

Aproksymacja średniokwadratowa wielomianami trygonometrycznymi

Łukasz Wala

*AGH, Wydział Informatyki, Elektroniki i Telekomunikacji
Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice 2021/2022*

Kraków, 30 kwietnia 2022

1 Opis problemu

Główną ideą zadania jest zbadanie zachowania funkcji przybliżonej za pomocą aproksymacji średniokwadratowej wielomianami trygonometrycznymi.

Badana funkcja:

$$f(x) = x^2 - m \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{k}\right)$$

Gdzie $k = \frac{1}{2}$, $m = 4$ oraz $x \in [-6, 6]$.

2 Opracowanie

2.1 Wyprowadzenie

W aproksymacji średniokwadratowej poszukiwana jest wartość minimalna sumy kwadratów różnic funkcji aproksymowanej $F(x)$ oraz funkcji aproksymującej $f(x)$ z uwzględnieniem funkcji wagowej $w(x)$ większej od zera (tutaj $\forall x \in D : w(x) = 1$). Funkcją aproksymującą ma być wielomian trygonometrycznym o postaci

$$f(x) = a_0 + \sum_{j=1}^m b_j \cos(jx) + \sum_{j=1}^m a_j \sin(jx)$$

Więc błąd średniokwadratowy przyjmuje postać

$$H(a_0, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m) = \sum_{i=1}^n w(x_i) \left[F(x_i) - \left(a_0 + \sum_{j=1}^m b_j \cos(jx_i) + \sum_{j=1}^m a_j \sin(jx_i) \right) \right]^2$$

Aby funkcja przyjmowała wartość minimalną względem współczynnika c , pochodna funkcji względem tego współczynnika musi wynosić zero

$$\frac{\partial H}{\partial c} = 0, c \in \{a_0, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m\}$$

Na przykład dla a_k

$$-2 \sum_{i=1}^n w(x_i) \left[F(x_i) - (a_0 + \sum_{j=1}^m b_j \sin(jx_i) + \sum_{j=1}^m a_j \cos(jx_i)) \right] \cos(kx_i) = 0$$

Po przekształceniach dla a_0

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n w(x_i) a_0 + \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=0}^n w(x_i) \cos(jx_i) \right) a_j + \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=0}^n w(x_i) \sin(jx_i) \right) b_j \\ = \sum_{i=0}^n w(x_i) F(x_i) \end{aligned}$$

Dla $a_k, k \in \{1, 2, \dots, m\}$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n w(x_i) \cos(kx_i) a_0 + \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=0}^n w(x_i) \cos(kx_i) \cos(jx_i) \right) a_j + \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=0}^n w(x_i) \cos(kx_i) \sin(jx_i) \right) b_j \\ = \sum_{i=0}^n w(x_i) F(x_i) \cos(kx_i) \end{aligned}$$

Oraz dla $b_k, k \in \{1, 2, \dots, m\}$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n w(x_i) \sin(kx_i) a_0 + \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=0}^n w(x_i) \sin(kx_i) \cos(jx_i) \right) a_j + \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=0}^n w(x_i) \sin(kx_i) \sin(jx_i) \right) b_j \\ = \sum_{i=0}^n w(x_i) F(x_i) \sin(kx_i) \end{aligned}$$

Z tych równań można zbudować układ

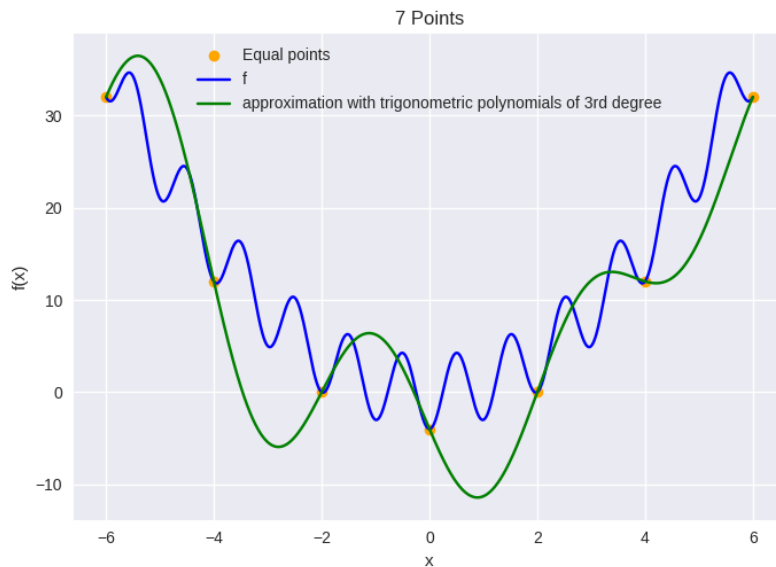
$$\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^n w(x_i) & \sum_{i=0}^n w(x_i) \cos(1 \cdot x_i) & \sum_{i=0}^n w(x_i) \sin(1 \cdot x_i) & \dots \\ \sum_{i=0}^n w(x_i) \cos(1 \cdot x_i) & \sum_{i=0}^n w(x_i) \cos(1 \cdot x_i) \cos(1 \cdot x_i) & \sum_{i=0}^n w(x_i) \cos(1 \cdot x_i) \sin(1 \cdot x_i) & \dots \\ \sum_{i=0}^n w(x_i) \sin(1 \cdot x_i) & \sum_{i=0}^n w(x_i) \sin(1 \cdot x_i) \cos(1 \cdot x_i) & \sum_{i=0}^n w(x_i) \sin(1 \cdot x_i) \sin(1 \cdot x_i) & \dots \\ \sum_{i=0}^n w(x_i) \cos(2 \cdot x_i) & \sum_{i=0}^n w(x_i) \cos(2 \cdot x_i) \cos(1 \cdot x_i) & \sum_{i=0}^n w(x_i) \cos(2 \cdot x_i) \sin(1 \cdot x_i) & \dots \\ \sum_{i=0}^n w(x_i) \sin(2 \cdot x_i) & \sum_{i=0}^n w(x_i) \sin(2 \cdot x_i) \cos(1 \cdot x_i) & \sum_{i=0}^n w(x_i) \sin(2 \cdot x_i) \sin(1 \cdot x_i) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=0}^n w(x_i) \cos(m \cdot x_i) & \sum_{i=0}^n w(x_i) \cos(m \cdot x_i) \cos(1 \cdot x_i) & \sum_{i=0}^n w(x_i) \cos(m \cdot x_i) \sin(1 \cdot x_i) & \dots \\ \sum_{i=0}^n w(x_i) \sin(m \cdot x_i) & \sum_{i=0}^n w(x_i) \sin(m \cdot x_i) \cos(1 \cdot x_i) & \sum_{i=0}^n w(x_i) \sin(m \cdot x_i) \sin(1 \cdot x_i) & \dots \end{bmatrix} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ b_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ \vdots \\ a_m \\ b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^n w(x_i) F(x_i) \\ \sum_{i=0}^n w(x_i) F(x_i) \cos(1 \cdot x_i) \\ \sum_{i=0}^n w(x_i) F(x_i) \sin(1 \cdot x_i) \\ \sum_{i=0}^n w(x_i) F(x_i) \cos(2 \cdot x_i) \\ \sum_{i=0}^n w(x_i) F(x_i) \sin(2 \cdot x_i) \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^n w(x_i) F(x_i) \cos(m \cdot x_i) \\ \sum_{i=0}^n w(x_i) F(x_i) \sin(m \cdot x_i) \end{bmatrix}$$

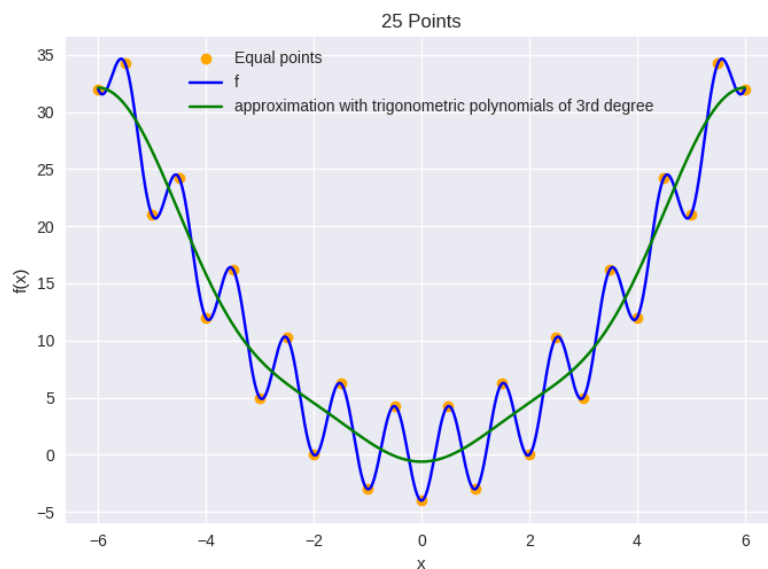
Do rozwiązania powyższego układu równań użyta została funkcja *linalg.solve* z pakietu *numpy* w języku Python.

2.2 Wykresy

Pierwszym krokiem analizy będzie zbadanie zachowania wykresów funkcji aproksymujących. Zakres liczby punktów użytych do stworzenia funkcji wynosi 7-50 z wykorzystaniem wielomianów stopni 3-30 ($2 \cdot \text{stopień} + 1 = \text{liczba funkcji bazowych}$), przy zachowaniu założenia, że stopień wielomianu musi być większy lub równy liczbie funkcji bazowych. Punkty rozłożone są równomierne na przedziale.

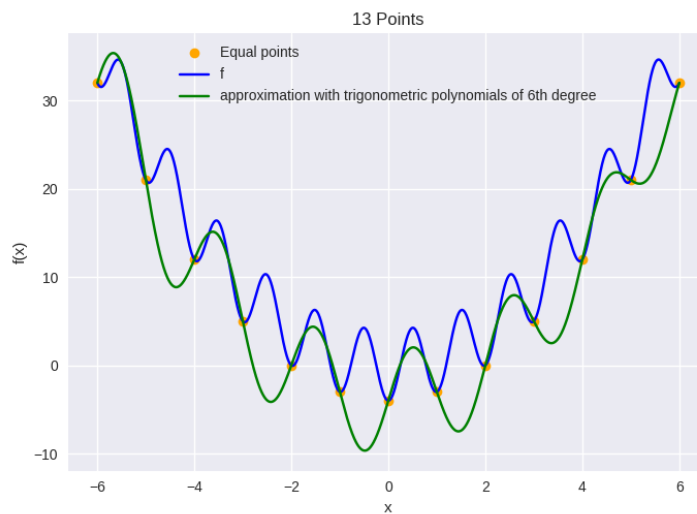


Rysunek 1: Aproksymacja średniokwadratowa wielomianami trygonometrycznymi 3 stopnia

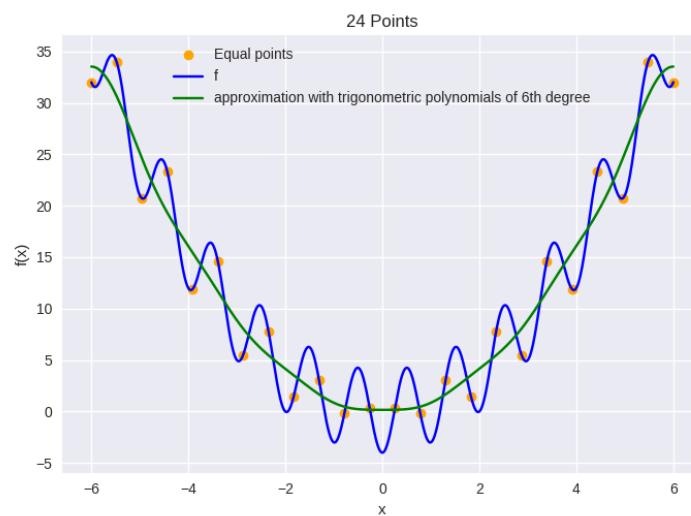


Rysunek 2: Aproksymacja średniokwadratowa wielomianami trygonometrycznymi 3 stopnia

Wielomiany trzeciego stopnia (czyli o 7 funkcjach bazowych) nie są na tyle dokładne, żeby odtworzyć w satysfakcjonujący sposób funkcję aproksymowaną. Zwiększanie liczby punktów pozytywnie wpływa na kształt funkcji, jednak tylko do pewnej wartości (ok. 17), po której dokładność prawie nie wzrasta.



Rysunek 3: Aproksymacja średniokwadratowa wielomianami trygonometrycznymi 6 stopnia

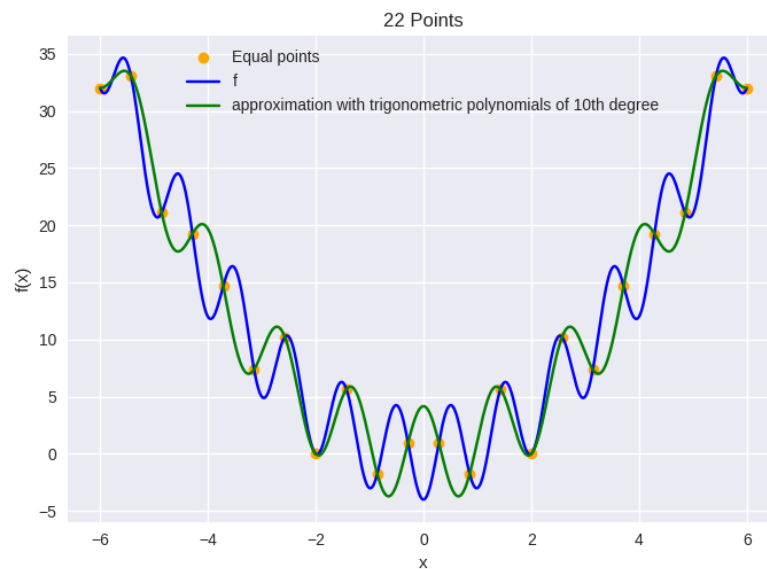


Rysunek 4: Aproksymacja średniokwadratowa wielomianami trygonometrycznymi 6 stopnia

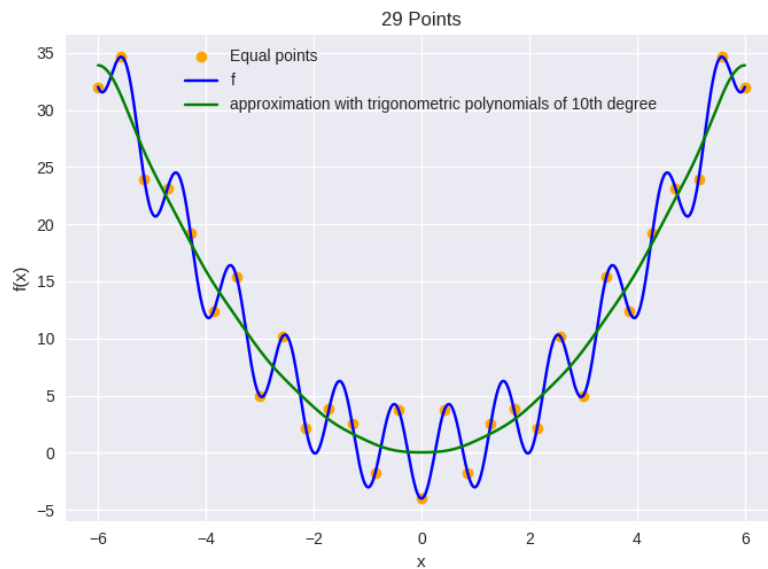
Wielomiany szóstego stopnia dla mniejszych liczb węzłów bardziej przypominają wykres funkcji aproksymowanej, zawierają kilka charakterystycznych

”zębów”, jednak ze wzrostem liczby punktów, wykres się wygładza, ponieważ stopień jest zbyt niski, żeby wiernie odwzorować funkcję f .

Wielomiany wyższych stopni wykazują podobną tendencję: dla niewielkich liczb węzłów mają więcej głębokich minimów i wysokich maksimów, częściowo pokazują charakterystyczny kształt funkcji f , jednak gdy liczba punktów względem stopnia wielomianu staje się zbyt duża, wygładzają się, tak więc liczba węzłów nie poprawia drastycznie dokładności.

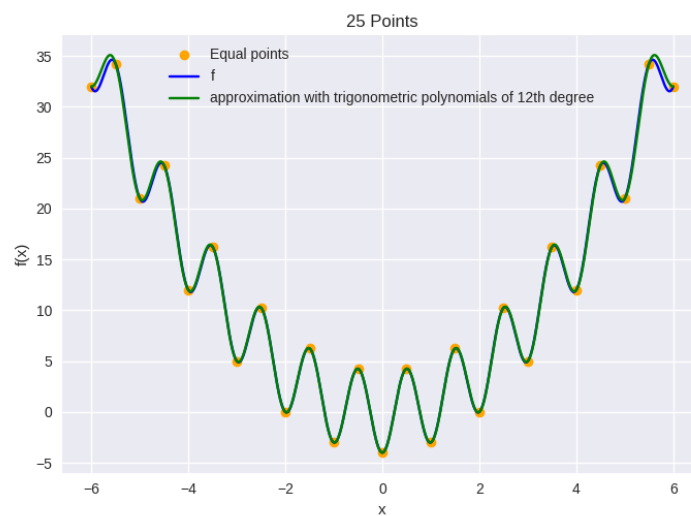


Rysunek 5: Aproksymacja średniokwadratowa wielomianami trygonometrycznymi 10 stopnia

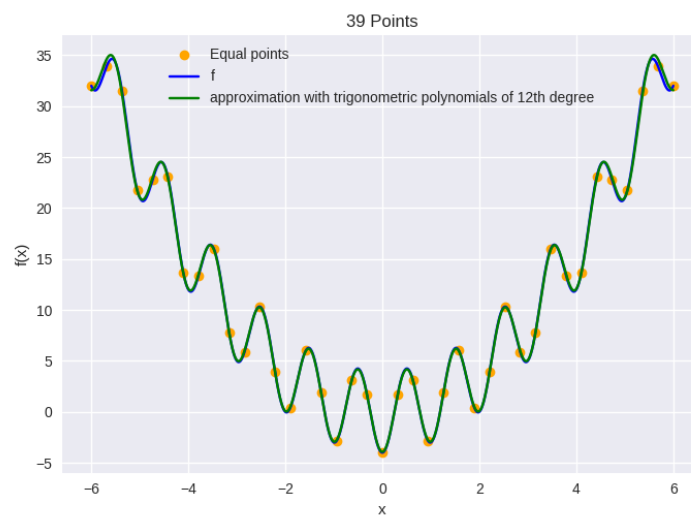


Rysunek 6: Aproksymacja średniokwadratowa wielomianami trygonometrycznymi 10 stopnia

Najmniejszy stopień wielomianu, przy którym kształt funkcji jest dobrze odwzorowany, to dwanaście. Przy tej liczbie, dla najmniejszej poprawnej liczby węzłów, wykresy funkcji aproksymowanej i aproksymacyjnej pokrywają się w bardzo dużym stopniu, zwiększanie liczby węzłów nie daje natomiast dużej poprawy.



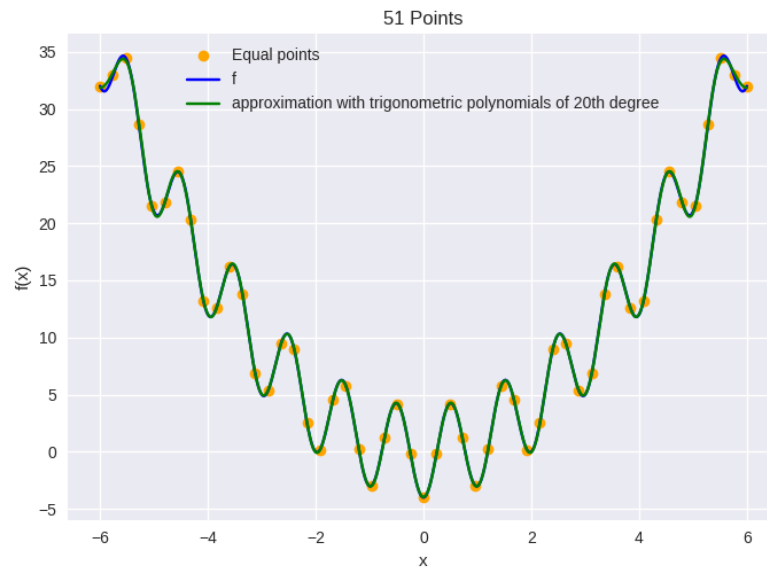
Rysunek 7: Aproksymacja średniokwadratowa wielomianami trygonometrycznymi 12 stopnia



Rysunek 8: Aproksymacja średniokwadratowa wielomianami trygonometrycznymi 12 stopnia

Jak widać, zwiększanie liczby węzłów nie już zwiększa zbytnio dokładności. Poniżej wykres dla dwudziestego stopnia wielomianu, jego dokładność nie zwiększa

szyla się zbytnio w porównaniu do dwunastego stopnia (który był już bardzo dokładny).



Rysunek 9: Aproksymacja średniokwadratowa wielomianami trygonometrycznymi 20 stopnia

2.3 Dokładności

Pozostaje obliczenie dokładności oraz skonfrontowanie wyników z wnioskami uzyskanymi na podstawie analizy wykresów. Miarami dokładności będą:

- średnia kwadratów odległości wartości wielomianu oraz funkcji f dla 1000 równo oddalonych punktów,
- maksymalna odległość wartości wielomianu oraz funkcji f dla 1000 równo oddalonych punktów.

3 Wnioski