



SAPIENZA  
UNIVERSITÀ DI ROMA

## Teoria dello scattering e rinormalizzazione in meccanica quantistica

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali  
Laurea Triennale in Fisica

**Leopoldo Villoni**  
Matricola 2019140

Relatore  
Dr. Angelo Esposito

Anno Accademico 2023/2024

---

**Teoria dello scattering e rinormalizzazione in meccanica quantistica**

Tesi di Laurea Triennale. Sapienza Università di Roma

© 2024 Leopoldo Villoni. Tutti i diritti riservati

Questa tesi è stata composta con L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X e la classe Sapthesis.

Email dell'autore: leopoldovilloni03@gmail.com

# Capitolo 1

## Introduzione

La teoria dei processi di scattering tridimensionale rappresenta uno dei concetti chiave della fisica moderna, rivestendo un ruolo fondamentale in svariati campi di ricerca. Questo processo descrive l'interazione di una particella, inizialmente in uno stato definito, con un bersaglio, portandola a un nuovo stato finale a seguito di tale interazione.

L'importanza dello scattering risiede nella sua capacità di fornire informazioni sulla struttura interna e sulle proprietà dei bersagli. Ciò permette di studiare sperimentalmente le distribuzioni di massa, carica ed energia potenziale per sistemi molecolari, atomici e subatomici, nonché le interazioni tra particelle elementari. Lo scattering si rivela quindi uno strumento potente per indagare le caratteristiche dei materiali e per lo sviluppo di tecnologie in diversi ambiti, tra cui l'ingegneria dei materiali, l'ottica e la fisica medica.

Lo scopo di questa tesi è definire le leggi principali che governano i processi di scattering e le grandezze utili per il loro studio in presenza di un potenziale locale e nel limite non relativistico. In seguito, quanto appreso verrà applicato all'analisi dell'interazione con un potenziale a delta di Dirac. Per quest'ultima analisi, sarà necessario introdurre un concetto fondamentale della fisica moderna: la rinormalizzazione. Essa consiste in un insieme di tecniche necessarie per trattare le divergenze matematiche che emergono durante il calcolo di grandezze fisiche, particolarmente utilizzate nella teoria quantistica dei campi.



## Capitolo 2

# Teoria di scattering

### 2.1 Introduzione alla trattazione

La seguente trattazione è tratta da [1]

Supponiamo che l'hamiltoniana del sistema sia la seguente

$$H = H_0 + V(\vec{x}) \quad (2.1)$$

con  $H_0 = \frac{p^2}{2m}$ . Indichiamo gli autostati di  $H_0$  con  $|\vec{k}\rangle$ , i quali hanno autovalori  $E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ .

Lo spettro generalmente è continuo, ma per la trattazione seguente lo andremo a discretizzare supponendo che la particella sia in un cubo di lato  $L$ , per tornare al caso continuo basterà far tendere  $L \rightarrow \infty$ .

Assumiamo che  $V(\vec{x})$  sia un potenziale indipendente dal tempo e a corto raggio. Dunque la particella risente del potenziale solamente quando si trova nella regione di interazione. Possiamo quindi affrontare il problema con la teoria delle perturbazioni dipendente dal tempo, considerando il potenziale come una perturbazione presente solamente per un breve istante.

**Premessa:** la seguente descrizione tiene conto di onde piane ma, in una situazione realistica, la particella incidente è ben rappresentata da un pacchetto d'onda. Tuttavia, se come da ipotesi  $V$  è a corto raggio, solo nei pressi del raggio di azione di  $V$  possiamo approssimare il pacchetto d'onda con un'onda piana. Dunque stiamo considerando il pacchetto d'onda infinitamente esteso rispetto alla portata di  $V$ .

È conveniente usare la rappresentazione di interazione: sia  $|\psi; t\rangle_S$  un qualunque stato in rappresentazione di Schrödinger, definiamo  $|\psi; t\rangle_I$  come lo stesso stato in rappresentazione di interazione

$$|\psi; t\rangle_I = e^{iH_0 t/\hbar} |\psi; t\rangle_S = U_I(t, t_0) |\psi; t_0\rangle_I \quad (2.2)$$

$$V_I(t) = e^{iH_0 t/\hbar} V_S e^{-iH_0 t/\hbar}, \quad (2.3)$$

dove  $U_I(t)$  è l'operatore di traslazione temporale e soddisfa la seguente equazione

$$U_I(t, t_0) = 1 - \frac{1}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' V_I(t') U_I(t', t_0). \quad (2.4)$$

Nella (2.2)  $V_S$  è il potenziale indipendente dal tempo definito nella (2.1) mentre  $V_I(t)$  è il potenziale in rappresentazione di interazione. D'ora in avanti il pedice "S" per indicare la rappresentazione di Schrödinger verrà omissso.

## 2.2 Tasso di transizione

Supponendo che lo stato iniziale  $|i\rangle$ , sia autostato di  $H_0$ , la probabilità che evolva in un'altro autostato di  $H_0$   $|n\rangle$  (probabilità di transizione  $P(i \rightarrow n)$ ) è data dal modulo quadro dell'**ampiezza di transizione**, definita nel seguente modo

$$\langle n | U_I(t, t_0) | i \rangle = \delta_n^i - \frac{i}{\hbar} \sum_m \langle n | V | m \rangle \int_{t_0}^t dt' e^{i\omega_{nm}t'} \langle m | U_I(t', t_0) | i \rangle, \quad (2.5)$$

dove la sommatoria è sugli autostati di  $H_0$  e  $\omega_{nm} = (E_n - E_m)/\hbar$ .  
Calcoliamo l'ampiezza di transizione al primo ordine, dunque

$$\langle n | U_I(t, t_0) | i \rangle = \delta_n^i - \frac{i}{\hbar} \langle n | V | i \rangle \int_{t_0}^t dt' e^{i\omega_{ni}t'}. \quad (2.6)$$

Per definizione di scattering lo stato iniziale e finale sono localizzati molto lontano dal centro diffusore, dunque dobbiamo prendere i limiti per  $t \rightarrow \infty$  e  $t_0 \rightarrow -\infty$ . Per trattare l'integrale nella (2.6) nei limiti appena definiti occorre regolarizzarlo. A tal fine definiamo la matrice  $T$  nel seguente modo

$$\langle n | U_I(t, t_0) | i \rangle = \delta_n^i - \frac{i}{\hbar} T_{ni} \int_{t_0}^t dt' e^{i\omega_{ni}t' + \epsilon t'}. \quad (2.7)$$

Avendo ridefinito  $\langle n | U_I(t, t_0) | i \rangle$  con l'ausilio di  $T$  il trattamento delle divergenze risulta più semplice. Infatti, con  $\epsilon > 0$  l'integrale per  $t_0 \rightarrow -\infty$  non diverge. Per trattare la divergenza dovuta all'estremo superiore, scegliamo  $\epsilon > 0$  e  $t < 1/\epsilon$ , per poi prendere prima il limite  $\epsilon \rightarrow 0$  e poi  $t \rightarrow \infty$ . L'introduzione di  $T$  rappresenta un artificio matematico utile a semplificare la risoluzione dell'integrale. Come vedremo in seguito, sarà possibile stabilire una relazione  $T$  e  $V$ . Inoltre, tramite la scelta di una base opportuna, sarà possibile eliminare  $T$  dai calcoli e ottenere un risultato significativo in teoria dello scattering.

Definiamo il **tasso di transizione** ossia la probabilità di transizione per unità di tempo

$$w(i \rightarrow n) = \frac{d}{dt} P(i \rightarrow n) = \frac{d}{dt} |\langle n | U_I(t, -\infty) | i \rangle|^2 \quad (2.8)$$

per  $|i\rangle \neq |n\rangle$ ; integrando la (2.7) tra  $t_0 \rightarrow -\infty$  e  $t$

$$\langle n | U_I(t, -\infty) | i \rangle = -\frac{i}{\hbar} T_{ni} \frac{e^{i\omega_{ni}t + \epsilon t}}{i\omega_{ni} + \epsilon}. \quad (2.9)$$

Calcolandone il modulo quadro e derivando rispetto al tempo otteniamo

$$\omega(i \rightarrow n) = \frac{1}{\hbar^2} |T_{ni}|^2 \frac{2\epsilon e^{2\epsilon t}}{\omega_{ni}^2 + \epsilon^2}. \quad (2.10)$$

Adesso prendiamo prima il limite  $\epsilon \rightarrow 0$  e poi  $t \rightarrow \infty$ . Sfruttiamo la seguente identità (ricavata dalla formula di Plemelj)

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{\omega_{ni}^2 + \epsilon^2} = \frac{1}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} -\frac{1}{\omega_{ni} + i\epsilon} + \frac{1}{\omega_{ni} - i\epsilon} = \pi \delta(\omega_{ni}), \quad (2.11)$$

da cui

$$w(i \rightarrow n) = \frac{2\pi}{\hbar} |T_{ni}|^2 \delta(E_n - E_i). \quad (2.12)$$

Possiamo notare che il limite per  $t \rightarrow \infty$  è banale in quanto l'espressione non dipende dal tempo.

## 2.3 Sezione d'urto differenziale

Per studiare sperimentalmente lo scattering abbiamo bisogno di una grandezza misurabile. Consideriamo un flusso di particelle incidente su una superficie  $d\sigma$  dirette verso la regione in cui agisce il potenziale. Queste particelle verranno deviate (scatterate) a causa dell'interazione. Consideriamo una porzione di angolo solido  $d\Omega$  intorno al centro diffusore e contiamo il numero di particelle scatterate in  $d\Omega$ .

Definiamo la **sezione d'urto differenziale**

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\text{Numero di particelle scatterate in } d\Omega \text{ in per unità di tempo}}{\text{Numero di particelle incidenti nell'area } d\sigma \text{ per unità di tempo}}. \quad (2.13)$$

In termini di flusso, la sezione d'urto differenziale rappresenta il tasso di diffusione delle particelle in un angolo solido  $d\Omega$  a partire dal flusso incidente di particelle incidente con impulso pari a  $\hbar k$ . Quindi

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\text{tasso di diffusione}}{\text{modulo del flusso incidente}}. \quad (2.14)$$

La sezione d'urto totale si ottiene integrando sull'angolo solido

$$\sigma_{tot} = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega}. \quad (2.15)$$

Nella formula (2.12) abbiamo ricavato il tasso di transizione verso il singolo stato  $|n\rangle$ . Nel limite  $L$  molto grande lo spettro da discreto tende al continuo, e quindi ci saranno più stati  $|n_i\rangle$  con  $E \approx E_n$ . Per questo motivo determiniamo la densità di stati

$\rho(E_n) = \frac{\Delta n}{\Delta E_n}$  e poi la integriamo con il tasso di transizione.

La densità di stati ricavata di seguito è per la diffusione elastica, ovvero quando  $|i\rangle = |\vec{k}\rangle$  e  $|n\rangle = |\vec{k}'\rangle$ , con  $|\vec{k}| = |\vec{k}'| \equiv k$ . Gli autostati sono indicati dai numeri quantici  $\vec{k} = \frac{2\pi}{L}(n_x, n_y, n_z) = \frac{2\pi}{L}\vec{n}$ , dove  $n_{x,y,z} \in \mathbb{N}$ .

Come già affermato nel limite  $L$  molto grande, possiamo considerare  $|\vec{n}|$  come un continuo. Di conseguenza  $\Delta n \rightarrow dn = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 k^2 dk d\Omega$ , dove  $d\Omega$  è la frazione infinitesima di angolo solido. L'energia  $E_n = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$  da cui  $dE_n = \frac{\hbar^2 k}{m} dk$ .

Quindi il tasso di transizione  $\bar{w}(i \rightarrow n)$  si calcola nel seguente modo

$$\begin{aligned}
\bar{w}(i \rightarrow n) &= \int dE_n w(E_n) \rho(E_n) = \\
&= \int dE_n \frac{2\pi}{\hbar} |T_{ni}|^2 \delta(E_n - E_i) \left( \frac{L}{2\pi} \right)^3 \frac{m}{\hbar} \frac{\sqrt{2mE_n}}{\hbar} d\Omega = \\
&= \frac{mkL^3}{(2\pi)^2 \hbar^3} |T_{ni}|^2 d\Omega.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Il flusso di probabilità per l'onda piana  $\langle \vec{x} | \vec{k} \rangle = \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}}{L^{3/2}}$  è  $\vec{j}(\vec{x}, t) = \frac{\hbar \vec{k}}{mL^3}$ . Dunque partendo dalla definizione (2.14) la sezione d'urto differenziale sarà data da

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{mL^3}{2\pi\hbar^2} \right)^2 |T_{ni}|^2. \tag{2.17}$$

## 2.4 Equazione di Lippmann-Schwinger

Ricaviamo una relazione che sarà utile per studiare l'andamento della funzione d'onda.

Mandando  $t_0 \rightarrow -\infty$  nella (2.7) abbiamo

$$\langle n | U_I(t, -\infty) | i \rangle = \delta_n^i + \frac{1}{\hbar} T_{ni} \frac{e^{i\omega_{ni}t + \epsilon t}}{-\omega_{ni} + i\epsilon}. \tag{2.18}$$

Sostituendo quest'ultima nell'integrando della definizione di ampiezza di transizione dato dalla (2.5) (calcolata in  $t_0 \rightarrow -\infty$ ) si ottiene

$$\begin{aligned}
\langle n | U_I(t, -\infty) | i \rangle &= \delta_n^i - \frac{i}{\hbar} \sum_m V_{nm} \int_{-\infty}^t dt' e^{i\omega_{nm}t'} \delta_m^i + \\
&\quad - \frac{i}{\hbar^2} \sum_m \frac{V_{nm} T_{mi}}{-\omega_{mi} + i\epsilon} \int_{-\infty}^t dt' e^{i(\omega_{nm} + \omega_{mi})t' + \epsilon t'}.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Svolgendo gli integrali e notando che  $\hbar(\omega_{nm} + \omega_{mi}) = E_n - E_m + E_m - E_i = \hbar\omega_{ni}$

$$\langle n | U_I(t, -\infty) | i \rangle = \delta_n^i - \frac{i}{\hbar} V_{ni} \frac{e^{i\omega_{ni}t + \epsilon t}}{-\omega_{ni} + i\epsilon} - \frac{i}{\hbar^2} \sum_m \frac{V_{nm} T_{mi}}{-\omega_{mi} + i\epsilon} \frac{e^{i\omega_{ni}t + \epsilon t}}{-\omega_{ni} + i\epsilon}. \tag{2.20}$$

Confrontandola con la (2.18) otteniamo il seguente sistema non omogeneo di equazioni lineari

( $\epsilon$  è stato riscalato:  $\epsilon \rightarrow \hbar\epsilon$ )

$$T_{ni} = V_{ni} + \sum_m V_{nm} \frac{T_{mi}}{E_i - E_m + i\epsilon}. \tag{2.21}$$

Questa relazione lega il potenziale  $V$  con la matrice  $T$ . Invece di risolvere il sistema per calcolare i termini  $T_{ni}$  cerchiamo un set di vettori  $|\psi\rangle$  che soddisfino la seguente proprietà

$$T_{ni} = \langle n | V | \psi \rangle. \tag{2.22}$$



L'obiettivo di questo approccio è di evitare di doverci preoccupare della matrice  $T$  e di concentrarci invece sulla ricerca di una condizione per i vettori  $|\psi\rangle$  (il cui significato verrà chiarito tra breve). Usando la definizione appena introdotta (2.22), possiamo riscrivere la (2.21) come segue:

$$\langle n|V|\psi\rangle = \langle n|V|i\rangle + \sum_m \langle n|V|m\rangle \frac{\langle m|V|\psi\rangle}{E_i - E_m + i\epsilon}. \quad (2.23)$$

La relazione precedente deve valere per ogni  $\langle n|$ .

Usando le proprietà  $f(H_0)|m\rangle = f(E_m)|m\rangle$  e la relazione di completezza  $\sum_m |m\rangle\langle m| = \mathbb{1}$  (che derivano dal fatto che  $\langle m|$  sono autostati di  $H_0$ ), otteniamo:

$$|\psi\rangle = |i\rangle + \frac{1}{E_i - H_0 + i\epsilon} V |\psi\rangle. \quad (2.24)$$

Questa è nota come **Equazione di Lippmann-Schwinger**.

Come possiamo vedere, i vettori  $|\psi\rangle$  sono la somma dello stato iniziale più un termine dovuto al potenziale  $V$ . In altre parole, essi rappresentano lo stato finale a partire da uno stato iniziale dopo l'effetto dello scattering.

## 2.5 Andamento funzione d'onda a grandi distanze

In questa sezione usiamo l'equazione di Lippmann-Schwinger per studiare l'andamento della funzione d'onda a grandi distanze.

Moltiplichiamo la (2.24) per  $\langle \vec{x}|$ , rinominiamo  $E_i$  con  $E$ , ed inseriamo  $\int d^3x' |\vec{x}'\rangle\langle \vec{x}'| = \mathbb{1}$  ottenendo

$$\langle \vec{x}|\psi\rangle = \langle \vec{x}|i\rangle + \frac{2m}{\hbar^2} \int d^3x' G(\vec{x}, \vec{x}') \langle \vec{x}'|V|\psi\rangle, \quad (2.25)$$

dove abbiamo definito

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{\hbar^2}{2m} \langle \vec{x}| \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} |\vec{x}'\rangle. \quad (2.26)$$

Poiché sappiamo che  $\langle \vec{x}|\vec{k}\rangle = \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{L^{3/2}}$  e che  $H_0|\vec{k}\rangle = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$  inseriamo un set completo di autostati  $|\vec{k}\rangle$  nella relazione precedente.

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{\hbar^2}{2m} \sum_{\vec{k}'} \sum_{\vec{k}''} \langle \vec{x}|\vec{k}'\rangle \langle \vec{k}'|\frac{1}{E - H_0 + i\epsilon}|\vec{k}''\rangle \langle \vec{k}''|\vec{x}'\rangle. \quad (2.27)$$

Facciamo agire  $H_0$  su  $\langle \vec{k}'|$ , scriviamo l'energia  $E$  in modo esplicito  $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$  e, riscalandolo  $\epsilon \rightarrow \frac{2m}{\hbar^2}\epsilon$  si ottiene

$$\begin{aligned} G(\vec{x}, \vec{x}') &= \frac{1}{L^3} \sum_{\vec{k}'} \sum_{\vec{k}''} \frac{1}{k^2 - k'^2 + i\epsilon} e^{i(\vec{k}'\cdot\vec{x} - \vec{k}''\cdot\vec{x}')} \langle \vec{k}'|\vec{k}''\rangle = \\ &= \frac{1}{L^3} \sum_{\vec{k}'} \frac{1}{k^2 - k'^2 + i\epsilon} e^{i\vec{k}'\cdot(\vec{x} - \vec{x}')}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

dove l'ultima uguaglianza segue da  $\langle \vec{k}' | \vec{k}'' \rangle = \delta_{\vec{k}'}^{\vec{k}''}$ .

Fino ad ora abbiamo sempre discretizzato gli stati ponendo in sistema in una grande scatola di lato  $L$ , adesso mandiamo  $L \rightarrow \infty$ , in modo da trasformare la sommatoria in un integrale.

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{L}(n_x, n_y, n_z) \quad dk_i = \frac{2\pi}{L} \quad \text{con } i = x, y, z \quad (2.29)$$

$$\frac{1}{L^3} \sum_{\vec{k}'} \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 \vec{k}' \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk' k'^2 \int_{-1}^1 d(\cos \theta). \quad (2.30)$$

Dove  $\theta$  in coordinate polari è l'angolo tra  $\vec{k}'$  e  $(\vec{x} - \vec{x}')$ . Riscriviamo la (2.28) come

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk' \frac{k'^2}{k^2 - k'^2 + i\epsilon} \int_{-1}^1 d(\cos \theta) e^{ik' \cdot (\vec{x} - \vec{x}') \cos \theta}. \quad (2.31)$$

Svolgiamo l'integrale in  $d(\cos \theta)$ . Poiché la funzione integranda in  $dk'$  è pari, possiamo integrare su tutto l'asse reale a patto di moltiplicare per  $\frac{1}{2}$ .

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \int_{-\infty}^\infty dk' \frac{k'}{k^2 - k'^2 + i\epsilon} \left( e^{ik' \cdot |\vec{x} - \vec{x}'|} - e^{-ik' \cdot |\vec{x} - \vec{x}'|} \right). \quad (2.32)$$

Per svolgere questo integrale (che chiamiamo  $I_\epsilon$ ) usiamo la formula di Cauchy. Dividiamo l'integrale (2.32) in due parti svolgendo prima il lato con coefficiente positivo all'esponenziale.

Riscriviamo l'integrando come  $-\frac{f(z)}{z - z_0}$  con  $f(z) = \frac{ze^{iz\alpha}}{z + z_0}$ ,  $\alpha = |\vec{x} - \vec{x}'|$  e  $z_0 = (k^2 + i\epsilon)^{1/2}$  definito in modo che per  $\epsilon \rightarrow 0$ ,  $z_0 \rightarrow k + i\epsilon + O(\epsilon^2)$ .

Valutiamo l'integrale su una curva composta da un segmento lungo  $2R$  sull'asse reale ( $I_{Re}$ ) e chiusa da un semicerchio di raggio  $R$  nel semipiano superiore ( $I_R$ ). Nel limite  $R \rightarrow \infty$ , poiché l'integrando nel semipiano superiore decresce esponenzialmente, il secondo lemma di Jordan ci assicura che  $I_R \rightarrow 0$ , mentre  $I_{Re} \rightarrow I_\epsilon$ . Dunque

$$I_\epsilon = \lim_{R \rightarrow \infty} I_{Re} + I_R = -2\pi i f(z_0) \quad I = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_\epsilon = -\pi i e^{ik|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (2.33)$$

Per calcolare l'integrale con coefficiente dell'esponenziale negativo procediamo nello stesso modo ma chiudendo la curva nel semipiano inferiore (altrimenti l'esponenziale non andrebbe a 0), la singolarità sarà quindi in  $-z_0$ ; ma chiudendo nel semipiano inferiore la curva viene percorsa in senso orario da cui deriva un altro segno meno globale. Nel complesso il contributo del secondo integrale è lo stesso del primo. Dunque

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\vec{x} - \vec{x}'|}}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (2.34)$$

Sostituendo  $G(\vec{x}, \vec{x}')$  nella (2.25) otteniamo l'espressione della funzione d'onda

$$\langle \vec{x} | \psi \rangle = \langle \vec{x} | i \rangle + \frac{m}{2\pi \hbar^2} \int d^3 x' \frac{e^{ik|\vec{x} - \vec{x}'|}}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \langle \vec{x}' | V | \psi \rangle. \quad (2.35)$$

Chiamando lo stato iniziale  $|i\rangle \equiv |\vec{k}\rangle$  e assumendo che  $V$  sia un potenziale locale (diagonale nella rappresentazione  $\vec{x}$ ):  $\langle \vec{x}' | V | \vec{x} \rangle = V(\vec{x}) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')$  si ottiene

$$\langle \vec{x} | \psi \rangle = \langle \vec{x} | \vec{k} \rangle - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3x' \frac{e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} V(\vec{x}') \langle \vec{x}' | \psi \rangle. \quad (2.36)$$

Valutiamo la funzione d'onda per  $r \equiv |\vec{x}|$  molto al di fuori della portata di  $V$ . Essendo  $V$  a corto raggio l'integrale nell'espressione sovrastante sarà non nullo solamente per  $r' \equiv |\vec{x}'| \ll r$ .

$$|\vec{x} - \vec{x}'| = [(\vec{x} - \vec{x}') \cdot (\vec{x} - \vec{x}')]^{1/2} = r \left[ 1 - 2 \frac{r'}{r} \cos \alpha + \left( \frac{r'}{r} \right)^2 \right]^{1/2} \approx r - \hat{x} \cdot \vec{x}'. \quad (2.37)$$

dove  $\hat{x} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$  e  $\alpha = \angle(\vec{x}, \vec{x}')$ . Sviluppiamo al primo ordine anche il seguente

$$(|\vec{x} - \vec{x}'|)^{-1} = \frac{1}{r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \text{ e definiamo } \vec{k}' \equiv k\hat{x}.$$

Sostituendo nella (2.36) otteniamo

$$\begin{aligned} \langle \vec{x} | \psi \rangle &\rightarrow \langle \vec{x} | \vec{k} \rangle - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3x' e^{-i(\vec{k}' \cdot \vec{x}')} V(\vec{x}') \langle \vec{x}' | \psi \rangle = \\ &= \frac{1}{L^{3/2}} \left[ e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} + \frac{e^{ikr}}{r} f(\vec{k}, \vec{k}') \right], \end{aligned} \quad (2.38)$$

dove abbiamo definito

$$f(\vec{k}, \vec{k}') = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} L^3 \int d^3x' \frac{e^{-i(\vec{k}' \cdot \vec{x}')}}{L^{3/2}} \langle \vec{x}' | V | \psi \rangle = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} L^3 \langle \vec{k}' | \psi \rangle, \quad (2.39)$$

L'ultima uguaglianza si ottiene usando  $\langle \vec{k}' | \vec{x}' \rangle = \frac{e^{-i(\vec{k}' \cdot \vec{x}')}}{L^{3/2}}$  e la relazione di completezza  $\int d^3x' |\vec{x}'\rangle \langle \vec{x}'| = \mathbb{1}$ .

Dalla (2.38) osserviamo che la funzione d'onda è formata dall'onda piana imperturbata che continua a propagarsi nella direzione  $\vec{k}$  più un'onda sferica uscente con ampiezza  $f(\vec{k}, \vec{k}')$ . Chiamiamo  $f(\vec{k}, \vec{k}')$  **ampiezza di diffusione**. Dalla (2.17) e da (2.22) abbiamo

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{mL^3}{2\pi\hbar^2} \right)^2 |T_{ni}|^2 = \left( \frac{mL^3}{2\pi\hbar^2} \right)^2 |\langle \vec{k}' | V | \psi \rangle|^2 = |f(\vec{k}, \vec{k}')|^2. \quad (2.40)$$

## 2.6 Diffusione con potenziale a simmetria sferica

In questa sezione analizziamo lo scattering in presenza di un potenziale  $V$  a simmetria sferica. L'hamiltoniana di particella libera  $H_0$  commuta con gli operatori  $L^2$  ed  $L_z$ , per cui è possibile considerare una base di autostati simultanei che chiameremo  $|E, l, m\rangle$ . Torniamo sulla matrice  $T$  introdotta nei paragrafi precedenti e definiamo l'operatore  $T$  con elementi di matrice  $\langle n | T | i \rangle = T_{ni}$ . Dalla (2.21) abbiamo

$$\langle n | T | i \rangle = \langle n | V | i \rangle + \sum_m \langle n | V \frac{1}{E_i - H_0 + i\hbar\epsilon} | m \rangle \langle m | T | i \rangle, \quad (2.41)$$

da cui

$$T = V + V \frac{1}{E_i - H_0 + i\hbar\epsilon} T. \quad (2.42)$$

Sviluppando in modo ricorsivo scriviamo l'operatore  $T$  in termini di potenze di  $V$ :

$$T = V + V \frac{1}{E_i - H_0 + i\hbar\epsilon} V + V \frac{1}{E_i - H_0 + i\hbar\epsilon} V \frac{1}{E_i - H_0 + i\hbar\epsilon} V + \dots \quad (2.43)$$

Se  $V$  è a simmetria sferica segue che anche  $T$  è invariante per rotazioni e dunque commuta con  $L^2$  ed  $L_z$ , è dunque un operatore scalare. Il teorema di Wigner-Eckart (vedere [1]) afferma che per un operatore scalare  $\langle E', l', m' | T | E, l, m \rangle = T_l(E) \delta_{l,l'} \delta_{m,m'}$ , ossia  $T$  è diagonale sia in  $l$  che in  $m$  e gli elementi di matrice dipendono solo da  $E$  e da  $l$ . Usando la (2.22) scriviamo l'ampiezza di diffusione come

$$f(\vec{k}, \vec{k}') = -\frac{2mL^3}{4\pi\hbar} \langle \vec{k}' | T | \vec{k} \rangle. \quad (2.44)$$

Passando al limite del continuo e sfruttando le seguente relazione:

$\langle \vec{k} | E, l, m \rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{mk}} \delta(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - E) Y_l^m(\hat{k})$ , possiamo scrivere la (2.44) come segue

$$\begin{aligned} f(\vec{k}, \vec{k}') &= -\frac{1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} (2\pi)^3 \sum_l \sum_m \sum_{l'} \sum_{m'} \int dE \int dE' \langle \vec{k}' | E' l' m' \rangle \langle E' l' m' | T | E l m \rangle \langle E l m | \vec{k} \rangle \\ &= -\frac{1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} (2\pi)^3 \frac{\hbar^2}{2mk^2} \sum_l \sum_m T_l(E) \Big|_{E=\hbar^2 k^2/2m} Y_l^m(\hat{k}') Y_l^{m*}(\hat{k}) \\ &= -\frac{4\pi^2}{k} \sum_l \sum_m T_l(E) \Big|_{E=\hbar^2 k^2/2m} Y_l^m(\hat{k}') Y_l^{m*}(\hat{k}). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Scegliamo un sistema di coordinate tale che  $\hat{k} = \hat{z}$ . Le armoniche sferiche calcolate lungo  $\hat{z}$ , si annullano se  $m \neq 0$ , in particolare:

$$Y_l^m(\hat{k}) = Y_l^m(\hat{z}) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \delta_{m0}. \quad (2.46)$$

Quindi nella sommatoria contribuiscono solo i termini con  $m = 0$ . Scegliendo  $\theta$  come l'angolo tra  $\hat{k}$  e  $\hat{k}'$  si ha

$$Y_l^0(\hat{k}') = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta). \quad (2.47)$$

Per ottenere le ultime due relazione è stata sfruttata la seguente definizione  $Y_l^0(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta)$  dove  $P_l$  sono i polinomi di Legendre e vale  $P_l(1) = 1$ . Alla luce di queste considerazioni la (2.45) si riduce a

$$\begin{aligned} f(\vec{k}, \vec{k}') &= -\frac{4\pi^2}{k} \sum_l \frac{2l+1}{4\pi} T_l(E) \Big|_{E=\hbar^2 k^2/2m} P_l(\cos \theta) = \\ &= \sum_l (2l+1) f_l(k) P_l(\cos \theta) \equiv f(\theta). \end{aligned} \quad (2.48)$$

Dove è stata definita l'ampiezza d'onda parziale  $f_l(k) = -\frac{\pi}{k} T_l(E) \Big|_{E=\hbar^2 k^2/2m}$ .

Naturalmente,  $f(\theta)$  dipende ancora da  $k$  (l'energia incidente), ma questa dipendenza viene omessa per semplicità di notazione.

Usando lo sviluppo in onde parziali torniamo a studiare l'andamento della funzione d'onda a grandi distanze. A tal fine è necessario usare lo sviluppo di un'onda piana in onde sferiche:

$$\frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{(2\pi)^{3/2}} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_l (2l+1) i^l j_l(kr) P_l(\hat{k} \cdot \hat{r}), \quad (2.49)$$

dove  $j_l(kr)$  è la funzione di Bessel di primo tipo di ordine  $l$ , che per  $r$  grande tende a

$$j_l(kr) \xrightarrow{\text{grande } r} \frac{e^{i(kr-(l\pi/2))} - e^{-i(kr-(l\pi/2))}}{2ikr}, \quad (i^l = e^{i(\pi/2)l}). \quad (2.50)$$

Quindi, per grandi valori di  $r$ , possiamo considerare un'onda piana come una sovrapposizione di un'onda sferica uscente ed una entrante. Usiamo le relazioni appena scritte per sviluppare la funzione d'onda calcolata in (2.38):

$$\begin{aligned} \langle \vec{x} | \psi \rangle &\xrightarrow{\text{grande } r} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left[ e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \right] = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_l (2l+1) P_l(\cos \theta) \left( \frac{e^{ikr} - e^{-i(kr-l\pi)}}{2ikr} \right) + \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_l (2l+1) f_l(k) P_l(\cos \theta) \frac{e^{ikr}}{r} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_l (2l+1) \frac{P_l(\cos \theta)}{2ik} \left[ (1 + 2ik f_l(k)) \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{-i(kr-l\pi)}}{r} \right]. \end{aligned} \quad (2.51)$$

La funzione d'onda è ancora una sovrapposizione di un'onda sferica entrante ed una uscente ma l'effetto dello scattering è quello di cambiare solamente il coefficiente dell'onda uscente mandandolo da  $1 \rightarrow 1 + 2ik f_l(k)$ . Dal confronto con la (2.50) vediamo che il coefficiente dell'onda entrante rimane inalterato.

## 2.7 Sfasamenti

Per la conservazione della probabilità abbiamo  $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\frac{\partial |\psi|^2}{\partial t} = 0$ , che per il teorema della divergenza diventa

$$\int_S \vec{j} \cdot \hat{n} dS = 0 \quad \forall \text{ superficie } S, \quad (2.52)$$

ossia il flusso entrante deve essere uguale al flusso uscente. Calcolando l'integrale (in appendice A), si giunge alla seguente relazione

$$|S_l(k)| = 1 \quad \text{con } S_l(k) \equiv 1 + 2ikf_l(k). \quad (2.53)$$

Questa è nota come **relazione di unitarietà** per  $l$ -esima onda parziale. Quindi l'effetto dello scattering è un cambiamento di fase dell'onda uscente. Essendo  $S_l$  una fase possiamo scriverla come  $S_l(k) = e^{2i\delta_l(k)}$  con  $\delta_l(k)$  reale, noto come **phase shift**. D'ora in avanti lo chiameremo  $\delta_l$  per semplicità di notazione. Riscriviamo l'onda parziale come  $f_l = \frac{S_l - 1}{2ik}$  che, a seconda dell'utilità, possiamo esplicitare in termini di  $\delta_l$  nei modi seguenti:

$$f_l = \frac{e^{2i\delta_l} - 1}{2ik} = \frac{e^{i\delta_l} \sin \delta_l}{k} = \frac{1}{k \cot \delta_l - ik}. \quad (2.54)$$

Sostituendo nella (2.48) otteniamo la seguente espressione per l'ampiezza di diffusione

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \left( \frac{e^{2i\delta_l} - 1}{2ik} \right) P_l(\cos \theta) \\ &= \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l} \sin \delta_l P_l(\cos \theta). \end{aligned} \quad (2.55)$$

Adesso poiché la sezione d'urto differenziale  $\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2$ , ricaviamo la sezione d'urto totale  $\sigma_{tot}$  integrando sull'angolo solido:

$$\begin{aligned} \sigma_{tot} &= \int |f(\theta)|^2 d\Omega \\ &= \frac{1}{k^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^{+1} d(\cos \theta) \sum_l \sum_{l'} (2l+1)(2l'+1) e^{i\delta_l} \sin \delta_l e^{-i\delta_{l'}} \sin \delta_{l'} P_l P_{l'} \\ &= \frac{4\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) \sin^2 \delta_l, \end{aligned} \quad (2.56)$$

dove abbiamo usato la seguente proprietà dei Polinomi di Lagrange  $P_l = \int_{-1}^1 dx P_l(x) P_{l'}(x) = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}$ .

Adesso cerchiamo di calcolare gli sfasamenti  $\delta_l$  dato il potenziale  $V$ . Se supponiamo che  $V$  si annulli per  $r > R$  (portata del potenziale), al di fuori della portata la funzione d'onda deve essere un'onda sferica la cui parte radiale può essere dunque scritta come combinazione lineare delle funzioni di Bessel sferiche del I e del II tipo, rispettivamente  $j_l$  e  $n_l$ . Queste ultime nell'origine divergono ma poiché stiamo considerando la funzione d'onda solo per  $r > R$ , anch'esse sono una buona soluzione. Quindi la funzione d'onda sarà una combinazione di  $j_l(kr)P_l(\cos \theta)$  e  $n_l(kr)P_l(\cos \theta)$  o, equivalentemente,  $h_l^{(1)}P_l$  e  $h_l^{(2)}P_l$ , dove  $h_l^{(1)}$  e  $h_l^{(2)}$  sono le funzioni di Hankel sferiche del I e del II tipo, definite come

$$h_l^{(1)} = j_l + in_l, \quad h_l^{(2)} = j_l - in_l. \quad (2.57)$$

Per  $r$  grande le funzioni di Hankel tendono a

$$h_l^{(1)} \rightarrow \frac{e^{i(kr-l\pi/2)}}{ikr}, \quad h_l^{(2)} \rightarrow -\frac{e^{-(ikr-l\pi/2)}}{ikr} \quad (2.58)$$

Definendo le funzioni  $A_l = c_l^{(1)} h_l^{(1)}(kr) + c_l^{(2)} h_l^{(2)}(kr)$ , la funzione d'onda per  $r > R$  sarà data dalla seguente combinazione lineare:

$$\begin{aligned} \langle \vec{x} | \psi \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_l i^l (2l+1) A_l(r) P_l(\cos \theta) \rightarrow \\ &\xrightarrow{\text{grande } r} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_l (2l+1) P_l \left[ c_l^{(1)} \frac{e^{ikr}}{ikr} - c_l^{(2)} \frac{e^{-(ikr-l\pi)}}{ikr} \right]. \end{aligned} \quad (2.59)$$

D'altro canto sappiamo che la funzione d'onda può essere anche scritta in funzione della ampiezze d'onda parziali come fatto nella (2.51). Sostituendo al posto di  $f_l$  la prima relazione da sinistra scritta in (2.54) nella (2.51) otteniamo

$$\langle \vec{x} | \psi \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_l (2l+1) P_l(\cos \theta) \left[ e^{2i\delta_l} \frac{e^{ikr}}{2ikr} - \frac{e^{-(ikr-l\pi)}}{2ikr} \right]. \quad (2.60)$$

Confrontando le ultime due espressioni se ne deduce che  $c_l^{(1)} = \frac{e^{2i\delta_l}}{2}$  e  $c_l^{(2)} = \frac{1}{2}$ . Da cui

$$\begin{aligned} A_l(r) &= \frac{e^{2i\delta_l}}{2} \left[ j_l(kr) + in_l(kr) \right] + \frac{1}{2} (j_l(kr) - in_l(kr)) = \\ &= e^{i\delta_l} [\cos \delta_l j_l(kr) - \sin \delta_l n_l(kr)]. \end{aligned} \quad (2.61)$$

A questo punto definiamo  $\beta_l$  ossia la derivata logaritmica di  $A_l$  rispetto ad  $r$  calcolata in  $r = R$  (poiché abbiamo considerato solo  $r > R$  a rigore la derivata è calcolata per  $r \rightarrow R^+$ ):

$$\beta_l \equiv \left. \frac{d(\log A_l)}{d(\log r)} \right|_{r=R} = \left. \frac{r}{A_l} \frac{dA_l}{dr} \right|_{r=R} = kR \left[ \frac{j'_l(kR) \cos \delta_l - n'_l(kR) \sin \delta_l}{j_l(kR) \cos \delta_l - n_l(kR) \sin \delta_l} \right], \quad (2.62)$$

dove  $j'(kR)$  indica la derivata di  $j_l$  rispetto a  $kr$  calcolata in  $kr = kR$ . Invertendo la relazione otteniamo

$$\tan \delta_l = \frac{kR j'_l(kR) - \beta_l j_l(kR)}{kR n'_l(kR) - \beta_l n_l(kR)}. \quad (2.63)$$

Quest'ultima espressione sarà il punto di partenza nella prossima sezione per studiare l'andamento dei  $\delta_l$  a basse energie.

## 2.8 Diffusione a bassa energia

Per diffusione a bassa energia si intende quando  $kR \ll 1$  (dove ricordiamo che  $R$  è la portata del potenziale). Ciò comporta che  $R \ll \frac{1}{k}$ , ossia la portata del potenziale è

molto minore della lunghezza d'onda del pacchetto incidente. Mostriamo di seguito i comportamenti delle funzioni di Bessel per  $kR \ll 1$  (per alleggerire la notazione indichiamo  $kR \equiv z$ ):

$$\begin{aligned} j_l(z) &\sim \frac{(z)^l}{(2l+1)!!} \quad \forall l, \quad j'_l(z) \sim \frac{l}{z} j_l(z) \quad l \neq 0 \\ n_l(z) &\sim -\frac{(2l-1)!!}{(z)^{l+1}}, \quad n'_l(z) \sim -\frac{l+1}{z} n_l(z) \quad \forall l. \end{aligned} \quad (2.64)$$

In particolare per  $l = 0$  si ha

$$\begin{aligned} j_0(z) &= \frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{6} + O(z^4), \quad j'_0(z) = -\frac{z}{3} + O[z^3] \\ n_0(z) &= -\frac{\cos z}{z} = -\frac{1}{z} + O(z), \quad n'_0(z) = \frac{1}{z^2} + O[z^0]. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Sostituendo le relazioni appena mostrate nella (2.63) otteniamo

$$\tan \delta_l \sim -\frac{j_l(z)}{n_l(z)} \frac{l - \beta_l}{(l+1) + \beta_l} \sim \frac{z^{2l+1}}{(2l+1)!!(2l-1)!!}, \quad \text{per } l \neq 0. \quad (2.66)$$

Ripetendo lo stesso procedimento nel caso  $l = 0$  si ottiene  $\tan \delta_0 \sim kR$ . Quindi per ogni  $l$  assumendo che anche lo sfamento  $\delta_l$  sia piccolo si ha

$$\delta_l \sim (kR)^{2l+1}. \quad (2.67)$$

Questo è noto come comportamento in soglia. Poiché dalla (2.56) sappiamo che la sezione d'urto totale  $\sigma_{tot}$  dipende dai  $\delta_l$ , il contributo maggiore sarà dato da  $\delta_0$ . Dunque a basse energia la diffusione per  $l = 0$  (in onda S) è predominante. Analizziamo con maggior dettaglio il caso  $l = 0$  utilizzando un approccio ricorsivo; supponendo sia valido il comportamento in soglia vediamo l'andamento di  $\beta_0$  per poi sostituire quest'ultimo in (2.63). Prendiamo  $\delta_0 = -\alpha z$  dove  $\alpha$  è una costante arbitraria positiva non nulla, sviluppando in serie la (2.62) otteniamo

$$\beta_0 = -b_0 + b_2 z^2 + O(z^4). \quad (2.68)$$

con  $b_0$  e  $b_2$  costanti positive. Invertendo la (2.63) otteniamo

$$\cot \delta_0 = \frac{z n'_0(z) - \beta_0(z) n_0(z)}{z j'_0(z) - \beta_0(z) j_0(z)} = -\frac{c_0}{z} + c_2 z + O(z^3). \quad (2.69)$$

Ricordando che  $z = kR$ , e ridefinendo i coefficienti dello sviluppo in serie  $c_0$  e  $c_2$

$$k \cot \delta_0 = -\frac{1}{a_s} + \frac{1}{2} r_0 k^2 + O(k^2) \quad (2.70)$$

dove  $a_s$  è nota come **lunghezza di diffusione** ed  $r_0$  come **raggio efficace**. In appendice B si riporta il codice MATHEMATICA per eseguire gli sviluppi in serie. Ricapitolando, per basse energie il contributo maggiore all'ampiezza d'onda  $f(\theta)$  è dato dall'ampiezza d'onda parziale  $f_0$ , quindi usando la relazione (2.54) e limitandoci al primo termine della (2.70) possiamo scrivere

$$\sigma_{tot} = \int d\Omega |f(\theta)|^2 \approx \int d\Omega |f_0|^2 = 4\pi \lim_{k \rightarrow 0} \left| \frac{1}{k \cot \delta_0 - ik} \right|^2 = 4\pi a_s^2. \quad (2.71)$$

Questa espressione è importante perché abbiamo trovato una relazione tra una grandezza misurabile come la sezione d'urto  $\sigma_{tot}$  e un coefficiente della teoria dello scattering come la lunghezza di diffusione  $a_s$ .



## Capitolo 3

# Scattering con potenziale a $\delta$

La seguente trattazione è presa da [2] .

In questo capitolo, applicheremo i concetti esposti nei paragrafi precedenti allo studio dello scattering in presenza di un potenziale  $V(\vec{r}) = \delta(\vec{r})$ . A tal fine, introdurremo opportune tecniche di regolarizzazione. L'applicazione di queste tecniche verrà illustrata sia nel caso bidimensionale che in quello tridimensionale, per poi concentrarci sul caso tridimensionale in modo più approfondito.

L'hamiltoniana del sistema, in unità naturali, è

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{r}) = -\frac{\nabla^2}{2m} + v\delta(\vec{r}). \quad (3.1)$$

Il significato della costante  $v$  all'interno del potenziale, che per ora lasciamo in sospeso, sarà chiarito al termine della trattazione.

Cerchiamo una autofunzione di  $H$  nello spettro continuo,

$$H\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}) \quad \text{con } E = \frac{k^2}{2m}, \quad (3.2)$$

da cui

$$(p^2 - k^2)\psi(\vec{r}) = -2mv\psi(\vec{r})\delta(\vec{r}). \quad (3.3)$$

Passiamo allo spazio degli impulsi integrando entrambi i membri in  $\int \frac{d^n r}{(2\pi)^{n/2}} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}}$ .

$$(p^2 - k^2)\varphi(\vec{p}) = -2mv\psi(0) \cdot (2\pi)^{-n/2}, \quad (3.4)$$

che ha soluzione formale

$$\varphi(\vec{p}) = \delta(\vec{p} - \vec{k}) - \frac{2mv}{p^2 - k^2 - i\epsilon}\psi(0) \cdot (2\pi)^{-n/2}. \quad (3.5)$$

Quest'ultima poteva essere ricavata immediatamente usando Lippman-Schwinger (2.24). Infatti chiudendo con  $\langle \vec{p} |$  e sostituendo il potenziale  $V$  con quello in esame si ottiene la (3.5).

Tornando allo spazio delle posizioni (in  $\vec{r} = 0$ ) integrando in  $\int \frac{d^n p}{(2\pi)^{n/2}}$ , si ricava

$$\psi(0) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} - 2mvI_n(-k^2 - i\epsilon)\psi(0), \quad (3.6)$$

da cui

$$mv\psi(0) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \left( \frac{1}{mv} + 2I_n(-k^2 - i\epsilon) \right)^{-1}. \quad (3.7)$$

Dove abbiamo definito

$$I_n(z) = \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \frac{1}{p^2 + z}. \quad (3.8)$$

Questo integrale diverge per grandi valori dell'impulso quando  $n \geq 2$ . L'obiettivo è regolarizzarlo tramite un parametro per poi definire una costante di accoppiamento finita da poter relazionare ad una grandezza misurabile sperimentalmente. Per eseguire la regolarizzazione vengono mostrati due metodi: la regolarizzazione dell'estremo superiore dell'integrale e la regolarizzazione dimensionale.

### 3.1 Regolarizzazione dell'estremo superiore

L'integrale viene calcolato in  $n = 2, 3$  esprimendolo rispettivamente in coordinate polari e coordinate sferiche limitando  $|\vec{p}|$  a  $\Lambda$ .

$$\begin{aligned} n = 2: \quad I_2^\Lambda(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\Lambda dp \frac{p}{p^2 + z} = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{\Lambda^2 + z}{z} \xrightarrow{\Lambda \gg 1} \frac{1}{4\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{z} \\ n = 3: \quad I_3^\Lambda(z) &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\Lambda dp \frac{p^2}{p^2 + z} = \\ &= \frac{\Lambda}{2\pi^2} - \frac{\sqrt{z}}{2\pi^2} \arctan \frac{\Lambda}{\sqrt{z}} \xrightarrow{\Lambda \gg 1} \frac{\Lambda}{2\pi^2} - \frac{\sqrt{z}}{4\pi}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

### 3.2 Regolarizzazione dimensionale

Lo scopo di questa tecnica è esprimere il risultato dell'integrale in funzione della dimensione  $n$ . A tal fine, consideriamo  $n$  come una variabile continua; infatti, come chiariremo a breve, l'integrale in dimensioni non intere non diverge. Questo ci permette di tornare al caso discreto prendendo il limite per  $n$  che tende ad un valore intero. L'integrale  $I_n(z)$  può essere riscritto in coordinate sferiche  $n$ -dimensionali come

$$I_n(z) = \int \frac{d\Omega^{n-1}}{(2\pi)^n} \int dp \frac{p^{n-1}}{p^2 + z} = \frac{z^{n/2-1}}{2} \int \frac{d\Omega^{n-1}}{(2\pi)^n} \int dx \frac{x^{n/2-1}}{x+1}. \quad (3.10)$$

Utilizziamo le seguenti relazioni

$$\int \frac{d\Omega^{n-1}}{(2\pi)^n} = \frac{2\pi^{n/2}}{(2\pi)^n \Gamma(\frac{n}{2})}, \quad \int_0^\infty dx \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \quad (3.11)$$

Dunque

$$I_n(z) = (4\pi)^{n/2} z^{n/2-1} \Gamma(1 - \frac{n}{2}). \quad (3.12)$$

Poiché  $\Gamma(1+z)$  ha poli per  $z$  intero negativo, considerando valori di  $n$  non interi si riescono ad evitare le divergenze. Inoltre anche per  $n$  dispari non si ha divergenza.

Dunque mandiamo al continuo la dimensione  $n$ , in particolare  $n \rightarrow 2 - 2\epsilon$  e  $n \rightarrow 3 - 2\epsilon$ .

$$\begin{aligned} I_2^\epsilon(z) &= \frac{1}{4\pi} \left( \frac{4\pi}{z} \right)^\epsilon \Gamma(\epsilon) = \frac{1}{4\pi} \left[ 1 + \epsilon \ln \frac{4\pi}{z} + O(\epsilon^2) \right] \left[ -\gamma + \frac{1}{\epsilon} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{1}{\epsilon} - \gamma + \ln \frac{4\pi}{z} + O(\epsilon) \right] \\ I_3^\epsilon(z) &= (4\pi)^{-3/2} \sqrt{z} \Gamma(-\frac{1}{2} + \epsilon) \left( \frac{z}{4\pi} \right)^\epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} -\frac{\sqrt{z}}{4\pi}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

L'applicazione di questa tecnica nel caso tridimensionale elimina completamente la divergenza. Nel caso bidimensionale la divergenza logaritmica in  $\Lambda$  persiste, trasformandosi in una divergenza di ordine  $\epsilon^{-1}$ . Quest'ultima è una peculiarità della regolarizzazione dimensionale. Per stabilire una relazione tra  $\Lambda$  e  $\epsilon$  è possibile manipolare l'equazione (3.13) ottenendo  $I_2^\epsilon \sim \frac{1}{4\pi} \ln \left( \frac{4\pi}{z} e^{-\gamma+1/\epsilon} \right)$ , espressione analoga alla (3.9).

Usiamo i risultati ottenuti per sviluppare la (3.7), sostituendo  $-k^2 - i\epsilon$  al posto di  $z$ :

$$\begin{aligned} n = 2 : \quad mv\psi(0) &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{mv} + \frac{1}{\pi} \ln \frac{\Lambda}{\mu} - \frac{1}{\pi} \ln \frac{k}{\mu} + \frac{i}{2} \right)^{-1} \\ n = 3 : \quad mv\psi(0) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left( \frac{1}{mv} + \frac{1}{\pi^2} \Lambda + \frac{ik}{2\pi} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Dove  $\mu$  è solamente un punto scelto in modo opportuno per permetterci di spezzare il logaritmo. A questo punto definiamo la **costante di accoppiamento**  $g$  come

$$\begin{aligned} n = 2 : \quad \frac{1}{g} &= \frac{1}{mv} + \frac{1}{\pi} \ln \frac{\Lambda}{\mu} \\ n = 3 : \quad \frac{1}{g} &= \frac{1}{mv} + \frac{1}{\pi^2} \Lambda. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Possiamo riscrivere la (3.14) come

$$\begin{aligned} n = 2 : \quad mv\psi(0) &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{g} - \frac{1}{\pi} \ln \frac{k}{\mu} + \frac{i}{2} \right)^{-1} \\ n = 3 : \quad mv\psi(0) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left( \frac{1}{g} + \frac{ik}{2\pi} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Ora è chiaro il ruolo di  $v$ : affinché  $g$  sia finito,  $\frac{1}{v}$  deve divergere con lo stesso ordine di  $\ln \Lambda (n=2), \Lambda (n=3)$ , ma con segno opposto, in modo che le due divergenze si compensino a vicenda. Ora dobbiamo mettere in relazione  $g$  con una grandezza misurabile: la lunghezza di diffusione.

La (3.5) nello spazio delle posizioni è la seguente

$$\psi(\vec{r}) = \frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}}{(2\pi)^{n/2}} + 2mvG_k(r)\psi(0) \quad (3.17)$$

dove  $G_k(r)$  è la funzione definita in (2.27) (sarebbe  $G_k(r, r')$  ma sotto l'integrale il potenziale forza  $r' = 0$ ).

Il procedimento per calcolare la soluzione in  $n = 3$  è analogo a quanto fatto nel paragrafo 2.5, il calcolo per  $n = 2$  è riportato in appendice C.

$$\begin{aligned} n = 2 : \quad G_k(r) &= -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(kr) \xrightarrow{r \text{ grande}} -\frac{1}{2\sqrt{2\pi kr}} e^{ikr + \pi/4} \\ n = 3 : \quad G_k(r) &= -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Dove  $H_0^{(1)}$  è la funzione di Henkel del primo tipo di ordine zero. D'ora in avanti esamineremo solo il caso tridimensionale. Quindi nel limite  $r$  grande otteniamo

$$n = 3 : \quad \psi(\vec{r}) \rightarrow \frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}}{(2\pi)^{3/2}} - \frac{mv}{2\pi} \psi(0) \frac{e^{ikr}}{r} = \frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}}{(2\pi)^{3/2}} + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r}, \quad (3.19)$$

da cui, usando la (3.16)

$$n = 3 : \quad f(\theta) = -(2\pi)^{1/2} mv \psi(0) = -\left(\frac{2\pi}{g} + ik\right)^{-1}. \quad (3.20)$$

Nell'espressione appena ricavata non c'è dipendenza da  $\theta$ , quindi usando la definizione di ampiezza d'onda data in (2.55), tutti i termini per  $l \neq 0$  sono nulli. Quando abbiamo analizzato lo scattering a basse energie eravamo arrivati alla conclusione che lo sfasamento dipendeva principalmente dalla diffusione in onda S; con questo specifico potenziale l'approssimazione è esatta. Dunque

$$-\left(\frac{2\pi}{g} + ik\right)^{-1} = \frac{1}{k \cot \delta_0 - ik}. \quad (3.21)$$

Usando la definizione di lunghezza di diffusione  $a_s$  data in (2.70),

$$k \cot \delta_0 = -\frac{2\pi}{g} = -\frac{1}{a_s}. \quad (3.22)$$

Abbiamo raggiunto l'obiettivo prefissato: stabilire una connessione tra un parametro teorico e una grandezza misurabile sperimentalmente. Il successo della regolarizzazione degli integrali e l'ottenimento di una costante finita (sappiamo essere finita in quanto può essere misurata sperimentalmente a partire da  $a_s$ ) derivano dalla natura intrinsecamente non divergente degli integrali stessi. In realtà, la natura non presenta potenziali a  $\delta$ ; piuttosto, i potenziali reali, a causa dei limiti della nostra risoluzione sperimentale, possono assumere l'aspetto di una  $\delta$ . L'utilizzo di un potenziale a  $\delta$  rappresenta pertanto un'approssimazione necessaria. Il parametro regolatore  $\Lambda$ , che in unità naturali ha le dimensioni dell'inverso di una lunghezza, può essere interpretato come l'inverso della portata del potenziale  $R$ . Se  $R \rightarrow 0$  allora  $\Lambda \rightarrow \infty$ , facendo divergere l'integrale. La definizione della costante di accoppiamento  $g$  ha svolto un ruolo cruciale nel celare tali divergenze e nel descrivere la realtà fisica su scale spaziali accessibili sperimentalmente pur in assenza di una conoscenza completa del potenziale reale.

## Capitolo 4

# Conclusioni

In conclusione, la teoria dello scattering, come delineata in questa tesi, si è rivelata un potente strumento matematico per la descrizione e la previsione del comportamento delle particelle durante l'interazione con un potenziale. In particolare, l'analisi dettagliata dello scattering in presenza di un potenziale a delta di Dirac ha evidenziato come la forza di questa teoria risieda nella sua capacità di fornire previsioni accurate anche in assenza di una conoscenza completa del potenziale stesso. Questo risultato introduce un concetto fondamentale in fisica, noto come "separazione di scala". In sostanza, anche senza conoscere nel dettaglio il comportamento e i costituenti di un sistema su scale inaccessibili alla risoluzione sperimentale, è possibile ottenere una descrizione efficace del sistema su scale più grandi. Per raggiungere questo obiettivo, è cruciale poter incapsulare tutte le informazioni inaccessibili in una grandezza fisica (come, ad esempio, una costante di accoppiamento) e disporre di una teoria che non richieda una conoscenza dettagliata di tali informazioni, ma che possa basarsi su tale grandezza per fornire previsioni affidabili.

### Appendice A: Relazione di unitarietà

Calcoliamo il flusso di probabilità  $\vec{j}$  della funzione d'onda definita in (2.51), in unità naturali:

$$\vec{j} = -\frac{i}{2m} (\psi^* \cdot \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*). \quad (.1)$$

Dove l'operatore  $\nabla$  è calcolato in coordinate sferiche. Non abbiamo dipendenza dalla coordinata polare  $\varphi$ ; la dipendenza dalla coordinata azimuthale  $\theta$  è solo in  $P_l$ , e poiché i polinomi di Legendre sono reali anche la componente  $j_\theta = 0$ . Dobbiamo calcolare solo la componente radiale del flusso (si poteva giungere immediatamente a questa conclusione poiché le onde sferiche si propagano in direzione radiale).

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial r} &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_l (2l+1) \frac{P_l}{2ik} \left[ -S_l \left( \frac{1}{r} - ik \right) \frac{e^{ikr}}{r} + \left( \frac{1}{r} + ik \right) \frac{e^{-i(kr-l\pi)}}{r} \right] \equiv \\ &\equiv \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_l (2l+1) \frac{P_l}{2ik} G_l \\ \psi^* &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_l (2l+1) \frac{P_l}{-2ik} \left[ S_l^* \frac{e^{-ikr}}{r} - \frac{e^{i(kr-l\pi)}}{r} \right] \equiv \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_l (2l+1) \frac{P_l}{-2ik} F_l^*. \end{aligned} \quad (.2)$$

Calcoliamo il flusso di probabilità

$$\vec{j} = -\frac{i}{2m} \frac{1}{(2\pi)^3 4k^2} \sum_l \sum_{l'} (2l+1)(2l'+1) P_l P_{l'} [F_{l'}^* G_l - F_l G_{l'}] \hat{r}. \quad (.3)$$

Poiché l'integrale (2.52) deve essere valido per ogni superficie integriamo su una superficie sferica di raggio  $R$ :

$$\begin{aligned} \int_{S(R)} \vec{j} \cdot \hat{n} ds &= \frac{CR^2}{k^2} \sum_l \sum_{l'} (2l+1)(2l'+1) [F_{l'}^* G_l - F_l G_{l'}] \int d\Omega P_l P_{l'} = \\ &= \frac{4\pi CR^2}{k^2} \sum_l (2l+1) [F_l^* G_l - F_l G_l^*]. \end{aligned} \quad (.4)$$

Dove abbiamo raccolto tutti i termini costanti in  $C$ . Calcoliamo il prodotto  $F_l^* G_l$

$$\begin{aligned} F_l^* G_l &= -|S_l|^2 \left[ \frac{1}{r} - ik \right] \frac{1}{r^2} - \left[ \frac{1}{r} + ik \right] \frac{1}{r^2} + \\ &+ S_l \left[ \frac{1}{r} - ik \right] \frac{e^{ikr}}{r^2} e^{i(kr-l\pi)} + S_l^* \left[ \frac{1}{r} + ik \right] \frac{e^{-ikr}}{r^2} e^{-i(kr-l\pi)}. \end{aligned} \quad (.5)$$

Notiamo che  $F_l^* G_l - F_l G_l^* = 2\text{Im} [F_l^* G_l] = -2ik (1 - |S_l|^2)$ .

Poiché il modulo quadro della funzione d'onda non dipende dal tempo l'integrale (.3) deve essere nullo per la conservazione della probabilità. Otteniamo

$$\sum_l (2l+1)(1 - |S_l(k)|^2) = 0. \quad (.6)$$

Questo deve essere vero per ogni  $k$  e per ogni forma funzionale di  $S_l$  indotta dal potenziale, quindi deve valere per per ogni  $l$ . Dunque  $|S_l|^2 = 1$ .

### Appendice B: Codice MATHEMATICA per calcolare $a_s$

Si ricorda che  $z = kr$ . Nell'ultimo passaggio si ottiene lo sviluppo per  $\cot(\delta_0)$ , bisogna quindi moltiplicare per  $kR$  e ridefinire la costante  $a = aR$  per ottenere la (2.70).

```

j[z_] := SphericalBesselJ[0, z]
n[z_] := SphericalBesselY[0, z]
δ[z_] := Assuming[{a ∈ ℝ, a ≠ 0, b ∈ ℝ, b ≠ 0}, -az]
B[z_] := (j'[z] cos[δ[z]] - n'[z] sin[δ[z]]) /
          (j[z] cos[δ[z]] - n[z] sin[δ[z]])
cot[z_] := (zn'[z] - B[z]n[z]) /
           (zj'[z] - B[z]j[z])
Series[B[z], {z, 0, 3}]
Series[cot[z], {z, 0, 3}]

```

### Appendice C: Risoluzione equazione di Helmholtz 2-D

Dimostriamo che la funzione definita in (2.27) è la funzione di Green che risolve l'equazione di Helmholtz nella dimensione appropriata.

$$(\nabla^2 + k^2)G_k(\vec{r}) = \delta(\vec{r}). \quad (.7)$$

Infatti applicando la (.7) a  $G_k(\vec{r}) = \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \frac{e^{i\vec{p} \cdot \vec{r}}}{k^2 - p^2 + i\epsilon}$  otteniamo

$$\int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} (\nabla^2 + k^2) \frac{e^{i\vec{p} \cdot \vec{r}}}{k^2 - p^2 + i\epsilon} = \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} (k^2 - p^2) \frac{e^{i\vec{p} \cdot \vec{r}}}{k^2 - p^2 + i\epsilon} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \delta^{(n)}(\vec{r}). \quad (.8)$$

Troviamo la  $G_k$  nel caso bidimensionale. Usando l'antitrasformata di Fourier sostituiamo nella (.7) la seguente  $G_k(r) = \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} \hat{G}_k(q)$ . ottenendo

$$\int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} (-q^2 + k^2) \hat{G}_k(q) e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} = \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}}. \quad (.9)$$

Che ha la seguente soluzione

$$\hat{G}_k(q) = -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{q^2 - k^2 \pm i\epsilon}. \quad (.10)$$

Per trovare  $G_k$  dobbiamo integrare la trasformata nello spazio di Fourier; scegliamo la base  $\vec{q} = \xi \hat{e}_x + \eta \hat{e}_y$  in modo da avere  $\vec{r} = r \hat{e}_x$ . In questo modo l'integrale può essere scritto come

$$G(\vec{r}) = -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \frac{e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}}}{q^2 - k^2 \pm i\epsilon} \equiv -\int d\xi e^{i\xi r} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int d\eta \frac{1}{\eta^2 - (k^2 - \xi^2 \pm i\epsilon)}. \quad (.11)$$

Risolviamo l'integrale in  $d\eta$  con il teorema dei residui avendo cura di svolgere separatamente i casi  $|\xi| < |k|$  e  $|\xi| > |k|$ . Si fa il limite per  $\epsilon \rightarrow 0$ . Si ottiene

$$\begin{aligned}
G_k^\pm(r) &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \left[ \int_{|\xi| < |k|} d\xi \frac{e^{i\xi r}(2\pi i)}{2k\sqrt{k^2 - \xi^2}} \mp \int_{|\xi| > |k|} d\xi \frac{e^{i\xi r}2\pi}{2\sqrt{\xi^2 - k^2}} \right] \\
&= -\frac{i}{4} \left[ \frac{2}{\pi} \int_0^k d\xi \frac{\cos(\xi r)}{\sqrt{k^2 - \xi^2}} \pm \frac{2i}{\pi} \int_k^\infty d\xi \frac{\cos(\xi r)}{\sqrt{\xi^2 - k^2}} \right] = \\
&= -\frac{i}{4} \left[ \frac{2}{\pi} \int_0^1 du \frac{\cos(kru)}{\sqrt{1 - u^2}} + \frac{2i}{\pi} \int_1^\infty du \frac{\cos(kru)}{\sqrt{u^2 - 1}} \right] = \\
&= -\frac{i}{4} [J_0(kr) \mp iY_0(kr)].
\end{aligned} \tag{.12}$$

Dove  $J_0$  e  $Y_0$  sono le funzioni di Bessel rispettivamente del primo e del secondo tipo all'ordine zero. Nel limite per  $r$  grande  $G_k^\pm(r) \rightarrow -\frac{1}{2\sqrt{2\pi kr}} e^{\pm ikr + \pi/4}$ . Dunque chiaramente una soluzione rappresenta un'onda uscente, e l'altra un'onda entrante. Poiché ci aspettiamo in seguito allo scattering di avere una diffusione dal centro di propagazione verso l'esterno, la soluzione fisica a cui siamo interessati è

$$G_k(r) = -\frac{i}{4} [J_0(kr) + iY_0(kr)] = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(kr). \tag{.13}$$



# Bibliografia

- [1] Jun John Sakurai, Jim Napolitano, *Meccanica Quantistica Moderna*, Terza edizione, Zanichelli, 2021. Capitolo 6: Teoria della diffusione, Paragrafo 3.11.4: Elementi di matrice di operatori tensoriali; teorema di Wigner-Eckart.
- [2] R. Jackiw, *Delta function potentials in two-dimensional and three-dimensional quantum mechanics*, MIT-CTP-1937, pp. 35–53, Gennaio 1991.