5-1.

(2)

a). 非自反：$(4.4) \notin R$. 非对称：$(2.4) \in R$ 但 $(4.2) \notin R$.

非反对称：(2.3) 和 (3.2) 均 $\in R$. 传递.

b). 自反：$\forall x(x \in A \to (x.x) \in R)$. 对称. $\forall x \forall y((x.y) \in R \to (y.x) \in R)$

非反对称：(1.2). 和 (2.1) 均 $\in R$. 传递.

c). 非自反. $\forall x(x \in A \to (x.x) \notin R)$. 对称：$(2.4).(4.2)$ 均 $\in R$.

非反对称：$(2.4).(4.2) \in R$. 非传递：$(2.4).(4.2) \to (2.2) \notin R$.

d). 非自反：$\forall x(x \in A \to (x.x) \notin R)$. 非对称：$\forall x \forall y((x.y) \in R \to (y.x) \notin R)$

反对称：$\forall x \forall y((x.y) \in R \to (y.x) \notin R)$. 非传递：$(1.2).(2.3) \to (1.3) \notin R$.

$(2.3).(3.4) \to (2.4) \notin R$

e). 自反：$\forall x(x \in A \to (x.x) \in R)$. 对称 $\forall x \forall y((x.y) \in R \to (y.x) \in R)$.

反对称：$\forall x \forall y((x,y) \in R \land (y.x) \in R \to x=y)$. 传递.

f). 非自反. $\forall x(x \in A \to (x.x) \notin R)$. 非对称. $(1.4) \in R$ 但 $(4.1) \notin R$.

非反对称：(1.3), (3.1) 均 $\in R$ 非传递：$(1.3).(3.1) \to (1.1) \notin R$.

(3). a). 自反性. (访问a到访问a. $(a.a) \in R$).

非对称 $((a,b) \in R$ 但 $(b.a)$ 不一定 $\in R)$

非反对称.

传递. $((a.b).(b.c)$ 均 $\in R$. 则有 $(a.c) \in R)$.

b). 非自反. ((a.a) $\notin$ R).

对称 ((a,b) $\in$ R 则有 (b.a) $\in$ R)

非反对称. 非传递. ((a.b). (b.c) $\in$ R 不一定有 (a.c) $\in$ R)

c). 自反. ($\forall x$ ($x \in A \to (x.x) \in R$)

对称. ((a.b) $\in$ R 则 (b.a) $\in$ R)

非反对称. 同上 但 $a \neq b$.

非传递 (a.b). (b.c). $\in$ R 不一定有 (a.c) $\in$ R

d). 非自反. (a.a) 不一定 $\in$ R.

对称. ((a.b) $\in$ R $\to$ (b.a) $\in$ R).

非反对称 同上 $a \neq b$.

非传递. (a.b). (b.c) $\in$ R $\not\to$ (a.c) $\in$ R.

22. a). 对称: $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$

b). 反对称: $2^n \cdot 3^{\frac{n(n-1)}{2}}$

c) 非对称: $3^{\frac{n(n-1)}{2}}$

d) 反自反: $2^{n(n-1)}$

e) 自反和对称: $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$

f). 既不自反也不反自反: $2^{n^2} - 2 \cdot 2^{n(n-1)}$

24. $\Rightarrow$ 若R是对称的 且 $(a,b)\in R$. 则 $(b,a)\in R$.
则 $(b,a)\in R^{-1}$. 则 $R\subseteq R^{-1}$, 同理 $R^{-1}\subseteq R$. 则 $R=R^{-1}$

$\Leftarrow$ 若 $R=R^{-1}$. 则 $(a,b)\in R$ 则 $(a,b)\in R^{-1}$ 且 $(b,a)\in R^{-1}$
则 $(b,a)\in R$. 则 R是对称的

26. 数学归纳法： 当 $n=1$ 时 显然成立.
假设 R^n 是自反, ~~传递的~~, 则 $R^{n+1}\subseteq R$.
令 $(a,b)\in R$. 由归纳假设 $R^n=R$ 且自反.
则 $(b,b)\in R^n$ 则 $(a,b)\in R^{n+1}$
则 $R\subseteq R^{n+1}=R^n\circ R$. 得证.

5-3.

1. a) $\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ b). $\begin{bmatrix}0&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ c). $\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$ d). $\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}$

6. 将矩阵中每个1变为0. 每个0变为1

7. a). R^{-1}: $\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$ b). $\overline{R}$: $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$

c). R^2: $\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$

8. a). R^2: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ b). R^3: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

c). R^4: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

14. 图10：非自反：无自环。 非对称：有 $a\to b$ 无 $b\to a$

(V)反自反：无自环。 非反对称：有 $b\to c$ 和 $c\to b$.

非传递：有 $b\to c$, $c\to b$. 无 $b\to b$.

图11：非自反：无自环 非对称：有 $a\to b$ 无 $b\to a$.

(V)反自反：无自环 反对称(V)

非传递：有 $b\to a$, $a\to c$, 无 $b\to c$.

16. 数学归纳法

$n=1$ 时 显然成立。

假设 $n=k$ 时成立。即 $M_R^{[k]}$ 表示 R^k 的矩阵

$\because R^{k+1}=R^k\circ R$.

其矩阵为 $M_{R^k}\odot M_R = M_R^{[k]}\odot M_R = M_R^{[k+1]}$

得证。

5-4.

1. a) 自反闭包：$r(R)=\{(0,0),(0,1),(1,1),(1,2),(2,0),(2,2),(3,0),(3,3)\}$

b) 对称闭包：$s(R)=\{(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2),(2,1),(2,0),(2,2),(3,0),(0,3)\}$

7. ∵ R的对称闭包是 $R\cup R^c$. $M_{R\cup R^c}=M_R\vee M_{R^c}=M_R\vee M_{R^T}$

10. a) 有学生C，a和c至少有一门公共课，c和b至少有一门公共课，
则 $(a,b)\in R^2$.

b) 有学生c,d. a,c至少有一门公共课. c,d至少有一门公共课.
d,b至少有一门公共课. 则 $(a,b)\in R^3$

d) a,b至少有一门公共课. 则 $(a,b)\in R^*$

11. $(R^*)^{-1}=(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}R^n)^{-1}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(R^n)^{-1}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}R^n=R^*$.

则 R^* 对称

12. a) $R:\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}$ $M_{R^*}=M_R\vee M_R^{[2]}\vee M_R^{[3]}\vee M_R^{[4]}$

$\Rightarrow M_{R^*}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{vmatrix}$.

b). $M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. $M_{R^*} = M_R \vee M_R^{[2]} \vee M_R^{[3]} \vee M_R^{[4]}$

$\Rightarrow M_{R^*} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

c). $M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $M_{R^*} = M_R \vee M_R^{[2]} \vee M_R^{[3]} \vee M_R^{[4]}$

$\Rightarrow M_{R^*} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

d). $M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. $M_{R^*} = M_R \vee M_R^{[2]} \vee M_R^{[3]} \vee M_R^{[4]}$

$M_{R^*} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

27. a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

① $i=1$ $A[2.1] = A[4.1] = 1$

$r_2 + r_1$. $r_4 + r_1$.

$\Rightarrow A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

② $i=2$. $A[1.2] = 1 = A[2.2] = A[4.2] = 1$ $r_1 + r_2$. $r_2 + r_2$. $r_4 + r_2$

$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

③ $i=3$. $A[1.3] = A[2.3] = A[4.3] = 1$

$r_1 + r_3$. $r_2 + r_3$. $r_4 + r_3$

$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

④ $i=4$. $A[1.4] = A[2.4] = A[3.4] = A[4,4] = 1$

$r_1 + r_4$. $r_2 + r_4$. $r_3 + r_4$. $r_4 + r_4$.

$\Rightarrow M_{R^*} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

14. a). 自反 & 传递.

{(1.1). (1.2) (1.4). (2.2). (3.3). (4.1). (4.2). (4.4).}

b). 对称 & 传递.

{(1.1). (1.2). (1.4). (2.1). (2.2) (2.4). (3.3). (4.1). (4.2). (4.4)}

c). 自反. 对称. & 传递.

{(1.1). (1-2). (1.4). (2-1). (2.2). (2.4). (3.3). (4.1). (4.2). (4.4)}