# Acopladores Direcionais

Teoria de Ondas Guiadas

**Luiz Votto**

**e**

**Vinícius de Angelis**

Programa de Pós-Graduação

Departamento de Engenharia Elétrica e de Computação

Escola de Engenharia de São Carlos

Universidade de São Paulo

Primeiro Semestre de 2020

# Sumário

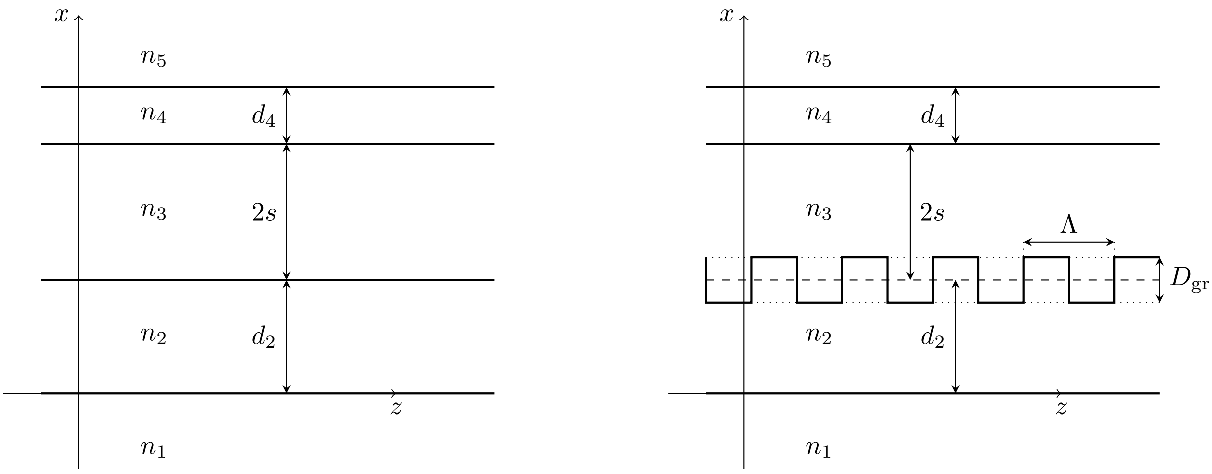
# Introdução

Foi solicitado em aula um estudo sobre a Ref. [1]; mais especificamente implementar sua equação (12) – neste estudo: Eq. (12). Formulações de modos acoplados normalmente seguem imaginando-se, por exemplo, que guias paralelos de seção transversal constante na direção de propagação, $z$, possuem perfis transversais de campos que pode ser aproximados a partir de uma combinação linear, da forma

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_t(x,y,z) &\approx a(z)\mathbf{E}_t^{(a)}(x,y) + b(z)\mathbf{E}_t^{(b)}(x,y), \\ \mathbf{H}_t(x,y,z) &\approx a(z)\mathbf{H}_t^{(a)}(x,y) + b(z)\mathbf{H}_t^{(b)}(x,y), \end{aligned} \tag{1}$$

onde os índices $(a)$ e $(b)$ representam os guias de onda separados, e $a(z)$ e $b(z)$ são as amplitudes locais de cada campo ao longo da direção de propagação. [1–3]

O exemplo estudado é como ilustra a Fig. 1 visto primeiramente nas Refs. [2] e [3], mas com a notação alinhada com a vista na Ref. [1].




(a) (b)

Figura 1: Esquemáticos da disposição dos guias de onda para os dois casos: (a) sem rede de difração, (b) com rede de difração.

Os guias foram estudados primeiramente em sua forma uniforme, sem perturbações [2], para depois ser estudado com uma rede de difração – uma perturbação longitudinal cuja modelagem matemática será melhor discutida em breve. A Ref. [1] propõe uma formulação mais robusta para a teoria de modos acoplados vigente na sua época.

Neste estudo, será revisto o acoplamento entre os guias descritos pelos núcleos de largura $d_2$ e $d_4$. Os parâmetros, como vistos na Fig. 1, são os índices de refração: $n_1 = 1$; $n_2 = 3,3$; $n_3 = 3,2$; $n_4 = 3,5$ e $n_5 = 3$; as larguras dos núcleos dos dois guias: $d_2 = 1$ µm e $d_4 = 0,3$ µm; e o comprimento de onda no espaço livre é considerado $\lambda = 1,5$ µm. $D_{\mathrm{gr}}$ e $\Lambda$ sendo, respectivamente, profundidade e período da rede de difração. Será estudado apenas os guias propagando modos $TE$ ($\mathbf{E} = \hat{\mathbf{y}}E_y$, $\mathbf{H} = \hat{\mathbf{x}}H_x + \hat{\mathbf{z}}H_z$), e a dependência em $z$ na forma $\exp(-i\beta z)$.

## Formulação Teórica

No artigo em [1], define-se a dependência dielétrica do espaço como

$$\varepsilon(x, y, z) = \varepsilon(x, y) + \Delta\varepsilon(z) \tag{2}$$

com $\varepsilon(x, y)$ é o meio geral contando com todos os guias de onda. Cada guia de onda – $j$ – isolado representa um valor dielétrico em função de espaço dado por $\varepsilon^{(j)}(x, y)$ tal que

$$\varepsilon(x, y) = \varepsilon^{(j)}(x, y) + \Delta\varepsilon^{(j)}(x, y). \tag{3}$$

As perturbações longitudinais estudadas são da forma

$$\Delta\varepsilon(x, y, z) = \varepsilon_0 f(x, y)\Delta n^2(z). \tag{4}$$

No exemplo estudado, visto na Fig. 1, a perturbação da rede de difração – localizada entre meios de índices $n_p$ e $n_q$ –, se representa com o termo fundamental de sua série de Fourier longitudinal

$$\Delta n^2(z) = \frac{2(n_p^2 - n_q^2)}{\pi} \cos\left(\frac{2\pi}{\Lambda} z\right) \tag{5}$$

e também é restrita pela função $f$ da forma

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } d_2 - D_{\text{gr}}/2 < x < d_2 + D_{\text{gr}}/2, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{6}$$

Para os fins da reprodução de um sistema de dois guias de onda, $a$ e $b$, temos uma famílias de coeficientes importantes tais como o coeficiente de sobreposição:

$$c = \frac{c_{ab} + c_{ba}}{2}, \tag{7}$$

onde, sejam $p, q \in \{a, b\}$,

$$c_{pq} = \frac{1}{2} \int\int \mathbf{E}_t^{(p)} \times \mathbf{H}_t^{(q)} \cdot \hat{\mathbf{z}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{8}$$

e os coeficientes de acomplamento

$$\tilde{K}_{pq} = \frac{\omega}{4} \int\int \Delta\varepsilon^{(q)}(x, y) \left( \mathbf{E}_t^{(p)} \cdot \mathbf{E}_t^{(q)} - \frac{\varepsilon^{(p)}(x, y)}{\varepsilon(x, y)} E_z^{(p)} E_z^{(q)} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{9}$$

e

$$\hat{K}_{pq} = \frac{\omega}{4}\varepsilon_0 \int\int f(x,y)\left(\mathbf{E}_t^{(p)} \cdot \mathbf{E}_t^{(q)} - \frac{\varepsilon^{(p)}(x,y)}{\varepsilon(x,y)} E_z^{(p)} E_z^{(q)}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{10}$$

Aqui se lidará com modo de propagação $TE$ de dois guias de onda como na Fig. 1. Assim, seja

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(z) = \begin{pmatrix} a(z) \\ b(z) \end{pmatrix} \tag{11}$$

como na Eq. (1), a equação diferencial cuja implementação foi solicitada se trata de

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathbf{u} = i(M + \Delta n^2(z)N)\mathbf{u}, \tag{12}$$

onde

$$M = \begin{pmatrix} \gamma_a & K_{ab} \\ K_{ba} & \gamma_b, \end{pmatrix} \tag{13}$$

tal que

$$\begin{aligned} \gamma_a &= \beta_a + \frac{\tilde{K}_{aa} - c\tilde{K}_{ba}}{1-c^2}, & \gamma_b &= \beta_b + \frac{\tilde{K}_{bb} - c\tilde{K}_{ab}}{1-c^2}, \\ K_{ab} &= \frac{\tilde{K}_{ab} - c\tilde{K}_{bb}}{1-c^2}, & K_{ba} &= \frac{\tilde{K}_{ba} - c\tilde{K}_{aa}}{1-c^2}; \end{aligned} \tag{14}$$

e

$$N = \begin{pmatrix} k_{aa} & k_{ab} \\ k_{ba} & k_{bb} \end{pmatrix} \tag{15}$$

em que

$$\begin{aligned} k_{aa} &= \frac{\hat{K}_{aa} - c\hat{K}_{ab}}{1-c^2}, & k_{bb} &= \frac{\hat{K}_{bb} - c\hat{K}_{ba}}{1-c^2}, \\ k_{ab} &= \frac{\hat{K}_{ba} - c\hat{K}_{bb}}{1-c^2}, & k_{ba} &= \frac{\hat{K}_{ab} - c\hat{K}_{aa}}{1-c^2}. \end{aligned} \tag{16}$$

# Implementação

Para modos de propagação Transversais Elétricos ($TE$), onde $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{y}}E_y$ e $\mathbf{H} = \hat{\mathbf{x}}H_x + \hat{\mathbf{z}}H_z$, e para os dois guias $a$ e $b$, é possível apontar algumas particularidades que possibilitam obter os coeficientes que compõem a Eq. (12). Para tal caso, já que $E_z = E_x = 0$, os coeficientes de acoplamento são dados por

$$\tilde{K}_{pq} = \frac{\omega}{4}\int\int \Delta\varepsilon^{(q)}(x,y)\left(E_y^{(p)} E_y^{(q)}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{17}$$

$$\hat{K}_{pq} = \frac{\omega}{4}\varepsilon_0 \int\int f(x,y)\left(E_y^{(p)}E_y^{(q)}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{18}$$

A fim de encontrar o coeficiente de sobreposição, $c$, obtem-se a componente transversal do campo magnético a partir da lei de Faraday,

$$-i\omega\mu_0\mathbf{H}_t = i\omega\mu_0(\hat{\mathbf{x}}H_x) = \hat{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}\cdot\nabla\times(\hat{\mathbf{y}}E_y)), \tag{19}$$

implicando

$$H_x = \frac{i}{\omega\mu_0}\left(-\frac{\partial}{\partial z}E_y\right) = -\frac{\beta}{\omega\mu_0}E_y. \tag{20}$$

Disto segue

$$c_{pq} = \frac{1}{2}\frac{\beta_q}{\omega\mu_0}\int\int E_y^{(p)}E_y^{(q)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{21}$$

logo o coeficiente de sobreposição no modo $TE$ é

$$c = \frac{(\beta_a+\beta_b)}{4\omega\mu_0}\int\int E_y^{(a)}E_y^{(b)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{22}$$

Para determinar os coeficientes de forma analítica, considere um intervalo do eixo-$x$, $I=[u,v]$, contendo apenas um valor de índice de refração; isto é, seja $x_0 \in I$, então $\varepsilon(x)=\varepsilon(x_0)\ \forall x\in I$. Assim, no intervalo $I$, os campos elétricos transversais se dão como

$$E_y^{(a)}(x\in I) = A\exp(\xi(x-t_a)) + B\exp(-\xi(x-t_a)), \tag{23}$$

$$E_y^{(b)}(x\in I) = C\exp(\zeta(x-t_b)) + D\exp(-\zeta(x-t_b)), \tag{24}$$

onde, se $\forall x\in I$, $\varepsilon^{(a)}(x)=\varepsilon_0 n_a^2$ e $\varepsilon^{(b)}(x)=\varepsilon_0 n_b^2$,

$$\xi^2 = \beta_a^2 - k_0^2n_a^2, \qquad\qquad \zeta^2 = \beta_b^2 - k_0^2n_b^2, \tag{25}$$

portanto sua solução analítica se dá como *

$$\begin{aligned}\int_u^v E_y^{(a)}E_y^{(b)}\mathrm{d}x &= \int_u^v \left[\left(A\exp(\xi(x-t_a))+B\exp(-\xi(x-t_a))\right)\left(C\exp(\zeta(x-t_b))+D\exp(-\zeta(x-t_b))\right)\right]\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{AC}{\xi+\zeta}\exp\left((\xi+\zeta)x-\xi t_a-\zeta t_b\right)+\frac{AD}{\xi-\zeta}\exp\left((\xi-\zeta)x-\xi t_a+\zeta t_b\right)\right.\\ &\left.-\frac{BC}{\xi-\zeta}\exp\left(-(\xi-\zeta)x+\xi t_a-\zeta t_b\right)-\frac{BD}{\xi+\zeta}\exp\left(-(\xi+\zeta)x+\xi t_a+\zeta t_b\right)\right]\Bigg|_{x=u}^{v}.\end{aligned} \tag{26}$$

*Note que a Eq. 26 vale apenas quando $(\xi+\zeta)\neq 0$ e $(\xi-\zeta)\neq 0$. Entretanto, uma expressão para esta integral quando uma destas condições é quebrada não apresenta grandes problemas de implementação, pois, simplesmente, se trata da integração de uma constante em $x$.

Neste sentido, particiona-se o eixo-$x$ em intervalos correspondentes a cada índice de refração, isto é

$$(-\infty, \infty) = \bigcup_{j=1}^{5} I_j = (-\infty, 0] \cup [0, d_2] \cup [d_2, d_2 + 2s] \cup [d_2 + 2s, d_2 + 2s + d_4] \cup [d_2 + 2s + d_4, \infty), \quad (27)$$

portanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} E_y^{(a)} E_y^{(b)} \mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{5} \int_{I_j} E_y^{(a)} E_y^{(b)} \mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{5} \int_{u_j}^{v_j} E_y^{(a)} E_y^{(b)} \mathrm{d}x, \quad (28)$$

o que permite encontrar os coeficientes a partir da Eq. (26) propriamente de forma analítica.

As constantes de propagação, $\beta_a$ e $\beta_b$ – assim como cada constante de campo ($A$, $B$, $C$ e $D$) com a devida normalização – são encontradas utilizando-se da Técnica da Matriz de Transferência (TMT), discutida em maior detalhe em trabalhos anteriores da disciplina. No diretório deste projeto `MATLAB`, as funções `tmt_betas`, `tmt_coeffs`, `tmt_matrix` concernem a esta parcela.

O arquivo `griff_test` diz respeito à implementação literal, propriamente dita, da Eq. (12) e faz uso de dependências como `integrate_product`, implementação da Eq. (26) para uma sequência de intervalos de índices constantes. Note que ela, sem o devido tratamento, se apresenta como uma equação diferencial rígida por natureza. Algumas alternativas são possíveis para eliminar a rapidez de variação de sua solução como o uso de envoltórias de variação lenta, por exemplo.

# Resultados

Para o casamento de fase entre os modos dos guias isolados, os valores de período da rede de difração, localizada na interface entre o meio de índice $n_2$ e o de $n_3$ da Fig. 1, são escolhidos tais que

$$\frac{2\pi}{\Lambda} = \gamma_a - \gamma_b \qquad \Rightarrow \qquad \Lambda = \frac{2\pi}{\gamma_a - \gamma_b}. \quad (29)$$

A fim de estudar o comportamento do sistema, será controlada a distância entre os guias acoplados e também as condições iniciais de excitação dos guias. Os valores testados de separação entre os guias são

$$2s = 1,2\ \mu\text{m};\ 1,4\ \mu\text{m};\ 1,6\ \mu\text{m};\ 1,8\ \mu\text{m}.$$

As condições iniciais $\mathbf{u}(z=0)$ são tais que

$$\mathbf{u}(0) = \begin{pmatrix} a_0 \\ \sqrt{1 - a_0^2} \end{pmatrix}, \quad (30)$$

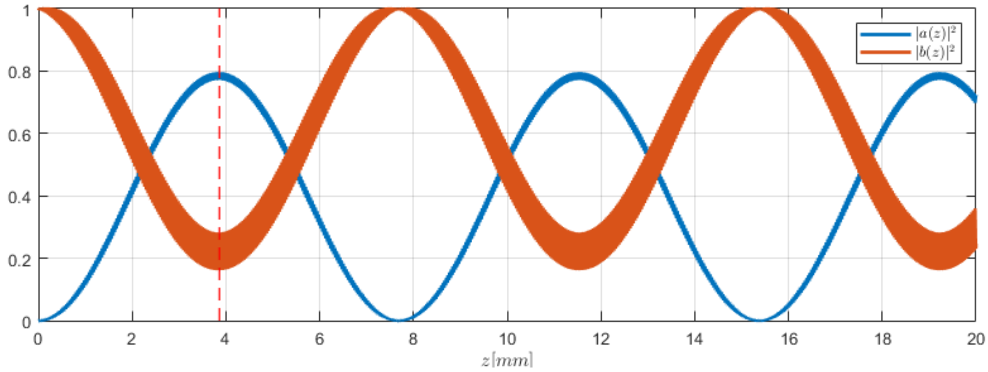
onde

$$a_0^2 = 0,\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{4},\ 1.$$

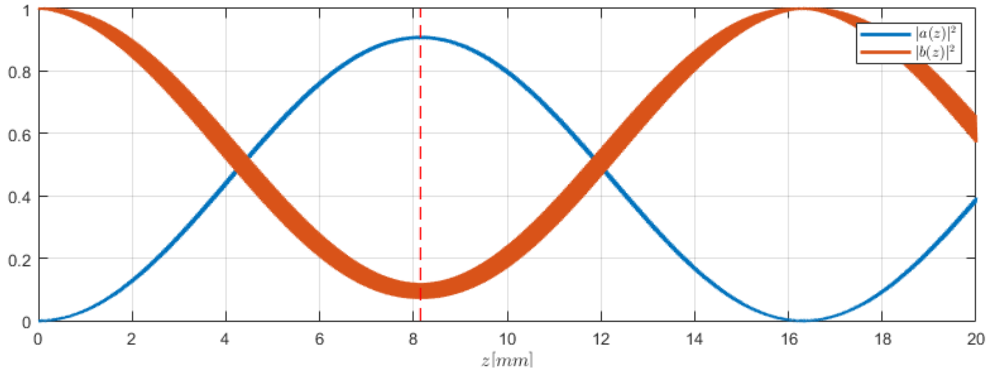
As amplitudes locais obtidas são ilustradas nas Figs. 2, 3, 4 e 5. Note que, devido à natureza rígida da equação diferencial, as soluções apresentam rápida variação, mas é evidente o comportamento de mais baixa frequência. A partir das figuras, consegue-se perceber onde se dá a primeira "troca" total de energia, onde a amplitude local que possuia menor magnitude inicialmente toma seu valor máximo – posição marcada com a linha vertical em vermelho nas figuras. Este é o chamado comprimento de interação – $\ell$. Percebe-se que, independente das condições iniciais, cada dupla de valores de $2s$ e $\Lambda$ (já que $\Lambda$ também tem seu valor mudado em função de $2s$) possui um comprimento específico. Os valores obtidos para tais comprimentos é dado na Tab. 1.

Tabela 1: Comprimentos de interação, $\ell$, em função das distâncias entre guias

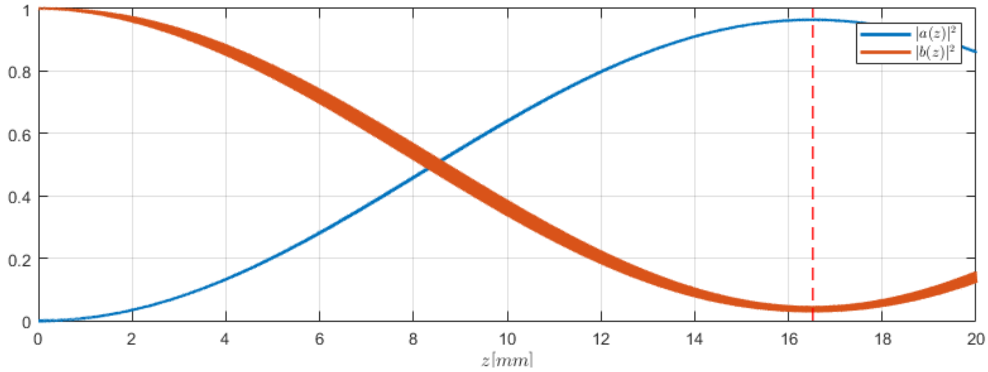
| $2s$ [µm] | $\ell$ [mm] |
|---|---|
| $1,2$ | $\sim 3,9$ |
| $1,4$ | $\sim 8,2$ |
| $1,6$ | $\sim 16,5$ |
| $1,8$ | $\sim 32,7$ |



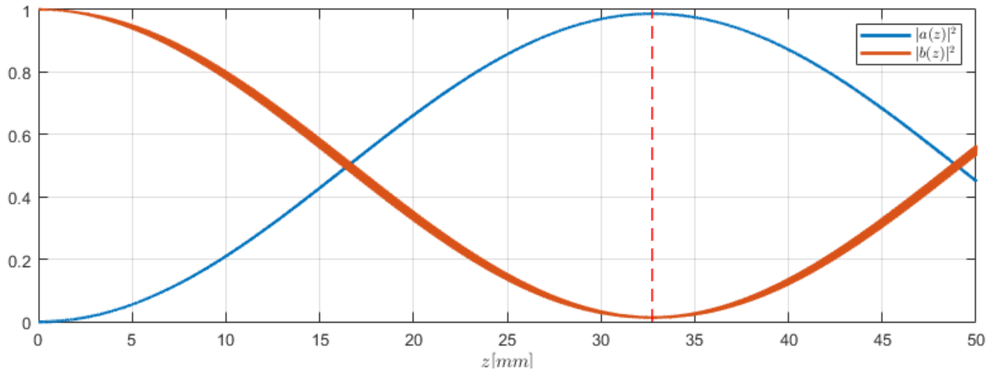

(a) $2s = 1,2$ µm




(b) $2s = 1,4$ µm

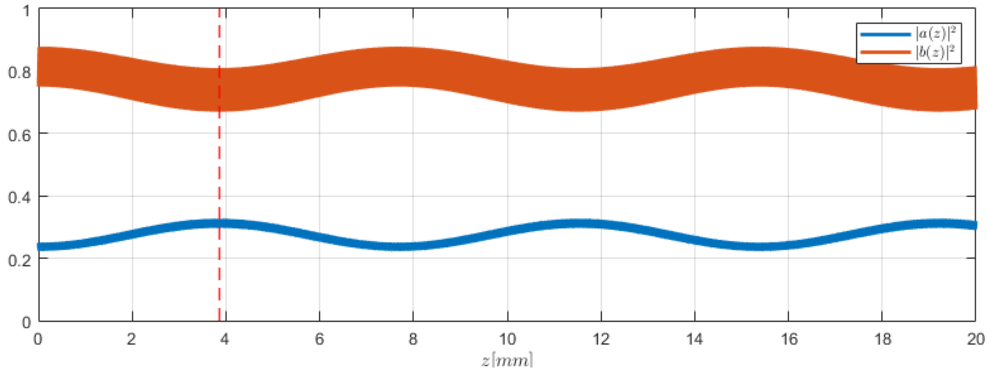



(c) $2s = 1,6$ µm

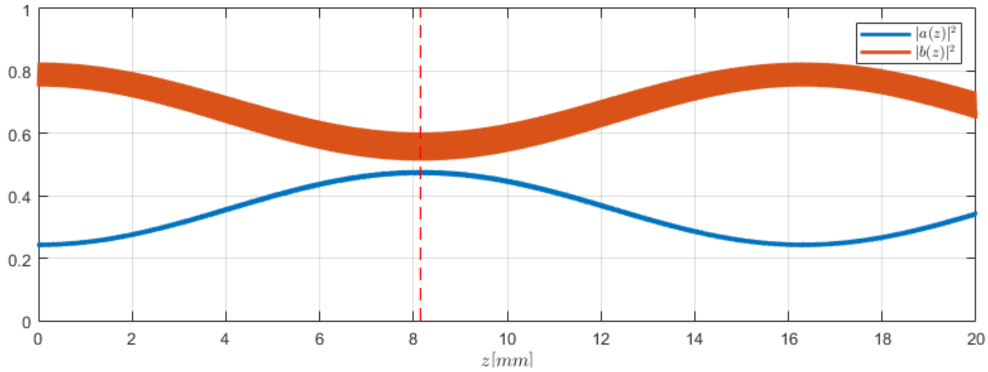



(d) $2s = 1,8$ µm

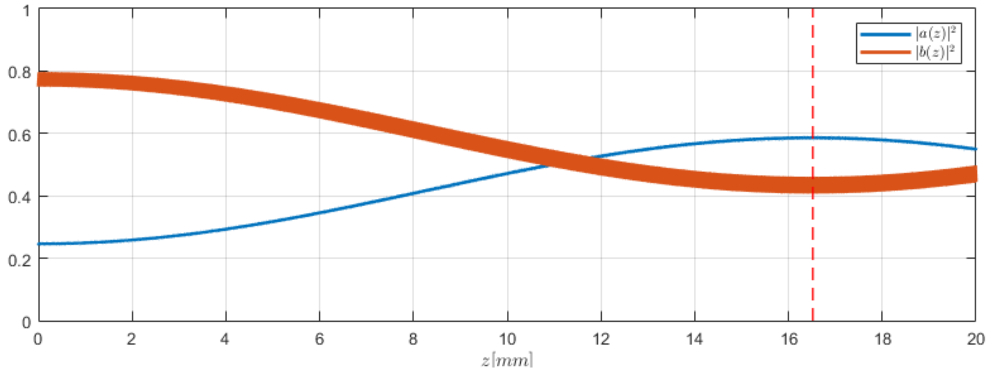
Figura 2: Amplitudes locais de cada guia quando $a_0^2 = 0$.



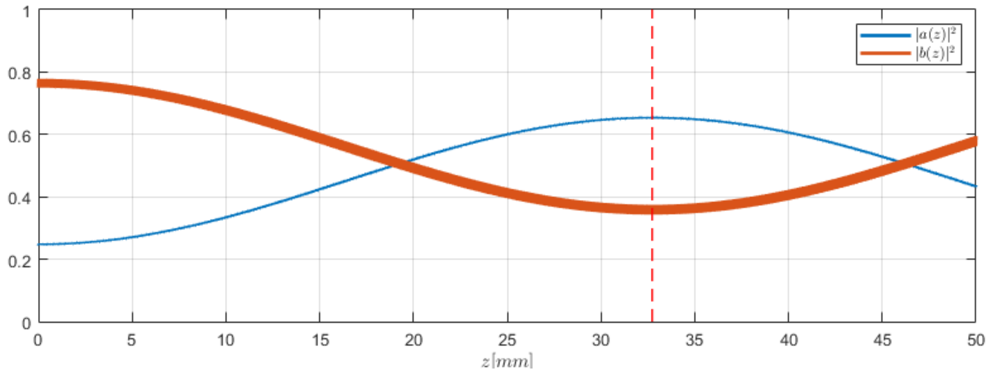

(a) $2s = 1,2$ µm




(b) $2s = 1,4$ µm

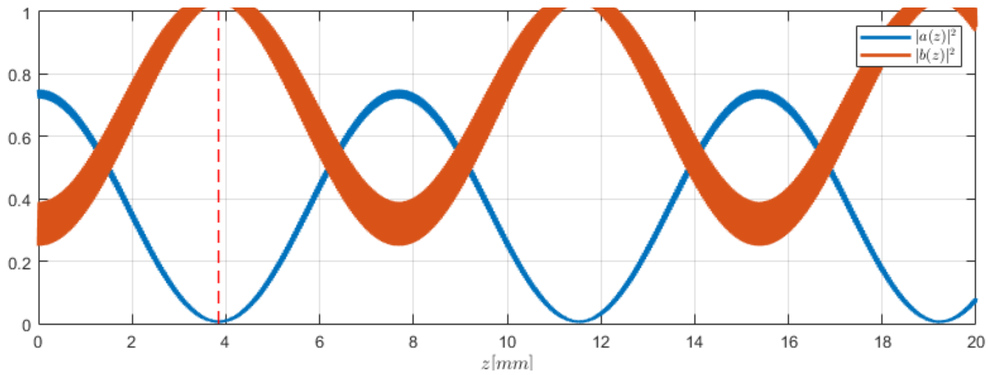



(c) $2s = 1,6$ µm

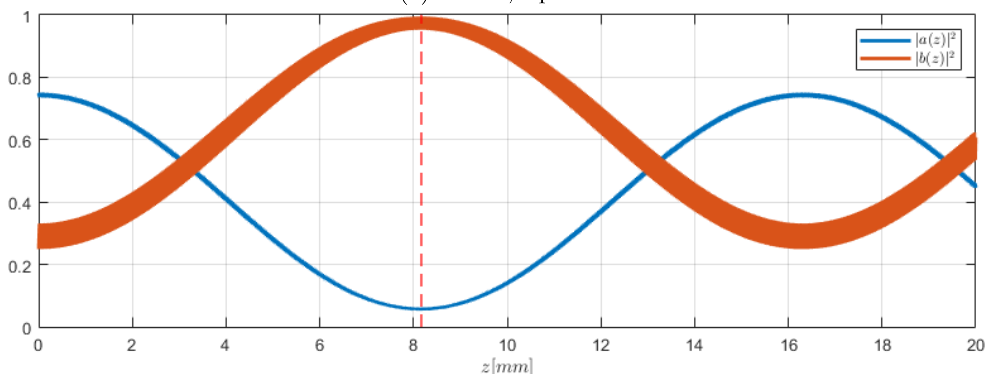



(d) $2s = 1,8$ µm

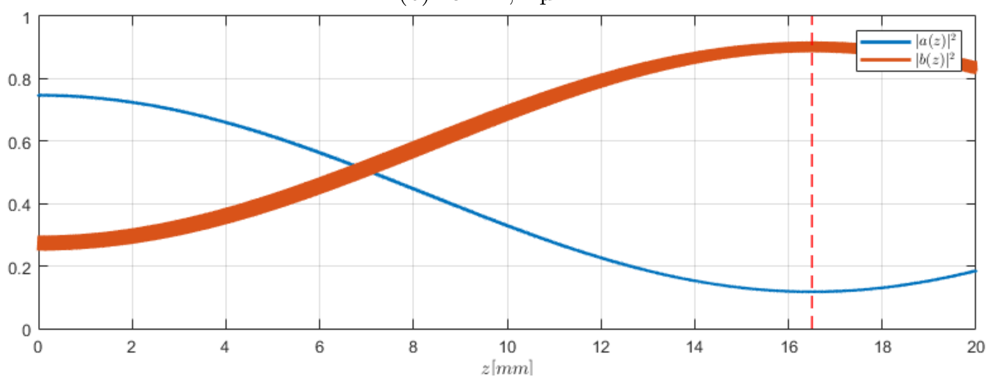
Figura 3: Amplitudes locais de cada guia quando $a_0^2 = 1/4$.



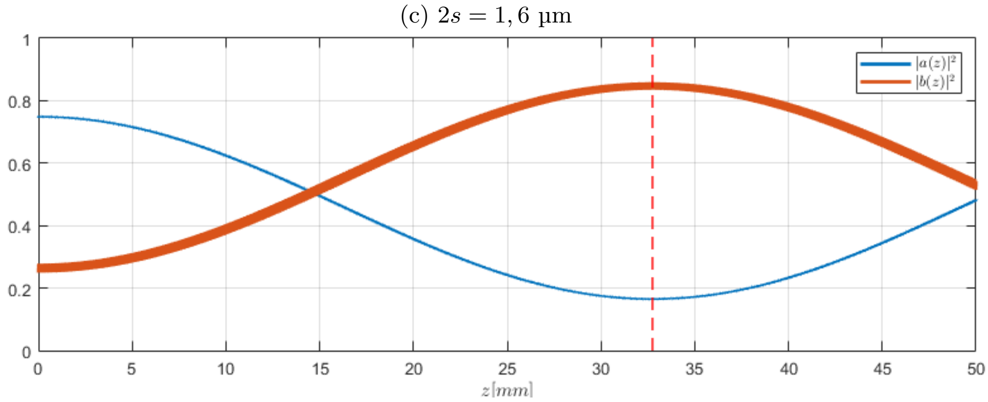

(a) $2s = 1,2$ µm




(b) $2s = 1,4$ µm

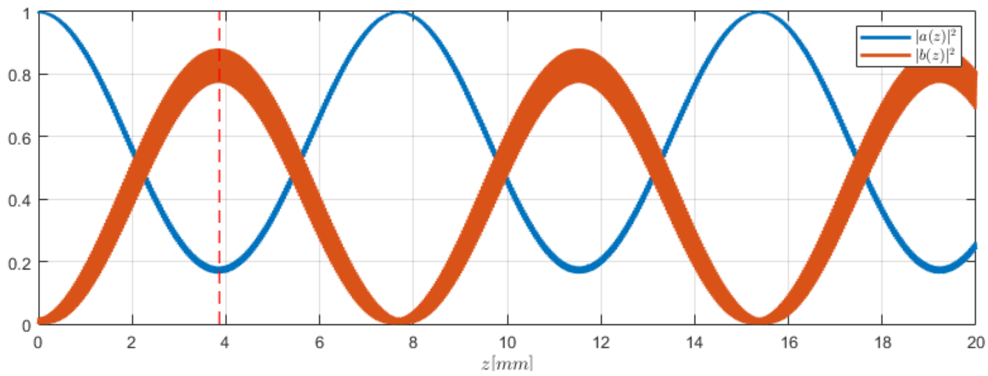



(c) $2s = 1,6$ µm

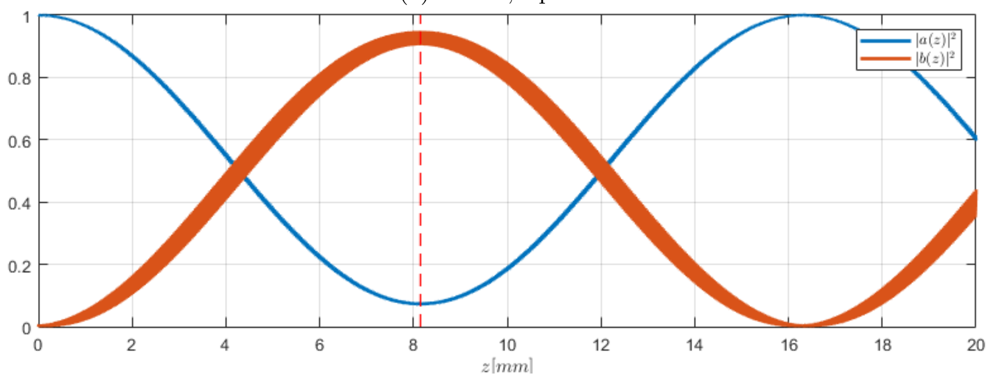



(d) $2s = 1,8$ µm

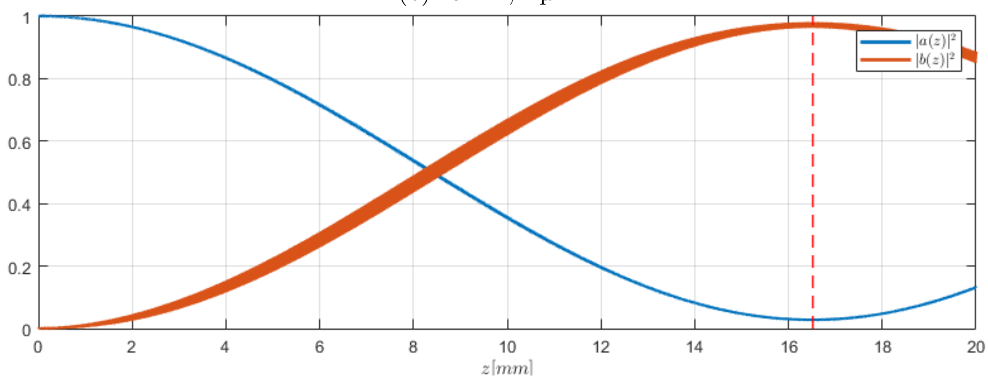
Figura 4: Amplitudes locais de cada guia quando $a_0^2 = 3/4$.



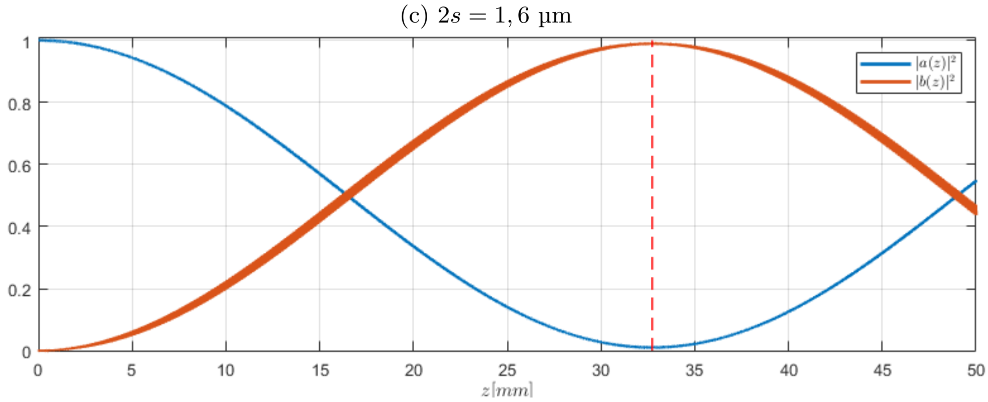

(a) $2s = 1,2$ µm




(b) $2s = 1,4$ µm




(c) $2s = 1,6$ µm




(d) $2s = 1,8$ µm

Figura 5: Amplitudes locais de cada guia quando $a_0^2 = 1$.

# Conclusão

Vemos aqui que é possível implementar a equação de modos acoplados – Eq. (12) – de forma coerente mesmo de forma rígida. Entretanto, vale salientar que a natureza de alta frequência, traz problemas para obtenção da solução devida; tanto do ponto de vista da rigidez da equação diferencial quanto da exigência de métodos com tolerâncias muito restritivas (aqui, foi usada uma tolerância absoluta de $10^{-11}$ e relativa de $10^{-9}$) para a performance do algoritmo. Assim, parece preferível resolver as equações como mostra a Ref. [1] na eliminação da rápida variação.

Uma possibilidade para administrar a rigidez da equação seria o uso de envoltória de variação lenta, a qual consiste em resolver uma nova equação para

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}(z) = \begin{pmatrix} A(z) \\ B(z) \end{pmatrix}, \tag{31}$$

onde

$$A(z) = a(z)\exp(i\gamma_a z), \qquad B(z) = b(z)\exp(i\gamma_b z). \tag{32}$$

Seja

$$\Delta = \frac{\gamma_a - \gamma_b}{2}, \qquad 2\delta = 2\Delta - \frac{2\pi}{\Lambda}, \tag{33}$$

$d$ tal que

$$\Delta n^2(z) = 2d\cos\left(\frac{2\pi}{\Lambda}z\right), \tag{34}$$

e negligenciando termos assíncronos, uma nova forma para as equações de modos acoplados se torna [1]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}A(z) = i(K_{ab}e^{-i2\Delta z} + dk_{ab}e^{i2\delta z})B(z) \tag{35}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}B(z) = i(K_{ba}e^{i2\Delta z} + dk_{ba}e^{i2\delta z})A(z). \tag{36}$$

Assim, as equações de modos acoplados se tornam mais eficientes de se resolver.

# Referências


1 Griffel, G.; Itzkovich, M.; Hardy, A. A. Coupled mode formulation for directional couplers with longitudinal perturbation. **IEEE Journal of Quantum Electronics**, v. 27, n. 4, p. 985–994, 1991.

2 Marcuse, D. Directional couplers made of nonidentical asymmetric slabs. part i: Synchronous couplers. **Journal of Lightwave Technology**, v. 5, n. 1, p. 113–118, 1987.

3 ______. Directional couplers made of nonidentical asymmetric slabs. part ii: Grating-assisted couplers. **Journal of Lightwave Technology**, v. 5, n. 2, p. 268–273, 1987.