2024年普通高等学校招生全国统一考试

上海　　数学试卷

一、填空题：（本大题共有12题，满分54分，第1~6题每题4分，第7~12题每题5分）

1. 已知集合$A=\{1,2,4\}$，集合$B=\{1,3\}$，则$A\cup B=$_______.

2. i为虚数单位，复数$z_1=1+i$，$z_2=2-i$，则$z_1z_2=$_______.

3. 已知随机变量X服从二项分布$B(5,\ 0.2)$，则$D[X]$的值为_______.

4. 不等式$\frac{5x+3}{x-1}\le 3$的解集为_______.

5. 在$\triangle ABC$中，角A、B、C对应的边长分别为a、b、c，已知$b=2$，$c=\sqrt{2}$，$B=45^{\circ}$，

   则$A=$_______.

6. 函数$f(x)=x^3-\frac{1}{x}$的导函数$y=f'(x)$的最小值为_______.

7. 某校高三（7）班有42名学生，学号为01到42，现采用随机数表法从该班抽取7名学生参与有关学生平均睡眠时间的问卷调查，已知随机数表中第2行到第4行的各数如下：

   07 34 65 52 68 12 60 35 77 73 87 88 08 17 98

   12 74 19 65 40 58 61 42 71 98 44 87 66 36 19

   90 11 03 67 94 01 67 10 54 76 45 14 31 01 67

   若从随机数表的第2行第3列的数开始向右读，则抽取到的学生学号的极差是_______.

8. 定义：圆柱的中心为圆柱上下底面圆心连线的中点.已知某圆锥和某圆柱的母线长相等，且圆锥的底面与圆柱的下底面完全重合，若圆锥的顶点恰好是圆柱的中心，则该圆锥侧面展开图的圆心角为_______.

9. 已知$\left|\vec{a}.\vec{b}\right|=1$，且$\vec{b}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=3$，那么$\vec{a}$在$\vec{b}$上的投影为_______.

10. 设$(x-2)^n=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-2}x^2+a_{n-1}x+a_n(a_0,a_1,\ldots,a_{n-2},\ a_{n-1},a_n\in R)$

    若$a_{n-2}+a_n=2048(n\ge 3且n\in N)$，则$n$的值为_______.

11. 现有2个老师与6个学生去中共一大会址、宋庆龄故居、淞沪抗战纪念馆和龙华烈士陵园4个红色基地参观，8人平均分为4组每组2人，每组随机去一个红色基地，设A事件对应“2个老师去不同的红色基地”，B事件对应“去中共一大会址的不全是老师”，那么$P(A|B)$的值为_______.

12. 在平面直角坐标系xOy中，已知圆A与x轴切于点$(1,0)$，直线l在两坐标轴截距的绝对值相等. 当直线l截圆A所得弦长为1且将圆A分成面积比为1:3的两部分时，称直线l与圆A为一组“线圆对”. 则不同的“线圆对”的组数为_______.

二、选择题（本大题共有 4 题，满分 18 分，第 13~14 题每题 4 分，第 15~16 题每题 5 分）

13. 双曲线Γ：$x^2-y^2=1$的离心率为（　　）.

A. $\sqrt{2}$　　B. 2　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

14. 与三条两两异面的直线a、b、c均相交的直线（　　）.

A. 一定不存在　　B. 可能存在也可能不存在

C. 有且仅有一条　　D. 有无数条

15. 实数$n>m$，奇函数$y=f(x)$的定义域为R，且满足$f(1)=-1$，若不等式$f(x)>0$的解集为$(m,\ n)$，则$f(mn+n-m)$的值和0的大小关系为（　　）.

A. $f(mn+n-m)>0$　　B. $f(mn+n-m)=0$

C. $f(mn+n-m)<0$　　D. $f(mn+n-m)$的值和0的大小关系不确定

16. 记无穷等比数列$\{a_n\}$的公比为q，前n项和为S_n，p为常数，a_i为数列$\{a_n\}$的某一项，且$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$存在，则对于下列两个说法，判断**正确**的是（　　）.

① 任取$p>0$，在区间$(p,+\infty)$中都存在无数个i满足对于每个给定的i都存在$\{a_n\}$使得等式$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=a_i$成立

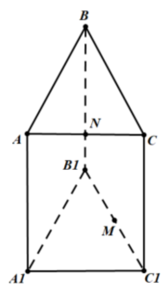
② 任取$p\in(0,1)$，在区间$(-1,-p)$中都存在无数个q满足对每个给定的q存在唯一的i使等式$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=a_i$成立

A. ①②均正确　　B. ①正确②错误　　C. ①错误②正确　　D. ①②均错误

三、解答题（本大题共有 5 题，满分 78 分）

17.（本题满分 14 分，第 1 小题满分 7 分，第 2 小题满分 7 分）

如图，三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的侧棱长为2，$AB=BC=3$，$AA_1\perp A_1B_1$且三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的某个侧面是正方形，点M为边B_1C_1的中点，点N在棱AC上且$AN=1$.



(1）求三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的体积，并证明直线$MN//$平面ABB_1A_1；

(2）求直线B_1C和平面A_1MN的夹角（结果用反三角函数值表示）.

18.（本题满分 14 分，第 1 小题满分 7 分，第 2 小题满分 7 分）

已知函数$f(x)=\sin x\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\sin^2(x+\pi)$，$x\in R$.

(1）求函数$f(x)$的最小正周期和严格单调递减区间；

(2）w为大于0的实数，若函数$f(wx)$在$[0,\pi]$内恰有2024个零点，求w的取值范围.

19.（本题满分 14 分，第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 8 分）

为确定群体中的个体是否感染新冠病毒，通常可采用单管或混管的方式进行核酸检测. 单管，即一人一管，每人使用一个采样管单独采样，检测结果可直接说明被检测者是否感染新冠病毒. 混管，是指将多个人的采集拭子的混合样本放入到一个采样管中，若样本呈现阴性，则可确定所有被检测者均未感染新冠病毒；若样本呈现阳性，则需对样本中的所有被检

测者重新采集单管，从而确定每个个体是否感染新冠病毒. 已知A城市总人口数为3000万，现需对 A 城市内所有人进行核酸检测以确定哪些人感染了新冠病毒. 已知采样单价与检测方式之间满足下表关系：

检测方式	单管	混管（5 人一管）	混管（10 人一管）	混管（20 人一管）
采样单价（元/人）	16	5.5	4	3.5

（1）设检测方式为n人一管，采样单价为y元/人，建立数学模型，求解y关于n的回归方程，并估计 A 城市采用 50 人一管的采样方式时所有采样管的采样总价（数据均精确到小数点后一位，参考公式：一个采样管的采样总价＝采样单价×单个采样管中被检测者的数量）；

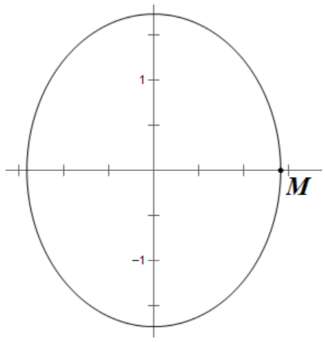
（2）在以下两条模型假设的基础上额外补充一条模型假设，建立数学模型求解此次检测使用采样管总数的最小值.

模型假设：①假设 A 城市每个人感染新冠病毒的概率均为 0.001，且人与人之间的感染概率互不影响；

②单个采样管中的被检测者相同，为不超过 100 的正整数.

20.（本题满分 18 分，第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 6 分，第 3 小题满分 8 分）

如图，椭圆Γ: $\frac{y^2}{3}+\frac{x^2}{2}=1$的右顶点为$M$，焦点为$F$的抛物线$y^2=2px(p>0)$与$\Gamma$交于$Q$、$R$两点.



（1）当点M与点F重合时，求实数p的值；

（2）当$\angle QFR=120°$时，求$|QR|$的长；

（3）设过点F的直线l与Γ交于S、T两点，点J既在直线l上，又在抛物线$y^2=2px(p>0)$上，若$|TJ|=|JF|=|FS|>0$，求直线l的方程.

21.（本题满分 18 分，第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 6 分，第 3 小题满分 8 分）

设函数$y=f(x)$，$x\in D$，定义：若对于任意的$x_0\in D$，函数$f(x)$在点$\left(x_0,f(x_0)\right)$处的切线与函数$y=f(x)$，$x\in D$的图像有且仅有一个公共点，则称函数$f(x)$为“孤独函数”.

（1）判断下列两个函数是否是“孤独函数”？（直接写出答案）

① $f(x)=\tan x$；

② $f(x)=\begin{cases}x^2 & 0<x<1\\ e^{x-1} & x>1\end{cases}$；

（2）实数$a\neq 0$，求证：函数$f(x)=x\ln(ax)$是“孤独函数”；

（3）判断定义域为$(0,+\infty)$的三次函数$f(x)$是否是孤独函数，并证明你的结论.

2024年普通高等学校招生全国统一考试

上海　　数学试卷

答案要点及评分标准

说明

1. 本解答列出试题的解法，如果考生的解法与所列解法不同，可参照解答中评分标准的精神进行评分.

2. 评阅试卷，应坚持每题评阅到底，不要因为考生的解答中出现错误而中断对该题的评阅. 当考生的解答在某一步出现错误，影响了后继部分，但该步以后的解答未改变这一题的内容与难度时，可视影响程度决定后面部分的给分，这时原则上不应超过后面部分应给分数之半，如果有较严重的概念性错误，就不给分.

解答

一、(第1题至第12题)

1. $\{1,2,3,4\}$　2. $3+i$　3. 0.8　4. $[-3,1)$　5. 105°　6. $2\sqrt{3}$
7. 32　8. $\sqrt{3}\pi$　9. $\frac{1}{2}\vec{b}$或$-\frac{1}{4}\vec{b}$　10. 8　11. $\frac{8}{9}$　12. 12

二、(第13题至第16题)

题　号	13	14	15	16
代　号	A	D	B	A

三、(第17题至第21题)

17. [解] (1) 三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的3个侧面中ABB_1A_1和CBB_1C_1为长为3，宽为2的平行四边形，一定不为正方形，故侧面ACC_1A_1为正方形，　……1分

从而$AA_1\perp A_1C_1$，由$AA_1\perp A_1C_1$，$AA_1\perp A_1B_1$，$A_1C_1\cap A_1B_1=A_1$得$AA_1\perp$平面$A_1B_1C_1$，

则三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$为直三棱柱，AA_1为三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的高.　……2分

$AC=CC_1=2$，由$AN=1$得点N为边AC中点，$BN\perp AC$，由勾股定理$BN=2\sqrt{2}$，从而$\triangle ABC$的面积为$2\sqrt{2}$.　……3分

则三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的体积$V_{ABC-A_1B_1C_1}=S_{\triangle ABC}h=4\sqrt{2}$.　……4分

如图1，取AB边中点D，联结DN，DN为$\triangle ABC$中位线，$DN//BC$且$DN=\frac{1}{2}BC$……5分

由$BC//MB_1$且$MB_1=\frac{1}{2}BC$得$DN//MB_1$且$DN=MB_1$. 因为$DN//MB_1$可得

点D、N、M、B_1共面，进而四边形$DNMB_1$为平行四边形，故$MN//DB_1$.　……6分

由直线MN不在平面ABB_1A_1上，直线DB_1在平面ABB_1A_1上由直线和平面平行的判定定理可得$MN//$平面ABB_1A_1.　……7分

(2) 如图2，以点A_1为坐标原点，垂直$\overrightarrow{A_1C_1}$向外、$\overrightarrow{A_1C_1}$、$\overrightarrow{A_1A}$为x、y、z轴正方向

建立空间直角坐标系，　……8分

则$A_1(0,0,0)$，$B_1\left(-2\sqrt{2},1,0\right)$，$C(0,2,2)$，$M\left(-\sqrt{2},\frac{3}{2},0\right)$，$N(0,1,2)$，

$\overrightarrow{B_1C}=\left(2\sqrt{2},1,2\right)$，　……9分

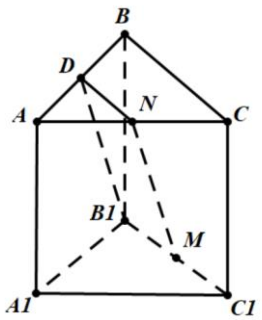
$\overrightarrow{A_1N}=(0,1,2)$，$\overrightarrow{A_1M}=\left(-\sqrt{2},\ \frac{3}{2},0\right)$， ......10 分

设平面A_1MN的法向量为$\vec{n}=(a,\ b,\ c)$，则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1M}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1N}=0\end{cases}$即$\begin{cases}b+2c=0\\ -\sqrt{2}a+\frac{3}{2}b=0\end{cases}$， ......11 分

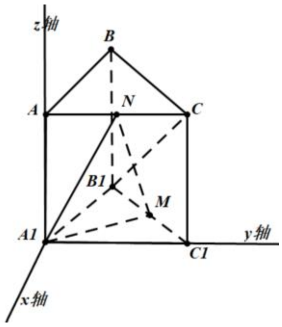
取$a=4$，$b=-2$，$c=3\sqrt{2}$，则$(3\sqrt{2},4,-2)$是平面A_1MN的一个法向量. ......12 分

设直线B_1C和平面A_1MN的夹角为$\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，$\sin\theta=\left|\cos\langle\overrightarrow{B_1C},\ \vec{n}\rangle\right|=\frac{6}{247}\sqrt{494}$，

故直线B_1C和平面A_1MN的夹角为$arc\ sin\frac{6}{247}\sqrt{494}$. ......14 分



（图 1）



（图 2）

注：1. 本题第（1）小题也可使用空间向量证明，证明满分 3 分；

2. 第（2）小题若考生采用几何法可按解答完成度相应赋分；

3. 第（2）小题采用空间向量计算（即标答方法）答案分 2 分，若未设出直线B_1C和平面A_1MN的夹角$\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$并写出公式$\sin\theta=\left|\cos\langle\overrightarrow{B_1C},\ \vec{n}\rangle\right|$酌情扣 1 分答案分；

4. 本题考生若未证明垂直关系直接使用空间向量（1）（2）小题各扣一分（2、8 得分点）.

18. [解]（1） $f(x)=\sin x\cos x+\sin^2 x$， ......1 分

$=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}$， ......2 分

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}$， ......3 分

从而$y=f(x)$的最小正周期为π. ......4 分

函数$y=f(x)$严格递减时$2k\pi+\frac{1}{2}\pi\le 2x-\frac{\pi}{4}\le 2k\pi+\frac{3}{2}\pi$， ......5 分

解得$k\pi+\frac{3}{8}\pi\le x\le k\pi+\frac{7}{8}\pi$，即$y=f(x)$的严格单调递减区间为

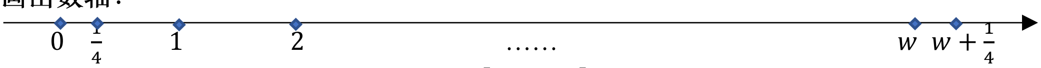
$\left[k\pi+\frac{3}{8}\pi,\ k\pi+\frac{7}{8}\pi\right](k\in Z)$ . ...7 分

（2）$f(wx)=0$即$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2wx-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}=0$，即$\sin\left(2wx-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$， ......8 分

解得$2wx-\frac{\pi}{4}=2k\pi-\frac{\pi}{4}$或$2k\pi-\frac{3}{4}\pi$， ......9 分

由$w>0$得$x=\frac{k\pi}{w}$或$\frac{k\pi-\frac{\pi}{4}}{w}(k\in Z)$，由于$x\in[0,\pi]$，解得$k\in[0,w]$或$k\in\left[\frac{1}{4},w+\frac{1}{4}\right]$，原题即问$[0,w]$和$\left[\frac{1}{4},w+\frac{1}{4}\right]$中共有2024个整数$k$时$w$的取值范围. ......10 分

画出数轴：



若不存在整数m满足$w<m\le w+\frac{1}{4}$，则$\left[\frac{1}{4},w+\frac{1}{4}\right]$中的整数为1，......,$Z$；$[0,w]$中的整数为0，1，......,$Z$（$Z$为不大于$w$的最大整数），和必为奇数个，与共有2024个零点矛盾，故存在整数m满足$w<m\le w+\frac{1}{4}$， ......12 分

则$\left[\frac{1}{4},w+\frac{1}{4}\right]$中的整数为 1，......,$m$；$[0,w]$中的整数为0，......,$m-1$，由1，......,$m$共有1012个数，$m=1012$， ......13 分

由$w<m\le w+\frac{1}{4}$得$w\in\left[\frac{4047}{4},1012\right)$，故实数$w$的取值范围为$\left[\frac{4047}{4},1012\right)$. ......14 分

注：本题后 5 分得分点若考生与标答思路不同，按以下标准评分：

1. 答案分 2 分（若答案端点正确但区间开闭错误可得 1 分），过程分 3 分；

2. 解答过程中若考生从小到大逐一列举x（或$2wx-\frac{\pi}{4}$）的可能值，如0，$\frac{\frac{3}{4}\pi}{w}$，$\frac{\pi}{w}$，$\frac{\frac{7}{4}\pi}{w}$，……，过程分 1 分起评，若第 2024、2025 个值均列举正确过程分评 2 分，正确列出不等式则给全过程分 3 分；分两类情况列举的，若不说明大小关系，酌情扣 1 分；直接代入k的值的，过程分不超过 1 分.

19. [解]（1）计算一个采样管的采样总价ny（元）并列表：

单个采样管中被检测者的数量n（人）	1	5	10	20
一个采样管的采样总价ny（元）	16	27.5	40	70

……1 分

可得线性回归方程为$ny=2.8n+12.9$，即$y=2.8+\frac{12.9}{n}$ ……2 分

相关系数$r\approx 0.9994$，可断定一个采样管的采样总价ny与单个采样管中被检测者的数量n线性正相关，回归方程信度高. ……3 分

当$n=50$时，可得采样单价y为 3.058 元， ……4 分

A 城市总人口数为 3000 万，则 3.058×3000 万=9.174×10^7元， ……5 分

[答]（1）$y=2.8+\frac{12.9}{n}$；当$n=50$时，所有采样管的采样总价约为 9.2×10^7元.

……6 分

（2）模型假设：假设感染者结果必显阳性，不考虑样本稀释问题；不考虑所计算出混管数量不为整数的情况，忽略微小误差等.（写出一条合理的即可） ……7 分

不妨假设为检测出单个人阳性或阴性所花的总次数为随机变量X，A市总人数为M，$M=3\times10^7$，原题即求$ME[X]$的最小值，由于M为定值，即求$E[X]$的最小值.

设一个人阳性的概率为$p=0.001$，假设采样方式为n混一，

情况①：$n=1$即单管检测，此时$E[X]=1$，$ME[X]=3\times10^7$； ……8 分

情况②：$n\in[2,200]\cap N$，类似伯努利实验，单个人采样管呈阴性的可能性为$1-p$，

n个人采样管呈阴性的可能性为$(1-p)^n$，此时不需要额外检测；n个人采样管呈阳性的可能性为$(1-p)^n$，此时需要额外检测n次，共检测$(n+1)$次， ……9 分

故n个人的总检测次数nX服从以下分布：

$$\begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ (1-p)^n & 1-(1-p)^n \end{pmatrix}$$

数学期望$E[nX]=(1-p)^n+\ n+1-(n+1)(1-p)^n=\ n+1-n(1-0.001)^n$，

由数学期望的线性性质$E[nX]=nE[X]$可得$E[X]=1+\frac{1}{n}-0.999^n$. ……10 分

设$f(n)=E[X]=1+\frac{1}{n}-0.999^n$，$f'(n)=-\frac{1}{n^2}-0.999^n\ln 0.999$，$\ln 0.999<0$，

$f'(n)=\frac{0.999^n n^2(-\ln 0.999)-1}{n^2}$，设$g(n)=0.999^n n^2$，$g'(n)=n0.999^n(2+\ln 0.999n)$，

由$n\in[2,100]\cap N$，$n>0$，$0.999^n>0$，$2+\ln 0.999\,n>2+100\ln 0.999>0$，

$g'(n)>0$，$g(n)=0.999^n n^2$严格单调增， ……11 分

设$0.999^{n_0}{n_0}^2(-\ln 0.999)-1=0$，则$y=f(n)$单调性可如下列表：

n	$(2,n_0)$	n_0	$(n_0,+\infty)$
$f'(n)$	$-$	0	$+$
$f(n)$	$\searrow$	极小值$f(n_0)$	$\nearrow$

而$n=32$时，$f'(n)<0$；$n=33$时$f'(n)>0$ ，故由零点存在性定理$n_0\in(32,33)$.

……12 分

计算得$f(32)<f(33)$，故$n=32$时$E[X]$的最小值为$1+\frac{1}{32}-0.999^{32}$，……13 分

$ME[X]\approx 1882768$管<3000000 管，故采样管最小值为1882768. ……14 分

[答]（2）当采用 32 人一管的采样方式时此次检测使用采样管总数最小，约1882768管.

注：本题第（1）小题计算y与$\frac{1}{n}$线性回归关系的也可得分；第（2）小题不分析单调性直接写出结果扣 2 分.

20. [解]（1）点M、点F坐标为$(\sqrt{2},\ 0)$. ……2 分

由抛物线焦点定义$\frac{p}{2}=\sqrt{2}$，得实数p的值为$2\sqrt{2}$. ……4 分

（2）Q、R对称，不妨计算Q在第一象限的情况，由对称性QR与x轴垂直，

设QR与x轴交于点H，$\angle QFR=120°$则$\angle QFH=60°$. 由抛物线定义$QF=x_Q+\frac{p}{2}$. 在$\triangle QFH$中，$QH=\frac{\sqrt{3}}{2}QF=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x_Q+\frac{p}{2}\right)$，$HF=\frac{1}{2}QF=\frac{1}{2}\left(x_Q+\frac{p}{2}\right)$. ……5 分

情况①：点F在点H右侧，此时$x_Q=x_H=x_F-HF=\frac{p}{2}-\frac{1}{2}\left(x_Q+\frac{p}{2}\right)$，可解得$x_Q=\frac{p}{6}$，

……6 分

代入椭圆方程中，结合$p>0$解得$p=2\sqrt{2}$. ……7 分

$Q\left(\frac{\sqrt{2}}{3},\frac{2}{3}\sqrt{6}\right)$，则$QR=2y_Q=\frac{4}{3}\sqrt{6}$. ……8 分

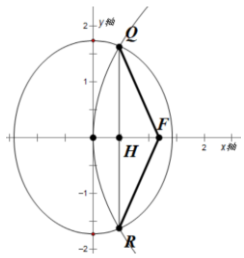
情况②：点F在点H左侧，此时$x_Q=x_H=x_F+HF=\frac{p}{2}+\frac{1}{2}\left(x_Q+\frac{p}{2}\right)$，可解得$x_Q=\frac{3}{2}p$，

……9 分

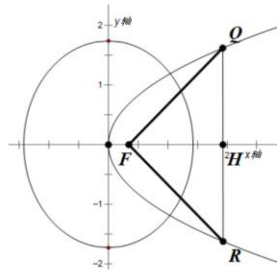
$QH=y_Q=\sqrt{3}p$，$Q\left(\frac{3}{2}p,\sqrt{3}p\right)$，代入椭圆方程中，由$p>0$解得$p=\frac{2}{17}\sqrt{34}$，

$Q\left(\frac{3}{17}\sqrt{34},\frac{2}{17}\sqrt{102}\right)$，$QR=2y_Q=\frac{4}{17}\sqrt{102}$. ……10 分

综上，QR的长为$\frac{4}{3}\sqrt{6}$或$\frac{4}{17}\sqrt{102}$.



（情况①）



（情况②）

（3）若直线l的斜率不存在，则$|TF|=|FS|=|TJ|=|JF|=|FS|$，不成立，舍去；

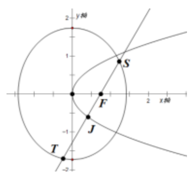
……11 分

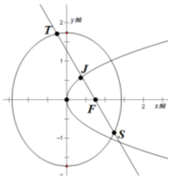
设直线l的方程为$y=k\left(x-\frac{p}{2}\right)$，与椭圆$\Gamma$：$\frac{y^2}{3}+\frac{x^2}{2}=1$联立，$\begin{cases}y=k\left(x-\frac{p}{2}\right)\\3x^2+2y^2=6\end{cases}$化简得

$(2k^2+3)x^2-2pk^2x+\frac{p^2k^2-12}{2}=0$，判别式$\triangle=4p^2k^4-2(2k^2+3)(p^2k^2-12)>0$，

得$8+\frac{12}{k^2}>p^2$. 由韦达定理，$x_T+x_S=\frac{2pk^2}{2k^2+3}$. ……12 分

由于$|TJ|=|JF|=|FS|$，点S、T、J、F两两不重合，且S、T、J、F均在直线l上，故其相对位置只能如右图两种情况所示，则S、T、J、F四点的横纵坐标均成等差数列，则由$x_T+x_S=x_F+x_J=x_J+\frac{p}{2}$可得$x_J=\frac{2pk^2}{2k^2+3}-\frac{p}{2}=\frac{p(2k^2-3)}{2(2k^2+3)}$.





由点J在直线$y=k\left(x-\frac{p}{2}\right)$上可得$y_J=\frac{pk}{2}\left(\frac{2k^2-3}{2k^2+3}-1\right)=-\frac{3pk}{2k^2+3}$,则$J\left(\frac{p(2k^2-3)}{2(2k^2+3)},-\frac{3pk}{2k^2+3}\right)$.

……13 分

把点J代入抛物线$y^2=2px(p>0)$，得$\frac{9p^2k^2}{(2k^2+3)^2}=\frac{p^2(2k^2-3)}{2k^2+3}$，化简得$4k^4-9k^2-9=0$，

即$(k^2-3)(4k^2+3)=0$，因为$k^2\geq 0$，故$k^2=3$，$k=\pm\sqrt{3}$. ……14 分

代回判别式，得$p^2<12$，$x_T+x_S=\frac{2}{3}p$，$x_J=\frac{p}{6}$. 由x_T、x_S、x_F、x_J成等差数列可得

$x_S=2x_F-x_J=\frac{5}{6}p$，$y_S=k\left(x_S-\frac{p}{2}\right)=\frac{k}{3}p$，$S\left(\frac{5}{6}p,\frac{k}{3}p\right)$ ……15 分

将点S代入$\frac{y^2}{3}+\frac{x^2}{2}=1$中，结合$k^2=3$可得$p^2=\frac{24}{11}<12$（判别式检验）， ……16 分

因为$p>0$，所以$p=\frac{2}{11}\sqrt{66}$. ……17 分

因此，直线l的方程为$y=\sqrt{3}x-\frac{3}{11}\sqrt{22}$或$y=-\sqrt{3}x+\frac{3}{11}\sqrt{22}$. ……18 分

注：1. 第（2）小题评分标准：完整解答出任意一种情况的得 4 分，有利用抛物线准线用p表示其余坐标思想的给 1 分，得出x_Q和p关系的给 2 分，解对p的给 3 分，得出一个正确QR长的给 4 分；另一种情况满分 2 分，得出x_Q和p关系的给 1 分，得出正确QR长的给 2 分.

2. 第（3）小题答案分 1 分，k漏一解的不扣过程分但不给答案分（总扣 1 分），若用求根公式表示坐标或使用其他方法的，解对斜率的给 4 分，p的值 3 分.

21. [解]（1）①是； ……2 分

②不是； ……4 分

（2）任取$x_0 \in D$，$y = f(x)$在$\left(x_0, f(x_0)\right)$处的切线方程为

$y - x_0 \ln(ax_0) = (\ln(ax_0) + 1)(x - x_0)$， ……5 分

与$y = f(x)$联立，得$x \ln(ax) - x_0 \ln(ax_0) = (\ln(ax_0) + 1)(x - x_0)$，可化简为

$x \ln(ax) - (\ln(ax_0) + 1)x + x_0 = 0$， ……6 分

设$g(x) = x \ln(ax) - (\ln(ax_0) + 1)x + x_0$，$g'(x) = \ln(ax) - \ln(ax_0) = \ln\frac{x}{x_0}$， ……7 分

x	$x < x_0$	x_0	$x > x_0$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	极小值$g(x_0)$	$\nearrow$

……8 分

……9 分

故$g(x) \geq g(x_0) = 0$，当$x < x_0$时，$y = g(x)$严格递减，$g(x) > g(x_0) = 0$；当$x > x_0$时，$y = g(x)$严格递增，$g(x) > g(x_0) = 0$；故$g(x) = 0$仅有一根x_0即切线与$y = f(x)$仅有一个交点$\left(x_0, f(x_0)\right)$，由于x_0的任意性，函数$f(x) = x \ln(ax)$是“孤独函数”.

……10 分

（3）设$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d(a \neq 0)$，任取$x_0 \in (0, +\infty)$，$y = f(x)$在$\left(x_0, f(x_0)\right)$处的切线方程为$y - ({ax_0}^3 + {bx_0}^2 + cx_0 + d) = (3{ax_0}^2 + 2bx_0 + c)(x - x_0)$，……11 分

与$y = f(x)$联立，

得$ax^3 + bx^2 + cx + d - ({ax_0}^3 + {bx_0}^2 + cx_0 + d) = (3{ax_0}^2 + 2bx_0 + c)(x - x_0)$，

可化简为$ax^3 + bx^2 - ({ax_0}^3 + {bx_0}^2) = (3{ax_0}^2 + 2bx_0)(x - x_0)$，

而$ax^3 + bx^2 - ({ax_0}^3 + {bx_0}^2) = (x - x_0)\left(ax^2 + (ax_0 + b)x + ({ax_0}^2 + bx_0)\right)$，

得$(x - x_0)\left(ax^2 + (ax_0 + b)x - (2{ax_0}^2 + bx_0)\right) = 0$， ……12 分

即$(x - x_0)^2(ax + 2ax_0 + b) = 0$，从而$x = x_0$或$x = -\frac{b}{a} - 2x_0$. ……13 分

情况①：当$ab \geq 0$时，$-\frac{b}{a} - 2x_0 \leq -2x_0 < 0$， ……14 分

方程仅有x_0一根即在$(0, +\infty)$切线与$y = f(x)$仅有一个交点$\left(x_0, f(x_0)\right)$，由于x_0的任意性，$(0, +\infty)$中的所有数均满足上述性质，即三次函数$f(x)$是“孤独函数”……15 分

情况②：当$ab < 0$时，$-\frac{b}{a} - 2x_0 > -2x_0$，

若$-\frac{b}{a} - 2x_0 \leq 0$即$x_0 \geq -\frac{b}{2a}$，同情况①方程仅有$x_0$一根，故$[-\frac{b}{2a}, +\infty)$中所有数均满足切线与$y = f(x)$仅有一个交点$\left(x_0, f(x_0)\right)$； ……16 分

若$-\frac{b}{a} - 2x_0 > 0$即$x_0 < -\frac{b}{2a}$，

当$x_0 = -\frac{b}{a} - 2x_0$即$x_0 = -\frac{b}{3a}$时切线与$y = f(x)$仅有$x_0$一根， ……17 分

任取$x_0\in\left(0,-\frac{b}{3a}\right)\cup\left(-\frac{b}{3a},-\frac{b}{2a}\right)$，函数$f(x)$在点$\left(x_0,f(x_0)\right)$处的切线与函数$y=f(x)$，$x\in D$的图像有$\left(x_0,f(x_0)\right)$、$\left(-\frac{b}{a}-2x_0,f\left(-\frac{b}{a}-2x_0\right)\right)$两个公共点，故三次函数$f(x)$不是孤独函数. ……18 分

综上，当三次函数$f(x)$的三次项系数和二次项系数乘积非负时，函数$f(x)$是"孤独函数"，当三次函数$f(x)$的三次项系数和二次项系数乘积为正值时，函数$f(x)$不是"孤独函数".

注：1. 第（2）小题由于$D=\begin{cases}(0,+\infty) & a>0\\(-\infty,\ 0) & a<0\end{cases}$列表第一行（第 8 得分点）处若不讨论直接写不正确的具体区间则扣 1 分；

2. 第（3）小题评分时分为 2 个部分：解出方程两根x_0、$-\frac{b}{a}-2x_0$满分 3 分，写出切线通式 1 分，联立、求解满分 2 分（若求导酌情给分）；后续讨论满分 5 分，具体评分规则如下：

①若使用几何法给分不超过 3 分，不进行分类不得分，情况①结论正确得 1 分，情况②结论正确给 1 分，如能指出x_0的具体范围（除去对称中心$-\frac{b}{3a}$）并指出其范围有上界可再给 1 分；

②若有解出方程两根x_0、$-\frac{b}{a}-2x_0$的基础并进行代数求解，分类正确 1 分，对$-\frac{b}{a}-2x_0$不在D的范围内的讨论共 2 分，特殊情况$x_0=-\frac{b}{3a}$及具体范围$\left(0,-\frac{b}{3a}\right)\cup\left(-\frac{b}{3a},-\frac{b}{2a}\right)$各 1 分.