Mathematical Experiments

数学规划

——非线性规划

重庆大学数学与统计学院

1 非线性规划问题及模型

例子1：拟合问题
例子2：电路板设计问题

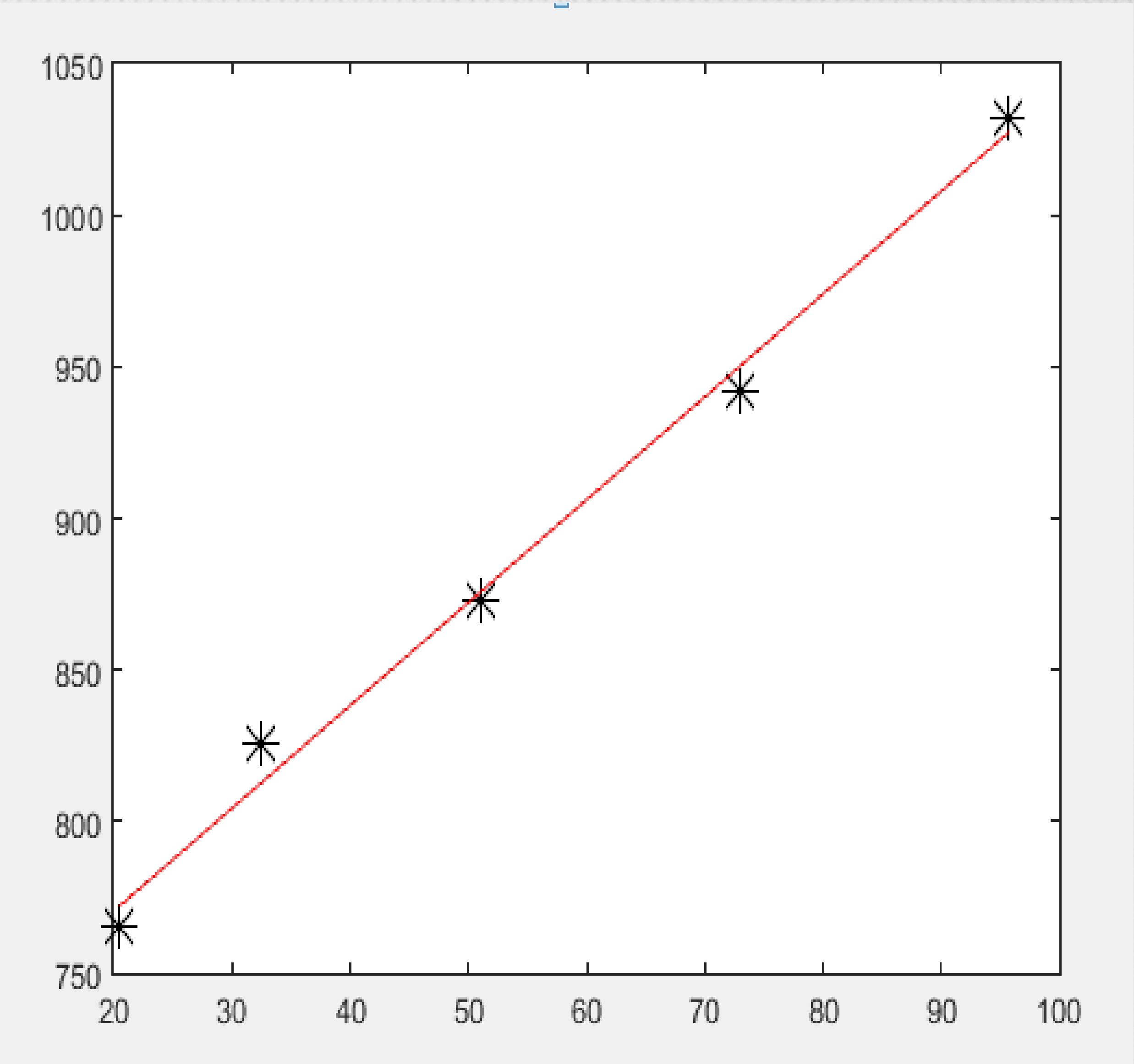
2 非线性规划问题结构和求解命令

3 非线性规划问题的求解

非线性规划--问题及模型

Example1：拟合问题

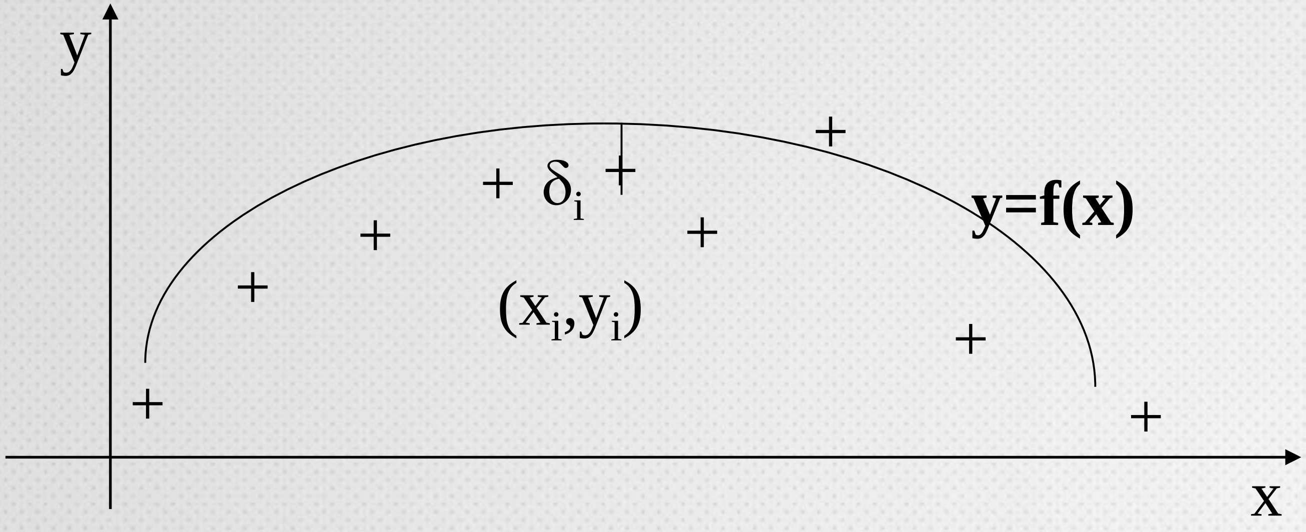
温度t(^{0}C)	20.5	32.7	51.0	73.0	95.7
电阻R(Ω)	765	826	873	942	1032



问题：找R和t之间的函数关系

R=at+b？

Example1：拟合问题



δ_i 为点（x_i, y_i）与曲线 y=f(x) 的距离

平面上 n个点（x_i, y_i），i=1, ⋯, n，寻求一个函数y=f(x)，使 f(x) 在某种准则下与所有数据点最为接近。

Example1：拟合问题

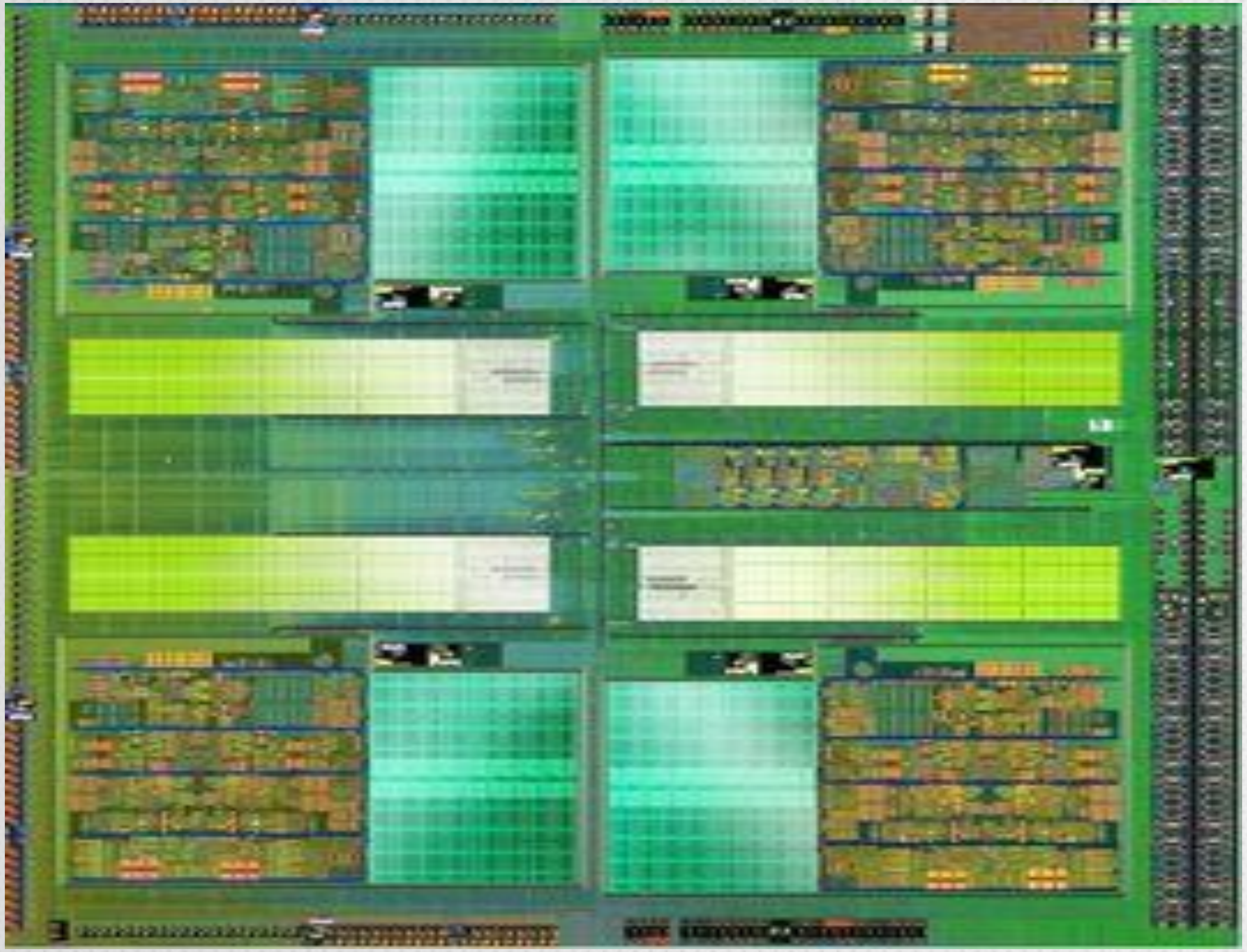
因此，得到如下的极小化问题

$$\min \sum_{i=1}^{5} \delta_i^2 = \sum_{i=1}^{5} [(at_i + b) - R_i]^2$$

将问题改写成

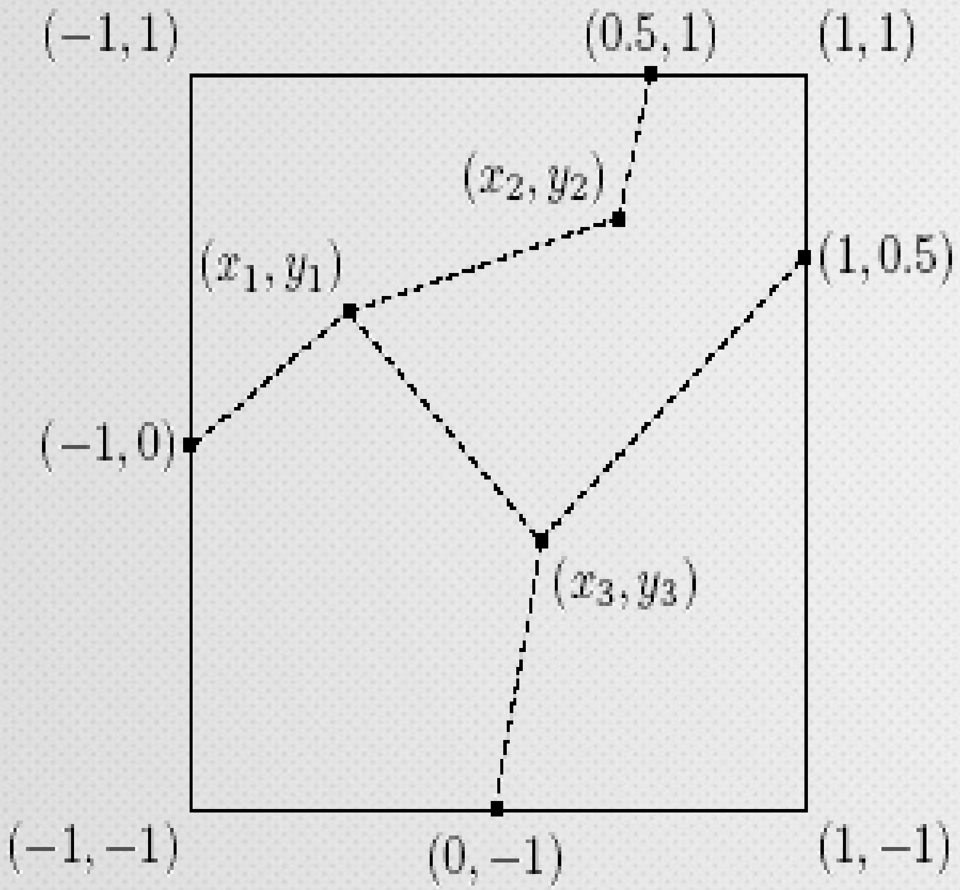
$$\min \sum_{i=1}^{5} [(x_1 t_i + x_2) - R_i]^2$$

Example2：电路板设计问题



在电路工程师进行性能设计之后，需要制板，也就是将电路元件选择适当位置并通过导线进行连接。

Example2：电路板设计问题



确定三个模块的位置，满足下列要求的情况下使得总连线最短。

（1）满足如图的连接关系；

（2）所有元件完全位于电路板之内；

（3）三个元件为圆柱形，半径分别为0.2，0.1和0.1；

（4）元件1和元件3要求距离等于0.5。

Example2：电路板设计问题

决策变量：令 $(x_i, y_i)(i=1,2,3)$ 为三个元件的中心的横纵坐标。

目标函数：总距离（六条连线长度之和）最小

$$\min \sqrt{(x_1+1)^2+(y_1-0)^2}+\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}+\sqrt{(x_2-0.5)^2+(y_2-1)^2}$$
$$+\sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2}+\sqrt{(x_3-0)^2+(y_3+1)^2}+\sqrt{(x_3-1)^2+(y_3-0.5)^2}$$

Example2：电路板设计问题

约束条件：

三个元件完全位于电路板上

$$-0.8 \le x_1 \le 0.8, -0.8 \le y_1 \le 0.8$$

$$-0.9 \le x_2 \le 0.9, -0.9 \le y_2 \le 0.9$$

$$-0.9 \le x_3 \le 0.9, -0.9 \le y_3 \le 0.9$$

元件之间的四个距离要求

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} \ge 0.3 \qquad \sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2} \ge 0.3$$

$$\sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2} = 0.5 \qquad \sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2} \ge 0.2$$

Example2：电路板设计问题

$$\min \quad \sqrt{(x_1+1)^2+(y_1-0)^2}+\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}+\sqrt{(x_2-0.5)^2+(y_2-1)^2}$$
$$+\sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2}+\sqrt{(x_3-0)^2+(y_3+1)^2}+\sqrt{(x_3-1)^2+(y_3-0.5)^2}$$

$$s.t. \quad \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\geq 0.3$$
$$\sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2}\geq 0.3$$
$$\sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2}\geq 0.2$$
$$\sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2}=0.5$$
$$-0.8\leq x_1\leq 0.8, -0.8\leq y_1\leq 0.8$$
$$-0.9\leq x_2\leq 0.9, -0.9\leq y_2\leq 0.9$$
$$-0.9\leq x_3\leq 0.9, -0.9\leq y_3\leq 0.9$$

非线性规划问题，可以根据是否有约束条件，可以分成无约束问题和约束优化问题；

比如前面给出的例子1就是无约束非线性规划问题，而例子2是一个约束非线性规划问题。

无约束优化问题标准形式：

Min f(x)

① 首先建立一个函数M文件，如fun.m

② 调用格式：

[x, fval] = fminunc(‘fun’, x0, options)

约束优化问题标准格式：

Min $f(x)$

s.t. $G_1(x) \le 0$, $G_2(x)=0$, （非线性约束）

$Ax \le b$, $Aeq.x=beq$, （线性约束）

$Lb \le x \le Ub$

调用格式:

[x,fval]=fmincon(@fun,x0,A,b,Aeq,beq,Lb,Ub,@con)

Example 1：无约束规划模型：

$$\min = \sum_{i=1}^{5}[(x_1 t_i + x_2) - R_i]^2$$

```
function y=fnonl(x)
t=[20.5 32.5 51 73 95.7];
R=[765 826 873 942 1032];
y=norm(x(1)*t+x(2)-R,2);
y=y^2;
```

```
x=ones(2,1);
[x,fval]=fminunc(
@fnonl,x)
```

结果：x =[3.3940;702.4918]
fval = 321.2166

Example 2：非线性规划模型

$$
\begin{aligned}
\min\quad & \sqrt{(x_1+1)^2+(y_1-0)^2}+\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}+\sqrt{(x_2-0.5)^2+(y_2-1)^2} \\
& +\sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2}+\sqrt{(x_3-0)^2+(y_3+1)^2}+\sqrt{(x_3-1)^2+(y_3-0.5)^2} \\
s.t.\quad & \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\ge 0.3 \\
& \sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2}\ge 0.3 \\
& \sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2}\ge 0.2 \\
& \sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2}=0.5 \\
& -0.8\le x_1\le 0.8, -0.8\le y_1\le 0.8 \\
& -0.9\le x_2\le 0.9, -0.9\le y_2\le 0.9 \\
& -0.9\le x_3\le 0.9, -0.9\le y_3\le 0.9
\end{aligned}
$$

x1——x(1)
x2——x(2)
x3——x(3)
y1——x(4)
y2——x(5)
y3——x(6)

在fmincon命令中，不等式约束应该转化成”≤”的形式；另外应该将所有的决策变量表达成一个向量形式。

目标函数M文件

```
function y=fcon(x)
y=((x(1)+1)^2+x(4)^2)^0.5+((x(1)-x(2))^2+(x(4)-x(5))^2)^0.5+((x(2)-
0.5)^2+(x(5)-1)^2)^0.5+((x(1)-x(3))^2+(x(4)-
x(6))^2)^0.5+(x(3)^2+(x(6)+1)^2)^0.5+((x(3)-1)^2+(x(6)-0.5)^2)^0.5;
```

约束条件的函数M文件

```
function [c,ceq]=ccon(x)
c=[0.09-(x(1)-x(2))^2-(x(4)-x(5))^2;0.09-(x(1)-
x(3))^2-(x(4)-x(6))^2;0.04-(x(2)-x(3))^2-(x(5)-
x(6))^2];
ceq=[(x(1)-x(3))^2+(x(4)-x(6))^2-0.25];
```

提示：

初始值选择可能影响最终结果。

```
x0=[0.5;0.2;0.1;-0.5;0.2;0.8];
Ub= [0.8;0.9;0.9;0.8;0.9;0.9];
Lb=-Ub;
options=optimset('display', 'iter')
[x,fval]=fmincon(@fcon,x0,[],[],[],[],Lb,
Ub,@ccon,options)
```

计算结果为：

x =[0.2930; 0.4445; 0.6574; 0.6410;0.9000;0.2987]
fval =4.2105

Thanks

重庆大学数学与统计学院