Mathematical Experiments

图论算法

—— 最小生成树

重庆大学数学与统计学院

主要内容

A 引例

B 基本概念与结论

C **Kruskal算法**

D 算法的**MATLAB**程序实现

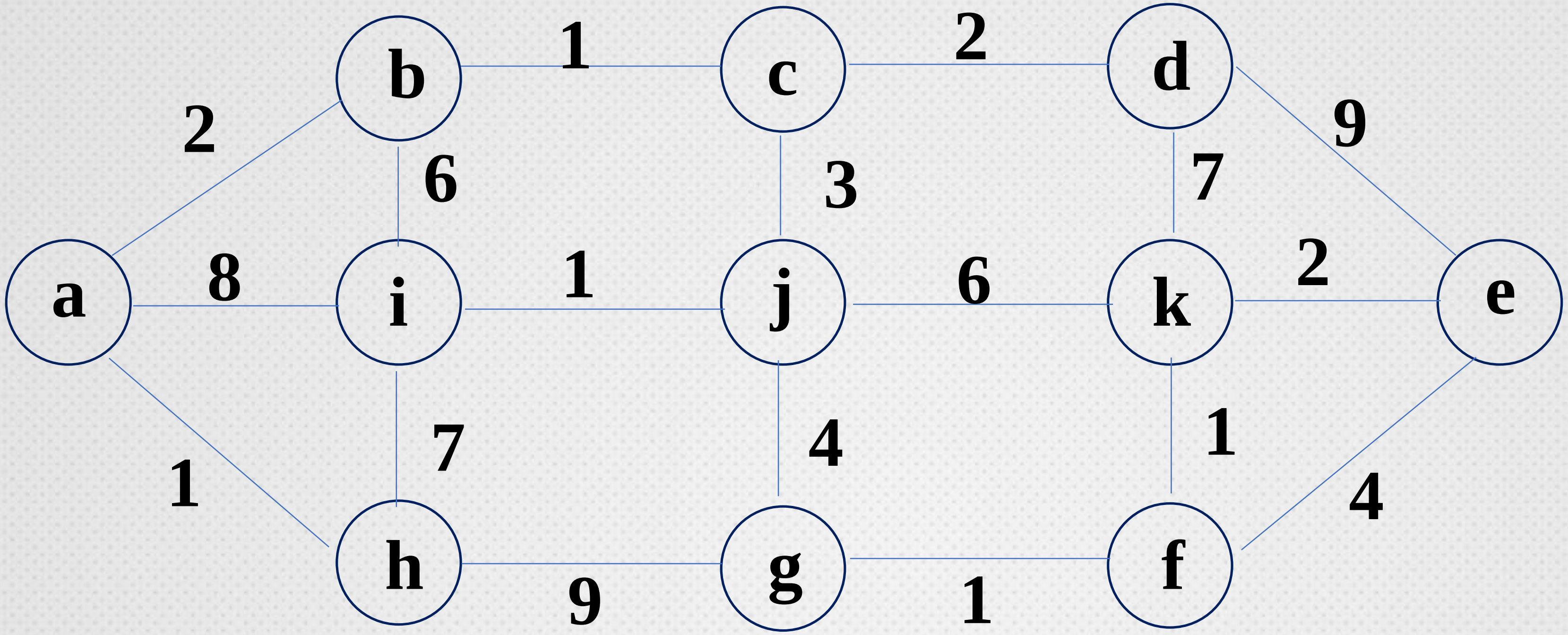
引例1：海底管道网络设计

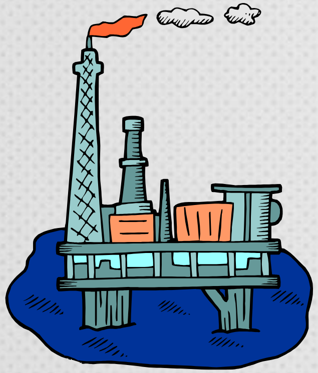
几个海上石油钻井平台开采出的石油 $\xrightarrow{\text{运往}}$ 炼油厂

建造一个管道网传输石油

如何设计该管道网，才能使建造费用最低。

引例1：海底管道网络设计





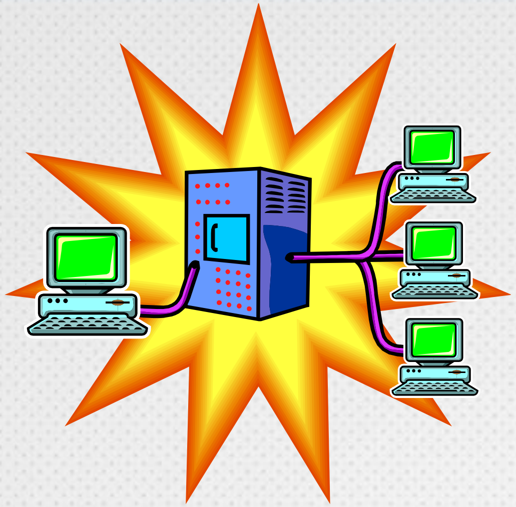
顶点: 钻井平台及炼油厂

边: 其两端点之间可以铺设管道

边上的权: 该段管道的建设费用

引例2：计算机网络的线路设计

Mathematical Experiments

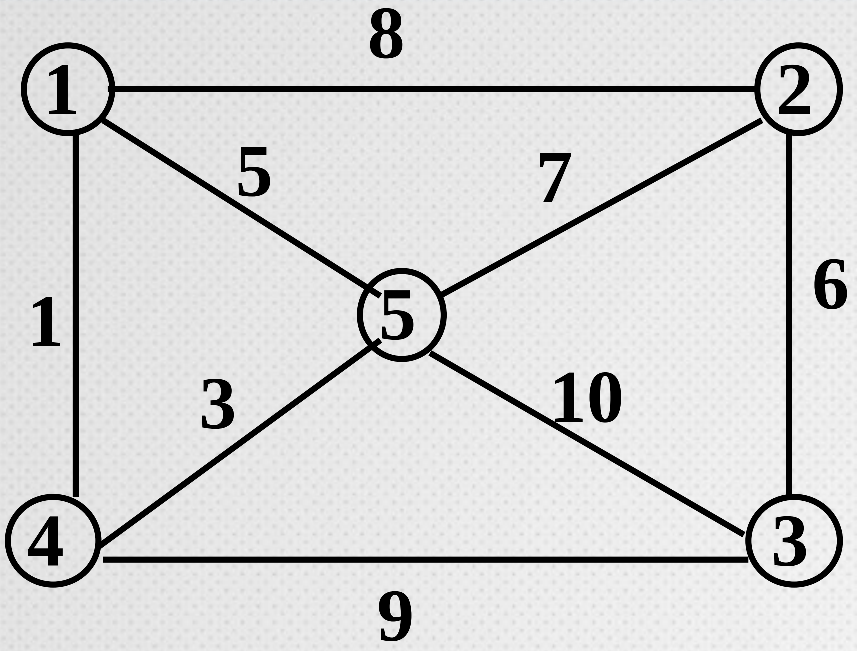


用数据通讯线把一组站点联结起来

不允许通讯线在非站点处相交。

如何连接可使通讯线的花费最小？

引例2：计算机网络的线路设计



最经济的网络不应该有任何封闭的回路（圈）。

顶点：站点

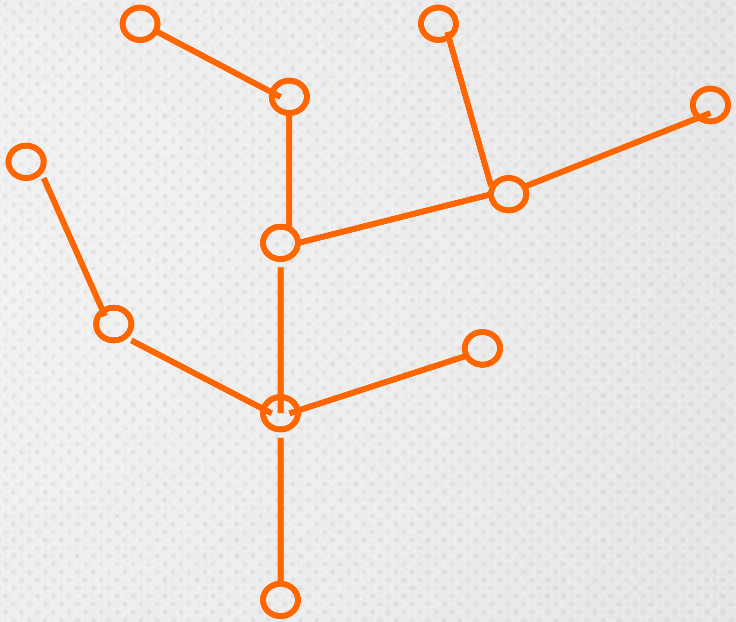
边：两端点之间可以铺设通讯线路

边上的权：铺设费用

树：没有圈的连通图

树的性质：

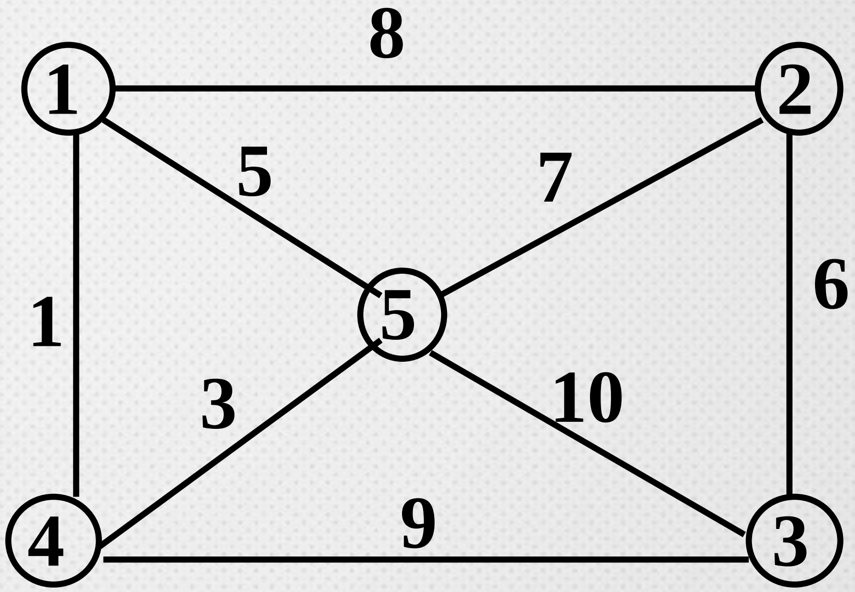
- 树中任意两点间有唯一路径。
- 树的边数恰好为顶点数减1。



生成树或支撑树(spanning tree)：

G的子图且是树，其顶点集等于G的顶点集

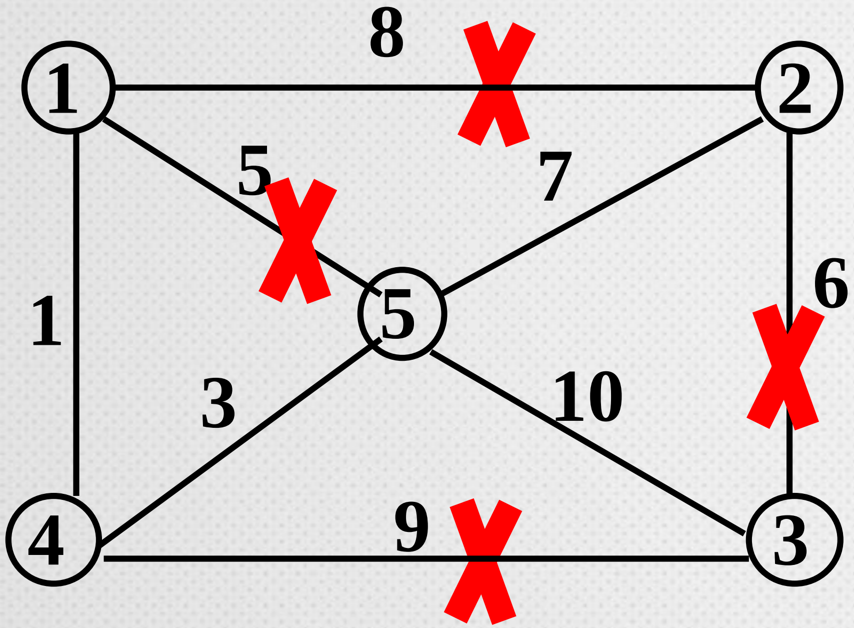
如何简便地得到右图的生成树？

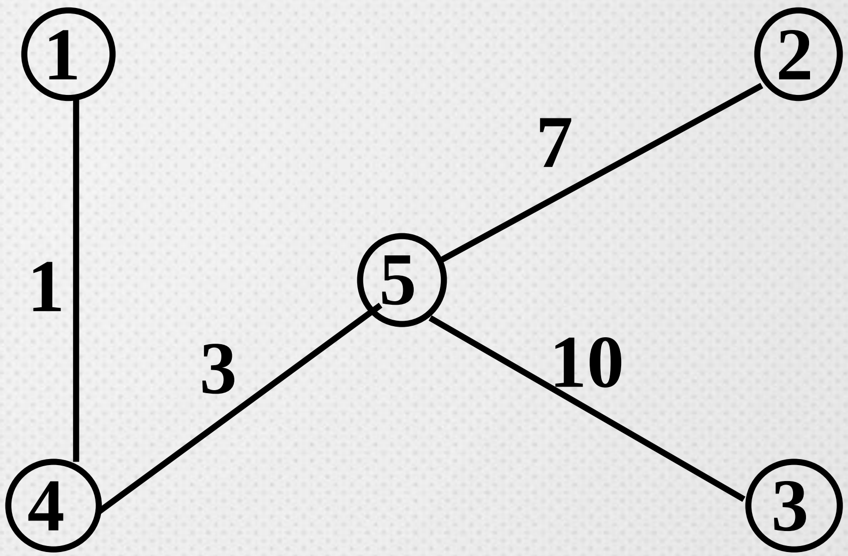


避圈法和破圈法

如何简便地得到下图的生成树？

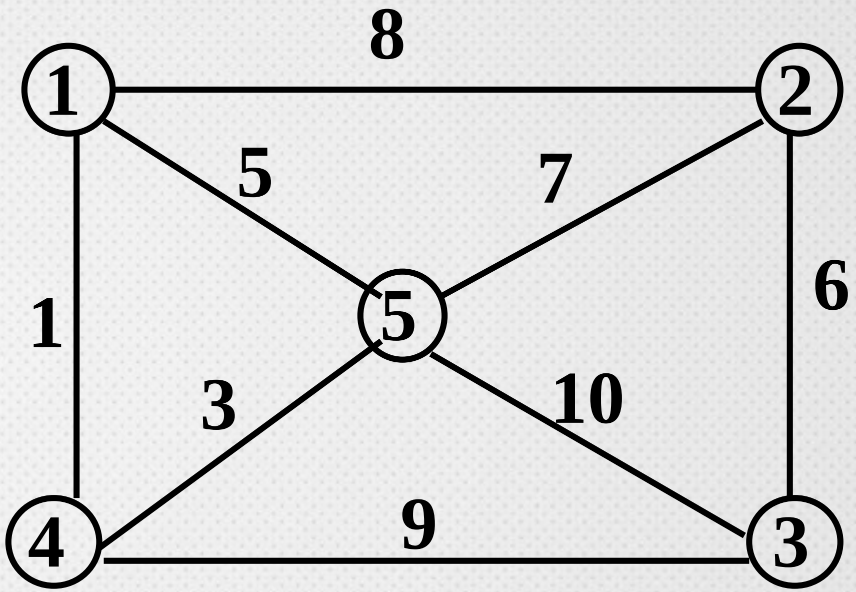
破圈法





引例2：应在哪些站点之间铺设通讯线路？

在相应的加权图中构造**最小费用的生成树**的问题？



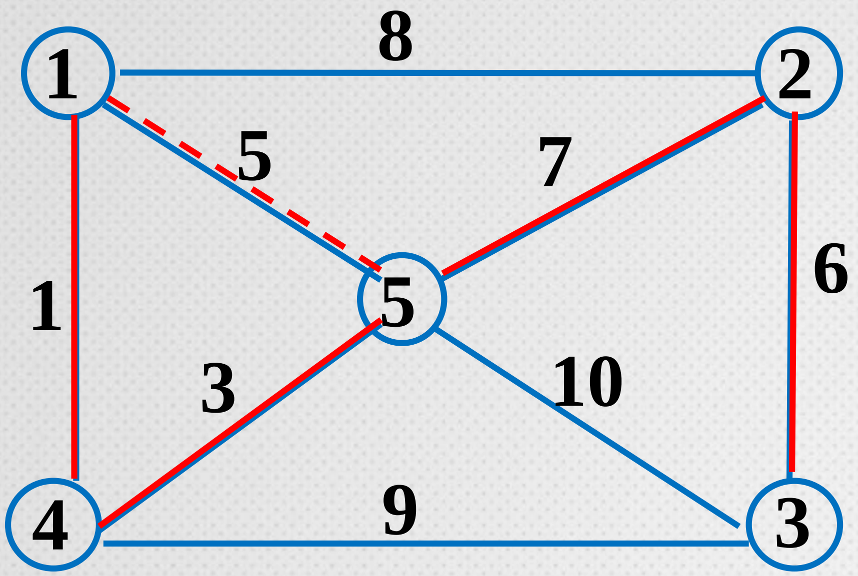
定义 加权图$G=(V,E)$的一棵生成树$T=(V,E_1)$中全部边上的权之和称为**该生成树的权**，记为 $w(T)$。

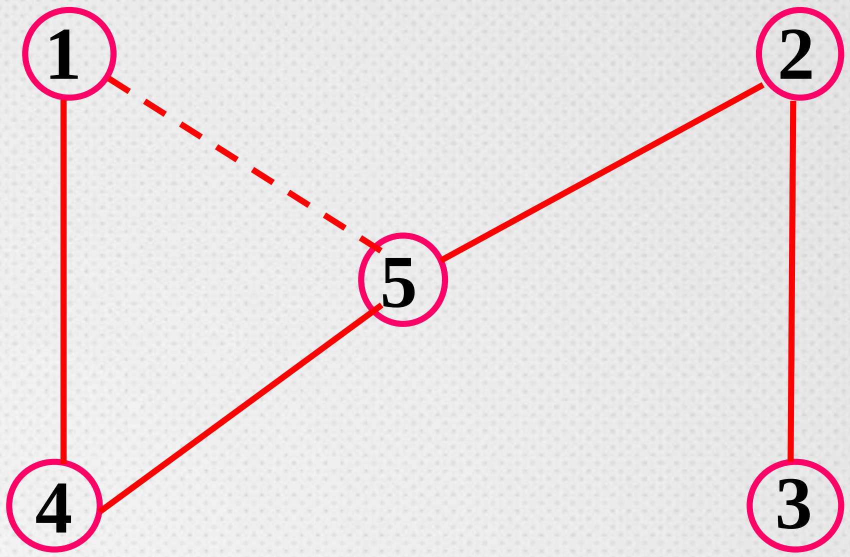
即

$$w(T)=\sum_{e\in E_1} w(e)$$

如果生成树 T^* 是 G 的所有生成树中权最小的生成树，则称 T^* 是 G 的**最小生成树**，简称最小树。

如何求最小生成树？





Kruskal算法

时间复杂度: O(m $\log_2 m$)
其中m为图的边数

基本思想:

按边权由小到大的顺序来选边进入生成树

保证每一步选出来的边加进来，不形成圈，否则放弃该边。

Kruskal算法

步骤

1) 选择边e1，使得w(e1)尽可能小；

2) 若已选定边 $e_1, e_2, ..., e_i$ ，则从 $E \setminus \{e_1, e_2, ..., e_i\}$ 中选取 e_{i+1}，使得:

i) $G[\{e_1, e_2, ..., e_{i+1}\}]$ 为无圈图，

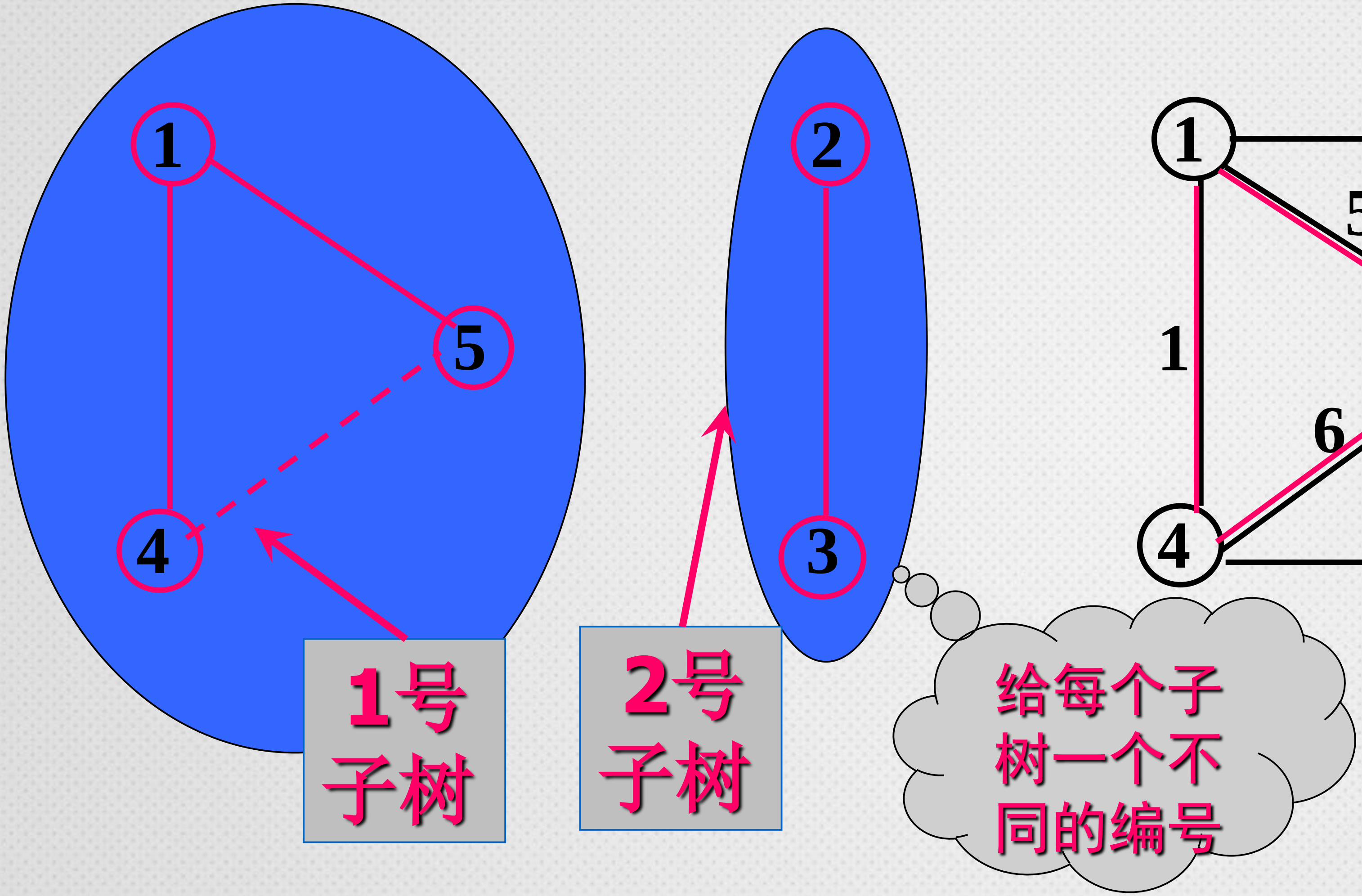
ii) $w(e_{i+1})$是满足i)的尽可能小的权，

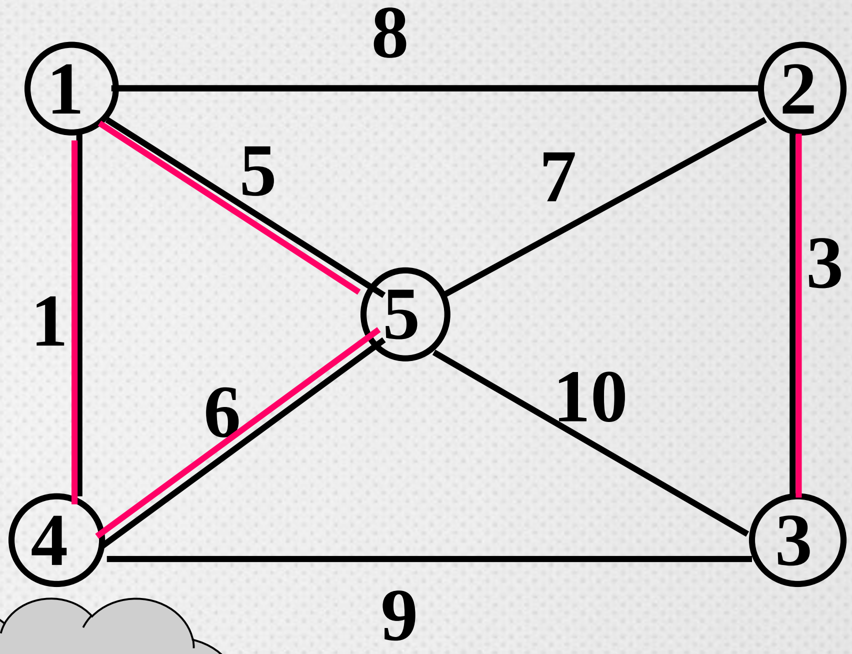
3) 当第2)步不能继续执行时，则停止.

定理 由Kruskal算法构作的任何生成树 $T^* = G[\{e_1, e_2, ..., e_{\nu-1}\}]$都是最小生成树.

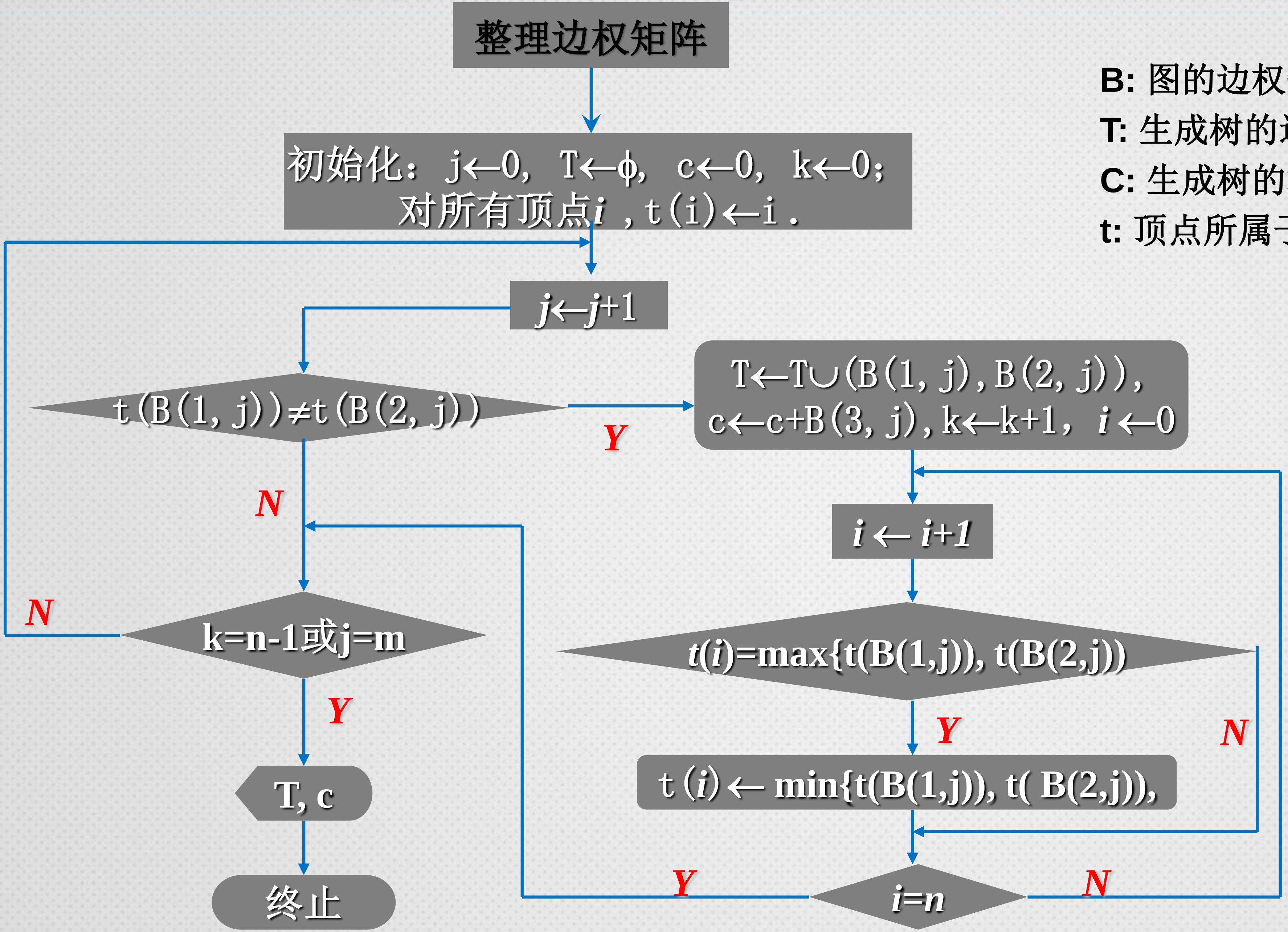
Kruskal算法的程序实现

计算机如何判断一条边加入后会形成圈呢？





Kruskal算法的程序实现



B: 图的边权矩阵;

T: 生成树的边集;

C: 生成树的权;

t: 顶点所属子树的编号

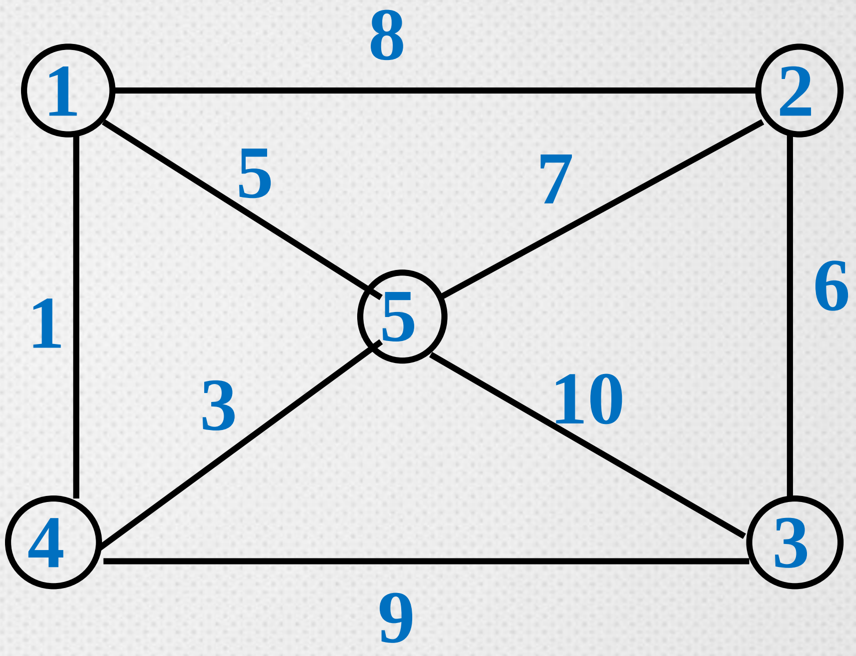
例：用Kruskal算法求引例中的加权图的最小生成树。

图的边权矩阵：

b=[1 1 1 2 2 3 3 4;

2 4 5 3 5 4 5 5;

8 1 5 6 7 9 10 3];



Kruskal算法的MATLAB程序

Mathematical Experiments

```
function [T,c]=mintree(b)
[B,i]=sortrows(b',3);B=B'; m=size(b,2);n=5;
t=1:n; k=0; T=[ ]; c=0;
for i=1:m
  if t(B(1,i))~=t(B(2,i))
    k=k+1;  T(k,1:2)=B(1:2,i),  c=c+B(3,i)
    tmin=min(t(B(1,i)),t(B(2,i)));
    tmax=max(t(B(1,i)),t(B(2,i)));
        for j=1:n
            if t(j)==tmax
              t(j)=tmin;
            end
        end
  end
```

```
    if k==n-1
      break ;
    end
  end
```

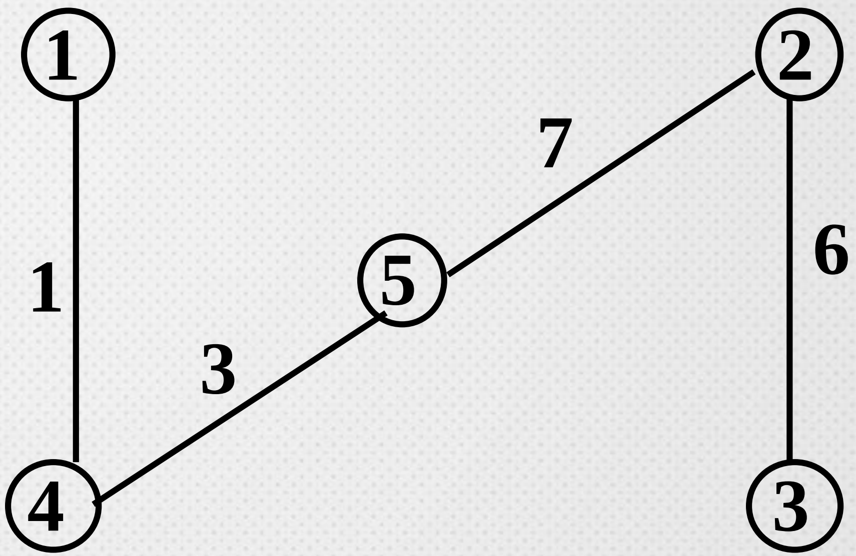
Kruskal算法的MATLAB程序

MATLAB主程序：

```
b=[1 1 1 2 2 3 3 4;2 4 5 3 5 4 5 5;8 1 5 6 7 9 10 3];
[T,c]=mintree(b)
```

程序运行结果：

```
T =
     1     4
     4     5
     2     3
     2     5
c =
    17
```



提示

1) Kruskal算法是**贪心法**，时间复杂度为$O(m \log_2 m)$；

2) **贪心法的基本思想**：把解看成是由若干个部件构成，每一步求出解的一个部件（不是从整体角度考虑，只是局部的最好选择）。求出的一个个部件组合而作为最终的解。

3) 贪婪法可被用于各种各样问题的处理。该法不一定能得到正确解、精确解，但可提供正确解的一个近似。

4) 已证明：求最小生成树的Kruskal算法是正确的，精确的。

5) 可以将其改进来近似求取图的最小Steiner树。

Thanks

重庆大学数学与统计学院