

**Aufgabe 1.** Wegen  $0 \leq a_k$  ist  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  monoton wachsend. Nach Annahme divergiert  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ , somit ist sie unbeschränkt. Wegen  $a_k \leq b_k$  gilt  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ , damit muss auch  $b_k$  unbeschränkt und somit divergent sein.

**Aufgabe 2.** Nach Annahme ist  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  konvergent. Demnach muss auch  $\sum_{k=1}^{\infty} 2|a_k|$  konvergent sein. Wegen  $0 \leq a_k + |a_k| \leq 2|a_k|$  ist gemäß des Majorantenkriteriums  $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + |a_k|)$  konvergent. Dann ist auch  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + |a_k|) - \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  konvergent, weil es die Differenz zweier konvergenter Reihen ist.

### Aufgabe 3.

- a) Wegen  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2k^2+1}{3k(k+1)} = \frac{2}{3} \neq 0$  ist die Reihe divergent.  
 b)  
 c)  
 d) (Harmonische Reihe<sup>1</sup>.) Angenommen die Reihe konvergiert mit

$$H = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots$$

Dann ist mit

$$\begin{aligned} H &\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \dots \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \\ &\geq \frac{1}{2} + H \end{aligned}$$

ein Widerspruch gegeben.

### Aufgabe 4.

$$\begin{aligned} \sum \frac{4}{4k^2-1} &= 4 \sum \frac{1}{4k^2-1} \\ \frac{1}{4k^2-1} &= \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k+2} \\ &\sum \left( \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k+2} \right) \\ &= \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) + \left( \frac{1}{6} - \frac{1}{10} \right) + \left( \frac{1}{10} - \frac{1}{14} \right) + \dots + \left( \frac{1}{4n-6} - \frac{1}{4n-2} \right) + \left( \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4n+2} \\ \lim \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4n+2} \right) &= \frac{1}{2} \\ \sum \frac{4}{4k^2-1} &= 4 \cdot \frac{1}{2} = 2 \end{aligned}$$

<sup>1</sup><https://web.williams.edu/Mathematics/lg5/harmonic.pdf>

**Aufgabe 5.** Seien  $\sum a_k$  und  $\sum b_k$  zwei Reihen mit den Partialsummen  $(s_n)$  und  $(t_n)$  derart, dass es ein  $N$  mit  $a_k = b_k$  für alle  $k \geq N$  gibt. Dann gilt

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_{N-1} + \sum_{k=N}^n a_k$$

und

$$\begin{aligned} t_n &= \sum_{k=1}^n b_k = b_1 + b_2 + \cdots + b_{N-1} + \sum_{k=N}^n a_k \\ &= s_n - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{N-1}) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_{N-1}). \end{aligned}$$

Angenommen  $\sum b_k$  konvergiert, es gibt also  $\lim t_n = t$ . Dann sei

$$c = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{N-1}) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_{N-1})$$

eine von  $n$  unabhängige Konstante. Nun gilt

$$\begin{aligned} t_n &= s_n - c \\ \lim t_n &= \lim s_n - c \\ \lim s_n &= t + c, \end{aligned}$$

also konvergiert auch  $(s_n)$  bzw.  $\sum a_k$ .

**Aufgabe 6.**

- a) Wegen  $\lim \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 \neq 0$  ist die Reihe divergent.
- b) Wegen  $\lim \left( n - \frac{(n^2+n+1)}{n} \right) = -1 \neq 0$  ist die Reihe divergent.
- c) Wegen  $\lim \left| \frac{n!}{n^{2n}} \right|^{\frac{1}{n}} = \lim \frac{\sqrt[n]{n!}}{n^2} = 0 < 1$  ist die Reihe konvergent.

**Aufgabe 7.**

a)

$$\lim \left| \frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n} \right| = \lim \left| \frac{(n+1)!x}{n!} \right| = |x| \lim \left| \frac{(n+1)!}{n!} \right| = |x|\infty$$

Konvergenzradius ist 0.

b)

$$\lim \left| \frac{(n+2)(n+3)\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1}}{(n+1)(n+2)\left(\frac{x}{2}\right)^n} \right| = \lim \left| \frac{(n+3)\left(\frac{x}{2}\right)}{n+1} \right| = \left| \frac{x}{2} \right| \lim \left| \frac{n+3}{n+1} \right| = \left| \frac{x}{2} \right|$$

Konvergenzradius ist 2.

c)

$$\lim \left| \frac{x^n}{(\ln(n))^n} \right|^{\frac{1}{n}} = \lim \left| \frac{x}{\ln(n)} \right| = |x| \lim \left| \frac{1}{\ln(n)} \right| = 0$$

Konvergenzradius ist  $\infty$ .

**Aufgabe 8.**