Mathematical Experiments

微分方程

—— MATLAB求解

重庆大学数学与统计学院

解析解

y=dsolve(eqn, cond1, name, value)

- eqn：微分方程（组）
- cond1：初始或边界条件
- name, value：Options的设置

注意：① eqn是用“diff”和“==”描述的符号微分方程，

如：diff(y,x) == y 表示 dy/dx=y

② eqn可以是微分方程构成的向量，表示微分方程组。

例① $\frac{dy}{dx}=1+y^2,\quad y(0)=1$

输入：syms x y(x); s=dsolve (diff(y, x) ==1+y^2)

s1=dsolve(diff(y,x)==1+y^2, y(0)==1)

输出：

s =

tan(C1 + x) （通解）

1i

-1i

s1 =

tan(x + pi/4) （特解）

例② 常系数的二阶微分方程

$$y''-2y'-3y=0, \qquad y(0)=1, y'(0)=0$$

输入:

```
syms x y(x); Dy=diff(y,x); s=dsolve(diff(y,x,2)-2*Dy-3*y==0)
s1=dsolve(diff(y,x,2)-2*Dy-3*y==0, [y(0)==1, Dy(0)==0])
```

结果:

```
s = C1*exp(-x)+C2*exp(3*x)
s1 =(exp(-x)*(exp(4*x) + 3))/4
```

例③ 非常系数的二阶微分方程

$$x''(t)-(1-x^2(t))x'(t)+x(t)=0,\qquad x(0)=3, x'(0)=0$$

输入 syms t x(t); Dx=diff(x,t);

s=dsolve(diff(x,t,2)-(1-x^2)*Dx+x==0, [x(0)==3, Dx(0)==0])

输出 s=[empty sym]

Unable to find explicit solution,

不能求出显式解

例④ 非线性微分方程

$$x'(t)^2 + x(t)^2 = 1, x(0) = 0$$

输入： syms t x(t); s=dsolve(diff(x,t)^2+x^2==1,x(0)==0)

s1=simplify(s)

输出： s = -(exp(- t*1i - (pi*1i)/2)*(exp(t*2i) - 1))/2

-(exp(t*1i - (pi*1i)/2)*(exp(-t*2i) - 1))/2

s1 = -sin(t)

(exp(t*1i)*(exp(-t*2i) - 1)*1i)/2

例⑤

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x + 3y \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

输入：syms t x(t) y(t)

```
[x1,y1]=dsolve([diff(x,t)==3*x+4*y, diff(y,t)==-4*x+3*y],[x(0)==0,y(0)==1])
```

输出：

```
x1 = exp(3*t)*sin(4*t)
y1 = exp(3*t)*cos(4*t)
```

数值解

$$[t,y] = \text{ode23}('\ \text{Fun}', [t0，\ tf], y_0)$$

其中（1）Fun表示由微分方程(组)写成的m文件名；

（2）y0表示为函数的初值；

数值解

- [t， x]=solver（’f’, ts, x_0）

- 自变量值
- 函数值
- ode23 ode45
- 由待解方程写成的m-函数文
- ts=[t_0， t_f]，t_0、t_f为自变量的初值和终值
- 函数的初值

- ode23：2阶3级龙格-库塔算法
- ode45：4阶5级龙格-库塔算法

范例

例1 $y' = -y + x + 1$，$y(0) = 1$

标准形式： $y' = f(x, y)$

1）首先建立M-文件 （weif.m）

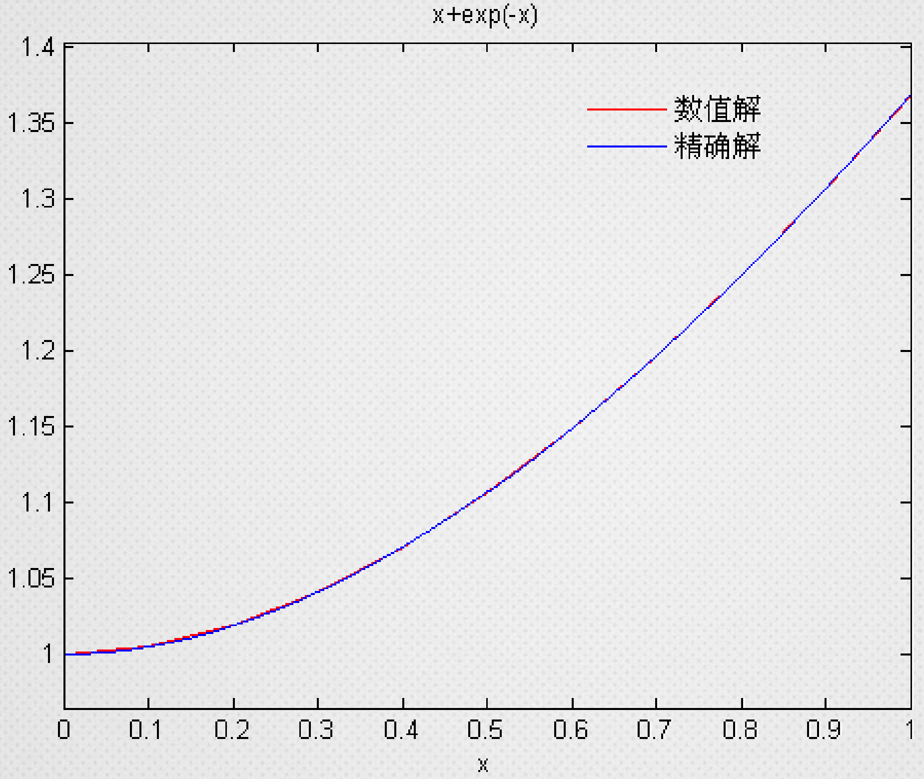
```
function f = weif(x,y)
f=-y+x+1;
```

2）求解：[x， y]=ode23(‘weif’, [0, 1], 1)

3) 作图形: plot(x, y, ‘r’);

4) 与精确解进行比较

```
hold  on
ezplot(‘x+exp(-x)’,[0, 1])
```


x+exp(-x)
1.4
1.35
1.3
1.25
1.2
1.15
1.1
1.05
1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
x
数值解
精确解

注意:

使用Matlab软件求数值解时，高阶微分方程必须等价地变换成一阶微分方程组.

$$y^{(n)} = f(t, y, \dot{y}, \cdots, y^{(n-1)})$$

$$y(0), \dot{y}(0), \cdots, y^{(n-1)}(0)$$

选择一组状态变量

$$x_1 = y, x_2 = \dot{y}, \cdots, x_n = y^{(n-1)}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ &\cdots \\ \dot{x}_n &= f(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{aligned}$$

注意：

$$\dot{x}_1 = x_2,$$
$$\dot{x}_2 = x_3,$$
$$\cdots$$
$$\dot{x}_n = f(t, x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

1、建立M文件函数

function xdot = fun(t,x)

xdot = [x_2(t)； x_3(t)； …； f(t, x_1(t), x_2(t),…x_n(t))]；

2、数值计算（执行以下命令）

[t, x]=ode23(‘fun’, [t_0, t_f], [x_1(0), x_2(0), …, x_n(0)])

范例

例2　Van der pol 方程:

$$x''(t)-(1-x(t)^2)x'(t)+x(t)=0$$

$$x(0)=3, x'(0)=0$$

该方程无解析解!

令 $y_1=x(t)$, $y_2=x'(t)$;

$$\begin{cases} y_1'=y_2; \\ y_2'=(1-y_1^2)y_2-y_1; \end{cases}$$

$$y_1(0)=3, \qquad y_2(0)=0;$$

范例

（1）编写M文件 (文件名为 vdpol.m):

```
function yp = vdpol(t,y);
yp(1,1)= y(2);
yp(2,1)= (1-y(1)^2)*y(2)-y(1);
```

（2）编写程序如下:（vdj.m）

```
[t,y]=ode23('vdpol',[0,20],[3,0]);
y1=y(:,1);   % 原方程的解
y2=y(:,2);
plot(t,y1,'b',t,y2,'r--')    % y1(t),y2(t) 曲线图
```

范例

计算结果

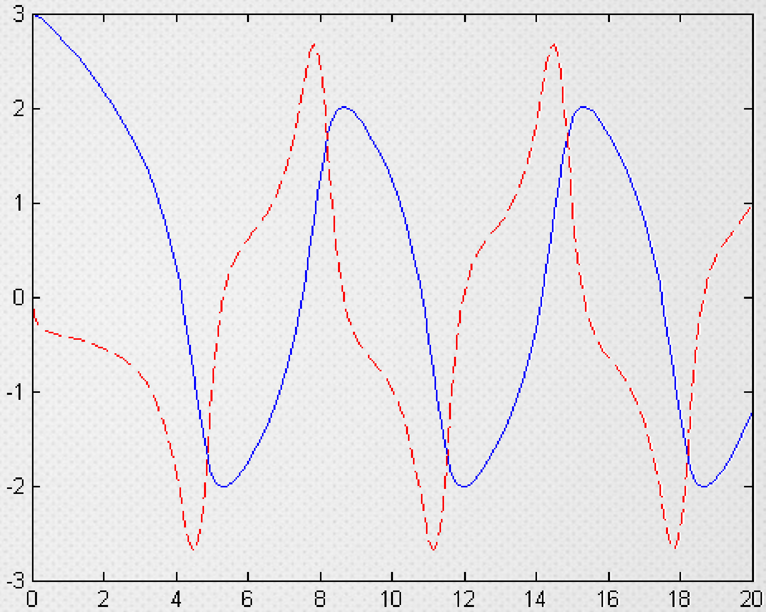
蓝色曲线

——y（1）；

（原方程解）

红色曲线

——y（2）；



时滞微分方程的数值解

例　求解 时滞微分方程：

$$\dot{x}_1(t) = x_1(t)\left[1 + 0.1\sin t - 0.1x_1(t-0.1) - \frac{x_2(t)}{1+x_1(t)}\right],$$

$$\dot{x}_2(t) = x_2(t)\left[-\frac{1}{10^5}(2+\sin t) + \frac{9x_1(t-0.3)}{1+x_1(t-0.3)} - x_2(t-0.1)\right]$$

当$t \le 0$时，$x_1(t) = 2, x_2(t) = 2$

```
ddex1dez = @(t,y,Z) [y(1)*(1 + 0.1*sin(t)-0.1*Z(1,1) - y(2)/(1+y(1)) );
    y(2)*( (2+sin(t))*10^(-5) + 9*Z(1,2)/(1+Z(1,2)) - Z(2,1) )];
 %y(1)表示x1(t)，因为dde求解的结果中sol会有个x，为了区别用y(1)表示x1(t)；
%Z(1,1)表示时滞项x1(t-0.1)；Z(1,2)表示时滞项x1(t-0.3)

 sol = dde23(ddex1dez,[0.1, 0.3],[2 2],[0,50]);
%dde23(@....,tau,history,tspan);

 %[0.1, 0.3]是时滞，[2 2]是初值，[0, 50]是时间范围
```

时滞微分方程的数值解

练习：

$$
\begin{aligned}
y_1'(x) &= -y_1(x)y_2(x-1)+y_2(x-10)\\
y_2'(x) &= y_1(x)y_2(x-1)-y_2(x)\\
y_3'(x) &= y_2(x)-y_2(x-10)
\end{aligned}
$$

在区间[0, 40]求解上述时滞微分方程组，要求满足条件

y1(x) = 5; y2(x) = 0.1; y3(x) = 1，当x≤0时

画出解曲线，并标出局部最大值点。

时滞微分方程的数值解

练习：

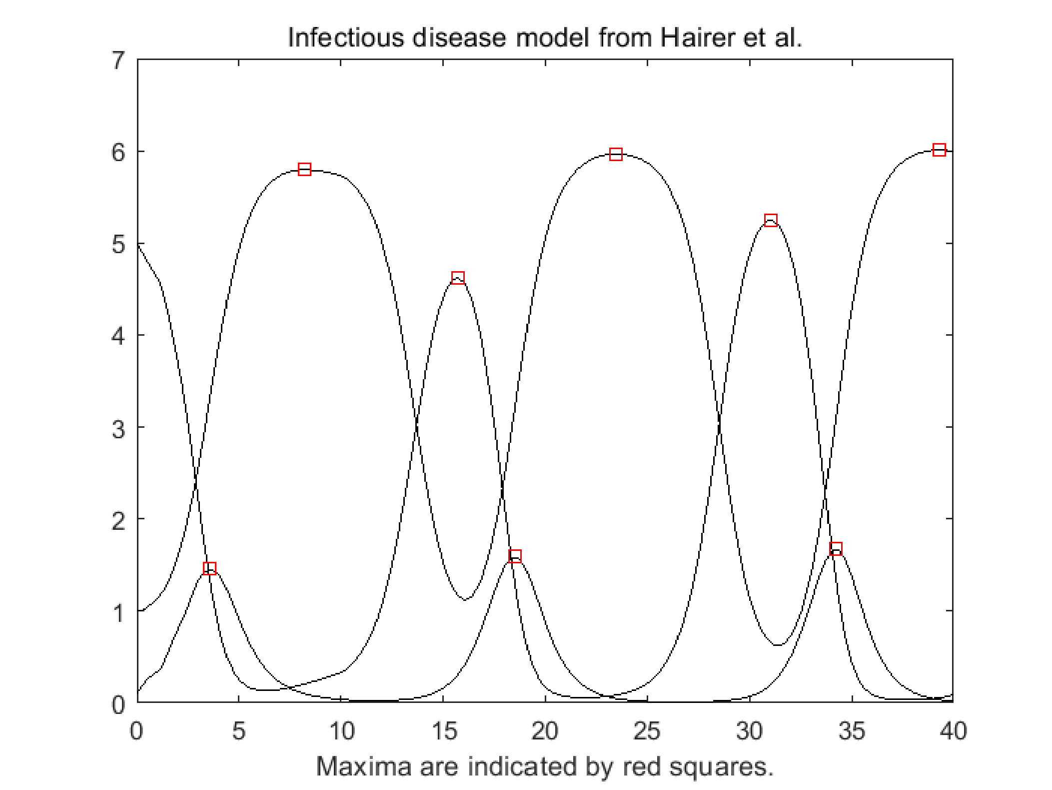
$$
\begin{aligned}
y_1'(x) &= -y_1(x)y_2(x-1) + y_2(x-10) \\
y_2'(x) &= y_1(x)y_2(x-1) - y_2(x) \\
y_3'(x) &= y_2(x) - y_2(x-10)
\end{aligned}
$$

```
function [value,isterminal,direction] = exam4e(x,y,Z)
value = exam4f(x,y,Z);
isterminal = zeros(3,1);
direction = -ones(3,1);

function v = exam4f(x,y,Z)
ylag1 = Z(:,1);
ylag2 = Z(:,2);
v = zeros(3,1);
v(1) = -y(1)*ylag1(2) + ylag2(2);
v(2) = y(1)*ylag1(2) - y(2);
v(3) = y(2) - ylag2(2);
```

```
options = ddeset('Events',@exam4e);
sol = dde23(@exam4f,[1, 10],[5; 0.1; 1],[0, 40],options);
xe = sol.xe; ye = sol.ye; ie = sol.ie;
n1 = find(ie == 1);
x1 = xe(n1); y1 = ye(1,n1);
n2 = find(ie == 2);
x2 = xe(n2);  y2 = ye(2,n2);
n3 = find(ie == 3);
x3 = xe(n3);  y3 = ye(3,n3);
plot(sol.x,sol.y,'k',x1,y1,'rs',x2,y2,'rs',x3,y3,'rs')
title(‘Infectious disease model from Hairer et al.')
xlabel('Maxima are indicated by red squares.')
```

时滞微分方程的数值解


Infectious disease model from Hairer et al.
0
1
2
3
4
5
6
7
0
5
10
15
20
25
30
35
40
Maxima are indicated by red squares.

Thanks