

Mathematical Experiments

# 数学建模初步

——Logistic模型



重庆大学数学与统计学院

A

中国人口  
增长情况

B

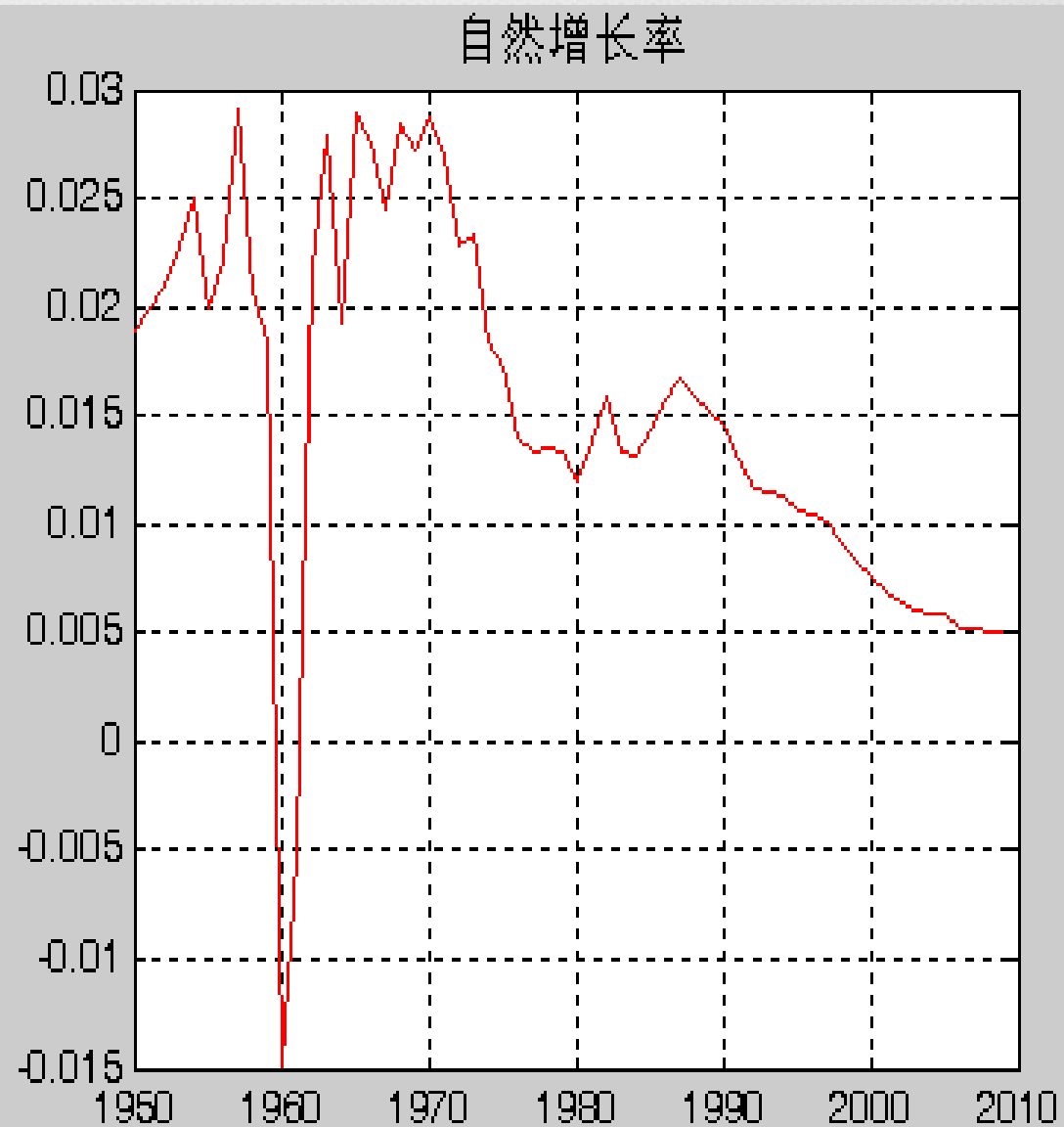
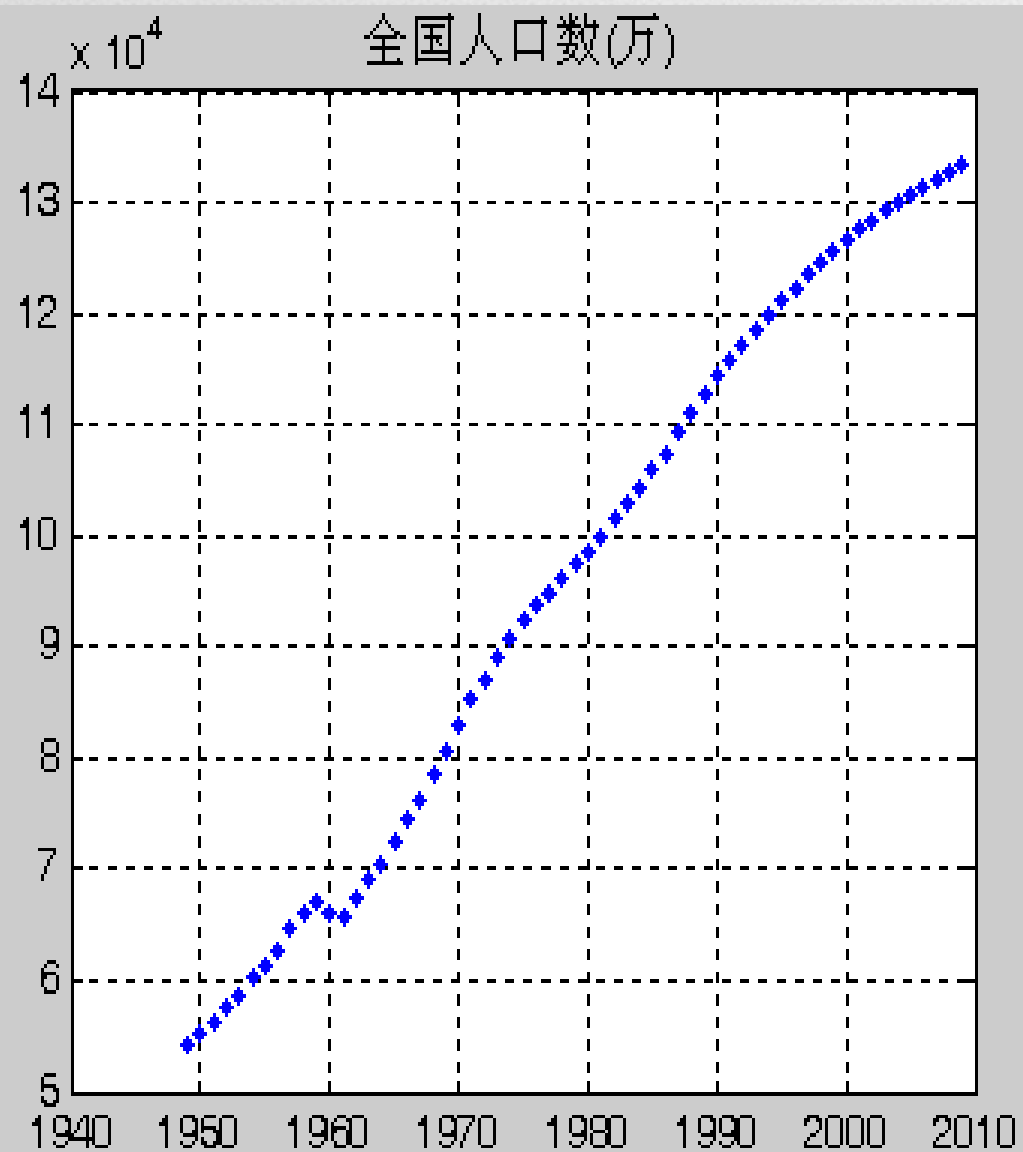
阻滞增长模型

C

美国人口的预测

D

人口模型的概述







人口增长到一定数量后，增长率下降的原因：

资源、环境等因素对人口增长的阻滞作用，

且阻滞作用随人口数量增加而变大  $\Rightarrow r$  是  $x$  的减函数

假设  $r(x) = r - sx$  ( $r, s > 0$ )  $r \sim$  固有增长率( $x$ 很小时)

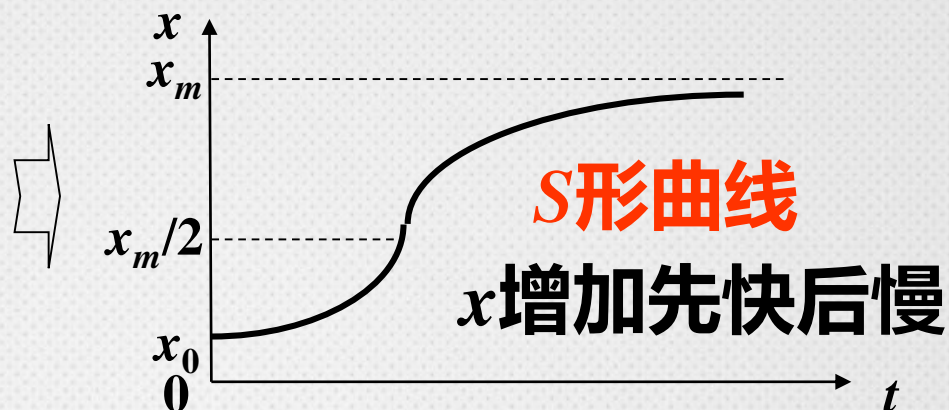
$x_m \sim$  人口容量 ( 资源、环境能容纳的最大数量 )

$$\Rightarrow r(x_m) = 0 \Rightarrow s = \frac{r}{x_m} \quad r(x) = r \left( 1 - \frac{x}{x_m} \right)$$



指数增长模型  $\frac{dx}{dt} = rx \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = r(x)x = rx(1 - \frac{x}{x_m})$

$$x(t) = \frac{x_m}{1 + (\frac{x_m}{x_0} - 1)e^{-rt}}$$



## Logistic 模型的应用

- 种群数量模型 (鱼塘中的鱼群, 森林中的树木).
- 经济领域中的增长规律(耐用消费品的售量).





$$x(t) = \frac{x_m}{1 + \left(\frac{x_m}{x_0} - 1\right)e^{-rt}}$$

---

**例：已知美国人口数据1790-2000（单位：百万），预测美国2010年的人口数.**

1790	1800	1810	.....	1960	1970	1980	1990	2000
3.9	5.3	7.2	.....	179.3	204.0	226.5	251.4	281.4

**方法：用非线性拟合估计模型参数 $r$ 和  $x_m$**



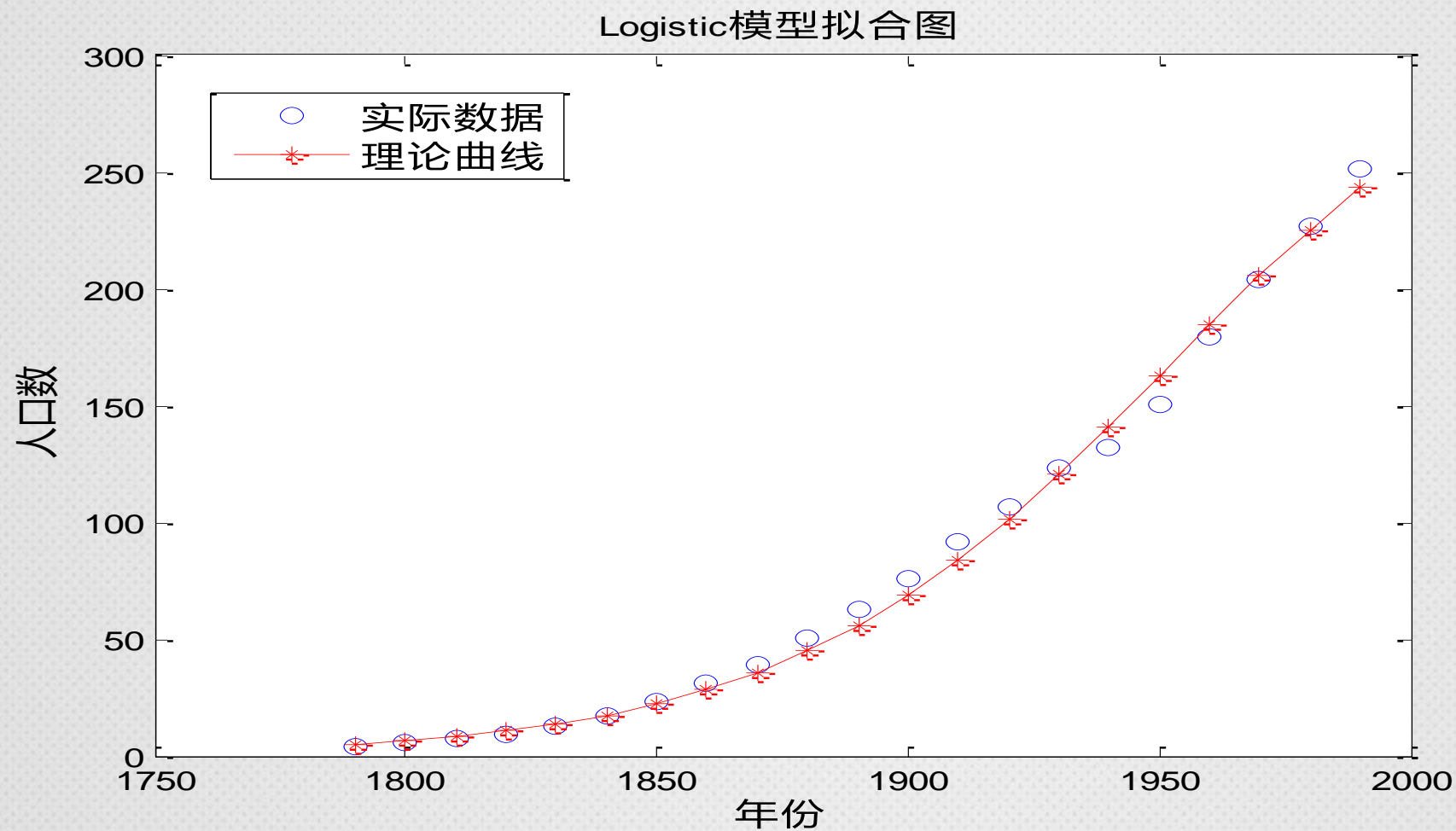
```
clear;%主程序
t=[1790 1800 1810 1820 1830 1840 1850 1860 1870 1880 1890
1900 1910 1920 1930 1940 1950 1960 1970 1980 1990 ];
p=[3.9 5.3 7.2 9.6 12.9 17.1 23.2 31.4 38.6 50.2 62.9 76.0 92.0 106.5
123.2 131.7 150.7 179.3 204.0 226.5 251.4 ];
t=t-1780;%年份整体减去1780
x0=[150 0.15];
x=lsqcurvefit('population',x0,t,p)
p1=population(x,t);
plot(t+1780,p,'o',t+1780,p1,'-r*')
title('Logistic模型拟合图')
xlabel('年')
ylabel('人口数')
p2000=population(x,2000-1780),
legend('实际数据','理论曲线')
```

```
function g=population(x,t) % logistic
函数M文件
g=x(1)./(1+(x(1)/3.9-1)*exp(-x(2)*t));
% x(1)为最大人口数量xm, x(2)为增长率r
```





$$r = 0.0257, \quad x_m = 337.4308$$





## 模型检验

- 为做模型检验在参数估计时未用2000年实际数据

$$p_{2000} = \text{population}(x, 2000 - 1780)$$

$$\Rightarrow p(2000) = 260.1625$$

实际为281.4 (百万)      误差不到8%

## ——预测美国2010年的人口

加入2000年人口数据后重新估计模型参数

$$\Rightarrow r=0.0253, x_m=367.6306 \quad \Rightarrow x(2010)=287.6149$$

参考阅读：美国2010年人口普查结果是308.7(百万)

误差不到7%





**影响增长率的出生率和死亡率与年龄有关，所以，  
更合乎实际的人口模型应该考虑年龄因素。**

- 宏观模型: 总人口, 不考虑年龄, Malthus模型, Logistic模型
- 微观模型: 考虑年龄结构
  - 1940's, Leslie差分方程模型
  - 1960's, Verhulst偏微分方程模型
  - 1970's, Pollard随机方程模型



# Thanks



重庆大学数学与统计学院