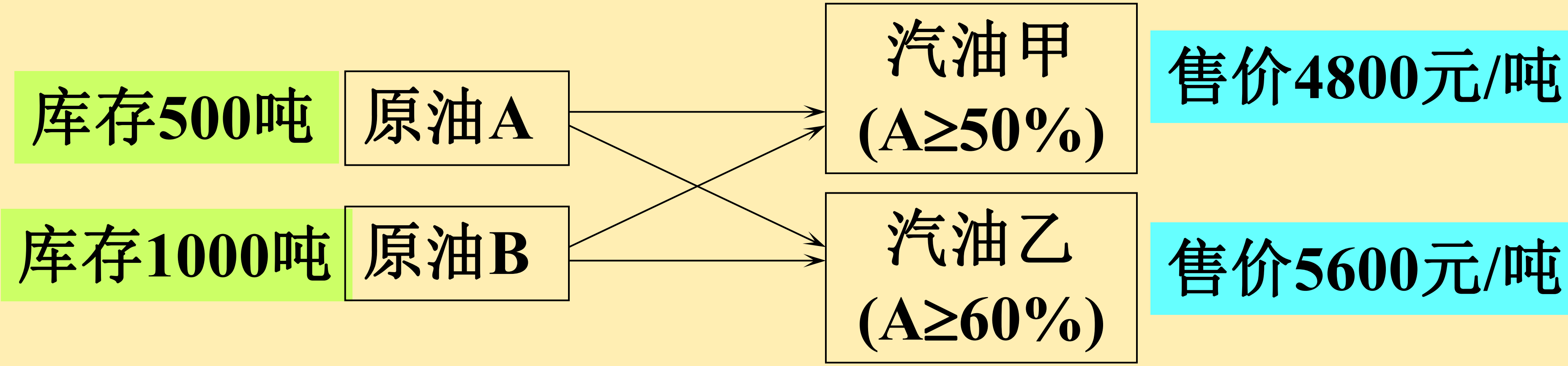
NLP虽然可用现成的数学软件求解(如**LINGO**, **MATLAB**)，但是其结果常依赖于初值的选择。

实践表明，本例仅当初值非常接近上面方法算出的最优解时，才能得到正确的结果。

一句话小结

- 很多变量只有取整数时才有实际意义；
- 整数规划可用线性规划近似求解，但往往得不到最优解；
- 通过引进0-1变量，可能化复杂的非线性规划为线性规划。

例2　原油采购与加工



市场上可买到不超过1500吨的原油A：

- 购买量不超过500吨时的单价为10000元/吨；
- 购买量超过500吨但不超过1000吨时，超过500吨的部分8000元/吨；
- 购买量超过1000吨时，超过1000吨的部分6000元/吨。

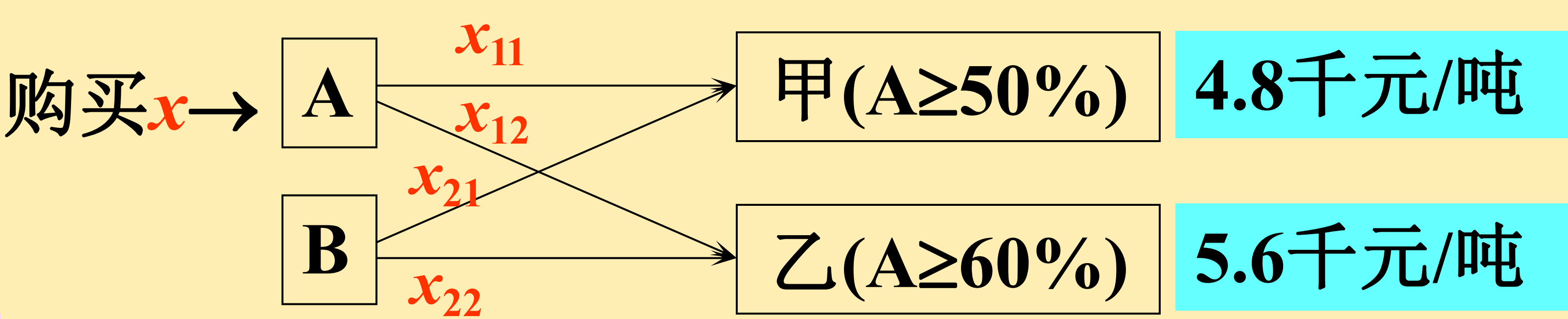
应如何安排原油的采购和加工？

问题分析

- 利润：销售汽油的收入 － 购买原油A的支出
- 难点：原油A的购价与购买量的关系较复杂

决策变量

原油A的购买量, 原油A, B生产汽油甲,乙的数量



目标函数

利润(千元)

$c(x)$ ~ 购买原油A的支出

$$Max\ \ z = 4.8(x_{11}+x_{21}) + 5.6(x_{12}+x_{22}) - c(x)$$

$c(x)$如何表述？

目标函数

- $x \le 500$吨单价为10千元/吨；
- 500吨$\le x \le 1000$吨，超过500吨的8千元/吨；
- 1000吨$\le x \le 1500$吨，超过1000吨的6千元/吨。

$$c(x)=\begin{cases}10x & (0\le x\le 500)\\ 8x+1000 & (500\le x\le 1000)\\ 6x+3000 & (1000\le x\le 1500)\end{cases}$$

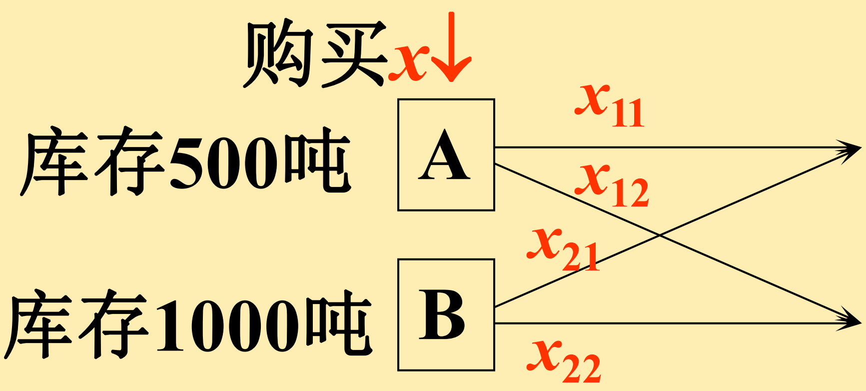
约束条件

原油供应

$$x_{11}+x_{12}\le 500+x$$

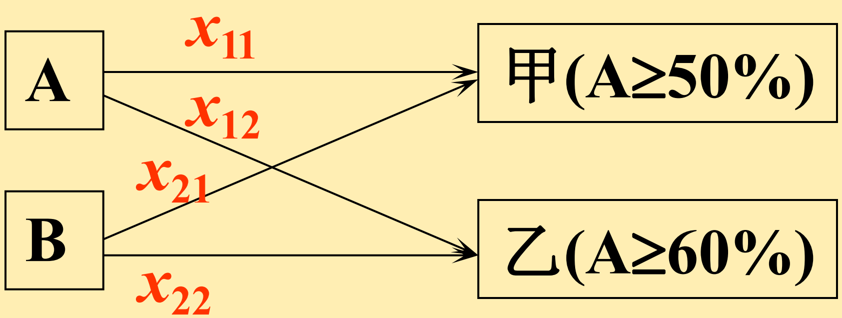
$$x_{21}+x_{22}\le 1000$$

$$x\le 1500$$



约束条件

汽油含原油A的比例限制



$$\frac{x_{11}}{x_{11}+x_{21}} \ge 0.5 \quad \Leftrightarrow x_{11} \ge x_{21}$$

$$\frac{x_{12}}{x_{12}+x_{22}} \ge 0.6 \quad \Leftrightarrow 2x_{12} \ge 3x_{22}$$

- 目标函数中$c(x)$不是线性函数，是非线性规划；
- 对于用分段函数定义的$c(x)$，一般的非线性规划软件也难以输入和求解；
- 想办法将模型化简，利于求解。

模型求解　　　**方法1**

x_1, x_2, x_3~以价格10, 8, 6(千元/吨)采购A的吨数

$x = x_1+x_2+x_3$, $c(x) = 10x_1+8x_2+6x_3$

目标函数　$Max \quad z = 4.8(x_{11}+x_{21}) + 5.6(x_{12}+x_{22}) - (10x_1+8x_2+6x_3)$

- 500吨≤ x ≤ 1000吨，超过500吨的8千元/吨

增加约束

只有当以10千元/吨的价格购买x_1=500（吨）时，才能以8千元/吨的价格购买x_2 ⇨ $(x_1-500)x_2 = 0$

$(x_2-500)x_3 = 0$　　　　$0 \le x_1, x_2, x_3 \le 500$

非线性规划模型，可以用LINGO求解(不提倡)

```
Model:
Max= 4.8*x11 + 4.8*x21 + 5.6*x12
+ 5.6*x22 - 10*x1 - 8*x2 - 6*x3;
x11+x12 < x + 500;
x21+x22 < 1000;
x11 - x21 > 0;
2*x12 - 3*x22 > 0;
x=x1+x2+x3;
(x1 - 500) * x2=0;
(x2 - 500) * x3=0;
x1 < 500;
x2 < 500;
x3 < 500;
x > 0;
x11 > 0;
x12 > 0;
x21 > 0;
x22 > 0;
x1 > 0;
x2 > 0;
x3 > 0;
end
```

方法1：LINGO求解

Objective value: 4800.000

Variable	Value	Reduced Cost
X11	500.0000	0.0000000E+00
X21	500.0000	0.0000000E+00
X12	0.0000000E+00	0.0000000E+00
X22	0.0000000E+00	0.0000000E+00
X1	0.1021405E-13	10.00000
X2	0.0000000E+00	8.000000
X3	0.0000000E+00	6.000000
X	0.0000000E+00	0.0000000E+00

用库存的500吨原油A、500吨原油B生产汽油甲，不购买新的原油A，利润为4,800千元。

LINGO得到的是局部最优解，还能得到更好的解吗？

方法2 y_1, y_2, y_3=1 ~有以价格10, 8, 6(千元/吨)采购A

增加约束

x_1, x_2, x_3~以价格10, 8, 6(千元/吨)采购A的吨数

$$500y_2 \le x_1 \le 500y_1 \qquad 500\,y_3 \le x_2 \le 500\,y_2$$

$$x_3 \le 500y_3 \qquad y_1, y_2, y_3 = 0或1$$

$\Rightarrow$ $y=0 \rightarrow x=0$

$x>0 \rightarrow y=1$

0-1线性规划模型，可用LINGO求解

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 5000.000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
Y1	1.000000	0.000000
Y2	1.000000	2200.000000
Y3	1.000000	1200.000000
X11	0.000000	0.800000
X21	0.000000	0.800000
X12	1500.000000	0.000000
X22	1000.000000	0.000000
X1	500.000000	0.000000
X2	500.000000	0.000000
X3	0.000000	0.400000
X	1000.000000	0.000000

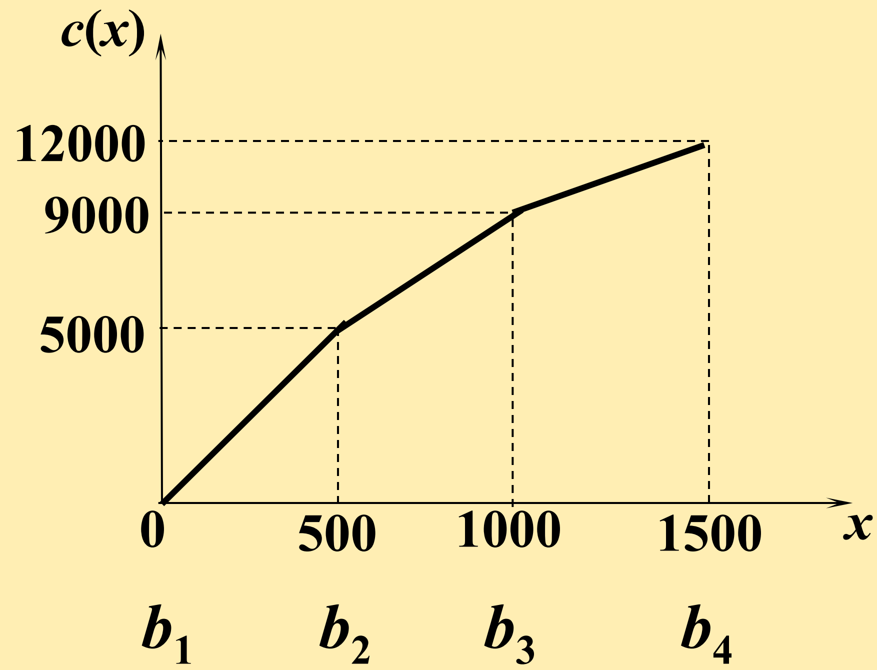
购买1000吨原油A，与库存的500吨原油A和1000吨原油B一起，生产汽油乙，利润为5,000千元。

优于方法1的结果

方法3

直接处理分段线性函数$c(x)$

$$c(x)=\begin{cases} 10x & (0\le x\le 500) \\ 8x+1000 & (500\le x\le 1000) \\ 6x+3000 & (1000\le x\le 1500) \end{cases}$$



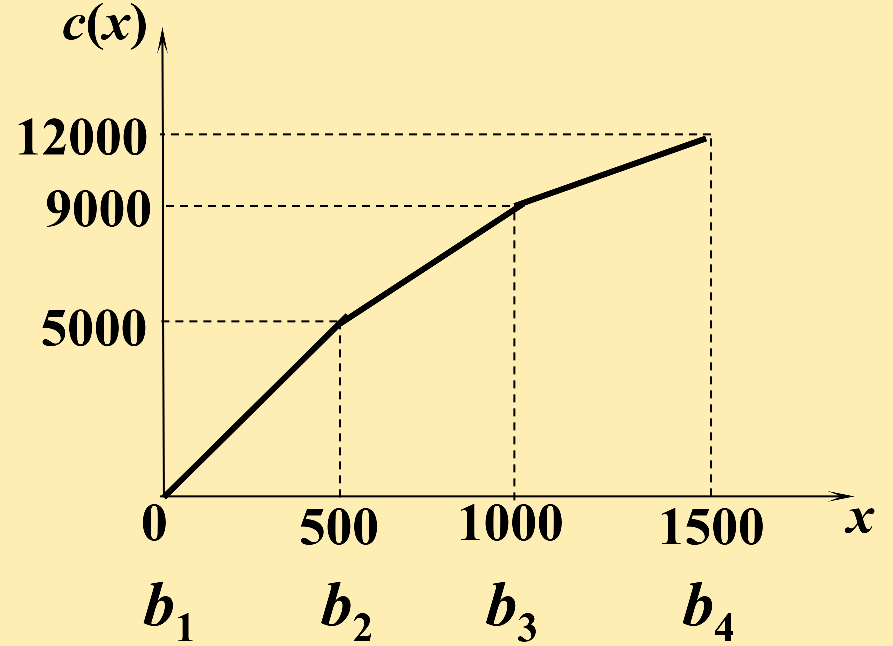
$b_1\le x\le b_2$， $x= z_1b_1+z_2b_2$，
$z_1+z_2=1$， $z_1, z_2\ge 0$,
$c(x)= z_1c(b_1)+z_2c(b_2)$.

$b_2\le x\le b_3$， $x= z_2b_2+z_3b_3$，
$z_2+z_3=1$， $z_2, z_3\ge 0$,
$c(x)= z_2c(b_2)+z_3c(b_3)$.

$b_3\le x\le b_4$， $x= z_3b_3+z_4b_4$，
$z_3+z_4=1$， $z_3, z_4\ge 0$,
$c(x)= z_3c(b_3)+z_4c(b_4)$.

方法3 插值加权方法

$$c(x)=\begin{cases}10x & (0\le x\le 500)\\ 8x+1000 & (500\le x\le 1000)\\ 6x+3000 & (1000\le x\le 1500)\end{cases}$$



取权系数 $z_k \ge 0\ (k=1,2,3,4)$

$$z_1+z_2+z_3+z_4=1,$$

当 $b_i < x \le b_{i+1}$, 0-1变量 y_i=1, i=1,2,3

$$y_1+y_2+y_3=1$$

永远只有一段起作用

$$z_1\le y_1,\ z_2\le y_1+y_2,\ z_3\le y_2+y_3,\ z_4\le y_3$$

IP模型，LINDO求解，得到的结果与方法2相同.

$$x=z_1b_1+z_2b_2+z_3b_3+z_4b_4$$

$$c(x)=z_1c(b_1)+z_2c(b_2)+z_3c(b_3)+z_4c(b_4)$$

小结：引入0-1变量的技巧

- 设所有变量非负， 已知$x \le M$,且若$x>0$时, $x \ge m$.
- 令$z=0$ or 1, 那么
  - ➢ 若$x>0$, 则$z=1$ ($\Leftrightarrow$若$z=0$, 则$x=0$)**表示为: $x \le Mz$**
  - ➢ 若$x=0$, 则$z=0$ ($\Leftrightarrow$若$z=1$, 则$x>0$)**表示为: $x \ge mz$**
- 条件约束 if, then (设$x_1+x_2-3 \le M$且若$x_1+x_2-3>0$, 则$\ge m$)
  - 若$x_1+x_2>3$, 则$x_3+x_4 \ge 6$**表示为: $x_3+x_4 \ge 6z$, $x_1+x_2-3 \le Mz$**
  - 若$x_1+x_2=3$, 则$x_3+x_4 \ge 6$**表示为: $x_3+x_4 \ge 6(1-z)$, $x_1+x_2-3 \ge mz$**
- 逻辑运算 or, and, 令$z_{1,2}=0$ or 1,
  - $x_1 \ge 3$或$x_2 \ge 3$**表示为: $x_1 \ge 3z_1$, $x_2 \ge 3z_2$, $z_1+z_2 \ge 1$**
- 分段线性目标函数
  - 如例2 原油采购与加工

4.4　接力队选拔和选课策略

分派问题(指派问题)

若干项任务分给一些候选人来完成，每人的专长不同，完成每项任务取得的效益或需要的资源就不同，如何分派任务使获得的总效益最大，或付出的总资源最少。

若干种策略供选择，不同的策略得到的收益或付出的成本不同，各个策略之间有相互制约关系，如何在满足一定条件下作出决择，使得收益最大或成本最小。

例1 混合泳接力队的选拔

5名候选人的百米成绩

	甲	乙	丙	丁	戊
蝶泳	1’06”8	57”2	1’18”	1’10”	1’07”4
仰泳	1’15”6	1’06”	1’07”8	1’14”2	1’11”
蛙泳	1’27”	1’06”4	1’24”6	1’09”6	1’23”8
自由泳	58”6	53”	59”4	57”2	1’02”4

如何选拔队员组成4×100米混合泳接力队?

丁的蛙泳成绩退步到1’15”2；戊的自由泳成绩进步到57”5, 组成接力队的方案是否应该调整?

枚举法：组成接力队的方案共有5!=120种。

0-1规划模型 c_{ij}(秒)~队员i 第j种泳姿的百米成绩

c_{ij}	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5
j=1	66.8	57.2	78	70	67.4
j=2	75.6	66	67.8	74.2	71
j=3	87	66.4	84.6	69.6	83.8
j=4	58.6	53	59.4	57.2	62.4

若选择队员i参加泳姿j的比赛，记$x_{ij}=1$，否则记$x_{ij}=0$

目标函数

$$Min \quad Z=\sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{5}c_{ij}x_{ij}$$

小规模问题可用枚举法求解

约束条件

每人最多入选泳姿之一

$$\sum_{j=1}^{4}x_{ij}\le 1,\ i=1,\cdots 5$$

每种泳姿有且只有1人

$$\sum_{i=1}^{5}x_{ij}=1,\ \ j=1,\cdots 4$$

模型求解　输入LINDO求解

```
MIN  66.8x11+75.6x12+87x13+58.6x14
   +… …
   +67.4x51+71  x52+83.8x53+62.4x54
SUBJECT TO
    x11+x12+x13+x14 <=1
    … …
    x41+x42+x43+x44 <=1
    x11+x21+x31+x41+x51 =1
    … …
    x14+x24+x34+x44+x54 =1
END
INT 20
```

最优解：$x_{14} = x_{21} = x_{32} = x_{43} = 1$，其它变量为0；

成绩为253.2（秒）=4'13"2

甲~ 自由泳、乙~ 蝶泳、丙~ 仰泳、丁~ 蛙泳.

	甲	乙	丙	丁	戊
蝶泳	1'06"8	57"2	1'18"	1'10"	1'07"4
仰泳	1'15"6	1'06"	1'07"8	1'14"2	1'11"
蛙泳	1'27"	1'06"4	1'24"6	1'09"6	1'23"8
自由泳	58"6	53"	59"4	57"2	1'02"4

模型求解

输入LINGO求解

```
model:
!混合泳接力队的选拔;
sets:
  members/1..5/;
  poses/1..4/;
  links(members,poses): time, x;
endsets
!目标函数;
  min=@sum(links: time*x);
!每人最多入选1项泳姿;
  @for(members(i):
    @sum(poses(j): x(i,j))<1);
!每种泳姿有且只有1个人;
  @for(poses(j):
    @sum(members(i): x(i,j))=1);
!这里是数据;
data:
  time=66.8 75.6 87 58.6
       57.2 66 66.4 53
       78 67.8 84.6 59.4
       70 74.2 69.6 57.2
       67.4 71 83.8 62.4;
enddata
end
```

$$Min \quad Z=\sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{5}c_{ij}x_{ij}$$

每人最多入选泳姿之一

$$\sum_{j=1}^{4}x_{ij}\le 1,\ i=1,\cdots 5$$

每种泳姿有且只有1人

$$\sum_{i=1}^{5}x_{ij}=1,\ j=1,\cdots 4$$

最优解：$x_{14}=x_{21}=x_{32}=x_{43}=1$，其它变量为0;

成绩为253.2(秒)=4’13”2

甲~ 自由泳、乙~ 蝶泳、丙~ 仰泳、丁~ 蛙泳.

	甲	乙	丙	丁	戊
蝶泳	1’06”8	57”2	1’18”	1’10”	1’07”4
仰泳	1’15”6	1’06”	1’07”8	1’14”2	1’11”
蛙泳	1’27”	1’06”4	1’24”6	1’09”6	1’23”8
自由泳	58”6	53”	59”4	57”2	1’02”4

讨论

丁蛙泳c_{43} =69.6→75.2，戊自由泳c_{54}=62.4 → 57.5，方案是否调整？ 灵敏度分析？

IP规划一般没有与LP规划相类似的理论，LINDO输出的灵敏度分析结果通常是没有意义的。

c_{43}, c_{54} 的新数据重新输入模型，用LINDO求解

最优解：$x_{21} = x_{32} = x_{43} = x_{51} = 1$，成绩为4'17"7

乙~ 蝶泳、丙~ 仰泳、丁~ 蛙泳、戊~ 自由泳

原方案

甲~ 自由泳、乙~ 蝶泳、丙~ 仰泳、丁~ 蛙泳.

指派(Assignment)问题：每项任务有且只有一人承担，每人只能承担一项，效益不同，怎样分派使总效益最大.

例2　选课策略

课号	课名	学分	所属类别	先修课要求
1	微积分	5	数学	
2	线性代数	4	数学	
3	最优化方法	4	数学；运筹学	微积分；线性代数
4	数据结构	3	数学；计算机	计算机编程
5	应用统计	4	数学；运筹学	微积分；线性代数
6	计算机模拟	3	计算机；运筹学	计算机编程
7	计算机编程	2	计算机	
8	预测理论	2	运筹学	应用统计
9	数学实验	3	运筹学；计算机	微积分；线性代数

要求至少选两门数学课、三门运筹学课和两门计算机课

为了选修课程门数最少，应学习哪些课程 ？

选修课程最少，且学分尽量多，应学习哪些课程 ？

0-1规划模型

课号	课名	所属类别
1	微积分	数学
2	线性代数	数学
3	最优化方法	数学；运筹学
4	数据结构	数学；计算机
5	应用统计	数学；运筹学
6	计算机模拟	计算机；运筹学
7	计算机编程	计算机
8	预测理论	运筹学
9	数学实验	运筹学；计算机

决策变量

x_i=1 ~选修课号i 的课程（x_i=0 ~不选）

目标函数

选修课程总数最少

$$Min \quad Z=\sum_{i=1}^{9} x_i$$

约束条件

最少2门数学课，
3门运筹学课，
2门计算机课。

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 \geq 2$$

$$x_3+x_5+x_6+x_8+x_9 \geq 3$$

$$x_4+x_6+x_7+x_9 \geq 2$$

0-1规划模型

课号	课名	先修课要求
* 1	微积分	
* 2	线性代数	
* 3	最优化方法	微积分；线性代数
4	数据结构	计算机编程
5	应用统计	微积分；线性代数
* 6	计算机模拟	计算机编程
* 7	计算机编程	
8	预测理论	应用统计
* 9	数学实验	微积分；线性代数

模型求解（LINDO）

最优解： $x_1 = x_2 = x_3 = x_6 = x_7 = x_9$ $=1$, 其它为0；6门课程，总学分21

约束条件

先修课程要求

x_3=1必有$x_1 = x_2$=1

$$x_3 \le x_1, x_3 \le x_2$$

$$2x_3 - x_1 - x_2 \le 0$$

$$x_4 \le x_7 \Rightarrow x_4 - x_7 \le 0$$

$$2x_5 - x_1 - x_2 \le 0$$

$$x_6 - x_7 \le 0$$

$$x_8 - x_5 \le 0$$

$$2x_9 - x_1 - x_2 \le 0$$

讨论：选修课程最少，学分尽量多，应学习哪些课程？

课程最少

$$Min \quad Z = \sum_{i=1}^{9} x_i$$

学分最多

$$Max \; W = 5x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 3x_6 + 2x_7 + 2x_8 + 3x_9$$

两目标(多目标)规划 $\quad Min \, \{Z, -W\}$

多目标优化的处理方法：化成单目标优化。

- 以课程最少为目标，不管学分多少。

最优解如上，6门课程，总学分21 。

- 以学分最多为目标，不管课程多少。

最优解显然是选修所有9门课程 。

多目标规划

- 在课程最少的前提下以学分最多为目标。

⇨ 增加约束 $\sum_{i=1}^{9} x_i = 6$，以学分最多为目标求解。

课号	课名	学分
* 1 *	微积分	5
* 2 *	线性代数	4
* 3 *	最优化方法	4
4	数据结构	3
5 *	应用统计	4
* 6	计算机模拟	3
* 7 *	计算机编程	2
8	预测理论	2
* 9 *	数学实验	3

最优解：$x_1 = x_2 = x_3 = x_5 = x_7 = x_9 = 1$，其它为0；总学分由21增至22。

注意：最优解不唯一！

可将$x_9 = 1$ 易为$x_6 = 1$

LINDO无法告诉优化问题的解是否唯一。

思考：怎么找所有最优解？

多目标规划

- 其他方法
  - 在学分最多前提下，求课程最少；
  - 在各种课程门数(6,7,8,9)前提下，求学分最多；
  - 在各种学分前提下，求课程最少。

多目标规划

- 对学分数和课程数加权形成一个目标，如三七开。

$$Min \quad Y = \lambda_1 Z - \lambda_2 W = 0.7Z - 0.3W$$

$$Z = \sum_{i=1}^{9} x_i$$

课号	课名	学分
1 *	微积分	5
2 *	线性代数	4
3 *	最优化方法	4
4 *	数据结构	3
5 *	应用统计	4
6 *	计算机模拟	3
7 *	计算机编程	2
8	预测理论	2
9 *	数学实验	3

$$W = 5x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 3x_6 + 2x_7 + 2x_8 + 3x_9$$

最优解： $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = x_9 = 1$，

其它为0；总学分28。

多目标规划　　讨论与思考

$$Min\ \ Y=\lambda_1 Z-\lambda_2 W \qquad \lambda_1+\lambda_2=1, \quad 0\le \lambda_1, \lambda_2 \le 1$$

$$Z=\sum_{i=1}^{9} x_i \qquad W=5x_1+4x_2+4x_3+3x_4+4x_5+3x_6+2x_7+2x_8+3x_9$$

$\lambda_1<2/3$　最优解与λ_1=0，λ_2=1的结果相同, 学分最多, 9门

$\lambda_1>3/4$　最优解与λ_1=1，λ_2=0的结果相同, 课程最少, 6门

用Matlab求解得：λ_1=0.7八门，　λ_1=0.75七门

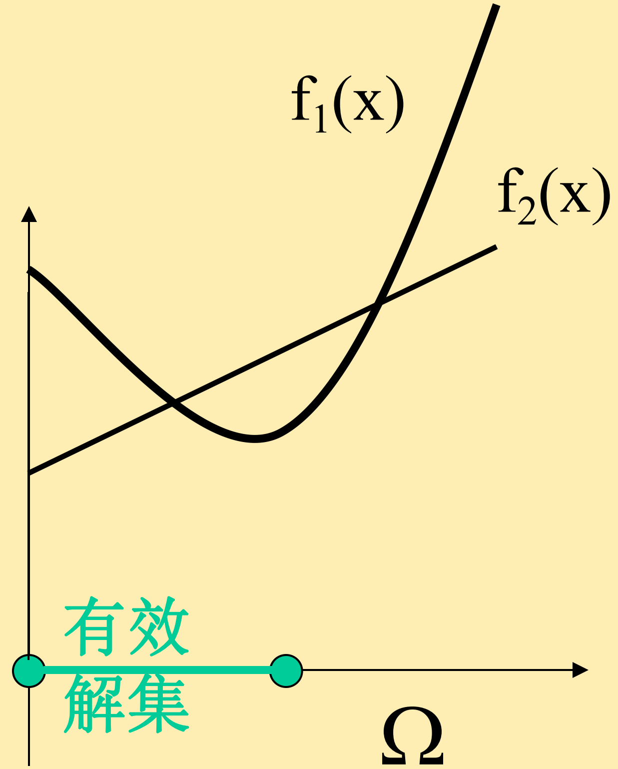
小结：多目标问题化单目标

- Min $(f_1(x), f_2(x))$, $x \in \Omega$
- 有效解集(非劣解,次优解)x: 不存在y $\in \Omega$, 使$f_i(y) \le f_i(x)$, i=1,2, 且至少一个不等式成立.
- 分层排序法: 按重要程度先求$f_1(x)$最优解集合,从其中再找$f_2(x)$最优(如例2方法)
- 加权综合法:

  线性加权： $f(\lambda, x)= \lambda f_1(x)+(1- \lambda)f_2(x)$, 对$\lambda \in[0,1]$求不同解(如例2方法)

  指数加权： $f(\lambda, x)= f_1(x)^{\lambda} f_2(x)^{(1- \lambda)}$
- 目标转化法: 保留一个主要目标, 将其他目标转化为约束条件

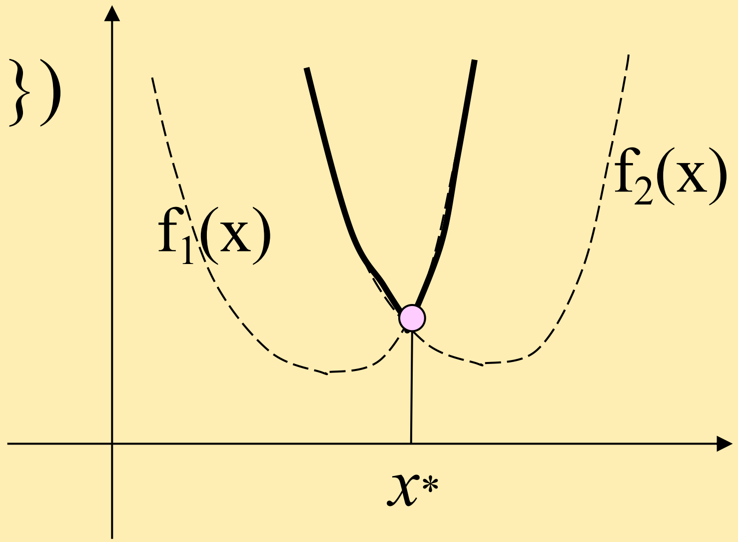
  Min $(f_1(x))$, $x \in \Omega$ 且 $f_2(x) \le b$对不同的b求不同解



小结：多目标问题化单目标

- 极小极大（min-max）法

$$\min_{x\in D}\left(\max\{f_1(x), f_2(x)\}\right)$$

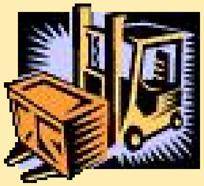


等价转化为

$$\begin{aligned} &\min y \\ s.t.\ &f_i(x) \le y,\ i=1,2 \\ &x\in D \end{aligned}$$

- 评价函数法: 如 $f(x)= f_1^2(x) + f_2^2(x)$ 或 $f_1(x)\,f_2(x)$ 或 $f_1(x)+f_2(x)$ 等(不提倡)

4.5 饮料厂的生产与检修



- 企业生产计划

单阶段生产计划

多阶段生产计划

外部需求和内部资源随时间变化

- 生产批量问题

考虑与产量无关的固定费用

给优化模型求解带来新的困难

例1 饮料厂的生产与检修计划

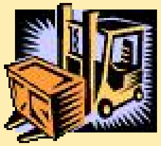
某种饮料4周的需求量、生产能力和成本

周次	需求量(千箱)	生产能力(千箱)	成本(千元/千箱)
1	15	30	5.0
2	25	40	5.1
3	35	45	5.4
4	25	20	5.5
合计	100	135	

存贮费:每周每千箱饮料 0.2千元。

- 安排生产计划, 满足每周的需求, 使4周总费用最小。
- 在4周内安排一次设备检修，占用当周15千箱生产能力，能使检修后每周增产5千箱，检修应排在哪一周?

问题分析



周次	需求	能力	成本
1	15	30	5.0
2	25	40	5.1
3	35	45	5.4
4	25	20	5.5
合计	100	135	

- 除第4周外每周的生产能力超过每周的需求；
- 生产成本逐周上升；
- 前几周应多生产一些。

模型假设

- 饮料厂在第1周开始时没有库存；
- 从费用最小考虑，第4周末不能有库存；
- 周末有库存时需支出一周的存贮费；
- 每周末的库存量等于下周初的库存量。

模型建立

周次	需求	能力	成本
1	15	30	5.0
2	25	40	5.1
3	35	45	5.4
4	25	20	5.5

决策变量

$x_1 \sim x_4$：第1~4周的生产量

$y_1 \sim y_3$：第1~3周末库存量

存贮费:0.2（千元/周•千箱）

目标函数

$$Min\ z = 5.0x_1 + 5.1x_2 + 5.4x_3 + 5.5x_4 + 0.2(y_1 + y_2 + y_3)$$

约束条件

产量、库存与需求平衡

$$x_1 - y_1 = 15$$

$$x_2 + y_1 - y_2 = 25$$

$$x_3 + y_2 - y_3 = 35$$

$$x_4 + y_3 = 25$$

能力限制

$$x_1 \le 30, x_2 \le 40$$

$$x_3 \le 45, x_4 \le 20$$

非负限制

$$x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3 \ge 0$$

模型求解

LINDO求解

最优解： $x_1 \sim x_4$：15，40，25，20；

$y_1 \sim y_3$： 0，15，5 .

周次	需求	产量	库存	能力	成本
1	15	15	0	30	5.0
2	25	40	15	40	5.1
3	35	25	5	45	5.4
4	25	20	0	20	5.5

4周生产计划的总费用为528 (千元)

检修计划

- 在4周内必须安排一次设备检修，占用当周15千箱生产能力，能使检修后每周增产5千箱，检修应排在哪一周？

周次	需求	能力	成本
1	15	30	5.0
2	25	40	5.1
3	35	45	5.4
4	25	20	5.5

检修安排在任一周均可

0-1变量w_t： w_t=1~ 检修安排在第t周(t=1,2,3,4）

约束条件

产量、库存与需求平衡条件不变

能力限制

$x_1 \le 30 \Rightarrow x_1 + 15w_1 \le 30$

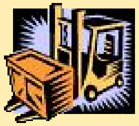
$x_2 \le 40 \Rightarrow x_2 + 15w_2 \le 40 + 5w_1$

$x_3 \le 45 \Rightarrow x_3 + 15w_3 \le 45 + 5w_2 + 5w_1$

$x_4 \le 20 \Rightarrow x_4 + 15w_4 \le 20 + 5w_1 + 5w_2 + 5w_3$

检修计划

目标函数不变



0-1变量w_t：w_t=1~ 检修安排在第t周(t=1,2,3,4）

增加约束条件：检修1次

$$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = 1$$

LINDO求解

最优解：w_1=1, w_2 , w_3, w_4=0;

x_1~ x_4：15, 45, 15, 25;

y_1~ y_3：0, 20, 0 .

总费用由528千元降为527千元

检修所导致的生产能力提高的作用，需要更长的时间才能得到充分体现。

例2 饮料的生产批量问题(自学)

饮料厂使用同一条生产线轮流生产多种饮料。

若某周开工生产某种饮料, 需支出生产准备费8千元。

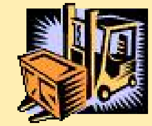
某种饮料4周的需求量、生产能力和成本

周次	需求量(千箱)	生产能力(千箱)	成本(千元/千箱)
1	15	30	5.0
2	25	40	5.1
3	35	45	5.4
4	25	20	5.5
合计	100	135	

存贮费:每周每千箱饮料 0.2千元。

- 安排生产计划, 满足每周的需求, 使4周总费用最小。

生产批量问题的一般提法



c_t~时段t 生产费用(元/件)；

h_t~时段t (末)库存费(元/件)；

s_t~时段t 生产准备费(元)；

d_t~时段t 市场需求(件)；

M_t~时段t 生产能力(件)。

假设初始库存为0

制订生产计划，满足需求，并使T个时段的总费用最小。

决策变量

x_t~时段t 生产量；

y_t~时段t (末)库存量；

w_t=1 ~时段t 开工生产 (w_t=0 ~不开工)。

目标

$$\min \ z = \sum_{t=1}^{T} (s_t w_t + c_t x_t + h_t y_t)$$

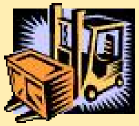
约束

$$y_{t-1} + x_t - d_t = y_t$$

$$w_t = \begin{cases} 1, & x_t > 0, \\ 0, & x_t = 0, \end{cases} \qquad x_t \le M_t$$

$$y_0 = y_T = 0, \ x_t, y_t \ge 0$$

生产批量问题的一般提法



$$\min\ z=\sum_{t=1}^{T}(s_t w_t + c_t x_t + h_t y_t)$$

$$s.t.\ \ y_{t-1}+x_t-d_t=y_t$$

$$\boxed{w_t=\begin{cases}1, & x_t>0,\\ 0, & x_t=0,\end{cases}\qquad x_t\le M_t} \Rightarrow\ x_t-M_t w_t\le 0$$

$$y_0=y_T=0,\ \ x_t, y_t\ge 0$$

$$t=1,2,\cdots T$$

混合0-1规划模型

将所给参数代入模型，用LINDO求解

最优解：x_1~x_4：15，40，45，0；总费用：554.0(千元)

4.6 钢管和易拉罐下料

原料下料问题

生产中通过切割、剪裁、冲压等手段，将原材料加工成所需大小

按照工艺要求，确定下料方案，使所用材料最省，或利润最大

例1 钢管下料

客户需求

原料钢管:每根19米

4米50根

6米20根

8米15根

问题1. 如何下料最节省 ？ 节省的标准是什么？

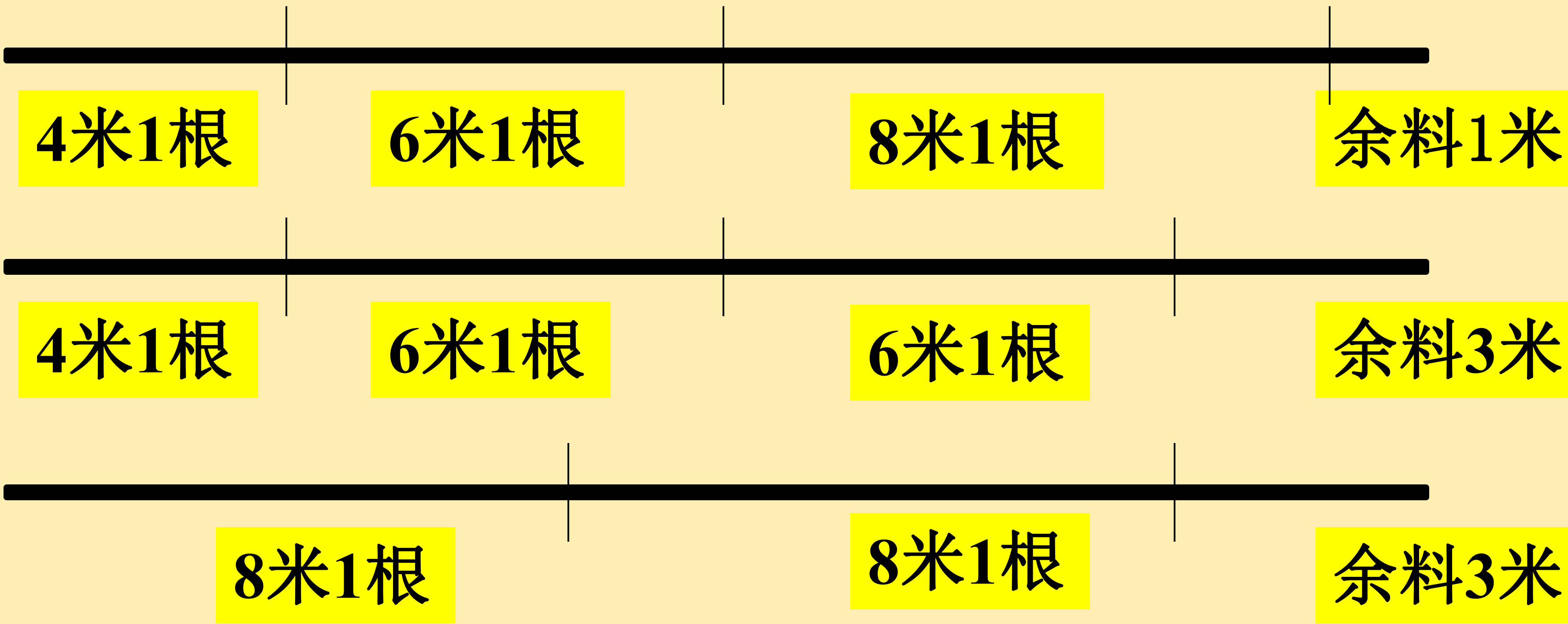
问题2. 客户增加需求： 5米10根

由于采用不同切割模式太多，会增加生产和管理成本，规定切割模式不能超过3种。如何下料最节省？

钢管下料

切割模式

按照客户需要在一根原料钢管上安排切割的一种组合。



合理切割模式的余料应小于客户需要钢管的最小尺寸

钢管下料问题1

合理切割模式

模式	4米钢管根数	6米钢管根数	8米钢管根数	余料(米)
1	4	0	0	3
2	3	1	0	1
3	2	0	1	3
4	1	2	0	3
5	1	1	1	1
6	0	3	0	1
7	0	0	2	3

为满足客户需要，按照哪些种合理模式，每种模式切割多少根原料钢管，最为节省?

两种标准

1. 原料钢管剩余总余量最小

2. 所用原料钢管总根数最少

决策变量 x_i~按第i种模式切割的原料钢管根数（i=1,2,…7）

目标1（总余量） $Min\ Z_1 = 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 + x_6 + 3x_7$

模式	4米根数	6米根数	8米根数	余料
1	4	0	0	3
2	3	1	0	1
3	2	0	1	3
4	1	2	0	3
5	1	1	1	1
6	0	3	0	1
7	0	0	2	3
需求	50	20	15	

约束　满足需求

$$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 \geq 50$$

$$x_2 + 2x_4 + x_5 + 3x_6 \geq 20$$

$$x_3 + x_5 + 2x_7 \geq 15$$

整数约束：x_i为整数

最优解：x_2=12, x_5=15, 其余为0；

最优值：27。

按模式2切割12根, 按模式5切割15根，余料27米

钢管下料问题1

目标2（总根数） $Min\ Z_2 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$

约束条件不变

$$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 \geq 50$$

$$x_2 + 2x_4 + x_5 + 3x_6 \geq 20$$

$$x_3 + x_5 + 2x_7 \geq 15$$

x_i 为整数

最优解：x_2=15, x_5=5，x_7=5, 其余为0；最优值：25。

按模式2切割15根，按模式5切割5根，按模式7切割5根，共25根，余料35米

与目标1的结果“共切割27根，余料27米”相比

没有把超过客户需求量的产品当作“余料”

虽余料增加8米，但减少了2根

当余料没有利用价值，以总根数最少为目标更合理

钢管下料问题2

增加一种需求：5米10根；切割模式不超过3种。

本题可以用上题思路，但比较复杂。现有4种需求：4米50根，5米10根，6米20根，8米15根，用枚举法确定合理切割模式，较复杂。

换一种思路：用模型的约束条件界定合理模式

决策变量

x_i~按第i种模式切割的原料钢管根数（i=1,2,3）

$r_{1i}, r_{2i}, r_{3i}, r_{4i}$~第$i$种切割模式下，每根原料钢管生产4米、5米、6米和8米长的钢管的数量

钢管下料问题2

目标函数（总根数） $Min\ \ x_1+x_2+x_3$

约束条件

满足需求

$$r_{11}x_1+r_{12}x_2+r_{13}x_3\geq 50$$

$$r_{21}x_1+r_{22}x_2+r_{23}x_3\geq 10$$

$$r_{31}x_1+r_{32}x_2+r_{33}x_3\geq 20$$

$$r_{41}x_1+r_{42}x_2+r_{43}x_3\geq 15$$

模式合理：每根余料不超过3米

$$16\leq 4r_{11}+5r_{21}+6r_{31}+8r_{41}\leq 19$$

$$16\leq 4r_{12}+5r_{22}+6r_{32}+8r_{42}\leq 19$$

$$16\leq 4r_{13}+5r_{23}+6r_{33}+8r_{43}\leq 19$$

整数约束： $x_i, r_{1i}, r_{2i}, r_{3i}, r_{4i}$ (i=1,2,3）为整数

非线性整数规划模型

钢管下料问题2

技巧：增加约束，缩小可行域，求解快

需求：4米50根，5米10根，6米20根，8米15根

每根原料钢管长19米

原料钢管总根数下界：$\left\lceil \frac{4\times50+5\times10+6\times20+8\times15}{19} \right\rceil = 26$

分析上界：

模式1：切割成4根4米钢管，需13根；

模式2：切割成1根5米和2根6米钢管，需10根；

模式3：切割成2根8米钢管，需8根。

原料钢管总根数上界：13+10+8=31

$$26 \le x_1 + x_2 + x_3 \le 31$$

模式排列顺序可任定（对称性）　$x_1 \ge x_2 \ge x_3$

LINGO求解整数非线性规划模型

Local optimal solution found at iteration: 12211

Objective value: 28.00000

Variable	Value	Reduced Cost
X1	10.00000	0.000000
X2	10.00000	2.000000
X3	8.000000	1.000000
R11	3.000000	0.000000
R12	2.000000	0.000000
R13	0.000000	0.000000
R21	0.000000	0.000000
R22	1.000000	0.000000
R23	0.000000	0.000000
R31	1.000000	0.000000
R32	1.000000	0.000000
R33	0.000000	0.000000
R41	0.000000	0.000000
R42	0.000000	0.000000
R43	2.000000	0.000000

模式1：每根原料钢管切割成3根4米和1根6米钢管，共10根；

模式2：每根原料钢管切割成2根4米、1根5米和1根6米钢管，共10根；

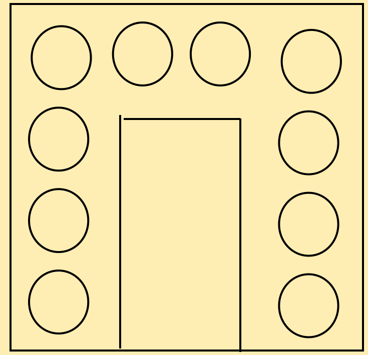
模式3：每根原料钢管切割成2根8米钢管，共8根。

原料钢管总根数为28根。

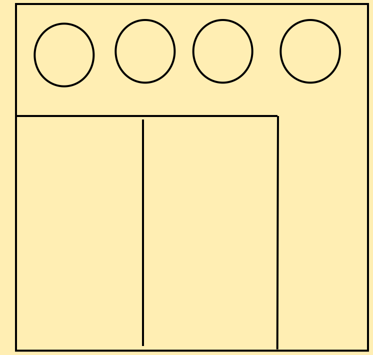
例2 易拉罐下料

板材规格1：
正方形，边长
24cm，5万张。

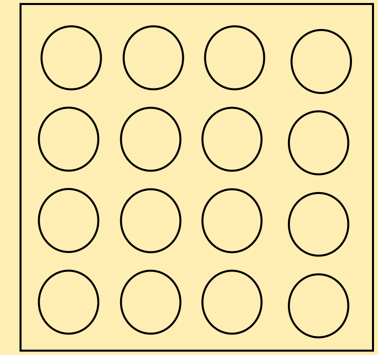
板材规格2：
长方形，
32×28cm，
2万张。



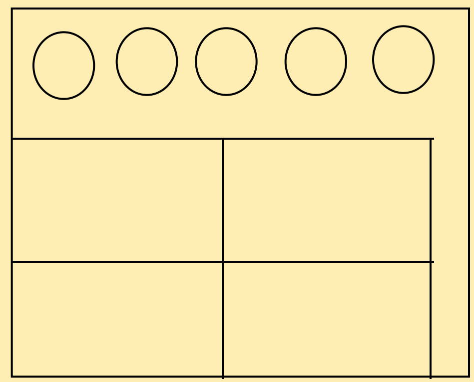
模式1：1.5秒



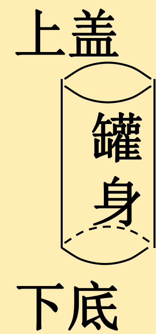
模式2：2秒



模式3：1秒



模式4：3秒

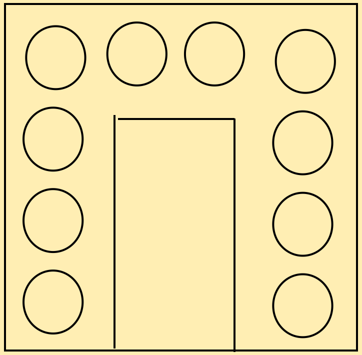


罐身高10cm，上盖、下底直径均5cm。

每周工作40小时，每只易拉罐利润0.10元，原料余料损失0.001元 / cm^2（不能装配的罐身、盖、底也是余料） 如何安排每周生产？

问题分析　　计算各种模式下的余料损失

模式1:
正方形
边长24cm



上、下底直径d=5cm，
罐身高h=10cm。

模式1 余料损失 $24^2-10\times\pi d^2/4 - \pi dh=222.6$ cm²

	罐身个数	底、盖个数	余料损失（cm²）	冲压时间（秒）
模式1	1	10	222.6	1.5
模式2	2	4	183.3	2
模式3	0	16	261.8	1
模式4	4	5	169.5	3

问题分析

目标:易拉罐利润扣除原料余料损失后的净利润最大

注意：不能装配的罐身、上下底也是余料

约束：每周工作时间不超过40小时；

原料数量：规格1（模式1 ~3）5万张，

规格2（模式4）2万张；

罐身和底、盖的配套组装 。

模型建立

决策变量

x_i~按照第i种模式的生产张数(i=1,2,3,4)；

y_1~一周生产的易拉罐个数；

y_2~不配套的罐身个数；

y_3~不配套的底、盖个数。

模型建立

y_1～易拉罐个数；y_2～不配套的罐身；

y_3～不配套的底、盖。

产量	余料	时间
x_1	222.6	1.5
x_2	183.3	2
x_3	261.8	1
x_4	169.5	3

每只易拉罐利润0.10元，

余料损失0.001元 / cm^2

罐身面积πdh=157.1 cm^2

底盖面积$\pi d^2/4$=19.6 cm^2

目标

$$Max \quad 0.1y_1 - 0.001(222.6x_1 + 183.3x_2 + 261.8x_3 + 169.5x_4 + 157.1y_2 + 19.6y_3)$$

约束条件

时间约束 $1.5x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \le 144000$ **(40小时)**

原料约束 $x_1 + x_2 + x_3 \le 50000, \quad x_4 \le 20000$

约束条件

y_1~易拉罐个数；y_2~不配套的罐身；
y_3~不配套的底、盖。

产量	罐身	底、盖
x_1	1	10
x_2	2	4
x_3	0	16
x_4	4	5

配套约束

$$y_2 = x_1 + 2x_2 + 4x_4 - y_1$$

$$y_3 = 10x_1 + 4x_2 + 16x_3 + 5x_4 - 2y_1$$

可以省略

$$y_1 = \min\{x_1 + 2x_2 + 4x_4,\ (10x_1 + 4x_2 + 16x_3 + 5x_4)/2\}$$

$$\overset{?}{\Leftrightarrow} \quad y_1 \le x_1 + 2x_2 + 4x_4, \quad y_1 \le (10x_1 + 4x_2 + 16x_3 + 5x_4)/2$$

虽然x_i和y_1，y_2，y_3应是整数，但是因生产量很大，可以把它们看成实数，从而用线性规划模型处理 。

模型求解

LINDO发出警告信息："数据之间的数量级差别太大，建议进行预处理，缩小数据之间的差别"

预处理技巧

将所有决策变量扩大10000倍（x_i~万张，y_i~万件）

$$\Rightarrow\ 1.5x_1+2x_2+x_3+3x_4\le 14.4,\quad x_1+x_2+x_3\le 5,\ x_4\le 2$$

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 0.4298337

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
Y1	16.025000	0.000000
X1	0.000000	0.000050
X2	4.012500	0.000000
X3	0.375000	0.000000
X4	2.000000	0.000000
Y2	0.000000	0.223331
Y3	0.000000	0.036484

模式2生产40125张，
模式3生产3750张，
模式4生产20000张，
共生产易拉罐160250个（罐身和底、盖无剩余），
净利润为4298元

模型简化

因为易拉罐生产数目很大（万件），而不配套罐身、罐盖个数相对来说很少(最多几十件)，所以忽略**y2, y3**，得到简化模型

$$Max \quad 0.1y_1 - 0.001(222.6x_1 + 183.3x_2 + 261.8x_3 + 169.5x_4)$$

$$1.5x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \le 14.4,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \le 5, \quad x_4 \le 2$$

$$y_1 = x_1 + 2x_2 + 4x_4$$

$$2y_1 = 10x_1 + 4x_2 + 16x_3 + 5x_4$$

简化模型同解。

下料问题的建模

- 确定下料模式
- 构造优化模型

一维问题（如钢管下料）

规格不太多，可枚举下料模式，建立整数线性规划模型，否则要构造整数非线性规划模型，求解困难，可用缩小可行域的方法进行化简，但要保证最优解的存在。

二维问题（如易拉罐下料）

具体问题具体分析（比较复杂 ）

小结：数学规划问题的化简

- 尽量化非线性问题为等价或近似线性问题；
- 有些整数变量可用实数变量近似代替；
- 灵活使用0-1变量可化简复杂的函数关系；
- 尽量减少变量个数；
- 缩小非线性规划的可行域可加快计算速度；
- 冗余的约束条件可以删去；
- 适当缩小数据间的数量级差可提高计算精度。

Lingo简介

- Lingo包含Lindo功能, Lindo模型可在Lingo环境运行
- Lingo增加了非线性规划
- Lingo的基本模型(非编程)

- Lingo提供了编程功能
- Lingo风格模型(编程功能)

Lingo的基本用法(非编程)

```
model:
Title  钢管下料 LINGO模型;
min=x1+x2+x3;
x1*r11+x2*r12+x3*r13 >=50;
x1*r21+x2*r22+x3*r23 >=10;
x1*r31+x2*r32+x3*r33 >=20;
x1*r41+x2*r42+x3*r43 >=15;
4*r11+5*r21+6*r31+8*r41 <=19;
4*r12+5*r22+6*r32+8*r42 <=19;
4*r13+5*r23+6*r33+8*r43 <=19;
4*r11+5*r21+6*r31+8*r41 >=16;
4*r12+5*r22+6*r32+8*r42 >=16;
4*r13+5*r23+6*r33+8*r43 >=16;
x1+x2+x3 >= 26;
x1+x2+x3 <= 31;
x1>=x2;
x2>=x3;
@gin(x1); @gin(x2); @gin(x3);
@gin(r11);@gin(r12);@gin(r13);
@gin(r21);@gin(r22);@gin(r23);
@gin(r31);@gin(r32);@gin(r33);
@gin(r41);@gin(r42);@gin(r43);
end
```

注：0-1规划@bin

Lingo编程

- 模型构成
  - 主体 MODEL: --END
  - 集合段 SETS -- ENDSETS
  - 数据段DATA-- ENDDATA
  - 初始段INIT--ENDINIT
  - 计算段CALC--ENDCALC
- 集合
  - 基本集合
  - 派生集合
- 函数

  @for(集合|条件:表达式)对集合中满足条件的元素循环执行表达式

  @sum(集合|条件:表达式)对集合中满足条件的元素求表达式的和
- 关系运算符（“集合|条件”里使用）

  #LT# (less than),

  #EQ#, #LE#, #GT#, #GE#类似

Lingo编程

基本用法

```
model:
Title  钢管下料 LINGO模型;
SETS:     !集合段;
        NEEDS/1..4/:LENGTH,NUM;
        CUTS/1..3/:X;
        PATTERNS(NEEDS,CUTS):R;
ENDSETS
DATA:   !数据段;
      LENGTH=4 5 6 8;
      NUM=50 10 20 15;
ENDDATA
INIT:    !初始段
       X=10 10 10;
ENDINIT
!模型目标与约束开始;
min=@SUM(CUTS(J): X(J) );
@FOR(NEEDS(I): @SUM(CUTS(J): X(J)*R(I,J) ) >NUM(I) );
@FOR(CUTS(J): @SUM(NEEDS(I): LENGTH(I)*R(I,J) )
      <19 );
@FOR(CUTS(J): @SUM(NEEDS(I): LENGTH(I)*R(I,J) )
      >16);
@SUM(CUTS(I): X(I) ) >26; @SUM(CUTS(I): X(I) ) <31;
@FOR(CUTS(J)|J#LT#3:X(J)>X(J+1) );
@FOR(CUTS(J): @GIN(X(J)) ) ;
@FOR(PATTERNS(I,J): @GIN(R(I,J)) );
end
```

标题

！表示注释

派生集合

```
model:
Title  钢管下料 LINGO模型;
min=x1+x2+x3;
x1*r11+x2*r12+x3*r13 >=50;
x1*r21+x2*r22+x3*r23 >=10;
x1*r31+x2*r32+x3*r33 >=20;
x1*r41+x2*r42+x3*r43 >=15;
4*r11+5*r21+6*r31+8*r41 <=19;
4*r12+5*r22+6*r32+8*r42 <=19;
4*r13+5*r23+6*r33+8*r43 <=19;
4*r11+5*r21+6*r31+8*r41 >=16;
4*r12+5*r22+6*r32+8*r42 >=16;
4*r13+5*r23+6*r33+8*r43 >=16;
x1+x2+x3 >= 26;
x1+x2+x3 <= 31;
x1>=x2;
x2>=x3;
@gin(x1); @gin(x2); @gin(x3);
@gin(r11);@gin(r12);@gin(r13);
@gin(r21);@gin(r22);@gin(r23);
@gin(r31);@gin(r32);@gin(r33);
@gin(r41);@gin(r42);@gin(r43);
end
```

其它最优化问题

(最)优化理论是运筹学的基本内容

OR/MS/DS

- 运筹学(OR: Operations/Operational Research)
- 管理科学(MS: Management Science)
- 决策科学 (DS: Decision Science)

优化(Optimization), 规划(Programming)

无约束优化	线性规划	非线性规划	整数规划	组合优化	不确定规划	多目标规划	目标规划	网络优化	动态规划