Mathematical Experiments

数学规划

—— 整数规划

重庆大学数学与统计学院

Example1：背包问题

一个口袋容量为V，n件瓷器，每一件瓷器的体积v_i和价值p_i。将合适的瓷器放入口袋，使得袋中瓷器总价值最大。

整数规划——背包问题

决策变量：x_i，i=1,2,...,n，取值为0或1，表示口袋中第i件物品的数量。

约束条件：$\sum_{i=1}^{n} x_i v_i \le V$，$x_i \in \{0,1\}, i=1,\cdots,n$

目标函数：$\max \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$

因此，完整的数学规划模型为

$$\max \quad \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

$$s.t.$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i v_i \le V$$

$$x_i \in \{0,1\}, i=1,\cdots,n$$

这是一个整数线性规划问题。

特点：部分或全部变量只能在整数范围取值。

整数线性规划问题，能用intlinprog求解。

Intlinprog的命令格式：

[*x* ,fval]=intlinprog(c,**intcon**, A, b, Aeq,beq ,Lb, Ub)

用法和linprog相似。intcon是一个数组，分量用于指定决策向量的哪些分量是整数类型。

例子和代码：

V=100, n=8, v=[27, 21, 6, 32, 25, 17, 42, 15]’,

p=[7, 9, 2, 7, 4, 10, 12, 7]’.

整数规划——背包问题

```
V=100; n=8;
v=[27, 21, 6, 32, 25, 17, 42, 15]';
p=[7, 9, 2, 7, 4, 10, 12, 7]';
Lb=zeros(8,1); Ub=ones(8,1);
intcon=1:8;
[x ,fval]= intlinprog(-p, intcon, v', V, [],[],Lb, Ub)
```

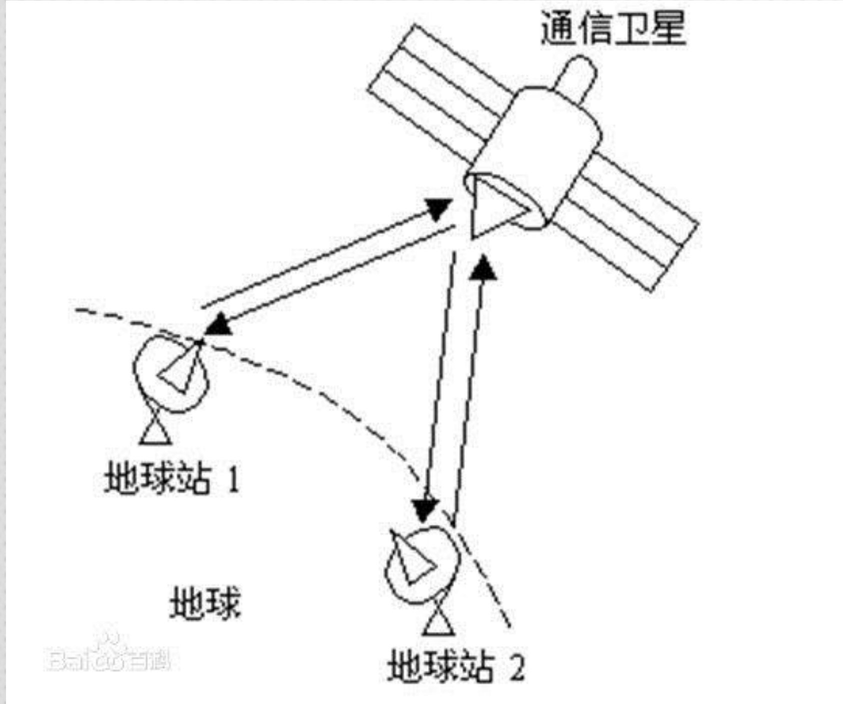
强调：这是一个最大化的问题，因此应该转化成为最小化。

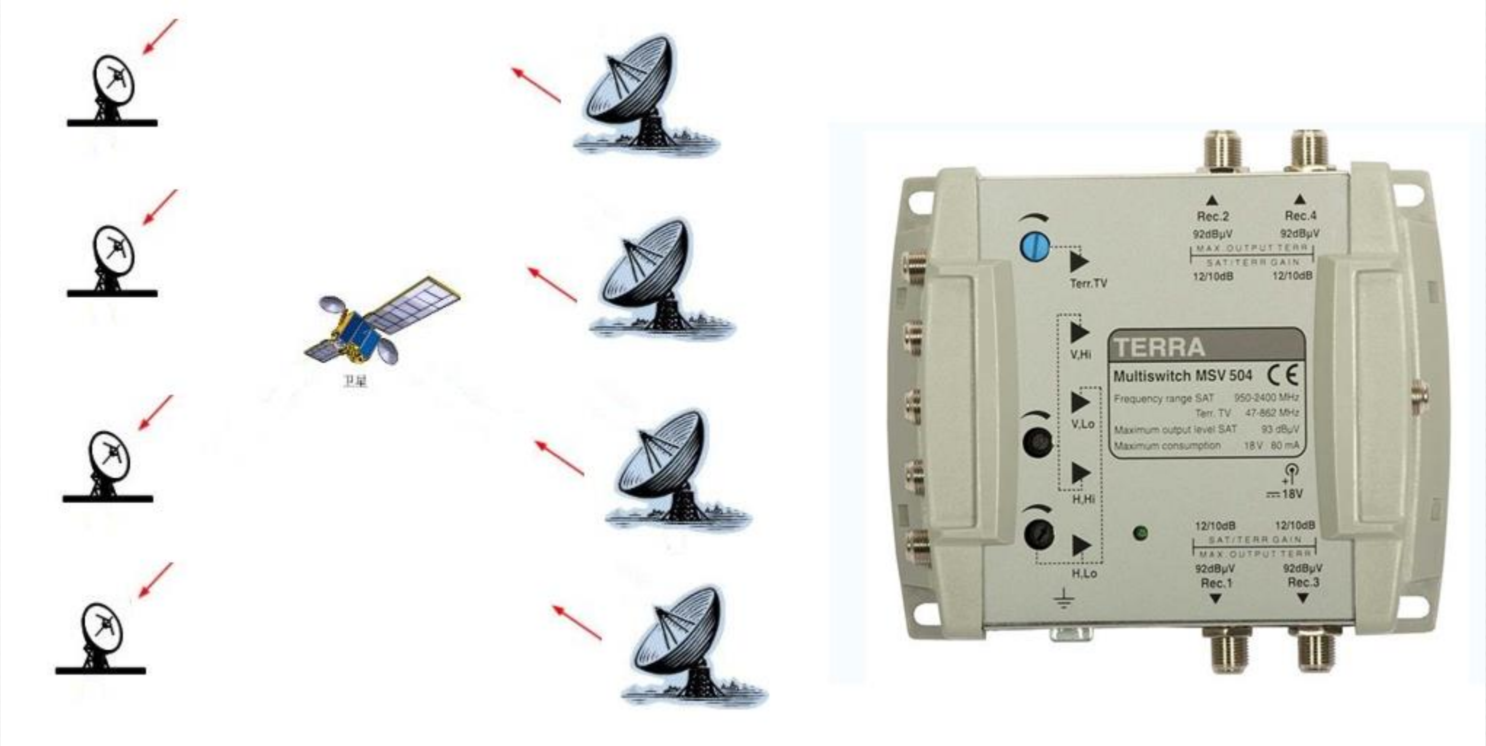
输出结果：

x=[0 1 0 0 0 1 1 1]’, fval=-38

Example2：信号传输问题

卫星数字通信系统由一颗卫星和一组地面站组成。





A地有4个发射站，B地有4个接收站，传输任务如下表：

	1	2	3	4	
1	7	12	11	15	45
2	15	8	13	9	45
3	17	12	6	10	45
4	6	13	15	11	45
	45	45	45	45	LB=45

一个合法的传输模式：

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

定义：若矩阵A的行和、列和均相等，则称A为双随机矩阵。

决策变量为r_i,i=1,2,…,24，表示在第i种传输模式下的传输量。

记双随机矩阵为*D*，所有的四阶置换矩阵P^i,i=1,2,…,24。

$$r_1P^1+r_2P^2+\ldots+r_{24}P^{24}=D$$

得到线性规划模型：

$$\begin{cases} \min & \sum_i r_i \\ s.t. & r_1P^1+r_2P^2+\ldots+r_{24}P^{24}=D \\ & r_i\text{为非负整数} \end{cases}$$

```
C=perms(1:4);%产生24个4阶置换矩阵非零元的位置
A=zeros(16,24);
B=[7 12 11 15;15 8 13 9;17 12 6 10;6 13 15 11]；
B=reshape(B,16,1)；%形成等式约束的右端向量
```

为了产生线性等式约束的系数矩阵Aeq，可以将矩阵形式的约束分别写出来，得到一个16个方程，24个未知数的线性方程组，系数矩阵A为：

整数规划——卫星信号传输问题

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0

```
for i=1:24
for j=1:16
if j==C(i,1) | j==4+C(i,2) | j==8+C(i,3) | j==12+C(i,4)
A(j,i)=1;
end
end
end %上面循环产生等式约束的系数矩阵A
c=ones(24,1);
x=intlinprog(c,1:24,[],[],A,B,zeros(24,1))；
s=nnz(x)%传输的模式数
```

整数规划——卫星信号传输问题

x=[0 5 0 1 0 0 6 1 3 4 0 3 0
0 6 0 9 0 7 0 0 0 0 0]'
s=10

模式和传输量为：

$$\begin{matrix}0&0&0&5\\0&0&5&0\\5&0&0&0\\0&5&0&0\end{matrix}\qquad\begin{matrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{matrix}\qquad\begin{matrix}0&0&6&0\\0&0&0&6\\0&6&0&0\\6&0&0&0\end{matrix}\qquad\begin{matrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{matrix}\qquad\begin{matrix}0&0&3&0\\0&3&0&0\\0&0&0&3\\3&0&0&0\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}0&0&4&0\\0&4&0&0\\4&0&0&0\\0&0&0&4\end{matrix}\qquad\begin{matrix}0&0&3&0\\3&0&0&0\\0&0&0&3\\0&3&0&0\end{matrix}\qquad\begin{matrix}0&6&0&0\\0&0&0&6\\0&0&6&0\\6&0&0&0\end{matrix}\qquad\begin{matrix}0&9&0&0\\9&0&0&0\\0&0&0&9\\0&0&9&0\end{matrix}\qquad\begin{matrix}7&0&0&0\\0&0&7&0\\0&7&0&0\\0&0&0&7\end{matrix}$$

整数规划——数独问题

发源于欧洲的数学大师欧拉之手；

在日本广泛流传；

近年来在全世界流行。

分析：如何将条件变成方程？难点：（1）解要求是1-9之间的正整数；（2）9个数字横、纵和9个小方格均出现一次。

思想：将9*9的二维矩阵转化成为9*9*9的三维矩阵，矩阵的每一个元素是一个0-1变量。比如在(3,5,2)取值为1，表示在二维格子的第3行，第5列填入数字2。前面的两个数字确定填入数字的位置，后一个数字代表填入的数值。对应于三维的矩阵，则是在第3行，第5列，第2层的元素取值为1，而第3行，第5列，其他层的元素均取0 。

首先在二维格子(i,j)里恰好有一个数字，对应于在三维的数列单元 $x(i,j,1),x(i,j,2),\cdots,x(i,j,9)$中恰有一个非0。即

$$\sum_{k=1}^{9} x(i,j,k)=1, i=1,\cdots,9, j=1,\cdots,9$$

类似的，有

$$\sum_{j=1}^{9} x(i,j,k)=1, i=1,\cdots,9, k=1,\cdots,9$$

和

$$\sum_{i=1}^{9} x(i,j,k)=1, j=1,\cdots,9, k=1,\cdots,9$$

上面三组方程各有81个方程，因此一共有243个方程。

其次每一个3*3的格子应满足类似约束，比如对于1≤i ≤ 3 和1 ≤ j ≤ 3的格子, 对每一个 固定的 k， 1 ≤ k ≤ 9 ,有

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} x(i, j, k) = 1$$

其他八个3*3的格子，类似可表达为

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} x(i+U, j+V, k) = 1, U, V \in \{0,3,6\}$$

上面一共81个方程。

所有方程都是线性的。可构造一个线性的目标函数，如所有决策变量之和，就形成一个0-1线性规划问题。

整数线性规划问题

$$\min \quad \sum_{i,j,k} x(i,j,k)$$

$$s.t.$$

$$\sum_{k=1}^{9} x(i,j,k)=1, i=1,\cdots,9,\ j=1,\cdots,9$$

$$\sum_{j=1}^{9} x(i,j,k)=1, i=1,\cdots,9, k=1,\cdots,9$$

$$\sum_{i=1}^{9} x(i,j,k)=1, k=1,\cdots,9,\ j=1,\cdots,9$$

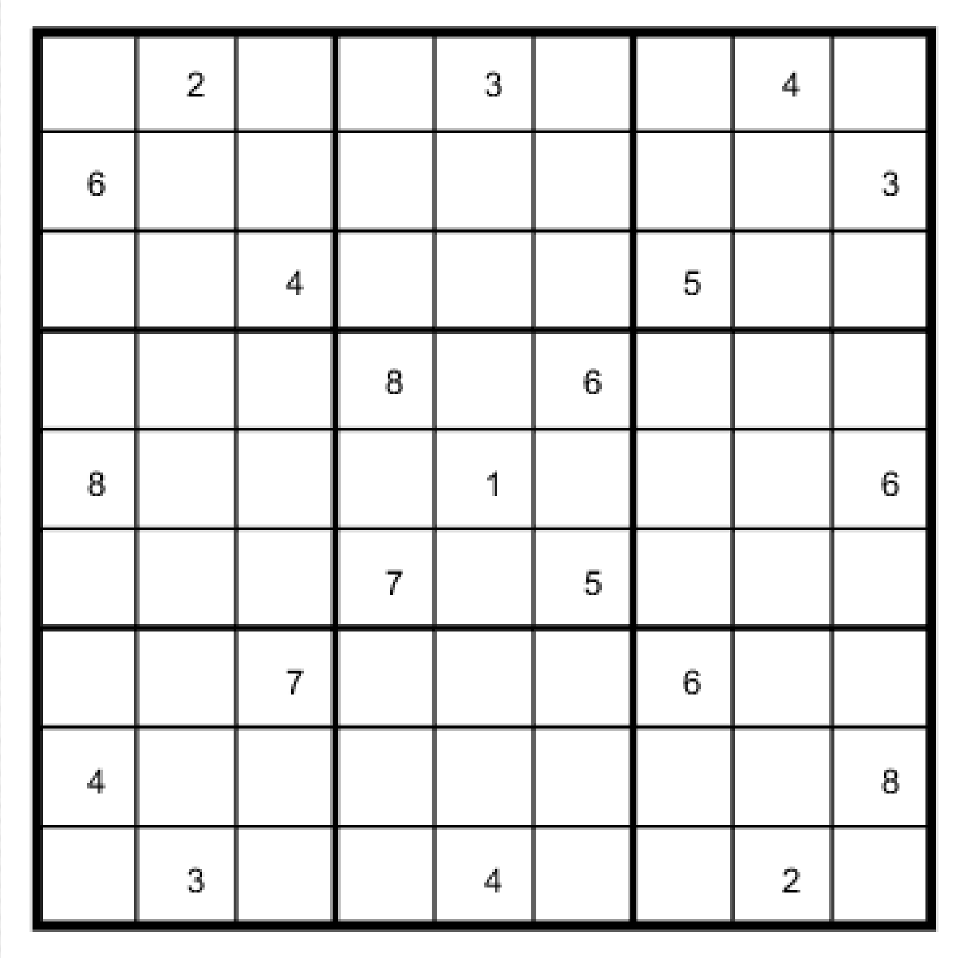
$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} x(i+U,j+V,k)=1, U,V\in\{0,3,6\}$$

$$x(i,j,k)\in\{0,1\}, i=1,\cdots,9,\ j=1,\cdots,9, k=1,\cdots,9$$

整数规划——数独问题

部分代码：

```
B = [1,2,2;   1,5,3;   1,8,4;   2,1,6;   2,9,3;   3,3,4;   3,7,5;
4,4,8;   4,6,6;   5,1,8;   5,5,1;   5,9,6;   6,4,7;   6,6,5;   7,3,7;
7,7,6;   8,1,4;   8,9,8;   9,2,3;   9,5,4;   9,8,2];
 figure;hold on;axis off;axis equal
rectangle('Position',[0 0 9 9],'LineWidth',3,'Clipping','off')
rectangle('Position',[3,0,3,9],'LineWidth',2)
rectangle('Position',[0,3,9,3],'LineWidth',2)
rectangle('Position',[0,1,9,1],'LineWidth',1)
rectangle('Position',[0,4,9,1],'LineWidth',1)
rectangle('Position',[0,7,9,1],'LineWidth',1)
rectangle('Position',[1,0,1,9],'LineWidth',1)
rectangle('Position',[4,0,1,9],'LineWidth',1)
rectangle('Position',[7,0,1,9],'LineWidth',1)
for ii = 1:size(B,1)
    text(B(ii,2)-0.5,9.5-B(ii,1),num2str(B(ii,3)))
end
```



整数规划——数独问题


```
for j = 1:9 % one in each row
for k = 1:9
Astuff = lb; % clear Astuff
Astuff(1:end,j,k) = 1; % one row in  Aeq*x = beq
Aeq(counter,:) = Astuff(:)'; % put Astuff in a row of Aeq
counter = counter + 1;
end
end
```

$$\sum_{i=1}^{9} x(i,j,k) = 1, k = 1,\cdots,9, j = 1,\cdots,9$$

```
for U = 0:3:6 % one in each square
for V = 0:3:6
for k = 1:9
Astuff = lb;
Astuff(U+(1:3),V+(1:3),k) = 1;
Aeq(counter,:) = Astuff(:)';
counter = counter + 1;
end
end
end
```

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} x(i+U, j+V, k) = 1, U, V \in \{0,3,6\}$$

计算的结果

9	2	5	6	3	1	8	4	7
6	1	8	5	7	4	2	9	3
3	7	4	9	8	2	5	6	1
7	4	9	8	2	6	1	3	5
8	5	2	4	1	3	9	7	6
1	6	3	7	9	5	4	8	2
2	8	7	3	5	9	6	1	4
4	9	1	2	6	7	3	5	8
5	3	6	1	4	8	7	2	9

整数规划——数独问题


```
function [S,eflag] = sudoku2(B)
   [SM,SN] = meshgrid(1:9); % make i,j entries
    B = [SN(:),SM(:),B(:)]; % i,j,k rows
        [rrem,~] = find(B(:,3) == 0);  B(rrem,:) = [];
end
N = 9^3; % number of independent variables in x
M = 4*9^2; % number of constraints
Aeq = zeros(M,N);beq = ones(M,1);
f = (1:N)'; % the objective can be anything
lb = zeros(9,9,9); ub = lb+1;
 counter = 1;
for j = 1:9 % one in each row
    for k = 1:9
        Astuff = lb; Astuff(1:end,j,k) = 1;
        Aeq(counter,:) = Astuff(:)'; % put Astuff in a row of Aeq
        counter = counter + 1;
    end
end
```

```
for i = 1:9 % one in each column
    for k = 1:9
        Astuff = lb;
        Astuff(i,1:end,k) = 1;
        Aeq(counter,:) = Astuff(:)';
        counter = counter + 1;
    end
end
for U = 0:3:6 % one in each square
    for V = 0:3:6
        for k = 1:9
            Astuff = lb;
            Astuff(U+(1:3),V+(1:3),k) = 1;
            Aeq(counter,:) = Astuff(:)';
            counter = counter + 1;
        end
    end
end
```

整数规划——数独问题


```
for i = 1:9 % one in each depth
    for j = 1:9
        Astuff = lb;
        Astuff(i,j,1:end) = 1;
        Aeq(counter,:) = Astuff(:)';
        counter = counter + 1;
    end
end

for i = 1:size(B,1)
    lb(B(i,1),B(i,2),B(i,3)) = 1;
end

intcon = 1:N;
[x,~,eflag] = intlinprog(f,intcon,[],[],Aeq,beq,lb,ub);
```

```
if eflag > 0 % good solution
    x = reshape(x,9,9,9); % change back to a 9-by-9-by-9 array
    x = round(x); % clean up non-integer solutions
    y = ones(size(x));
    for k = 2:9
        y(:,:,k) = k; % multiplier for each depth k
    end

    S = x.*y; % multiply each entry by its depth
    S = sum(S,3); % S is 9-by-9 and holds the solved puzzle
else
    S = [];
end
```

Thanks

重庆大学数学与统计学院