2024 年上海市普通高等学校招生统一文化考试

数学试卷

（考试时间：120 分钟，满分：150 分）

（试卷共 4 页，答题纸共 2 页）

一、填空题（本大题共 54 分，第 1－6 题每题 4 分，第 7－12 题每题 5 分。考生应在答题纸的相应位置直接填写结果）

1. 不等式$|x-2|\le 1$的解集为________.

2. 已知抛物线$x^2=2py(p>0)$的准线方程为$y=-2$，则$p=$________.

3. 已知复数$z=i(1-2i)$ (i为虚数单位)，则z的实部为________.

4. 设$\vec{e}$为单位向量，若$\vec{a}\cdot\vec{e}=2$，则$\vec{a}$在$\vec{e}$方向上的投影向量为________.

5. 设$m\in R$，已知集合$A=\{1,m\}$，集合$B=\{1,m^2\}$，当$A=B$时，m的值为________.

6. 已知某圆锥的母线长为3，侧面积为6π，则该圆锥的体积为________.

7. $\left(2x-\frac{1}{x}\right)^6$的二项展开式中的常数项为________.

8. 已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=3^n+a(a\in R)$，当$\{a_n\}$为等比数列时，a的值为________.

9. 若某班 8 位任课老师的年龄（单位：岁）可绘制成如下的茎叶图（有一位老师的数据被墨水污染，无法看清），已知该班任课老师年龄（单位：岁）的第 75 百分位数为 38，则该班 8 位任课老师的平均年龄（单位：岁）为________.

2	4	8		
3	1	3	3	[illegible]
4	1	5		

10. 设r为正实数，椭圆C的标准方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$，圆$O$的方程为$x^2+y^2=r^2$，当椭圆$C$与圆$O$共有 4 个不同的公共点时，$r$的取值范围是________.

11. 平面上有A、B、C三点，现有一只青蛙从A点开始连续跳跃 8 次，已知该青蛙每次跳跃会等可能地跳到A、B、C三点中除跳跃起点外的两点，那么青蛙跳跃 8 次后恰好回到A点的概率为________.

12. 设实数$k>0$，无穷等差数列$\{a_n\}$的公差$d=\frac{\pi}{2k}$，$a_1=0$. 定义无穷集合列$\{A_n\}(n\in N$且$n\ge 1)$，其中$A_n=(a_n,a_{n+1})$. 函数$y=f(x)$的定义域$D=A_1\cup A_2\cup\ldots\ldots\cup A_n$，且满足$f(x)=\begin{cases}\sin kx, & x\in A_1\\ f'(x-d), & x\in A_2\cup\ldots\ldots\cup A_n\end{cases}$，若$y=f(x)$图像上任意一点都满足$y=f(x)$在该点处的切线与$y=f(x)$的图像有无穷个公共点，则$k$的取值范围是________.

二、选择题（本大题共 18 分，第 13－14 题每题 4 分，第 15－16 题每题 5 分。每题有且只有一个正确答案，考生应在答题纸的相应位置，将代表正确选项的小方格涂黑）

13. 下列函数中是偶函数的是（　　）.

A. $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$；　B. $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$；　C. $f(x)=x^{-2}$；　D. $f(x)=x^{-3}$.

14. 若角α满足$\tan\alpha<0$且$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)<0$，则角$\alpha$终边所处的位置为（　　）.

A. 第一象限；　B. 第二象限；　C. 第三象限；　D. 第四象限.

15. 先后掷 2 颗骰子，记点数分别为随机变量X和Y，设事件A表示X为偶数，事件B表示X与Y的和为偶数，事件C表示X与Y的和为 12. 则下列说法中**错误**的是（　　）.

A. "事件C发生"是"事件A发生"的充分条件；　B. $D[X+Y]=D[2X]$；

C. 事件A和事件$\bar{B}$独立；　D. $P(A\cup B)=P(\bar{A}\cup B)$.

16. 在空间中，对于下列两个命题判断**正确**的是（　　）.

①与 3 条两两异面的直线a、b、c均相交的直线有且只有一条；

②与 4 条两两异面的直线a、b、c、d均相交的直线可能存在，也可能不存在.

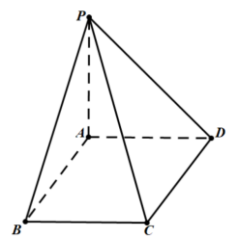
A. 命题①为真命题，命题②为真命题；　B. 命题①为真命题，命题②为假命题；

C. 命题①为假命题，命题②为真命题；　D. 命题①为假命题，命题②为假命题.

三、解答题（本大题共 78 分，第 17－19 题每题 14 分，第 20－21 题每题 18 分。解答下列各题必须在答题纸的相应位置写出必要的步骤）

17.（第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 8 分）

如图，已知四边形$ABCD$为边长为2的正方形，点P为空间中一点，满足$\angle PBC=\angle PDC=90°$.



(1) 证明：平面$PAC\perp$平面PBD；

(2) 设CD中点为M，若$AP=2$，求平面BMP与平面DMP所成二面角的大小.

18.（第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 8 分）

已知$f(x)=\log_a x\ (a>0$且$a\neq 1)$.

(1) 设$m>2$，已知当$x\in[2,\ m]$时，$y=f(x)$的值域为$[2,\ 4]$，求m的值；

(2) 设关于x的方程$ax^2-4x+2=0$有两实数根x_1、x_2，证明$f(x_1)$、$f(x_2)$均有意义，并求$f(x_1)+f(x_2)$的取值范围.

19.（第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 4 分，第 3 小题满分 6 分）

广告从曝光到用户消费的全过程可由下图表示（CPM、CPC、CPA 是广告计费方式）：

广告曝光 CPM → 用户点击 CPC → 用户注册 CPA → 用户消费

(1) 某广告主（即广告的发布者）针对某品牌广告推广的计费方式对 100 位广告投放者进行了问卷调查，得到这 100 位广告投放者对 CPM 与 CPA 的态度如下：

	支持 CPM	反对 CPM	总计
支持 CPA	35	25	60
反对 CPA	30	10	40
总计	65	35	100

判断是否有 95%的把握认为在这 100 位广告投放者中支持 CPM 与支持 CPA 有关？

参考公式：$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中$n=a+b+c+d$，$P(\chi^2\geq 3.841)\approx 0.05$.

(2) 设事件A指用户受到广告曝光，事件B指用户点击广告，事件C指用户点击广告后在落地页注册，记点击率$\alpha=P(B|A)$，转化率$\beta=P(C|B)$. 用含α、β的代数式表示$P(C|A)$；

(3) CPM：按照广告每展现给一千个用户计费，CPM=$\frac{\text{广告投放者支付的总费用}}{\text{总曝光量}}\times 1000$；

CPC：按照广告每被用户点击一次计费，CPC=$\frac{\text{广告投放者支付的总费用}}{\text{总点击次数}}$，

CPA：按照广告每引导用户在落地页注册一次计费，CPA=$\frac{\text{广告投放者支付的总费用}}{\text{总注册次数}}$；

eCPM：广告主每展示 1000 次广告所获得的期望收入.

完成以下 2 个任务：

①分别在 CPM、CPC、CPA 的计费方式下推导 eCPM 的表达式（关系式中可含 CPM、CPC、CPA、点击率α、转化率β）；

②某广告主收到了三个广告的报价（如下表）：

	广告一	广告二	广告三
计费方式	CPM	CPC	CPA
出价	CPM=8 元	CPC=0.9 元	CPA=12 元

判断当$\alpha=0.01$，$\beta=0.07$时广告主会优先展示哪一条广告.

20.（第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 6 分，第 3 小题满分 8 分）

在平面直角坐标系xOy中，双曲线Γ：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$的右焦点为$F$，过坐标原点$O$的直线$l$与$\Gamma$的左支交于点$P$，与$\Gamma$的右支交于点$Q$.

(1) 若点P坐标为$(-1,-1)$且$PQ\perp QF$，求双曲线Γ的方程；

(2) 当$b=4$且$\triangle OPF$、$\triangle OQF$的周长分别为 18、12 时，求PQ的长；

(3) 设Γ的离心率为e，右顶点为A，线段PF与Γ的右支交于点M，记$\triangle QFM$、$\triangle AFP$、$\triangle AFM$的面积分别为S_1、S_2、S_3，当$S_1=S_2=eS_3$时，求直线l的方程.

21.（第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 6 分，第 3 小题满分 8 分）

$max\{a,\ b\}$表示a、b中的较大者，即$max\{a,\ b\}=\begin{cases}a & a\geq b\\ b & a<b\end{cases}$. 定义域为$R$的函数$y=f(x)$与$y=g(x)$的导函数分别为$y=f'(x)$和$y=g'(x)$，当且仅当$f'(x)>max\{0,\ g'(x)\}$恒成立且$y=f(x)$的图像与$y=g(x)$的图像有公共点时，称函数$y=f(x)$是$y=g(x)$的"相关函数".

(1) 判断函数$f(x)=x^3+3x^2+5x$是否是$g(x)=2x$的"相关函数"，并说明理由；

(2) 设$m\in R$，当函数$f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$是$g(x)=mx$的"相关函数"时，求m的取值范围；

(3) 若函数$y=f(x)$是$y=g(x)$的"相关函数"，且对任意实数x都满足$f[g(x)]=g[f(x)]$. 已知$y=f(x)$与$y=g(x)$的图像均为连续不断的曲线，求证：函数$y=f(x)$与$y=g(x)$的图像的公共点唯一，且该公共点在直线$y=x$上.

下页开始为答案

2024 年上海市普通高等学校招生统一文化考试

数学试卷

答案要点及评分标准

说明

1. 本解答列出试题的解法，如果考生的解法与所列解法不同，可参照解答中评分标准的精神进行评分.

2. 评阅试卷，应坚持每题评阅到底，不要因为考生的解答中出现错误而中断对该题的评阅. 当考生的解答在某一步出现错误，影响了后继部分，但该步以后的解答未改变这一题的内容与难度时，可视影响程度决定后面部分的给分，这时原则上不应超过后面部分应给分数之半，如果有较严重的概念性错误，就不给分.

解答

一、（第 1 题至第 12 题）

1. $[1,3]$　　2. 4　　3. 2　　4. $2\vec{e}$　　5. 0　　6. $\frac{4}{3}\sqrt{5}\pi$

7. -160　　8. -1　　9. 33.75　　10. $(\sqrt{2},\ 2)$　　11. $\frac{43}{128}$　　12. $(1,+\infty)$

二、（第 13 题至第 16 题）

题　号	13	14	15	16
代　号	C	D	B	C

三、（第 17 题至第 21 题）

17. (1) [证] 由$\angle PBC=90°$得$BC\perp BP$，由$ABCD$为正方形得$BC\perp BA$，

由$BC\perp BP$，$BC\perp BA$，$BC\cap BP=B$得$BC\perp$平面ABP，……1 分

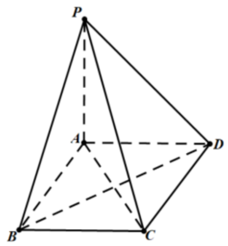
同理可得$CD\perp$平面ADP.　……2 分

则$AP\perp BC$，$AP\perp CD$，$BC\cap CD=C$可得$AP\perp$平面BCD.……3 分

得$AP\perp BD$，由正方形可得$AC\perp BD$，结合$AC\cap AP=A$可得

$BD\perp$平面ACP.　……5 分

由BD在平面PBD上得到平面$PAC\perp$平面PBD.　……6 分



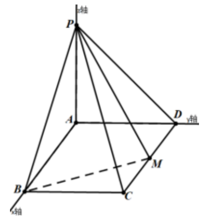
（图 1）

(2) [解] 由$AP\perp$平面BCD结合$ABCD$为正方形得AB、AD、AP两两垂直，不妨设点P在平面$ABCD$上方，如图 2，以点A为坐标原点，

$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{AP}$为x、y、z轴正方向建立空间直角坐标系，　……7 分

则$B(2,0,0)$，$P(0,0,2)$，$M(1,2,0)$，$D(0,2,0)$.　……8 分

$\overrightarrow{PM}=(1,2,-2)$，$\overrightarrow{BP}=(-2,0,2)$，$\overrightarrow{DM}=(1,0,0)$.　……9 分



（图 2）

设平面BMP的法向量为$\vec{m}=(a,\ b,\ c)$，则$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{PM}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BP}=0\end{cases}$即$\begin{cases}a+2b-2c=0\\ -2a+2c=0\end{cases}$，

取$a=2$，得$c=2$，$b=1$，则平面BMP的一个法向量$\vec{m}=(2,1,2)$. ……10 分

设平面DMP的法向量为$\vec{n}=(d,\ e,\ f)$，则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PM}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DM}=0\end{cases}$即$\begin{cases}d+2e-2f=0\\ d=0\end{cases}$，

取$e=1$，得$f=1$，$d=0$，则平面DMP的一个法向量$\vec{n}=(0,1,1)$. ……11 分

从而$\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\frac{3}{3\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. ……12 分

则$\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\frac{\pi}{4}$，平面$BMP$与平面$DMP$所成二面角的大小为$\frac{\pi}{4}$或$\frac{3}{4}\pi$（前者为锐二面角）.

……14 分

注：第(2)小题答案分共 2 分，锐二面角和钝二面角各 1 分.

18. [解] (1) 情况①：$a>1$，此时$f(x)=\log_a x$严格递增； ……1 分

则当$x\in[2,\ m]$时$f(x)\in[\log_a 2,\ \log_a m]$，故$\begin{cases}\log_a 2=2\\ \log_a m=4\end{cases}$. ……2 分

即$a^2=2$，$m=a^4$，得$a=\sqrt{2}>1$，成立； ……3 分

则$m=4$. ……4 分

情况②：$0<a<1$，

方法一：此时$f(x)=\log_a x$严格递减，当$x\in[2,\ m]$时$f(x)\in[\log_a m,\ \log_a 2]$，

则$\begin{cases}\log_a 2=4\\ \log_a m=2\end{cases}$. ……5 分

则$a^4=2$，$a=\sqrt[4]{2}$，不满足$0<a<1$，故情况②不成立. ……6 分

方法二：$0<a<1$，$x>1$时$f(x)=\log_a x<0$，值域不可能为$[2,\ 4]$，舍去.……6 分

综上，m的值为4.

(2) $a\neq 0$，原方程为一元二次方程，由韦达定理$\begin{cases}x_1+x_2=\frac{4}{a}\\ x_1x_2=\frac{2}{a}\end{cases}$. ……7 分

由$a>0$，x_1+x_2、x_1x_2均正，故x_1、$x_2>0$，符合对数函数定义域，$f(x_1)$、$f(x_2)$均有意义. ……8 分

判别式$\Delta=16-8a\geq 0$，解得$a\leq 2$，故$a\in(0,1)\cup(1,2]$. ……9 分

$f(x_1)+f(x_2)=\log_a x_1+\log_a x_2=\log_a x_1x_2=\log_a\frac{2}{a}$. ……10 分

$\log_a\frac{2}{a}=\log_a 2-\log_a a=\frac{\log_2 2}{\log_2 a}-1=\frac{1}{\log_2 a}-1$. ……12 分

由$a\in(0,1)\cup(1,2]$得$\log_2 a\in(-\infty,\ 0)\cup(0,\ 1]$. ……13 分

则$\frac{1}{\log_2 a}\in(-\infty,\ 0)\cup[1,\ +\infty)$. $f(x_1)+f(x_2)\in(-\infty,-1)\cup[0,\ +\infty)$. ……14 分

注：1. 第(1)小题若考生画出图像说明$0 < a < 1$不成立的也可给情况②的 2 分；

2. 第(2)小题考生若认为$a \in (0,1) \cup (1,2)$的总扣 1 分，$\log_a \frac{2}{a}$化简共 2 分，除变减 1 分，换底 1 分，若考生直接由$\log_a \frac{2}{a}$得到所求答案的扣 2 分过程分，由$\log_a 2 - 1$直接得到答案的扣 1 分过程分.

19. [解] (1) 提出原假设H_0：支持 CPM 与支持 CPA 无关，确定显著性水平$\theta = 0.05$. ……1 分

计算$\chi^2 = \frac{100 \times (35 \times 10 - 25 \times 30)^2}{60 \times 40 \times 65 \times 35} = \frac{800}{273} \approx 2.930$. ……2 分

由$P(\chi^2 \geq 3.841) \approx 0.05$，而$2.930 < 3.841$，$\chi^2$的值未超过$\theta$所决定的界限，……3 分

故不推翻假设，即没有 95%的把握认为支持 CPM 与支持 CPA 有关. ……4 分

(2)由流程图关系，$P(A|B) = P(B|C) = P(A|C) = 1$. ……5 分

$\alpha = P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} P(A|B) = \frac{P(B)}{P(A)}$. ……6 分

同理，$\beta = \frac{P(C)}{P(B)}$，$P(C|A) = \frac{P(C)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} \times \frac{P(C)}{P(B)} = \alpha\beta$. ……8 分

(3)①eCPM=$\frac{\text{广告主的总收入}}{\text{展示 1000 次广告的次数}} = \frac{\text{广告投放者支付的总费用}}{\frac{\text{总曝光量}}{1000}}$=CPM. ……9 分

点击率$\alpha = P(B|A) = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{\frac{|B|}{|\Omega|}}{\frac{|A|}{|\Omega|}} = \frac{|B|}{|A|} = \frac{\text{总点击次数}}{\text{总曝光量}}$，同理$\alpha\beta = \frac{|C|}{|A|} = \frac{\text{总注册次数}}{\text{总曝光量}}$. ……10 分

eCPM=$\frac{\text{广告投放者支付的总费用}}{\text{总曝光量}} \times 1000 = \frac{\text{广告投放者支付的总费用}}{\text{总点击次数}} \times \frac{\text{总点击次数}}{\text{总曝光量}} \times 1000 = 1000\alpha$CPC.

……11 分

同理 eCPM=$\frac{\text{广告投放者支付的总费用}}{\text{总注册次数}} \times \frac{\text{总注册次数}}{\text{总曝光量}} \times 1000 = 1000\alpha\beta$CPA. ……12 分

②广告一：eCPM=8 元，广告二：eCPM=9 元，广告三：eCPM=8.4 元. ……13 分

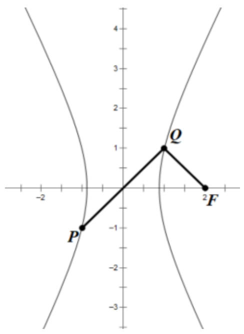
对广告主而言，eCPM 越大利润越高，故优先展示广告二. ……14 分

注：1. 第(1)小题原假设 1 分，χ^2数值 1 分，χ^2与 3.841 比较 1 分，结论 1 分；

2. 第(2)小题答案分 1 分，推导过程 3 分；

3. 第(3)小题①4 分，其中 3 个关系式各 1 分，推导过程 1 分；②正确计算 3 个广告的 eCPM 1 分，结论 1 分.

20. [解] (1) 双曲线Γ关于原点对称，l关于原点对称，则l与Γ的交点P、Q关于原点对称，由点$P(-1,-1)$可得$Q(1,1)$. ……1 分

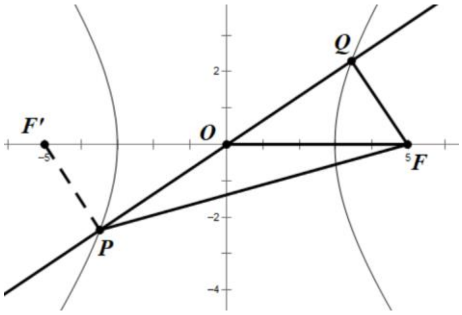


PQ：$y = x$，$k_{PQ} = 1$，由$PQ \perp QF$可得$k_{QF} \cdot k_{PQ} = -1$，则$k_{QF} = -1$，则直线QF的点斜式方程为$y - 1 = -(x-1)$即$y = -x + 2$. 直线QF与x轴交点F坐标为$(2,0)$. ……2 分

由$F(2,0)$得$c = 2$，结合$Q \in \Gamma$得$\begin{cases} \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1 \\ a^2 + b^2 = c^2 = 4 \end{cases}$. ……3 分

将$a^2=4-b^2$代入$\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}=1$化简得$b^4-2b^2-4=0$，

由$b^2>0$得$b^2=1+\sqrt{5}$，则$a^2=3-\sqrt{5}$. 双曲线Γ的方程为$\frac{x^2}{3-\sqrt{5}}-\frac{y^2}{1+\sqrt{5}}=1$. ……4 分



(2) 由P、Q关于原点对称得$OP=OQ$，$\triangle OPF$的周长为$OP+OF+PF=18$，$\triangle OQF$的周长为$OQ+OF+QF=12$.

两者作差得$PF-QF=6$. ……5 分

设Γ的左焦点为F'，则F'与F关于原点对称，从而$FQ=PF'$，由双曲线定义$PF-PF'=2a$即$PF-QF=2a$. ……6 分

对比上述两式得$a=3$，结合$b=4$得$c=5$. 则$F(5,0)$，$OF=5$. ……7 分

则$OP+PF=13$，$OQ+QF=7$，设$OP=OQ=x$，则$PF=13-x$，$QF=7-x$，

$\cos\angle FOP=\cos(\pi-\angle FOQ)=-\cos\angle FOQ$，由余弦定理$\cos\angle FOP=\frac{x^2+25-(13-x)^2}{10x}$，

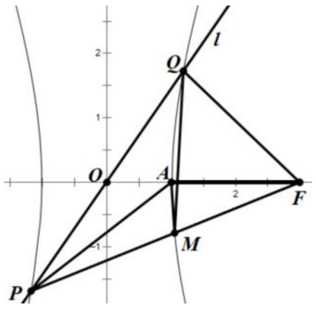
$\cos\angle FOQ=\frac{x^2+25-(7-x)^2}{10x}$，则$\frac{x^2+25-(13-x)^2}{10x}=-\frac{x^2+25-(7-x)^2}{10x}$. ……8 分

解得$OP=OQ=x=\frac{21}{5}$，此时$\cos\angle FOQ=\frac{29}{35}$，$\angle FOQ=arc\cos\frac{29}{35}$，而$\Gamma$：$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$

的一条渐进线$y=\frac{4}{3}x$与OF夹角为$arc\cos\frac{3}{5}>arc\cos\frac{29}{35}$，且$OQ=\frac{21}{5}>a=3$，所以

$OQ=\frac{21}{5}$符合条件. ……9 分

故$PQ=2x=\frac{42}{5}$. ……10 分

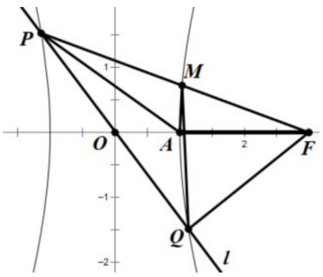


(3) 方法一：$S_2=\frac{1}{2}AF\times|y_P|=eS_3=\frac{1}{2}eAF\times|y_M|$，由$P$在左支，$M$在线段$PF$上得$y_P$、$y_M$同号，则$y_P=ey_M$. ……11 分

由P、Q关于O对称$S_2=\frac{1}{2}AF\times|y_P|=\frac{1}{2}AF\times|y_Q|=S_{\triangle AFQ}$.

则$S_{\triangle MFQ}=S_{\triangle AFQ}$，设点$M$、点$A$到直线$FQ$的距离为$d_1$、$d_2$，

$\frac{1}{2}FQ\times d_1=\frac{1}{2}FQ\times d_2$，得$d_1=d_2$，由图$M$、$A$在直线$FQ$同侧可得$AM//FQ$. ……12 分



设$A(a,\ 0)$, $F(c,\ 0)$, $M(x_0,\ y_0)$, $P(x_1,\ ey_0)$, $Q(-x_1,-ey_0)$，

则$x_0>a$，$x_1<-a$，$y_0\neq 0$.

$\overrightarrow{AM}=(x_0-a,\ y_0)$，$\overrightarrow{FQ}=(-x_1-c,-ey_0)$，由$AM//FQ$得$x_1+c=ex_0-ea$. $\overrightarrow{FM}=(x_0-c,y_0)$, $\overrightarrow{FP}=(x_1-c,ey_0)$，

由F、M、P共线得$x_1-c=ex_0-ec$. ……13 分

两式相减，得$2c=ec-ea$，由$e=\frac{c}{a}$得$ea=c$，则$3c=ec$，由$c\neq 0$得$e=3$. ……14 分

由$e=3$得$c=3a$，从而$b=2\sqrt{2}a$，Γ：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{8a^2}=1$即$8x^2-y^2=8a^2$.　　……15 分

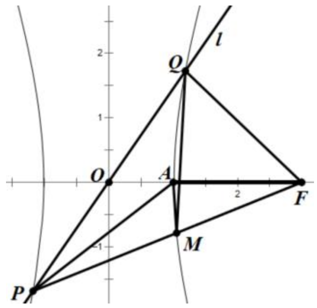
将$e=3$代回$x_1-c=ex_0-ec$得$x_1=3x_0-6a$，则$P(3x_0-6a,\ 3y_0)$、$M(x_0,\ y_0)\in\Gamma$.

代入得到方程组$\begin{cases}8(3x_0-6a)^2-9{y_0}^2=8a^2\\ 8{x_0}^2-{y_0}^2=8a^2\end{cases}$.　　……16 分

消去${y_0}^2$得$8(3x_0-6a)^2=72{x_0}^2-64a^2$，展开由$a\neq0$可得$x_0=\frac{11}{9}a$.　　……17 分

代回$8{x_0}^2-{y_0}^2=8a^2$得$y_0=\pm\frac{8}{9}\sqrt{5}a$，$k_{PQ}=\frac{3y_0}{3x_0-6a}=\pm\frac{8}{7}\sqrt{5}$.

故直线l的方程为$y=\pm\frac{8}{7}\sqrt{5}x$.　　……18 分

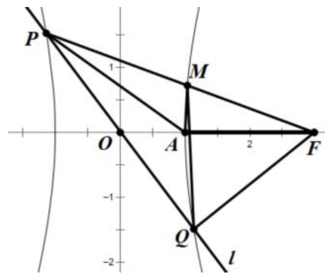


方法二：设点A到直线FP的距离为d_1，$S_2=\frac{1}{2}FP\times d_1$，

$S_3=\frac{1}{2}FM\times d_1$，由$S_2=eS_3$得$FP=eFM$.　　……11 分

设点Q到直线FP的距离为d_2，$S_{\triangle PFQ}=\frac{1}{2}FP\times d_2$，

$S_1=\frac{1}{2}FM\times d_2$，则$S_{\triangle PFQ}=eS_1=eS_2$.　　……12 分



由P、Q关于原点对称得$S_{\triangle PFQ}=2S_{\triangle OFP}$，则$eS_2=2S_{\triangle OFP}$.

$S_2=\frac{1}{2}AF\times|y_P|=\frac{1}{2}(c-a)|y_P|$，$S_{\triangle OFP}=\frac{1}{2}c|y_P|$，代入得

$e(c-a)=2c$.　　……13 分

由$e=\frac{c}{a}$且$c\neq0$得$c-a=2a$即$c=3a$，$e=3$.　　……14 分

点$A(a,\ 0)$，$F(3a,\ 0)$，设$M(x_0,\ y_0)$，由$FP=3FM$且FP、FM同向得$\overrightarrow{FP}=3\overrightarrow{FM}$，

$\overrightarrow{FM}=(x_0-3a,\ y_0)$，则$\overrightarrow{FP}=(3x_0-9a,\ 3y_0)$，从而$P(3x_0-6a,\ 3y_0)$.　　……15 分

由$c=3a$得$b=2\sqrt{2}a$，Γ：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{8a^2}=1$即$8x^2-y^2=8a^2$. 由$P$、$M\in\Gamma$可得到方程组

$\begin{cases}8(3x_0-6a)^2-9{y_0}^2=8a^2\\ 8{x_0}^2-{y_0}^2=8a^2\end{cases}$.　　……16 分

消去${y_0}^2$得$8(3x_0-6a)^2=72{x_0}^2-64a^2$，展开由$a\neq0$可得$x_0=\frac{11}{9}a$.　　……17 分

代回$8{x_0}^2-{y_0}^2=8a^2$得$y_0=\pm\frac{8}{9}\sqrt{5}a$，$k_{PQ}=\frac{3y_0}{3x_0-6a}=\pm\frac{8}{7}\sqrt{5}$.

故直线l的方程为$y=\pm\frac{8}{7}\sqrt{5}x$.　　……18 分

注：1. 第(2)小题第 9 得分点处也可通过算出点P或Q具体坐标验证$PQ=\frac{42}{5}$的可行性，但若不验证所求PQ满足题意扣 1 分；

2. 第(3)小题评分时分为 2 个部分：解出离心率和得出l的方程，每个部分满分 4 分.

(1) 第 1 部分：将面积条件转化 2 分，列出可解离心率的代数式 1 分，$e=3$答案分 1 分；

(2) 第 2 部分：把点代入双曲线建立足够解出答案的方程组 2 分，解得$x_p/x_Q/x_M$与a的关系 1 分，答案分 1 分(l方程斜率不加正负的不给答案分).

21. [解] (1) $g'(x)=2>0$恒成立，故$max\{0,\ g'(x)\}=2$. ……1 分

$f'(x)=3x^2+6x+5=3(x+1)^2+2\geq 2$，当$x=-1$时，$f'(x)=2$，不满足$f'(x)>max\{0,\ g'(x)\}$的条件；$y=f(x)$的图像与$y=g(x)$的图像有公共点$(0,\ 0)$. ……3 分

综上，函数$f(x)=x^3+3x^2+5x$不是$g(x)=2x$的“相关函数”. ……4 分

(2) $g'(x)=m$，$f'(x)=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$. ……5 分

情况①：当$m>0$时，$max\{0,\ g'(x)\}=m$，$f'(x)=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}>m$须对任意实数$x$均成立，

而$f'(x)=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{1}{e^x+\frac{1}{e^x}+2}$，由$e^x>0$，$e^x+\frac{1}{e^x}\geq 2$，$f'(x)=\frac{1}{e^x+\frac{1}{e^x}+2}\in\left(0,\ \frac{1}{4}\right]$. ……6 分

而m不大于$f'(x)$的最小值，故$m\leq 0$，这与$m>0$矛盾，故情况①不成立； ……7 分

情况②：当$m\leq 0$时，$max\{0,\ g'(x)\}=0$，此时$f'(x)=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}>0$显然成立，故原题转为寻找使关于$x$的方程$\frac{e^x}{e^x+1}=mx$有解的$m$,

方法一：由$x=0$显然不是方程的解，可转为$\frac{e^x}{x(e^x+1)}=m$有解. 设$F(x)=\frac{e^x}{x(e^x+1)}$，则

$F'(x)=\frac{xe^x(e^x+1)-e^x(e^x+1+xe^x)}{x^2(e^x+1)^2}=\frac{e^x}{x^2(e^x+1)^2}(x-e^x-1)$. ……8 分

设$G(x)=x-e^x-1$，$G'(x)=1-e^x$，令$G'(x)=0$得$x=0$.

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
$G'(x)$	$+$	0	$-$
$G(x)$	$\nearrow$	极大值$G(0)$	$\searrow$

则$G(x)\leq G(0)=-2$，即$x-e^x-1<0$.

从而$F'(x)<0$，即$y=F(x)$在$(-\infty,\ 0)$和$(0,+\infty)$上严格单调递减， ……9 分

$F(x)=\frac{1}{x}\times\frac{1}{1+\frac{1}{e^x}}$，当$x$趋近于$-\infty$时，$F(x)$趋近于0且为负值；$x$趋近于0且为负值时，$F(x)$趋近于负无穷；当$x$趋近于0且为正值时$F(x)$趋近于正无穷，当$x$趋近于正无穷时$F(x)$趋近于0且为正值，故$m=F(x)\in(-\infty,\ 0)\cup(0,+\infty)$. 结合$m\leq 0$得$m\in(-\infty,\ 0)$.

综合情况①②，实数m的取值范围为$(-\infty,\ 0)$. ……10 分

方法二（方法一的简化版）：由$x=0$显然不是方程的解，可转为$\frac{e^x}{x(e^x+1)}=m$有解. 设$F(x)=\frac{e^x}{x(e^x+1)}$，则$F'(x)=\frac{xe^x(e^x+1)-e^x(e^x+1+xe^x)}{x^2(e^x+1)^2}=\frac{e^x}{x^2(e^x+1)^2}(x-e^x-1)$. ……8 分

由$m=\frac{e^x}{x(e^x+1)}\leq 0$，显然$x<0$，从而$x-e^x-1<0$；$F'(x)<0$，即$F(x)=\frac{e^x}{x(e^x+1)}$在$(-\infty,\ 0)$上严格单调递减， ……9 分

$F(x)=\frac{1}{x}\times\frac{1}{1+\frac{1}{e^x}}$，当$x$趋近于$-\infty$时，$F(x)$趋近于0且为负值；$x$趋近于0且为负值时，$F(x)$趋近于负无穷. 故$m=F(x)\in(-\infty,\ 0)$，结合$m\leq 0$得$m\in(-\infty,\ 0)$.

综合情况①②，实数m的取值范围为$(-\infty,\ 0)$. ……10 分

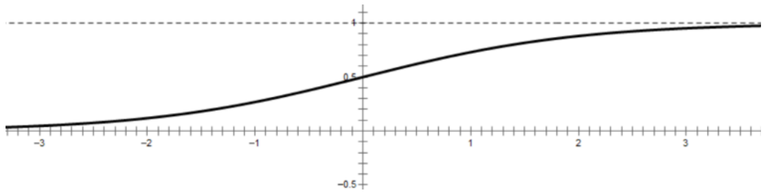
方法三：设$F(x)=\frac{e^x}{e^x+1}-mx$，当$m=0$时，方程$F(x)=0$显然无解；

当$m\neq 0$时，$F\left(\frac{1}{m}\right)=\frac{e^{\frac{1}{m}}}{e^{\frac{1}{m}}+1}-1=-\frac{1}{e^{\frac{1}{m}}+1}<0$，而$F\left(-\frac{1}{m}\right)=\frac{e^{-\frac{1}{m}}}{e^{-\frac{1}{m}}+1}+1>0$，$y=F(x)$的图像为连续不断的曲线，由零点存在性定理$F(x)=0$在$\left(-\frac{1}{m},\ \frac{1}{m}\right)$必有解. ……9 分

故$m\in(-\infty,\ 0)\cup(0,+\infty)$，结合$m\le 0$，$m\in(-\infty,\ 0)$.

综合情况①②，实数m的取值范围为$(-\infty,\ 0)$. ……10 分

方法四：原题即$F(x)=\frac{e^x}{e^x+1}=1-\frac{1}{e^x+1}$与$G(x)=mx$有交点. 作出$F(x)=1-\frac{1}{e^x+1}$图像：

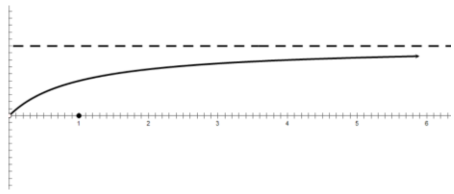


渐进线：$y=0$、$y=1$.

……8 分

而$G(x)=mx$为过原点且斜率存在的直线，为使两图像有交点，$m\in(-\infty,\ 0)\cup(0,+\infty)$. 结合$m\le 0$，$m\in(-\infty,\ 0)$. 综合情况①②，实数$m$的取值范围为$(-\infty,\ 0)$. ……10 分

方法五：设$e^x=t>0$，则转化为$F(t)=1-\frac{1}{t+1}$与$G(t)=m\ln t$有交点. 作$y=F(t)$：



渐进线：$y=1$

……8 分

显然，当$m=0$时无交点，当$m\in(-\infty,\ 0)\cup(0,+\infty)$时$G(t)=m\ln t$均与$y=F(t)$有交点，由$m\le 0$，$m\in(-\infty,\ 0)$. 综合情况①②，实数$m$的取值范围为$(-\infty,\ 0)$. ……10 分

（3）$max\{a,\ b\}$可理解为取a、b中的较大值，对任意实数x，$f'(x)$大于0与$g'(x)$之间的较大者，即$f'(x)>0$且$f'(x)>g'(x)$恒成立，$y=f(x)$严格递增； ……11 分

设$h(x)=f(x)-g(x)$，则$h'(x)=f'(x)-g'(x)>0$，$y=h(x)$严格递增； ……12 分

$y=f(x)$的图像与$y=g(x)$的图像有公共点即存在x使得$f(x)=g(x)$即$h(x)=0$，

结合$y=h(x)$严格递增可得$h(x)=0$的解唯一，不妨设唯一解为x_0，则$h(x_0)=0$即$f(x_0)=g(x_0)$，则$y=f(x)$与$y=g(x)$的图像的唯一公共点为$\left(x_0,f(x_0)\right)$. ……13 分

情况①：当$x>x_0$时，$h(x)>h(x_0)=0$即$f(x)>g(x)$，由$y=f(x)$严格递增得$f[f(x)]>f[g(x)]=g[f(x)]$（即$h[f(x)]>0$），由$f(x)>g(x)$的解集为$(x_0,\ +\infty)$可得$f(x)>x_0$；

情况②：当$x<x_0$时，类似情况①得$f(x)<g(x_0)$，$f[f(x)]<f[g(x)]=g[f(x)]$，（即$h[f(x)]<0$)则$f(x)<x_0$. ……16 分

构造$T(x)=f(x)-x_0$，$y=T(x)$可视作$y=f(x)$沿y轴平移后的结果，由$y=f(x)$的图像为连续不断的曲线可得$y=T(x)$的图像为连续不断的曲线.

任取满足$x_1<x_0<x_2$的x_1、x_2，则$T(x_1)=f(x_1)-x_0<0$，$T(x_2)=f(x_2)-x_0>0$，$T(x_1)\,T(x_2)<0$，由零点存在性定理$y=T(x)$在区间$(x_1,\ x_2)$上有零点. ……17 分

当$x\in(x_1,\ x_0)$时$T(x)<0$，当$x\in(x_0,\ x_2)$时$T(x)>0$，故只能$T(x_0)=0$即$f(x_0)=x_0$，故$y=f(x)$与$y=g(x)$的图像的唯一公共点为$\left(x_0,f(x_0)\right)$等价于(x_0,x_0)在直线$y=x$上.

……18 分

注：1. 第(1)小题结论分不具有 1 分，过程分 3 分共 3 点，正确过程计算$max\{0,\ g'(x)\}$的值、$f'(x)$的导函数求解、写出当$x=-1$时不满足$f'(x)>max\{0,\ g'(x)\}$（反例唯一）各 1 分.

按上述评分标准将考生第(1)小题答题情况分为三个等第，并按调整标准进行最终评分：

答题情况	调整标准
A（4 分）	正确写出$y=f(x)$的图像与$y=g(x)$的图像有公共点(0, 0)或不指出不调整，错写扣 1 分
B（3 分）	正确指出$y=f(x)$的图像与$y=g(x)$的图像有公共点(0, 0)或不指出或错写均不调整得分
C（0-2 分）	正确写出$y=f(x)$的图像与$y=g(x)$的图像有公共点(0, 0)加 1 分，不指出或错写不调整

2. 第(2)小题正确求出$f'(x)$的表达式 1 分，求出$f'(x)$的范围 1 分，分类讨论$m>0$的情况由$m\le 0$推得矛盾或直接由$f'(x)>m$恒成立推得只能$m\le 0$得 1 分，$m\le 0$时的情况 3 分，标答中提供的 5 种方法任写一种即可，其中方法四、五（几何方法）必须突出图像的渐近线并将题设的几何意义用文字描述清楚才能得 3 分，否则酌情扣分；

3. 第(3)小题评分时共分为 3 个部分：

(1) 第 1 部分为两图像公共点唯一的证明，满分 3 分：指出$y=f(x)$严格递增 1 分，构造函数$h(x)=f(x)-g(x)$并说明$y=h(x)$严格递增 1 分，结合$h(x)=0$有解证明出$y=f(x)$与$y=g(x)$的公共点唯一 1 分；

(2) 第 2 部分为情况①②的证明，满分 3 分，按照以下评分标准划分等第并赋分：

分值	答题表现
A（3 分）	完整写出一种情况的论证过程，并同理正确推出另一种情况的结论
B（2 分）	仅完整写出一种情况的论证过程
C（1 分）	仅写出一种情况的部分关键论证过程（如出现$f[f(x)]>g[f(x)]$或$h[f(x)]>0$等）或直接正确写出两种情况的结论但缺少论证过程
D（0 分）	没有作答或作答的内容对本部分证明无实质性意义

(3) 第 3 部分为$f(x_0)=x_0$的证明，满分 2 分：若在第 2 部分的基础上直接声称$f(x)=x_0$的唯一解为x_0或仅通过图像说明的第 3 部分或错误使用单调性说明的不给分；不说明$y=T(x)$的图像连续不断的不扣分；取x_0左右两侧横坐标说明区间上存在零点的论述 1 分，若使用极限符号而未取具体端点的不给分；排除除x_0外其他横坐标使得$f(x)=x_0$的可能性 1 分(使用极限符号的此分可酌情给).