微分方程

— 数值求解算法

重庆大学数学与统计学院

①简单的微分方程。

②复杂、大型的微分方程。

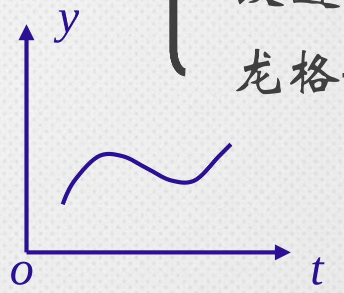
① 解析解 $y = f(t)$

↓

② 数值解 (t_i, y_i)

↓

③ 图形解



- 欧拉方法
- 梯形法
- 改进欧拉方法
- 龙格-库塔法

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0$$

数值求解思想：(变量离散化)

引入自变量点列 $\{x_n\} \to \{y_n\}$，

在 $x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n<\ldots$ 上求 $y(x_n)$ 的近似值， x_n 通常取等步长 h，即 $x_n = x_0 + n \times h$，或 $x_n = x_{n-1} + h$，（n=1,2,…)。

在小区间$[x_n,\ x_{n+1}]$上用差商代替微商(近似),

$$\frac{y(x_{n+1})-y(x_n)}{h} \Rightarrow y'$$

1） 向前欧拉公式： （$y' = f(x, y)$ ）

$y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + h\,f(x_n, y(x_n))$ (迭代式)

$y_{n+1} \approx y_n + h\,f(x_n, y_n)$ (近似式)

特点：$f(x,y)$取值于区间$[x_n, x_{n+1}]$的左端点.

2) 向后欧拉公式

$y_{n+1} = y_n + h\, f(x_n, y_n)$

$$y_{n+1} \approx y_n + h\, f(x_{n+1}, y_{n+1})$$

特点：① $f(x,y)$取值于区间$[x_n, x_{n+1}]$的右端点.

② 非线性方程，称‘隐式公式’。

例 1 $y' = -y + x + 1, y(0) = 1, h = 0.1$

其中$f(x, y) = -y + x + 1$

观察向前欧拉、向后欧拉算法计算情况。与精确解进行比较。误差有多大？

解：1） 解析解： $y = x + e^{-x}$

$$y' = f(x,y) = -y + x + 1;$$

2） 向前欧拉法：

$$y_{n+1} = y_n + h(-y_n + x_n + 1)$$

$$= (1-h)\, y_n + h\, x_n + h$$

3） 向后欧拉法：

$$y_{n+1} = y_n + h(-\, y_{n+1} + x_{n+1} + 1)$$

转化 $y_{n+1} = (y_n + h\, x_{n+1} + h)/(1+h)$

欧拉方法


```
x1(1)=0;y1(1)=1;y2(1)=1;h=0.1;
for k=1:10
    x1(k+1)=x1(k)+h;
    y1(k+1)=(1-h)*y1(k)+h*x1(k)+h;
    y2(k+1)=(y2(k)+h*x1(k+1)+h)/(1+h);
end
x1,y1,y2,% (y1——向前欧拉解，y2——向后欧拉解)
x=0:0.1:1;
y=x+exp(-x)% (解析解)
plot(x,y,x1,y1,'k:',x1,y2,'r--')
```

（1）步长h=0.1的数值解比较表

计算结果

x	精确解	向前欧拉	向后欧拉
0	1	1	1
0.1	1.0048	1	1.0091
0.2	1.0187	1.01	1.0264
0.3	1.0408	1.029	1.0513
0.4	1.0703	1.0561	1.0830
0.5	1.1065	1.0905	1.1209
0.6	1.1488	1.1314	1.1645
0.7	1.1966	1.1783	1.2132
0.8	1.2493	1.2305	1.2665
0.9	1.3066	1.2874	1.3241
1	1.3679	1.3487	1.3855

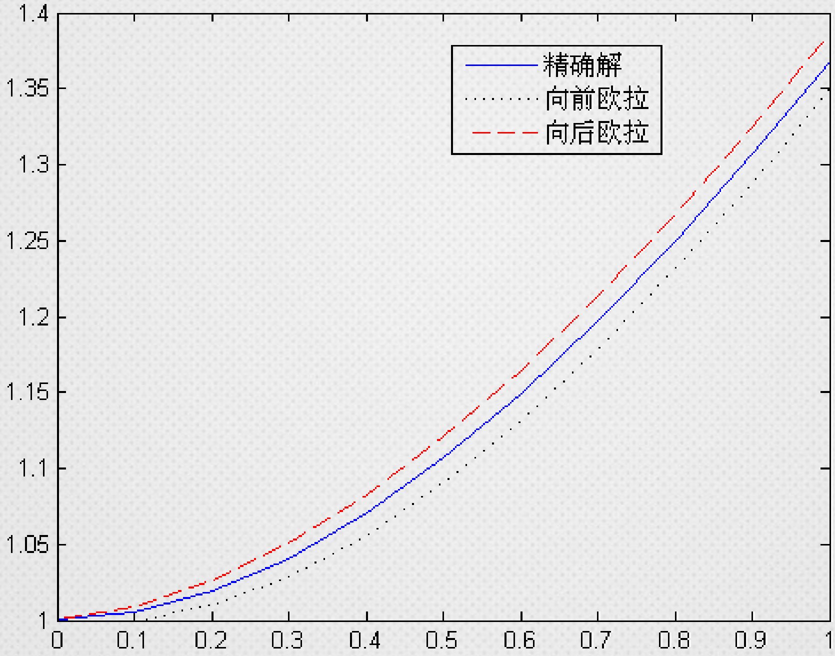
计算结果

（2）步长h=0.01的数值解比较表

x	精确解	向前欧拉	向后欧拉
0	1	1	1
0.1	1.0048	1.0044	1.0053
0.2	1.0187	1.0179	1.0195
0.3	1.0408	1.0397	1.0419
0.4	1.0703	1.0690	1.0717
0.5	1.1065	1.1050	1.1080
0.6	1.1488	1.1472	1.1504
0.7	1.1966	1.1948	1.1983
0.8	1.2493	1.2475	1.2511
0.9	1.3066	1.3047	1.3084
1	1.3679	1.3660	1.3697

结论： 显然迭代步长h 的选取对精度有影响。

思考？有什么方法可以使精度提高？



梯形公式

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \underline{y_{n+1}})]$$

$$n = 0,1,2,\ldots$$

•$y_n + hf(x_n,y_n)$

改进欧拉公式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_{n+1}, y_n + hk_1) \end{cases}$$

改进欧拉公式

步长 h= 0.1 的数值解比较表

x	精确解	向前欧拉	向后欧拉	改进欧拉
0	1	1	1	1
0.1	1.0048	1	1.0091	1.005
0.2	1.0187	1.01	1.0264	1.019
0.3	1.0408	1.029	1.0513	1.0412
0.4	1.0703	1.0561	1.0830	1.0708
0.5	1.1065	1.0905	1.1209	1.1071
0.6	1.1488	1.1314	1.1645	1.1494
0.7	1.1966	1.1783	1.2132	1.1972
0.8	1.2493	1.2305	1.2665	1.2500
0.9	1.3066	1.2874	1.3241	1.3072
1	1.3679	1.3487	1.3855	1.3685

Thanks

重庆大学数学与统计学院