

**Aufgabe 1.** Es gilt eine surjektive Funktion von  $S_n$  in die Menge  $P$  aller Partitionen von  $\{1, \dots, n\}$  zu konstruieren.

Beobachtung: Zerlegt man ein  $\pi \in S_n$  in disjunkte Zyklen  $z_1, \dots, z_m$  und interpretiert man die Zyklen  $z = (k_1 \dots k_j)$  als  $\bar{z} = \{k_1, \dots, k_j\}$  so ergibt  $\{\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m\}$  eine Menge von Mengen die  $\in P$  ist. Beweis: Zu zeigen ist, dass für  $\{\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m\}$  die Bedingungen einer Partition gelten. Nach der Definition von Zyklen gilt  $\bar{z}_i \in \mathcal{P}(\{1, \dots, n\})$ ,  $\bar{z}_i \neq \emptyset$  und  $\bar{z}_1 \cup \dots \cup \bar{z}_m = \{1, \dots, n\}$ . Weiters gilt  $\bar{z}_i \cap \bar{z}_j = \emptyset$  für  $i \neq j$  nachdem die Zyklen disjunkt sind.

Die gesuchte Funktion geht gemäß der obigen Beobachtung vor. Diese Funktion ist surjektiv, für alle  $p \in P$  gibt es ein  $\pi \in S_n$  mit  $f(\pi) = p$ , nachdem für den Inhalt einer beliebigen Partition  $p = \{u_1, \dots, u_k\} \in P$  und für (gemäß der obigen Ausführungen uminterpretierten) disjunkte Zyklen gleiche Bedingungen gelten. Die Funktion ist allerdings nicht injektiv, nachdem zwei verschiedene Zyklen — etwa  $(1\ 2\ 3)$  und  $(1\ 3\ 2)$  — zur gleichen Menge uminterpretiert werden.

**Aufgabe 2.** Könnte kein Topf leer sein, so würde es  $\binom{n}{k}$  Möglichkeiten zur Aufteilung geben. Nachdem dies nicht der Fall ist, muss  $\binom{n}{k}$  (keine leeren Töpfe),  $\binom{n}{k-1}$  (ein leerer Topf),  $\binom{n}{k-2}$  (zwei leeren Töpfe),  $\dots, \binom{n}{k-k}$  ( $k$  leere Töpfe) berechnet und summiert werden.

**Aufgabe 3.** Wenn die Reihenfolge der Bücher irrelevant wäre, so würde  $\binom{n+k-1}{k-1}$  die Anzahl der Möglichkeiten modellieren, sie zu platzieren. Man denke die Böden zu „Separatoren“ um. Dann gibt es für  $k$  Böden immer  $k-1$  Separatoren, weil der erste Separator zwischen dem ersten und zweiten (und nicht unter dem ersten) „Stock“ liegt. Im Kontext des Binomialkoeffizienten gibt es dann insgesamt  $n+k-1$  mögliche Positionen zwischen denen  $k-1$  Separatoren verschoben werden können.

| n | k   | $\binom{n+k-1}{k-1}$ | n | k   | $\binom{n+k-1}{k-1}$ |     |
|---|-----|----------------------|---|-----|----------------------|-----|
| 1 | 1   | 1                    | 2 | 1   | 1                    |     |
| 1 | 2   | 2                    | 2 | 2   | 3                    |     |
| 1 | 3   | 3                    | 2 | 3   | 6                    | ... |
| 1 | 4   | 4                    | 2 | 4   | 10                   |     |
|   | ... |                      |   | ... |                      |     |

Nachdem die Reihenfolge der Bücher relevant ist, muss dieser Wert noch um die Anzahl der möglichen Permutationen der Menge der Bücher,  $|S_n| = n!$ , skaliert werden.