

---

# TÉCNICA DA MATRIZ DE TRANSFERÊNCIA

---

TEORIA DE ONDAS GUIADAS

**Luiz Votto**

**e**

**Vinícius de Angelis**

Programa de Pós-Graduação

Departamento de Engenharia Elétrica e de Computação

Escola de Engenharia de São Carlos

Universidade de São Paulo

Primeiro Semestre de 2020

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>2</b>
<b>Formulação Teórica</b>	<b>2</b>
Meios sem perdas . . . . .	2
Meios com perdas . . . . .	4
<b>Implementação</b>	<b>6</b>
<b>Resultados</b>	<b>7</b>
Guia A . . . . .	7
Guia B . . . . .	9
Guia C . . . . .	12
Guia D . . . . .	14
<b>Conclusão</b>	<b>16</b>
<b>Referências</b>	<b>16</b>

## Introdução

Foi solicitada em aula uma implementação da Técnica das Matrizes de Transferência (TMT) para meios isotrópicos com normalização de campos. Assim, neste estudo, discute-se a implementação **MATLAB** em anexo e sua aplicação a algumas situações-exemplo, dentre elas, algumas solicitadas pelo professor e, para confirmação de corretude, uma encontrada na Ref. [1] (*Example 9.12.1*).

## Formulação Teórica

### Meios sem perdas

Começemos no modo TM ( $\mathbf{H} = \hat{\mathbf{y}}H_y$ ), temos que a dependência em  $x$  do campo magnético, dada pela equação de Helmholtz, é descrita na camada  $j$  do guia de onda

$$H_{yj}(x) = A_j \exp(\gamma_j(x - t_j)) + B_j \exp(-\gamma_j(x - t_j)), \quad (1)$$

onde  $\gamma_j^2 = \beta^2 - k_0^2 n_j^2$  e  $t_j$  é onde se encontra a interface do meio  $j$  com o meio  $j + 1$  – como ilustrado na Fig. 1.

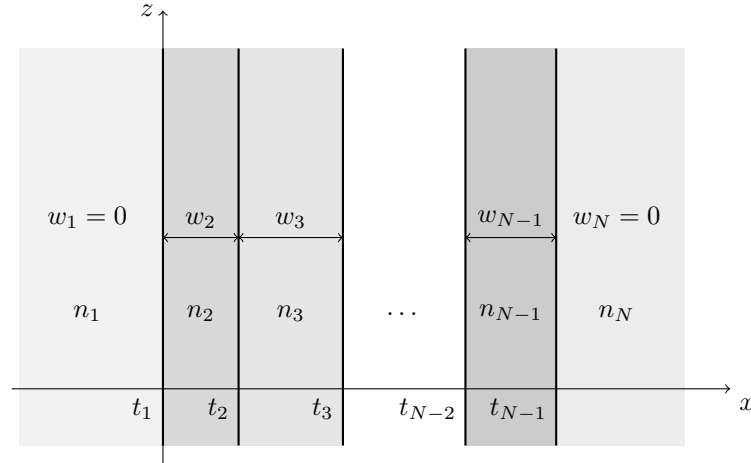


Figura 1: Esquemático explicativo da notação adotada.

Assim sendo, os coeficientes  $A_j, B_j$  são determinados a partir das condições de contorno. Primeiramente, como quando  $|x| \rightarrow \infty$ ,  $H_y \rightarrow 0$ , então  $B_1 = A_N = 0$ . Seguindo, para cada interface,

$$H_{y(j-1)}(t_{j-1}) = H_{yj}(t_{j-1}), \quad (2)$$

logo

$$A_{j-1} + B_{j-1} = A_j \exp(-\gamma_j w_j) + B_j \exp(\gamma_j w_j). \quad (3)$$

Tem-se também

$$E_{z(j-1)}(t_{j-1}) = E_{zj}(t_{j-1}). \quad (4)$$

Pela Lei de Ampère,

$$\hat{\mathbf{z}} \cdot \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial}{\partial x} H_y = \omega \varepsilon E_z, \quad (5)$$

o que implica

$$E_{zj}(x) = \frac{1}{\omega \varepsilon_j} \frac{\partial}{\partial x} H_{yj} = \frac{\gamma_j}{\omega \varepsilon_0 n_j^2} [A_j \exp(\gamma_j(x - t_j)) - B_j \exp(-\gamma_j(x - t_j))], \quad (6)$$

logo

$$\frac{\gamma_{j-1}}{n_{j-1}^2} (A_{j-1} - B_{j-1}) = \frac{\gamma_j}{n_j^2} [A_j \exp(-\gamma_j w_j) - B_j \exp(\gamma_j w_j)], \quad (7)$$

$$A_{j-1} - B_{j-1} = \frac{\gamma_j n_{j-1}^2}{\gamma_{j-1} n_j^2} [A_j \exp(-\gamma_j w_j) - B_j \exp(\gamma_j w_j)] = \rho_j [A_j \exp(-\gamma_j w_j) - B_j \exp(\gamma_j w_j)]. \quad (8)$$

Perceba que, para o modo TE, a formulação é análoga e, se  $\mu_j = \mu_0$  para todo  $j = 1, 2, \dots, N$ , então

$$\rho_j = \frac{\gamma_j}{\gamma_{j-1}}, \quad (9)$$

mas continuemos no modo TM, onde

$$\rho_j = \frac{\gamma_j}{\gamma_{j-1}} \frac{n_{j-1}^2}{n_j^2}. \quad (10)$$

A partir das Eqs. (3) e (8),

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_{j-1} \\ B_{j-1} \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1 + \rho_j) e^{-\gamma_j w_j} & (1 - \rho_j) e^{\gamma_j w_j} \\ (1 - \rho_j) e^{-\gamma_j w_j} & (1 + \rho_j) e^{\gamma_j w_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_j \\ B_j \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{A}_{j-1} = T_j \mathbf{A}_j. \end{aligned} \quad (11)$$

Desta forma,

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix} = T \mathbf{A}_N = T_2 T_3 \dots T_N \mathbf{A}_N = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ B \end{pmatrix}, \quad (12)$$

o que implica que, ao encontrar a matriz de transferência,  $T$ , surge a condição

$$t_{22}(\beta) = 0, \quad (13)$$

que se trata da **equação transcendental** do guia. Cada solução representa um modo de propagação do

guia.

Agora, a fim de normalizar o resultado, ou seja, encontrar um valor para  $B$  na Eq. (12) tal que a potência transmitida em  $z$  seja de  $1 \text{ W/m}$ , temos que

$$P_z = 1 \frac{\text{W}}{\text{m}} = \int_S \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \cdot \hat{\mathbf{z}} dS = \sum_j \int_{S_j} \mathbf{E}_j \times \mathbf{H}_j^* \cdot \hat{\mathbf{z}} dS, \quad (14)$$

sendo  $S_j$  cada seção do guia com índice de refração constante. Como, da Lei de Ampère,

$$E_x = -\frac{1}{\omega \varepsilon} \frac{\partial}{\partial z} H_y = \frac{i\beta}{\omega \varepsilon} H_y, \quad (15)$$

então,

$$\hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* = \frac{i\beta}{\omega \varepsilon} H_y H_y^*. \quad (16)$$

Assim, para cada seção  $S_j$ ,

$$\begin{aligned} \int_{S_j} \mathbf{E}_j \times \mathbf{H}_j^* \cdot \hat{\mathbf{z}} dx &= \frac{i\beta}{\omega \varepsilon_0} \int_{S_j} \frac{1}{n_j^2} H_y H_y^* dx \\ &= \frac{i\beta}{\omega \varepsilon_0 n_j^2} \left[ \frac{|A_j|^2}{\gamma_j + \gamma_j^*} \exp((\gamma_j + \gamma_j^*)(x - t_j)) \right. \\ &\quad + \frac{A_j B_j^*}{\gamma_j - \gamma_j^*} \exp((\gamma_j - \gamma_j^*)(x - t_j)) \\ &\quad - \frac{B_j A_j^*}{\gamma_j - \gamma_j^*} \exp(-(\gamma_j - \gamma_j^*)(x - t_j)) \\ &\quad \left. - \frac{|B_j|^2}{\gamma_j + \gamma_j^*} \exp(-(\gamma_j + \gamma_j^*)(x - t_j)) \right] \Bigg|_{x=\min S_j}^{\max S_j}, \end{aligned} \quad (17)$$

e resolve-se

$$\sum_j \int_{S_j} \mathbf{E}_j \times \mathbf{H}_j^* \cdot \hat{\mathbf{z}} dS = 1 \frac{\text{W}}{\text{m}}, \quad (18)$$

para  $B$  da Eq. (12). Encontrados todos os coeficientes  $A_j, B_j$ , constante de propagação  $\beta$  e fator multiplicativo  $B$ , os campos normalizados do guia são obtidos.

## Meios com perdas

A solução da equação transcendental (13) para meios sem perdas é feita numericamente de forma razoavelmente simples. Entretanto, quando os guias admitirem perdas, suas constantes de propagação possuirão parte imaginária não-nula. Assim, para resolver a equação transcendental, será necessário utilizar algum método mais sofisticado [2]. Aqui, implementa-se o método de minimização (“*downhill*”) como a seguir

e mostra a Fig. 2.

Seja  $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^+$  tal que

$$F(\beta) = |t_{22}(\beta)|^2, \quad (19)$$

onde  $t_{22}(\beta)$  é dado como na equação transcendental (13). Partindo de um valor inicial,  $\beta = \beta_0$ , avalia-se  $F$  em quatro pontos e encontramos o menor valor. Em outras palavras, seja a família indexada

$$S_j = S(\beta_j, \Delta_j) = \{\beta_j + \Delta_j, \beta_j - \Delta_j, \beta_j - i\Delta_j, \beta_j + i\Delta_j\}, \quad (20)$$

assim,

$$\beta_{j+1} = \arg \min_{\beta \in S_j} F(\beta) = \{\beta \in S_j | \forall \xi \in S_j, F(\beta) \leq F(\xi)\}, \quad (21)$$

e

$$\Delta_{j+1} = \begin{cases} \Delta_j, & \text{se } F(\beta_j) \neq F(\beta_{j+1}), \\ \Delta_j/2, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (22)$$

Assim, quando  $\Delta_j$  atingir valor menor que um valor mínimo predefinido ou quando  $j$  superar um número máximo, o algoritmo chega a sua condição de parada.

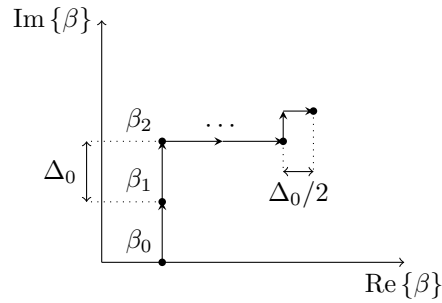


Figura 2: Ilustração-exemplo do método de minimização da função  $F$  a partir da equação transcendental do guia.

## Implementação

Anexo a este relatório, envia-se os *scripts* MATLAB utilizados ao fim de se obter os resultados deste estudo. Para adquirir tais dados, utiliza-se o código no arquivo `main.m` e, para os casos com perdas, o arquivo `leaky.m` é utilizado. Adicionalmente, existem algumas nuances relativas à implementação da TMT as quais convém detalhar.

A modelagem das matrizes de transferência e a obtenção da equação transcendental do guia é imediata dadas as deduções explicitadas na seção anterior. Agora, a solução da equação transcendental propriamente dita exige uso de técnicas numéricas e existe uma variedade de escolha considerável neste sentido. Inicialmente, foram feitas duas escolhas no processo de criação do *software* associado. A primeira implementação tratou-se de utilizar as capacidades de computação simbólica do MATLAB e, então, utilizar-se da rotina `vpasolve`, a qual se propõe a resolver uma equação simbólica numericamente. Desta forma, este método garante precisão arbitrária na obtenção das variadas soluções admitidas pelo guia especificado, mas pode apresentar custo computacional alto. Assim, para encontrar as soluções da equação transcendental, em segundo momento, se propõe a função

$$G(\beta) = \frac{1}{|t_{22}(\beta)|^2} \quad (23)$$

e, a partir da rotina `findpeaks` nativa ao MATLAB, encontra-se onde  $G$  possui máximos – correspondentes a mínimos de  $|t_{22}(\beta)|^2$  –, alguns correspondentes a soluções da equação transcendental.

O segundo método é consideravelmente mais eficiente. Entretanto, não se garante o encontro das soluções verdadeiras da equação transcendental,  $t_{22}$ , já que o método encontra também máximos locais de  $G$  (mínimos locais de  $|t_{22}|^2$ ). Assim, após encontrar um conjunto de picos de  $G$ , avalia-se o valor de  $|t_{22}|^2$  associado a cada um e elimina-se os valores que possuem magnitude superior a um valor máximo predeterminado. A implementação desta faceta do algoritmo se encontra na função `tmt_betas` do projeto.

Outra parte não necessariamente definida na formulação teórica da TMT como feita na seção anterior, é a escolha do valor inicial,  $\beta_0$ , na busca de soluções complexas da equação transcendental. Para cada caso que apresenta perdas em algum de seus meios associados, escolhe-se trechos sem perdas de três camadas consecutivas e encontra-se uma solução para a equação transcendental de um guia consistente apenas destas três camadas. A partir deste valor encontrado,  $\beta_0$ , implementa-se o método de minimização já descrito na seção anterior. A rotina que implementa a minimização para encontrar  $\beta$  não-real é, no projeto, `tmt_beta_comp`.

## Resultados

### Guia A

Primeiramente, considere o seguinte exemplo, ilustrado na Fig. 3; caso encontrado na Ref. [1] (*Example 9.12.1*), a que se chamará de guia A.

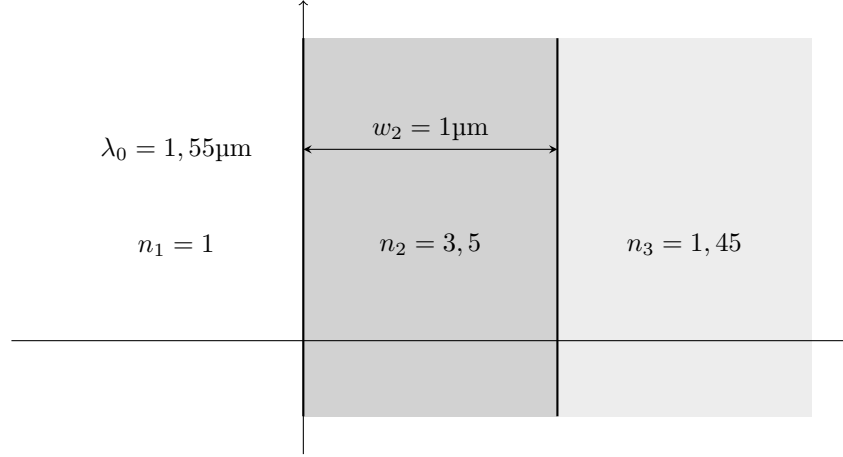


Figura 3: Esquemático do guia A.

Seus valores de índice de refração efetivos,  $N_{\text{eff}}$ , isto é

$$N_{\text{eff}} = \frac{\beta}{k_0}, \quad (24)$$

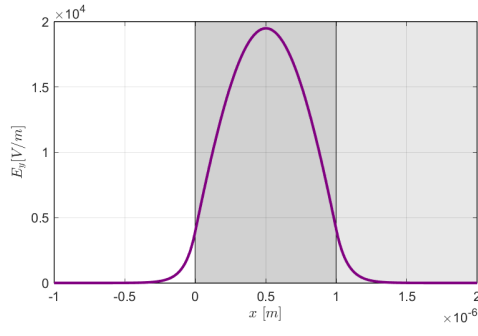
onde  $k_0 = 2\pi/\lambda_0$  é número de onda no espaço livre, são encontrados na Tabela 1 para cada modo TE e TM. As constantes de propagação são computadas na rotina `tmt_betas` do projeto.

Tabela 1: Valores de índices de refração efetivos para o guia A.

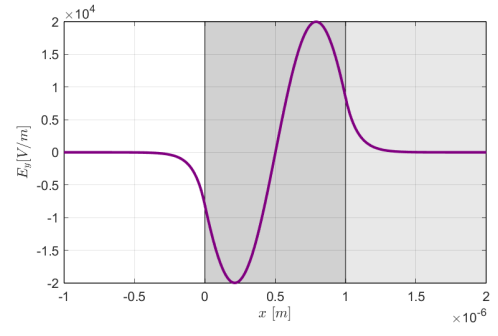
$m$	$N_{\text{eff}}^{\text{TE}}$	$N_{\text{eff}}^{\text{TM}}$
0	3,434746	3,416507
1	3,232789	3,154191
2	2,872310	2,668932
3	2,302025	1,865243
4	1,451972	—

Os campos encontrados para cada modo de propagação TE são encontrados na Fig. 4, e os TM na Fig. 5.

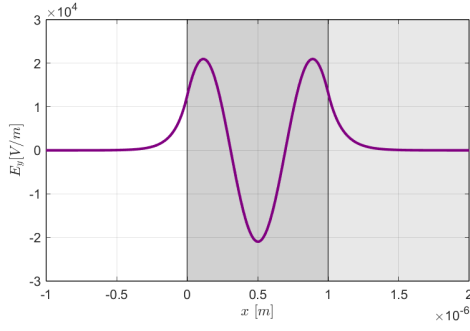




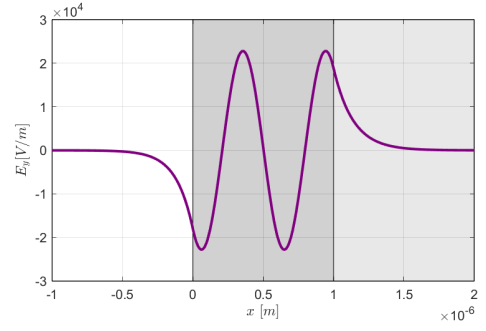
(a) TE<sub>0</sub>



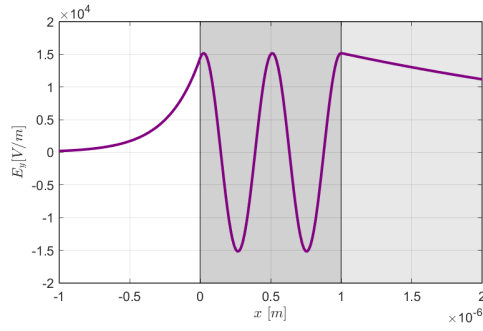
(b) TE<sub>1</sub>



(c) TE<sub>2</sub>

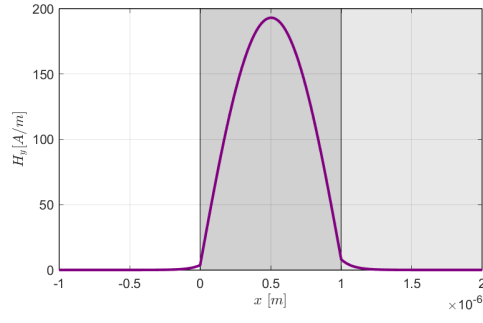


(d) TE<sub>3</sub>

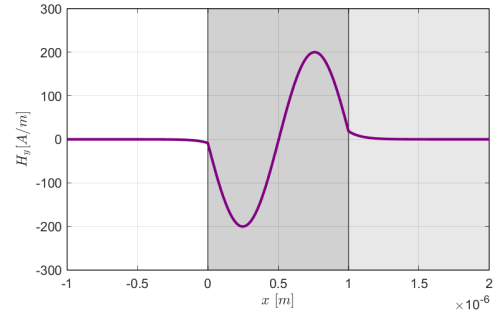


(e) TE<sub>4</sub>

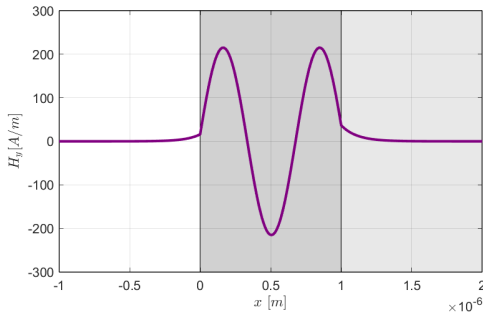
Figura 4: Perfis transversais de campo elétrico para cada modo TE admitido pelo guia A.



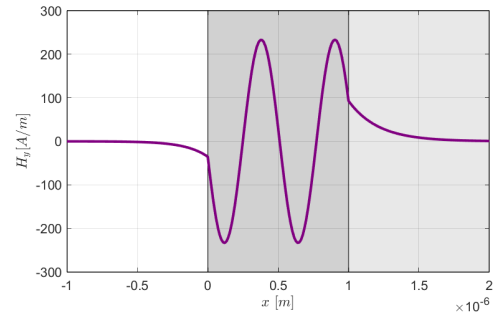
(a) TM<sub>0</sub>



(b) TM<sub>1</sub>



(c) TM<sub>2</sub>



(d) TM<sub>3</sub>

Figura 5: Perfis transversais de campo magnético para cada modo TM admitido pelo guia A.

## Guia B

Outro exemplo aqui estudado se trata do guia ilustrado na Fig. 6, – guia B daqui em diante – constituído por dois guias de núcleos de largura  $d_2 = 1\mu\text{m}$  e  $d_4 = 0,3\mu\text{m}$  – guias  $B_1$  e  $B_2$ , respectivamente [3]. Os guias  $B_1$  e  $B_2$  são ilustrados separadamente na Fig. 7.

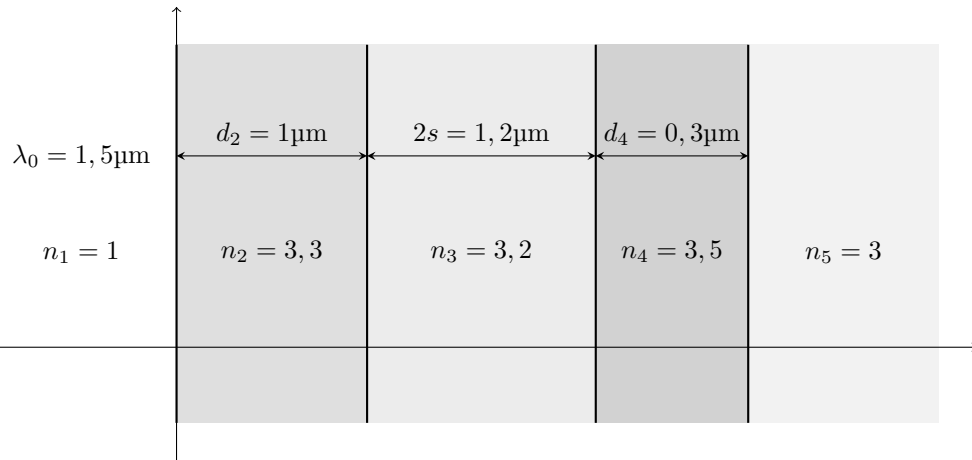


Figura 6: Esquemático do guia B

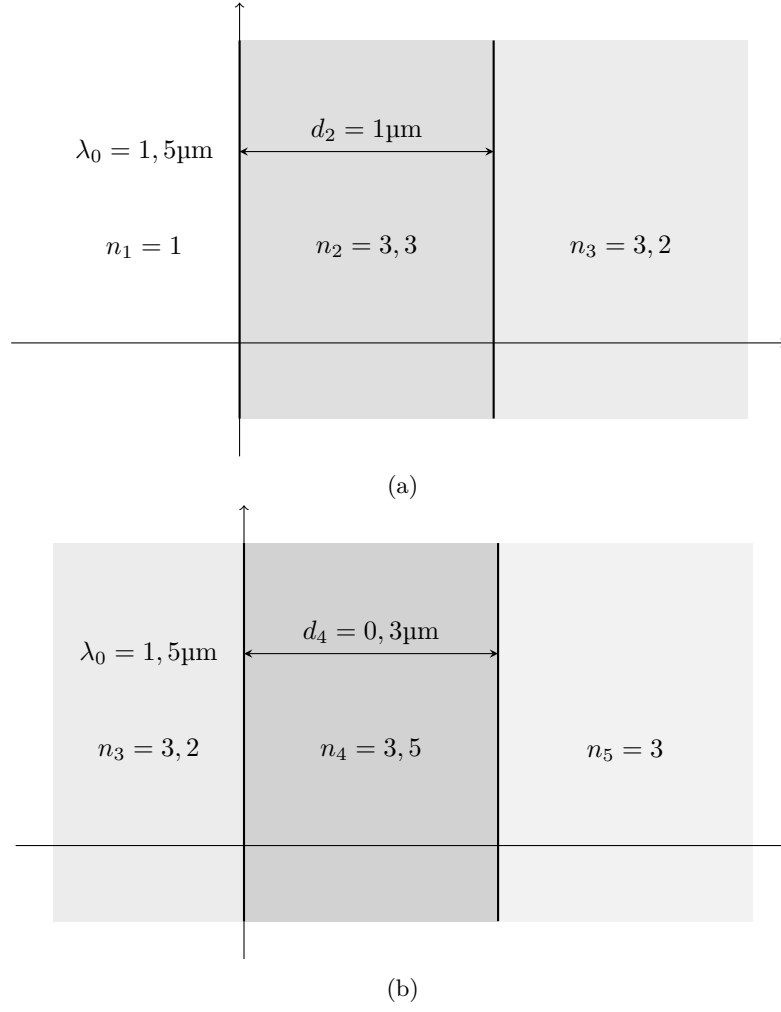
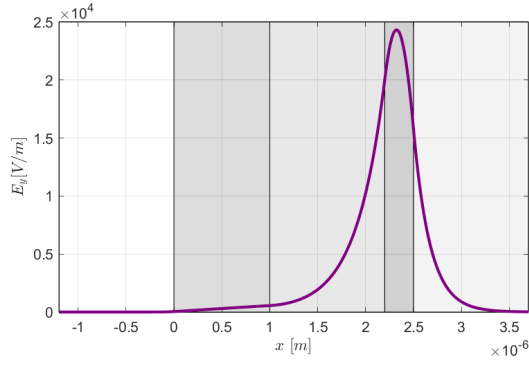


Figura 7: Guias  $B_1$  e  $B_2$ , os quais compõem o guia B.

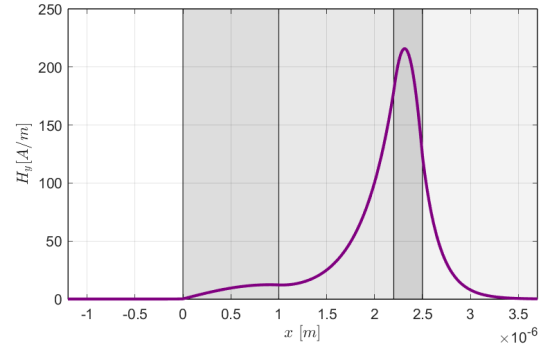
No caso do guia B, composto pelos outros dois, separados por uma distância de  $2s$ , os índices de refração efetivos dos modos transversais – dados pelas constantes de propagação obtidas como soluções da equação transcendental encontrada pela TMT – são

$$N_{\text{eff}}^{\text{TE}_0} = 3,299\,282, \quad N_{\text{eff}}^{\text{TM}_0} = 3,274\,167. \quad (25)$$

Os campos para cada modo são como mostra a Fig. 8.



(a) TE<sub>0</sub>



(b) TM<sub>0</sub>

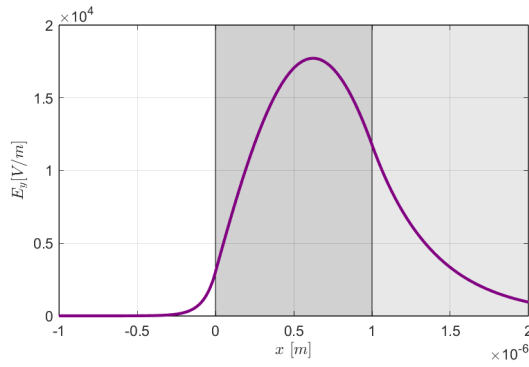
Figura 8: Perfis transversais de campo para cada modo admitido pelo guia B

Olhando os subguias em separado, o guia  $B_1$  possui índices de refração efetivos para seus modos transversais correspondentes a

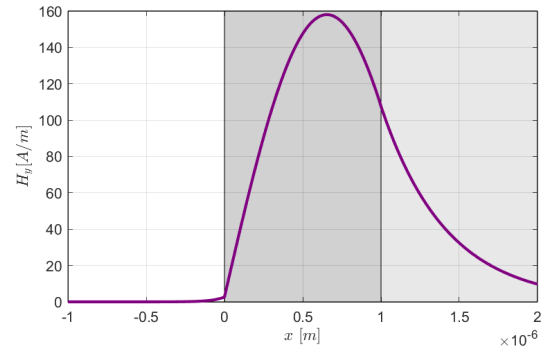
$$N_{\text{eff}}^{\text{TE}_0} = 3,256\,236, \quad N_{\text{eff}}^{\text{TM}_0} = 3,250\,911; \quad (26)$$

e o guia  $B_2$ :

$$N_{\text{eff}}^{\text{TE}_0} = 3,299\,264, \quad N_{\text{eff}}^{\text{TM}_0} = 3,274\,055. \quad (27)$$



(a) TE<sub>0</sub>



(b) TM<sub>0</sub>

Figura 9: Perfis transversais de campo para cada modo admitido pelo guia  $B_1$

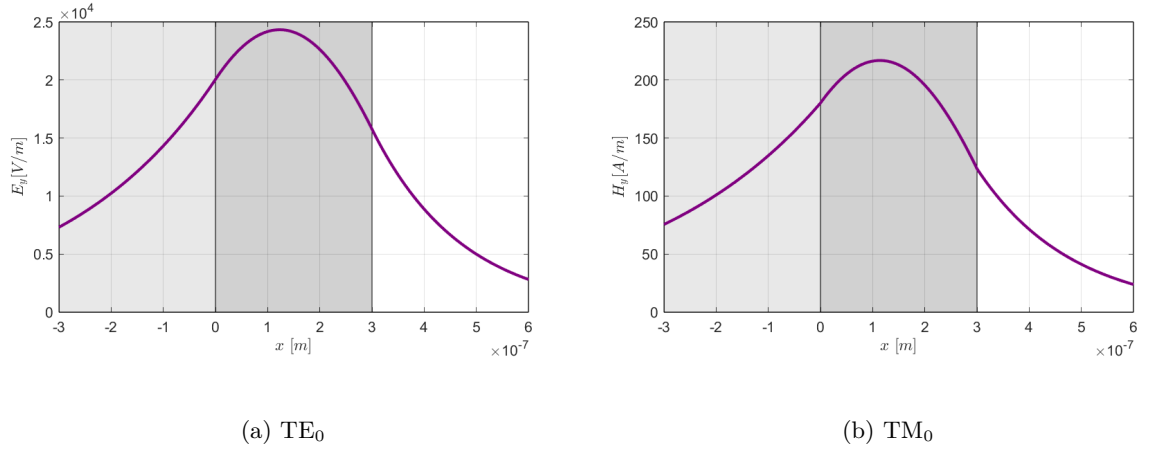


Figura 10: Perfis transversais de campo para cada modo admitido pelo guia  $B_2$

## Guia C

O caso a seguir, ilustrado na Fig. 11, é um guia de camadas com perdas [2]. Duas condições distintas serão estudadas: quando  $d_2 = 2 \mu\text{m}$  e quando  $d_2 = 0,25 \mu\text{m}$ , em modo TE<sub>0</sub>.

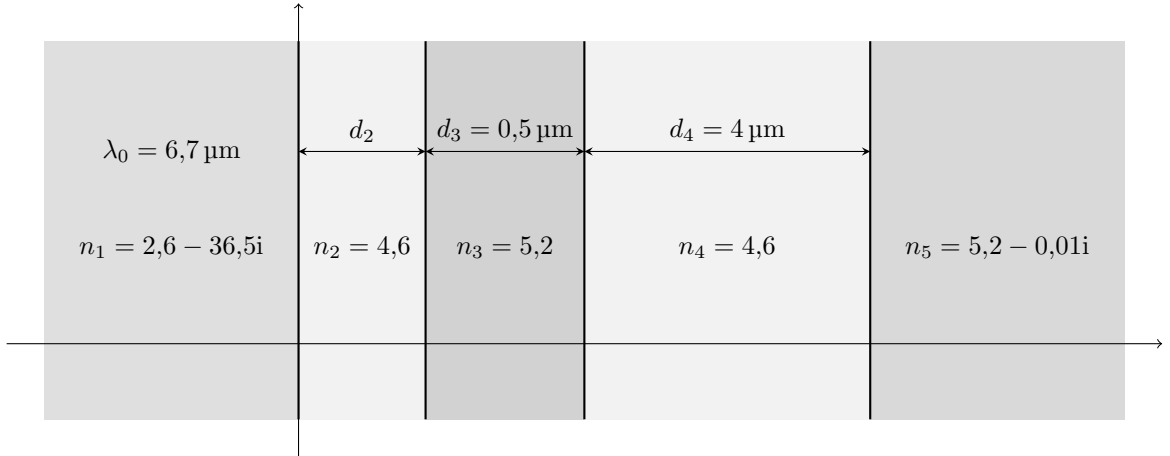


Figura 11: Esquemático do guia C

Quando o guia apresenta  $d_2 = 2 \mu\text{m}$ , o perfil de potência do campo a índice de refração efetivo

$$N_{\text{eff}}^{\text{TE}_0} = 4,742\,018 - 0,000\,035i \quad (28)$$

é representado na Fig. 12. Direcionando a atenção à linha pontilhada vermelha da Fig. 12, destaca-se, no meio de índice de refração  $n_5$  a presença de modos vazados\*, atenuados, entretanto, pelas perdas no meio – parte imaginária de  $n_5$ .

---

\*Tradução livre: *leaky modes* [2]

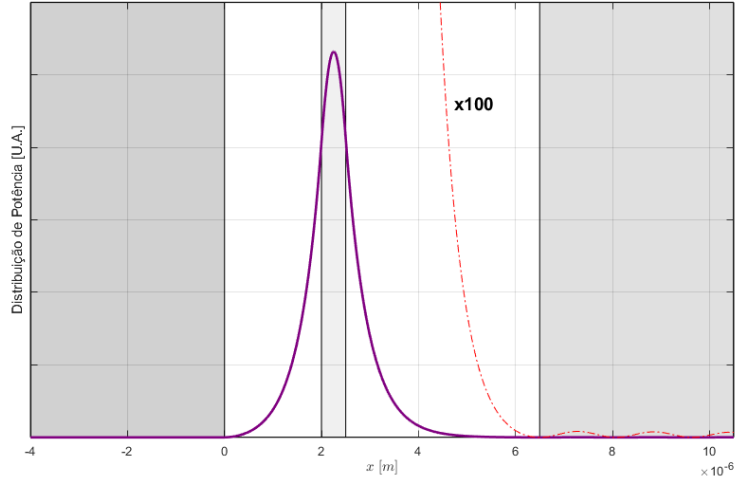


Figura 12: Perfil de distribuição de potência do guia C quando  $d_2 = 2 \mu\text{m}$ . Linha vermelha pontilhada representa o mesmo perfil aumentado 100 vezes.

Ao caso de  $d_2 = 0,5 \mu\text{m}$ , quando o índice efetivo é

$$N_{\text{eff}}^{\text{TE}_0} = 4,604\,020 - 0,002\,248i, \quad (29)$$

a Fig. 13 ilustra o perfil de potência do campo. Novamente, se destacam os modos vazados no último meio, agora consideravelmente mais evidentes. A tendência percebida até o momento seria de que, quando esta distância entre núcleo e substrato/superstrato se estreita, os modos vazados tomam caráter mais saliente. Num novo exemplo, o guia D a seguir, controlar-se-á distâncias e perdas a fim de estudar seus efeitos em modos vazados.

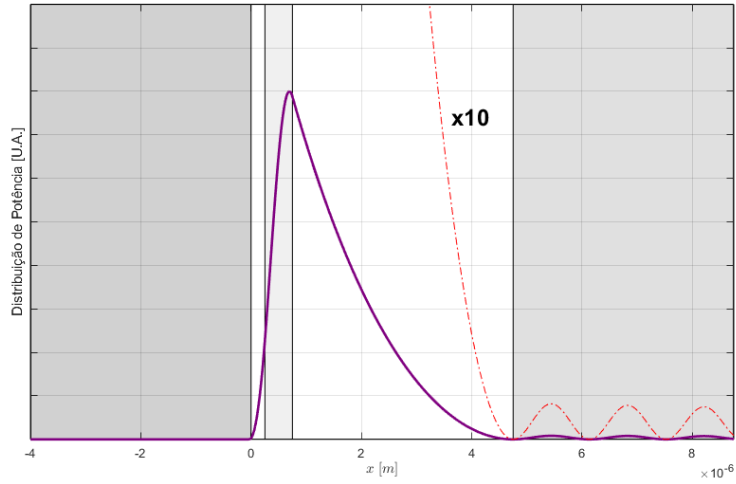


Figura 13: Perfil de distribuição de potência do guia C quando  $d_2 = 0,5 \mu\text{m}$ . Linha vermelha pontilhada representa o mesmo perfil aumentado 10 vezes.

## Guia D

A Fig. 14 representa o guia D – modelo solicitado pelo professor –, onde a última camada do guia, substrato, possui o maior valor absoluto de índice de refração entre as camadas, mas com perdas.

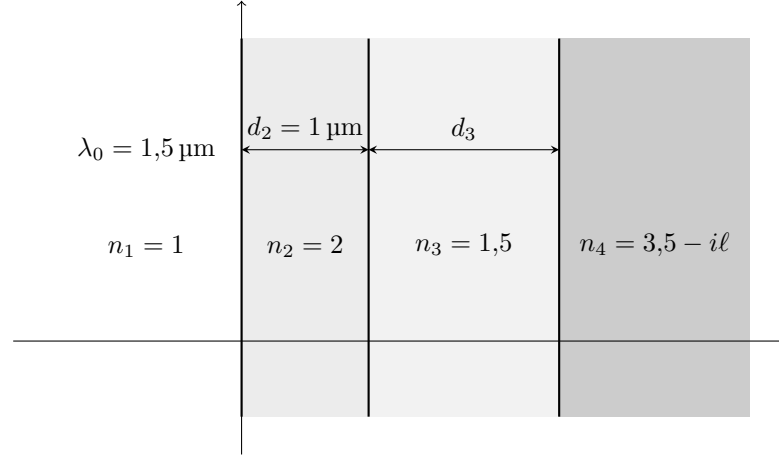
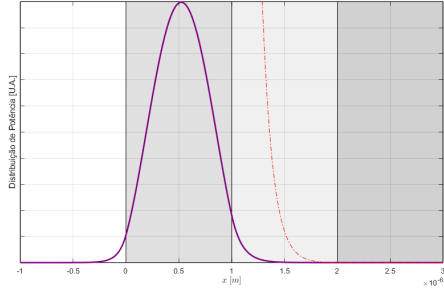


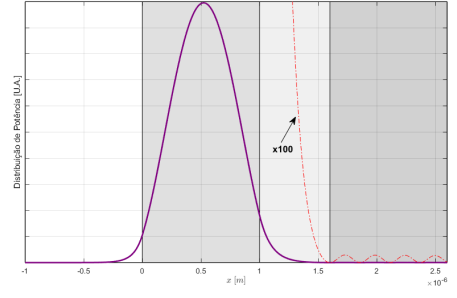
Figura 14: Esquemático do guia D

Aqui, estuda-se, a variação de dois parâmetros: o distanciamento,  $d_3$ , do núcleo ao substrato do guia em questão e a parte imaginária do substrato, dependente de  $\ell$  como definido na Fig. 14. A Fig. 15 exhibe os perfis de potência para cada valor da dupla  $(d_3, \ell)$ .

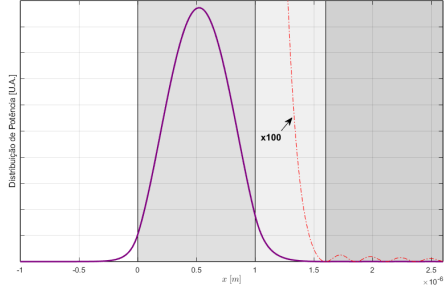
Enfatiza-se, aqui, como as linhas vermelhas pontilhadas na Fig. 15 – a representar os perfis de potência correspondentes nas últimas camadas, mas ampliado de cem vezes – ilustram o surgimento de modos vazados e como a variação dos dois parâmetros livres afeta o comportamento destes modos. Vê-se como, quanto mais se diminui a distância  $d_3$ , entre núcleo e substrato, do guia D, os modos vazados ficam mais evidentes e, também, quando se aumentam as perdas no substrato, claramente, mais se atenuam tais modos, a serem apenas detectáveis cada vez mais perto da sua última interface.



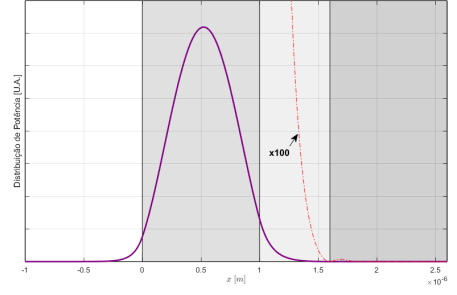
(a)  $d_3 = 1 \mu\text{m}$ ,  $\ell = 0,01$



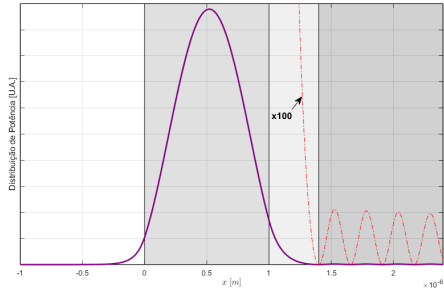
(b)  $d_3 = 0,6 \mu\text{m}$ ,  $\ell = 0,01$



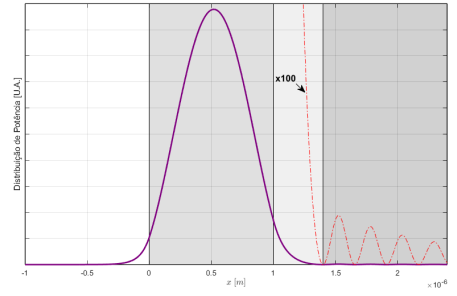
(c)  $d_3 = 0,6 \mu\text{m}$ ,  $\ell = 0,1$



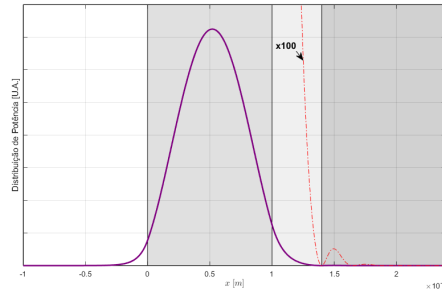
(d)  $d_3 = 0,6 \mu\text{m}$ ,  $\ell = 1$



(e)  $d_3 = 0,4 \mu\text{m}$ ,  $\ell = 0,01$



(f)  $d_3 = 0,4 \mu\text{m}$ ,  $\ell = 0,1$



(g)  $d_3 = 0,4 \mu\text{m}$ ,  $\ell = 1$

Figura 15: Perfis de potência do guia D para diferentes valores de  $d_3$  e  $\ell$ . Destaque para a linha pontilhada em vermelho que mostra o mesmo perfil aumentado de 100 vezes.



## Conclusão

Os resultados aqui apresentados foram fruto de um trabalho contínuo durante o semestre construído sobre uma primeira implementação de TMT isotrópico sem perdas de complexidade muito menor até tornar-se o que hoje se vê neste estudo. Recomenda-se, ao leitor interessado, explorar o código enviado em conjunto a este relatório a fim de descobrir as escolhas de soluções aplicadas para problemas de implementação aqui não citados devido a suas naturezas menores em comparação aos já explicitados nestas páginas.

Neste trabalho, além de haver obtido um programa robusto para análise de guias de onda planares segundo a TMT, pôde-se estudar fenômenos físicos oriundos da variação de parâmetros específicos nestes guias. Assim, os resultados encontrados aqui correspondem com o esperado pelo estudo da teoria física ostensivamente explorada na disciplina de Ondas Guiadas. No mais, encontrou-se meios para obter uma relação entre a predominância de modos vazados, larguras e perdas nas camadas de guias planares.

Sobretudo, esta ferramenta aqui produzida, será utilizada novamente no posterior estudo de acopladores direcionais e a introdução de perturbações longitudinais em guias como os vistos no presente trabalho, ditos uniformes sem tais imperfeições ao longo de suas estruturas.

## Referências

- 1 ORFANIDIS, S. **Electromagnetic Waves and Antennas**. Sophocles J. Orfanidis, 2016. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=4n5ezQEACAAJ>>.
- 2 Schlereth, K. .; Tacke, M. The complex propagation constant of multilayer waveguides: an algorithm for a personal computer. **IEEE Journal of Quantum Electronics**, v. 26, n. 4, p. 627–630, 1990.
- 3 Marcuse, D. Directional couplers made of nonidentical asymmetric slabs. part i: Synchronous couplers. **Journal of Lightwave Technology**, v. 5, n. 1, p. 113–118, 1987.