最小生成树算法的拓展应用

——通讯网络的最佳Steiner树

主要内容

一、 问题

二、 假设

三、 问题分析

四、 问题求解算法
- 穷举法
- 构造型启发算法
- 贪婪算法
- 修正的Prim算法
- 模拟退火法

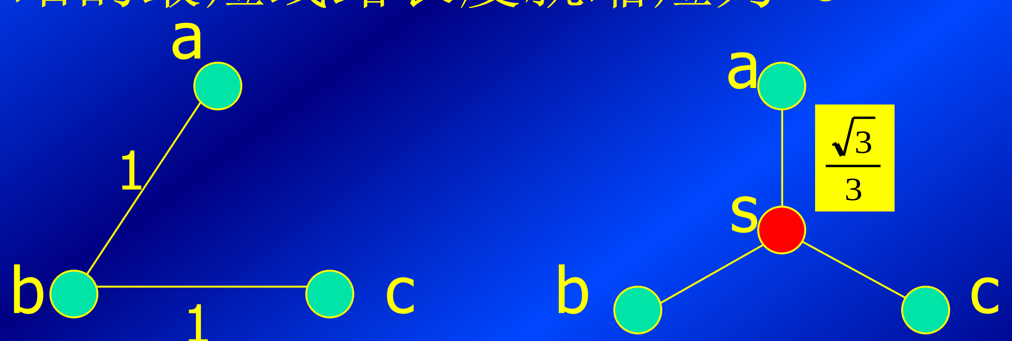
五、 计算结果

$\sqrt{3}$

一、问题

假设某地区有n个通讯站$v_1, v_2, \cdots v_n$，现在要架设连接这n个站的通讯线路网络。每两站之间的距离按矩形距离(直角折线距离，即 $d=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$)计算，两站之间的线路长度就是两站之间的距离。为了降低造价，可以添加一些“虚拟”站与原来的n个站构成一棵Steiner 最小树的方法来解决。例如图1中连接 a,b,c 三个站的最短线路长度是 2 ，但是添加一个虚拟站 s（图1右中的红点）以后，连接三个站的最短线路长度就缩短为 $3^{1/2}$ 。

图1



$\sqrt{3}$

一、问题

现在假设某地区有9个通讯站，它们的直角坐标分别是：a (0,15), b (5,20), c (16,24), d (20,20), e (33,25), f (23,11), g (35,7), h (25,0), i (10,3)

如果两站之间的距离按矩形距离计算， 每个“虚拟”站必须位于整数坐标点上。

（1） 请设计一个距离尽量短的通讯线路网络。

（2） 设每个通讯站（包括“虚拟”站）的造价为$d^{3/2}w$，其中d是通讯站顶点的度， w=1.2，再设计一个造价尽量少的通讯线路网络。

一、问题

给定平面上若干通讯站，两通讯站之间的线路长度为两点间的直角折线距离，即

$$d=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$$

两点间的线路费用正比于线路的长度。如何布线使连接通讯站的线网费用最低。

通过引入若干“虚设站”并构造一个Steiner树就可降低由一组站生成的最小生成树所需的费用，为构造一个有n个站的网络，最低费用的Steiner树最多只需n-2个虚设站，这些虚设站称为Steiner点。

二、假　设

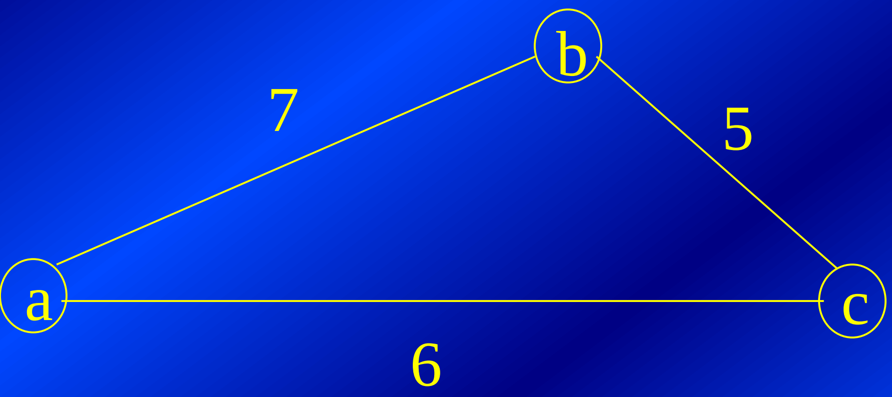
1）通信站点集合V_0是整数坐标的平面点集；

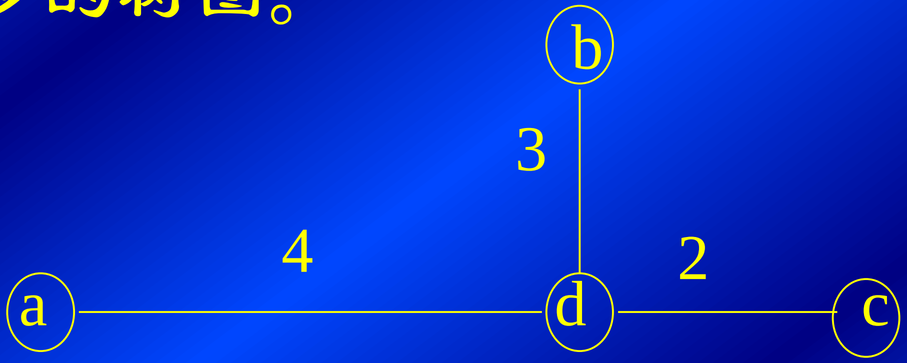
2）两点间的距离为直角折线距离，线路费用正比于线路长度；

3）虚设站位于格点（即坐标为整数的点）上。

三、 问题分析

例如：设有三个通讯站，直角坐标分别为a(0, 0)， b(4, 3), c(6, 0)。两点间的距离为直角折线距离。以这三个站为顶点，距离为边权的加权完全图见左下图。右下图是增加了一个“虚设站”后，得到的费用更少的树图。





三、 问题分析

1.基本概念

Z^2：平面上所有格点的集合；

V_0：Z^2中给定的n个通信站点的集合V_s；

V_s：Z^2中任意s个点的集合，且$V_s \cap V_0 = \varnothing$。

点集V_0的最小Steiner树： 以$V = V_s \cup V_0$为顶点集的完全图K_{s+n}，其中的边uv的权取为点u与v之间的直角折线距离，得到一个赋权完全图，其最小生成树记为T_{Vs}。对任意非负整数s和任意点集V_s，所有T_{Vs}中权最小者记为T^*，T^*即为**最小Steiner树**。 T^*中不属于V_0的点称为**Steiner点。**

特别， s=0时的T_{V0}称为V_0的最小支撑树。

三、 问题分析

2. 几个小问题

（1）T^*中包含多少个Steiner点（即虚设站）；

（2）Steiner点的位置如何；

（3）是否可能建立有效算法，以及如何解决该问题。

三、 问题分析

3. 已有的结论

定理1　设T^*是n个给定点的所有最小Steiner树中Steiner点个数s最小的，则$s \le n-2$ 。

定理2　Steiner点位于给定通信站点的x坐标线，y坐标线形成的格点上。

推论：最多有$n^2-n=n(n-1)$个Steiner点的可能位置

定理3　　求n个点的最小Steiner树的问题是NPC问题。

四、 问题求解算法

1. 穷举法

1） 令C ← ∞， 从$m \le n(n-1)$个可能的Steiner点位置中任取s个点，s=0,1,2,...,n-2，

2） 将取到的s个点与给定的n个点合并，构造以这n+s个点为顶点的赋权完全图G（图中边权取为两点间的直角折线距离）

3） 用Kruskal算法，求G的最小生成树T_s及其费用C_s。若$C_s<C$，则 $C \leftarrow C_s$，$T \leftarrow T_s$.

4） 从m个点中另取s个点重复2），3）直到穷尽m个点中所有可能的点组合。

四、 问题求解算法

1. 穷举法

共需进行

$$\binom{m}{0}+\binom{m}{1}+\cdots+\binom{m}{n-2}$$

次迭代。若m不大，此法可行，否则若m大，此法将无效。对给定的9个通讯站，m可减少到31个，从而，共需进行3572224次迭代，设每次迭代需要0.017秒，3572224次迭代需花大约17个小时。

四、 问题求解算法

1. 穷举法

定理4 设$V_0=\{v_i(x_i,y_i):i=1,2,\ldots,n\}$,对每个$y_k$, $k=1,2,\ldots,n$, 记

$$x_{00}(k)=\min_{(x_i,y_i)\in V_0,y_i<y_k}\{x_i\},\qquad x_{01}(k)=\min_{(x_i,y_i)\in V_0,y_i>y_k}\{x_i\},$$

$$x_{10}(k)=\max_{(x_i,y_i)\in V_0,y_i<y_k}\{x_i\},\qquad x_{11}(k)=\max_{(x_i,y_i)\in V_0,y_i>y_k}\{x_i\},$$

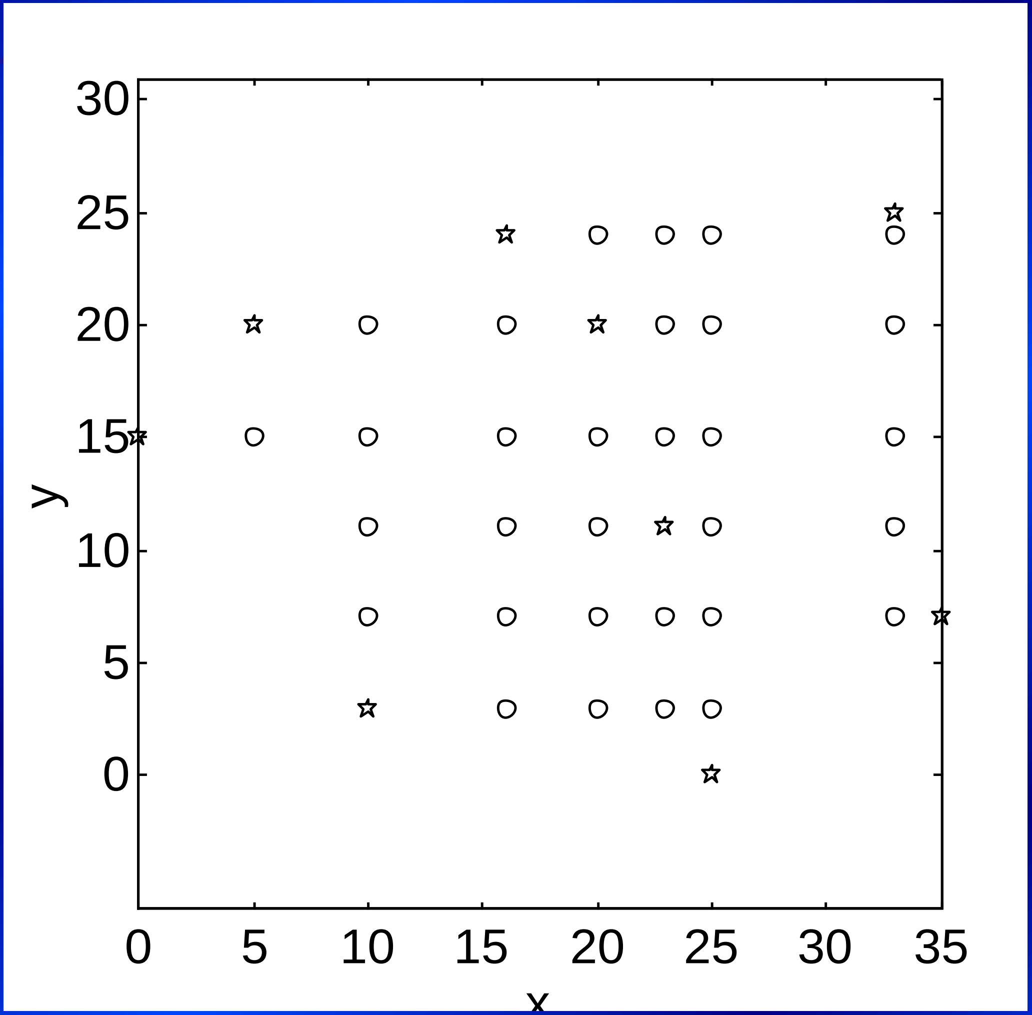
则在下述四类区域中不含Steiner点：

$$D_1=\{(x,y)|\ \ x<x_{00}(k),y<y_k\};\qquad D_2=\{(x,y)|\ \ x<x_{01}(k),y>y_k\};$$

$$D_3=\{(x,y)|\ \ x>x_{10}(k),y<y_k\};\qquad D_4=\{(x,y)|\ \ x>x_{11}(k),y>y_k\};$$

1. 穷举法

定理4 说明四个角点位置也不可能有Steiner点。如图，星号点是给定的9个通讯站点。根据定理2，共有n(n-1)=72个Steiner点的可能位置。再根据定理4，区域D_1, D_2, D_3和D_4内不含Steiner点。由此可确定，对给定的9个点，只有31个可能的Steiner点位置（图中小圆圈所示的31个位置）,m=31。



四、 问题求解算法

2. 构造型启发算法

（1）求给定的n个点的完备图的最小生成树，记录其费用；

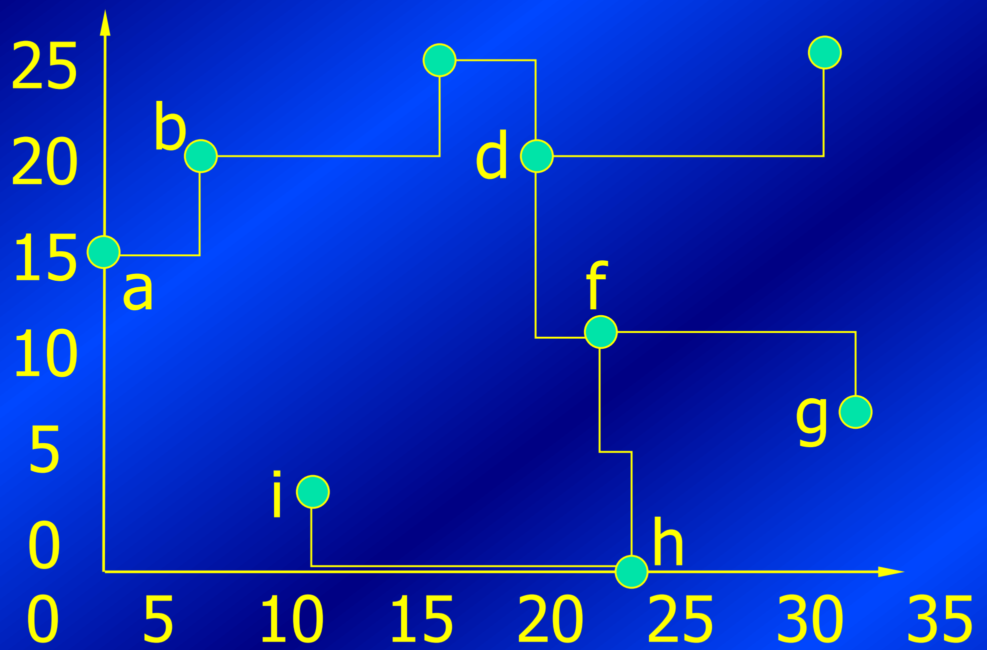
（2）取一个可能的Steiner点加入得到完备图，求其最小生成树；

（3）若该树的费用小于当前的最小费用，则记录此树并更新费用；

（4）重复（2）到（4）直到已有n-2个Steiner点，或任何剩余的Steiner点加入都不能减少费用。

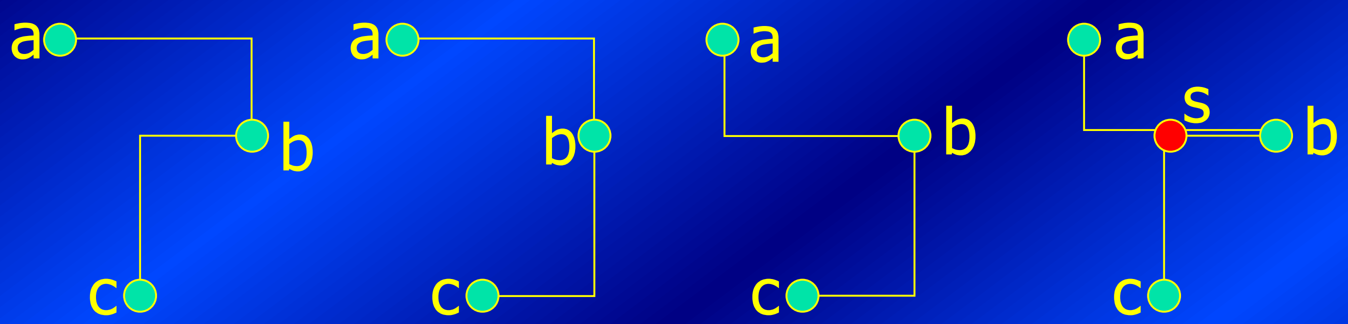
四、 问题求解算法

3 贪婪算法



四、 问题求解算法

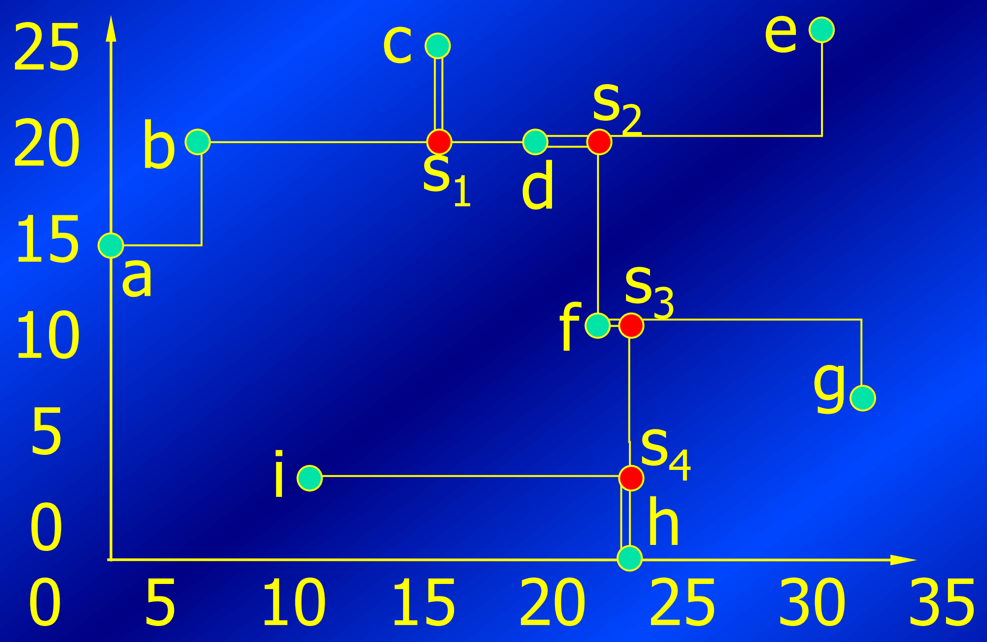
3 贪婪算法



找Steiner点的重叠法如图，重叠边的长度就是加Steiner点后线路节省的长度。

四、 问题求解算法

3 贪婪算法



四、 问题求解算法

3 贪婪算法

（1）输入给定的n个通信站点的坐标；

（2）计算最小直角折线支撑树；

（3）找重边，则重边的端点便是Steiner点的侯选点；

（4）分别计算出每个侯选点作为Steiner点加入后所减少的费用，该费用称为此点的价值；

（5）把最大价值的侯选点也作为一个给定点，重复（2）到（5）直到没有正价值的侯选点。

四、 问题求解算法

3 贪婪算法

美国Beloit大学的参赛队用贪心算法和构造型启发算法来求前面给出的9个点的最小Steiner树，两种方法都得到了最优解。对一般的问题未必能得到最优解，这两个方法都是近似算法。

四、 问题求解算法

4. 修正的Prim启发式算法

记号：

Z：给定的通讯站点集合；

G： 给定通信站点的x坐标线，y坐标线形成的格点全体构成的集合；

T：当前的Steiner树的顶点集；

S=G-Z；

四、 问题求解算法

4. 修正的Prim启发式算法

算法步骤：

（1）选取Z中距离最近的两点$z_i=(x_i,y_i)$, $z_j=(x_j,y_j)$；

（2）若这两点的x坐标或y坐标相同，则将两点连接起来，并把该路径上所有在G中的点以及z_i,z_j加入T，否则

a 构造过(x_i,y_j)的连接z_i,z_j的直角折线路径$path_1$,将$path_1$上所有属于G的点以及z_i,z_j加入T；

b 在Z-T中找到与当前树距离最近的顶点z，其距离记为dist1，然后删掉树中的$path_1$；

四、 问题求解算法

4. 修正的Prim启发式算法

c 构造过(x_j,y_i)的连接z_i,z_j的直角折线路径$path_2$,将$path_2$上所有属于G的点以及z_i,z_j加入T;

d 在Z-T中找到与当前树距离最近的顶点z，其距离记为dist2，然后删掉树中的$path_2$;

e 若dist1<dist2, 则加入$path_1$,

若dist2<dist1, 则加入$path_2$,

若dist1=dist2, 则对下一个最近点重复(2)a到(2)e,直到dist1≠dist2,或穷尽了Z中所有顶点（此时任意选择）;

（3）取$z_i \in Z \cap (G-T)$,$z_j \in T$,使z_i,z_j尽可能近;

（4）重复（2），（3）直到Z中的顶点均在T中。

四、 问题求解算法

4. 修正的Prim启发式算法

美国Mount St.Mary大学的参赛队用此近似算法来求给出的9个点的最小Steiner树，得到了最优解。他们还提出了一个修正的Kruskal启发式算法，在4个不同的通讯站点集上测试了这两种方法，并与已有的Hanan提出的一个启发式算法进行了比较，结果表明，修正的Prim启发式算法效果最佳。

5. 模拟退火法

（1）给定点集连同一些虚设点一起构成点集Z，求Z的最小支撑树，其费用记为C，置k=0;

（2）产生新的点集S

从以下几种方式中随机选择一种：

- 加入一个新的虚设点
- 去掉一个存在的虚设点
- 移动一个现有的虚设点到一个随机的允许位置

（3）确定新点集S的最小支撑树，其费用记为C1，

若C1≤C，则更新C为C1，更新当前点集Z为S,当k=M时停止，否则k=k+1,转（2）；

若C1>C，则仅以一定的概率（可取为exp{-(C1-C)/T(k)}，其中T为一控制参数，称为温度，随k的增大而减小,比如取T(k)=T(0)/k，称为冷却方案）接受S作为当前点集Z，转（2）。

五、 计算结果