Przybliżanie funkcji - podsumowanie

Łukasz Wala
AGH, Wydział Informatyki, Elektroniki i Telekomunikacji
Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice 2021/2022

Kraków, 8 maja 2022

1 Wstęp

W niniejszym podsumowaniu omówione zostaną zagadnienia przybliżania funkcji w odniesieniu do funkcji f. Do użytych metod przybliżania należą:

- interpolacja wegług metod Lagrange'a, Newtona oraz Hermite'a,
- interpolacja funkcjami sklejanymi,
- aproksymacja średniokwadratowa wielomianami algebraicznymi lub trygonometrycznymi.

Wszystkie te metody umożliwiają skonstruowanie funkcji przybliżającej na podstawie pewnej liczby punktów należących do funkcji f przedstawionej wzorem:

$$f(x) = x^2 - m \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{k}\right)$$

Gdzie $k = \frac{1}{2}$, $m = 4$ oraz $x \in [-6, 6]$.

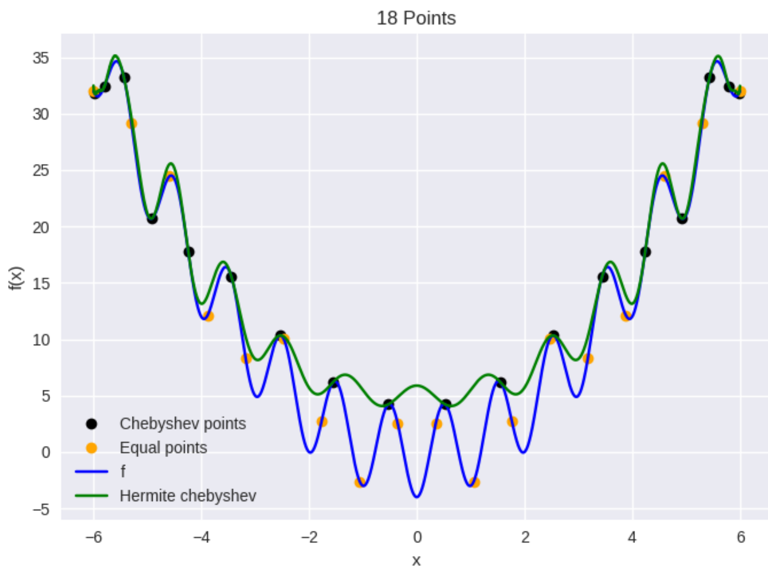
2 Porównanie

2.1 Różnice

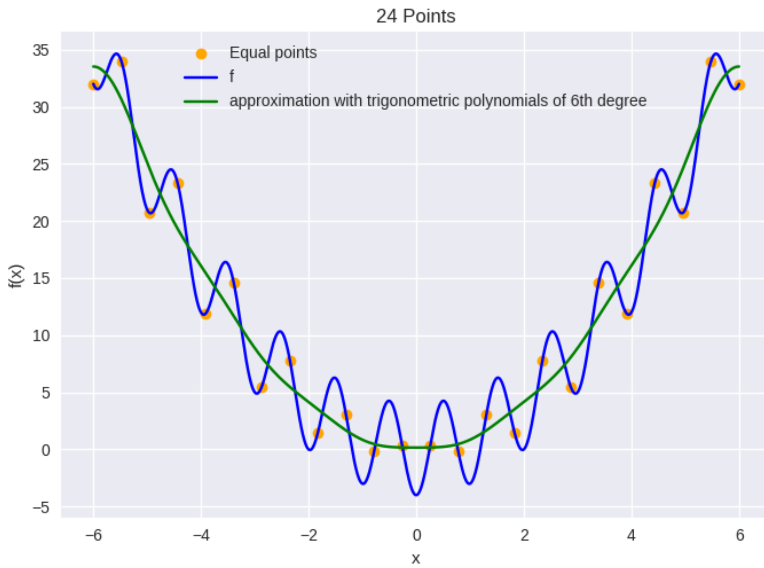
Interpolacja zakłada, że skonstruowana funkcja będzie zawierała punkty, na podstawie których jest konstruowana. Jest przydatna w np.:

- zastępowaniu skomplikowanych funkcji np. wielomianami,
- całkowaniu numerycznym,
- znajdowaniu pochodnych w punktach pośrednich, rozwiązywaniu równań różniczkowych.

Aproksymacja średniokwadratowa nie ma natomiast podobnego założenia, co czyni ją ogólniejszą i pozwala zastosować, gdy np. podane punkty zawierają błędy (wówczas interpolacja nie ma sensu), czy w przypadkach gdy warunek zawieranie punktów po prostu nie jest konieczny.

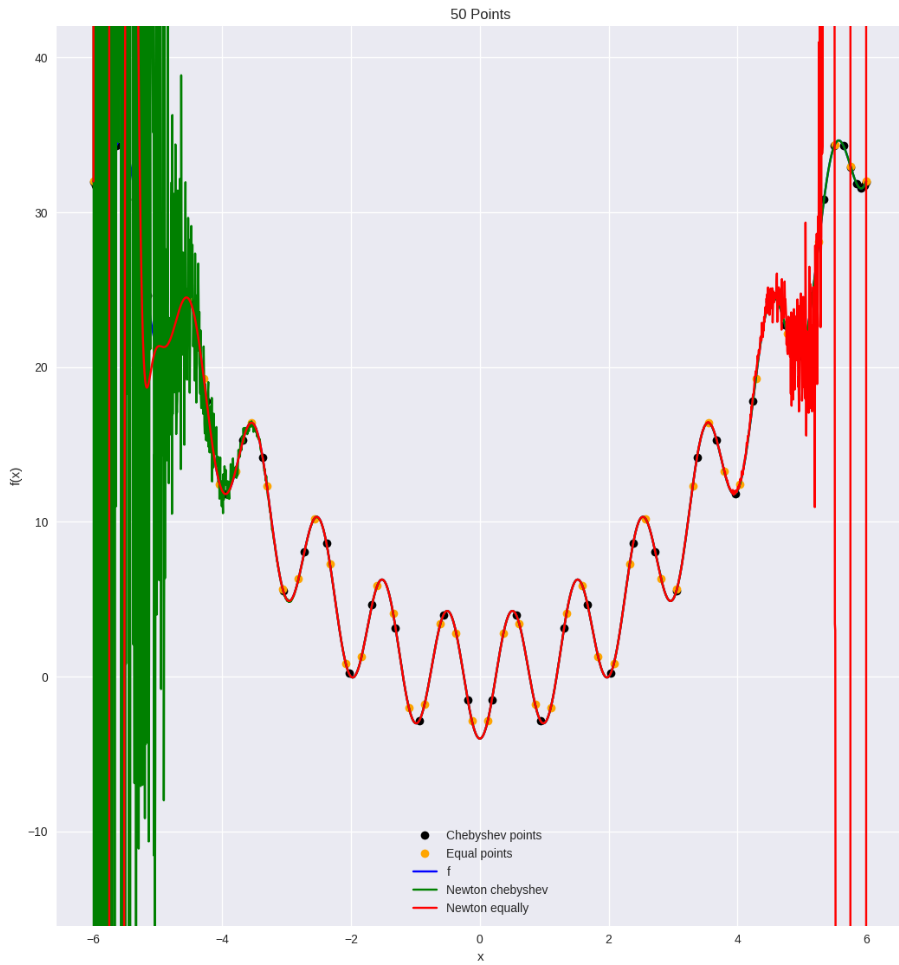


Rysunek 1: Interpolacja - funkcja zawiera punkty



Rysunek 2: Aproksymacja - funkcja nie musi zawierać punktów

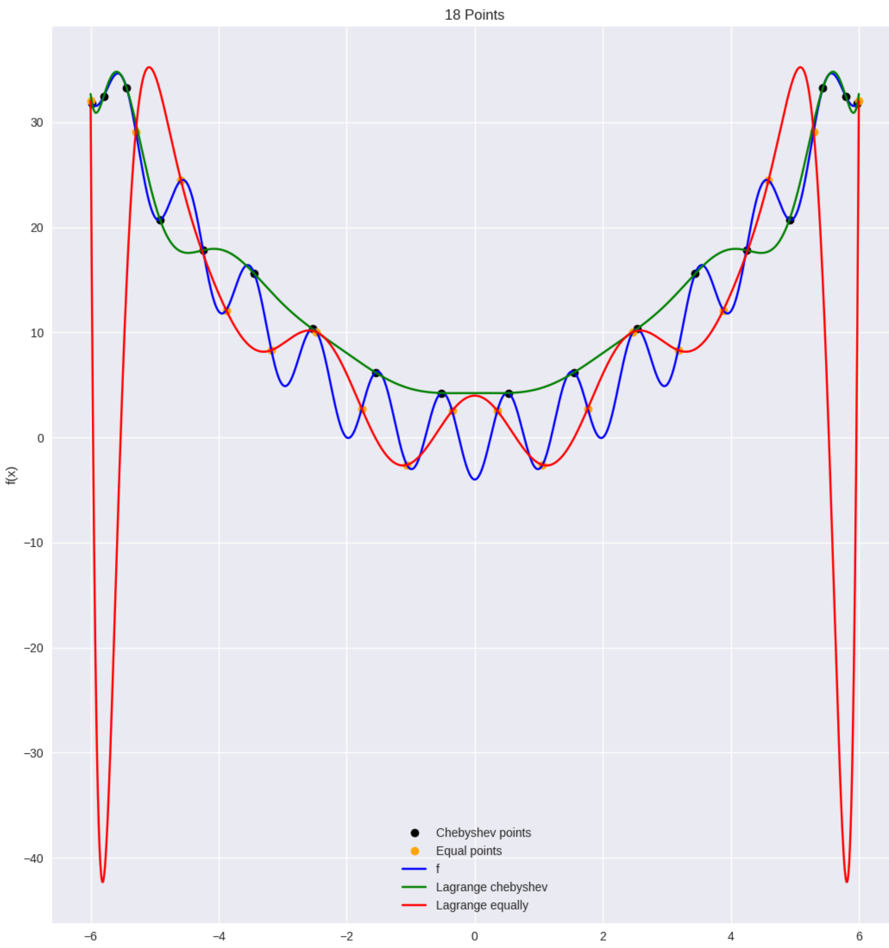
Różnica pomiędzy metodami Lagrange'a a Newtona polega na sposobie konstrukcji wzoru. M. in. metodzie Newtona dodanie nowego węzła nie wiąże się z potwarzaniem obliczeń od początku, w metodzia Lagrange'a i trzeba ogólnie wykonywać mniej obliczeń podczas wyznaczania wartości funkcji interplującej, natomiast w metodzie Lagrange'a łatwiej utworzyć wzór. W tym konkretnym przypadku użycie metody Newtona wiązało się niestety z pojawieniem błędów numerycznych:



Rysunek 3: Błedy numeryczne w metodzie Newtona

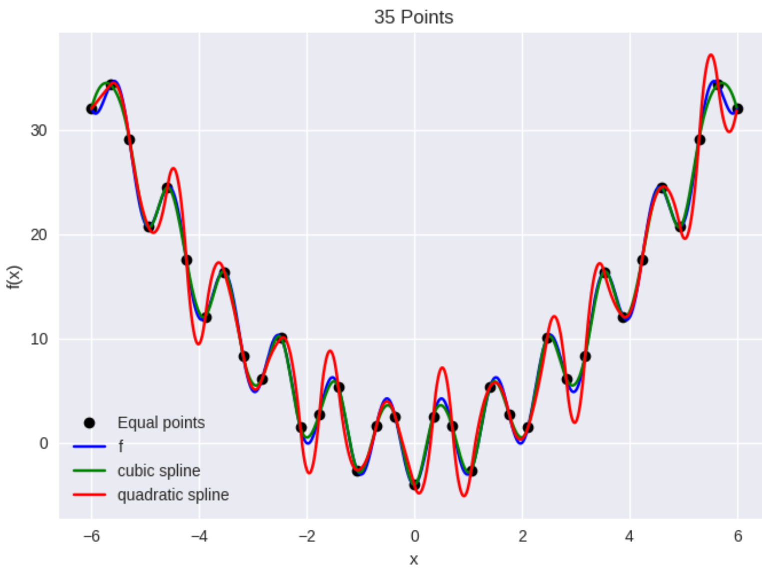
Podobny efekt wystąpił w metodzie Hermite'a, która jest bardzo podobna do metody Newtona, jednak pozwala również na zastosowanie pochodnych w punktach.

Również w związku z tym, że funkcja musi zawierać wszystkie punkty na podstawie których jest tworzona, w metodach Newtona i Lagrange'a stopień wielomianu jest duży dla dużej liczby węzłów, co skutkuje problemami:



Rysunek 4: Efekt Rungego

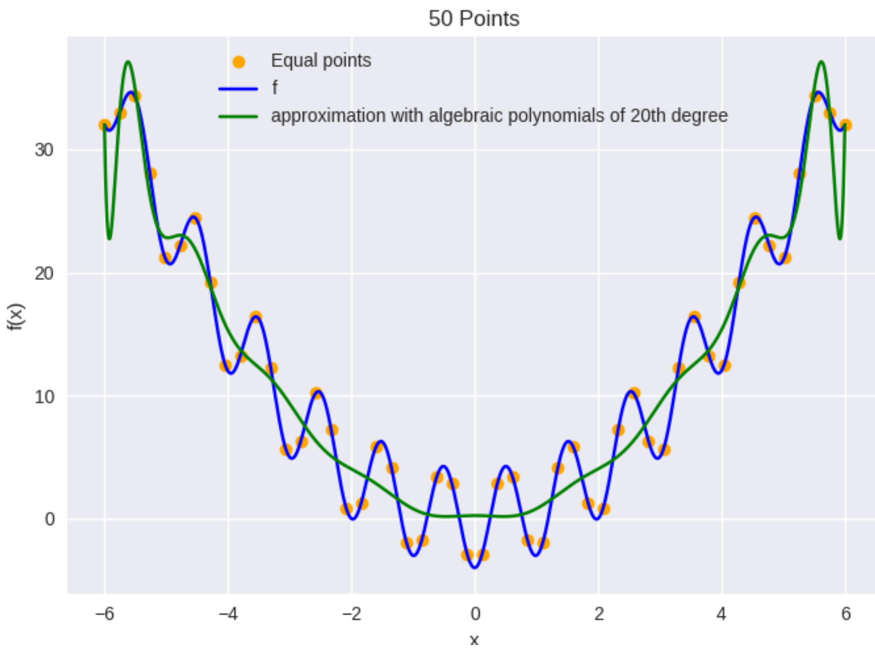
Rozwiązaniem tego problemu jest zastosowanie specjalnego rozmieszczenia węzłów (według pierwiastków wielomianu Czebyszewa, na rysunku 4) lub zastosowanie innej metody, jaką jest interpolacja funkcjami sklejanymi, która wykorzystuje wielomiany niskiego stopnia.



Rysunek 5: Interpolacja splajnami

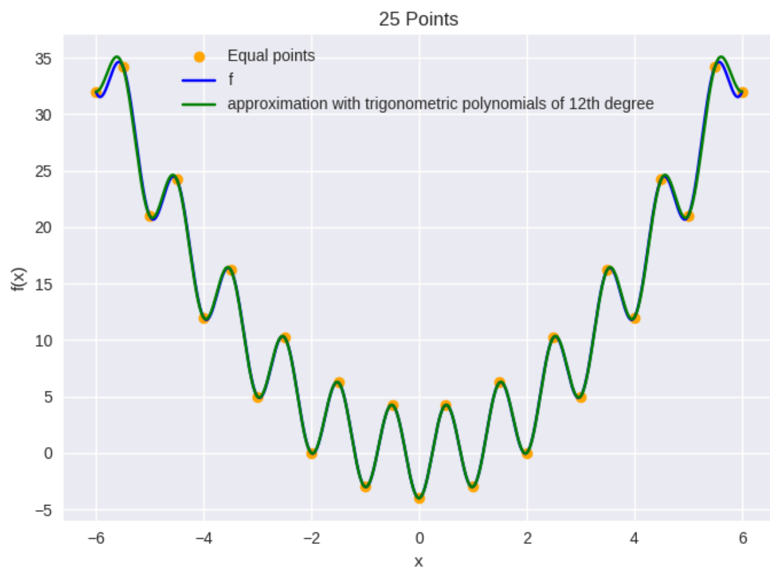
Interpolacja splajnami wymaga również podania warunków brzegowych

W przypadku aproksymacji średniokwadratowej, z racji tego, że punkty nie muszą należeć do funkcji, wybór stopnia wielomianu jest dowolny, o ile liczba węzłów jest wystarczająca do jego skonstruowania:



Rysunek 6: Aproksymacja średniokwadratowa wielomianami algebraicznymi

W aproksymacji średniokwadratowej wielomianami trygonometrycznymi stosowana są inne funkcje bazowe. W tym konkretnym przypadku, ze względu na charakter funkcji f sprawują się one lepiej pod względem dokładności:



Rysunek 7: Aproksymacja średniokwadratowa wielomianami trygonometrycznymi

2.2 Dokładność

Poniżej porównane zostaną dokładności dla różnych metod. Miarą dokładności będzie średnia kwadratów odległości funkcji f oraz funkcji przybliżającej.

Metody interpolacji porónywane będą dla odpowiadających liczb informacji, czyli węzłów dla metod Lagrange'a, Newtona (rozmieszczenie Czebyszewa), węzłów oraz pierwszysch pochodnych dla metody Hermite'a, węzłów dla interpolacji splajnami trzeciego stopnia, węzłów dla aproksymacji, gdzie liczba funkcji bazowych odpowiada liczbie węzłów - 1 (w przypadku użycie liczby funkcji bazowych odpowiadających liczbie węzłów wyniki byłby praktycznie jednoznaczne z interpolacją), ponieważ to od liczby funkcji bazowych zależy rozmiar macieży układu równań, wydaje się to być uczciwym porównaniem.

Liczba informacji	Newton	Lagrange	Hermite	Splajny	Aprks. alg.	Aprks. tryg.
4	12.862	12.862	1341.364	23.976	12.863	40.829
5	18.804	18.804	...	23.976	9.280	...
6	15.422	15.422	158.169	12.348	15.422	13.598
7	16.507	16.507	...	23.976	11.933	...
8	15.136	15.136	419.003	14.922	15.137	14.251
9	17.771	17.771	...	16.951	17.843	...
10	12.469	12.469	24.093	13.882	12.469	14.156
11	15.057	15.057	...	15.939	12.363	...
12	9.637	9.637	81.197	15.992	9.638	14.832
13	16.439	16.439	...	23.976	15.182	...
14	13.108	13.108	59.150	15.988	13.108	14.956
15	16.630	16.630	...	15.993	16.710	...
16	11.817	11.817	94.262	15.880	11.817	14.997
17	14.879	14.879	...	15.449	14.857	...
18	17.914	17.914	38.474	14.594	17.914	15.020
19	15.779	15.779	...	13.364	16.662	...
20	14.062	14.062	46.306	11.914	14.063	15.037
21	13.130	13.130	...	10.403	13.213	...
22	12.883	12.883	46.427	8.934	12.885	15.051
23	12.617	12.617	...	7.549	12.882	...
24	12.380	12.380	52.526	6.259	12.549	15.063
25	11.394	11.394	...	1.081	11.611	...
26	11.319	11.319	28.573	4.021	11.090	0.074
27	11.206	11.206	...	3.117	10.877	...
28	10.895	10.895	33.156	2.372	9.509	0.059
29	9.503	9.503	...	1.778	9.884	...
30	9.307	9.307	26.149	1.318	7.750	0.048

Tabela 1: Dokładności dla różnych metod

Jak widać, interpolacja metodami Newtona, Lagrange'a oraz aproksymacja średniokwadratowa wielomianami algebraicznymi wykazują prawie identyczne dokładność w badanym zakresie. Interpolacja metodą Hermite'a wykazuje mniejszą dokładność, jednak należy wziąć po uwagę, że wykorzystuje ona połowę mniej punktów w stosunku do innych metod, reszta informacji to pochodne w tych punktach. Interpolacja splajnami cechuje się natomiast większą dokładnością, jak również nie używa wielomianów wysokich stopni, jak pozostałe metody interpolacji. Najlepszą dokładność (ale tylko od pewnego momentu, tutaj 25 funkcji bazowych) ma funkcja stworzona przy pomocy aproksymacji średniokwadratowej wielomianami trygonometrycznymi.

3 Wnioski

Wszystkie przedstawione metody pozwalają, z pewnymi ograniczeniami, skutecznie przybliżyć funkcję f, jednak niektóre robią to lepiej, lub mogą zostać zastosowane w szczególnych przypadkach, np. gdy funkcja przybliżająca musi zawierać wszystkie punkty, na podstawie których jest konstruowana, najlepiej zastosować interpolację funkcjami sklejanymi. Gdy dostępne są również pochodne w punktach, zastosować można metodę Hermite'a. Jeżeli funkcja nie musi spełniać warunku zawierania punktów, dużo dokładność można uzyskać za pomocą aproksymaji średniokwadratowej wielomianami trygonometrycznymi. Każda z metod posiada również pewne wady, np. błędy numeryczne dla dużych liczb węzłów w metodzie Hermite'a, stąd metoda musi być odpowiednio dobrana do potrzeb.