

Interpolacja według metod Lagrange’a oraz Newtona

Łukasz Wala

*AGH, Wydział Informatyki, Elektroniki i Telekomunikacji
Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice 2021/2022*

Kraków, 29 marca 2022

1 Opis problemu

Główną ideą zadania jest zbadanie zachowania wielomianów interpolacyjnych dla poniższej funkcji, dla zagadnienia Lagrange’a, skonstruowanych dwoma metodami: Newtona oraz Lagrange’a oraz korzystając z różnego rozmieszczenia węzłów: równomiernie oddalonych oraz według pierwiastków wielomianu Czebyszewa.

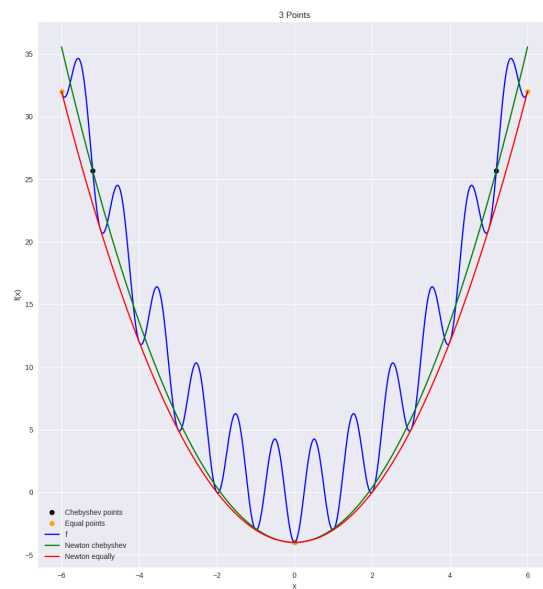
Badana funkcja:

$$f(x) = x^2 - m \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{k}\right)$$

Gdzie $k = \frac{1}{2}$, $m = 4$ oraz $x \in [-6, 6]$.

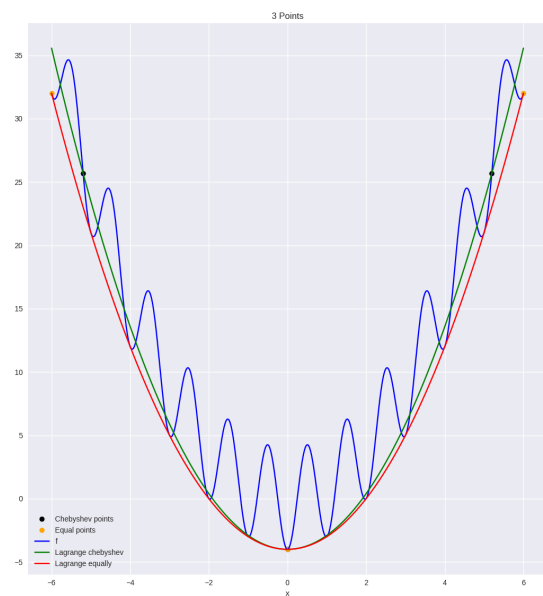
2 Opracowanie

Pierwszym krokiem będzie skonstruowanie wielomianów dla różnych ilości węzłów oraz narysowanie wykresów. Do tego użyty zostanie załączony program w języku Python.



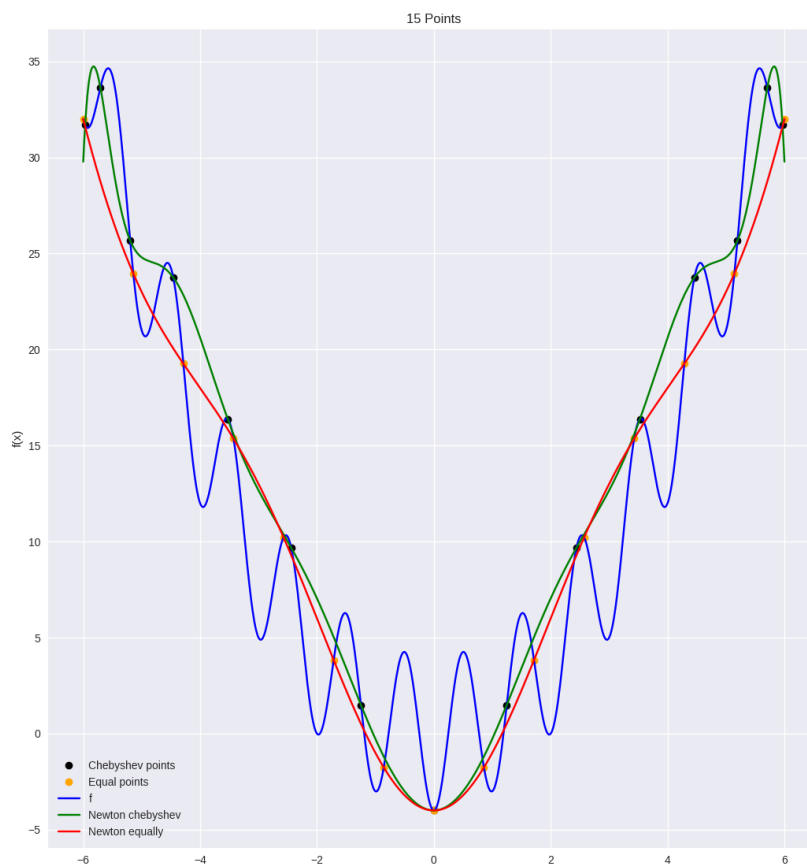
Rysunek 1: Metoda Newtona dla 3 punktów

Dla 3 węzłów wykres wielomianu nie przypomina zbytnio wykresu funkcji f , co nie powinno dziwić. Podobnie w przypadku metody Lagrange'a:



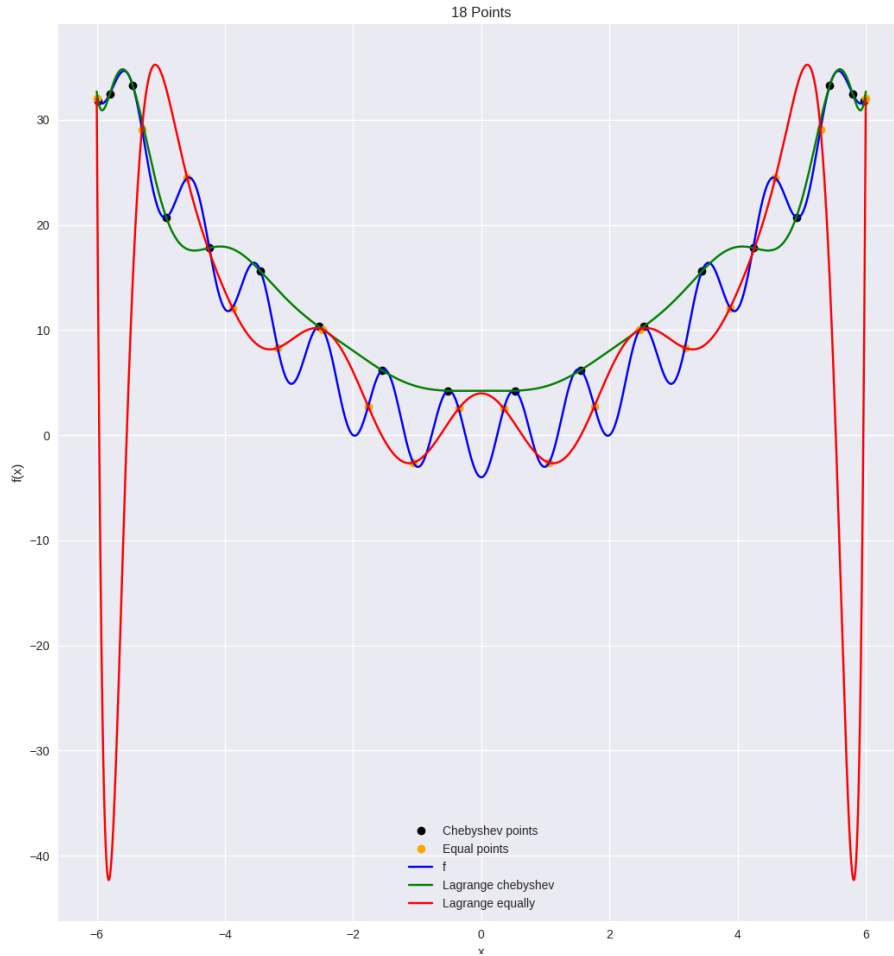
Rysunek 2: Metoda Lagrange'a dla 3 punktów

Wraz z zwiększaniem ilości węzłów wykres wielomianu coraz bardziej zbliża się do wykresu funkcji f , poniżej przykład dla 15 węzłów, dla obu metod rozmieszczenia węzłów wyniki są wizualnie podobne.



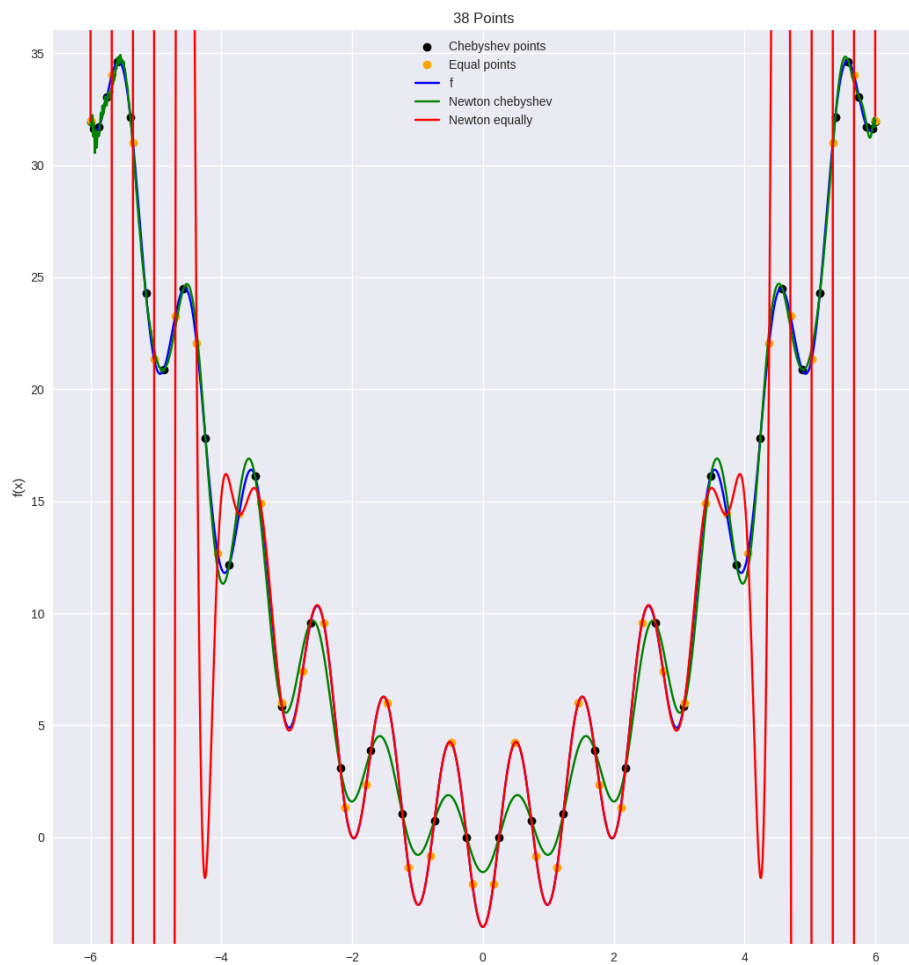
Rysunek 3: Metoda Newtona dla 15 punktów

Jednak dla ok. 17-18 węzłów w przypadku równomiernego rozmieszczenia węzłów, na krańcach przedziału zaczyna być widoczny efekt Rungego. Wraz z dalszym zwiększaniem liczby węzłów dla rozłożenia równomiernego efekt pogłębia się, a co za tym idzie, jakość interpolacji spada. Występowanie efektu Rungego nie jest zależne od metody interpolacji, natomiast nie występuje w przypadku węzłów Czebyszewa, które są gęściej upakowane na krańcach przedziału.



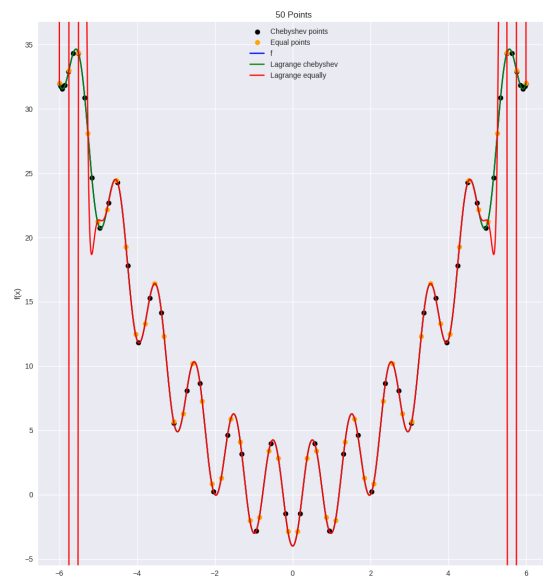
Rysunek 4: Metoda Lagrange'a dla 18 punktów

Podobieństwo wielomianu do funkcji f dla węzłów Czebyszewa rośnie dla obu metod aż do liczby 38 węzłów, gdzie następuje degradacja jakości wielomianu oraz pojawiają się błędy (wielomian nie zawiera punktów w węzłach) dla metody Newtona przy krańcach przedziału. Problem najprawdopodobniej wynika z błędów obliczeń związanymi z ograniczeniami precyzji floata. Na poniższym wykresie efekt ten zaczyna być zauważalny dla lewego krańca przedziału dla węzłów Czebyszewa (oraz bardzo ewidentny efekt Rungego dla równomiernie rozmieszczonych węzłów).

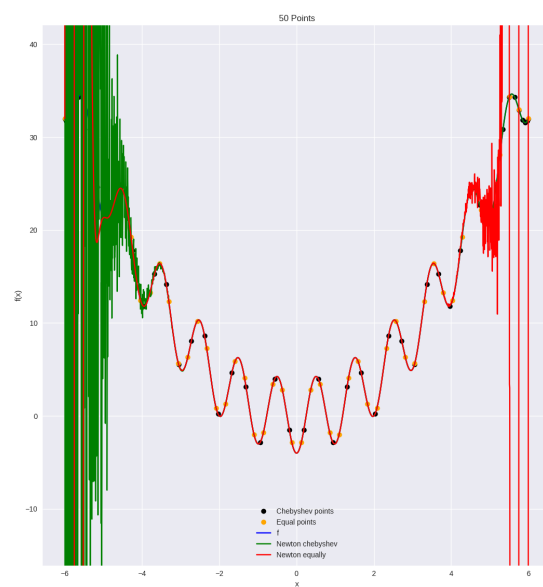


Rysunek 5: Metoda Newtona dla 38 punktów

Dla 50 węzłów, będącą największą zbadaną wartością, metoda Lagrange'a dla węzłów Czebyszewa bardzo dokładnie w przybliża funkcję f . Pozostałe metody, ze względu na efekt Rungego lub problem opisany na stronie 4, nie są w stanie przybliżyć funkcji.



Rysunek 6: Metoda Lagrange'a dla 50 punktów



Rysunek 7: Metoda Newtona dla 50 punktów

Kolejnym krokiem będzie policzenie dokładności przybliżenia. Miarami dokładności będą: średnia kwadratów odległości wartości odległości oraz największa różnica wartości odległości funkcji f oraz wielomianu interpolacyjnego dla

1000 równomiernie rozmieszczonych punktów w zakresie $[-6, 6]$. Poniższe tabele zawierają dokładności od 3 do 49, mierząc co drugą liczbę węzłów.

| Ilość węzłów | Newton | | Lagrange | |
|--------------|-----------|--------------|------------|--------------|
| | Czebyszew | rów. odd. | Czebyszew | rów. odd. |
| 3 | 17.0733 | 23.98 | 17.0733 | 23.98 |
| 5 | 18.8049 | 23.98 | 18.8049 | 23.98 |
| 7 | 16.5071 | 23.98 | 16.5071 | 23.98 |
| 9 | 17.7717 | 225.44 | 17.7717 | 225.44 |
| 11 | 15.0579 | 16.10 | 15.0579 | 16.10 |
| 13 | 16.4392 | 23.98 | 16.4392 | 23.98 |
| 15 | 16.6307 | 15.98 | 16.6307 | 15.98 |
| 17 | 14.8798 | 14.81 | 14.8798 | 14.81 |
| 19 | 15.7795 | 18855.10 | 15.7795 | 18855.10 |
| 21 | 13.1300 | 7825523.53 | 13.1300 | 7825523.53 |
| 23 | 12.6171 | 513891521.49 | 12.6171 | 513891521.49 |
| 25 | 11.3945 | 9781348058 | 11.3945 | 9781348058 |
| 27 | 11.2069 | 76060415066 | 11.2069 | 76060415071 |
| 29 | 9.5034 | 297334254455 | 9.5034 | 297334254506 |
| 31 | 8.8444 | 667288797764 | 8.8444 | 667288797931 |
| 33 | 7.8320 | 940961326952 | 7.8321 | 940961329998 |
| 35 | 4.1558 | 889414296556 | 4.1555 | 889414307658 |
| 37 | 1.3042 | 591429140136 | 1.2971 | 591429134229 |
| 39 | 0.2676 | 287215295287 | 0.2574 | 287215301381 |
| 42 | 0.4426 | 104940098714 | 0.03472 | 104940003048 |
| 43 | 1.0863 | 29554893468 | 0.003348 | 29554762315 |
| 45 | 10.7866 | 6546668681 | 0.00023972 | 6546450581 |
| 47 | 734.1665 | 1160128264 | 0.00001312 | 1159986609 |
| 49 | 396.5238 | 166848078 | 0.00000056 | 166833341 |

Tabela 1: Średnia kwadratów różnic funkcji f oraz wielomianów

Wnioski uzyskane podczas analizy wykresów zgadzają się z zawartością tabeli: dla liczb węzłów mniejszych niż 18 wyniki są niemal identyczne niezależnie od metody lub rozmieszczenia węzłów. Równomiernie rozmieszczone punkty skutkują stratą dokładności przy liczbie węzłów większej niż ok. 18 (efekt Rungego), natomiast dokładność metody Newtona zaczyna maleć po przekroczeniu liczby ok. 40 węzłów (problem opisany na 4 stronie). Najdokładniejsza okazuje się metoda Lagrange'a dla węzłów Czebyszewa, której dokładność rośnie dla całej puli badanych liczb węzłów. Liczba węzłów, dla której uzyskano największą dokładność z użyciem załączonego programu (ze względu na długi czas działania) to 79, przy czym można przypuszczać, że dokładność nadal rośnie dla większych liczb.

Poniższa tabela maksimumów wartości odległości w punktach dla wielomianu oraz funkcji f utwierdza w dotychczasowych wnioskach.

| Ilość węzłów | Newton | | Lagrange | |
|--------------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| | Czebyszew | rów. odd. | Czebyszew | rów. odd. |
| 3 | 7.9752 | 7.9998 | 7.9752 | 7.9998 |
| 5 | 8.8575 | 7.9998 | 8.8575 | 7.9998 |
| 7 | 8.1337 | 7.9998 | 8.1337 | 7.9998 |
| 9 | 7.9917 | 37.2665 | 7.9917 | 37.2665 |
| 11 | 10.0078 | 7.9964 | 10.007 | 7.9964 |
| 13 | 8.0206 | 7.9998 | 8.0206 | 7.9998 |
| 15 | 8.6225 | 7.9992 | 8.6225 | 7.9992 |
| 17 | 7.8088 | 6.2050 | 7.8088 | 6.2050 |
| 19 | 8.1167 | 648.82 | 8.1167 | 648.829 |
| 21 | 8.6439 | 14045.280 | 8.6439 | 14045.2 |
| 23 | 8.0000 | 120159.07 | 8.0000 | 120159.0 |
| 25 | 8.3273 | 551407.06 | 8.3273 | 551407.0 |
| 27 | 7.8523 | 1611826 | 7.8523 | 1611826 |
| 29 | 8.2379 | 3327716 | 8.2379 | 3327716 |
| 31 | 7.8731 | 5187650 | 7.8731 | 5187650 |
| 33 | 6.1203 | 6409255 | 6.1203 | 6409255 |
| 35 | 3.8940 | 6437258 | 3.8940 | 6437258 |
| 37 | 2.0243 | 5444504 | 2.0243 | 5444504 |
| 39 | 1.4708 | 3909357 | 0.8717 | 3909357 |
| 42 | 9.8612 | 2433404 | 0.3185 | 2433401 |
| 43 | 13.3245 | 1331536 | 0.09962 | 1331533 |
| 45 | 42.691 | 642940 | 0.02706 | 642916 |
| 47 | 333.59 | 276428 | 0.00645 | 276373 |
| 49 | 266.21 | 107818 | 0.001365 | 107818 |

Tabela 2: Maksimum wartości bezwzględnej różnic funkcji f oraz wielomianów

3 Wnioski

Zarówno metoda Newtona jak i Lagrange'a pozwala na skuteczne przybliżanie funkcji z użyciem wielomianów interpolacyjnych przy zachowaniu pewnych warunków, np. używaniu węzłów Czebyszewa, żeby uniknąć efektu Rungego. Użycie tych metod może być przydatne, jeżeli funkcja przybliżana jest skomplikowana i wygodniejsze jest używanie wielomianu interpolacyjnego lub gdy znane są tylko niektóre wartości funkcji.