Mathematical Experiments

微分方程

—— MATLAB求解

重庆大学数学与统计学院

解析解

y=dsolve(eqn, cond1, name, value)

微分方程（组）

初始或边界条件

Options的设置

注意：① eqn是用“diff”和“==”描述的符号微分方程，

如：diff(y,x) == y 表示 dy/dx=y

② eqn可以是微分方程构成的向量，表示微分方程组。

例① $\dfrac{dy}{dx}=1+y^2,\qquad y(0)=1$

输入：syms x y(x); s=dsolve (diff(y, x) ==1+y^2)

s1=dsolve(diff(y,x)==1+y^2, y(0)==1)

输出：

s =

tan(C1 + x) （通解）

1i

-1i

s1 =

tan(x + pi/4) （特解）

例② 常系数的二阶微分方程

$$y''-2y'-3y=0,\qquad y(0)=1, y'(0)=0$$

输入:

```
syms x y(x); Dy=diff(y,x); s=dsolve(diff(y,x,2)-2*Dy-3*y==0)
s1=dsolve(diff(y,x,2)-2*Dy-3*y==0, [y(0)==1, Dy(0)==0])
```

结果:

```
s = C1*exp(-x)+C2*exp(3*x)
s1 =(exp(-x)*(exp(4*x) + 3))/4
```

例③ 非常系数的二阶微分方程

$$x''(t)-(1-x^2(t))x'(t)+x(t)=0, \qquad x(0)=3, x'(0)=0$$

输入 syms t x(t); Dx=diff(x,t);

```
s=dsolve(diff(x,t,2)-(1-x^2)*Dx+x==0, [x(0)==3, Dx(0)==0])
```

输出 s=[empty sym]

Unable to find explicit solution,

不能求出显式解

例④ 非线性微分方程

$$x'(t)^2 + x(t)^2 = 1, x(0) = 0$$

输入： syms t x(t); s=dsolve(diff(x,t)^2+x^2==1,x(0)==0)

s1=simplify(s)

输出： s = -(exp(- t*1i - (pi*1i)/2)*(exp(t*2i) - 1))/2

-(exp(t*1i - (pi*1i)/2)*(exp(-t*2i) - 1))/2

s1 = -sin(t)

(exp(t*1i)*(exp(-t*2i) - 1)*1i)/2

例⑤

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x + 3y \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

输入：syms t x(t) y(t)

```
[x1,y1]=dsolve([diff(x,t)==3*x+4*y, diff(y,t)==-4*x+3*y],[x(0)==0,y(0)==1])
```

输出：

```
x1 = exp(3*t)*sin(4*t)
y1 = exp(3*t)*cos(4*t)
```

数值解

[t,y] = ode23(' Fun', [t0，tf], y_0)

其中（1）Fun表示由微分方程(组)写成的m文件名；

（2）y0表示为函数的初值；

数值解

- [t， x]=solver（’ f’,ts, x_0）

- 自变量值
- 函数值
- ode23 ode45
- 由待解方程写成的m-函数文
- ts=[t_0， t_f]，t_0、t_f为自变量的初值和终值
- 函数的初值

- ode23：2阶3级龙格-库塔算法
- ode45：4阶5级龙格-库塔算法

范例 例1 $y' = -y + x + 1，\ y(0) = 1$

标准形式： $y' = f(x, y)$

1）首先建立M-文件 （weif.m）

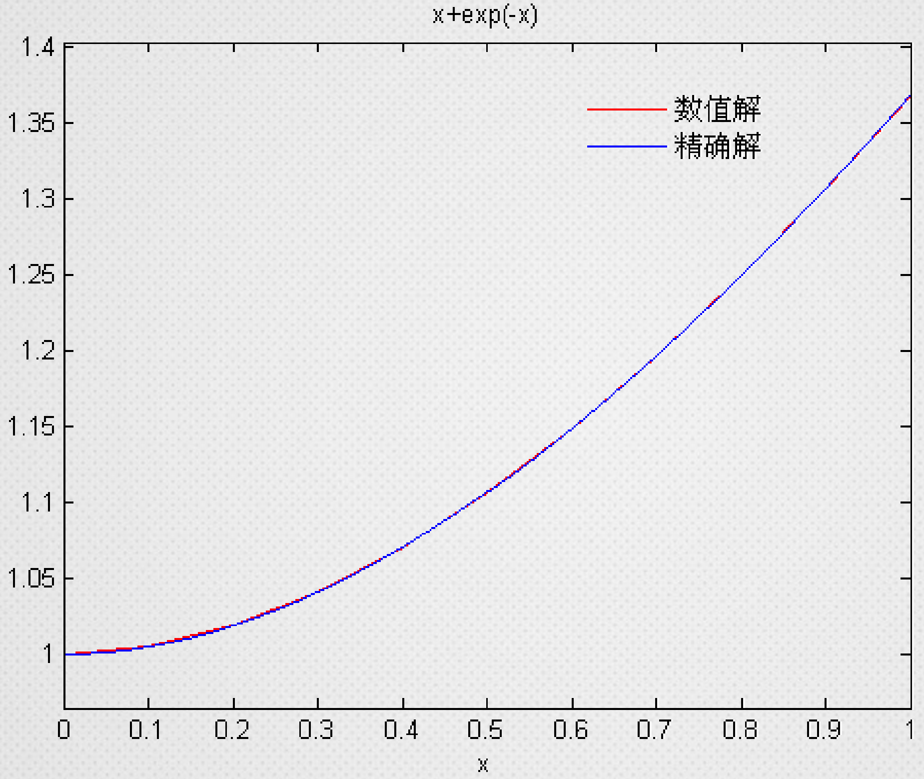
```
function f = weif(x,y)
f=-y+x+1;
```

2）求解：[x， y]=ode23('weif', [0, 1], 1)

3) 作图形: plot(x, y, 'r');

4) 与精确解进行比较

```
hold  on
ezplot('x+exp(-x)',[0, 1])
```


x+exp(-x)
1.4
1.35
1.3
1.25
1.2
1.15
1.1
1.05
1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
x
数值解
精确解

注意：

使用Matlab软件求数值解时，高阶微分方程必须等价地变换成一阶微分方程组.

$$y^{(n)} = f(t, y, \dot{y}, \cdots, y^{(n-1)})$$

$$y(0), \dot{y}(0), \cdots, y^{(n-1)}(0)$$

选择一组状态变量

$$x_1 = y, x_2 = \dot{y}, \cdots, x_n = y^{(n-1)}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2, \\
\dot{x}_2 &= x_3, \\
&\cdots \\
\dot{x}_n &= f(t, x_1, x_2, \cdots, x_n)
\end{aligned}$$

注意：

$$\dot{x}_1 = x_2,$$
$$\dot{x}_2 = x_3,$$
$$\cdots$$
$$\dot{x}_n = f(t, x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

1、建立M文件函数

function xdot = fun(t,*x*)

xdot = [x_2(t)； x_3(t)； …； *f*(t, x_1(t), x_2(t),…x_n(t))]；

2、数值计算（执行以下命令）

[t, x]=ode23('fun', [t_0, t_f], [x_1(0), x_2(0), …, x_n(0)])

范例

例2 Van der pol 方程:

$$x''(t)-(1-x(t)^2)x'(t)+x(t)=0$$

$$x(0)=3, x'(0)=0$$

该方程无解析解！

令 $y_1=x(t)$, $y_2=x'(t)$;

$$\begin{cases} y_1'=y_2; \\ y_2'=(1-y_1^2)y_2-y_1; \end{cases}$$

$$y_1(0)=3, \qquad y_2(0)=0;$$

范例

（1）编写M文件 (文件名为 vdpol.m):

```
function yp = vdpol(t,y);
yp(1,1)= y(2);
yp(2,1)= (1-y(1)^2)*y(2)-y(1);
```

（2）编写程序如下:（vdj.m）

```
[t,y]=ode23('vdpol',[0,20],[3,0]);
y1=y(:,1);   % 原方程的解
y2=y(:,2);
plot(t,y1,'b',t,y2,'r--')    %  y1(t),y2(t) 曲线图
```

范例

计算结果

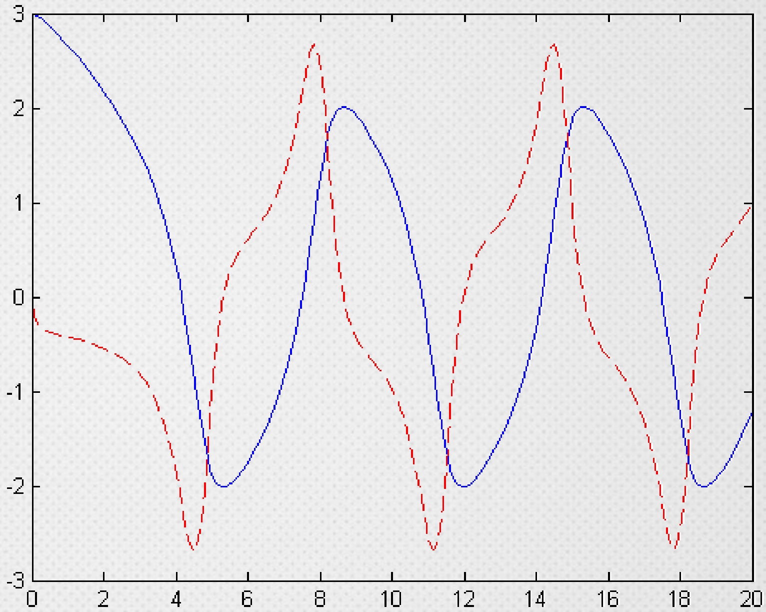
蓝色曲线

——y（1）；

（原方程解）

红色曲线

——y（2）；



Thanks