

**Aufgabe 1**

a)  $(1\ 5\ 6\ 4\ 8\ 9)(2\ 7\ 2)$

b)  $(1\ 9\ 2\ 6\ 3\ 7\ 8\ 4)$

c) Sei  $\pi = (c_1\ c_2\ \dots\ c_k)$  ein beliebiger Zyklus. Es gilt  $\pi(c_i) = c_{i+1}$  und  $\pi^{-1}(c_{i+1}) = c_i$ , also  $\pi^{-1} = (c_k\ c_{k-1}\ \dots\ c_1)$ . Konkret gilt nun

$$\pi = (1\ 3\ 7\ 2\ 5\ 4)$$

$$\pi^{-1} = (4\ 5\ 2\ 7\ 3\ 1)$$

$$\pi^{-2} = (1\ 3\ 7\ 2\ 5\ 4)$$

$$\pi^{-3} = (4\ 5\ 2\ 7\ 3\ 1)$$

d) Es gilt

$$(1\ 3\ 7\ 2\ 5\ 4)^2 = (1\ 7\ 5)(3\ 2\ 4)$$

$$(1\ 3\ 7\ 2\ 5\ 4)^3 = (1\ 5\ 7)(2\ 3\ 4)$$

$$(1\ 3\ 7\ 2\ 5\ 4)^4 = (1\ 7\ 5)(3\ 2\ 4)$$

$$(1\ 3\ 7\ 2\ 5\ 4)^5 = (1\ 5\ 7)(2\ 3\ 4)$$

...

$$(1\ 3\ 7\ 2\ 5\ 4)^{1000} = (1\ 7\ 5)(3\ 2\ 4).$$

**Aufgabe 2**

a) Man wähle aus  $S_2$  die Permutation  $(\frac{1}{2}\ \frac{2}{1})$ . Diese Permutation besteht nur aus dem Zyklus (12), müsste aber gemäß der gegebenen Aussage aus mindestens zwei Zyklen bestehen.

b) Eine Permutation  $\pi \in S_n$  sei in disjunkte Zyklen zerlegt. Die Summe der Längen dieser Zyklen ist  $n$ , nachdem sie disjunkt sind. Die kleinste Länge eines Zyklus ist 1. Somit kann  $\pi$  in höchstens  $n$  disjunkte Zyklen zerlegt werden.

c) Man wähle aus  $S_2$  die Permutation  $\pi = (\frac{1}{2}\ \frac{2}{1})$  mit dem Zyklus (12). Die Permutation  $\pi^2 = (\frac{1}{1}\ \frac{2}{2})$  besteht aus den disjunkten Zyklen (1)(2). Somit besteht  $\pi$  aus weniger Zyklen als  $\pi^2$ .

d) Es gelte  $\pi \in S_n$ . Es gibt nun disjunkte Zyklen  $c_1, c_2, \dots, c_k$  derart, dass  $\pi = c_1 c_2 \dots c_k$  und  $\pi^2 = c_1^2 c_2^2 \dots c_k^2$ . Ist  $c$  ein Zyklus so besteht  $c^2$  aus mindestens einem Zyklus. Somit sind in  $\pi^2$  mindestens so viele Zyklen wie in  $\pi$  enthalten, in anderen Worten besteht  $\pi$  aus höchstens so vielen disjunkten Zyklen wie  $\pi^2$ .

**Aufgabe 3**

1. Zu zeigen ist  $\forall x, y, z \in G : (x * y) * z = x * (y * z)$ . (Assoziativität.)

Seien  $(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2) \in G$  beliebig. Es gilt

$$\begin{aligned} & ((a_1, a_2) * (b_1, b_2)) * (c_1, c_2) = \\ & (a_1 b_1 - a_2 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1) * (c_1, c_2) = \\ & ((a_1 b_1 - a_2 b_2) c_1 - (a_1 b_2 + a_2 b_1) c_2, (a_1 b_1 - a_2 b_2) c_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) c_1) = \\ & ((a_1 b_1 c_1 - a_2 b_2 c_1) - (a_1 b_2 c_2 + a_2 b_1 c_2), (a_1 b_1 c_2 - a_2 b_2 c_2) + (a_1 b_2 c_1 + a_2 b_1 c_1)) = \\ & (a_1 b_1 c_1 - a_2 b_2 c_1 - a_1 b_2 c_2 - a_2 b_1 c_2, a_1 b_1 c_2 - a_2 b_2 c_2 + a_1 b_2 c_1 + a_2 b_1 c_1) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & (a_1, a_2) * ((b_1, b_2) * (c_1, c_2)) = \\ & (a_1, a_2) * (b_1 c_1 - b_2 c_2, b_1 c_2 + b_2 c_1) = \\ & (a_1(b_1 c_1 - b_2 c_2) - a_2(b_1 c_2 + b_2 c_1), a_1(b_1 c_2 + b_2 c_1) + a_2(b_1 c_1 - b_2 c_2)) = \\ & ((a_1 b_1 c_1 - a_1 b_2 c_2) - (a_2 b_1 c_2 + a_2 b_2 c_1), (a_1 b_1 c_2 + a_1 b_2 c_1) + (a_2 b_1 c_1 - a_2 b_2 c_2)) = \\ & (a_1 b_1 c_1 - a_1 b_2 c_2 - a_2 b_1 c_2 - a_2 b_2 c_1, a_1 b_1 c_2 + a_1 b_2 c_1 + a_2 b_1 c_1 - a_2 b_2 c_2) \end{aligned}$$

und somit

$$((a_1, a_2) * (b_1, b_2)) * (c_1, c_2) = (a_1, a_2) * ((b_1, b_2) * (c_1, c_2)).$$

2. Zu zeigen ist  $\exists e \in G : \forall x \in G : x * e = e * x = x$ . (Neutralelement.)

Für  $e = (1, 0)$  und beliebige  $(a, b) \in G$  gilt

$$\begin{aligned} (a, b) * (1, 0) &= (1, 0) * (a, b) = (a, b) \\ (a - 0, 0 + b) &= (a - 0, 0 + b) = (a, b). \end{aligned}$$

3. Zu zeigen ist  $\forall x \in G : \exists y \in G : x * y = y * x = e$ , wobei  $e \in G$  das Neutralelement ist. (Invertierbarkeit.)

Für beliebige  $(a, b) \in G$  gebe es ein  $c \in G$  derart, dass

$$(a, b) * c = c * (a, b) = (1, 0).$$

Man wähle

$$c = \left( \frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right),$$

nun gilt

$$\begin{aligned} (a, b) * \left( \frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right) &= \left( \frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right) * (a, b) = (1, 0) \\ \left( \frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2}, \frac{ab}{a^2 + b^2} - \frac{ab}{a^2 + b^2} \right) &= (1, 0) \\ \left( \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2}, \frac{ab - ab}{a^2 + b^2} \right) &= (1, 0) \\ (1, 0) &= (1, 0). \end{aligned}$$