

Aproksymacja średniokwadratowa wielomianami trygonometrycznymi

Łukasz Wala

*AGH, Wydział Informatyki, Elektroniki i Telekomunikacji
Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice 2021/2022*

Kraków, 4 maja 2022

1 Opis problemu

Główną ideą zadania jest zbadanie zachowania funkcji przybliżonej za pomocą aproksymacji średniokwadratowej wielomianami trygonometrycznymi.

Badana funkcja:

$$f(x) = x^2 - m \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{k}\right)$$

Gdzie $k = \frac{1}{2}$, $m = 4$ oraz $x \in [-6, 6]$.

2 Opracowanie

2.1 Wyprowadzenie

W aproksymacji średniokwadratowej poszukiwana jest wartość minimalna sumy kwadratów różnic funkcji aproksymowanej $F(x)$ oraz funkcji aproksymującej $f(x)$ z uwzględnieniem funkcji wagowej $w(x)$ większej od zera (tutaj $\forall x \in D : w(x) = 1$). Funkcją aproksymującą ma być wielomian trygonometrycznym o postaci

$$f(x) = a_0 + \sum_{j=1}^m b_j \cos(jx) + \sum_{j=1}^m a_j \sin(jx)$$

Więc błąd średniokwadratowy przyjmuje postać

$$H(a_0, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m) = \sum_{i=1}^n w(x_i) \left[F(x_i) - \left(a_0 + \sum_{j=1}^m b_j \cos(jx_i) + \sum_{j=1}^m a_j \sin(jx_i) \right) \right]^2$$

Aby funkcja przyjmowała wartość minimalną względem współczynnika c , pochodna funkcji względem tego współczynnika musi wynosić zero

$$\frac{\partial H}{\partial c} = 0, c \in \{a_0, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m\}$$

Na przykład dla a_k

$$-2 \sum_{i=1}^n w(x_i) \left[F(x_i) - (a_0 + \sum_{j=1}^m b_j \sin(jx_i) + \sum_{j=1}^m a_j \cos(jx_i)) \right] \cos(kx_i) = 0$$

Po przekształceniach dla a_0

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n w(x_i) a_0 + \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=0}^n w(x_i) \cos(jx_i) \right) a_j + \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=0}^n w(x_i) \sin(jx_i) \right) b_j \\ = \sum_{i=0}^n w(x_i) F(x_i) \end{aligned}$$

Dla $a_k, k \in \{1, 2, \dots, m\}$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n w(x_i) \cos(kx_i) a_0 + \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=0}^n w(x_i) \cos(kx_i) \cos(jx_i) \right) a_j + \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=0}^n w(x_i) \cos(kx_i) \sin(jx_i) \right) b_j \\ = \sum_{i=0}^n w(x_i) F(x_i) \cos(kx_i) \end{aligned}$$

Oraz dla $b_k, k \in \{1, 2, \dots, m\}$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n w(x_i) \sin(kx_i) a_0 + \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=0}^n w(x_i) \sin(kx_i) \cos(jx_i) \right) a_j + \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=0}^n w(x_i) \sin(kx_i) \sin(jx_i) \right) b_j \\ = \sum_{i=0}^n w(x_i) F(x_i) \sin(kx_i) \end{aligned}$$

Z tych równań można zbudować układ

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^n w(x_i) & \sum_{i=0}^n w(x_i) \cos(1 \cdot x_i) & \sum_{i=0}^n w(x_i) \sin(1 \cdot x_i) & \dots \\ \sum_{i=0}^n w(x_i) \cos(1 \cdot x_i) & \sum_{i=0}^n w(x_i) \cos(1 \cdot x_i) \cos(1 \cdot x_i) & \sum_{i=0}^n w(x_i) \cos(1 \cdot x_i) \sin(1 \cdot x_i) & \dots \\ \sum_{i=0}^n w(x_i) \sin(1 \cdot x_i) & \sum_{i=0}^n w(x_i) \sin(1 \cdot x_i) \cos(1 \cdot x_i) & \sum_{i=0}^n w(x_i) \sin(1 \cdot x_i) \sin(1 \cdot x_i) & \dots \\ \sum_{i=0}^n w(x_i) \cos(2 \cdot x_i) & \sum_{i=0}^n w(x_i) \cos(2 \cdot x_i) \cos(1 \cdot x_i) & \sum_{i=0}^n w(x_i) \cos(2 \cdot x_i) \sin(1 \cdot x_i) & \dots \\ \sum_{i=0}^n w(x_i) \sin(2 \cdot x_i) & \sum_{i=0}^n w(x_i) \sin(2 \cdot x_i) \cos(1 \cdot x_i) & \sum_{i=0}^n w(x_i) \sin(2 \cdot x_i) \sin(1 \cdot x_i) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=0}^n w(x_i) \cos(m \cdot x_i) & \sum_{i=0}^n w(x_i) \cos(m \cdot x_i) \cos(1 \cdot x_i) & \sum_{i=0}^n w(x_i) \cos(m \cdot x_i) \sin(1 \cdot x_i) & \dots \\ \sum_{i=0}^n w(x_i) \sin(m \cdot x_i) & \sum_{i=0}^n w(x_i) \sin(m \cdot x_i) \cos(1 \cdot x_i) & \sum_{i=0}^n w(x_i) \sin(m \cdot x_i) \sin(1 \cdot x_i) & \dots \end{bmatrix} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ b_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ \vdots \\ a_m \\ b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^n w(x_i)F(x_i) \\ \sum_{i=0}^n w(x_i)F(x_i) \cos(1 \cdot x_i) \\ \sum_{i=0}^n w(x_i)F(x_i) \sin(1 \cdot x_i) \\ \sum_{i=0}^n w(x_i)F(x_i) \cos(2 \cdot x_i) \\ \sum_{i=0}^n w(x_i)F(x_i) \sin(2 \cdot x_i) \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^n w(x_i)F(x_i) \cos(m \cdot x_i) \\ \sum_{i=0}^n w(x_i)F(x_i) \sin(m \cdot x_i) \end{bmatrix}$$

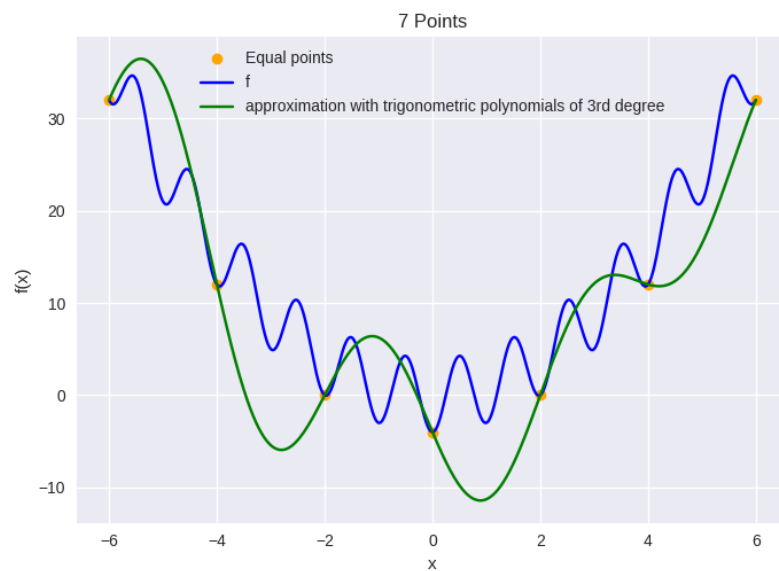
Również pod uwagę trzeba wziąć, że punkty z przedziału $[a, b]$ muszą być zawsze (podczas wyliczania wartości macieży oraz podczas wyliczania wartości funkcji aproksymującej) mapowane na przedział $[0, 2\pi]$ za pomocą funkcji

$$c(x) = \frac{2\pi(x - a)}{b - a}$$

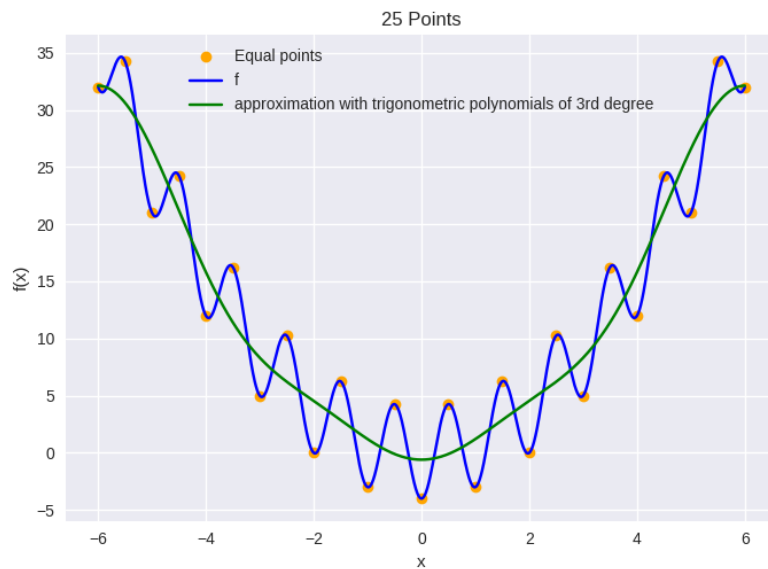
Do rozwiązania powyższego układu równań użyta została funkcja *linalg.solve* z pakietu *numpy* w języku Python.

2.2 Wykresy

Pierwszym krokiem analizy będzie zbadanie zachowania wykresów funkcji aproksymujących. Zakres liczby punktów użytych do stworzenia funkcji wynosi 7-50 z wykorzystaniem wielomianów stopni 3-30 ($2 \cdot \text{stopień} + 1 = \text{liczba funkcji bazowych}$), przy zachowaniu założenia, że liczba węzłów musi być większa lub równa liczbie funkcji bazowych. Punkty rozłożone są równomierne na przedziale.

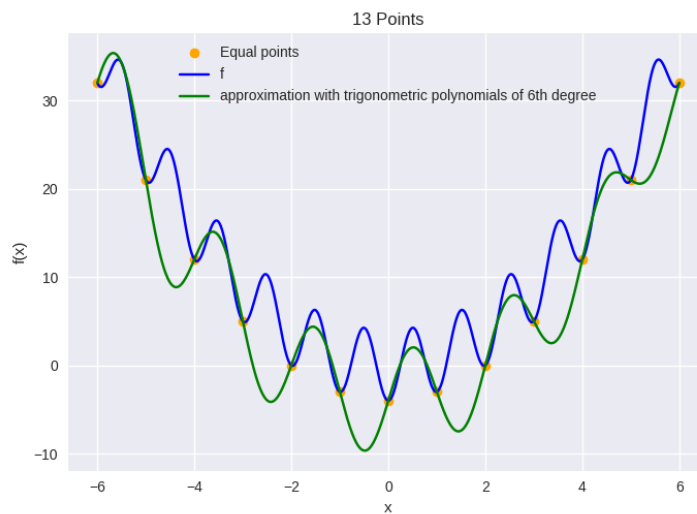


Rysunek 1: Aproksymacja średniokwadratowa wielomianami trygonometrycznymi 3 stopnia

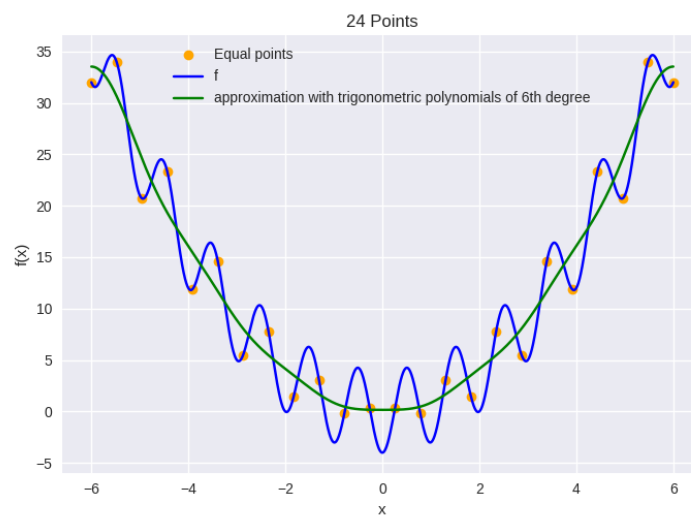


Rysunek 2: Aproksymacja średniokwadratowa wielomianami trygonometrycznymi 3 stopnia

Wielomiany trzeciego stopnia (czyli o siedmiu funkcjach bazowych) nie są na tyle dokładne, żeby odtworzyć w satysfakcjonujący sposób funkcję aproksymowaną. Zwiększanie liczby punktów pozytywnie wpływa na kształt funkcji, jednak tylko do pewnej wartości (ok. siedemnaście), po której dokładność prawie nie wzrasta.



Rysunek 3: Aproksymacja średniokwadratowa wielomianami trygonometrycznymi 6 stopnia

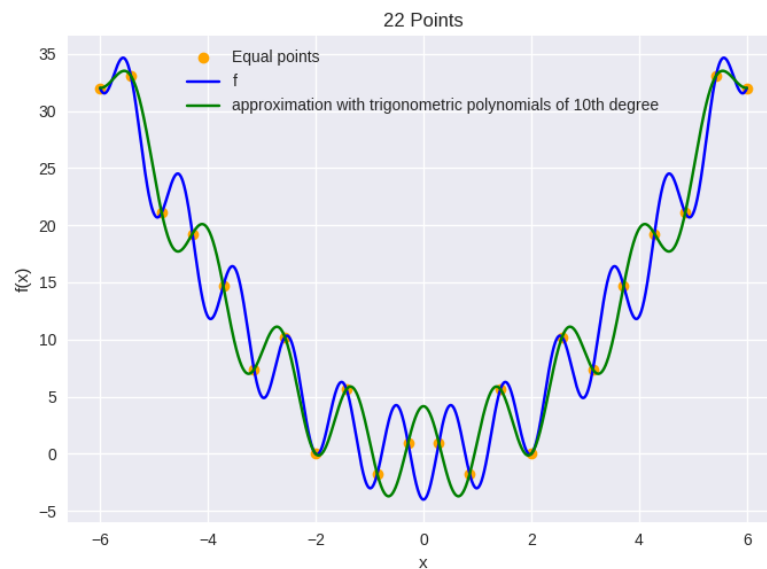


Rysunek 4: Aproksymacja średniokwadratowa wielomianami trygonometrycznymi 6 stopnia

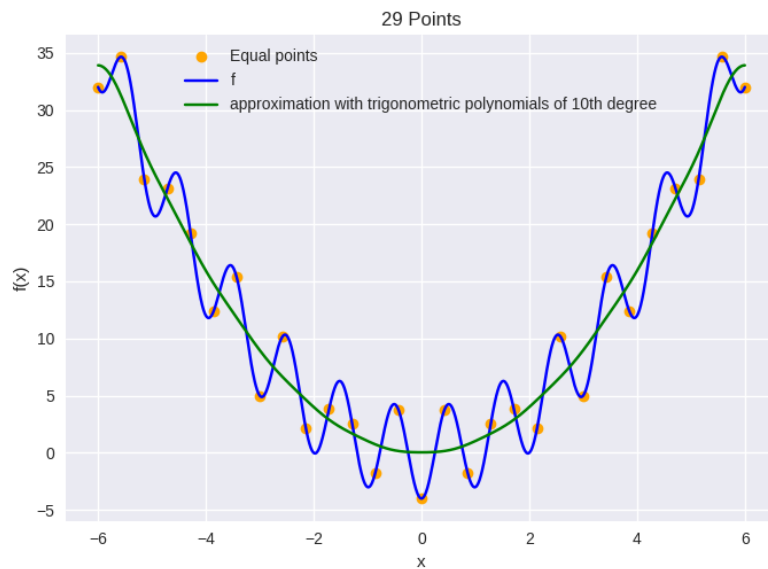
Wielomiany szóstego stopnia dla mniejszych liczb węzłów bardziej przypominają wykres funkcji aproksymowanej, zawierają kilka charakterystycznych

”zębów”, jednak ze wzrostem liczby punktów, wykres się wygładza, ponieważ stopień jest zbyt niski, żeby wiernie odwzorować funkcję f .

Wielomiany wyższych stopni wykazują podobną tendencję: dla niewielkich liczb węzłów mają więcej głębokich minimów i wysokich maksimów, częściowo pokazują charakterystyczny kształt funkcji f , jednak gdy liczba punktów względem stopnia wielomianu staje się zbyt duża, wygładzają się, tak więc liczba węzłów nie poprawia drastycznie dokładności.

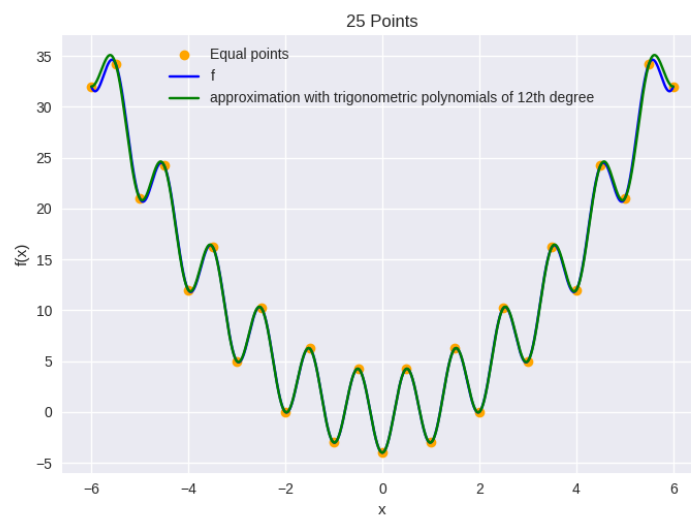


Rysunek 5: Aproksymacja średniokwadratowa wielomianami trygonometrycznymi 10 stopnia

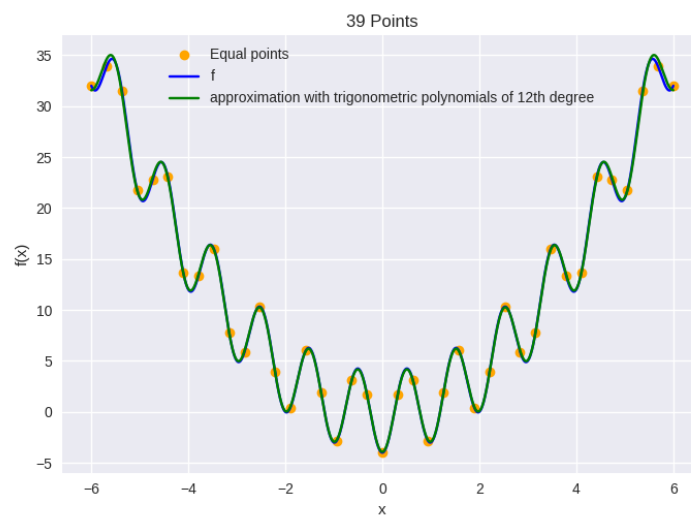


Rysunek 6: Aproksymacja średniokwadratowa wielomianami trygonometrycznymi 10 stopnia

Najmniejszy stopień wielomianu, przy którym kształt funkcji jest dobrze odwzorowany, to dwanaście. Przy tej liczbie, dla najmniejszej poprawnej liczby węzłów, wykresy funkcji aproksymowanej i aproksymacyjnej pokrywają się w bardzo dużym stopniu, zwiększanie liczby węzłów nie daje natomiast dużej poprawy.



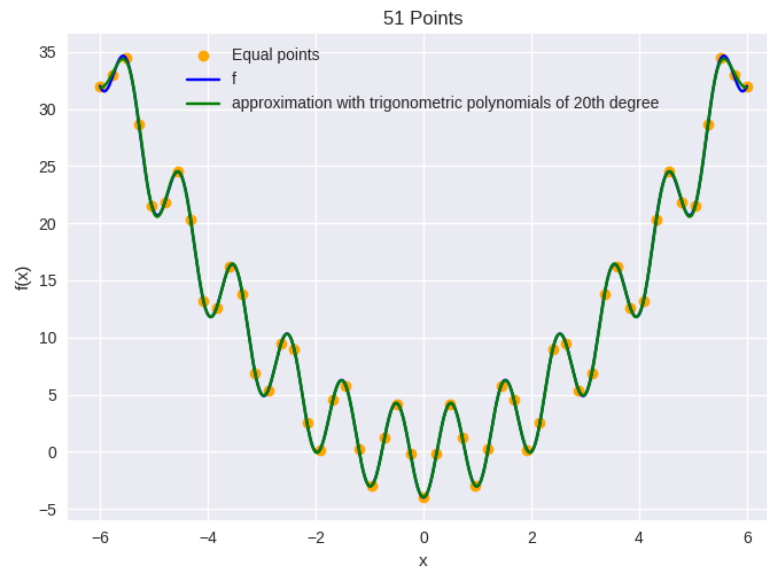
Rysunek 7: Aproksymacja średniokwadratowa wielomianami trygonometrycznymi 12 stopnia



Rysunek 8: Aproksymacja średniokwadratowa wielomianami trygonometrycznymi 12 stopnia

Jak widać, zwiększanie liczby węzłów nie już zwiększa zbytnio dokładności. Poniżej wykres dla dwudziestego stopnia wielomianu, jego dokładność nie zwiększa

szyla się zbyttnio w porównaniu do dwunastego stopnia (który był już bardzo dokładny).



Rysunek 9: Aproksymacja średniokwadratowa wielomianami trygonometrycznymi 20 stopnia

2.3 Dokładności

Pozostaje obliczenie dokładności oraz skonfrontowanie wyników z wnioskami uzyskanymi na podstawie analizy wykresów. Miarami dokładności będą:

- średnia kwadratów odległości wartości wielomianu oraz funkcji f dla 1000 równo oddalonych punktów,
- maksymalna odległość wartości wielomianu oraz funkcji f dla 1000 równo oddalonych punktów.

W\S	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...	20
7	60.35	X	X	X	X	X	X	X	X	X	...	X
8	14.25	X	X	X	X	X	X	X	X	X	...	X
9	8.80	38.04	X	X	X	X	X	X	X	X	...	X
10	13.85	14.16	X	X	X	X	X	X	X	X	...	X
11	14.32	14.49	580.48	X	X	X	X	X	X	X	...	X
12	14.49	14.60	14.83	X	X	X	X	X	X	X	...	X
13	22.58	22.63	22.80	39.86	X	X	X	X	X	X	...	X
14	14.64	14.65	14.79	14.96	X	X	X	X	X	X	...	X
15	14.68	14.67	14.77	14.91	222.70	X	X	X	X	X	...	X
16	14.72	14.68	14.77	14.88	15.00	X	X	X	X	X	...	X
17	8.42	14.70	14.76	14.86	14.96	39.35	X	X	X	X	...	X
18	8.41	7.97	14.76	14.85	14.93	15.02	X	X	X	X	...	X
19	8.41	7.97	7.80	14.84	14.92	14.99	32.07	X	X	X	...	X
20	8.40	7.97	7.80	7.72	14.90	14.97	15.04	X	X	X	...	X
21	8.40	7.97	7.80	7.72	7.68	14.96	15.02	17.24	X	X	...	X
22	8.40	7.97	7.80	7.72	7.68	7.66	15.00	15.05	X	X	...	X
23	8.40	7.97	7.80	7.72	7.68	7.66	7.65	15.04	15.07	X	...	X
24	8.39	7.97	7.80	7.72	7.68	7.66	7.65	7.64	15.06	X	...	X
25	8.39	7.97	7.80	7.72	7.68	7.66	7.65	7.64	7.64	0.077	...	X
26	8.39	7.97	7.80	7.72	7.68	7.66	7.65	7.64	7.64	0.074	...	X
27	8.39	7.97	7.80	7.72	7.68	7.66	7.65	7.65	7.64	0.069	...	X
28	8.39	7.97	7.80	7.72	7.68	7.66	7.65	7.65	7.64	0.064	...	X
29	8.39	7.97	7.80	7.72	7.68	7.66	7.65	7.65	7.64	0.060	...	X
30	8.39	7.97	7.80	7.72	7.68	7.66	7.65	7.65	7.64	0.057	...	X
31	8.39	7.97	7.80	7.72	7.68	7.66	7.65	7.65	7.64	0.054	...	X
32	8.39	7.97	7.80	7.72	7.68	7.66	7.65	7.65	7.64	0.051	...	X
33	8.39	7.97	7.80	7.72	7.68	7.66	7.65	7.65	7.64	0.049	...	X
34	8.39	7.97	7.80	7.72	7.68	7.66	7.65	7.65	7.64	0.047	...	X
35	8.39	7.97	7.80	7.72	7.68	7.66	7.65	7.65	7.64	0.045	...	X
36	8.38	7.97	7.80	7.72	7.68	7.66	7.65	7.64	7.64	0.044	...	X
37	8.38	7.97	7.80	7.72	7.68	7.66	7.65	7.64	7.64	0.042	...	X
38	8.38	7.97	7.80	7.72	7.68	7.66	7.65	7.64	7.64	0.041	...	X
39	8.38	7.97	7.80	7.72	7.68	7.66	7.65	7.64	7.64	0.040	...	X
40	8.38	7.97	7.80	7.72	7.68	7.66	7.65	7.64	7.64	0.039	...	X
41	8.38	7.97	7.80	7.72	7.68	7.66	7.65	7.64	7.64	0.038	...	452.961
42	8.38	7.97	7.80	7.72	7.68	7.66	7.65	7.64	7.64	0.037	...	0.017
43	8.38	7.97	7.80	7.72	7.68	7.66	7.65	7.64	7.64	0.036	...	0.016
44	8.38	7.97	7.80	7.72	7.68	7.66	7.65	7.64	7.64	0.035	...	0.015
45	8.38	7.97	7.80	7.72	7.68	7.66	7.65	7.64	7.64	0.034	...	0.015
46	8.38	7.97	7.80	7.72	7.68	7.66	7.65	7.64	7.64	0.034	...	0.014
47	8.38	7.97	7.80	7.72	7.68	7.66	7.65	7.64	7.64	0.033	...	0.014
48	8.38	7.97	7.80	7.72	7.68	7.66	7.65	7.64	7.64	0.032	...	0.013

Tabela 1: Średnie kwadratów odległości (rzędy - węzły, kolumny - stopnie)

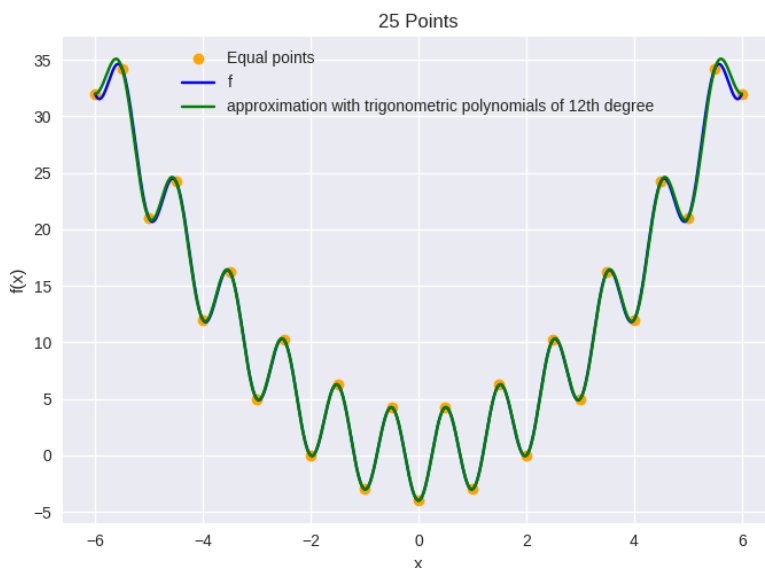
W\S	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...	20
7	16.04	X	X	X	X	X	X	X	X	X	...	X
8	8.38	X	X	X	X	X	X	X	X	X	...	X
9	6.22	14.10	X	X	X	X	X	X	X	X	...	X
10	7.29	8.86	X	X	X	X	X	X	X	X	...	X
11	8.11	8.71	42.32	X	X	X	X	X	X	X	...	X
12	7.75	8.69	8.05	X	X	X	X	X	X	X	...	X
13	9.35	8.63	9.09	14.88	X	X	X	X	X	X	...	X
14	7.74	8.61	7.94	8.42	X	X	X	X	X	X	...	X
15	8.01	8.51	8.47	7.64	28.04	X	X	X	X	X	...	X
16	7.59	8.57	7.57	8.35	8.60	X	X	X	X	X	...	X
17	5.73	7.56	6.63	6.51	6.71	13.38	X	X	X	X	...	X
18	5.70	5.07	8.07	8.31	8.02	8.28	X	X	X	X	...	X
19	5.68	5.06	4.48	7.94	8.18	8.22	14.06	X	X	X	...	X
20	5.66	5.05	4.49	4.39	7.75	8.21	8.15	X	X	X	...	X
21	5.64	5.04	4.49	4.38	4.22	7.85	8.08	10.17	X	X	...	X
22	5.63	5.04	4.49	4.38	4.21	4.14	7.84	8.16	X	X	...	X
23	5.62	5.03	4.49	4.37	4.21	4.14	4.08	7.85	8.08	X	...	X
24	5.61	5.03	4.49	4.37	4.20	4.13	4.08	4.05	7.86	X	...	X
25	5.60	5.02	4.49	4.36	4.20	4.13	4.07	4.05	3.96	1.138	...	X
26	5.59	5.02	4.49	4.36	4.20	4.12	4.07	4.04	3.96	1.095	...	X
27	5.58	5.02	4.49	4.36	4.19	4.12	4.07	4.04	3.97	1.062	...	X
28	5.57	5.01	4.49	4.36	4.19	4.12	4.07	4.04	3.97	1.033	...	X
29	5.56	5.01	4.49	4.36	4.19	4.12	4.07	4.04	3.97	1.006	...	X
30	5.56	5.01	4.49	4.35	4.19	4.12	4.06	4.04	3.97	0.981	...	X
31	5.55	5.01	4.49	4.35	4.19	4.12	4.06	4.03	3.97	0.958	...	X
32	5.55	5.01	4.49	4.35	4.19	4.12	4.06	4.03	3.97	0.938	...	X
33	5.54	5.00	4.49	4.35	4.19	4.11	4.06	4.03	3.97	0.919	...	X
34	5.54	5.00	4.49	4.35	4.19	4.11	4.06	4.03	3.98	0.901	...	X
35	5.54	5.00	4.49	4.35	4.19	4.11	4.06	4.03	3.98	0.884	...	X
36	5.53	5.00	4.49	4.35	4.19	4.11	4.06	4.03	3.98	0.868	...	X
37	5.53	5.00	4.49	4.35	4.19	4.11	4.06	4.03	3.98	0.854	...	X
38	5.52	5.00	4.49	4.35	4.19	4.11	4.06	4.03	3.98	0.841	...	X
39	5.52	5.00	4.49	4.35	4.19	4.11	4.06	4.03	3.98	0.828	...	X
40	5.52	5.00	4.49	4.35	4.19	4.11	4.06	4.03	3.98	0.816	...	X
41	5.52	5.00	4.49	4.35	4.19	4.11	4.06	4.03	3.98	0.805	...	30.721
42	5.51	5.00	4.49	4.35	4.19	4.11	4.06	4.03	3.98	0.794	...	0.667
43	5.51	5.00	4.49	4.35	4.19	4.12	4.06	4.03	3.98	0.784	...	0.655
44	5.51	5.00	4.49	4.35	4.19	4.12	4.06	4.03	3.98	0.774	...	0.643
45	5.51	4.99	4.49	4.35	4.19	4.12	4.06	4.03	3.98	0.765	...	0.632
46	5.51	4.99	4.49	4.35	4.19	4.12	4.06	4.03	3.98	0.756	...	0.621
47	5.50	4.99	4.49	4.35	4.19	4.12	4.06	4.03	3.98	0.748	...	0.611
48	5.50	4.99	4.49	4.35	4.19	4.12	4.06	4.03	3.98	0.740	...	0.602

Tabela 2: Maksymalne odległości (rzędy - węzły, kolumny - stopnie)

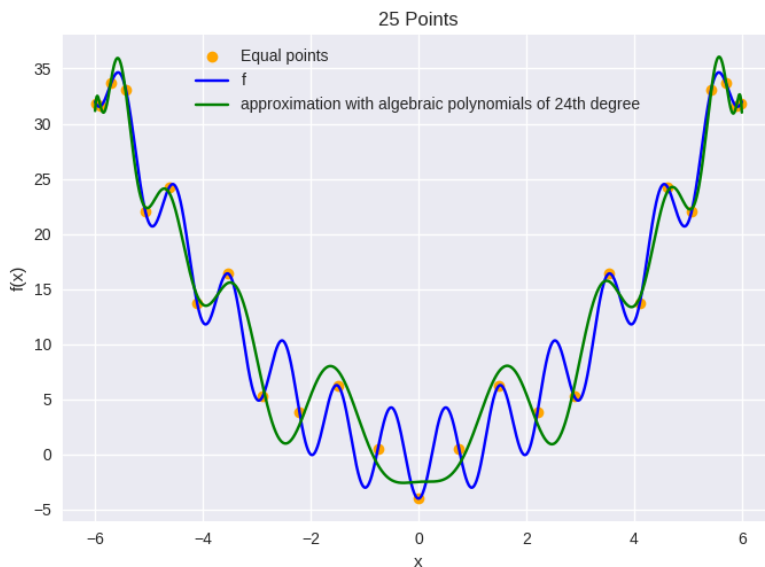
Z tabel wynika, że wzrost liczby węzłów ma wpływ na dokładność tylko do pewnego momentu, lub prawie nie ma wpływu dla stopni wielomianu, które dobrze przybliżają funkcję f . Natomiast zwiększanie liczby funkcji bazowych (stopnia wielomianu) wpływa istotnie na dokładność aż do momentu, kiedy dokładność jest bardzo duża. Warto też zauważyć, że dla stopni większych od dwunastu czasami występuje zjawisko, gdzie wielomian danego stopnia ma bardzo zaniżoną dokładność dla minimalnej liczby węzłów.

2.4 Porównanie z aproksymacją średniokwadratową wielomianami algebraicznymi

Ze względu na naturę funkcji f aproksymacja przy użyciu wielomianów trygonometrycznych skutkuje lepszą dokładnością niż aproksymacja przy użyciu wielomianów algebraicznych oraz osiąga ją dla mniejszych liczb funkcji bazowych i węzłów. Na przykład, poniżej porównanie: wielomiany algebraiczne dla 25 funkcji bazowych (24 stopnia), 25 węzłów oraz wielomiany trygonometryczne dla 25 funkcji bazowych (12 stopnia), 25 węzłów.



Rysunek 10: Aproksymacja średniokwadratowa wielomianami trygonometrycznymi 12 stopnia



Rysunek 11: Aproksymacja średniokwadratowa wielomianami algebraicznymi 24 stopnia

3 Wnioski

Aproksymacja średniokwadratowa wielomianami algebraicznymi jest skutecznym sposobem przybliżania funkcji, jeżeli nie musi być spełniony warunek, że funkcja przybliżająca przechodzi przez dane punkty, lub punkty obciążone są błędami. Do aproksymacji można używać różnych liczb wielomianów bazowych, użycie większej liczby wielomianów zazwyczaj skutkuje zwiększeniem dokładności, w przeciwieństwie do zwiększania liczby węzłów. Dla pewnych funkcji, jak ta przedstawiona tutaj, aproksymacja średniokwadratowa wielomianami trygonometrycznymi skutkuje dużo lepszą dokładnością niż wielomianami algebraicznymi.