一道原创导数、抽象函数压轴题详细解析

一、创作过程：

本题以$f[g(x)]=g[f(x)]$作为条件的起始点，为了得到一些有价值的结论完成命题，添加了$y=f(x)$严格递增、$h(x)=f(x)-g(x)$严格递增、$y=f(x)$的图像与$y=g(x)$的图像有公共点三个条件从而更好地刻画出函数的几何图像，结合必修一 5.3 函数的应用中的第 2 小节-----用函数观点求解方程与不等式和第 3 小节中的零点存在性定理用严格的代数语言完成两图像公共点在直线$y=x$上的证明，得到了初始的第三小题. 随后，用最大值符号包装条件，并设置了论证难度较低的证明公共点唯一的部分组成最终的第三小题从而使第三小题具有更为良好的区分度. 前两小题设置的主要目的是帮助考生理解最大值符号从而为第三小题起始做准备的同时考察具体函数. 为了加强与第三小题的联系，将两图像有公共点的条件和$f'(x)>max\{0,\ g'(x)\}$作为大题干的新定义“相关函数”条件. 第一小题不设置参数，考察对于最大值符号分段定义的基本理解，并调整系数通过试题提醒考生二次函数的最值可取；第二小题在第一小题的基础上增加了参数，考察对m正负的讨论，同时$f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$作为一个有特殊渐进线的函数引导考生同时思考代数意义和几何意义，既考察了导数的知识点，又考察了分式型函数的值域、图像的特征. 第二小题解法多样，代数和几何方法均可得到最终结果. 总体来看，本题的三小题层层递进，第一小题起点低，帮助考生理解新定义；第二小题考察不等式恒成立和方程有解问题；第三小题分为两部分由浅入深地考察抽象函数证明.

二、试题呈现：

21.（本题满分 18 分，第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 6 分，第 3 小题满分 8 分）

定义：$max\{a,\ b\}=\begin{cases} a & a\ge b \\ b & a<b \end{cases}$. 已知$y=f(x)(x\in R)$与$y=g(x)(x\in R)$的导函数分别为$y=f'(x)$和$y=g'(x)$，当且仅当对任意$x\in R$都满足$f'(x)>max\{0,\ g'(x)\}$且$y=f(x)$的图像与$y=g(x)$的图像有公共点时，称函数$y=f(x)$是$y=g(x)$的“相关函数”.

（1）判断函数$f(x)=x^3+3x^2+5x$是否是$g(x)=2x$的“相关函数”，并说明理由；

（2）设$m\in R$，当函数$f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$是$g(x)=mx$的“相关函数”时，求m的取值范围；

（3）若函数$y=f(x)$是$y=g(x)$的“相关函数”，且$f[g(x)]=g[f(x)]$对任意$x\in R$成立. 已知$y=f(x)$与$y=g(x)$的图像均为连续不断的曲线，求证：函数$y=f(x)$与$y=g(x)$的图像的公共点唯一，且该公共点在直线$y=x$上.

三、考点简析：

1. 大题干：新定义理解、图像有交点与方程有解的转化；

2. 第一小题：基本初等函数导数求解、二次函数值域；

3. 第二小题：基本初等函数导数求解、函数值域、分类讨论、不等式恒成立、方程有解、导数应用、分式型函数图像；

4. 第三小题：函数单调性与导数正负的关系、函数构造、用函数观点求解方程与不等式、零点存在性定理.

四、详细解答：

21. [解]（1） $g'(x)=2>0$恒成立，故$max\{0,\ g'(x)\}=2$. ……1 分

$f'(x)=3x^2+6x+5=3(x+1)^2+2\geq 2$，当$x=-1$时，$f'(x)=2$，不满足$f'(x)>max\{0,\ g'(x)\}$的条件；$y=f(x)$的图像与$y=g(x)$的图像有公共点$(0,\ 0)$. ……3 分

综上，函数$f(x)=x^3+3x^2+5x$不是$g(x)=2x$的“相关函数”. ……4 分

（2） $g'(x)=m$，$f'(x)=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$. ……5 分

情况①：当$m>0$时，$max\{0,\ g'(x)\}=m$，$f'(x)=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}>m$须对任意实数$x$均成立，

而$f'(x)=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{1}{e^x+\frac{1}{e^x}+2}$，由$e^x>0$，$e^x+\frac{1}{e^x}\geq 2$，$f'(x)=\frac{1}{e^x+\frac{1}{e^x}+2}\in\left(0,\ \frac{1}{4}\right]$. ……6 分

而m不大于$f'(x)$的最小值，故$m\leq 0$，这与$m>0$矛盾，故情况①不成立； ……7 分

情况②：当$m\leq 0$时，$max\{0,\ g'(x)\}=0$，此时$f'(x)=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}>0$显然成立，故原题转为寻找使关于$x$的方程$\frac{e^x}{e^x+1}=mx$有解的$m$，

方法一：由$x=0$显然不是方程的解，可转为$\frac{e^x}{x(e^x+1)}=m$有解. 设$F(x)=\frac{e^x}{x(e^x+1)}$，则

$F'(x)=\frac{xe^x(e^x+1)-e^x(e^x+1+xe^x)}{x^2(e^x+1)^2}=\frac{e^x}{x^2(e^x+1)^2}(x-e^x-1)$. ……8 分

设$G(x)=x-e^x-1$，$G'(x)=1-e^x$，令$G'(x)=0$得$x=0$.

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
$G'(x)$	$+$	0	$-$
$G(x)$	↗	极大值$G(0)$	↘

则$G(x)\leq G(0)=-2$，即$x-e^x-1<0$.

从而$F'(x)<0$，即$y=F(x)$在$(-\infty,\ 0)$和$(0,+\infty)$上严格单调递减， ……9 分

$F(x)=\frac{1}{x}\times\frac{1}{1+\frac{1}{e^x}}$,当$x$趋近于$-\infty$时,$F(x)$趋近于0且为负值;$x$趋近于0且为负值时,$F(x)$趋近于负无穷;当$x$趋近于0且为正值时$F(x)$趋近于正无穷,当$x$趋近于正无穷时$F(x)$趋近于0且为正值,故$m=F(x)\in(-\infty,\ 0)\cup(0,+\infty)$. 结合$m\le 0$得$m\in(-\infty,\ 0)$.

综合情况①②,实数m的取值范围为$(-\infty,\ 0)$. ……10 分

方法二(方法一的简化版):由$x=0$显然不是方程的解,可转为$\frac{e^x}{x(e^x+1)}=m$有解. 设$F(x)=\frac{e^x}{x(e^x+1)}$,则$F'(x)=\frac{xe^x(e^x+1)-e^x(e^x+1+xe^x)}{x^2(e^x+1)^2}=\frac{e^x}{x^2(e^x+1)^2}(x-e^x-1)$. ……8 分

由$m=\frac{e^x}{x(e^x+1)}\le 0$,显然$x<0$,从而$x-e^x-1<0$;$F'(x)<0$,即$F(x)=\frac{e^x}{x(e^x+1)}$在$(-\infty,\ 0)$上严格单调递减, ……9 分

$F(x)=\frac{1}{x}\times\frac{1}{1+\frac{1}{e^x}}$,当$x$趋近于$-\infty$时,$F(x)$趋近于0且为负值;$x$趋近于0且为负值时,$F(x)$趋近于负无穷. 故$m=F(x)\in(-\infty,\ 0)$,结合$m\le 0$得$m\in(-\infty,\ 0)$.

综合情况①②,实数m的取值范围为$(-\infty,\ 0)$. ……10 分

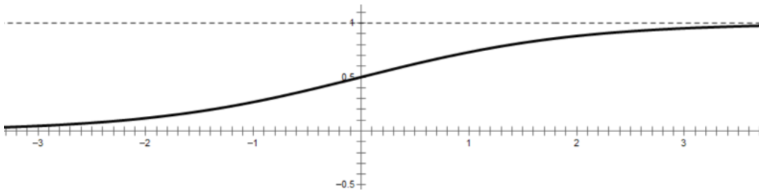
方法三:设$F(x)=\frac{e^x}{e^x+1}-mx$,当$m=0$时,方程$F(x)=0$显然无解;

当$m\neq 0$时,$F\left(\frac{1}{m}\right)=\frac{e^{\frac{1}{m}}}{e^{\frac{1}{m}}+1}-1=-\frac{1}{e^{\frac{1}{m}}+1}<0$,而$F\left(-\frac{1}{m}\right)=\frac{e^{-\frac{1}{m}}}{e^{-\frac{1}{m}}+1}+1>0$,$y=F(x)$的图像为连续不断的曲线,由零点存在性定理$F(x)=0$在$\left(-\frac{1}{m},\ \frac{1}{m}\right)$必有解. ……9 分

故$m\in(-\infty,\ 0)\cup(0,+\infty)$,结合$m\le 0$,$m\in(-\infty,\ 0)$.

综合情况①②,实数m的取值范围为$(-\infty,\ 0)$. ……10 分

方法四:原题即$F(x)=\frac{e^x}{e^x+1}=1-\frac{1}{e^x+1}$与$G(x)=mx$有交点. 作出$F(x)=1-\frac{1}{e^x+1}$图像:

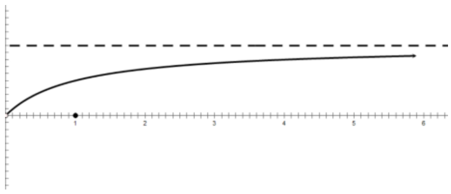


渐近线:$y=0$、$y=1$.

……8 分

而$G(x)=mx$为过原点且斜率存在的直线,为使两图像有交点,$m\in(-\infty,\ 0)\cup(0,+\infty)$. 结合$m\le 0$,$m\in(-\infty,\ 0)$. 综合情况①②,实数$m$的取值范围为$(-\infty,\ 0)$. ……10 分

方法五:设$e^x=t>0$,则转化为$F(t)=1-\frac{1}{t+1}$与$G(t)=m\ln t$有交点. 作$y=F(t)$:



渐近线:$y=1$

……8 分

显然,当$m=0$时无交点,当$m\in(-\infty,\ 0)\cup(0,+\infty)$时$G(t)=m\ln t$均与$y=F(t)$有交点,由$m\le 0$,$m\in(-\infty,\ 0)$. 综合情况①②,实数$m$的取值范围为$(-\infty,\ 0)$. ……10 分

(3) $max\{a, b\}$可理解为取a、b中的较大值，对任意实数x，$f'(x)$大于0与$g'(x)$之间的较大者，即$f'(x) > 0$且$f'(x) > g'(x)$恒成立，$y = f(x)$严格递增；……11 分

设$h(x) = f(x) - g(x)$，则$h'(x) = f'(x) - g'(x) > 0$，$y = h(x)$严格递增；……12 分

$y = f(x)$的图像与$y = g(x)$的图像有公共点即存在x使得$f(x) = g(x)$即$h(x) = 0$，结合$y = h(x)$严格递增可得$h(x) = 0$的解唯一，不妨设唯一解为x_0，则$h(x_0) = 0$即$f(x_0) = g(x_0)$，则$y = f(x)$与$y = g(x)$的图像的唯一公共点为$\left(x_0, f(x_0)\right)$. ……13 分

情况①：当$x > x_0$时，$h(x) > h(x_0) = 0$即$f(x) > g(x)$，由$y = f(x)$严格递增得$f[f(x)] > f[g(x)] = g[f(x)]$（即$h[f(x)] > 0$），由$f(x) > g(x)$的解集为$(x_0, +\infty)$可得$f(x) > x_0$；

情况②：当$x < x_0$时，类似情况①得$f(x) < g(x_0)$，$f[f(x)] < f[g(x)] = g[f(x)]$，（即$h[f(x)] < 0$)则$f(x) < x_0$. ……16 分

构造$T(x) = f(x) - x_0$，$y = T(x)$可视作$y = f(x)$沿y轴平移后的结果，由$y = f(x)$的图像为连续不断的曲线可得$y = T(x)$的图像为连续不断的曲线.

任取满足$x_1 < x_0 < x_2$的x_1、x_2，则$T(x_1) = f(x_1) - x_0 < 0$，$T(x_2) = f(x_2) - x_0 > 0$，$T(x_1)\,T(x_2) < 0$，由零点存在性定理$y = T(x)$在区间$(x_1, x_2)$上有零点. ……17 分

当$x \in (x_1, x_0)$时$T(x) < 0$，当$x \in (x_0, x_2)$时$T(x) > 0$，故只能$T(x_0) = 0$即$f(x_0) = x_0$，故$y = f(x)$与$y = g(x)$的图像的唯一公共点为$\left(x_0, f(x_0)\right)$等价于(x_0, x_0)在直线$y = x$上.

……18 分

五、评分细则：

1. 第（1）小题结论分不具有 1 分，过程分 3 分共 3 点，正确过程计算$max\{0, g'(x)\}$的值、$f'(x)$的导函数求解、写出当$x = -1$时不满足$f'(x) > max\{0, g'(x)\}$（反例唯一）各 1 分.

按上述评分标准将考生第（1）小题答题情况分为三个等第，并按调整标准进行最终评分：

答题情况	调整标准
A（4 分）	正确写出$y = f(x)$的图像与$y = g(x)$的图像有公共点(0, 0)或不指出不调整，错写扣 1 分
B（3 分）	正确指出$y = f(x)$的图像与$y = g(x)$的图像有公共点(0, 0)或不指出或错写均不调整得分
C（0-2 分）	正确写出$y = f(x)$的图像与$y = g(x)$的图像有公共点(0, 0)加 1 分，不指出或错写不调整

2. 第（2）小题正确求出$f'(x)$的表达式 1 分，求出$f'(x)$的范围 1 分，分类讨论$m > 0$的情况由$m \le 0$推得矛盾或直接由$f'(x) > m$恒成立推得只能$m \le 0$得 1 分，$m \le 0$时的情况 3 分，标答中提供的 5 种方法任写一种即可，其中方法四、五（几何方法）必须突出图像的渐近线并将题设的几何意义用文字描述清楚才能得 3 分，否则酌情扣分；

3. 第（3）小题评分时共分为 3 个部分：

（1）第 1 部分为两图像公共点唯一的证明，满分 3 分：指出$y=f(x)$严格递增 1 分，构造函数$h(x)=f(x)-g(x)$并说明$y=h(x)$严格递增 1 分，结合$h(x)=0$有解证明出$y=f(x)$与$y=g(x)$的公共点唯一 1 分；

（2）第 2 部分为情况①②的证明，满分 3 分，按照以下评分标准划分等第并赋分：

分值	答题表现
A（3 分）	完整写出一种情况的论证过程，并同理正确推出另一种情况的结论
B（2 分）	仅完整写出一种情况的论证过程
C（1 分）	仅写出一种情况的部分关键论证过程（如出现$f[f(x)]>g[f(x)]$或$h[f(x)]>0$等）或直接正确写出两种情况的结论但缺少论证过程
D（0 分）	没有作答或作答的内容对本部分证明无实质性意义

（3）第 3 部分为$f(x_0)=x_0$的证明，满分 2 分：若在第 2 部分的基础上直接声称$f(x)=x_0$的唯一解为x_0或仅通过图像说明的第 3 部分或错误使用单调性说明的不给分；不说明$y=T(x)$的图像连续不断的不扣分；取x_0左右两侧横坐标说明区间上存在零点的论述 1 分，若使用极限符号而未取具体端点的不给分；排除除x_0外其他横坐标使得$f(x)=x_0$的过程 1 分（使用极限符号的此分可酌情给）.

六、拓展思考：

本题第三小题的解答易错误让人认为对$f[g(x)]=g[f(x)]$的条件使用不够充分（仅利用了一次不等式缩放），认为满足条件的函数个数有限从而试图加强第三小题的命题，但事实上下面几种情况的函数均符合所有条件（$f(x)=g(x)$不满足$f'(x)>g'(x)$恒成立，舍去）：

1. $y=f(x)$、$y=g(x)$均为正比例函数，只需$f(x)=ax(a>b,a>0)$，$g(x)=bx(b\in R)$此时唯一公共点为原点$(0,\ 0)$；

2. $y=f(x)$、$y=g(x)$中有一个为$y=x$：

（1）$g(x)=x$，$f'(x)>1$且$y=f(x)$与$y=g(x)$有公共点即可；

（2）$f(x)=x$，$g'(x)<1$且$y=f(x)$与$y=g(x)$有公共点即可；

3. $g(x)=C(C\in R)$、$y=f(x)$严格增且过$(C,\ C)$，此时唯一公共点为$(C,\ C)$，可为直线$y=x$上的任意点（如$f(x)=e^x+mx$，$m>0$，设$f(x_0)=0$，则$g(x)=x_0$时公共点为$(x_0,\ x_0)$）.