

Równania różniczkowe i różnicowe

Przybliżone rozwiązanie równania potencjału grawitacyjnego z
użyciem metody elementów skończonych

Łukasz Wala

1. Opis problemu

Rozwiązywane równanie ma postać

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} = 4\pi G\rho(x)$$

$$\Phi(0) = 5$$

$$\Phi(3) = 4$$

$$\rho(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1] \\ 1, & x \in (1,2] \\ 0, & x \in (2,3] \end{cases}$$

Gdzie Φ to poszukiwana funkcja

$$[0,3] \ni x \rightarrow \Phi(x) \in \mathbb{R}$$

2. Sformułowanie równania słabego

Równanie można zapisać jako

$$\Phi''(x) = 4\pi G\rho(x)$$

Przyjęto przestrzeń V funkcji, które zerują się na brzegach. Pomnożono
równanie przez dowolną funkcję testową $v \in V$

$$\int_0^3 \Phi''(x)v(x) \, dx = \int_0^3 4\pi G\rho(x)v(x) \, dx$$

Całkowano przez części

$$\Phi'(x)v(x)|_0^3 - \int_0^3 \Phi'(x)v'(x) dx = \int_0^3 4\pi G\rho(x)v(x) dx$$

Ponieważ $v(0) = v(3) = 0$

$$-\int_0^3 \Phi'(x)v'(x) dx = \int_0^3 4\pi G\rho(x)v(x) dx$$

Ponieważ warunki Dirichleta są niezerowe, szukany wynik będzie miał postać

$$\Phi(x) = \tilde{\Phi}(x) + w(x), \quad w \in V$$

Oraz

$$w(0) = w(3) = 0$$

Więc za funkcję $\tilde{\Phi}(x)$ (tzw. shift), ażeby warunki Dirichleta były spełnione, można przyjąć

$$\tilde{\Phi}(x) = 5 - \frac{x}{3}$$

$$\Phi'(x) = w'(x) - \frac{1}{3}$$

Wówczas

$$-\int_0^3 \left(w'(x) - \frac{1}{3}\right)v'(x) dx = \int_0^3 4\pi G\rho(x)v(x) dx$$

$$-\int_0^3 w'(x)v'(x) dx + \frac{1}{3} \int_0^3 v'(x) dx = \int_0^3 4\pi G\rho(x)v(x) dx$$

Po uporządkowaniu

$$-\int_0^3 w'(x)v'(x) dx = \int_0^3 4\pi G\rho(x)v(x) dx - \frac{1}{3} \int_0^3 v'(x) dx$$

$$-\int_0^3 w'(x)v'(x) \, dx = 4\pi G \int_0^3 \rho(x)v(x) \, dx - \frac{1}{3} \int_0^3 v'(x) \, dx$$

Po oznaczeniu

$$B(w, v) = L(v)$$

Gdzie

$$B(w, v) = -\int_0^3 w'(x)v'(x) \, dx$$

$$L(v) = 4\pi G \int_0^3 \rho(x)v(x) \, dx - \frac{1}{3} \int_0^3 v'(x) \, dx$$

Po podstawieniu $\rho(x)$ w $L(v)$

$$L(v) = 4\pi G \int_1^2 v(x) \, dx - \frac{1}{3} \int_0^3 v'(x) \, dx$$

3. Metoda Galerkina

Do otrzymania przybliżonego wyniku użyta zostanie metoda Galerkina.

Niech $V_h \in V$ oraz $w_h \in V_h$

$$w \approx w_h = \sum_0^N w_i e_i$$

Gdzie N jest liczbą punktów podziałowych zawierających również krańce dziedziny, a e_i to funkcje bazowe generujące przestrzeń V_h

$$e_i = \begin{cases} \frac{x - x_i}{x_i - x_{i-1}}, & x \in (x_{i-1}, x_i) \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, & x \in (x_i, x_{i+1}) \\ 0, & w.p.p. \end{cases}$$

Funkcja w na brzegach dziedziny się zeruje, więc pierwszy i ostatni element sumy w_h można zignorować

$$w_h = \sum_1^{N-1} w_i e_i$$

$$V_h = \langle e_1, e_2, \dots, e_{N-1} \rangle$$

Po podstawieniu do $B(w, v)$ i $L(v)$

$$B\left(\sum_1^{N-1} w_i e_i, v\right) = L(v)$$

$$\sum_1^{N-1} w_i B(e_i, v) = L(v)$$

Ponieważ $e_i \in V_h \subset V \ni v$

$$\sum_1^{N-1} w_i B(e_i, e_j) = L(e_j), \quad j = 1, 2, \dots, N-1$$

Daje to układ $N-1$ równań, którego postać macierzowa wygląda następująco

$$\begin{bmatrix} B(e_1, e_1) & \cdots & B(e_{N-1}, e_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B(e_1, e_{N-1}) & \cdots & B(e_{N-1}, e_{N-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L(e_1) \\ \vdots \\ L(e_{N-1}) \end{bmatrix}$$

Rozwiązaniem początkowego równania będzie wówczas

$$\Phi(x) = \tilde{\Phi}(x) + w(x)$$

$$\Phi(x) = 5 - \frac{x}{3} + \sum_1^{N-1} w_i e_i$$

Do rozwiązania tego układu i obliczenia wartości całek (z użyciem metody Gaussa-Legendre'a) posłuży program załączony do owego opracowania napisany w języku Julia.

4. Potencjalne optymalizacje i udoskonalenia

Po przyjrzeniu się powyższemu rozwiązaniu można zauważyć kilka potencjalnych optymalizacji i udoskonań obliczania wartości B i L :

- a) Macierz układu będzie symetryczna, dzieje się tak ponieważ

$$B(e_i, e_j) = B(e_j, e_i)$$

co oznacza, że wystarczy policzyć wartości tylko na oraz powyżej przekątnej macierzy.

- b) dla i, j takich, że $|i - j| > 1$ $e_i \cdot e_j = 0$, więc $B(e_i, e_j) = 0$, co pozwala na zastąpienie zerami większości elementów macierzy bez konieczności ich liczenia.

- c) ponieważ, zgodnie z punktami a i b, rozważane będą tylko funkcje w postaci $B(e_i, e_i)$ oraz $B(e_i, e_{i+1})$, zauważyć można, że $e_i \cdot e_i$ przyjmuje wartości niezerowe na przedziale (x_{i-1}, x_{i+1}) , a $e_i \cdot e_{i+1}$ na przedziale (x_i, x_{i+1}) , więc całkować wystarczy na tych przedziałach, co zwiększy dokładność metody Gaussa-Legendre'a, analogiczna sytuacja zachodzi dla $L(e_i)$.

- d) Iloczyn $e'_i(x) \cdot e'_i(x)$ wynosi

$$e'_i(x) \cdot e'_i(x) = \begin{cases} (x_i - x_{i-1})^2, & x \in (x_{i-1}, x_i) \\ (x_{i+1} - x_i)^2, & x \in (x_i, x_{i+1}) \\ 0, & \text{w p.p.} \end{cases}$$

Gdzie $x_i - x_{i-1} = x_{i+1} - x_i = h$. h to odległość pomiędzy sąsiednimi punktami podziałowymi stała dla wszystkich punktów, więc

$$B(e_i, e_i) = B(e_1, e_1) = B(e_2, e_2) = \dots = B(e_{N-1}, e_{N-1}).$$

Jak widać, wszystkie wartości na przekątnej macierzy są równe, więc wystarczy policzyć tylko jedną, a resztę nią zastąpić.