Mathematical Experiments

数学规划

—— 线性规划

重庆大学数学与统计学院

1 线性规划问题及模型建立

例子1：动物饲养问题
例子2：蔬菜运输问题

2 线性规划问题结构和Linprog命令

3 线性规划问题的求解

Example1：动物饲养问题

一家现代化兔子饲养场饲养一种兔子。根据兔子在不同时期的体重计算出兔子每周营养物质的数量。简单起见，这里考虑三种对生长其重要作用的营养成分，蛋白质、矿物质和维生素。

需要的营养量

- 蛋白质：70克
- 矿物质：3克
- 维生素：10毫克

Example1：动物饲养问题

现有五种饲料，公司希望找出满足动物营养需要使成本达到最低的混合饲料配置。

Example1：动物饲养问题

每一种饲料每斤所含的营养成分

	饲料1	饲料2	饲料3	饲料4	饲料5	需要量
蛋白质(克)	0.30	2.00	1.00	0.60	1.80	70
矿物质(克)	0.10	0.05	0.02	0.20	0.05	3
维生素(毫克)	0.05	0.10	0.02	0.20	0.08	10
成本(元)	0.02	0.07	0.04	0.03	0.05	

Example1：动物饲养问题

① **决策变量：** 在混合饲料中，每周所需第j种饲料的斤数x_j，j = 1，2，3，4，5；

② **约束条件：**

- 蛋白质：$0.30x_1+2x_2+x_3+0.6x_4+1.8x_5 \geq 70$
- 矿物质：$0.10x_1+0.05x_2+0.02x_3+0.2x_4+0.05x_5 \geq 3$
- 维生素：$0.05x_1+0.1x_2+0.02x_3+0.2x_4+0.08x_5 \geq 10$
- 非负约束：$x_i \geq 0$

③ **确定目标：** 混合饲料的成本最低

$$0.02x_1+0.07x_2+0.04x_3+0.03x_4+0.05x_5 \rightarrow \min$$

Example1：动物饲养问题

线性规划模型：

$$\min\ 0.02x_1+0.07x_2+0.04x_3+0.03x_4+0.05x_5$$

$$\begin{aligned}\text{s.t.}\quad & 0.30x_1+2x_2+x_3+0.6x_4+1.8x_5\geq 70\\ & 0.10x_1+0.05x_2+0.02x_3+0.2x_4+0.05x_5\geq 3\\ & 0.05x_1+0.1x_2+0.02x_3+0.2x_4+0.08x_5\geq 10\\ & x_j\geq 0\quad j=1,2,3,4,5;\end{aligned}$$

$$c^T=[0.02,\ \ 0.07,\ \ 0.04,\ \ 0.03,\ \ 0.05]$$

$$A=\begin{bmatrix}0.3 & 2 & 1 & 0.6 & 1.8\\ 0.1 & 0.05 & 0.02 & 0.2 & 0.05\\ 0.05 & 0.1 & 0.02 & 0.2 & 0.08\end{bmatrix},b=\begin{bmatrix}70\\ 3\\ 10\end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\min\ & \mathbf{c}^T\boldsymbol{x}\\ \text{s.t.}\ & \mathbf{A}\boldsymbol{x}\geq \text{b}\\ & \boldsymbol{x}\geq 0\end{aligned}}$$

Example2：蔬菜运输问题

有5个蔬菜基地每天向3家超市供应蔬菜，其相关数据如下：

	基地1	基地2	基地3	基地4	基地5
横坐标(km)	2.1	8	5	1.3	7.7
纵坐标(km)	9	7.5	5.2	1.7	0.9
供应量(t)	7	14	5	9	19

蔬菜基地情况表

Example2：蔬菜运输问题

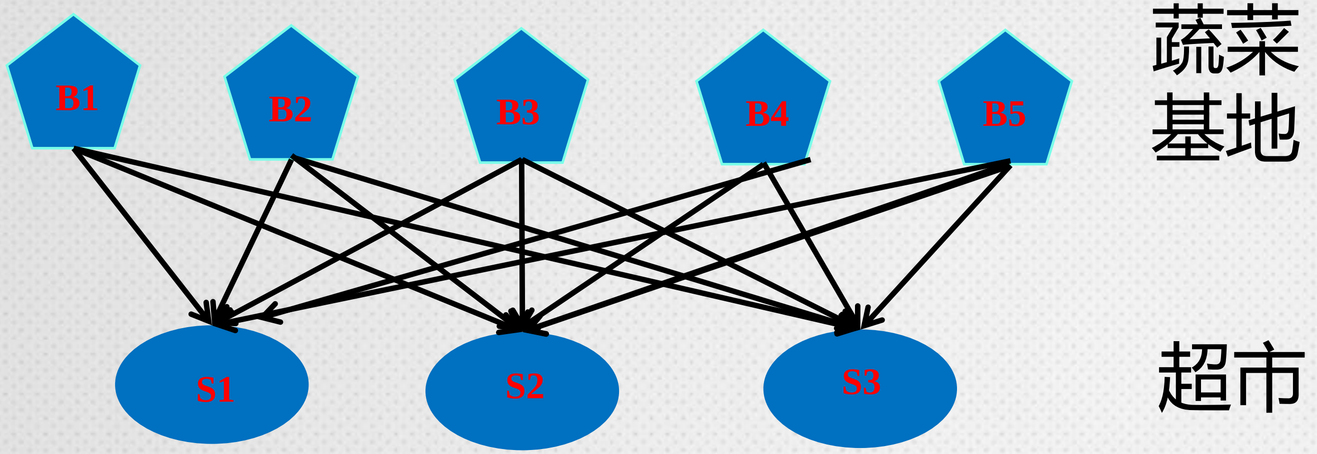
	超市1	超市2	超市3
横坐标(km)	5	2	8
纵坐标(km)	8	4	2.5
需求量(t)	28	15	9

超市情况表

Example2：蔬菜运输问题

如何制定调运方案，既可以满足供需关系，又使运输的吨公里数达到最小。

Example2：蔬菜运输问题



记号说明:(x_i,y_i)表示蔬菜基地i 的坐标；(a_j,b_j)表示超市j的坐标；C_{ij}表示基地i到超市j的距离；s_i表示蔬菜基地i的产量；d_j表示超市j的需求量。

Example2：蔬菜运输问题

① **决策变量：** 基地i到超市j的运量x_{ij}作为决策变量（i = 1, 2, ..., 5, j = 1, 2, 3）。

② **约束条件：**

- 关于蔬菜基地的约束，对每一个基地，从该基地运出的蔬菜量不超过其产量：$\sum_{j=1}^{3} X_{ij} \le s_i, i=1,2,\cdots,5$
- 关于超市的约束，对于每一个超市，运往该超市的蔬菜量等于其需求量： $\sum_{i=1}^{5} X_{ij} = d_j, j=1,2,3$

③**目标函数：** 总运费最小 $\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{3} C_{ij} X_{ij}$

Example2：蔬菜运输问题

线性规划模型：

$$\min \quad \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{3} C_{ij} X_{ij}$$

$$s.t. \quad \sum_{j=1}^{3} X_{ij} \le s_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, 5$$

$$\sum_{i=1}^{5} X_{ij} = d_j \qquad j = 1, 2, 3$$

$$X_{ij} \ge 0, i = 1, \cdots, 5, \quad j = 1, 2, 3$$

Matlab中求解线性规划的命令为: linprog, 解决的线性规划问题的标准格式为：

$$
\begin{aligned}
\min \quad & c^T x \\
\text{s.t.} \quad & A\cdot x <= b \\
& Aeq\cdot x = beq \\
& LB \le x \le UB
\end{aligned}
$$

其中，A、 Aeq表示矩阵，而b、 c、 x、 beq、 LB、 UB 为列矩阵。

命令linprog的调用格式

[*x* ,fval]= linprog(c,   A, b, Aeq,beq ,LB, UB)

最优解和最优值

目标函数

不等式约束

等式约束

决策变量上下界

如果没有等式约束，就在相应位置输入空矩阵[ ]， 不等式约束和上下界也类似，最后的输入项若没有,则可省略。

Example 1：线性规划模型如下

$$\min \quad 0.02x_1+0.07x_2+0.04x_3+0.03x_4+0.05x_5$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & 0.30x_1+2x_2+x_3+0.6x_4+1.8x_5 \geq 70 \\ & 0.10x_1+0.05x_2+0.02x_3+0.2x_4+0.05x_5 \geq 3 \\ & 0.05x_1+0.1x_2+0.02x_3+0.2x_4+0.08x_5 \geq 10 \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1,2,3,4,5; \end{aligned}$$

由于linprog要求所有的不等式约束是“≤”的形式，所以将模型转化成为标准形式。

Example 1：线性规划模型

$$
\begin{aligned}
\min\quad & 0.02x_1+0.07x_2+0.04x_3+0.03x_4+0.05x_5 \\
\text{s.t.}\quad & -0.30x_1-2x_2-x_3-0.6x_4-1.8x_5\le -70 \\
& -0.10x_1-0.05x_2-0.02x_3-0.2x_4-0.05x_5\le -3 \\
& -0.05x_1-0.1x_2-0.02x_3-0.2x_4-0.08x_5\le -10 \\
& x_j\ge 0 \quad j=1,2,3,4,5;
\end{aligned}
$$

```
c=0.01*[2 7 4 3 5]';
A=-[0.3 2 1 0.6 1.8;
     0.1 0.05 0.02 0.2 0.05;
     0.05 0.1 0.02 0.2 0.08];
b=-[70;3;10];
Lb=zeros(5,1);
[x,fval]=linprog(c,A,b,[],[],Lb)
```

计算结果：x=[0;0;0;39.7436;25.6410]

fval=2.4744

Example 2：线性规划模型

$$\min \quad \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{3} C_{ij} X_{ij}$$

$$s.t. \quad \sum_{j=1}^{3} X_{ij} \le s_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, 5$$

$$\sum_{i=1}^{5} X_{ij} = d_j, \qquad j = 1, 2, 3$$

$$X_{ij} \ge 0, i = 1, \cdots, 5, \quad j = 1, 2, 3$$

因为在linprog命令中决策变量和价格向量是向量，因此应该将对应的矩阵C和X拉直变成向量形式。

```
x=[2.1 8 5 1.3 7.7];
y=[9 7.5 5.2 1.7 0.9];
a=[5 2 8];
b=[8 4 2.5];
s=[7 14 5 9 19];
d=[28 15 9]';
C=zeros(5,3);
X=zeros(15,1);
for i=1:5
    for j=1:3
        C(i,j)=sqrt((x(i)-a(j))^2+(y(i)-b(j))^2);
    end
end
```

线性规划--问题的求解


```
A=[1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 ;
   0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0  0 0 0 ;
   0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 ;
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 ;
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1];
Aeq=[1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 ;
     0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 ;
     0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1];
C=reshape(C',15,1);
 Lb=zeros(15,1);
[X,fval]=linprog(C,A,s,Aeq,d,Lb)
```

使用代码生成左边的矩阵：

```
A=zeros(5,15); Aeq=zeros(3,15);
for i=1:5
    A(i,3*(i-1)+1:3*(i-1)+3)=ones(1,3);
end
for j=1:3
     Aeq(j,j:3:15)=ones(1,5);
end
```

计算结果： X'=[7 0 0 14 0 0 5 0 0 0 9 0 2 6];

Fval=168.4636

Thanks

重庆大学数学与统计学院