Interpolacja według metody Hermite'a

Łukasz Wala
AGH, Wydział Informatyki, Elektroniki i Telekomunikacji
Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice 2021/2022

Kraków, 7 kwietnia 2022

1 Opis problemu

Główną ideą zadania jest zbadanie zachowania wielomianów interpolacyjnych dla poniższej funkcji skonstruowanych metodą Hermite'a korzystając z różnego rozmieszczenia węzłów: równomiernie oddalonych oraz według pierwiastków wielomianu Czebyszewa.

Badana funkcja:

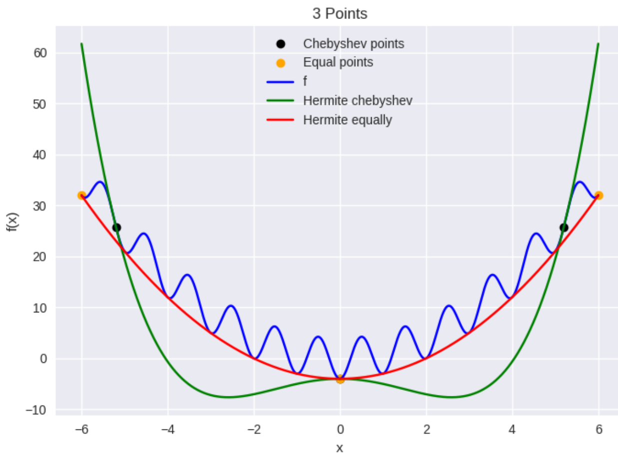
$$f(x) = x^2 - m \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{k}\right)$$

$$f'(x) = 2x + \sin(\frac{\pi x}{k}) \cdot \frac{m\pi}{k}$$

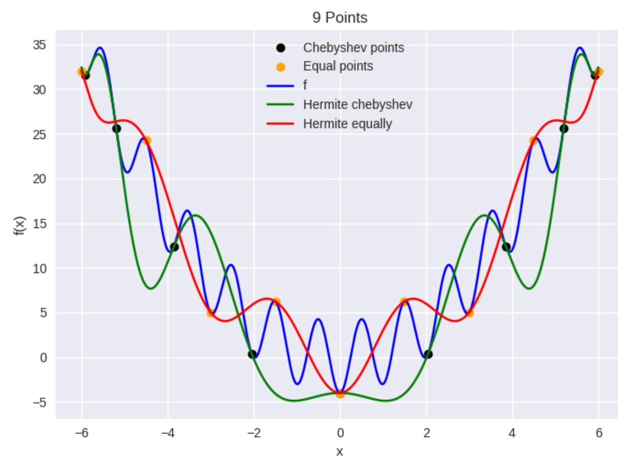
Gdzie $k = \frac{1}{2}$, $m = 4$ oraz $x \in [-6, 6]$.

2 Opracowanie

Do skonstruowania wielomianu użyty zostanie załączony program w języku Python. Zakres liczb węzłów, dla których badane będą wielomiany wynosi 3-50, gdzie dla każdego węzła rozważana jest wartość funkcji w punkcie i jej pierwsza pochodna (czyli np. 20 węzłów = 40 informacji).

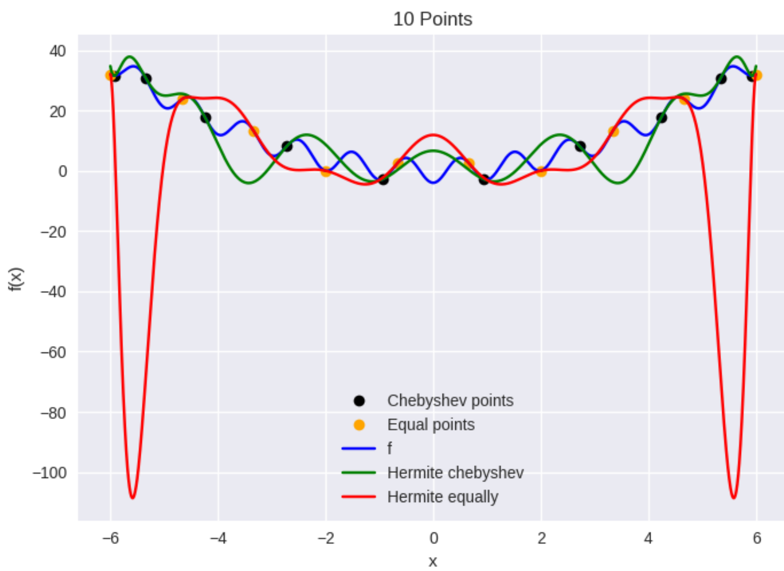


Rysunek 1: Metoda Hermite'a dla 3 punktów



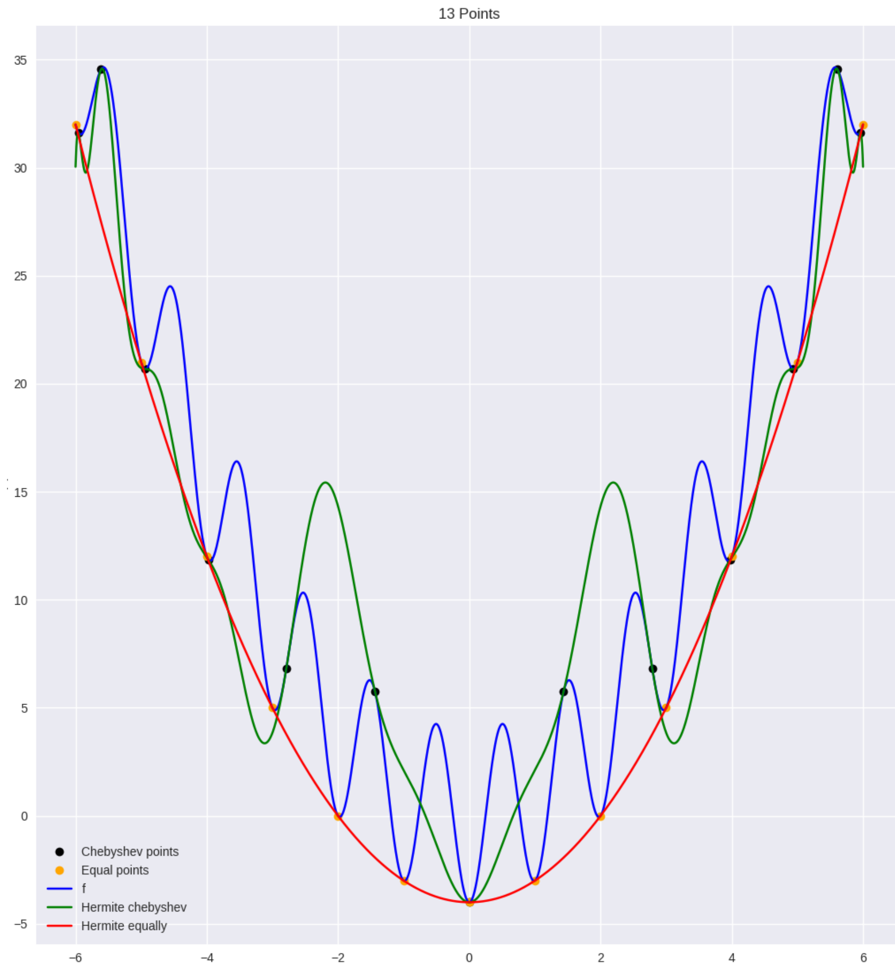
Rysunek 2: Metoda Hermite'a dla 9 punktów

Można zauważyć, że w węzłach zarówno wartości jak i pochodne (kierunek zmiany wawrtości funkcji jest wizualnie podobny, są do siebie niejako styczne) są równe.



Rysunek 3: Metoda Hermite'a dla 10 punktów - efekt Rungego

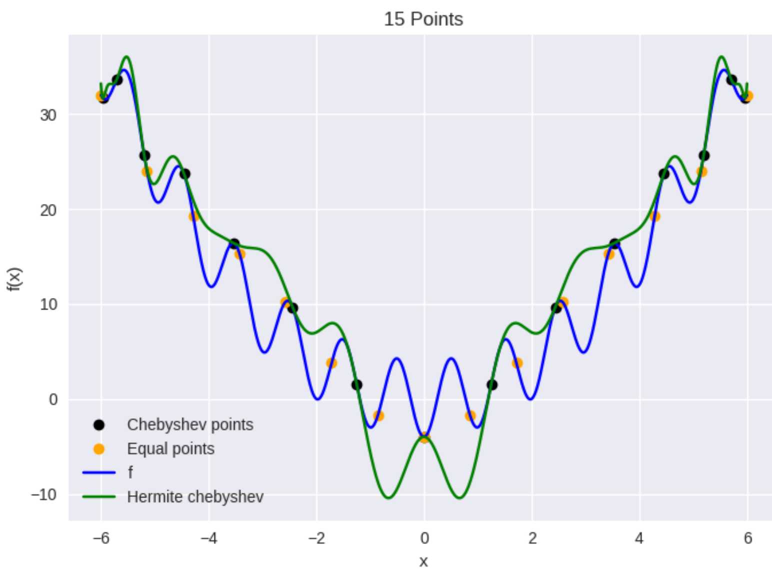
Dla 10 węzłów rozmieszczonych równomiernie zaczyna pojawiać się efekt Rungego, pogłębia się dla większych liczb węzłów (dla porównania, w zagadnieniu Lagrange'a pojawiał się przy 18 węzłach). Co za tym idzie, równomierne rozmieszczenie nie skutkuje zadowalającym przybliżeniem funkcji f. Dla punktów rozmieszczonych według węzłów Czebyszewa efekt nie występuje.



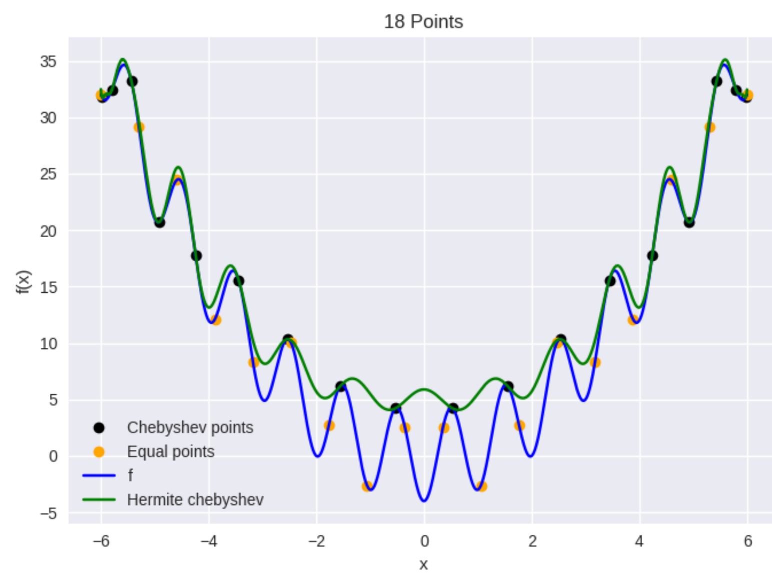
Rysunek 4: Metoda Hermite'a dla 13 punktów

Dla 13 węzłów (26 informacji) można zaobserwować pewne zjawisko: pomimo tego, że efekt Rungego wystąpił dla mniejszej liczby węzłów, tutaj nie występuje (być może jest to związane z faktem, że węzły występują prawie idealnie w minimach funkcji). Dla zagadnienia Lagrange'a prze 13 węzłach efekt Rungego jeszcze nie występuje (wielomian jest 12 stopnia, tutaj: 25).

Poniżej wykresy już tylko dla rozmieszczenia według węzłów Czebyszewa:

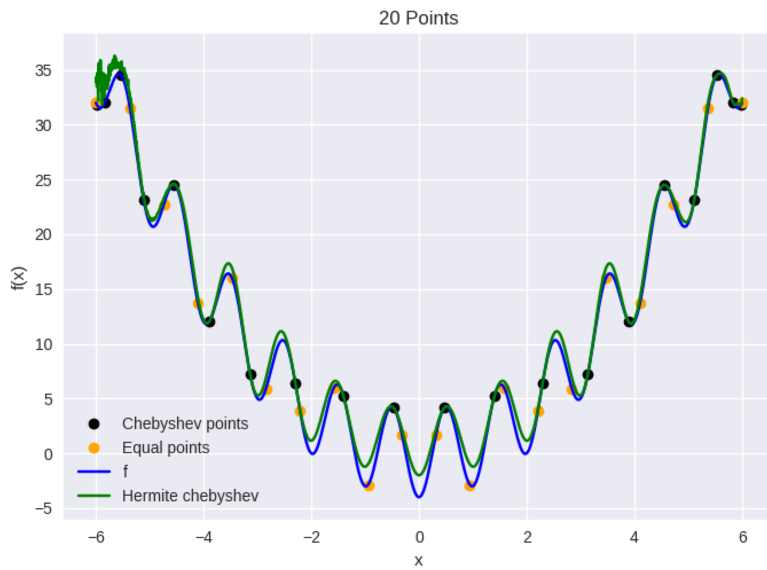


Rysunek 5: Metoda Hermite'a dla 15 punktów



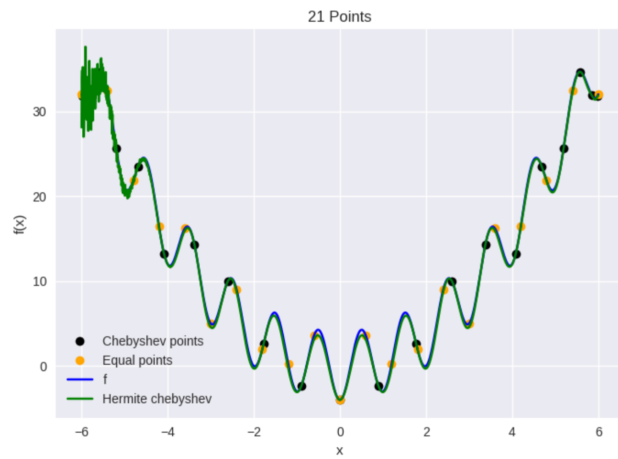
Rysunek 6: Metoda Hermite'a dla 18 punktów

Na powyższych wykresach można zauważyć ciekawe zjawisko: dla nieparzystej liczby punktów środkowy zawsze występuje w punkcie 0, co w połączeniu z faktem, że funkcja ma minimum lokalne w punkcie 0 (pochodna równa 0), sprawia, że dla wielomianu interpolacyjnego czasem wystepuje tam również minimum (dobre przybliżenie), a czasem maksimum (słabe przybliżenie).



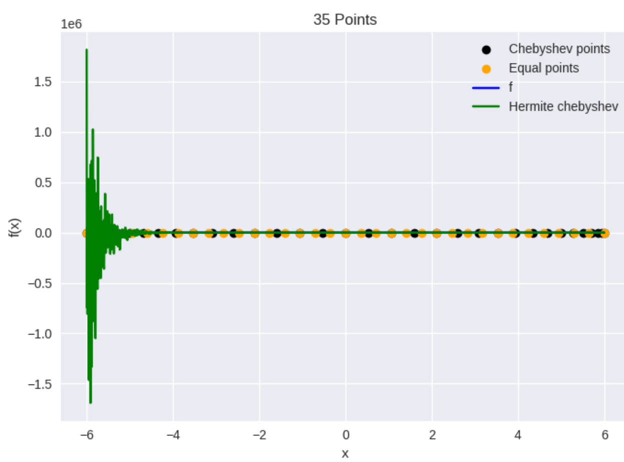
Rysunek 7: Metoda Hermite'a dla 20 punktów

Dla 20 węzłów (40 informacji) zaczyna występować (przy lewym krańcu przedziału) degradacja jakości wielomianu i pojawiają się błędy (wielomian nawet nie przechodzi przez punkty węzłów interpolacyjnych). Problemy te wynikają najprawdopodobniej z błędów obliczeń związanymi z precyzją reprezentacji liczb zmiennoprzecinkowych. Dla metody Newtona w zagadnieniu Lagrange'a podobny efekt pojawiał się przy 38 węzłach.



Rysunek 8: Metoda Hermite'a dla 21 punktów

Wraz ze zwiększaniem liczby węzłów efekt pogłębia się. Poniżej przykład dla 35 węzłów:



Rysunek 9: Metoda Hermite'a dla 35 punktów

Pozostaje obliczenie dokładności i skonfrontowanie wyników z wnioskami uzyskanymi na podstawie wykresów. Miarami dokładności będą:

- Średnia kwadratów odległości wartości wielomianu oraz funkcji f dla 1000 równo oddalonych punktów,
- Maksymalna odległość wartości wielomianu oraz funkcji f dla 1000 równo oddalonych punktów.

Liczba węzłów	Śred. kwadratów		Maks. odległości	
	Czebyszew	rów. odd.	Czebyszew	rów. odd.
3	158.169	23.976	29.751	8.000
4	419.003	23.976	39.794	8.000
5	24.093	23.976	9.990	8.000
6	81.197	107.258	18.078	20.362
7	59.150	23.976	16.578	8.000
8	94.262	849.686	25.812	95.068
9	38.474	17.230	16.272	7.985
10	46.306	1532.943	20.138	143.211
11	46.427	188494.398	17.497	1703.888
12	52.526	2311475.213	17.800	6280.354
13	28.573	23.976	14.438	8.000
14	33.156	168221674	14.867	59270.349
15	27.904	1877419731	14.097	207202.451
16	26.149	6924927945	19.712	415272.937
17	21.467	12966654597	14.959	590415.586
18	10.728	14596394950	9.883	650177.679
19	3.225	10846984985	4.781	580113.360
20	0.802	5654153194	4.002	432505.466
21	0.408	2158371055	8.306	275262.696
22	2.109	623289078	23.164	152329.268
23	44.566	139687143	79.292	74199.900
24	392.104	24764958	338.275	32023.990
25	1566.757	3564716	561.743	12462.642
26	51715.354	402114	2732.548	4414.039

Tabela 1: Dokładności dla poszczególnych metod i rozmieszczeń

Na podstawie tabeli dokładności można dojść do podobnych wniosków co w przypadku wykresów: dla równomiernego rozmieszczenia węzłów dokładność rośnie do ok. 10 węzłów, potem zaczyna stale spadać, natomiast dla rozmieszczenia według węzłów Czebyszewa dokładność rośnie do ok. 21 węzłów, dla większej liczby spada. Liczby węzłów, dla których osiągnięta została najlepsza dokładność to: 21 (dla średniej kwadratów różnic) oraz 20 (dla maksimum odległości). Porównując z metodą Newtona dla zagadnienia Lagrange'a: tam dokładność (miary średniej kwadratów) ok. 0.4 (najlepsza osiągnięta metodą Hermite'a) została osiągnięta dla 42 węzłów (czyli dla porównywalnej liczby informacji, ale dwa razy większej liczby węzłów). Metoda Hermite'a w ogólności zachowuje się podobnie do metody Newtona dla podobnej liczby informacji (co oznacza, że również cierpi z powodu błędów obliczeniowych dla dużych liczb węzłów, z czym nie było problemu w metodzie Lagrange'a).

3 Wnioski

Metoda Hermite'a może posłużyć do przybliżania funkcji wielomianami interpolacyjnymi, kiedy, oprócz wartości punktów, znane są pochodne w tych punktach. Do skutecznego przybliżenia muszą być zachowane pewne warunki: używanie węzłów Czebyszewa, żeby uniknąć efektu Rungego, czy ograniczenie się do pewnej liczby węzłów, powyżej której występują błędy związane z operacjami na liczbach zmiennoprzecinkowych. Jest również dobrą alternatywą dla metod Newtona oraz Lagrange'a w zagadnieniu Lagrange'a, gdzie dane jest mniej punktów, ale znane (lub przybliżone) są pochodne w tych punktach.