

Interpolacja funkcjami sklejanymi

Łukasz Wala

*AGH, Wydział Informatyki, Elektroniki i Telekomunikacji
Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice 2021/2022*

Kraków, 10 kwietnia 2022

1 Opis problemu

Główną ideą zadania jest zbadanie zachowania wielomianów interpolacyjnych dla poniższej funkcji skonstruowanych za pomocą funkcji sklejanych drugiego oraz trzeciego stopnia dla różnych warunków brzegowych.

Badana funkcja:

$$f(x) = x^2 - m \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{k}\right)$$

Gdzie $k = \frac{1}{2}$, $m = 4$ oraz $x \in [-6, 6]$.

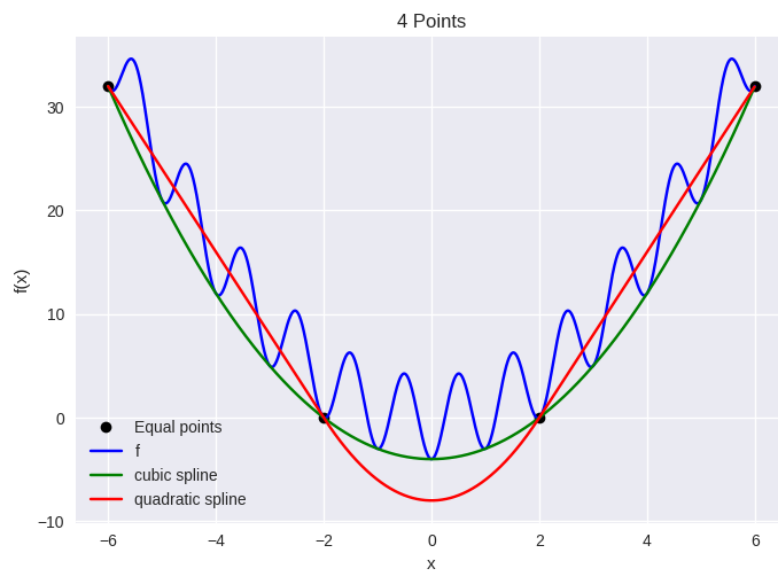
2 Opracowanie

2.1 Wielomiany interpolacyjne

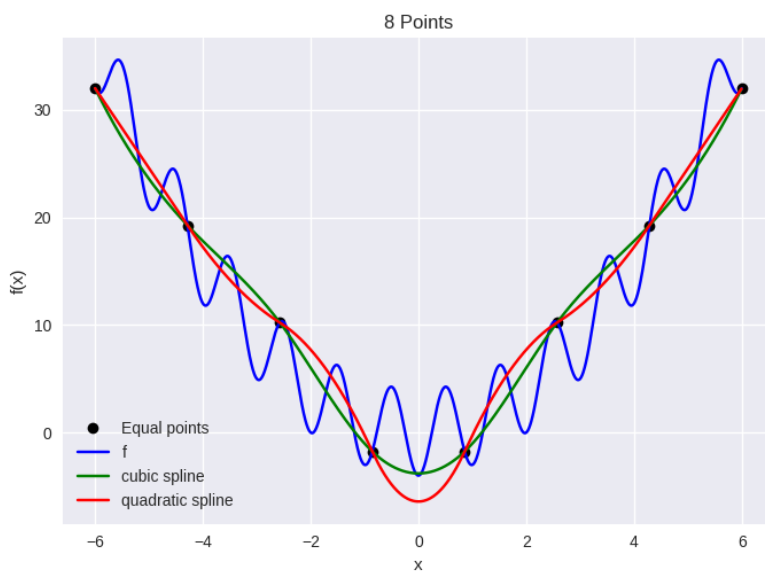
Do skonstruowania wielomianów i narysowania wykresów zostanie użyty załączony program w języku Python. Pierwszym krokiem będzie zbadanie zachowania i różnic pomiędzy wielomianami sklejanymi drugiego oraz trzeciego stopnia. Różnice wynikające z zmiany warunków brzegowych zostaną zbadane w kolejnej sekcji. Tutaj zostaną użyte:

- dla wielomianów 3 stopnia - przybliżanie trzecich pochodnych w pierwszym i ostatnim punkcie ilorazami różnicowymi,
- dla wielomianów 2 stopnia - przybliżanie pierwszych pochodnych w pierwszym punkcie ilorazem różnicowym.

Zakres liczb węzłów, dla których badane będą wielomiany wynosi 4-50. Węzły rozłożone są równomiernie, ponieważ, jako że stopnie wielomianów są niewielkie, nie występuje efekt Rungego.



Rysunek 1: Interpolacja splajnami dla 4 punktów

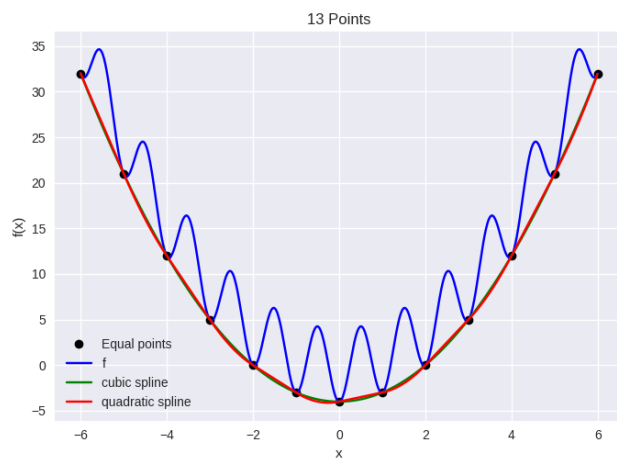


Rysunek 2: Interpolacja splajnami dla 8 punktów

Dla 9 węzłów w przypadku wielomianów 2 stopnia pojawiają się oscylacje, może być to spowodowane wachającymi się wartościami funkcji w węzłach. Warto również zauważyć, że oscylacja występuje po prawej stronie wykresu, ponieważ dla lewego krańca określony jest warunek brzegowy. W przypadku wielomianów 3 stopnia podobny problem nie występuje.



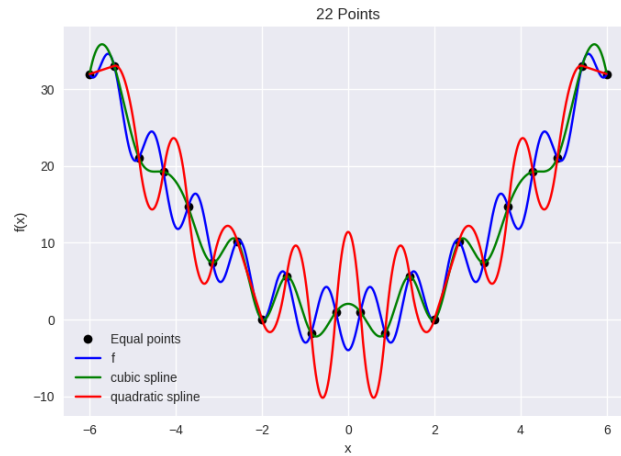
Rysunek 3: Interpolacja splajnami dla 9 punktów



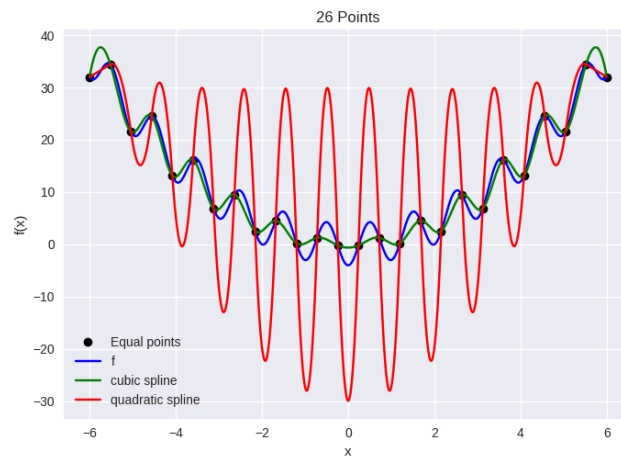
Rysunek 4: Interpolacja splajnami dla 13 punktów

Dla kolejnych liczb węzłów (większych niż 9) efekt oscylacji nie pojawia się, wielomiany zachowują się przewidywalnie. Podobny problem pojawia się w

okolicy liczby 22 węzłów. Tutaj, z racji dużej liczby węzłów, warunek brzegowy nie wpływa na obszar oscylacji. Dla wielomianów 3 stopnia, podobnie jak w poprzednim przypadku, efekt nie występuje, poprawnie przybliżają badaną funkcję.

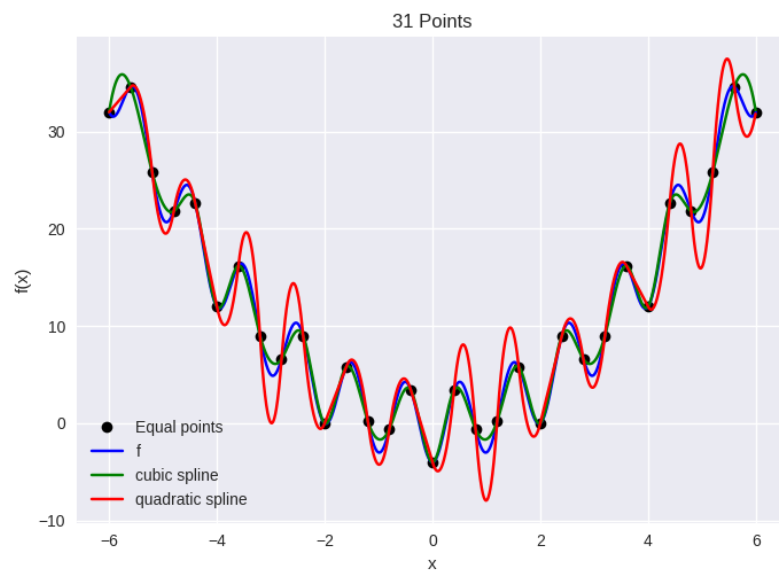


Rysunek 5: Interpolacja splajnami dla 22 punktów

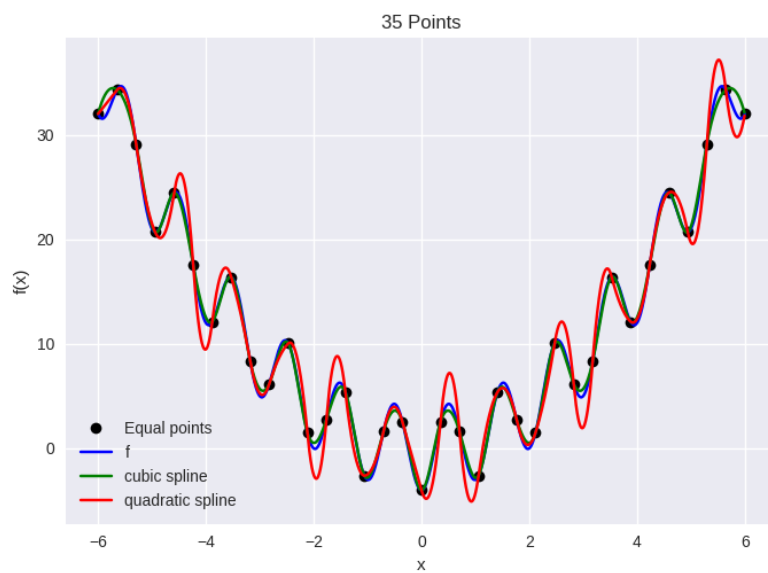


Rysunek 6: Interpolacja splajnami dla 26 punktów

Oscylacja nasila się od liczby 26 węzłów, następnie efekt maleje, a wielomiany 2 stopnia coraz lepiej przybliżają badaną funkcję.

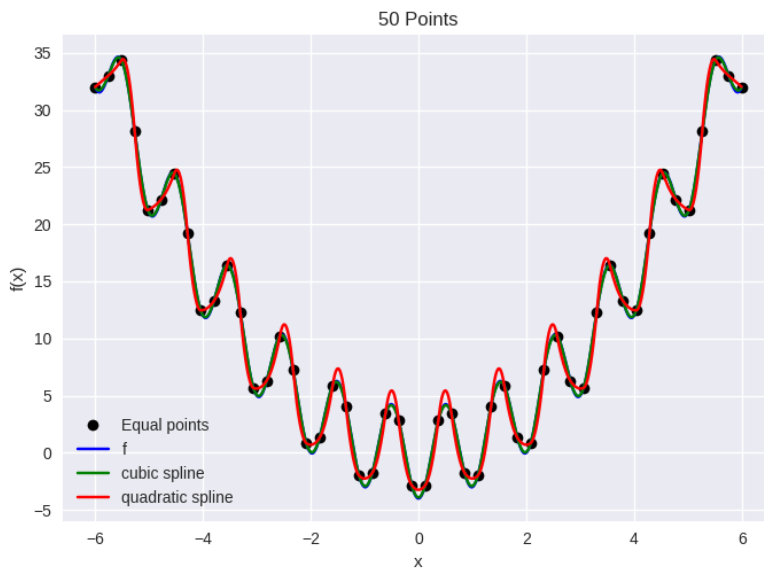


Rysunek 7: Interpolacja splajnami dla 31 punktów



Rysunek 8: Interpolacja splajnami dla 35 punktów

Na wykresie dla 35 punktów można zauważyć, że przybliżenie jest relatywnie dokładne dla wielomianów 3 stopnia oraz niewiele mniej dokładne dla wielomianów 2 stopnia.



Rysunek 9: Interpolacja splajnami dla 50 punktów

2.2 Warunki brzegowe

Zarówno dla wielomianów interpolowanych sklejanych funkcjami trzeciego jak i drugiego stopnia zbadano dwa rodzaje warunków brzegowych:

- dla wielomianów trzeciego stopnia:
 - warunek 1 - przybliżanie trzecich pochodnych w pierwszym i ostatnim węźle ilorazami różnicowymi,
 - warunek 2, free boundary - drugie pochodne w pierwszym i ostatnim węźle zastąpione zerami,
- dla wielomianów drugiego stopnia:
 - warunek 1 - przybliżanie pierwszej pochodnej w pierwszym węźle ilorazem różnicowymi,
 - warunek 2 - zastąpienie pierwszej pochodnej w pierwszym węźle zerem,

2.3 Dokładność

Pozostaje obliczenie dokładności oraz skonfrontowanie wyników z wnioskami uzyskanymi na podstawie analizy wykresów. Miarami dokładności będą:

- Średnia kwadratów odległości wartości wielomianu oraz funkcji f dla 1000 równo oddalonych punktów,
- Maksymalna odległość wartości wielomianu oraz funkcji f dla 1000 równo oddalonych punktów.

3 Wnioski