目录

1. 集合

1. 已知集合$A=\{1,2,4\}$，集合$B=\{1,3\}$，则$A\cup B=$_______.
2. 设$m\in R$，已知集合$A=\{1,m\}$，集合$B=\{1,m^2\}$，当$A=B$时，m的值为________.
3. 已知集合$A=\{3,2x,x-1\}$，集合$B=\{x,2\}$，若$B\subset A$，则实数x的值为_____________.
4. 已知全集$U=R$，集合$A=\{a^2,1\}$，$B=\{0,a-1,2a\}$，若$A\cap\bar{B}$有且仅有1个元素，则实数a的值为_______.
5. 已知全集$U=\{-1,0,1,2,3,4,5,6\}$，集合$A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{0,1,2,3\}$，从集合A中随机抽取三个元素组成集合C，从集合B中随机抽取两个元素组成集合D，则$\bar{C}\cap D=\emptyset$的概率是___________.

2. 不等式

2.1 基本不等式

1. 若正实数a、b满足$ab=1$，则$a+2b$的最小值为____________.
2. 若正实数a、b满足$2a+b=2$，则$b-\frac{1}{a}$的最大值为____________.
3. 若正实数a、b满足$a+2b=2$，那么$\frac{2b}{a}+\frac{1}{b}$ 的最小值为________.
4. 若正实数x、y满足$xy=400$，则$(\lg x+3)(2\lg y+1)$的最大值最接近于（　　）

A、18.62　　B、18.63　　C、18.64　　D、18.65

2.2 分式不等式与绝对值不等式

1. 不等式$|x-2|\le 1$的解集为________.
2. 不等式$\frac{5x+3}{x-1}\le 3$的解集为_______.
3. 不等式$|\lg x|\le\frac{\lg x^2}{\lg 10x}$的解集为_______________.
4. 不等式$|2^x-3|+\frac{2^{x+1}-3}{2^x+1}\ge 0$的解集为___________.

3. 函数

3.1 幂函数、指数函数与对数函数

1. 实数a、b满足$a > b$，则下列判断中错误的是（　　）

A、若$b > 1$，那么$\log_a 0.5 > \log_b 0.5$　　　　B、若$a > 0$，那么$0 < \frac{1}{a} < \left|\frac{1}{b}\right|$

C、若$a < 0$，那么$a^4 < b^4$　　　　D、若$0 < b < a < 1$，那么当$x \in (0,1)$时$x^a < x^b$

2．已知$f(x) = \log_a x\ (a > 0$且$a \neq 1)$.

(1) 设$m > 2$，已知当$x \in [2,\ m]$时，$y = f(x)$的值域为$[2,\ 4]$，求m的值；

(2) 设关于x的方程$ax^2 - 4x + 2 = 0$有两实数根x_1、x_2，证明$f(x_1)$、$f(x_2)$均有意义，并求$f(x_1) + f(x_2)$的取值范围.

3. 幂指函数在飞行器制造、桥梁建设等方面有着广泛的应用。幂指函数的定义是指数和底数中都含有自变量的函数，其中$f(x) = x^x$是一种特殊的幂指函数。试回忆你学过的探究函数的一般方法，判断下列命题中正确的个数为（　　　）

①$f(x) = x^x$无零点；　　　　②$f(x)$在$(0, +\infty)$上严格单调递增；

③$f(x) = x^x$经过第一、第三象限，但定义域关于原点不对称，故$f(x)$为非奇非偶函数；

④$f(x) = x^x$有所有幂函数的共同特征：经过点（1，1）；

⑤$x^x - 1 = a^x$（$x > 0$，$a > 1$）有且只有一个实根.

A、1　　　　B、2　　　　C、3　　　　D、4

3.2 函数性质

一、定义域:

1. 已知函数$y = f(2^x)$的定义域为(1，2]，则函数$y = f(\ln x)$的定义域为__________.

二、值域:

1. $m \in R$，若函数$f(x) = \begin{cases} 3^{-x} + 1 & x \le m \\ 3^{x-1} & x > m \end{cases}$可取遍$[1, +\infty)$中的所有值，那么实数$m$的取值范围是________.

2. 已知函数$y = \frac{2^{x+1}+3}{4^x+h}(x < 0，h \in R)$的值域为$(b, a)$（$b < a$），若$|a| = 2$，那么实数$b$的值为___________.

三、奇偶性:

1. 下列函数中是偶函数的是（　　）.

A. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$;　　B. $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$;　　C. $f(x) = x^{-2}$;　　D. $f(x) = x^{-3}$.

2. 已知函数$f(x)$对于任意非零实数a、b均满足$f(a+b)=f\left(\frac{1}{a}\right)+f\left(\frac{1}{b}\right)-a-b$.

（1）求$f(1)$的值；

（2）判断$f(x)$的奇偶性，并给出证明.

3. 定义域为R的奇函数$y=f(x)$在$x>0$时满足$f(x)=\frac{x^2-ax+a}{x}$，若$y=f(x)$的值域为R，那么实数a的取值范围是________.

4. 定义域为R的奇函数$y=f(x)$在$x>0$时满足$f(x)=m-\frac{1}{2^{m-x-1}}$ ，若$y=f(x)$值域为R，则实数m的取值范围是________.

5．函数$f(x)$的定义域为R，且当$x>0$时$f(x)$的解析式为$f(x)=x^a+a(x-1)$，那么下列说法中错误的是（　　）

（A）无论当$x\le 0$时$f(x)$的解析式如何，1一定不是$f(x)$的一个零点

（B）若当$x\le 0$时$f(x)$的解析式也为$f(x)=x^a+a(x-1)$，那么$f(x)$一定不是偶函数

（C）若$f(x)$是奇函数且其值域是定义域的真子集，那么$f(x)$的值域一定是$g(x)=\sin x$ $(x\in R)$值域的真子集

（D）若$f(x)$是奇函数，函数$h(x)$的解析式为$h(x)=m(m\in R)$，且无论m为何值$f(x)$与$h(x)$的图像都不可能恰好有一个交点，那么$a>0$

6. 定义在R上的奇函数$f(x)$在$x>0$时的解析式为$f(x)=x^2-5x+2$，若$f(x)=|x|+3c$有偶数个不同的解，那么实数c的取值范围为_________.

7. 已知函数$f(x)=2^x-2^{-x}-\frac{1}{2^x-1}$，若实数$m$满足$f(m)+f(1-2m)>1$，那么实数$m$的取值范围是______________.

8. 实数$n>m$，奇函数$y=f(x)$的定义域为R，且满足$f(1)=-1$，若不等式$f(x)>0$的解集为$(m,\ n)$，则$f(mn+n-m)$的值和0的大小关系为（　　）.

A. $f(mn+n-m)>0$

B. $f(mn+n-m)=0$

C. $f(mn+n-m)<0$

D. $f(mn+n-m)$的值和0的大小关系不确定

9. $m>0$，$y=f(x)$和$y=g(x)$都是定义域为R的奇函数，不等式$f(x)>0$的解集为$(m,2m)$，不等式$g(x)>0$的解集为$(m+1,2m+1)$，记$h(x)=f(x)g(x)$，若方程组$\begin{cases}f(x)>0\\g(x)>0\end{cases}$有实数解，那么下列说法中正确的是（　　）.

A. $h(3m)$可能不为 0，$h(-m-2)$可能为 0

B. $h(3m)$一定为 0，$h(-m-2)$一定不为 0

C. $h(3m)$可能不为 0，$h(-m-2)$一定不为 0

D. $h(3m)$一定为 0，$h(-m-2)$可能为 0

四、零点：

1. 现使用二分法求解问题“如果函数$f(x)=\lg x-0.1-2^x+x^2$在区间$(1,\ 2)$内有且仅有一个零点，求出该零点的近似值（精确到0.1）”，若第一次使用二分法x在左端点和右端点取

的值分别为1、2，那么解答本问题一共需要使用二分法的次数为_________.

2. 若函数$f(x)=ax^4+x^3+(a-4)x^2+2x+4a$在区间$(0,4)$上恰好有两个零点，那么实数$a$的取值范围为______________.

五、单调性:

1. 定义：如果一个函数在一段区间内严格单调递增或严格单调递减，那么我们称该函数在这段区间内呈严格单调趋势. 若函数$f(x)=\begin{cases}\log_a(2x+3) & -\frac{3}{2}<x\le 1\\ 2x^2-ax+a+1 & x>1\end{cases}$在$\left(-\frac{3}{2},\ +\infty\right)$内呈严格单调趋势，那么实数$a$的取值范围为___________.

2. 若函数$f(x)=\frac{m}{|x^2+mx+2m|}$ 在$[-3,-1)$单调递减，那么实数m的取值范围是____________.

***六、反函数:**

1. 函数$f(x)=x^{-\frac{2}{3}}(x\le 0)$的反函数为$f^{-1}(x)$，那么$f^{-1}(64)=$_______.

2. 已知函数$f(x)=\ln x\,(x>0)$的反函数为$f^{-1}(x)$，则函数$g(x)=\frac{1}{f^{-1}(x-1)+1}$的值域为_____.

七、函数性质综合:

1. 已知函数$f(x)$，$x\in D_1$；$g(x)$，$x\in D_2$；$h(x)$，$x\in D_3$. 若在$D_1\cap D_2\cap D_3$内满足：对于任意$f(x)$上的点$(x,f(x))$、$g(x)$上的点$(x,g(x))$、$h(x)$上的点$(x,h(x))$，都有点$(x,g(x))$、$(x,h(x))$关于点$(x,f(x))$对称，那么称$g(x)$与$h(x)$是关于$f(x)$的一对“对称函数”.
已知$f_1(x)=\sqrt{4-x}$，$f_2(x)=\mu-x$，如果$f_2(x)$与$m(x)$是关于$f_1(x)$的一对“对称函数”，且在$D_1\cap D_2\cap D_3$内$m(x)<f_2(x)$恒成立，那么实数μ的取值范围是_____________.

2. 定义在R上的函数$f(x)$的图像关于y轴对称，且周期$T=5$，集合$M=\{f(k^2),\ k\in Z\}$，如果$|M|$表示集合M中元素的个数，那么$|M|$=__________.

3. 若某函数在区间$[-1,\ 0]$或$[0,\ 1]$上既单调递增又单调递减，则称该函数为“美妙函数”. 已知定义在R上的函数$f(x)$的周期T为3，满足在$[-2,\ -1]$上严格单调递增且$f\left(-\frac{3}{2}\right)=0$，若$f(x+2)$是偶函数且$f(x)$是一个“美妙函数”，那么当$-4<x<3$时不等式$\frac{f(x+1)}{x-1}\le 0$的解集为______________.

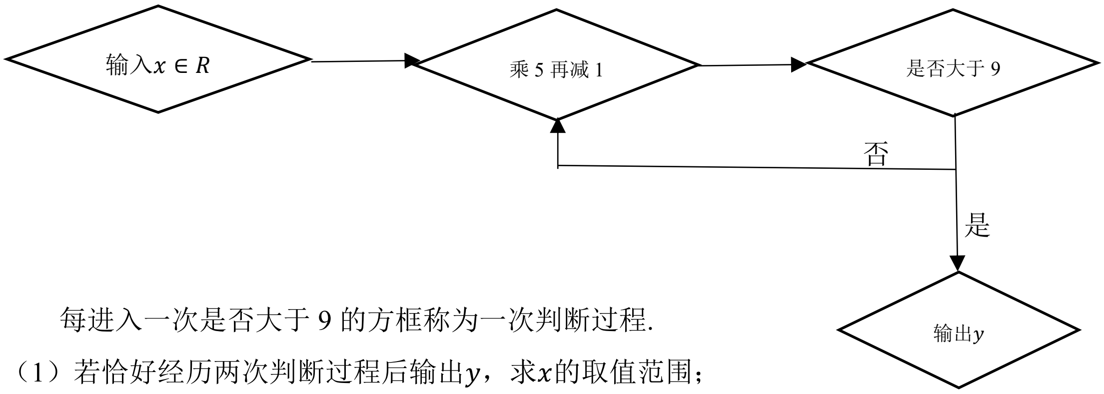
3.3 函数综合

1. 某次高难度的考试满分100分，同学们的得分普遍较低（得分均为非负数且得分不一定为整数），老师为提高同学得分想出了一个“处理”办法：将原得分开根号乘以10.设一位同学原得分为x分，其分数在经过“处理”后比原得分高y分.

（1）写出y与x之间的函数关系式，并计算一个得分经过“处理”后最多能比原得分高几分；

（2）设某一分数在经过“处理”后提高的分数值与任意一个得分经过“处理”后最多能比原得分高的分数值的比值为“学生受益指数”，“教师满意程度值”为“学生受益指数”与该生原得分的乘积，求“教师满意程度值”的最大值.

*2. 实数y与x满足以下的转化关系：



每进入一次是否大于 9 的方框称为一次判断过程.

（1）若恰好经历两次判断过程后输出y，求x的取值范围；

（2）设$f(x) = x^2 + (a-1)x + 1$，定义域为当经历无数次判断过程后仍无法输出y时x的范围，若$y = f(x)$恒不为负，求a的取值范围；

（3）设$t = \frac{y}{x}$，当t有意义时，求t的取值范围.

3. 已知$f(x) = \lg\frac{x-1}{kx+x+1}$，其中$k$为非负实数.

（1）当$k = 0$时，判断$f(x)$在$(-\infty, -1)$上的单调性并证明；

（2）$f(x)$一定存在反函数吗？如果一定，请求出$f(x)$的反函数；如果不一定，请求出所有使得$f(x)$不存在反函数的k值；

（3）给定m为实常数，若关于x的方程$\big||f(x)| - m\big| = n$恰好有四个不等实根，求n的取值范围.（范围端点用含k、m的式子表示）

4. 对于定义域为R的函数$f(x)$和实常数P，定义函数$f_p(x)(x \in R) = \begin{cases} \frac{1}{2}f(x) & f(x) \geq P \\ f(x) - 2 & f(x) < P \end{cases}$.

（1）当函数$f(x)$是周期函数时，①求证：函数$f_P(x)$是周期函数；

②若函数$f_p(x)$的最小正周期为2，求函数$f(x)$的最小正周期；

（2）①若$f(x) = x^{P+2}$且$y = f_p(x)$在$(0, +\infty)$上严格单调递增，求实数P的取值范围；

②若$f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ 且$f_p(x)$没有零点，求实数P的取值范围；

*③若$f(x) = \frac{2^{x-1}+2P}{2^x+1}$且$f_p(x)$存在反函数，求实数$P$的取值范围.

*④若$f(x) = Pe^x - 2x^2 + 1$且$y = f_p(x)$存在反函数，求实数P的取值范围.

（3）记函数$f(x)$的值域为A，函数$f_p(x)$的值域为A_P，当函数$f(x)$是奇函数时：

①若函数$f_p(x)$是偶函数，求A_P并写出对应P的取值范围；

②若函数$f_p(x)$是奇函数，探究集合A与集合A_P的关系并证明.

5. 已知定义在正整数集上的严格单调递增函数$f(x)$，记$f(x)$的值域为A，满足$A \cap D = A$，且对于任意$x \in D$，都满足$f[f(x)] = 3x$.

（1）求$f(1)$的值；

（2）求$f(15)$的值；

（3）求$f(x)$的解析式，并求$f(2021)$的值.

3.4 集合、不等式、函数、三角综合

1. 下列说法中正确的个数为（　　）

①已知A、B为两个非空集合且不相等，则$A\cap B$是$A\cup B$的真子集；

②$x>-2$是$2x+\frac{1}{x+2}\geq 2\sqrt{2}-4$的一个充要条件；

③若幂函数$f(x)=x^a$的定义域为一切实数且在$(-\infty,0)$上严格单调递增，那么$f(x)$在定义域上严格单调递增；

④既奇又偶函数一定既是单调增函数，又是单调减函数；

*⑤$g(x)=f^{-1}(f(x))$，$h(x)=f(f^{-1}(x))$是两个相同的函数.

A、1　　B、2　　C、3　　D、4

2. 已知全集$U=R$，集合$A=\left\{x\left|\frac{4x-5}{x}\geq 0\right.\right\}$，集合$B=\{x||\log_x 2|<3\}$，则$\bar{A}\cap\bar{B}=$______.

3. 已知集合$A=\left\{y\left|y=2^{\frac{1}{x}}+(\frac{1}{2})^{\frac{1}{x}},x\in R\right.\right\}$，$B=\left\{x\left|y=\log_{(x-1)^{\frac{3}{4}}}\pi\right.\right\}$，则$A\cup B=$________.

4. 集合$A=\left\{y\left|y=\frac{4\pi\sin^4 x+4\pi\sin^2 x}{2\sin^2 x+1}\right.,\ x\in R\right\}$，$B=\{x|y=\log_{\sin x-\sqrt{3}\cos x}(\sin x-\tan x)\}$，则$A\cap B=$____________.

5. 在函数$f(x)$的定义域D内任取两个满足$2x_2-x_1\in D$的数x_1、x_2，如果$2f(x_2)>f(x_1)+f(2x_2-x_1)$恒成立，那么称该函数为"$T$函数"，则下列函数中是"$T$函数"的是（　　）

（A）$f(x)=\sin(x-\frac{7}{2}\pi)$，$D=(0,\ \pi)$　　（B）$f(x)=\sin(x-7\pi)$，$D=\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$

（C）$f(x)=x^2-5x+12$，$D=[-1,\ 2]$　　（D）$f(x)=x^{-\frac{3}{5}}$，$D=[-4,\ -1]$

6. 对于下列两句表述，说法正确的是（　　）

① "关于θ的方程$a\sin\theta+b\cos\theta=br^s\cos\theta$在$(0,\pi)$内恒成立，其中$a$、$b$、$r$、$s$均为非负数"的一个必要非充分条件是"$(a+r)^{bs}=1$"；

②若x为自变量，y为因变量，那么$y=sin(arc\ \cos x)\ (-1<x<1)$与$x^2+y^2=1(y>0)$是同一个函数.

（A）①②都对　　（B）①②都错　　（C）①对②错　　（D）①错②对

7. 已知全集$U=R$，集合$A=\{x|ax^2+ax+2a+1\leq x\}$，$B=\{y||4y-5|\leq 3\}$.

（1）当$A=U$时，求实数a的取值范围；

（2）若"$x\in B$"是"$x\in\bar{A}$"的充分非必要条件，求实数a的取值范围.

8. 集合$A=\left\{x\left|使关于x、y、z的方程组\begin{cases}x+y+z=4\\x^2+y^2+z^2=t\end{cases}有解的所有实数x\right.\right\}$，当集合$A$中恰有三个整数时，实数$t$的取值范围是__________.

4. 三角

4.1 三角公式

1. 若角α满足$\tan\alpha<0$且$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)<0$，则角$\alpha$终边所处的位置为（　　）.

A. 第一象限；　　B. 第二象限；　　C. 第三象限；　　D. 第四象限.

2. 已知$\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\ 0\right)$，$\cos\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)=\frac{1}{4}$，则$\cot 2\alpha$的值为________.

4.2 解三角形

1. 在$\triangle ABC$中，角A、B、C对应的边长分别为a、b、c，已知$b=2$，$c=\sqrt{2}$，$B=45^{o}$，

则$A=$________.

2. 若A、B、C为$\triangle ABC$的三个内角，A、B、C对应的边分别是a、b、c. 那么在下列四个选项中是“$\sin A\cos B=\cos C$”的充分必要条件的是（　　）.

（A）“$\tan A\tan B-\tan A=1$”　　（B）“$b=c$且$B+C=A$”

（C）“$b\sin A=c$”　　（D）“$\cot A-\cot\left(\frac{\pi}{2}-B\right)=1$成立”

3. 在$\triangle ABC$中，$b=2c$，$A=2B+2C$，BC边上的中线AD的长为2，那么$\triangle ABC$外接圆的面积为__________.

4. 已知$\triangle ABC$的重心为点G，联结GA、GB、GC，

（1）若$\angle ABG=30°$，$S_{\triangle BGC}=4$，求边AC长度的最小值；

（2）当$GB=3$，$GC=1$时，若边AC、BC上分别存在两点M、N满足$\frac{AM}{MC}=\frac{CN}{NB}$，其中$M$、$N$不与$A$、$B$、$C$重合，联结$MN$，求线段$MN$的长的取值范围.

4.3 三角函数

1. $y=|cosx|$和$y=sin|x|$的最小正周期分别是（　　）.

（A）2π、π　　（B）π、2π　　（C）π、π　　（D）以上说法都不对

2. 已知函数$f(x)=\sin x\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\sin^2(x+\pi)$，$x\in R$.

（1）求函数$y=f(x)$的严格单调递减区间，并直接写出$y=f(x)$与$y=\lg x$的交点个数；

（2）w为大于0的实数，若函数$y=f(wx)$在$[0,\pi]$内恰有2024个零点，求w的取值范围.

3. 已知函数$f(C)=\sqrt{1+\sin C}-\sqrt{1-\cos C}$(其中$C$为$\triangle ABC$的一个内角)和定义在$R$上的函数$g(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\ w>0,\ \varphi\in(-\pi,\pi)\right)$，若对于任意的$C\in(0,\pi)$，都有$g(C)=\ f(C)$，现将函数$g(x)$先向右平移$\frac{\pi}{4}$个单位，再将所有点的横坐标翻两番得到函数$h(x)(x\in R)$，那么下列关于函数$h(x)$的说法中，正确的有________________.

（将所有正确命题前的序号填在横线上）

①振幅为$\sqrt{2}-1$　　②相位为$\frac{3}{4}\pi$　　③圆频率为$\frac{1}{8}$　　④周期为π

⑤若$f(C)$的解析式改为$f(C)=\sqrt{1+\sin C}+\sqrt{1-\cos C}$，$g(x)$的严格递减区间为$\left[2k\pi+\frac{3}{4}\pi,\ 2k\pi+\frac{7}{4}\pi\right](k\in Z)$

4. 当函数$f(x)=\cos^2(wx-\frac{\pi}{4})+\sin^2 wx-\frac{3}{2}$ 在$[w,7w)$上恰有3个零点时，实数w的取值范围是__________________.

5. 在高中的学习过程中，我们学习了$y=sinx(x\in R)$的图像，似乎$sinx=2$显然是无解的，但是否还存在着另一种可能：我们看到的$y=sinx$的图像只不过是高维空间的一个截面....事实上，$sinx=2$确实是有复数解的，下面我们就来一起操作一下$sinx=2$的求解：首先了解一下欧拉公式：$e^{ix}=\cos x+i\sin x$（i为虚数单位），该公式建立了三角函数与指数函数的关系，被誉为“数学中的天桥”，接下来我们正式开始求解：由$e^{ix}=\cos x+i\sin x$，用$-x$替换x，得$e^{-ix}=\cos x-i\sin x$，两式做差，$2i\sin x=e^{ix}-e^{-ix}$，代入$sinx=2$并设$e^{ix}=t$，则$t-\frac{1}{t}-4i=0$，即$t^2-4it-1=0$，由求根公式$e^{ix}=t=(2\pm\sqrt{3})i$，两边同时取对数，则$ix=\ln(2\pm\sqrt{3})i=\ln(2\pm\sqrt{3})+\ln i$，（记作①式）

下求解$\ln i$：在欧拉公式的等式两边同时取对数，得$ix=\ln(\cos x+i\sin x)$，令$\cos x=0$且$\sin x=1$，则$\ln i=ix$，由$\cos x=0$、$\sin x=1$得$x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，从而$\ln i=(2k\pi+\frac{\pi}{2})i$，代回①式得$ix=\ln(2\pm\sqrt{3})+(2k\pi+\frac{\pi}{2})i$，解得$x=\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\ln(2\pm\sqrt{3})}{i}=\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)-i\ln(2\pm\sqrt{3})$.

仿照上述过程，$\cos 2x+3=0(x\in C)$的解为______________________.

5. 向量

1. 设$\vec{e}$为单位向量，若$\vec{a}\cdot\vec{e}=2$，则$\vec{a}$在$\vec{e}$方向上的投影向量为_________.

2. 已知$\left|\vec{a}.\vec{b}\right|=1$，且$\vec{b}(\vec{a}+\vec{b})=3$，那么$\vec{a}$在$\vec{b}$上的投影为_____________.

3. k为实常数，若存在与单位向量$\vec{e}$夹角为150°的向量$\vec{a}$满足$\left|\vec{a}+k\ \vec{e}\right|=2$，那么实数$k$的取值范围是______________.

4. 在平行四边形$ABCD$中，$AB=3$，$BC=4$，$\angle ABC=60°$，点M为边BC中点，点E为边AB上一动点，联结EM，作$EM\perp MF$交边AD于点F，联结EF，设$\overrightarrow{EF}=\mu\overrightarrow{BA}+\lambda\overrightarrow{BC}$（$\mu$、$\lambda$为实数），则$6\mu+5\lambda$的取值范围是______________.

5. 若单位向量$\vec{e}$和三个两两不共线的非零向量$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$同时满足下列五个条件：

①$\vec{e}$与$\vec{a}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$　　②$\vec{e}$与$\vec{c}$共线　　③$\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$

④$\vec{b}\cdot\vec{c}>0$　　⑤$\left|\vec{b}\cdot\vec{e}\right|=1$

那么$\frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{c}|}$的取值范围是__________________.

6. 复数

1. i为虚数单位，复数$z_1=1+i$，$z_2=2-i$，则$z_1z_2=$________.

2. 已知复数$z=i(1-2i)$ (i为虚数单位)，则z的实部为________.

3. 已知复数z的辐角主值为$\frac{\pi}{6}$，虚部为2，则$|\overline{z}|=$_____________.

4. i为虚数单位，e为自然对数的底数，k是实常数，当复数$\frac{k+3i}{2+ei}$是纯虚数时，设$z=\frac{ki}{i-2}$，则$Imz=$ ____________.

5. 已知关于x的一元二次方程$x^2+kx+2k+1=0$，

（1）在复平面内画出满足上述方程有虚根的k在复平面内对应点Z的集合所表示的图形；

（2）若该方程有模为2的根，求实数k的值；

（3）设使该方程对应的两根z_1、z_2在复平面内对应的点为A、B，点A在第一象限，点O为坐标原点，过点B作$BP\perp OA$交x轴于P点，若存在k值满足$OA=\left(2+\sqrt{3}\right)AP$，

（i）求复数z_1的辐角；

（ii）若复数$(\frac{z_1}{z_2})^m(m\in N$且$m\geq1)$与复数$z_1z_2$的辐角相同，求实数$m$的值；

（iii）求实数k的值.

7. 数列

7.1 等差数列

1. 记等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且满足$S_5=12$，$S_{10}=a(a\in R)$，那么下列说法中错误的是（　　　　）

（A）$S_{20}=6a-96$　　（B）若S_{10}为$\{S_n\}$最大项，那么$S_{16}<12<S_{14}<a$

（C）不存在a使数列$\{S_n\}$的各项均为整数　　　　　（D）若$a=0$，那么$\{S_n\}$最大项为S_5

2. 若等差数列$\{a_n\}(n\geq 1$且$n\in N)$满足$a_n\in\left(\sqrt{n}-1,\ \frac{n}{2}\right)$恒成立，则$\sum_{n=1}^{10}a_n$的取值范围是________.

3. 2020年初，一场突如其来的新冠疫情打乱了人们的生活节奏，人们被迫居家，不再外出。随着时间的推移，生活逐渐恢复正常，似乎新冠病毒正离我们越来越远. 然而，2022年3月，新冠病毒的变种奥密克戎变异株再次在上海出现，并快速爆发，上海被迫进入紧急状态. 社区开始采用切块化、网格化管理，并开始了日复一日的核酸检测. 小明一家成为了这一历史的见证者. 通过前期的观察和健康云上的采样时间，小明发现楼栋居民每分钟做核酸的人数存在一定的规律，他希望通过建立数学模型的方式研究人数规律. 现假设小明所在楼栋居民与其隔壁两栋楼的居民一起做核酸，且三栋楼的居民人数相同，从刚开始采样到采样结束的过程中每分钟做核酸的人数总是先严格递增再严格递减. 某次做核酸的总时长为18分钟，假设由于应检不检者会被赋黄码，三楼栋所有居民均配合在这18分钟内完成了核酸采样，且每分钟内均有居民下楼做核酸，开始核酸检测第$1-18$分钟内每分钟三栋楼做核酸的总人数组成数列$\{a_n\}$（其中第1分钟内做核酸的总人数记为a_1，第2分钟内做核酸的总人数记为a_2，以此类推直至第18分钟），若第1分钟内、第9分钟内三栋楼加起来分别有3人、19人做了核酸，且$\{a_1、a_2、\ldots\ldots、a_{p-1}、a_p\}$、$\{a_p、a_{p+1}、\ldots\ldots、a_{17}、a_{18}\}(3\leq p\leq 16$且$p\in Z)$恰好是两个等差数列.

（1）在符合上述所有条件的情况下，求小明所在楼栋中至少有几位居民？

（2）直接写出当小明所在楼栋中居民总数最少时$\{a_n\}$的通项公式，并求出在哪一分钟时体现出总的核酸检测的效率最高？此时总的核酸检测的效率是多少？(求得的总的核酸检测的效率结果保留到小数点后一位)（第n分钟时体现出的总的核酸检测效率定义为在前n分钟做过核酸的总人数除以总时间（总时间即为n分钟））

7.2 等比数列

1. 已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=3^n+a(a\in R)$，当$\{a_n\}$为等比数列时，a的值为________.

2. 记无穷等比数列$\{a_n\}$的公比为q，前n项和为S_n，p为常数，a_i为数列$\{a_n\}$的某一项，且$\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$存在，则对于下列两个说法，判断正确的是（　　）.

① 任取$p>0$，在区间$(p,+\infty)$中都存在无数个i满足对于每个给定的i都存在q使得等式$\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=a_i$成立

② 任取$p\in(0,1)$，在区间$(-1,-p)$中都存在无数个q满足对每个给定的q存在唯一的i使等式$\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=a_i$成立

A. ①②均正确　　B. ①正确②错误　　C. ①错误②正确　　D. ①②均错误

7.3 等差等比数列综合

1. 下列关于等差数列(AP)和等比数列(GP)的有关说法中，正确的有_______________.（将所有正确命题前的序号填在横线上，S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，T_n为数列$\{a_n\}$的前n项积）

①若一个项数不少于3的数列既是等差数列又是等比数列，则这个数列是非零常值数列；

②若无穷等比数列$\{a_n\}$的前n项和存在极限，那么公比q满足$0<|q|<1$，且$\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\frac{a_1}{1-q}$;

③若无穷等差数列$\{a_n\}$的前n项和存在极限，那么数列$\{a_n\}$中的各项均为0；

④若无穷等比数列$\{a_n\}(n\geq 1且n\in N)$前n项积T_n不存在极限，那么$|q|\geq 1$.

2. 已知数列$\{a_n\}$是无穷等比数列，数列$\{b_n\}$是公差$d\neq 0$的无穷等差数列，满足$a_7=a_6+2a_5$，$b_7=b_6+2b_5$，且$a_3=b_3$，记S_p为数列$\{a_n\}$的前p项和，p为正整数，若不存在满足上述条件的数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$能使得$\frac{S_p}{b_p}$的值为整数，那么p的值为_______________.

3．定义：若数列$\{a_n\}(n\geq 1且n\in N)$每两项之间的差（a_2-a_1，a_3-a_2，.....，a_n-a_{n-1}）恰好组成一个公差不为0的等差数列且项数不少于四项，则称该数列为“二阶差分数列”.

则下列说法中正确的个数为（　　　）

① “二阶差分数列”一定不是等差数列；

②若“二阶差分数列”$\{a_n\}(n\geq 1且n\in N)$的前两项满足$a_n=p-2n(p\in R)$，且存在正整数k使得a_k为整个数列的最大项，那么$\{a_n\}$每两项之间的差组成的等差数列的公差$d\leq -2$；

③ “二阶差分数列”一定不是等比数列；

④若“二阶差分数列”$\{a_n\}(n\geq 1且n\in N)$满足$a_1=4$，$a_2=2$，记S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，若$\frac{S_7}{7}$为$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$的最小项，那么$S_5\in[5,\ 6]$.

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

7.4 数列综合

1. 某商店从2023年11月1日---11月20日进行“清仓大甩卖”促销活动，经过统计，发现从2023年11月1日开始起n天内$(1\leq n\leq 20)$的总营业额S_n恰好为$-10n^3+120n^2+300n+18800$元，则在“清仓大甩卖”促销活动期间营业额最高的日期是__________.

2. 有穷数列$\{a_n\}$满足$\frac{a_j}{a_i}\in(j-i,j)$对于任意的$i<j$都成立，则数列$\{a_n\}$项数的最大值为（　　　）

（A）4　　（B）5　　（C）6　　（D）7

3. 将立体几何和平面几何类比是一种非常重要的思想．若$n(n\geq 1且n\in N)$个平面最多能把空间分为a_n个部分，那么数列$\{a_n\}$的通项公式为___________________.

4. 若实数p为整数，且$\sum_1^n \frac{1}{2n+1}\sin\frac{1}{n} < \frac{4n+p}{6n+3}$ 对任意的正整数n均成立，请猜测p的最小值并证明你的结论.

5. 定义：若数列$\{a_n\}$中的某一项是$\{a_n\}$的最大项或最小项，则称该项为数列$\{a_n\}$的“极限项”. 现已知$a \in R$，无穷数列$\{a_n\}$的前n项和S_n满足$S_n = \frac{a}{n} + 3n - 1$，若数列$\{a_n\}$的“极限项”中恰有两项的值为正数，那么实数$a$的取值范围是_____________.

6. 若数列$\{a_n\}(n \geq 1$且$n \in N)$满足$S_n = a_n a_{n+1}$，其中S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，记T_n为数列$\{a_n\}$的前n项积，若数列$\{T_n\}$存在最小项，那么a_3的取值范围是__________________.

7. 函数$y = f(x)(x \in D)$满足$f(x+1) = f[f(x) - 1]$，记$y = f(x)$值域为A，正整数集为N^*.

（1）当$D = A = R$时，判断函数$f(x)$的奇偶性并说明理由；

（2）当$D = N^*$时，设数列$\{a_n\}$满足$a_n = f(n)(n \in N^*)$，若$a_n \leq \sqrt{n} + 2$恒成立，记T_n为数列$\{a_n\}$的前n项积，S_n为数列$\{T_n\}$的前n项和，求S_{2023}的值.

8. 定义：对于任意存在最大项的数列$\{a_n\}$，$\{a_n\}_{max}$指在数列$\{a_n\}$中最大项的值，关于n的方程$a_n = \{a_n\}_{max}$的所有解组成的集合称为数列$\{a_n\}$的“饱和集”.

现数列$\{a_n\}(n \in Z$且$n \geq 1)$满足：$a_1 = 1$，$a_2 = 3$，且$2a_{n+2} = 5a_{n+1} - 2a_n$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）记S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，设数列$\{b_n\}$满足$b_n = \frac{S_{n+1}}{S_n}$，

（i）若对于任意的$n \in Z$且$n \geq 1$，都有$p < b_n < q$（其中p、q为常数），求$q - p$的取值范围；

（ii）若存在$n \in Z$且$n \geq 1$使关于b_n的方程$8{b_n}^2 - 33b_n + m = 0$有实根，求实数m的最大值；

（3）现若设数列$\{c_n\}$满足$c_n = \sin(a_n\pi)$，求证：数列$\{c_n\}$的“饱和集”是单元集.

9. 定义：各项值均为正数的数列叫做正项数列. 各项均不相等的无穷正项数列$\{a_n\}$满足对于任意的$n \geq 3$，都存在$r < n$使$a_n = a_r a_{r+1}$成立，若数列$\{a_n\}$中最大项的值为2，且$a_1 \neq 2$，那么a_1的最大值为_____________.

10. 已知不少于4项的正项数列$\{a_n\}$满足对于任意的$n \geq 2$，都存在$r \leq n$使$T_n = a_r + a_{r-1}$.
注：数列中各项均为正数的数列叫做正项数列，T_n表示数列$\{a_n\}$的前n项积.

（1）若$a_2 = 3$，求a_4的所有可能值；

（2）是否存在常数m使得$a_1 = a_3 = m$？如果存在，求出m的取值范围；如果不存在，请说明理由；

（3）当数列$\{a_n\}$为无穷数列时，条件p：对于任意正整数n，$a_n \in Z$恒成立，条件q：对于任意满足$i > j + 1$且$s > t$的正整数i、j、s、t，$(a_i - a_j)(a_s - a_t) \geq 0$恒成立.分别求出满足条件$p$、条件$q$的数列$\{a_n\}$的通项公式，然后探究条件$p$、条件$q$之间的推出关系.

8. 立体几何

8.1 填选几何体基础计算

1. 已知某圆锥的母线长为3，侧面积为6π，则该圆锥的体积为________.

2. 定义：圆柱的中心为上下底面圆心连线的中点.已知某圆锥和某圆柱的母线长相等，且圆锥的底面与圆柱的下底面完全重合，若圆锥的顶点恰好是圆柱的中心，则该圆锥侧面展开图的圆心角为______________.

3. 正四棱锥$P-ABCD$满足$\angle APB=30°$，则直线PC与面$ABCD$夹角的余弦值为________.

4. 已知某圆锥和某圆柱的母线长与体积均相等，设该圆锥、圆柱的表面积分别为S_1、S_2，则S_1与S_2的大小关系是（　　　　）

（A）$S_1<S_2$　　（B）$S_1=S_2$　　（C）$S_1>S_2$　　（D）无法确定

8.2 填选空间位置关系

1．已知直线$a\perp$平面α，直线$a\perp$直线l，与平面α斜交的直线b与直线l相交，则下列四个选项中可能是直线a、b的位置关系有（　　　　）

①垂直　　②平行　　③相交　　④异面

（A）①③　　（B）③④　　（C）②④　　（D）①③④

2. 圆锥SAB中，S为顶点，O为底面圆心，底面半径为1，点E为母线SA上一点，点F为底面圆周上一点，若$SF\perp OE$，且$|EF|=1$，则$|AE|$的取值范围是___________.

3. 与三条两两异面的直线a、b、c均相交的直线（　　　　）.

A. 一定不存在　　B. 可能存在也可能不存在

C. 有且仅有一条　　D. 有无数条

4. 与四条两两异面的直线a、b、c、d均相交的直线（　　　　）

（A）有无数条　　（B）有且仅有一条

（C）可能存在也可能不存在　　（D）一定不存在

5. 在球面上随机选择可作为同一四面体顶点的四个点，以它们为顶点的四面体包含球心的概率是__________.

8.3 立体几何综合

1. 下列8个说法中正确的个数为（　　　　）.

①若直线a上有无数个点不在平面α上，则$a//\alpha$　　②三条两两相交的直线共面

③等腰梯形是平面图形　　　　　　　　　　　④任意两个空间向量均共面

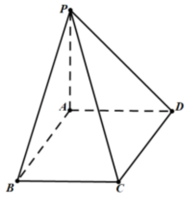
⑤过一点有且只有一个平面与给定的直线垂直　　⑥矩形的直观图一定不是矩形

⑦如果两个平行平面同时与第三个平面相交，那么它们的交线互相平行

⑧如果一个平面经过另一个平面的一条垂线，那么这两个平面垂直

（A）3　　　　　　　　（B）4　　　　　　　　（C）5　　　　　　　　（D）6

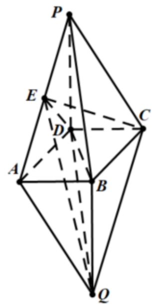
2. 若三个平面两两相交于三条直线，判断三条交线的位置关系并证明.



3．如图，已知四边形$ABCD$为边长为2的正方形，点P为空间中一点，满足$\angle PBC=\angle PDC=90°$.

(1) 证明：平面$PAC\perp$平面PBD；

(2) 设CD中点为M，若$AP=2$，求平面BMP与平面DMP所成二面角的大小.

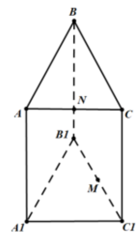


4. 《九章算术·商功》中说：“斜解立方，得两壍堵。斜解壍堵，其一为阳马，一为鳖臑。阳马居二，鳖臑居一，不易之率也。合两鳖臑三而一，验之以棊，其形露矣。”其中阳马指的是一个底面为矩形，一条侧棱垂直于底面的四棱锥.

如图，两个完全相同的阳马（$P-ABCD$和$Q-ABCD$，其中侧棱PD、QB垂直于底面$ABCD$）拼接为八面体$PQABCD$，$AD=DP=3$，$AB=2$.

（1）求证：平面ADQ//平面PBC；

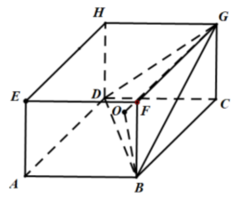
（2）点E为边AP的中点，求三棱锥$C-DEQ$的体积及直线EQ与平面BDQ所成角的大小.



5. 如图，三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的侧棱长为2，$AB=BC=3$，$AA_1\perp A_1B_1$且三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的某个侧面是正方形，点M为边B_1C_1的中点，点N在棱AC上且$AN=1$.

（1）求三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的体积，并证明直线MN//平面ABB_1A_1；

（2）求直线B_1C和平面A_1MN的夹角（结果用反三角函数值表示）.

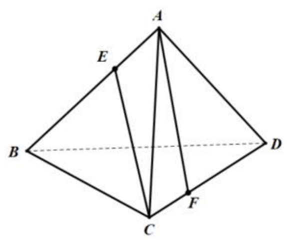


6. 如图，平行六面体$ABCD-EFGH$有球心为O、表面积为9π的外接球.

（1）求证：平行六面体$ABCD-EFGH$为直棱柱；

（2）若$AB=AD=1$，求平面OBG与平面DBG所成二面角的大小（结果用反三角函数表示）

7. 如图，点E、点F分别在正四面体$ABCD$的棱AB、棱CD上且满足$\frac{AE}{AB}=\frac{CF}{CD}=k(k>0)$，设直线$CE$与直线$AF$所成角为$\alpha$，设$\alpha=f(k)$.

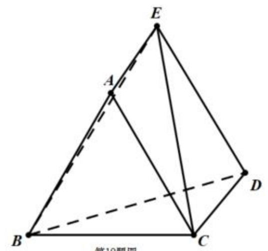


（1）判断直线CE与直线AF的位置关系并证明；

（2）求函数$y=f(k)$的表达式；

（3）设函数$y=f(k)$的值域为P，任意两条异面直线所成角构成的集合为Q，判断集合P、集合Q的关系并证明.

8. 定义：$d(M、N)$表示点M与点N之间的距离. 在多面体$ABCDE$中，$\triangle ABC$、$\triangle BCD$均为等边三角形，四边形$ACDE$为边长为2的菱形，直线AC与平面BCD所成角的大小为$45°$，且$d(C、E) > d(A、D)$.


第19题图

（1）求多面体$ABCDE$的体积；

（2）求二面角$A-BC-E$的大小（结果用反三角函数表示）；

（3）是否存在一个三棱柱切一刀能形成多面体$ABCDE$？如果存在，请描述作出该三棱柱的过程并简述切割方式；如果不可能，请简述理由.

9. 概率

1. 已知随机变量X服从二项分布$B(5,\ 0.2)$，则$D[X]$的值为________.

2. 已知事件A与事件B对立，且$P(A)=P(B)$，那么$P(B|A)=$________.

3. 托福阅读全部都是选择题，每篇文章对应的题目有14道。前13道题为四选一，每道题目1分；最后1题为六选三，满分2分，选对0或1个选项不得分，选对2个选项得1分，完全选对得2分。若某同学完全随机地作答某篇托福阅读(前13题从四个选项中随机选择一个，14题从六个选项中随机选择三个)，则该同学的期望得分为________.

4. 先后掷 2 颗骰子，记点数分别为随机变量X和Y，设事件A表示X为偶数，事件B表示X与Y的和为偶数，事件C表示X与Y的和为 12. 则下列说法中错误的是（　　）.

A. “事件C发生”是“事件A发生”的充分条件；　　B. $D[X+Y]=D[2X]$；

C. 事件A和事件$\bar{B}$独立；　　D. $P(A\cup B)=P(\bar{A}\cup B)$.

5. 现有2个老师与6个学生去中共一大会址、宋庆龄故居、淞沪抗战纪念馆和龙华烈士陵园4个红色基地参观，8人平均分为4组每组2人，每组随机去一个红色基地，设A事件对应“2个老师去不同的红色基地”，B事件对应“去中共一大会址的不全是老师”，那么$P(A|B)$的值为__________.

6. 平面上有A、B、C三点，现有一只青蛙从A点开始连续跳跃 8 次，已知该青蛙每次跳跃会等可能地跳到A、B、C三点中除跳跃起点外的两点，那么青蛙跳跃 8 次后恰好回到A点的概率为________.

7. NBA 季后赛采用四胜制，即先取得 4 场胜利的队伍获胜，一旦有队伍获胜该轮系列赛即结束，比赛结果无平局.

（1）“天王山之战”指比赛前四场双方各赢 2 场后的第五场比赛，“首战告捷”指第一场比赛胜利，已知某队季后赛主场胜率为 0.6，客场胜率为 0.4，假设各场比赛获胜概率互不影响，设事件A为“出现天王山之战”，事件B为“该队首战告捷”，计算$P(A)$的值，并通过计算判断事件A与事件B是否独立；

（2）已知某队主场胜率为 0.8，客场胜率为 0.25，该队与其他球队进行一轮 NBA 系列赛，

采用“主主客客主客主”的方式，即该队第 1-2 场在主场，第 3-4 场在客场，若有必要第 5 场在主场，第 6 场在客场，第 7 场在主场，设该轮系列赛所需比赛数为随机变量X，求X的分布列、数学期望和方差.

10. 统计

1. 若某班 8 位任课老师的年龄（单位：岁）可绘制成如下的茎叶图（有一位老师的数据被墨水污染，无法看清），已知该班任课老师年龄（单位：岁）的第 75 百分位数为 38，则该班 8 位任课老师的平均年龄（单位：岁）为________.

2	4 8
3	1 3 3 
4	1 5

2. 某校高三（2）班有 43 名学生，学号为 01 到 43，现采用随机数表法从该班抽取 7 名学生参与有关学生平均睡眠时间的问卷调查，已知随机数表中第 2 行到第 4 行的各数如下：

07 34 65 52 68 12 60 35 77 73 87 88 08 17 98

12 74 19 65 41 58 61 43 71 98 44 87 66 36 19

90 11 03 67 94 01 67 10 54 76 45 14 31 01 67

若从随机数表的第 2 行第 3 列的数开始向右读，则抽取到的学生学号的极差是_______.

3. 右图为某同学对于 12 次玩游戏《I wanna see the moon》数值的相关记录，12 次游玩均在同一年内完成，死亡总次数代表通关过程中主角 kid 累计的死亡次数，死亡总次数越少代表玩得越熟练，时间（小时）代表该次游玩用时，游玩用时越短代表玩得越熟练，根据图表中的相关信息，对于这 12 次游玩的数值而言，下列说法中错误的是（　　　）

I wanna see the moon记录

日期	死亡总次数	时间（小时）
5月1日	2918	9.56
5月3日	1139	3.87
5月4日	696	2.76
5月7日	700	3.03
5月8日	428	2.22
5月20日	615	2.84
5月21日	319	2.15
6月2日	491	2.42
6月1日	322	1.86
6月3日	484	2.39
10月11日	460	2.45
11月1日	342	2.28

（A）死亡总次数的第 60 百分位数为 428

（B）所用时间的标准差小于 2

（C）所用时间的极差为 7.7 小时

（D）从总体趋势看该同学随着游玩次数增多玩得越来越熟练

4. 高三（7）班某次数学考试的成绩分布如下：

男		女
9 7 7	10	7
9 6 2 1 1	11	0 2 8
9 7 7 6 5 3 2 2 2	12	0 1 2 6 9
8 6 3 3 3 2 0	13	1 5 9
7 5 5 1 0	14	3 6

则关于高三（7）班此次考试情况，下列说法中正确的是（　　　　）

（A）男生分数的平均数、标准差与极差均高于女生

（B）全班的平均分数低于全班分数的中位数

（C）任意去掉一个男生的分数，男生分数的第 75 百分位数都不会发生变化

（D）以上（A）（B）（C）说法均错误

5. 某产品月产量x（单位：千件）和单位成本y（单位：元/件）的数据如右图所示，若对于任意的$i \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$，都满足$(y_i - 2x_i)(y_i - 3x_i) = 0$，那么建立月产量$x$和单位成本$y$之间的回归方程$y = \hat{a}x + \hat{b}$，下列说法中错误的是（　　　　）

月产量x	单位成本y
x_1	y_1
x_2	y_2
…	…
x_9	y_9
x_{10}	y_{10}

（A）线性相关系数r一定大于 0

（B）$\hat{a}$可能为 0

（C）$\hat{b}$的值可能小于 0

（D）在x_1处的离差可能大于x_1

11. 计数原理

11.1 排列组合

1. 各位数字和的平均数恰好与十位数字相同的四位数（首位不为0）的个数为_________.

11.2 二项式定理

1. $\left(2x - \frac{1}{x}\right)^6$的二项展开式中的常数项为________.

2. 设$(x-2)^n = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n(a_0, a_1, \ldots, a_{n-2},\ a_{n-1}, a_n \in R)$若$a_{n-2} + a_n$ =2048$(n \geq 5$且$n \in N)$，则n的值为_________.

3. 二项式$\left(2x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n(n \geq 3$且$n \in N)$的展开式中常数项的系数为240，则该二项展开式中的第4项为________.

4. 已知函数$f(x) = x^5$，那么$\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(1+h^2) - f(1-h)}{h}$的值为________.

5. 实数$a < -1$，若二项式$\left(ax + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$($n$为正整数)的展开式中常数项的系数为120，则该二项展开式中系数最小的项是__________.

6. 若$(2x-1)^n(n \geq 1$且$n \in N)$的展开式的第九项为系数最大项，则n的值为_________.

12. 解析几何

12.1 直线

1. 经过点$A(0,1)$、点$B(-1,\ -1)$的直线l的两点式方程为__________.

2. 若倾斜角为$\frac{5}{6}\pi$的直线l过点$(-1,2)$，则直线l的点法式方程为__________.

12.2 圆

1. 定义：若一条线段上包括端点的所有点均在某圆内，则称这条线段在该圆内部.在平面直角坐标系xOy中，设实数$r>0$,点A、B坐标分别为$(1,2)$和$(3,-1)$，若在x轴上存在点P使得线段AB在以P为圆心，r为半径的圆内部，那么r的取值范围是__________.

2. 圆P的方程为$x^2+y^2+2x-2y=0$，点A、B、C为圆P上三个不同的动点，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}$的取值范围是__________.

12.3 椭圆

1. 椭圆$2x^2+y^2=1$的短轴长为（　　　）.

   A. 1　　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　　C. $\sqrt{2}$　　　D. 2

2. 椭圆$2x^2+y^2=2$的长轴长为（　　　）

（A）1　　　（B）$\sqrt{2}$　　　（C）$2\sqrt{2}$　　　（D）2

3. 已知椭圆Γ：$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{b^2}=1(0<b<5)$的右焦点为$F_2$，直线$PQ$过坐标原点$O$且与椭圆$\Gamma$交于$P$、$Q$两点，若$\triangle OPF_2$的周长为11，$\triangle OQF_2$的周长为13，那么$\Gamma$的离心率为_________.

12.4 双曲线

1. 双曲线Γ：$x^2-y^2=1$的离心率为（　　　）.

   A. $\sqrt{2}$　　　B. 2　　　C. $\frac{1}{2}$　　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

2. 已知动点P到$(3,0)$的距离减去它到$(-3,0)$的距离为4，记P的轨迹为曲线Γ，则Γ的标准方程为__________.

3. 双曲线Γ：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{3}=1(a>0)$的左右焦点分别为$F_1$、$F_2$，直线$l$与双曲线$\Gamma$的右支交于$M$、$N$两点，若$\triangle F_1MN$的周长与$\triangle F_2MN$的差为4，那么$\Gamma$的离心率为___________.

4. 若双曲线$(m^2-2)x^2-y^2=m$的虚轴长和实半轴长相等，则实数m的值为__________.

5. 给定双曲线Γ：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$和平面上一点$P(x_0,\ y_0)$，设$\Gamma$的两条渐进线的斜率分别为$k_1$、$k_2(k_1<0,k_2>0)$，则下列选项中错误的是（　　）.

A. 存在P使得过P可做两条与Γ的同一支相切的切线

B. 过P任作一条斜率在(k_1,k_2)之间的直线必与Γ的左右两支各有一个交点

C. 若已知Γ两条渐进线的夹角解得的Γ的离心率唯一，则Γ为等轴双曲线

D. 若P在渐近线上，过P且与Γ有且仅有一个公共点的直线共有2条

6．在平面直角坐标系xOy中，双曲线Γ：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$的右焦点为$F$，过坐标原点$O$的直线$l$与$\Gamma$的左支交于点$P$，与$\Gamma$的右支交于点$Q$.

(1) 若点P坐标为$(-1,-1)$且$PQ\perp QF$，求双曲线Γ的方程；

(2) 当$b=4$且$\triangle OPF$、$\triangle OQF$的周长分别为18、12时，求PQ的长；

(3) 设Γ的离心率为e，右顶点为A，线段PF与Γ的右支交于点M，记$\triangle QFM$、$\triangle AFP$、$\triangle AFM$的面积分别为S_1、S_2、S_3，当$S_1=S_2=eS_3$时，求直线l的方程.

12.5 抛物线

1. 已知抛物线$x^2=2py(p>0)$的准线方程为$y=-2$，则$p=$_________.

2. 抛物线$y=2x^2$的顶点到准线的距离为__________.

12.6 解析几何综合

一、直线与抛物线综合：

若对任意$k\in R$，直线$x+ky-2k+1=0$与抛物线$y^2=-2px(p>0)$均有公共点，那么实数p的取值范围是__________.

二、椭圆与圆综合：

设r为正实数，椭圆C的标准方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$，圆$O$的方程为$x^2+y^2=r^2$，当椭圆$C$与圆$O$共有4个不同的公共点时，$r$的取值范围是_________.

三、直线与圆综合：

1. 设实数$r>0$，圆A: $(x+1)^2+(y-1)^2=r^2$.

(1) 已知直线l的方程为$y=x+4$，设l与y轴交于点B，当直线l是圆A的一条切线时，设过点B与圆A的另一条切线为l'，求直线l'与l的夹角；（结果用反三角函数值表示）

(2) 当圆A与曲线$y=-\sqrt{4-x^2}$有且仅有一个公共点时，求r的取值范围.

2. 在平面直角坐标系xOy中，已知圆A与x轴切于点$(1,0)$，直线l在两坐标轴截距的绝对值相等. 当直线l截圆A所得弦长为1且将圆A分成面积比为1:3的两部分时，称直线l与圆A为一组“线圆对”. 则不同的“线圆对”的组数为_________.

四、椭圆双曲线综合：

已知Γ_1：$\frac{x^2}{m}+y^2=1(m>0且m\neq 1)$与$\Gamma_2$：$x^2-\frac{y^2}{n}=1(n>0)$的焦点相同，且$\Gamma_1$与$\Gamma_2$在第一象限内的交点为$M$，在第二象限内的交点为$N$.

(1) 设Γ_1的离心率为e_1，Γ_2的离心率为e_2，若$e_1e_2=\frac{m-1}{n}$，求Γ_2的渐近线方程；

(2) 设F_1为左焦点，F_2为右焦点，若$\left|\overrightarrow{F_1M}+\overrightarrow{F_2N}\right|=1$，求线段$|MN|$的长度；

(3) 设Γ_1的上顶点为Q，记$\triangle QMF_2$的面积为S，求证：$S<\frac{1}{2}$.

五、双曲线抛物线直线综合：

焦距为 4 的双曲线Γ：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a,\ b>0)$的左右焦点分别为$F_1$、$F_2$，左右两个顶点分别为$A$、$B$，焦点为$F_2$的抛物线$y^2=2px$与$\Gamma$的渐近线在第一象限内的交点为点$P$，且$F_2P=\frac{14}{3}$.

（1）求点B到直线F_2P的距离；

（2）斜率为3的直线l与双曲线交于M、N两点，与y轴交于点R. 若点M、N均在第三象限，当$\triangle AMN$的面积最大时，求$\tan\angle F_1RM$的值.

六、椭圆抛物线直线综合：

焦距为2的椭圆Γ：$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$的焦点为$F_1$、$F_2$，右顶点为$N$，点$M$在$\Gamma$上，满足$M$、$N$、$F_1$共线且$\triangle MNF_2$为等腰三角形，焦点为$F$的抛物线$C:y^2=2px(p>0)$与$\Gamma$交于$Q$、$R$两点.

(1) 求Γ的标准方程；

(2) 当$\angle QFR=\frac{2}{3}\pi$时，求点$Q$的坐标；

(3) 设过F的直线l与Γ交于S、T两点，点集$\Omega=\{K|K\in l\cap C\}$，若存在点$J\in\Omega$满足$|TJ|=|JF|=|FS|$，求直线$l$的方程.

13. 导数

13.1 切线

1. 函数$y=\cos x+\frac{1}{2x-1}$ 在原点处的切线方程是________________.

2. 函数$f(x)=\ln(2x+1)\cos x$在点$\left(\pi,f(\pi)\right)$处的切线点斜式方程为_______________.

3. 设函数$y=f(x)$，$x\in D$，定义：若对于任意的$x_0\in D$，函数$f(x)$在点$\left(x_0,f(x_0)\right)$处的切线与函数$y=f(x)$，$x\in D$的图像有且仅有一个公共点，则称函数$f(x)$为“孤独函数”.

(1) 判断下列两个函数是否是“孤独函数”？（直接写出答案）

① $f(x)=\tan x$；

② $f(x)=\begin{cases}x^2 & 0<x<1\\ e^{x-1} & x>1\end{cases}$；

(2) 实数$a\neq 0$，求证：函数$f(x)=x\ln(ax)$是“孤独函数”；

(3) 判断定义域为$(0,+\infty)$的三次函数$f(x)$是否是孤独函数，并证明你的结论.

13.2 导数与积分思想

1. 函数$y=f(x)(x\neq 0)$满足$\frac{f(x)}{x}=1-f'(x)$恒成立，且$f(1)>1$，则$y=f(x)$的值域的取值范围为______________.

2. 定义在R上的奇函数$y=f(x)$在$x>0$时满足$f(x)=f'(x)+1$，且方程$f(x)=f(1)$恰好有两个不相同的解，那么$f(1)$的取值范围是_____________.

3. 已知定义在R上的函数$y=f(x)$的导函数为$y=f'(x)$，且对于任意实数a、b都满足$f(ab)=f(a)f'(b)$. 那么对于下列三句表述，说法正确的是（　　　）

①$f'(0)$和$f(0)$的值一定均为 0

②$f'(1)$的一个可能值为 1

③函数$y=f(x)$的解析式一定为$f(x)=0(D=R)$

（A）①③　　（B）①②　　（C）①　　（D）②

13.3 导数与函数综合

1. 函数$f(x)=x^3-\frac{1}{x}$的导函数$y=f'(x)$的最小值为_______.

2. 实数$p>0$，曲线C可能是以下四种曲线中的某一个：①$y^2=2px$ ②$y^2=-2px$

③$x^2=2py$ ④$x^2=-2py$，曲线E：$y=e^x$，设事件A为“曲线E恒在曲线C上方”.

（1）填写以下表格：

事件A的发生情况	事件A为必然事件	事件A为随机事件	事件A为不可能事件
对应曲线C（填编号）			

（2）当事件A为随机事件时，为使事件A发生，求实数p的取值范围.

3. 函数$f(x)=2\sqrt{x+2}-\sqrt{x}$的值域为__________.

4．在上海教育出版社《普通高中教科书 数学必修一》的第五章“函数的概念、性质及应用”中，我们学习到了一些探究函数的基本角度.

下面，我们来利用所学探究函数$f(x)=\frac{\sin x+1}{x}(x>0)$的性质.

（1）请补充$f(x)=\frac{\sin x+1}{x}(x>0)$的基本性质表格.

解析式	$f(x)=\dfrac{\sin x+1}{x}$	定义域	$(0,+\infty)$
周期性		奇偶性	
零点		值域	

（2）$y=f(x)$的单调性判断难度稍大，我们从侧面间接探究其单调性.

①求$y=f(x)$在$(\pi,f(\pi))$处的切线与y轴的交点坐标；

②求$y=f(x)$在区间$(0,2024\pi)$内的驻点个数.

5. 如果函数$y=f(x)$在其定义域上有且仅有一个驻点，则称该函数具有“D 性质”.

（1）判断“$y=f(x)$具有 D 性质”是“$y=f(x)$在其定义域上有且仅有一个极值点”的什么条件，并给出依据；

（2）若函数$f(x)=\frac{x^2+a\ln x}{x}$具有“D 性质”，求实数$a$的取值范围；

（3）设m为非零实常数，$g(x)=f(mx)+m$，求证：“$y=f(x)$具有'D 性质'”的一个充分必要条件是“$y=g(x)$具有'D 性质'”.

6. 如果函数$y=f(x)$在其定义域内有且仅有两个不同的极值点x_1、x_2，则称函数$y=f(x)$为“双极值点函数”且两点$(x_1,f(x_1))$、$(x_2,f(x_2))$所确定的直线称为“极值点连线”.若“双极值点函数”$y=f(x)$的“极值点连线”与$y=f(x)$的图像有且仅有两个交点，称函数$y=f(x)$具有“P性质”.

(1) 判断$f(x)=\ln(x+1)+\frac{1}{\sqrt{x}}$是否为“双极值点函数”，并说明理由；

(2) 设实数$a>0$，证明$f(x)=\frac{x^2}{e^{ax}}$为“双极值点函数”，判断$y=f(x)$是否具有“P性质”并说明理由；

(3) 求证：当$y=f(x)$为三次函数且为“双极值点函数”时，$y=f(x)$不具有“P性质”.

7. 定义：$max\{a, b\}$表示a、b中的较大者，即$max\{a, b\}=\begin{cases} a & a \geq b \\ b & a < b \end{cases}$. 设函数$y=f(x)$，$x\in R$与$y=g(x)$，$x\in R$分别存在导函数$y=f'(x)$，$x\in R$和$y=g'(x)$，$x\in R$，当且仅当$f'(x)>max\{0, g'(x)\}$恒成立且$y=f(x)$的图像与$y=g(x)$的图像有公共点时，称函数$y=f(x)$是$y=g(x)$的“相关函数”.

(1) 判断函数$f(x)=x^3+3x^2+5x$是否是$g(x)=2x$的“相关函数”，并说明理由；

(2) 设$m\in R$，当函数$f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$是$g(x)=mx$的“相关函数”时，求m的取值范围；

(3) 若函数$y=f(x)$是$y=g(x)$的“相关函数”，且对任意实数x都满足$f[g(x)]=g[f(x)]$，求证：函数$y=f(x)$与$y=g(x)$的图像的公共点唯一，且该公共点在直线$y=x$上.

（可用结论：在区间D上，函数存在导函数是函数图像为一段连续曲线的充分非必要条件.）

14. 两道具有代表性的多章节知识点混合试题

1. 设i为虚数单位，n、m为正整数，k为实常数，$\left(\sqrt{3}-i\right)^n$在复平面中对应的向量为$\vec{a}$，$\left(\frac{7+3i}{2+5i}\right)^m$在复平面中对应的向量为$\vec{b}$，若$\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=0$，$\vec{a}$在$\vec{b}$上的投影$\vec{c}$为非零向量且$\vec{c}$与$\vec{b}$方向相反，且对于任意的$k\geq m$都满足$\left|\vec{a}\right|\leq 2024k$，那么$\log_8\left|\vec{b}\right|$的最大值为__________.

2. 设实数$k>0$，无穷等差数列$\{a_n\}$的公差$d=\frac{\pi}{2k}$，$a_1=0$. 定义无穷集合列$\{A_n\}(n\in N$且$n\geq 1)$，其中$A_n=(a_n,a_{n+1})$. 函数$y=f(x)$的定义域$D=A_1\cup A_2\cup\ldots\ldots\cup A_n$，且满足$f(x)=\begin{cases}\sin kx, & x\in A_1 \\ f'(x-d), & x\in A_2\cup\ldots\ldots\cup A_n\end{cases}$，若$y=f(x)$图像上任意一点都满足$y=f(x)$在该点处的切线与$y=f(x)$的图像有无穷个公共点，则$k$的取值范围是________.

15. 数学建模

1．随着全球气候变暖，夏季的气温越来越高，人们希望通过吃雪糕降温。然而某些雪糕外表平凡却价格高昂，让人们望而生畏，这样的雪糕被网民们称为“雪糕刺客”。对于雪糕的生产企业而言，如何避免“雪糕刺客”现象带来的销量影响，即如何在保证单件雪糕利润的同时稳住雪糕销量是很重要的。恰好小明要完成《研究性课题报告》，于是他想对此建立模型。为了收集数据，小明实地走访了某雪糕批发市场并在该批发市场中找到了某款成本为5元每只的雪糕，经过询问，小明得知该款雪糕上市第一天的售价为每只12元，之后每天每只雪糕的售价都比前1天低0.25元，通过计算比较每天的毛利润确定最终定价（毛利润即市场卖出雪糕的总金额减去买入雪糕的总金额）。当时恰好是该款雪糕上市的第三天，小明问工作人

员要到了前两天的数据，如下表所示：

上市天数	第 1 天	第 2 天
定价（元）	12	11.75
销量（只）	876	888

在收集到数据后，小明直接采用了某种函数对上表中的数据进行回归分析，经过拟合得到定价与上市天数的部分关系如下表所示（下表中仅显示拟合出的前 5 天的销量）：

上市天数	第 1 天	第 2 天	第 3 天	第 4 天	第 5 天
定价（元）	12	11.75	11.5	11.25	11
销量（只）	876	888	908	936	972

（1）你认为小明选择数据拟合的函数最可能是哪一种？（　　　　）

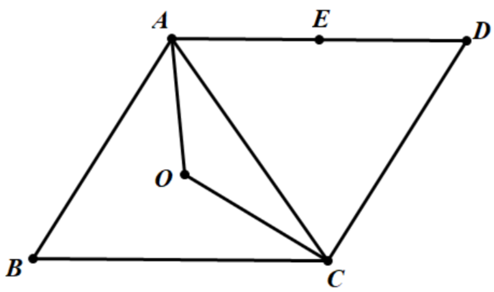
（A）一次函数　　　　（B）二次函数　　　　（C）反比例函数　　　　（D）指数函数

（E）三角函数　　　　（F）对数函数

按照小明拟合出的数据，请计算上市开始第几天的毛利润最大以帮助批发市场确定最终定价；

（2）请分析小明在建立关于雪糕最优定价的数学模型过程中的优缺点并提出改进措施.

2．某地新冠肺炎爆发之时计划在某小区内划定一片平行四边形用地$ABCD$（如图所示）作为核酸检测亭，其中$\triangle ABC$的外接圆圆心O为核酸采样点，



（1）为了尽可能地避免感染风险，现规定居民统一从点A处进入，沿AO进行排队采样，随后沿$OC-CD-DE$方向离开（点E为AD中点），求在满足$B=60°$且$OA=6$米的情况下，每位居民沿$AO-OC-CD-DE$路线至多要走多少路？当每位居民沿$AO-OC-CD-DE$路线走的路最多时，平行四边形用地$ABCD$的面积是多少？（路程计算$AO+OC+CD+DE$的长，路程精确到0.1米，面积精确到0.01平方米）

（2）某研究院为探究某新冠药的药效邀请了 200 名病患进行实验. 将这 200 名病患随机分为 2 组每组 100 人，其中一组服用该药物，另一组未服用. 定义实验开始后 3 天内体内病毒含量降低比重为变量X，当X不小于 0.6 时即认为病患情况好转，否则认为病患情况未好转. 实验结果表明未服用药物组的病患体内病毒含量降低比重X近似服从正态分布$N(0.5, 0.01)$.（精确到人）

附：若$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则$P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)\approx 0.68$，$P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)\approx 0.95$.

$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中$n=a+b+c+d$，$P(\chi^2\geq 3.841)\approx 0.05$.

当病患情况好转的人数占总病患人数的12.5%时，运用所学数学知识建立数学模型判断是否

有 95%的把握认为病患情况是否好转和是否服用药物有关.

3．广告从曝光到用户消费的全过程可由下图表示（CPM、CPC、CPA 是广告计费方式）：

广告曝光 CPM → 用户点击 CPC → 用户注册 CPA → 用户消费

(1) 某广告主（即广告的发布者）针对某品牌广告推广的计费方式对 100 位广告投放者进行了问卷调查，得到这 100 位广告投放者对 CPM 与 CPA 的态度如下：

	支持 CPM	反对 CPM	总计
支持 CPA	35	25	60
反对 CPA	30	10	40
总计	65	35	100

判断是否有 95%的把握认为在这 100 位广告投放者中支持 CPM 与支持 CPA 有关？

参考公式：$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中$n=a+b+c+d$，$P(\chi^2\geq 3.841)\approx 0.05$.

(2) 设事件A指用户受到广告曝光，事件B指用户点击广告，事件C指用户点击广告后在落地页注册，记点击率$\alpha=P(B|A)$，转化率$\beta=P(C|B)$. 用含α、β的代数式表示$P(C|A)$；

(3) CPM：按照广告每展现给一千个用户计费，CPM=$\frac{\text{广告投放者支付的总费用}}{\text{总曝光量}}\times 1000$；

CPC：按照广告每被用户点击一次计费，CPC=$\frac{\text{广告投放者支付的总费用}}{\text{总点击次数}}$，

CPA：按照广告每引导用户在落地页注册一次计费，CPA=$\frac{\text{广告投放者支付的总费用}}{\text{总注册次数}}$；

eCPM：广告主每展示 1000 次广告所获得的期望收入.

完成以下 2 个任务：

①分别推导 eCPM 与 CPM、CPC、CPA 的关系（关系式中可含点击率α、转化率β）；

②某广告主收到了三个广告的报价（如下表）：

	广告一	广告二	广告三
推广方式	CPM	CPC	CPA
出价	CPM=8 元	CPC=0.9 元	CPA=12 元

判断当$\alpha=0.01$，$\beta=0.07$时广告主会优先展示哪一条广告.

4. 为确定群体中的个体是否感染新冠病毒，通常可采用单管或混管的方式进行核酸检测.单管，即一人一管，每人使用一个采样管单独采样，检测结果可直接说明被检测者是否感染新冠病毒. 混管，是指将多个人的采集拭子的混合样本放入到一个采样管中，若样本呈现阴性，则所有被检测者均未感染病毒；若样本呈现阳性，则需对样本中的所有被检测者重采单管，从而确定每个个体是否感染新冠病毒.A 城市总人口约为 3000 万，现需对城市内所有人进行核酸检测以确定哪些人感染了新冠病毒. 已知采样单价与检测方式之间满足下表关系：

检测方式	单管	混管（5 人一管）	混管（10 人一管）	混管（20 人一管）

采样单价（元/人）	16	5.5	4	3.5

(1) 设检测方式为n人一管，采样单价为y元/人，已知一个采样管的采样总价与单个采样管中被检测者的数量的线性相关性强，据此建立y关于n的回归方程，并估计 A 城市采用 50 人一管的采样方式时的采样单价（数据均精确到小数点后一位）；

(2) 完成以下数学建模活动中的“建立模型”部分（模型改进与检验部分略去）：

提出问题	A 城市此次核酸检测最少需要使用多少采样管？
建立模型	假设 1：A 城市每个人感染新冠病毒的概率均为 0.001，且人与人之间的感染概率互不影响； 假设 2：假设单个采样管中的被检测者相同，为不超过 200 的正整数. 假设 3：________________________________
	模型求解：……