关系

Chapter 5

章总结

- 关系及其性质
- 关系的表示
- 关系的闭包
- 等价关系
- 偏序关系

关系及其性质

Section 5.1

章节小结

- 二元关系
- 函数作为关系
- 关系的性质
  - 自反和反自反关系
  - 对称和反对称关系
  - 传递关系
- 关系的组合
- 与关系的性质有关的重要定理

二元关系

定义：从集合A到集合B的二元关系R是A×B的子集，即R⊆A×B。换言之，任一序偶的集合即确定了一个关系。

举例：令 A = {0, 1, 2} 且 B = {a, b}

- {(0, a), (0, b), (1, a), (2, b)} 是A到B的关系。

单个集合上的二元关系

定义: 集合A上的二元关系R是A×A或A到A的关系的子集。

举例:

- 假设A = {a, b, c}，则R = {(a, a), (a, b), (a, c)}是A上的关系。
- 令A = {1, 2, 3, 4}。关系R = {(a, b) | a 整除 b} 中的有序对（序偶）为：

  (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3) 和 (4, 4)。

单个集合上的二元关系

问： 含有n个元素的集合A上有多少个关系?

解： 因为A上的关系是A × A的子集，我们计算A × A的子集 。由于当 A 有 n 个元素时 A × A 有n^2 个元素，并且m个元素的集合有 2^m 个子集，所以 A × A的子集有$2^{|A|^2}$ 个。于是在集合A上有 $2^{|A|^2}$个关系。这个数量其实就是| P (A × A) |。

集合上的二元关系

举例：考虑整数集上的这些关系:

$R_1 = \{(a, b) \mid a \le b\}$,

$R_2 = \{(a, b) \mid a > b\}$,

$R_3 = \{(a, b) \mid a = b \text{ or } a = -b\}$,

$R_4 = \{(a, b) \mid a = b\}$,

$R_5 = \{(a, b) \mid a = b + 1\}$,

$R_6 = \{(a, b) \mid a + b \le 3\}$.

注意，这些关系是在一个无限集上的，而且每个关系都是一个无限集。

这些关系中哪一个包含了以下序偶？

(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, −1) and (2, 2)?

解：检查在每个关系的条件下，我们可以看到 (1, 1)属于 R_1, R_3, R_4 , R_6；(1, 2)属于R_1 和 R_6；(2, 1)属于R_2, R_5, R_6；(1, −1)属于R_2, R_3, R_6；(2, 2)属于R_1, R_3, R_4。

二元关系的记号

- 设R是二元关系，则序偶(x, y)属于关系R可以有如下三种等价的表示方法：
  - $R(x, y)$ 前缀表示法(prefix)
  - xRy 中缀表示法(infix)
  - $(x, y)\in R$ 后缀表示法(suffix)

一些特殊的关系

- 假设任意非空集合A，可以定义集合A上的：
  - 空关系：∅
  - 恒等关系：$I_A = \{ (a, a) \mid \forall\, a \in A \}$
  - 全域关系：$U_A = A \times A = \{ (x, y) \mid \forall x\, \forall y (x \in A \wedge y \in A)\}$

函数作为关系

- 一个从集合A到B的函数f对A中的每一个元素a都唯一指定B中的元素b作为他的像。
- 函数f可以表示成所有满足$f(a)=b$的序偶(a, b)的集合，所以它就是一个从A到B的关系。
- 关系不一定是函数，因为关系可以是一对多的，即A中一个元素对应B中多个元素的关系。例如$R=\{(a, 1), (a, 2)\}$。
- 关系是函数的一般表示。关系是集合，因此函数也可以看成是集合。

自反性(reflexive)

定义：若对每个元素$a \in$ A都有 $(a, a) \in R$，那么称定义在集合A上的关系R为自反的，即：

$$\forall x(x \in A \longrightarrow (x, x) \in R)$$

举例：下列关于<u>整数</u>的关系是自反的：

$R_1 = \{(a, b) \mid a \le b\}$,

$R_2 = \{(a, b) \mid \mathrm{a} = \mathrm{b} \text{ or } \mathrm{a} = -\mathrm{b}\}$,

$R_3 = \{(\mathrm{a}, \mathrm{b}) \mid \mathrm{a} = \mathrm{b}\}$.

如果 $A = \emptyset$，则空关系是自反的。

即空集上的空关系是自反的!

I_A是自反的

下列关系不是自反的:

$\mathrm{R}_4 = \{(\mathrm{a}, \mathrm{b}) \mid \mathrm{a} > \mathrm{b}\}$ (注意 $3 \ngtr 3$),

$\mathrm{R}_5 = \{(\mathrm{a}, \mathrm{b}) \mid \mathrm{a} = \mathrm{b} + 1\}$ (注意 $3 \neq 3 + 1$),

$\mathrm{R}_6 = \{(\mathrm{a}, \mathrm{b}) \mid \mathrm{a} + \mathrm{b} \le 3\}$ (注意 $4 + 4 \nleq 3$).

反自反性(irreflexive)

定义：若对每个元素$a \in A$都有 $(a, a) \in R$，那么称定义在集合A上的关系R为反自反的，即：

$$\forall x(x \in A \longrightarrow (x, x) \notin R)$$

举例：下列关于整数的关系是反自反的：

$R_1 = \{(a, b) \mid a < b\}$,

$R_2 = \{(a, b) \mid a \neq b\}$.

如果 $A = \emptyset$，则空关系是反自反的。

即空集上的空关系是反自反的！

- 一个不是自反的关系，不一定就是反自反的

对称性(symmetric)

定义: 对于任意$a, b \in A$，若只要/每当$(a, b) \in R$就有 $(b, a) \in R$，则称定义在集合A上的关系R是对称的。R是对称的，即：

$$\forall x \forall y\ ((x, y) \in R \longrightarrow (y, x) \in R)$$

举例：关于整数的下列关系是对称的：

$R_1 = \{(a, b) \mid a = b \text{ or } a = -b\}$,

$R_2 = \{(a, b) \mid a = b\}$,

$R_3 = \{(a, b) \mid a + b \leq 3\}$.

关于下列关系是非对称的:

$R_4 = \{(a, b) \mid a \leq b\}$ (注意 $3 \leq 4$, 但 $4 \not\leq 3$),

$R_5 = \{(a, b) \mid a > b\}$ (注意 $4 > 3$, 但$3 \not> 4$),

$R_6 = \{(a, b) \mid a = b + 1\}$ (注意 $4 = 3 + 1$, 但$3 \neq 4 + 1$).

反对称性(antisymmetric)

定义：对于任意a, b ∈ A，若 (a, b) ∈ R 并且 (b, a) ∈ R，则一定有 a = b，则定义在集合A上的关系R为反对称的。即R是反对称的当且仅当

$$\forall x \forall y((x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \longrightarrow x = y)$$

- **例:**以下关于整数的关系是反对称的:

  $R_1 = \{(a, b) \mid a \leq b\}$,

  对于任意整数，若 a ≤ b 且 b ≤ a，则a = b。

  $R_2 = \{(a, b) \mid a > b\}$,

  $R_3 = \{(a, b) \mid a = b\}$,

  $R_4 = \{(a, b) \mid a = b + 1\}$.

  以下关系是非反对称的:

  $R_5 = \{(a, b) \mid a = b \text{ or } a = -b\}$

  (注意(1, −1)和(- 1, 1)都属于R_5),

  $R_6 = \{(a, b) \mid a + b \leq 3\}$ (注意(1, 2)和(2, 1)都属于 R_6).

- 可能有某种关系既是对称的，又是反对称的(如I_A)

反对称性(antisymmetric)

定义：对于任意a, b ∈ A，若 (a, b) ∈ R 并且 (b, a) ∈ R，则一定有 a = b，则定义在集合A上的关系R为反对称的。即R是反对称的当且仅当

$$\forall x \forall y\ ((x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \longrightarrow x = y)$$

$$\Leftrightarrow \forall x \forall y (x \in A \wedge y \in A \wedge x \neq y \wedge xRy \rightarrow (y, x) \notin R)$$

传递性(transitive)

定义：若对于任意a, b, c ∈ A, (a, b) ∈ R**且**(b, c) ∈ R**则**(a, c) ∈ R，那么定义在集合A上的关系R就满足传递性。即，R是传递的当且仅当 $\forall a \forall b \forall c(((a, b) \in R \wedge (b, c) \in R) \longrightarrow (a, c) \in R)$

- **例：**以下关于整数的关系是传递的:

$R_1 = \{(a, b) \mid a \leq b\}$,

$R_2 = \{(a, b) \mid a > b\}$,

$R_3 = \{(a, b) \mid a = b \text{ or } a = -b\}$,

$R_4 = \{(a, b) \mid a = b\}$.

对于每一个整数, a ≤ b且 b ≤ c,那么 b ≤ c.

以下关系是非传递的:

$R_5 = \{(a, b) \mid a = b + 1\}$

$R_6 = \{(a, b) \mid a + b \leq 3\}$

- 前提((a, b) ∈ R ∧ (b, c) ∈ R) 不成立，R也是传递的

关系的运算

- 给定两个关系R_1和R_2，我们可以使用基本的集合操作对他们进行运算，形成新的关系，如 $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, $R_1 - R_2$和$R_2 - R_1$。
- **例**：设 $A = \{1, 2, 3\}$和$B = \{1, 2, 3, 4\}$。关系$R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ 和$R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$可以使用基本的集合操作组合成新的关系：

$$R_1 \cup R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (3, 3)\}$$

$$R_1 \cap R_2 = \{(1, 1)\}$$

$$R_1 - R_2 = \{(2, 2), (3, 3)\}$$

$$R_2 - R_1 = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$$

关系的合成(composite)

- **定义：**假设R_1是集合A到集合B的关系，R_2是集合B到集合C的关系。则R_2和R_1的合成是A到C的关系，其元素满足：
  - 若$\exists y \in B$，使得$(x, y) \in R_1$且$(y, z) \in R_2$，则$(x, z) \in R_2 \circ R_1$。
  - 符号$R_2 \circ R_1$表示关系R_1与R_2的合成。
  - 对比假言三段论。
- 特别注意：国内教材与国外教材在R_1与R_2的顺序上是相反的。即国内教材都写成$R_1 \circ R_2$。在本课程中我们按照本书作者的写法。但是同学们以后在遇到关系的合成问题时，需仔细思考上下文，判断用哪一种顺序。

逆关系(reverse)

- 设R是集合X到集合Y的二元关系，则其逆关系R^c是从Y到X的二元关系：

$$R^c = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}.$$

- 很显然，$(R^c)^c = R$。

关系合成与逆关系举例

- 例：设 $R=\{(a, b), (c, d)\}$, $S=\{(b, e), (d, c)\}$.
  求：(1) R^c， S^c
  (2) $R\circ S$, $S\circ R$
- 解：(1) $R^c = \{(b, a), (d, c)\}$
  $S^c = \{(e, b), (c, d)\}$.
  (2) $R\circ S =\{(a, e), (c, c)\}$
  $S\circ R =\{(d, d)\}$.

重要定理

- **定理1：** R_1, R_2, R_3为关系。R_1是集合Z到集合W的关系，R_2是集合Y到集合Z的关系，R_3是集合X到集合Y的关系，则$(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$。
- **证明：** $\forall (x, w)$,

  $(x, w) \in (R_1 \circ R_2) \circ R_3$

  $\equiv \exists y(y \in Y \wedge (y, w) \in (R_1 \circ R_2) \wedge (x, y) \in R_3)$

  $\equiv \exists y(y \in Y \wedge \exists z(z \in Z \wedge (y, z) \in R_2 \wedge (z, w) \in R_1) \wedge (x, y) \in R_3))$

  $\equiv \exists z(z \in Z \wedge \exists y(y \in Y \wedge (x, z) \in R_2 \circ R_3) \wedge (z, w) \in R_1))$

  $\equiv (x, w) \in R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$
- 本定理说明合成运算满足结合律。

重要定理

- **定理2**：假设R, R_1, R_2都是集合A到集合B的关系，则如下集合等式皆成立：
  - $(R_1 \cup R_2)^c = R_1^c \cup R_2^c$
  - $(R_1 \cap R_2)^c = R_1^c \cap R_2^c$
  - $(\overline{R})^c = \overline{R^c}$，此处的$\overline{R} = A \times B - R$。
  - $(R_1 - R_2)^c = R_1^c - R_2^c$
  - $(A \times B)^c = B \times A$

重要定理

- **定理3**：假设R_1, R_2分别是集合Y到Z，以及集合X到Y的关系，则 $(R_1 \circ R_2)^c = R_2^c \circ R_1^c$ （对比矩阵的转置）
- 证明： $\forall(y, x)$,

$$(z, x) \in (R_1 \circ R_2)^c$$
$$\equiv (x, z) \in (R_1 \circ R_2)$$
$$\equiv \exists y(y \in Y \land (x, y) \in R_2 \land (y, z) \in R_1)$$
$$\equiv \exists y(y \in Y \land (y, x) \in R_2^c \land (z, y) \in R_1^c)$$
$$\equiv R_2^c \circ R_1^c$$

- 本定理说明合成运算和逆运算在交换运算顺序的时候，参与运算的关系也要交换顺序。

重要定理

- **定理4：**假设R为集合A上的二元关系，则有如下等价命题：
  - R是自反的 $\equiv I_A \subseteq R$
  - R是对称的 $\equiv R = R^c$
  - R是反对称的 $\equiv R \cap R^c \subseteq I_A$
  - R是传递的 $\equiv R \circ R \subseteq R$

关系的幂

定义：设R是集合A上的二元关系，则关系R的幂R^n可以递归地定义为:

- 第一步: $R^1 = R$
- 归纳步骤：$R^{n+1} = R^n \circ R$

由以下定理证明传递关系的幂是该关系的子集。

定理：集合A上的关系R是满足传递性，当且仅当对于 $n = 1, 2, 3, \ldots$ 有$R^n \subseteq R$。(数学归纳法证明见教材)

5-1作业

- 5-1
  - 2，3，22，24，26

关系的表示

Section 5.3

章节小结

- 用矩阵表示关系
- 用图示关系

用矩阵表示关系

- 有穷集之间的关系可用0 - 1矩阵表示。
- 假设R是从 $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$到 $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$的关系。
  - 这两个集合的元素可以以任意的顺序列出。当A = B时，我们使用相同的顺序。
- 关系R由矩阵表示 $M_R = [m_{ij}]$,

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ if } (a_i, b_j) \in R, \\ 0 \text{ if } (a_i, b_j) \notin R. \end{cases}$$

- 当a_i与b_j相关（满足关系R）时，表示R的矩阵的(i, j)项为1，如果a_i与b_j无关，则为0。

用矩阵表示关系的例子

例1：假设A = {1, 2, 3}，B ={1, 2}。令R是从A到B关系，如果a ∈ A, b ∈ B, 且 a > b，则(a, b)属于R，那么表示R的矩阵是什么(假设元素的顺序与递增的数值顺序相同)?

解：由于R = {(2, 1), (3, 1), (3, 2)}, 矩阵为

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

用矩阵表示关系的例子

例2：设$A=\{a_1, a_2, a_3\}$，$B=\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$。哪些有序对（序偶）在关系R中由矩阵表示为

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}?$$

解:由于R是$m_{ij}=1$的有序对(a_i, b_j)组成，因此有:

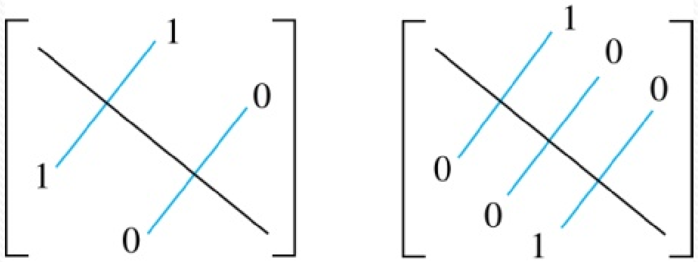
$$R=\{(a_1, b_2), (a_2, b_1),(a_2, b_3), (a_2, b_4),(a_3, b_1), \{(a_3, b_3), (a_3, b_5)\}.$$

集合A上的关系矩阵

- 如果R是自反关系，则M_R 主对角线上的所有元素都等于1。

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

- R是对称的当且仅当$m_{ij}=1$ 时，就有$m_{ji}=1$ 。 R是反对称关系当且仅当：如果$m_{ij}=1$ ，$i\neq j$，则$\mathrm{m}_{ji}=0$。



(a) Symmetric (b) Antisymmetric

$$\forall x\forall y(x\neq y\wedge xRy\rightarrow (y,x)\notin R)$$

集合A上关系的例子

例3：假设集合上的关系R由矩阵表示，R是自反的，对称的和反对称的?

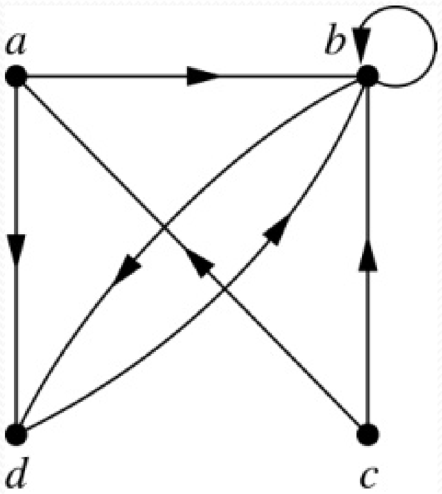
$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

解：因为所有的对角元素都等于1，所以R是自反的。因为M_R是对称的，所以R是对称的。

使用有向图示关系

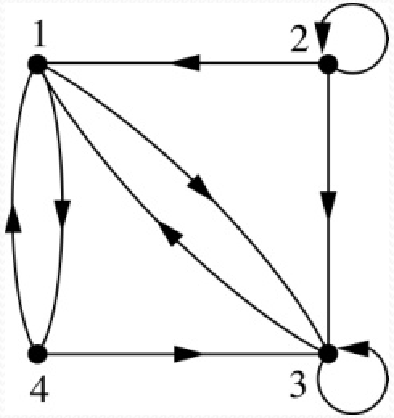
- 定义：一个有向图由顶点集合V(或节点)和边(或弧)的集合E有组成。其中边集是V中元素的有序对的集合。顶点a称为边(a, b)的初始顶点，顶点b称为这条边的终端顶点。
  - 表示边(a, a)的边称为环。

举例：图中有顶点a, b, c, d和边 (a, b), (a, d), (b, b), (b, d), (c, a), (c, b), (d, b) 的有向图如图所示。



表示关系的有向图的例子

例8：这个有向图所表示的关系中的有序对是什么?



解：关系中的有序对包括 (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 3), (4, 1) 和 (4, 3)。

自反关系的表示

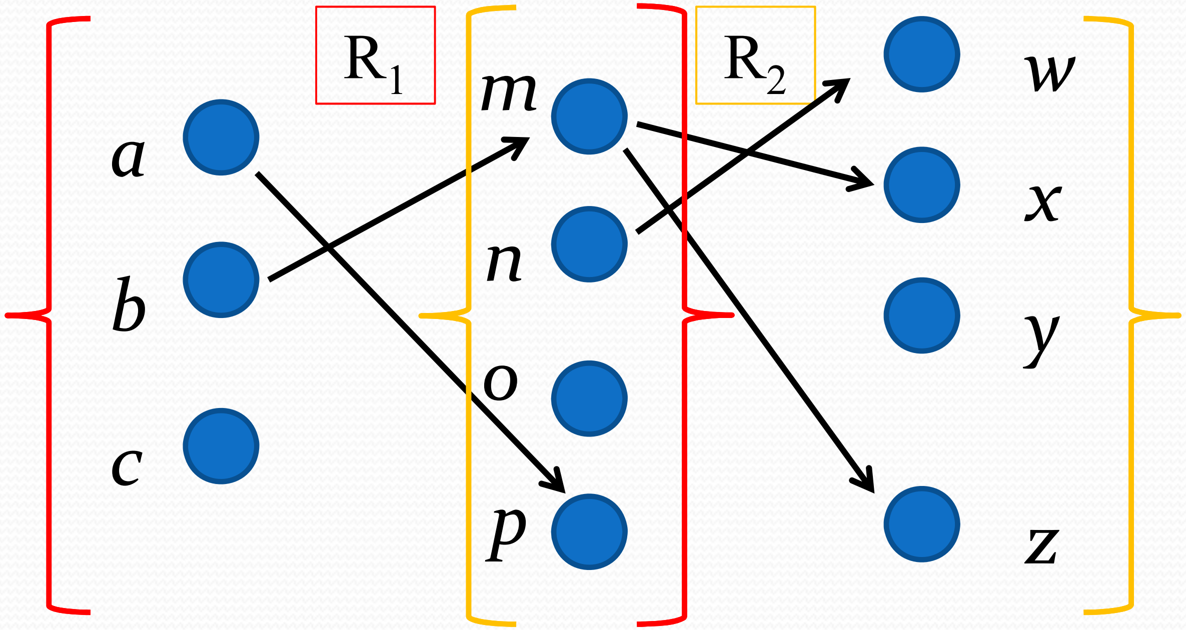
- 集合A上的关系R是自反的：
  - $I_A \subseteq R$
  - M_R主对角线上的元素全为1。
  - G_R的每个顶点处均有环。
- 自反关系再举例：
  - 平面上三角形的全等关系。
  - 实数集中实数的小于等于关系。
  - 幂集上的集合的相等、包含关系。
  - 命题集合上的命题的等价、蕴含关系。

对称关系的表示

- 集合A上的关系R是对称的：
  - M_R是对称矩阵。
  - G_R任意一对节点之间要么没有边，要么有一对方向相反的有向边。
- 对称关系再举例：
  - 平面上三角形的相似关系。
  - 人群中人之间的同学、同事、邻居关系。
  - 幂集中集合相等的关系。
  - 命题集合上的命题的等价关系。

关系合成的表示

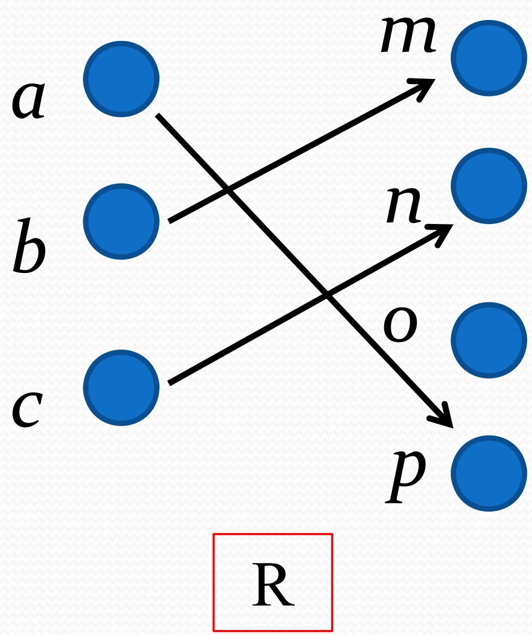
- 关系矩阵
  - $M_{R_1 \circ R_2} = M_{R_1} \odot M_{R_2}$（⊙表示矩阵的布尔积，见2.6.4节）
- 关系图

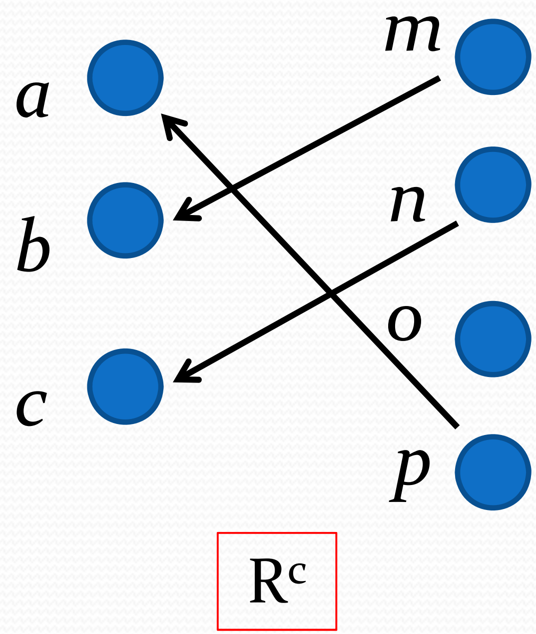


$R_2 \circ R_1 = \{(b, x), (b, z)\}$

逆关系的表示

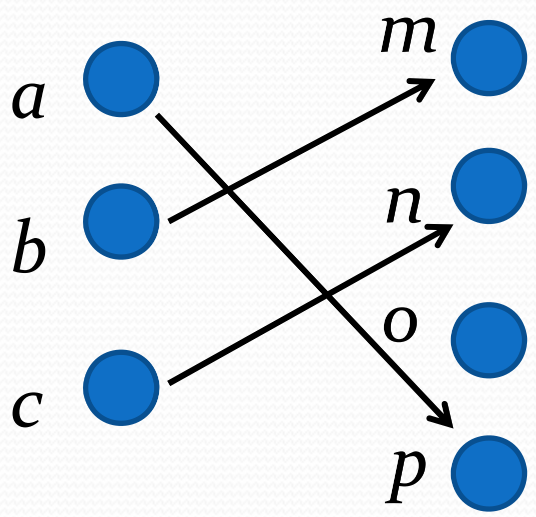
- 关系矩阵
  - $M_{R^c} = (M_R)^T$
- 关系图



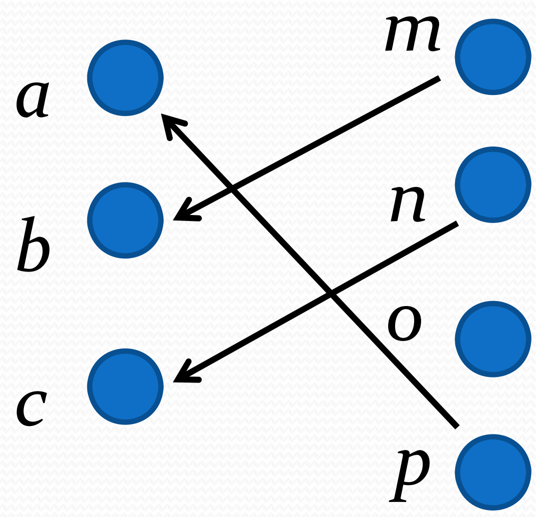


逆关系的表示

- 关系矩阵
  - $M_{R^c} = (M_R)^T$
- 关系图



R



R^c

从关系的有向图中确定该关系具有哪些属性

自反性：所有顶点上都有（自）环。

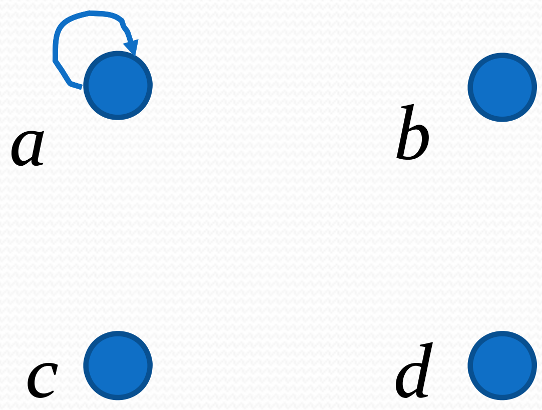
反自反性：所有顶点都没有环。

对称性：如果(x, y)有一条边，那么(y, x)也有一条边。

反对称性：如果$x \neq y$时，(x, y) 有边，则(y, x)没有边。

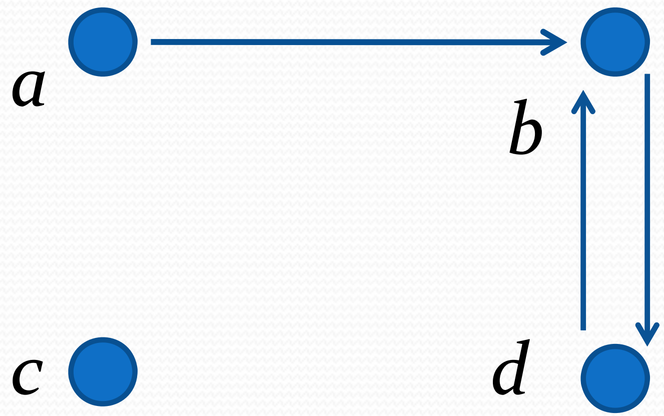
传递性：如果(x,y)和(y, z)有边，那么(x, z)也有边。

从关系的有向图中确定该关系具有哪些属性-例1



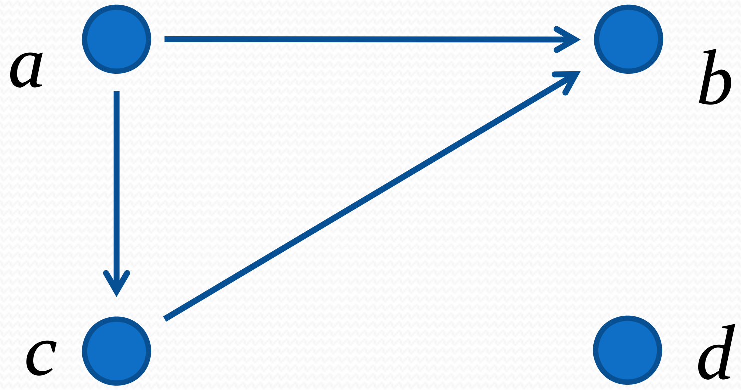
- 自反性？　不，不是每个顶点都有一个自环。
- 反自反性？　不，不是每个顶点都没有自环。
- 对称性？　是，从一个顶点到另一个顶点没有边。
- 反对称性？　是，从一个顶点到另一个顶点没有边。
- 传递性？　是，从一个顶点到另一个顶点没有边。

从关系的有向图中确定该关系具有哪些属性-例2



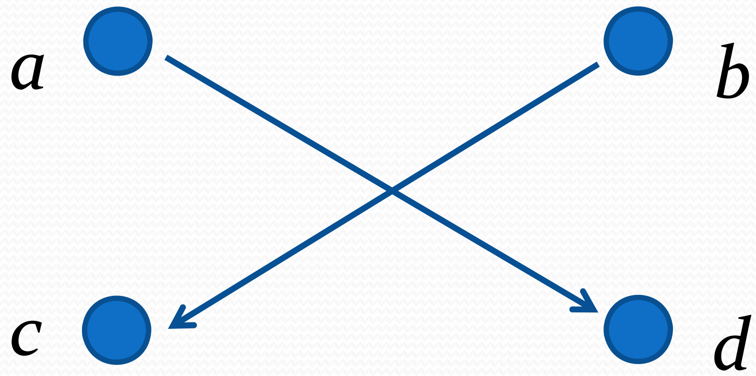
- 自反性？　　不，不是每个顶点都有一个环。
- 反自反性？　是，所有顶点都没有环。
- 对称性？　　不，从a到b有边，但是b到a没有边。
- 反对称性？　不，从b到d和从d到b都有边。
- 传递性？　　不，从a到c和c到b都有边，但是a到d没有边。

从关系的有向图中确定该关系具有哪些属性-例3



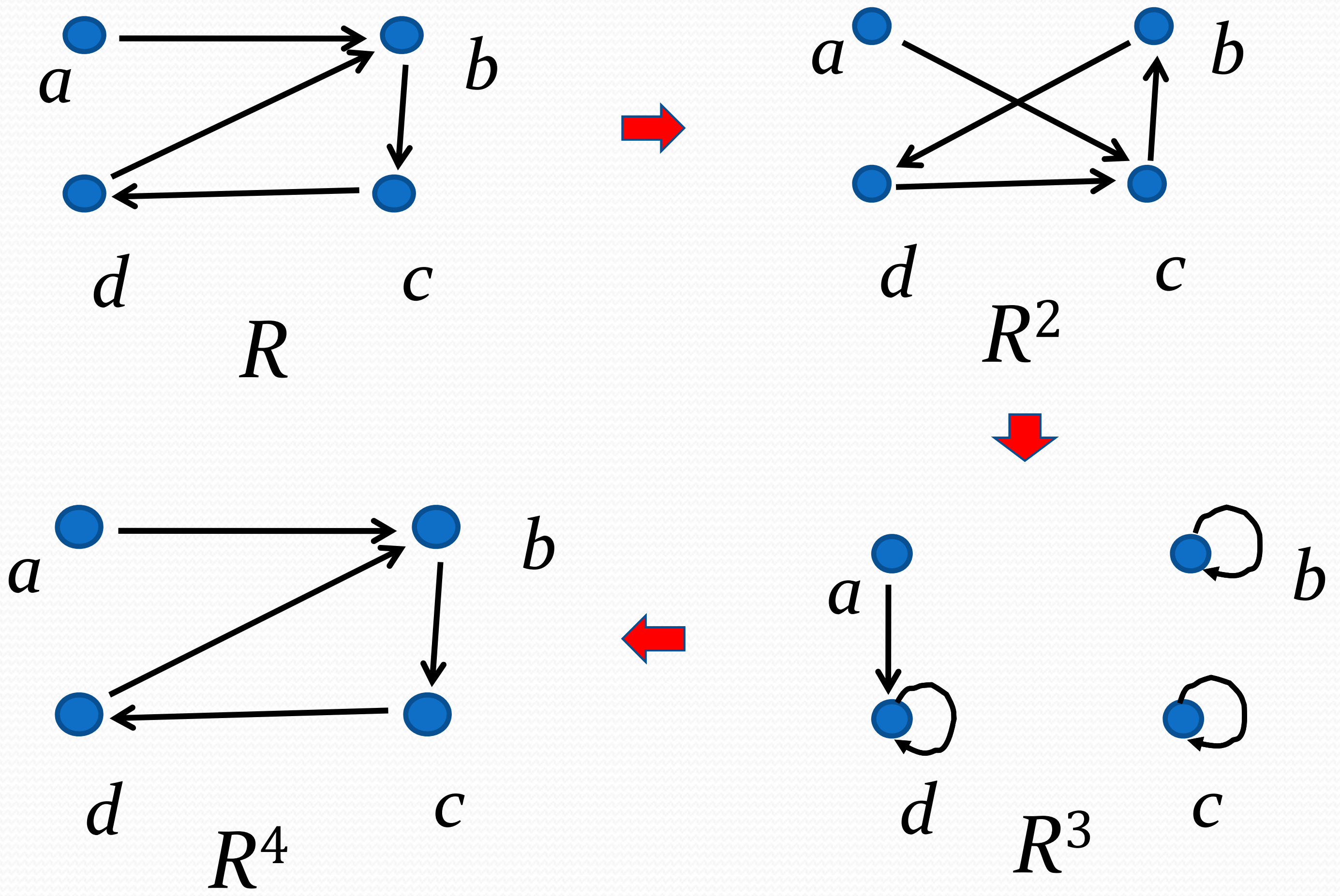
•自反性？　不，不是每个顶点都有环。
•反自反性？　是，所有顶点都没有环。
•对称性？　不，从a到c有边，但是c到a没有边。
•反对称性？　是，a，b，c三个节点之间都只有一条边。
•传递性？　是，从a到c和c到b都有边，于是a到b有边。

从关系的有向图中确定该关系具有哪些属性-例4



- 自反性？　　不，不是每个顶点都有自环。
- 反自反性？　是，所有顶点都没有自环。
- 对称性？　　不，从a到d有边，但是d到a没有边。
- 反对称性？　是，a和d，b和c两对节点之间都只有一条边。
- 传递性？　　是。简单的图容易看出来，复杂的图怎么办？

关系的幂



R^n子图中的边表示 (x, y)在R中有长度为n的路径(沿着箭头的方向)

关系的闭包

Section 5.4

章节小结

- 关系的闭包（自反、对称、传递）
- 与闭包相关的重要定理
- Warshall算法

关系的闭包

- 一般说来，集合A上的关系R可能并不具备我们所需要的性质P，例如自反性、对称性、传递性。
- 对于不满足性质P的关系，我们可以通过补充一些序偶来构造出新的关系S，使得S包含了R并且满足性质P。
- 可想而知，这些新的关系S是有很多种可能的，即包含了R且满足性质P的关系S不唯一。
- 我们能够从这些关系S中找到一个特殊的关系S’，它是其他所有关系S的子集，我们称S’是关系R的关于性质P的闭包。

如何变成宋玉

(约公元前298年-约公元前222年)

自反闭包(reflexive closure)

- 包含给定关系R的最小自反关系，称为R的自反闭包，记作$r(R)$。
  - $r(R)$是自反的；
  - $R \subseteq r(R)$；
  - $(\forall S)((R \subseteq S \land S\text{自反}) \rightarrow r(R) \subseteq S)$。

对称闭包(symmetric closure)

- 包含给定关系R的最小对称关系，称为R的对称闭包，记作s(R)。
  - s(R)是对称的；
  - $R \subseteq s(R)$；
  - $(\forall S)((R \subseteq S \wedge S\text{对称}) \rightarrow s(R) \subseteq S)$。

传递闭包(transitive closure)

- 包含给定关系R的最小传递关系，称为R的传递闭包，记作t(R)，有时也记为R^*或R^+。
  - t(R)是传递的；
  - $R \subseteq t(R)$；
  - $(\forall S)((R \subseteq S \wedge S\text{传递}) \rightarrow t(R) \subseteq S)$。

重要定理

- **定理1**：对于非空集合A上的关系R，以下几组命题等价：
  - R自反 ≡ $r(R) = R$
  - R对称 ≡ $s(R) = R$
  - R传递 ≡ $t(R) = R$
- 证明：充分性：因为$R \subseteq R$并且R自反，根据闭包的定义，$r(R) \subseteq R$；同时，还是根据闭包的定义知$R \subseteq r(R)$，因此$r(R) = R$；必要性：因为$r(R)$，且$R = r(R)$，故R自反。
- 对称、传递的情况证明过程类似。

重要定理

- **定理2**：对于非空集合A上的关系R_1和R_2且$R_1 \subseteq R_2$，则以下几组集合包含式成立：
  - $r(R_1) \subseteq r(R_2)$
  - $s(R_1) \subseteq s(R_2)$
  - $t(R_1) \subseteq t(R_2)$
- 证明：因为$R_1 \subseteq R_2 \subseteq r(R_2)$，且$r(R_2)$自反，因此$r(R_1) \subseteq r(R_2)$，这是因为根据$R_1$闭包的定义$r(R_1)$是包含$R_1$的最小自反关系。
- 对称、传递的情况证明过程类似。

重要定理

- **定理3：**对于非空集合A上的关系R_1和R_2，则以下几组集合等式及包含式成立：
  - $r(R_1) \cup r(R_2) = r(R_1 \cup R_2)$
  - $s(R_1) \cup r(R_2) = s(R_1 \cup R_2)$
  - $t(R_1) \cup t(R_2) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$
- 证明：因为$R_1 \subseteq R_1 \cup R_2$并且$R_2 \subseteq R_1 \cup R_2$，由定理2可知$r(R_1) \subseteq r(R_1 \cup R_2)$并且$r(R_2) \subseteq r(R_1 \cup R_2)$，因此$r(R_1) \cup r(R_2) \subseteq r(R_1 \cup R_2)$；反过来，$R_1 \cup R_2 \subseteq r(R_1) \cup r(R_2)$并且$r(R_1) \cup r(R_2)$自反（关键步骤），因此$r(R_1 \cup R_2) \subseteq r(R_1) \cup r(R_2)$。综上所述，$r(R_1) \cup r(R_2) = r(R_1 \cup R_2)$。
- 对称的证明过程类似，但由于$t(R_1) \cup t(R_2)$不一定传递，因此仅有$t(R_1) \cup t(R_2) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$。

重要定理

- **定理4：**对于非空集合A上的关系R，存在如下几组等式：
  - $rs(R) = sr(R)$
  - $rt(R) = tr(R)$
  - $st(R) \subseteq ts(R)$

如何求解关系的闭包

- 给定一个非空集合A上的关系R，如何得到R的自反、对称、传递闭包呢？
- **定理5**：对于非空集合A上的关系R，有如下等式成立：
  - $r(R) = R \cup I_A$
  - $s(R) = R \cup R^c$
  - $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots\ldots$

自反闭包和对称闭包的情况
请对照5.1节定理4进行理解和证明。

- 证明：$\because R \subseteq R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots\ldots$并且$(R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots\ldots)^2 = R^2 \cup R^3 \cup \ldots\ldots \subseteq R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots\ldots$

  $\therefore t(R) \subseteq R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots\ldots$

  反过来，

设对任意的$<x,y>\in R^2$，因为$R^2=R\circ R$，故根据合成运算的定义必有某个$c\in X$，使得$<x,c>\in R$且$<c,y>\in R$。因为$R\subseteq t(R)$，故$<x,c>\in t(R)$且$<c,y>\in t(R)$。由于$t(R)$是传递的，因此有$<x,y>\in t(R)$。因此$R^2\subseteq t(R)$。

- 同理可证，$R^n \subseteq t(R)$，因此$R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots\ldots \subseteq t(R)$

综上所述，$t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots\ldots$

回顾5.1节：

- **定理4**：假设R为集合A上的二元关系，则有如下等价命题：
  - R是自反的 $\equiv I_A \subseteq R$
  - R是对称的 $\equiv R = R^c$
  - R是反对称的 $\equiv R \cap R^c \subseteq I_A$
  - R是传递的 $\equiv R \circ R \subseteq R$

用矩阵乘法求R的传递闭包

- **定理6：**假设A是含有n个元素的非空集合，R是A上的二元关系，则必存在一个正整数$k \le n$，使得
  $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots\ldots \cup R^k$
- $M_{t(R)} = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots\ldots \cup R$
- 证明：记$t(R) = R^*$，假设$a_i, a_j \in A$且$a_iR^*a_j$，则存在一个正整数p，使得$a_iR^pa_j$成立。即存在如下一系列序偶$a_iRa_1, a_1Ra_2, a_2Ra_3, \ldots, a_{p-1}Ra_j$。用反证法，假设满足此序列的最小的$p > n$，那么在这个序列中一定有$0 \le t < q \le p$，使得$a_t = a_q$。故该序列可以重写为$a_iRa_1, a_1Ra_2, \ldots, a_{t-1}Ra_t$, $a_tRa_{q+1}, \ldots, a_{p-1}Ra_j$，其中红色部分有$t$个序偶，绿色部分有$p$-$q$个序偶。这表明$a_iR^ka_j$存在，其中$k = t+p-q = p-(q-t)$，易知$k < p$。这与$p$是最小的假设矛盾，因此$k \le$ n。

用Warshall算法求传递闭包

- Warshall 在1962年提出了R^+的一个有效算法如下：
  - (1) 置新矩阵$A = M_R$
  - (2) 置$i = 1$
  - (3)对所有j，如果$A[j, i] = 1$，则对$k=1, 2, \ldots, n$，计算
    $$A[j, k] = A[j, k] + A[i, k]$$
  - (4) $i = i+1$
  - (5)如果 $i \le n$，则转到步骤(3)。否则，算法停止。

例题 3

已知 $M=\begin{bmatrix}1&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$ 求 $t(R)$。

解

$$A:=M=\begin{bmatrix}1&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$i=1$ 时，第一列中只有 $A[1,1]=1$，将第一行与第一行各对应元素进行逻辑加，仍记于第一行得：

$$A:=\begin{bmatrix}1&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$i=2$ 时，第二列中 $A[1,2]=1$，$A[4,2]=1$，分别将第一行、第四行各元

素和第二行各对应元素逻辑相加，仍分别记于第一行和第四行得：

$$A:=\begin{bmatrix}1&1&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&1&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$i=3$ 时，第三列中没有不等于零的元素，A 的赋值不动。

$i=4$ 时，第四列中 $A[1,4]=A[2,4]=A[4,4]=1$，将一、二、四这三行和第四行对应元素逻辑相加，仍分别记于一、二、四这三行得：

$$A:=\begin{bmatrix}1&1&0&1&0&0&0\\0&1&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&1&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$i=5$ 时，$A[3,5]=1$，将第三行与第五行的对应元素逻辑相加，仍记于第三行，由于第五行的元素都等于零，A 的赋值不变。

$i=6$，$i=7$ 时，由于第六、七列各元素均为零，A 的赋值不变。

$$M_{R^+}=\begin{bmatrix}1&1&0&1&0&0&0\\0&1&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&1&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

5-3&5-4作业

- 5-3
  - 1，6，7，8，14，16
- 5-4
  - 1，7，10，11，12，13，14

等价关系与相容关系

Section 5.5

章节小结

- 等价关系
- 等价类
- 等价类和划分
- 相容关系

等价关系

定义1：如果集合A上的关系是自反的、对称的和可传递的，则称其为**等价关系**。

定义2：两个元素a和b通过等价关系相关联，称他们是等价的。常常使用$a \sim b$这个符号来表示对于某个特定的等价关系，a和b是等价的元素。

字符串

例： 假设R是英文字母组成的字符串的集合上的关系，满足aRb当且仅当$\mathrm{len}(a) = \mathrm{len}(b)$，其中$\mathrm{len}(x)$是字符串$x$的长度，R是等价关系吗?

解： 证明等价关系的所有性质都成立。

1.自反性：因为$\mathrm{len}(a) = \mathrm{len}(a)$所以对于所有的字符串$a$，它都遵循$aRa$。

2.对称性：假设aRb。因为$\mathrm{len}(a) = \mathrm{len}(b)$，所以$\mathrm{len}(b) = \mathrm{len}(a)$也成立。

3.传递性：假设aRb和bRc。因为$\mathrm{len}(a) = \mathrm{len}(b)$，并且$\mathrm{len}(b) = \mathrm{len}(c)$，所以$\mathrm{len}(a) = \mathrm{len}(c)$也成立。

模m同余

例： 设m是一个整数，$m > 1$。证明$R = \{(a, b) \mid a \equiv b \pmod{m}\}$（或$R = \{(a, b) \mid m \mid (a-b)\}$）是定义在整数集合上的等价关系。

解： $a \equiv b \pmod{m}$当且仅当m整除$(a-b)$。

自反性：$a \equiv a \pmod{m}$，因为$a-a = 0$被m整除，因为$0 = 0 \cdot m$。

对称性：假设$a \equiv b \pmod{m}$，那么$a-b$可以被m整除，所以$a-b = km$，其中k是整数。因此，$b-a = (-k)\, m$，所以$b \equiv a \pmod{m}$。

传递性：假设$a \equiv b \pmod{m}$和$b \equiv c \pmod{m}$，然后m同时除以$a-b$和$b-c$，因此有整数k和n，其中$a-b = km$, $b-c = nm$。将方程相加得到:

$a - c = (a - b) + (b - c) = km + nm = (k + n)\, m$.。

因此，$a \equiv c \pmod{m}$。

整除

例：证明正整数集合上的“整除”关系不是等价关系。

解：自反性和传递性的性质是成立的，但它们之间的关系是非传递性的。因此，“整除”并不是一个等价关系。

- 自反性：$a \mid a$对于所有 a。
- 非对称：$2 \mid 4$，但$4 \nmid 2$。因此，整除关系是非对称的。
- 传递性：假设a整除b，b整除c，则有正整数k和n，使得$b = ak$，$c = bn$，故$c = a(kn)$，故a整除c。这种关系是可传递的。

等价类(物以类聚、人以群分)

定义3：设R是集合A上的一个等价关系。与A的元素a满足关系R的所有元素的集合称为元素a的**等价类**。a关于R的等价类用 $[a]_R$表示。

当只考虑一个关系时，对于这个等价类，我们可以写出$[a]$，不带下标R。

注意 $[a]_R = \{s \mid (a, s) \in R\}$.

- 如果$b \in [a]_R$，则b称为该等价类的一个代表元。一个等价类的任何元素都可以用作类的代表元。
- 模m同余关系的等价类称为模m同余类，整数a模m的同余类用$[a]_m$表示，满足$[a]_m = \{\ldots, a-2m, a-m, a, a+m, a+2m, \ldots\}$。例如，

$[0]_4 = \{\ldots, -8, -4, 0, 4, 8, \ldots\}$　　$[1]_4 = \{\ldots, -7, -3, 1, 5, 9, \ldots\}$

$[2]_4 = \{\ldots, -6, -2, 2, 6, 10, \ldots\}$　　$[3]_4 = \{\ldots, -5, -1, 3, 7, 11, \ldots\}$

等价类和划分

定理1：设R是集合A上的等价关系。那么集合A的元素a和b存在以下等价命题:

(i) aRb

(ii) $[a] = [b]$

(iii) $[a] \cap [b] \neq \emptyset$

证明：我们证明(i)推出(ii)。假设aRb，我们将通过 $[a] \subseteq [b]$和$[b] \subseteq [a]$来证明$[a] = [b]$。假设 $c \in [a]$，那么aRc。因为aRb 和 R 是对称的，所以bRa。又由于R是可传递的且bRa和aRc，就得到bRc。所以 $c \in [b]$。这就证明了 $[a]\subseteq [b]$。反之可证明 $[b] \subseteq [a]$。因此$[a] = [b]$。

等价类和划分

定理1： 设R是集合A上的等价关系。那么集合A的元素a和b存在以下等价命题:

(i) aRb

(ii) $[a] = [b]$

(iii) $[a] \cap [b] \neq \emptyset$

证明： 其次证明(ii)推出(iii)。假设 $[a] = [b]$ ，因为由R的自反性设 $a \in [a]$，所以$[a]$是非空的。因此$[a] \cap [b] \neq \emptyset$。

最后证明(iii)推出(i)。假设$[a] \cap [b] \neq \emptyset$，那么存在元素$c$满足$c \in [a]$且$c \in [b]$，换句话说，aRc且bRc。由对称性，有cRb。再根据传递性，由aRc且cRb，就有aRb。

因为(i)推出 (ii)，(ii)推出(iii)，(iii)推出(i)，所以这三个命题等价。

等价关系划分集合

- 设R是集合A上的一个等价关系。R的所有等价类的并集就是A，因为A的每个元素a在它自己的等价类 $[a]_R$ 中。换句话说,

$$\bigcup_{a \in A} [a]_R = A.$$

- 从定理1可以推出，这些等价类要么是相等的，要么是不相交的，则当$[a]_R \neq [b]_R$时，$[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$。
- 因此，等价类构成了A的划分。

等价关系划分集合

定理2：令R是一个定义在集合S上的等价关系，那么R的等价类构成S的划分。反过来，给定集合S的划分$\{A_i \mid i \in \mathbf{Z}^+\}$,则存在一个等价关系R，它以集合$A_i(i \in \mathbf{Z}^+)$作为它的等价类。

证明：前一页我们已经展示了定理的第一部分。

对第二部分，假设 $\{A_i \mid i \in \mathbf{Z}^+\}$ 是S的一个划分。令R为S上的关系，R包含(x, y)当且仅当x和y属于划分中的同一子集 A_i，我们证明R满足等价关系的性质：

- 自反性：对于每一个 a ∈ S, (a, a) ∈ R, 因为a与自身属于同一子集。
- 对称性：若 (a, b) ∈ R，则b和a属于划分的同一子集，则 (b, a) ∈ R.
- 传递性：若 (a, b) ∈ R且 (b, c) ∈ R，则a和b属于划分的同一子集，b和c也属于划分的同一子集。由于子集是不相交的，而b属于两个子集，因此这两个子集必须相同。因此a和c属于划分的同一子集，即(a, c) ∈ R。

商集

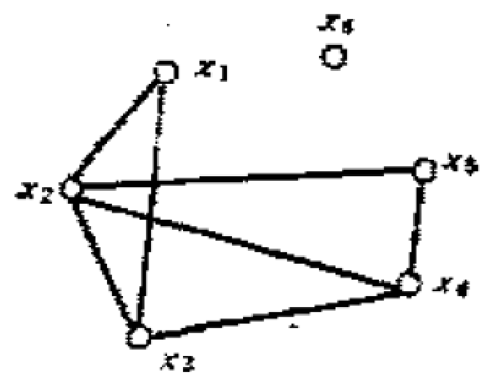
- 定义：设R是非空集合A上的等价关系，以R的全体不同的等价类为元素的集合$\{[a]_R \mid a \in A\}$称为A关于R的**商集**，记为A/R。
- 定理：非空集合A上的等价关系R决定了A的一个划分，该划分就是商集A/R。
- 定理：设R_1和R_2为非空集合A上的等价关系，则$R_1 = R_2$当且仅当$A/R_1 = A/R_2$。

相容关系

- **定义**：给定集合A上的关系R，若R是自反的，对称的，则称R是集合A上的**相容关系**。
  - 相容关系的关系矩阵的对角元全为1，且是对称矩阵。
  - 相容关系的关系图在每个结点都有“环”，且结点间的有向边都是成对出现。（因此在相容关系对应的关系图中我们常用无向边代替成对出现的有向边。）
- **定义**：设R是集合A上的相容关系，若C $\subseteq$ A，如果对于C中任意两个元素a_1，a_2均有a_1Ra_2，则称C是由相容关系R产生的**相容类**。

最大相容类和完全覆盖

- **定义**：设R是集合A上的相容关系，不能真包含于任何其它相容类的相容类，称为**最大相容类**。记作C_R。
  - 在相容关系对应的关系图中，最大完全多边形的顶点集合，就是最大相容类。
- 定义：在集合A上给定相容关系R，其最大相容类的集合称作A的**完全覆盖**，记作$C_R(A)$。



重要定理

- **定理：**给定集合A的划分$\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$，由它确定的关系$R=A_1 \times A_1 \cup A_2 \times A_2 \cup \ldots \cup A_n \times A_n$是等价关系。
- **定理：**给定集合A的覆盖$\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$，由它确定的关系$R=A_1 \times A_1 \cup A_2 \times A_2 \cup \ldots \cup A_n \times A_n$是相容关系。
- **定理：**集合A上的相容关系R与完全覆盖$C_R(A)$存在一一对应。

偏序关系

Section 5.6

章节小结

- 偏序和偏序集
- 字典顺序
- 哈塞图（哈斯图）
- 极大（小）元、最大（小）元
- 格
- 拓扑排序

偏序

- **定义1：**如果在集合S上的关系R是自反的、反对称的和传递的，则称其为**偏序(Partial order)**。集合S与其定义在其上的偏序R一起称为**偏序集(Poset)（不是集合）**，用(S, R)表示。集合S中的成员称为偏序集的元素。
  - 常将偏序关系R记为“≼”，并将 xRy记为$x \preccurlyeq y$。

偏序

例1：证明“大于等于”关系($\geq$)是整数集上的偏序。

- 自反性：对于任意整数a，$a \geq a$。
- 反对称性：如果$a \geq b$，$b \geq a$，则$a = b$。
- 传递性：若$a \geq b$，$b \geq c$，则$a \geq c$。

偏序

示例2：整除关系“|”是正整数集合上的偏序（关系）。

- 自反性：对于任意整数，都有$a \mid a$。
- 反对称性：如果a和b是正整数， $a \mid b$ 和 $b \mid a$, 那么 $a = b$。
- 传递性：假设a整除b，b整除c，则有正整数k和m，$b = ak$ 和 $c = bm$。那么$c = a(km)$，故 a 整除c。因此这个关系是传递的。
- $(\mathbf{Z}^{+}, \mid)$ 是偏序集。

偏序

示例3：证明包含关系(⊆)是定义在集合S的幂集上的偏序。

- 自反性：设A是S的子集，$A \subseteq A$。
- 反对称性：设A，B都是S的子集，因此如果$A \subseteq B$且$B \subseteq A$，则$A = B$。
- 传递性：由集合包含的定义可知，如果$A \subseteq B$且$B \subseteq C$，那么$A \subseteq C$。

字典顺序

定义：给定两个偏序集$(A_1, \preccurlyeq_1)$ 和 $(A_2, \preccurlyeq_2)$，$A_1 \times A_2$ 的字典顺序被定义为 (a_1, a_2) “小于” (b_1,b_2)，即

$$(a_1, a_2) \prec (b_1, b_2),$$

或者$a_1 \prec_1 b_1$ 或者 $a_1 = b_1$ 且$a_2 \prec_2 b_2$.

- 这个定义可以很容易地扩展到字符串的字典顺序。

例如：考虑小写英文字母的字符串。字典顺序可以使用字母表中字母的顺序来定义。这与字典中使用的顺序相同。

- discreet $\prec$ discrete, 因为这些字符串在第七个位置不同 且e $\prec$ t.
- discreet $\prec$ discreetness, 因为前八个字母一致，但第二个字符串更长。

可比性

- **定义2**：偏序集(S, ≼)中的元素a和b成为**可比的**，如果a ≼ b或者b ≼ a。当a和b是S中的元素既没有a ≼ b 也没有b ≼ a，那么a和b是**不可比的**。
- **定义 3**：如果 (S, ≼)是偏序集，且S中的每对元素都是可比的（有关系的），则S称为**全序集**或者**线序集**，且≼称为全序或者线序。一个全序集也称为链。
- **定义 4**：对于偏序集(S, ≼)，如果 ≼ 是全序，并且S的每个非空子集都有一个**最小元(素)**，就称它为良序集。

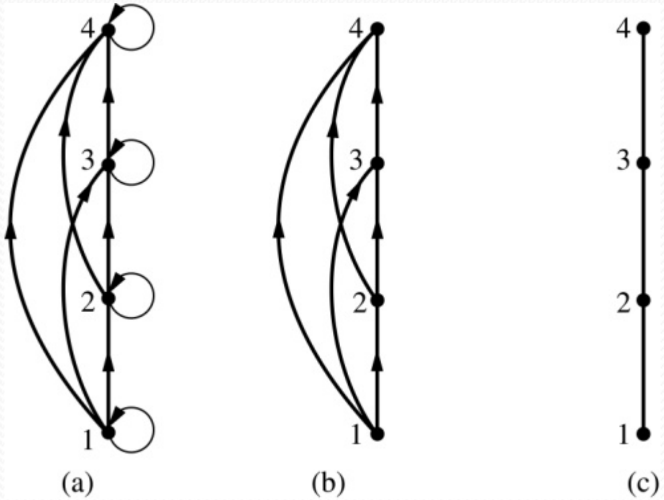
每一个良序集，一定是全序集

覆盖关系 (盖住关系)

- 定义：设(A, $\preccurlyeq$)是偏序集，若有x, y $\in$ A， x $\preccurlyeq$ y ， 且x $\neq$ y，且不存在其它元素z， z $\in$ A，使得x $\preccurlyeq$ z $\wedge$ z $\preccurlyeq$ y，则称元素y盖住元素x。并且记盖住集为：
  - COV(A) = {(x, y) | x, y $\in$ A且y盖住x}。

哈塞图 (Hasse diagram)

定义：哈塞图是部分排序的可视化表示，它忽略了由于自反性和传递性而必须出现的边。



偏序如上图(a)所示。(b)中删除了由于自反性而产生的环。(c)中删除了由于传递性而必须出现的边。(a)中偏序的哈塞图如(c)中所示。

构造哈塞图的过程-1

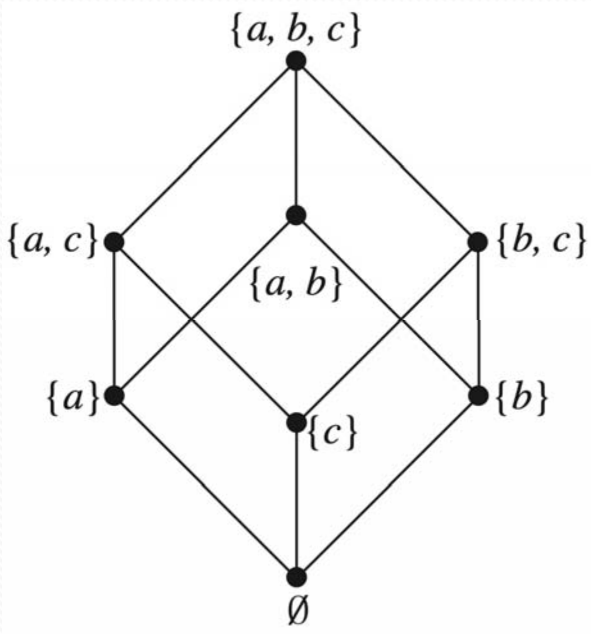
- 使用哈塞图表示一个有限偏序集(S, ≼)，从关系的有向图开始：
  - 根据自反特性，移除每个顶点上的环(a, a)；
  - 删除所有这样的边(x, y)：存在元素z ∈ S满足x ≼ z和z ≼ y 。这些边是由于传递性必须出现的；
  - 排列每条边，使其初始顶点位于终端顶点之下（“大”的元素在上）。去掉所有的箭头，因为所有的边都指向它们的顶点。

构造哈塞图的过程-2 (推荐)

- 使用哈塞图表示一个有限偏序集(S, ≼)，从偏序集开始：
  - 用小圆圈代表集合S中的元素；
  - 若$x \neq y$且$x \preccurlyeq y$，则将代表y的小圆圈画在代表x的小圆圈的上方；
  - 若$(x, y) \in COV(A)$，则在代表x的小圆圈和代表y的小圆圈之间连一条直线。

哈塞图举例

- 令集合S = {a, b, c}，画出幂集P(S)上的偏序{(A, B) | A ⊆ B}的哈塞图。



极大（小）元、最大（小）元

- 设$(S, \preccurlyeq)$为偏序集，$A \subseteq S$，则：
  - 若$\exists y \in A$，使得$\forall x(x \in A \wedge y \preccurlyeq x \rightarrow x = y)$，则称y为A的极大元(maximal element)（要么比y小要么不可比）。
  - 若$\exists y \in A$，使得$\forall x(x \in A \wedge x \preccurlyeq y \rightarrow x = y)$，则称y为A的极小元(minimal element)。
  - 若$\exists y \in A$，使得$\forall x(x \in A \rightarrow x \preccurlyeq y)$，则称y为B的最大元(greatest element)。（比y都小）
  - 若$\exists y \in A$，使得$\forall x(x \in A \rightarrow y \preccurlyeq x)$，则称y为B的最小元(least element)。

举例

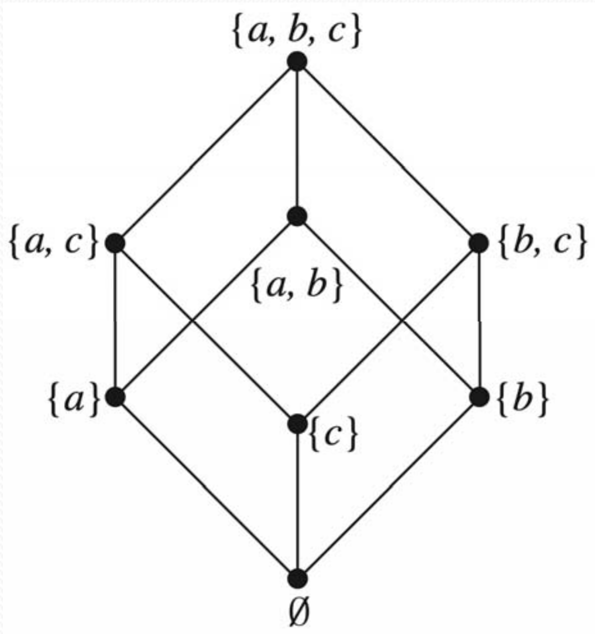
- 令集合$S = \{a, b, c\}$，幂集$P(S)$上的偏序$\{(A, B) \mid A \subseteq B\}$的哈塞图如下，求集合{{a}, {b}, {a, b}, {b, c}, {a, b, c}}的极大元、极小元、最大元、最小元。

极大元：{a,b,c}

极小元：{a},{b}

最大元：{a,b,c}

最小元：无



极大元、极小元一定存在，但不一定是唯一的。

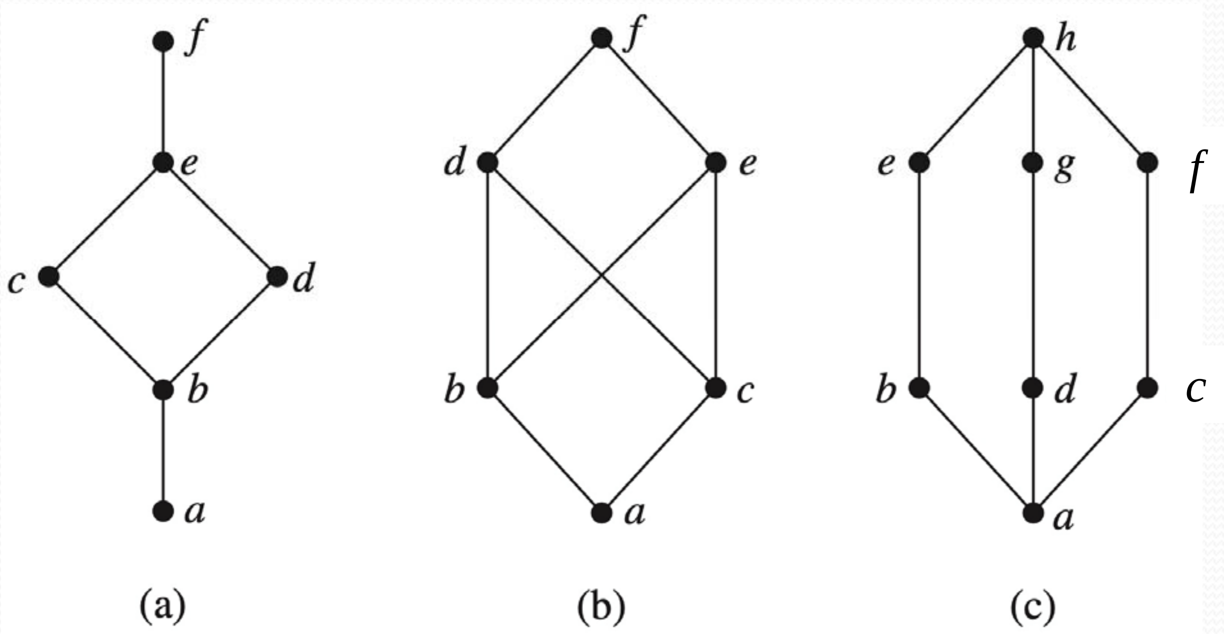
最大元、最小元不一定存在，但是如果存在，那么一定是唯一的。

上(下)界、上(下)确界

- 设$(S, \preccurlyeq)$为偏序集，$A \subseteq S$，则：
  - 如果$a \in S$，且对所有$x \in A$，$x \preccurlyeq a$，则称a为A的上界(upper bound)（天界），即
    - a为A的上界 $\equiv a \in S \wedge \forall x(x \in A \rightarrow x \preccurlyeq a)$
  - 如果$a \in S$，且对所有$x \in A$，$a \preccurlyeq x$，则称a为A的下界(lower bound)（冥界），即
    - a为A的下界 $\equiv a \in S \wedge \forall x(x \in A \rightarrow a \preccurlyeq x)$
  - 如果a是A的上界集合中的最小元。则称a为 A的最小上界或上确界LUB (Least Upper Bound)（传说中的南天门）。
  - 如果a是A的下界集合中的最大元。则称a为 A的最大下界或下确界GLB (Greatest Lower Bound)（传说中的第一层地狱）。

格

- 如果一个偏序集的每一对元素都有上确界和下确界，就称这个偏序集为格。



格　　　　　格

Hasse Diagrams of Three Posets.

5.5&5.6作业

- 5.5
  - 1，6，8，11，15，21，29，31
- 5.6
  - 1，4，8，11，17，22，24，33