Równania różniczkowe i różnicowe

Przybliżone rozwiązanie równania potencjału grawitacyjnego z użyciem metody elementów skończonych

Łukasz Wala

1. Opis problemu

Rozwiązywane równanie ma postać

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} = 4\pi G\rho(x)$$

$$\Phi(0) = 5$$

$$\Phi(3) = 4$$

$$\rho(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1] \\ 1, & x \in (1,2] \\ 0, & x \in (2,3] \end{cases}$$

Gdzie Φ to poszukiwana funkcja

$$[0,3] \ni x \to \Phi(x) \in \mathbb{R}$$

2. Sformułowanie równania słabego

Równanie można zapisać jako

$$\Phi''(x) = 4\pi G\rho(x)$$

Przyjęto przestrzeń V funkcji, które zerują się na brzegach. Pomnożono równanie przez dowolną funkcję testową $v \in V$

$$\int_0^3 \Phi''(x)v(x)\,\mathrm{dx} = \int_0^3 4\pi G\rho(x)v(x)\,\mathrm{dx}$$

Całkowano przez części

$$\Phi'(x)v(x)|_0^3 - \int_0^3 \Phi'(x)v'(x)\,\mathrm{dx} = \int_0^3 4\pi G\rho(x)v(x)\,\mathrm{dx}$$

Ponieważ $v(0) = v(3) = 0$

$$-\int_0^3 \Phi'(x)v'(x)\,\mathrm{dx} = \int_0^3 4\pi G\rho(x)v(x)\,\mathrm{dx}$$

Ponieważ warunki Dirichleta są niezerowe, szukany wynik będzie miał postać

$$\Phi(x) = \widetilde{\Phi}(x) + w(x), \qquad w \in V$$

Oraz

$$w(0) = w(3) = 0$$

Więc za funkcję $\widetilde{\Phi}(x)$ (tzw. shift), ażeby warunki Dirichleta były spełnione, można przyjąć

$$\widetilde{\Phi}(x) = 5 - \frac{x}{3}$$

$$\Phi'(x) = w'(x) - \frac{1}{3}$$

Wówczas

$$-\int_0^3 \left(w'(x) - \frac{1}{3}\right) v'(x)\,\mathrm{dx} = \int_0^3 4\pi G\rho(x)v(x)\,\mathrm{dx}$$

$$-\int_0^3 w'(x)v'(x)\,\mathrm{dx} + \frac{1}{3}\int_0^3 v'(x)\,\mathrm{dx} = \int_0^3 4\pi G\rho(x)v(x)\,\mathrm{dx}$$

Po uporządkowaniu

$$-\int_0^3 w'(x)v'(x)\,\mathrm{dx} = \int_0^3 4\pi G\rho(x)v(x)\,\mathrm{dx} - \frac{1}{3}\int_0^3 v'(x)\,\mathrm{dx}$$

$$-\int_0^3 w'(x)v'(x)\,\mathrm{dx} = 4\pi G\int_0^3 \rho(x)v(x)\,\mathrm{dx} - \frac{1}{3}\int_0^3 v'(x)\,\mathrm{dx}$$

Po oznaczeniu

$$B(w,v) = L(v)$$

Gdzie

$$B(w,v) = -\int_0^3 w'(x)v'(x)\,\mathrm{dx}$$

$$L(v) = 4\pi G\int_0^3 \rho(x)v(x)\,\mathrm{dx} - \frac{1}{3}\int_0^3 v'(x)\,\mathrm{dx}$$

Po podstawieniu $\rho(x)$ w $L(v)$

$$L(v) = 4\pi G\int_1^2 v(x)\,\mathrm{dx} - \frac{1}{3}\int_0^3 v'(x)\,\mathrm{dx}$$

3. Metoda Galerkina

Do otrzymania przybliżonego wyniku użyta zostanie metoda Galerkina.
Niech $V_h \in V$ oraz $w_h \in V_h$

$$w \approx w_h = \sum_0^N w_i e_i$$

Gdzie N jest liczbą punktów podziałowych zawierających również krańce dziedziny, a e_i to funkcje bazowe generujące przestrzeń V_h

$$e_i = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & x \in (x_{i-1}, x_i) \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, & x \in (x_i, x_{i+1}) \\ 0, & w\,p.p. \end{cases}$$

Funkcja w na brzegach dziedziny się zeruje, więc pierwszy i ostatni element sumy w_h można zignorować

$$w_h = \sum_1^{N-1} w_i e_i$$

$$V_h = \langle e_1, e_2, \dots, e_{N-1} \rangle$$

Po podstawieniu do $B(w, v)$ i $L(v)$

$$B\left(\sum_1^{N-1} w_i e_i \, , v \right) = L(v)$$

$$\sum_1^{N-1} w_i \, B(e_i, v) = L(v)$$

Ponieważ $e_i \in V_h \subset V \ni \ v$

$$\sum_1^{N-1} w_i \, B\big(e_i, e_j\big) = L\big(e_j\big), \quad j = 1, 2, \dots, N-1$$

Daje to układ $N - 1$ równań, którego postać macierzowa wygląda następująco

$$\begin{bmatrix} B(e_1, e_1) & \cdots & B(e_{N-1}, e_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B(e_1, e_{N-1}) & \cdots & B(e_{N-1}, e_{N-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L(e_1) \\ \vdots \\ L(e_{N-1}) \end{bmatrix}$$

Rozwiązaniem początkowego równania będzie wówczas

$$\Phi(x) = \widetilde{\Phi}(x) + w(x)$$

$$\Phi(x) = 5 - \frac{x}{3} + \sum_1^{N-1} w_i e_i$$

Do rozwiązania tego układu i obliczenia wartości całek (z użyciem metody Gaussa-Legendre'a) posłuży program załączony do owego opracowania napisany w języku Julia.

4. Potencjalne optymalizacje i udoskonalenia

Po przyjrzeniu się powyższemu rozwiązaniu można zauważyć kilka potencjalnych optymalizacji i udoskonaleń obliczania wartości B i L:

a) Macierz układu będzie symetryczna, dzieje się tak ponieważ

$$B(e_i, e_j) = B(e_j, e_i)$$

co oznacza, że wystarczy policzyć wartości tylko na oraz powyżej przekątnej macierzy.

b) dla i, j takich, że $|i - j| > 1$ $e_i \cdot e_j = 0$, więc $B(e_i, e_j) = 0$, co pozwala na zastąpienie zerami większości elementów macierzy bez konieczności ich liczenia.

c) ponieważ, zgodnie z punktami a i b, rozważane będą tylko funkcje w postaci $B(e_i, e_i)$ oraz $B(e_i, e_{i+1})$, zauważyć można, że $e_i \cdot e_i$ przyjmuje wartości niezerowe na przedziale (x_{i-1}, x_{i+1}), a $e_i \cdot e_{i+1}$ na przedziale (x_i, x_{i+1}), więc całkować wystarczy na tych przedziałach, co zwiększy dokładność metody Gaussa-Legendre'a, analogiczna sytuacja zachodzi dla $L(e_i)$.

d) Iloczyn $e_i'(x) \cdot e_i'(x)$ wynosi

$$e_i'(x) \cdot e_i'(x) = \begin{cases} (x_i - x_{i-1})^2, & x \in (x_{i-1}, x_i) \\ (x_{i+1} - x_i)^2, & x \in (x_i, x_{i+1}) \\ 0, & w\, p.p. \end{cases}$$

Gdzie $x_i - x_{i-1} = x_{i+1} - x_i = h$. h to odległość pomiędzy sąsiednimi punktami podziałowymi stała dla wszystkich punktów, więc

$$B(e_i, e_i) = B(e_1, e_1) = B(e_2, e_2) = \cdots = B(e_{N-1}, e_{N-1}).$$

Jak widać, wszystkie wartości na przekątnej macierzy są równe, więc wystarczy policzy tylko jedną, a resztę nią zastąpić.