6-4

1. a). 不是强连通. 如 没有 $a \to b$ 的通路.
是弱连通. 忽略方向. 则为连通的

b). 不是强连通. 如没有 $c \to b$ 的通路
弱连通. 忽略方向 为连通的

c). 非强连通. 没有 $a \to b$ 的通路
非弱连通. 忽略方向不是连通的

11. a). $\{a, b, f\}$. $\{c, d, e\}$
b) $\{a, b, c, d, e, h\}$. $\{g\}$ $\{f\}$
c) $\{a, b, d, e, f, g, h, i\}$. $\{c\}$

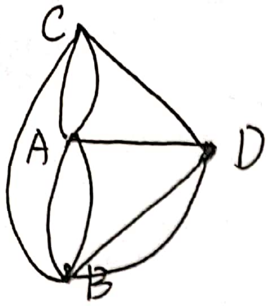
31. 假设连通图中至多有1个顶点不是割点. 设 s. t 是 G 中使 $d(s, t)$ 最大的顶点. s 或 t 之一(或二者都)是割点.
假设 s 是割点. 在从 G 中删除 s 及其关联边所得图中. 设 w 属于不含 t 的那个连通分支. 由于 w 到 t 的每条通路都含有 s.
则 $d(w, t) > d(s, t)$. 矛盾. 故至少有2个顶点不是割点

43、一条边不能连接不同分支的两个顶点.
在有 n_i 个顶点的连通分支内至多有 $C(n_i, 2)$ 条边.
则 G 的边数不超过 $\sum_{i=1}^{k} C(n_i, 2)$

44. 假设 G 不连通、则有一个连通分支有 k 个顶点. $1 \le k \le n-1$
G 的边数最多为 $C(k, 2) + C(n-k, 2) = (k(k-1) + (n-k)(n-k-1))/2$
$= k^2 - nk + (n^2 - n)/2$. 这个 k 的 2 次函数在 $k = \frac{n}{2}$ 处最小, 在
$k=1$ 或 $k = n-1$ 处最大. 因此. 若 G 不连通. 则边数不超过
这个函数在 1 和 $n-1$ 处的值. 即 $(n-1)(n-2)/2$.

45. 设 G 是一个有 n 个点的图. 则 $k(G) \le n-1$.
令 C 是使 G 的非空真子集 S 与互补集 $S' = V - S$ 不连通的最小割边. 如果 xy 是 G 中的边. 则 $x \in S$. $y \in S'$
C 大小至少为 $|S||S'|$. 即至少为 $n-1$. 则 $k(G) \le \lambda(G)$.
否则令 $x \in S$, $y \in S'$ 是不相邻的点.
使 T 包含 S' 中的 x 的所有邻接点和所有 $S - \{x\}$ 中以 S' 中的点为邻接点的点.
则 T 为一个割点. 因为它分开了 x 和 y.
看从 x 指向 $T \cap S'$ 的边和从任意一个 $T \cap S$ 中的点指向 S' 的一条边. 这就给出了 C 中 $|T|$ 条不同的边.
则 $\lambda(G) = |C| \ge |T| \ge k(G)$

6-5.

9. 

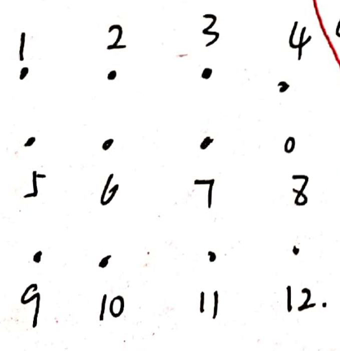
不能. 因为A.B还是奇数度的
没有欧拉回路.

13. 

能. 因为每一个顶点都是~~奇~~偶数度的
有欧拉回路.

21. 构造有向图中的欧拉通路.

procedure Euler(G: 所有顶点的度都为偶数的连通多重图)
circuit := 从G中任选顶点开始, 连续地加入有向边所形成的回到该顶点的回路
H := 删除这条回路的边之后的G.
while H还有有向边
subcircuit := 在既是H的顶点也是circuit的边的端点处开始的H的一条回路
H := 删除subcircuit的有向边和孤立点之后的H
circuit := 在适当顶点上插入subcircuit之后的circuit
return circuit {circuit是有向图的欧拉通路}

49. 

则马的回路可表示为

8. 10 1. 7. 9. 2. 11. 5. 3. 12. 6. 4