5-3.

(1) a).

$*_k$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

b). $\forall a.b \in N_k$. $a*_k b = a\cdot b - nk = r$　n为k除$a\cdot b$的商, r为余数

则 $0 \le r \le k-1$. 则 $*_k$在N_k上封闭

$\forall a.b.c \in N$. 有 $(a*_k b)*_k c = (a\cdot b - n_1 k)*_k c$

$= (a\cdot b - n_1 k)\cdot c - n_2 k$

$= a\cdot b\cdot c - (n_1 c + n_2)k = r_1$

$a*_k(b*_k c) = a*_k (b\cdot c - n_3 k) = a\cdot(b\cdot c - n_3 k) - n_4 k.$

$= a\cdot b\cdot c - (an_3 - n_4)k = r_2.$

∵ r_1. r_2均为 $a\cdot b\cdot c$ 除以k所得的余数. 则 $r_1 = r_2$.

故满足结合律

故为半群

(3)

1 幺元: 对R中任意元素a.

有 $a*0 = a+0+a\cdot 0 = a.$

$0*a = 0+a+0\cdot a = a.$

则0为幺元

2 $\langle R, *\rangle$为独异点: 对$\forall a.b \in R$.

∵R上+和·是封闭的. 则 $a*b = a+b+a\cdot b$ 是封闭的.

对 $\forall a.b.c \in R$.

$(a*b)*c = (a*b)+c+(a*b)\cdot c$

$= (a+b+a\cdot b)+c+(a+b+a\cdot b)\cdot c$

$= a+b+ab+c+ac+bc+abc$

$a*(b*c)=a+(b*c)+a\cdot(b*c)=a+(b+c+b\cdot c)+a\cdot(b+c+b\cdot c)$

$=a+b+c+bc+ab+ac+abc$

则 $(a*b)*c=a*(b*c)$. 故. $\langle R,*\rangle$是可结合的.

又0为幺元. 故 $\langle R.*\rangle$为独异点

(5). a). ∵ $\langle A.*\rangle$为半群. 则满足结合律 $(a*a)*a=a*(a*a)$

则 $a*a=a$

b) ∵ $a*a=a$. 则 $a*(a*b*a)=(a*a)*(b*a)$

$=a*b*(a*a)=(a*b*a)*a$

则 $a*b*c=a$

c) $(a*c)*(a*b*c)=(a*c*a)*(b*c)$

$=a*(b*c)=(a*b)*(c*a*c)=(a*b*c)*(a*c)$

则 $a*b*c=a*c$

(6) ∵ $\langle S.*\rangle$为可交换半群 则满足交换律和结合律.

$(a*b)*(a*b)=a\,a*(b*a)*b$

$=a*(a*b)*b$

$=(a*a)*(b*b)$

$=a*b$

(2). a). ∵ $\forall x \in A$. $\hat{x} * x = e$.

则 $\hat{a} * (a * b) = \hat{a} * (a * c)$

又A为半群, ∴可结合.

则 $(\hat{a} * a) * b = (\hat{a} * a) * c$

$\Rightarrow e * b = e * c$

$\Rightarrow b = c$.

b). $\forall x \in A$. $\hat{x} * (x * e) = (\hat{x} * x) * e = e * e = e = \hat{x} * x$

由a)可知 $x * e = x$ 故e是x右幺元

则e是A中的幺元.

且 $\forall x \in A$. 都有 $(x * \hat{x}) * x = x * (\hat{x} * x) = x * e$

$= x = e * x$

则 $x * \hat{x} = e$.

$\Rightarrow x * \hat{x} = \hat{x} * x = e$

则 $\forall x$ 均有逆元 $\hat{x}$

则 $\langle A, * \rangle$ 是群

3). $H \subseteq G$. 则*在H中满足结合律

对 $\forall x, y \in H$. $\forall a \in G$. $(x * y) * a = x * y * a = x * a * y$

$= a * x * y = a * (x * y)$.

则 $x * y \in H$. *关于H封闭

∵ $e * a = a * e$. 则 $e \in H$.

对 $\forall x \in H$. ∵ $x * a = a * x$ 则 $x^{-1} * (x * a) * x^{-1}$

$= x^{-1} * (a * x) * x^{-1}$ 则 $a * x^{-1} = x^{-1} * a$.

则 $x^{-1} \in H$. 综上. $\langle H, * \rangle$ 为 $\langle G, * \rangle$ 的子群