高中数学原创题精选

考生注意：

1. 本卷满分 150 分，附加分 210 分，试卷共 13 页，答题时间不限；

2. 本卷第 1-15 题每题分为（A）（B）（C）三组，A 组试题偏重思维，C 组试题偏重计算，B 组试题风格介于 A 组与 C 组之间；第 17-21 题每题分为（A）（B）（C）（D）四组，A 组难度最大，A、B、C、D 组难度整体呈递减趋势；

3. 填空 1-6 题每题（A）（B）（C）组三道中有一道答案正确即可得 4 分，两道答案正确另得附加分 3 分，三道答案均正确另得附加分 5 分；

4. 填空 7-12 题每题（A）（B）（C）组中三道中有一道答案正确即可得 5 分，两道答案正确另得附加分 4 分；三道答案均正确另得附加分 7 分；

5. 选择 13-15 题每题（A）（B）（C）组中只要作答试题有错误该题即不得分，其中 13、14 题每题（A）（B）（C）组三道中仅作答一道且正确得 4 分，作答两道且均正确另得附加分 3 分；作答三道且均正确另得附加分 5 分；15 题每题（A）（B）（C）组三道中仅作答一道且正确得 5 分，作答两道且均正确另得附加分 4 分；作答三道且均正确另得附加分 7 分；

6. 选择 16 题作答错误或不作答不得分，作答正确得 5 分；在试题括号后的横线上完全正确地写出所有正确说法序号的另得附加分 7 分；判断错一个说法得附加分 5 分；判断错两个说法得附加分 2 分；判断错三个说法及以上的不得附加分；

7. 解答 17-21 题（A）组得分计入原始得分，（B）（C）（D）组得分计入附加分，若某题（B）（C）（D）组得分超过了该题（A）组得分的 1.5 倍，则该题附加分按该题（A）组得分的 1.5 倍计算.

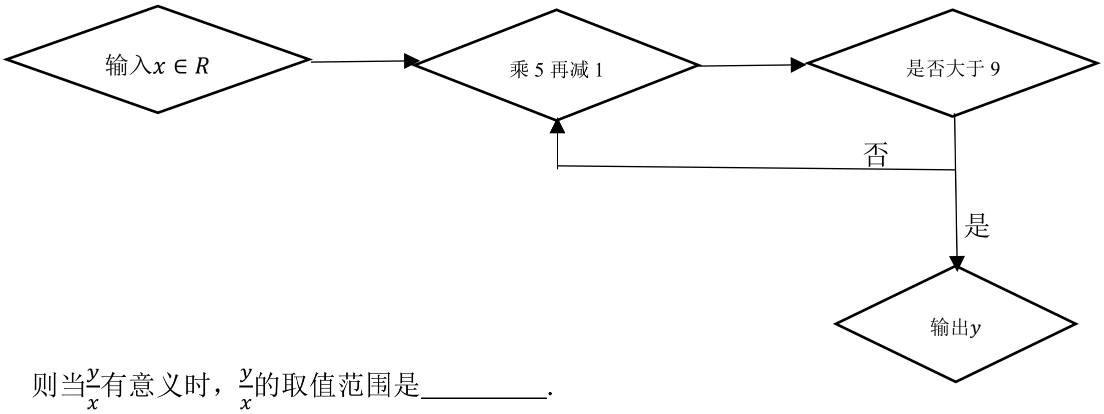
一、填空题：（本大题共有 12 题，满分 54 分，附加分 72 分）

1.（A组）在球面上随机选择可作为同一四面体顶点的四个点，以它们为顶点的四面体包含球心的概率是__________.

（B组）已知函数$f(x)=x^5$，那么$\lim\limits_{h\to0}\frac{f(1+h^2)-f(1-h)}{h}$的值为________.

（C组）若$(2x-1)^n(n\geq1$且$n\in N)$的展开式的第九项为系数最大项，则n的值为_____.

2.（A组）实数y与x满足以下的转化关系：



则当$\frac{y}{x}$有意义时，$\frac{y}{x}$的取值范围是_________.

（B组）某次高难度的考试满分100分，同学们的得分普遍较低（得分均为非负数且得分不一定为整数），老师为提高同学得分想出了一个“处理”办法：将原得分开根号乘以10. 设某一分数在经过“处理”后提高的分数值与任意一个得分经过“处理”后最多能比原得分高的分数值的比值与任意一个得分经过“处理”后最多能比原得分高的分数值的比值为“学生受益指数”，“教师满意程度值”为“学生受益指数”与该生原得分的乘积，则“教师满意程度值”的最大值为_______.

（C组）集合$A=\left\{y\middle|y=\frac{4\pi\sin^4 x+4\pi\sin^2 x}{2\sin^2 x+1},\ x\in R\right\}$,

集合$B=\left\{x\middle|y=\log_{\sin x-\sqrt{3}\cos x}(\sin x-\tan x)\right\}$，则$A\cap B=$_____________.

3.（A组）满足各位数字和的平均数恰好与十位数字相同的四位数（首位不为0）的总个数为_________.

（B组）定义：若一条线段上包括端点的所有点均在某圆内，则称这条线段在该圆内部. i为虚数单位，r为正实数，复数$z_1=1+2i$在复平面上对应的点为A，$z_2=z_1(\overline{z_1}-i)$在复平面上对应的点为$B$，若在$x$轴上存在点$P$使得线段$AB$在以点$P$为圆心，$r$为半径的圆内，那么实数$r$的取值范围是_____________.

（C组）如果函数$f(x)=\frac{m}{|x^2+mx+2m|}$ 在$[-3,-1)$严格单调递减，那么实数m的取值范围是__________.

4.（A组）平面上有A、B、C三点，现有一只青蛙从A点开始连续跳跃8次，已知该青蛙每次跳跃会等可能地跳到A、B、C三点中除跳跃起点外的两点，那么青蛙跳跃8次后恰好回到A点的概率为________.

（B组）在学习三角函数的过程中，我们了解了$y=sinx(x\in R)$的图像，似乎$sinx=2$显然是无解的，但是否还存在着另一种可能：我们看到的$y=sinx$的图像只不过是高维空间的一个截面....事实上，$sinx=2$确实是有复数解的，下面我们就来一起操作一下$sinx=2$的求解：首先了解一下欧拉公式：$e^{ix}=\cos x+i\sin x$（i为虚数单位），该公式建立了三角函数与指数函数的关系，被誉为“数学中的天桥”，接下来我们正式开始求解：由$e^{ix}=\cos x+i\sin x$，用$-x$替换x，得$e^{-ix}=\cos x-i\sin x$，两式做差，

$2i\sin x=e^{ix}-e^{-ix}$，代入$sinx=2$并设$e^{ix}=t$，则$t-\frac{1}{t}-4i=0$，即$t^2-4it-1=0$. 由求根公式$e^{ix}=t=\left(2\pm\sqrt{3}\right)i$，两边同时取对数，则$ix=\ln\left(2\pm\sqrt{3}\right)i=\ln\left(2\pm\sqrt{3}\right)+\ln i$（记作①式），在欧拉公式的等式两边同时取对数，得$ix=\ln(\cos x+i\sin x)$，令

$\cos x=0$且$\sin x=1$，则$\ln i=ix$，由$\cos x=0$、$\sin x=1$得$x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$,

则$\ln i=\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)i$，代回①式得$ix=\ln\left(2\pm\sqrt{3}\right)+\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)i$，$x=\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\ln\left(2\pm\sqrt{3}\right)}{i}=\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)-i\ln\left(2\pm\sqrt{3}\right)$.

仿照上述过程，$\cos 2x+3=0(x\in C)$的解为____________________.

（C组）定义在R上的奇函数$y=f(x)$在$x>0$时满足$f(x)=f'(x)+1$，且$f(x)=f(1)$恰好有两个不相同的解，那么$f(1)$的取值范围是____________.

5.（A组）圆锥SAB中，S为顶点，O为底面圆心，底面半径为1，点E为母线SA上一点，点F为底面圆周上一点，若$SF \perp OE$，且$|EF| = 1$，则$|AE|$的取值范围是____________.

（B组）圆P的方程为$x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$，点A、B、C为圆P上三个不同的动点，则$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB}$的取值范围是__________.

（C组）已知全集$U = R$，集合$A = \{x|ax^2 + ax + 2a + 1 \leq x\}$，$B = \{y||4y - 5| \leq 3\}$，若“$x \in B$”是“$x \in \bar{A}$”的充分非必要条件，那么实数$a$的取值范围为____________.

6.（A组）有穷数列$\{a_n\}$的各项均为正整数，且$\frac{a_j}{a_i} \in (j - i, j)$对于任意的$1 \leq i < j$都成立，则数列$\{a_n\}$项数的最大值为__________.

（B组）现有2个老师与6个学生去中共一大会址、宋庆龄故居、淞沪抗战纪念馆和龙华烈士陵园4个红色基地参观，8人平均分为4组每组2人，每组随机去一个红色基地，设A事件对应“2个老师去不同的红色基地”，B事件对应“去中共一大会址的不全是老师”，那么$P(A|B)$的值为__________.

（C组）已知函数$f(C) = \sqrt{1 + \sin C} - \sqrt{1 - \cos C}$ (其中C为$\triangle ABC$的一个内角)和定义在R上的函数$g(x) = A\sin(\omega x + \varphi)\left(A > 0,\ w > 0,\ \varphi \in (-\pi, \pi)\right)$，若对任意的$C \in (0, \pi)$，都有$g(C) = f(C)$，现将函数$y = g(x)$先向右平移$\frac{\pi}{4}$个单位，再将所有点的横坐标翻两番得到函数$y = h(x)(x \in R)$，那么下列关于函数$y = h(x)$的说法中，正确的有__________.（将所有正确命题前的序号填在横线上）

①振幅为$\sqrt{2} - 1$　　②相位为$\frac{3}{4}\pi$　　③圆频率为$\frac{1}{8}$　　④周期为π

⑤若$y = f(C)$的解析式改为$f(C) = \sqrt{1 + \sin C} + \sqrt{1 - \cos C}$，$y = g(x)$的严格递减区间为$\left[2k\pi + \frac{3}{4}\pi,\ 2k\pi + \frac{7}{4}\pi\right](k \in Z)$

7.（A组）设实数$k > 0$，无穷等差数列$\{a_n\}$的公差$d = \frac{\pi}{2k}$，$a_1 = 0$. 定义无穷集合列$\{A_n\}$ $(n \in N$且$n \geq 1)$，$A_n = (a_n, a_{n+1})$. 函数$y = f(x)$的定义域$D = A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots \cup A_n$，且满足$f(x) = \begin{cases} \sin kx, & x \in A_1 \\ f'(x - d), & x \in A_2 \cup \ldots\ldots \cup A_n \end{cases}$，若$y = f(x)$图像上任意一点都满足$y = f(x)$在该点处的切线与$y = f(x)$的图像有无穷个公共点，则$k$的取值范围是_________.

（B组）集合$A = \left\{x \middle| 使关于x、y、z的方程组\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x^2 + y^2 + z^2 = t \end{cases}有解的所有实数x\right\}$，当集合$A$中恰有三个整数时，实数$t$的取值范围是_____________.

（C组）点E、点F分别在正四面体$ABCD$的棱AB、棱CD上且满足$\frac{AE}{AB} = \frac{CF}{CD} = k(k > 0)$，设直线$CE$与直线$AF$所成角为$\alpha$，设$\alpha = f(k)$，则函数$y = f(k)$的解析式为____________.

8.（A组）已知圆A与x轴切于点$(1, 0)$，直线l在两坐标轴截距的绝对值相等. 当直线l截圆A所得弦长为1且将圆A分成面积比为1:3的两部分时，称直线l与圆A为一组“线圆对”. 则不同的“线圆对”的组数为___________.

（B组）将立体几何和平面几何类比是一种非常重要的思想．若$n(n\geq 1$且$n\in N)$个平面最多能把空间分为a_n个部分，那么数列$\{a_n\}$的通项公式为________________.

（C组）在平行四边形$ABCD$中，$AB=3$，$BC=4$，$\angle ABC=60°$，点M为边BC中点，点E为边AB上一动点，联结EM，作$EM\perp MF$交边AD于点F，联结EF，设$\overrightarrow{EF}=\mu\overrightarrow{BA}+\lambda\overrightarrow{BC}$（$\mu$、$\lambda\in R$），则$6\mu+5\lambda$的取值范围是____________.

9.（A组）若单位向量$\vec{e}$和三个两两不共线的非零向量$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$同时满足下列五个条件：

①$\left|\left|\vec{a}\right|\vec{e}-\vec{a}\right|=\left|\vec{a}\right|$　　②$\vec{e}$与$\vec{c}$共线　　③$\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$

④$\vec{b}\cdot\vec{c}>0$　　⑤$\left|\vec{b}\cdot\vec{e}\right|=1$

那么$\frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{\left|\vec{c}\right|}$的取值范围是________________.

（B组）已知数列$\{a_n\}$是无穷等比数列，数列$\{b_n\}$是公差$d\neq 0$的无穷等差数列，满足$a_7=a_6+2a_5$，$b_7=b_6+2b_5$，且$a_3=b_3$，记S_p为数列$\{a_n\}$的前p项和，p为正整数，若不存在满足上述条件的数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$能使得$\frac{S_p}{b_p}$的值为整数，那么p的值为________.

（C组）设$k\in R$，关于x的一元二次方程$x^2+kx+2k+1=0$对应的两根z_1、z_2在复平面内对应的点为A、B，其中点A在第一象限，点O为坐标原点，过点B作$BP\perp OA$交x轴于P点，若$OA=\left(2+\sqrt{3}\right)AP$，那么实数$k$的值为___________.

10.（A组）若数列$\{a_n\}(n\geq 1$且$n\in N)$满足$S_n=a_na_{n+1}$，其中S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，记T_n为数列$\{a_n\}$的前n项积，若数列$\{T_n\}$存在最小项，那么a_3的取值范围是__________.

（B组）定义：若数列$\{a_n\}$中的某一项是$\{a_n\}$的最大项或最小项，则称该项为数列$\{a_n\}$的“极限项”．现已知$a\in R$，无穷数列$\{a_n\}$的前n项和S_n满足$S_n=\frac{a}{n}+3n-1$，若数列$\{a_n\}$的“极限项”中恰有两项的值为正数，那么实数a的取值范围是___________.

（C组）设$w\in R$，若函数$f(x)=\cos^2(wx-\frac{\pi}{4})+\sin^2 wx-\frac{3}{2}$在$[w,7w)$上恰有3个零点，$w$的取值范围是_______________.

11.（A组）已知定义在正整数集上的严格单调递增函数$y=f(x)$，记$y=f(x)$的值域为A，满足$A\cap D=A$，且对于任意$x\in D$，都满足$f[f(x)]=3x$．则$f(2023)$的值为________.

（B组）已知$\triangle ABC$的重心为点G，联结GB、GC，当$GB=3$，$GC=1$时，若边AC、BC上分别存在两点M、N满足$\frac{AM}{MC}=\frac{CN}{NB}$，其中$M$、$N$不与$A$、$B$、$C$重合，联结$MN$，则$MN$的取值范围为________.

（C组）设i为虚数单位，n、m为正整数，k为实常数，$\left(\sqrt{3}-i\right)^n$在复平面中对应向量$\vec{a}$，$\left(\frac{7+3i}{2+5i}\right)^m$在复平面中对应向量$\vec{b}$，若$\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=0$，$\vec{a}$在$\vec{b}$上的投影$\vec{c}$为非零向量且$\vec{c}$与$\vec{b}$方向相反，且对于任意的$k\geq m$都满足$\left|\vec{a}\right|\leq 2024k$，那么$\log_8\left|\vec{b}\right|$的最大值为_________.

12.（A组）定义：各项值均为正数的数列叫做正项数列. 各项均不相等的无穷正项数列$\{a_n\}$满足对于任意的$n \geq 3$，都存在$r < n$使$a_n = a_r a_{r+1}$成立，若数列$\{a_n\}$中最大项的值为2，且$a_1 \neq 2$，那么a_1的最大值为____________.

（B组）若函数$f(x) = ax^4 + x^3 + (a-4)x^2 + 2x + 4a$在区间$(0,4)$上恰好有两个零点，那么实数$a$的取值范围为______________.

（C组）NBA季后赛采用四胜制，即先取得4场胜利的队伍获胜，一旦有队伍获胜该轮系列赛即结束，比赛结果无平局. 已知某NBA球队主场胜率为0.8，客场胜率为0.25，该队与其他球队进行一轮NBA系列赛，采用"主主客客主客主"的方式，即该队第1-2场在主场，第3-4场在客场，若有必要第5场在主场，第6场在客场，第7场在主场，设该轮系列赛所需比赛数为随机变量X，则$D[X]$的值为_________.

二、选择题（本大题共有 4 题，满分 18 分，附加分 24 分）

13.（A组）某产品月产量x和单位成本y的数据如表所示，若对任意的$i \in [1,\ 10] \cap N$，都满足$(y_i - 2x_i)(y_i - 3x_i) = 0$，那么建立月产量$x$和单位成本$y$之间的回归方程$y = \hat{a}x + \hat{b}$，下列说法中错误的是（　　）.

月产量x（千件）	单位成本y（元/件）
x_1	y_1
x_2	y_2
…	…
x_{10}	y_{10}

A. 线性相关系数r一定大于 0

B. $\hat{a}$可能为 0

C. $\hat{b}$的值可能小于 0

D. 在x_1处的离差可能大于x_1

（B组）函数$y = f(x)$的定义域为R，且当$x > 0$时$f(x) = x^a + a(x-1)$，那么下列说法中错误的是（　　）.

A. 无论当$x \leq 0$时$f(x)$的解析式如何，1一定不是$f(x)$的一个零点

B. 若当$x \leq 0$时$f(x)$的解析式也为$f(x) = x^a + a(x-1)$，那么$f(x)$一定不是偶函数

C. 若$f(x)$是奇函数且其值域是定义域的真子集，那么$f(x)$的值域一定是$g(x) = \sin x$ $(x \in R)$值域的真子集

D. 若$f(x)$是奇函数，函数$h(x)$的解析式为$h(x) = m(m \in R)$，且无论m为何值$f(x)$与$h(x)$的图像都不可能恰好有一个交点，那么$a > 0$

（C组）已知某圆锥和某圆柱的母线长与体积均相等，设该圆锥、圆柱的表面积分别为S_1、S_2，则S_1与S_2的大小关系是（　　）.

A. $S_1 < S_2$　　B. $S_1 = S_2$　　C. $S_1 > S_2$　　D. 无法确定

14.（A组）给定双曲线Γ：$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1(a,b > 0)$和平面上一点$P(x_0,\ y_0)$，设$\Gamma$的两条渐进线的斜率分别为$k_1$、$k_2(k_1 < 0, k_2 > 0)$，则下列选项中错误的是（　　）.

A. 存在P使得过P可做两条与Γ的同一支相切的切线

B. 过P任作一条斜率在(k_1, k_2)之间的直线必与Γ的左右两支各有一个交点

C. 若P在渐近线上，过P且与Γ有且仅有一个公共点的直线共有 2 条

D. 若已知Γ两条渐进线的夹角解得的Γ的离心率唯一，则Γ为等轴双曲线

（B 组）幂指函数在飞行器制造、桥梁建设等方面有着广泛的应用。幂指函数的定义是指数和底数中都含有自变量的函数，其中$f(x)=x^x$是一种特殊的幂指函数。试回忆你学过的探究函数的一般方法，判断下列命题中正确的个数为（　　　　）

①$f(x)=x^x$无零点；　　　　②$f(x)$在$(0,+\infty)$上严格单调递增；

③$f(x)=x^x$经过第一、三象限，但定义域关于原点不对称，故$f(x)$为非奇非偶函数；

④$f(x)=x^x$有所有幂函数的共同特征：经过点（1，1）；

⑤$x^x-1=a^x$（$x>0$，$a>1$）有且只有一个实根.

A、1　　　　B、2　　　　C、3　　　　D、4

（C组）已知$f(x)=\lg\frac{x-1}{kx+x+1}$，其中$k$为非负实数. 给定$m$为实常数，若关于$x$的方程$\left||f(x)|-m\right|=n$恰好有四个不等实根，下列说法中错误的是（　　　）.

A. 当$m\le 0$时，不存在n满足条件

B. 当$\frac{\lg(k+1)}{2}\le m<\lg(k+1)$时，$n\in(0,\lg(k+1)-m)\cup(\lg(k+1)-m,m)$

C. 当$m>\lg(k+1)$时，$n\in(0,m-\lg(k+1))\cup(m-\lg(k+1),m)$

D. 当$0<m<\frac{\lg(k+1)}{2}$或$m=\lg(k+1)$时，$n\in(0,m)$

15.（A组）记无穷等比数列$\{a_n\}$的公比为q，前n项和为S_n，p为常数，a_i为$\{a_n\}$的某一项，若$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$存在，则（　　　）.

① 任取$p>0$，在区间$(p,+\infty)$中都存在无数个i满足对于每个给定的i都存在q使得等式$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=a_i$成立

② 任取$p\in(0,1)$，在区间$(-1,-p)$中都存在无数个q满足对每个给定的q存在唯一的i使等式$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=a_i$成立

A. ①②均正确　　B. ①正确②错误　　C. ①错误②正确　　D. ①②均错误

（B组）在空间中，对于下列两个命题判断**正确**的是（　　　）.

①与 3 条两两异面的直线a、b、c均相交的直线有且只有一条；

②与 4 条两两异面的直线a、b、c、d均相交的直线可能存在，也可能不存在.

A. 命题①为真命题，命题②为真命题　　B. 命题①为真命题，命题②为假命题

C. 命题①为假命题，命题②为真命题　　D. 命题①为假命题，命题②为假命题

（C组）定义：若数列$\{a_n\}(n\ge 1$且$n\in N)$每两项之间的差（a_2-a_1，$a_3-a_2,\ldots..$，a_n-a_{n-1}）恰好组成一个公差不为0的等差数列且项数不少于四项，则称该数列为“二阶差分数列”. 则下列说法中正确的个数为（　　　）

① “二阶差分数列”一定不是等差数列；

② 若“二阶差分数列”$\{a_n\}(n\ge 1$且$n\in N)$的前两项满足$a_n=p-2n(p\in R)$，且存在正整数k使得a_k为$\{a_n\}$的最大项，那么$\{a_n\}$每两项之间的差组成的等差数列的公差$d\le -2$；

③ “二阶差分数列”一定不是等比数列；

④ 若“二阶差分数列”$\{a_n\}(n\ge 1$且$n\in N)$满足$a_1=4$，$a_2=2$，记S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，若$\frac{S_7}{7}$为$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$的最小项，那么$S_5\in[5,\ 6]$.

A. 1　　　　B. 2　　　　C. 3　　　　D. 4

16. 下列说法中正确的个数为（　　　）.

① 函数$y=f(x)$是既奇又偶函数是$y=f(x)$既是单调增函数，又是单调减函数的既非充分又非必要条件；

② 若函数$y=f(x)$对于任意非零实数a、b均满足$f(a+b)=f\left(\frac{1}{a}\right)+f\left(\frac{1}{b}\right)-a-b$，则$y=f(x)$为奇函数；

③ 设实数$n>m$，奇函数$y=f(x)$的定义域为R，且满足$f(1)=-1$，若不等式$f(x)>0$的解集为$(m,\ n)$，则$f(mn+n-m)=0$；

④ 函数$y=f(x)(x\in R)$的图像关于y轴对称且周期$T=5$，集合$M=\{f(k^2),\ k\in Z\}$，设$|M|$表示集合M中元素的个数，则$|M|=2$；

⑤ 定义在R上的函数$y=f(x)$的导函数为$y=f'(x)$，若$f(ab)=f(a)f'(b)$对于任意实数a、b都成立，那么函数$y=f(x)$的解析式一定为$f(x)=0(D=R)$；

⑥ 数列$\{a_n\}(n\in Z$且$n\geq 1)$满足：$a_1=1$，$a_2=3$，且$2a_{n+2}=5a_{n+1}-2a_n$，设$b_n=\sin(a_n\pi)(n\in Z$且$n\geq 1)$，则有且仅有1个n使b_n取到最大值；

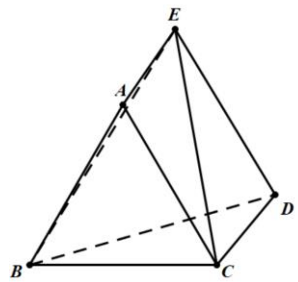
⑦ 设T_n表示数列$\{a_n\}$的前n项积. 各项均为正数的无穷数列$\{a_n\}$满足对于任意的$n\geq 2$，都存在$r\leq n$使$T_n=a_r+a_{r-1}$. 则“$a_n\in Z$恒成立”是“对于任意满足$i>j+1$且$s>t$的正整数i、j、s、t，$(a_i-a_j)(a_s-a_t)\geq 0$恒成立”的充分非必要条件.

A. 3　　　　B. 4　　　　C. 5　　　　D. 6

三、解答题（本大题共有 5 题，满分 78 分，附加分 114 分）

17. （A 组）（本题满分 14 分，第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 4 分，第 3 小题满分 4 分）

定义：$d(M$、$N)$表示点M与点N之间的距离. 在多面体$ABCDE$中，$\triangle ABC$、$\triangle BCD$均为等边三角形，四边形$ACDE$为边长为2的菱形，直线AC与平面BCD所成角的大小为45°，且$d(C$、$E)>d(A$、$D)$.



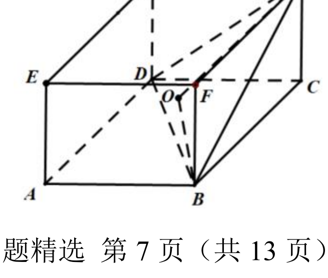
(1) 求多面体$ABCDE$的体积；

(2) 求二面角$A-BC-E$的大小（结果用反三角函数表示）；

(3) 是否存在一个三棱柱切一刀能形成多面体$ABCDE$？如果存在，请论述作出该三棱柱的过程并简述切割方式；如果不可能，请简述理由.

17. （B 组）（本题满分 7 分，第 1 小题满分 3 分，第 2 小题满分 4 分）

如图，已知平行六面体$ABCD-EFGH$有球心为O、表面积为9π的外接球.

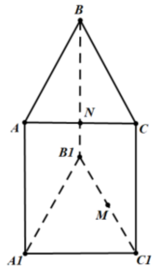


(1) 求证：平行六面体$ABCD-EFGH$为直棱柱；

(2) 若$AB=AD=1$，求平面OBG与平面DBG所成二面角的大小（结果用反三角函数表示）.

17. （C 组）（本题满分 7 分，第 1 小题满分 2 分，第 2 小题满分 2 分，第 3 小题满分 3 分）

如图，三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的侧棱长为2，$AB=BC=3$，$AA_1\perp A_1B_1$且三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的某个侧面是正方形，点M为边B_1C_1的中点，点N在棱AC上且$AN=1$.



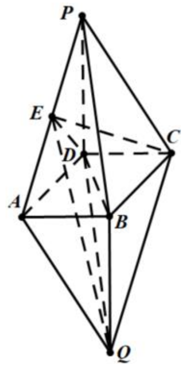
(1) 求三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的体积；

(2) 证明：直线$MN//$平面ABB_1A_1；

(3) 求直线B_1C和平面A_1MN的夹角（结果用反三角函数值表示）.

17. （D 组）（本题满分 7 分，第 1 小题满分 1 分，第 2 小题满分 2 分，第 3 小题满分 4 分）

《九章算术·商功》中说：“斜解立方，得两堑堵。斜解堑堵，其一为阳马，一为鳖臑。阳马居二，鳖臑居一，不易之率也。合两鳖臑三而一，验之以綦，其形露矣。”其中的阳马指的是一个底面为矩形，一条侧棱垂直于底面的四棱锥.



如图，两个完全相同的阳马（$P-ABCD$和$Q-ABCD$，其中侧棱PD、QB垂直于底面$ABCD$）拼接为八面体 $PQABCD$.

(1) 当$AB=AD$时，求证：平面$PAC\perp$平面PBD；

(2) 求证：平面$ADQ//$平面PBC；

(3) 当$AD=DP=3$，$AB=2$时，设点E为边AP的中点，求三棱锥$C-DEQ$的体积及直线EQ与平面BDQ所成角的大小.

18. （A 组）（本题满分 14 分，第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 8 分）

函数$y=f(x)(x\in D)$满足$f(x+1)=f[f(x)-1]$，记$y=f(x)$的值域为A.

(1) 当$D=A=R$时，判断函数$y=f(x)$的奇偶性并说明理由；

(2) N^*表示正整数集，当$D=N^*$时，设数列$\{a_n\}$满足$a_n=f(n)(n\in N$且$n\geq 1)$，若$a_n\leq\sqrt{n}+2$恒成立，记T_n为数列$\{a_n\}$的前n项积，S_n为数列$\{T_n\}$的前n项和，求S_{2023}的值.

18. （B 组）（本题满分 8 分，第 1 小题满分 3 分，第 2 小题满分 5 分）

在上海教育出版社《普通高中教科书 数学必修一》的第五章“函数的概念、性质及应用”中，我们学习到了一些探究函数的基本角度.

下面，我们来利用所学探究函数$f(x)=\frac{\sin x+1}{x}(x>0)$的性质.

(1) 请补充$f(x)=\frac{\sin x+1}{x}(x>0)$的基本性质表格.

解析式	$f(x)=\dfrac{\sin x+1}{x}$	定义域	$(0,+\infty)$
周期性		奇偶性	
零点		值域	

(2) $y=f(x)$的单调性判断难度稍大，我们从侧面间接探究其单调性.

①求$y=f(x)$在$(\pi,f(\pi))$处的切线与y轴的交点坐标；

②求$y=f(x)$在区间$(0,2024\pi)$内的驻点个数.

18.（C 组）（本题满分 7 分，第 1 小题满分 2 分，第 2 小题满分 3 分，第 3 小题满分 2 分）

如果函数$y=f(x)$在其定义域上有且仅有一个驻点，则称该函数具有“D 性质”.

(1) 判断“$y=f(x)$具有 D 性质”是“$y=f(x)$在其定义域上有且仅有一个极值点”的什么条件，并给出依据；

(2) 若函数$f(x)=\frac{x^2+a\ln x}{x}$具有“D 性质”，求实数$a$的取值范围；

(3) 设m为非零实常数，$g(x)=f(mx)+m$，求证：“$y=f(x)$具有'D 性质'”的一个充分必要条件是“$y=g(x)$具有'D 性质'”.

18.（D 组）（本题满分 6 分，第 1 小题满分 3 分，第 2 小题满分 3 分）

已知函数$f(x)=\sin x\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\sin^2(x+\pi)$，$x\in R$.

(1) 求$y=f(x)$的严格单调递减区间并直接写出方程$f(x)=\lg x$的解的个数；

(2) w为大于0的实数，若函数$y=f(wx)$在$[0,\pi]$内恰有2024个零点，求w的取值范围.

19.（A 组）（本题满分 14 分，第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 10 分）

为确定群体中的个体是否感染新冠病毒，通常可采用单管或混管的方式进行核酸检测. 单管，即一人一管，每人使用一个采样管单独采样，检测结果可直接说明被检测者是否感染新冠病毒. 混管，是指将多个人的采集拭子的混合样本放入到一个采样管中，若样本呈现阴性，则所有被检测者均未感染病毒；若样本呈现阳性，则需对样本中的所有被检测者重采单管，从而确定每个个体是否感染新冠病毒. A 城市总人口约为 3000 万，现需对城市内所有人进行核酸检测以确定哪些人感染了新冠病毒. 已知采样单价与检测方式之间满足下表关系：

检测方式	单管	混管（5 人一管）	混管（10 人一管）	混管（20 人一管）
采样单价（元/人）	16	5.5	4	3.5

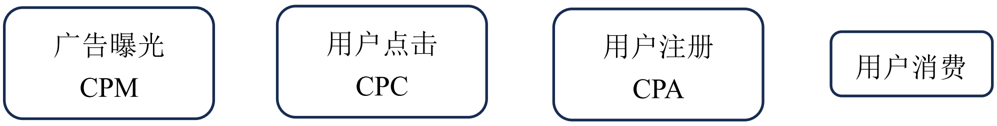
(1) 设检测方式为n人一管，采样单价为y元/人，已知一个采样管的采样总价与单个采样管中被检测者的数量的线性相关性强，据此建立y关于n的回归方程，并估计 A 城市采用 50 人一管的采样方式时的采样单价（数据均精确到小数点后一位）；

(2) 完成以下数学建模活动中的“建立模型”部分（模型改进与检验部分略去）：

<table>
<tr><td>提出问题</td><td>A 城市此次核酸检测最少需要使用多少采样管？</td></tr>
<tr><td rowspan="2">建立模型</td><td>假设 1：A 城市每个人感染新冠病毒的概率均为 0.001，且人与人之间的感染概率互不影响；
假设 2：假设单个采样管中的被检测者相同，为不超过 200 的正整数.
假设 3：____________________</td></tr>
<tr><td>模型求解：……</td></tr>
</table>

19. （B 组）（本题满分 8 分，第 1 小题满分 3 分，第 2 小题满分 5 分）

广告从曝光到用户消费的全过程可由下图表示（CPM、CPC、CPA 是广告计费方式）：



(1) 设事件A指用户受到广告曝光，事件B指用户点击广告，事件C指用户点击广告后在落地页注册，记点击率$\alpha = P(B|A)$，转化率$\beta = P(C|B)$. 用含α、β的代数式表示$P(C|A)$；

(2) CPM：按照广告每展现给一千个用户计费，CPM=$\dfrac{\text{广告投放者支付的总费用}}{\text{总曝光量}}\times 1000$；

CPC：按照广告每被用户点击一次计费，CPC=$\dfrac{\text{广告投放者支付的总费用}}{\text{总点击次数}}$，

CPA：按照广告每引导用户在落地页注册一次计费，CPA=$\dfrac{\text{广告投放者支付的总费用}}{\text{总注册次数}}$；

eCPM：广告主（即广告的发布者）每展示 1000 次广告所获得的期望收入.

完成以下 2 个任务：

①分别推导 eCPM 与 CPM、CPC、CPA 的关系（关系式中可含点击率α、转化率β）；

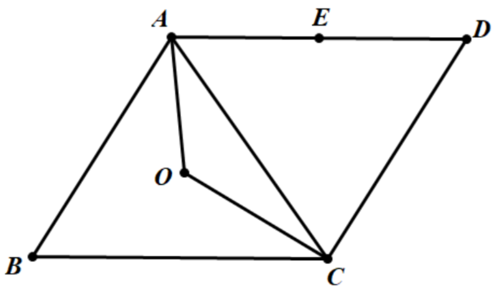
②某广告主收到了三个广告的报价（如下表）：

	广告一	广告二	广告三
推广方式	CPM	CPC	CPA
出价	CPM=8 元	CPC=0.9 元	CPA=12 元

判断当$\alpha = 0.01$，$\beta = 0.07$时广告主会优先展示哪一条广告.

19. （C 组）（本题满分 7 分，第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 3 分）

某地新冠肺炎爆发之时计划在某小区内划定一片平行四边形用地$ABCD$（如图所示）作为核酸检测亭，其中$\triangle ABC$的外接圆圆心O为核酸采样点，



(1) 为了尽可能地避免感染风险，现规定居民统一从点A处进入，沿AO进行排队采样，随后沿$OC-CD-DE$方向离开（点E为AD中点），求在满足$B = 60°$且$OA = 6$米的情况下，每位居民沿$AO-OC-CD-DE$路线至多要走多少路？当每位居民沿$AO-OC-CD-DE$路线走的路最多时，平行四边形用地$ABCD$的面积是多少？（路程计算$AO+OC+CD+DE$的长，路程精确到0.1米，面积精确到0.01平方米）

(2) 某研究院为探究某新冠药的药效邀请了 200 名病患进行实验. 将这 200 名病患随机分为 2 组每组 100 人，其中一组服用该药物，另一组未服用. 定义实验开始后 3 天内体内病毒含量降低比重为变量X，当X不小于 0.6 时认为病患情况好转，否则认为病患情况未好转. 实验结果表明未服用药物组的病患体内病毒含量降低比重X近似服从正态分布$N(0.5, 0.01)$.（精确到人）

附：若$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，则$P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)\approx 0.68$，$P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)\approx 0.95$.

$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中$n=a+b+c+d$，$P(\chi^2\geq 3.841)\approx 0.05$.

当病患情况好转的人数占总病患人数的 12.5%时，运用所学数学知识建立数学模型判断是否有 95%的把握认为病患情况是否好转和是否服用药物有关.

19.（D 组）（本题满分 6 分，第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 2 分）

2020年初，一场突如其来的新冠疫情打乱了人们的生活节奏，人们被迫居家，不再外出。随着时间的推移，生活逐渐恢复正常，似乎新冠病毒正离我们越来越远. 然而，2022年3月，新冠病毒的变种奥密克戎变异株再次在上海出现，并快速爆发，上海被迫进入紧急状态. 社区开始采用切块化、网格化管理，并开始了日复一日的核酸检测. 小明一家成为了这一历史的见证者. 通过前期的观察和健康云上的采样时间，小明发现楼栋居民每分钟做核酸的人数存在一定的规律，他希望通过建立数学模型的方式研究人数规律. 现假设小明所在楼栋居民与其隔壁两栋楼的居民一起做核酸，且三栋楼的居民人数相同，从刚开始采样到采样结束的过程中每分钟做核酸的人数总是先严格递增再严格递减. 某次做核酸的总时长为18分钟，假设由于应检不检者会被赋黄码，三楼栋所有居民均配合在这18分钟内完成了核酸采样，且每分钟内均有居民下楼做核酸，开始核酸检测第$1-18$分钟内每分钟三栋楼做核酸的总人数组成数列$\{a_n\}$（其中第1分钟内做核酸的总人数记为a_1，第2分钟内做核酸的总人数记为a_2，以此类推直至第18分钟），若第1分钟内、第9分钟内三栋楼加起来分别有3人、19人做了核酸，且 $\{a_1、a_2、\ldots\ldots、a_{p-1}、a_p\}$、$\{a_p、a_{p+1}、\ldots\ldots、a_{17}、a_{18}\}$$(3\leq p\leq 16$且$p\in Z)$恰好是两个等差数列.

(1) 在符合上述所有条件的情况下，求小明所在楼栋中至少有几位居民？

(2) 直接写出当小明所在楼栋中居民总数最少时$\{a_n\}$的通项公式，并求出在哪一分钟时体现出总的核酸检测的效率最高？此时总的核酸检测的效率是多少？（求得的总的核酸检测的效率结果保留到小数点后一位）（第n分钟时体现出的总的核酸检测效率定义为在前n分钟做过核酸的总人数除以总时间（总时间即为n分钟））

20.（A 组）（本题满分 18 分，第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 5 分，第 3 小题满分 9 分）

焦距为2的Γ: $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$的焦点为$F_1$、$F_2$，右顶点为$N$，点$M\in\Gamma$满足$M$、$N$、$F_1$共线且$\triangle MNF_2$为等腰三角形，焦点为$F$的抛物线$C: y^2=2px(p>0)$与$\Gamma$交于$Q$、$R$两点.

(1) 求Γ的方程；

(2) 当$\angle QFR=120°$时，求点Q的坐标；

(3) 设过F的直线l与Γ交于S、T两点，点集$\Omega=\{K|K\in l\cap C\}$，若存在点$J\in\Omega$满足$|TJ|=|JF|=|FS|$，求直线$l$的方程.

20. （C 组）（本题满分 9 分，第 1 小题满分 2 分，第 2 小题满分 3 分，第 3 小题满分 4 分）

在平面直角坐标系xOy中，双曲线Γ：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$的右焦点为$F$，过坐标原点$O$的直线$l$与$\Gamma$的左支交于点$P$，与$\Gamma$的右支交于点$Q$.

(1) 若点P坐标为$(-1,-1)$且$PQ\perp QF$，求双曲线Γ的方程；

(2) 当$b=4$且$\triangle OPF$、$\triangle OQF$的周长分别为 18、12 时，求PQ的长；

(3) 设Γ的离心率为e，右顶点为A，线段PF与Γ的右支交于点M，记$\triangle QFM$、$\triangle AFP$、$\triangle AFM$的面积分别为S_1、S_2、S_3，当$S_1=S_2=eS_3$时，求直线l的方程.

20. （C 组）（本题满分 8 分，第 1 小题满分 2 分，第 2 小题满分 2 分，第 3 小题满分 4 分）

已知Γ_1：$\frac{x^2}{m}+y^2=1(m>0$且$m\neq1)$与Γ_2：$x^2-\frac{y^2}{n}=1(n>0)$的焦点相同，且Γ_1与Γ_2在第一象限内的交点为M，在第二象限内的交点为N.

(1) 设Γ_1的离心率为e_1，Γ_2的离心率为e_2，若$e_1e_2=\frac{m-1}{n}$，求Γ_2的渐近线方程；

(2) 设F_1为左焦点，F_2为右焦点，若$\left|\overrightarrow{F_1M}+\overrightarrow{F_2N}\right|=1$，求线段$|MN|$的长度；

(3) 设Γ_1的上顶点为Q，记$\triangle QMF_2$的面积为S，求证：$S<\frac{1}{2}$ 恒成立.

20．（D 组）（本题满分 7 分，第 1 小题满分 2 分，第 2 小题满分 3 分，第 3 小题满分 2 分）

焦距为4的双曲线Γ：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a,\ b>0)$的左右焦点分别为$F_1$、$F_2$，左右两个顶点分别为$A$、$B$，焦点为$F_2$的抛物线$y^2=2px(p>0)$与$\Gamma$的渐近线在第一象限内的交点为点$P$，且$F_2P=\frac{14}{3}$.

(1) 求双曲线Γ的方程；

(2) 直线l的斜率为3，在y轴上的截距为$m(m\in R)$，若直线l与双曲线Γ交于M、N两点且点M、N均在第三象限，求$\triangle AMN$的面积$S=f(m)$的表达式.

(3) 已知点$R(0,\ m)$，当$\triangle AMN$的面积最大时，求$\tan\angle F_1RM$的值.

21. （A 组）（本题满分 18 分，第 1 小题满分 3 分，第 2 小题满分 6 分，第 3 小题满分 9 分）

定义：$max\{a,\ b\}$表示a、b中的较大者，即$max\{a,\ b\}=\begin{cases}a & a\geq b\\ b & a<b\end{cases}$. 设函数$y=f(x)$，$x\in R$与$y=g(x)$，$x\in R$分别存在导函数$y=f'(x)$，$x\in R$和$y=g'(x)$，$x\in R$，当且仅当$f'(x)>max\{0,\ g'(x)\}$恒成立且$y=f(x)$的图像与$y=g(x)$的图像有公共点时，称函数$y=f(x)$是$y=g(x)$的“相关函数”.

(1) 判断函数$f(x)=x^3+3x^2+5x$是否是$g(x)=2x$的“相关函数”，并说明理由；

(2) 设$m\in R$，当函数$f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$是$g(x)=mx$的“相关函数”时，求m的取值范围；

(3) 若函数$y=f(x)$是$y=g(x)$的“相关函数”，且对任意实数x都满足$f[g(x)]=g[f(x)]$，求证：函数$y=f(x)$与$y=g(x)$的图像的公共点唯一，且该公共点在直线$y=x$上.

（可用结论：在区间D上，函数存在导函数是函数图像为一段连续曲线的充分非必要条件.）

21.（B 组）（本题满分 10 分，第 1 小题满分 2 分，第 2 小题满分 3 分，第 3 小题满分 5 分）

对于定义域为R的函数$f(x)$和实常数P，定义函数$f_p(x)(x\in R)=\begin{cases}\frac{1}{2}f(x) & f(x)\geq P\\ f(x)-2 & f(x)<P\end{cases}$.

(1) 当函数$f(x)$是周期函数时，①求证：函数$f_P(x)$是周期函数；

②若函数$f_p(x)$的最小正周期为2，求函数$f(x)$的最小正周期；

(2) 若$f(x)=Pe^x-2x^2+1$且$y=f_p(x)$存在反函数，求实数P的取值范围；

(3) 记函数$f(x)$的值域为A，函数$f_p(x)$的值域为A_P，当函数$f(x)$是奇函数时：

①若函数$f_p(x)$是偶函数，求A_P并写出对应P的取值范围；

②若函数$f_p(x)$是奇函数，探究集合A与集合A_P的关系并证明.

21.（C 组）（本题满分 9 分，第 1 小题满分 2 分，第 2 小题满分 3 分，第 3 小题满分 4 分）

如果函数$y=f(x)$在其定义域内有且仅有两个不同的极值点x_1、x_2，则称函数$y=f(x)$为“双极值点函数”且两点$\left(x_1,f(x_1)\right)$、$\left(x_2,f(x_2)\right)$所确定的直线称为“极值点连线”.若“双极值点函数”$y=f(x)$的“极值点连线”与$y=f(x)$的图像有且仅有两个交点，称函数$y=f(x)$具有“P性质”.

(1) 判断$f(x)=\ln(x+1)+\frac{1}{\sqrt{x}}$是否为“双极值点函数”，并说明理由；

(2) 设实数$a>0$，证明$f(x)=\frac{x^2}{e^{ax}}$为“双极值点函数”，判断$y=f(x)$是否具有“P性质”并说明理由；

(3) 求证：当$y=f(x)$为三次函数且为“双极值点函数”时，$y=f(x)$不具有“P性质”.

21.（D 组）（本题满分 8 分，第 1 小题满分 2 分，第 2 小题满分 2 分，第 3 小题满分 4 分）

设函数$y=f(x)$，$x\in D$，定义：若对于任意的$x_0\in D$，函数$f(x)$在点$\left(x_0,f(x_0)\right)$处的切线与函数$y=f(x)$，$x\in D$的图像有且仅有一个公共点，则称函数$f(x)$为“孤独函数”.

(1) 判断下列两个函数是否是“孤独函数”？（直接写出答案）

① $f(x)=\tan x$；

② $f(x)=\begin{cases}x^2 & 0<x<1\\ e^{x-1} & x>1\end{cases}$；

(2) 实数$a\neq 0$，求证：函数$f(x)=x\ln(ax)$是“孤独函数”；

(3) 判断定义域为$(0,+\infty)$的三次函数$f(x)$是否是孤独函数，并证明你的结论.