Aufgabe 1. Sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es ein N derart, dass für alle $n \geq N$ gilt

$$|a - a_n| < e \qquad |a - c_n| < e$$

(Finde N_1 für a_n und N_2 für c_n, dann ist $N = \max(N_1, N_2)$.) Insbesondere gilt jetzt

$$a - \epsilon < a_n \qquad a + \epsilon > c_n$$

und wegen $a_n \leq b_n \leq c_n$ weiters

$$\begin{aligned} a - \epsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < a + \epsilon \\ a - \epsilon < b_n < a + \epsilon \\ -\epsilon < b_n - a < \epsilon \\ |b_n - a| < \epsilon, \end{aligned}$$

also $\lim b_n = a$.

Aufgabe 2.

a)

$$\lim \frac{2n^2 + 3n + 1}{4n^2 - 5n - 1} = \lim \frac{\frac{2n^2+3n+1}{n^2}}{\frac{4n^2-5n-1}{n^2}} = \lim \frac{2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{4 - \frac{5}{n} - \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim 2 + \lim \frac{3}{n} + \lim \frac{1}{n^2}}{\lim 4 - \lim \frac{5}{n} - \lim \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

b)

$$\lim \frac{5n^2 - n + 1}{5n^3 + 5n^2 + 5n - 1} = \lim \frac{\frac{5n^2-n+1}{n^3}}{\frac{5n^3+5n^2+5n-1}{n^3}} = \lim \frac{\frac{5}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{5 + \frac{5}{n} + \frac{5}{n^2} - \frac{1}{n^3}} = \lim \frac{0}{\cdots} = 0$$

c)

$$\begin{aligned} \lim \left(4n - \frac{(2n-1)^2}{n}\right) = \lim \frac{4n^2 - (2n-1)^2}{n} = \lim \frac{4n^2 - 4n^2 + 4n - 1}{n} = \lim \frac{4n-1}{n} \\ = \lim 4 - \frac{1}{n} = 4 \end{aligned}$$

d) Weg falsch?

$$\lim \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \lim \sqrt{n+1} - \lim \sqrt{n} = \sqrt{\lim(n+1)} - \sqrt{\lim n} = \infty - \infty = 0$$

Aufgabe 3.

a) Wegen

$$\frac{n!}{2^n} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 1}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2} = \frac{n}{2} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{2} \cdot \frac{1}{2} \geq \frac{n}{4}$$

haben wir $\frac{n}{4}$ als untere Schranke. Aber $\lim \frac{n}{4} = \infty$ also $\lim \frac{n!}{2^n} = \infty$.

b) Durch

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 1}{n \cdot n \cdot n \cdots n} = 1 \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdots \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}$$

finden wir eine obere Schranke $\lim \frac{1}{n} = 0$. Klarerweise gilt als untere Schranke $\frac{n!}{n^n} > 0$. Also muss $\lim \frac{n!}{n^n} = 0$.

Aufgabe 4.

a)

$$\lim \sqrt{\frac{n+1}{16n+1}} = \sqrt{\lim \frac{n+1}{16n+1}} = \sqrt{\lim \frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{16n+1}{n}}} = \sqrt{\lim \frac{1+\frac{1}{n}}{16+\frac{1}{n}}} = \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$$

b) Wegen

$$\lim \frac{1-n^2}{1-n^3} = \lim \frac{\frac{1-n^2}{n^3}}{\frac{1-n^3}{n^3}} = \lim \frac{\frac{1}{n^3} - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3} - 0} = 0$$

ist auch $\lim (-1)^n \frac{1-n^2}{1-n^3} = 0$.

c)

$$\lim \frac{1+2+\cdots+n}{n^2} = \lim \frac{1}{n^2} + \lim \frac{2}{n^2} + \cdots + \lim \frac{n}{n^2} = 0$$

Aufgabe 5. Wähle $\epsilon = \frac{1}{2}|a|$. Dann

$$|a - a_n| < \epsilon$$
$$|a - a_n| < \frac{1}{2}|a|,$$

für alle n ab einem gewissen N. Folglich muss ab diesen N auch $|a_n|$ grösser als $\frac{1}{2}|a|$ sein, was zu zeigen war.

Aufgabe 6.

a) Für $q = 0$ ist q^n konstant und der Grenzwert trivial. Für $0 < q < 1$ ist q^n monoton fallend und > 0. Für $-1 < q < 0$ ist q^n monoton steigend und < 0. Also $\lim a_n = 0$.

b) $1^n = 1$ also $\lim a_n = 1$.

c) Für alle $t \in \mathbb{R}$ soll für $n \geq N$ gelten, dass $|q^n| \geq t$. Man wähle $N = log_q(t)$, dann ist $|q^N| = t$ und weil q^n monoton steigend ist auch $q^n \geq t$.

d) Man wähle $t = 2$, dann gilt für alle n, dass $(-1)^n \leq 2$, also hat $(-1)^n$ nicht den uneigentlichen Grenzwert ∞.

Aufgabe 7. Sei $\epsilon > 0$ und M eine obere Schranke für (a_n) und (b_n). Für (a_n) und (b_n) gibt es jeweils N_1, N_2 wo für $n \geq N_1, N_2$

$$|a - a_n| < \frac{\epsilon}{2M} \qquad |b - b_n| < \frac{\epsilon}{2M}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} |ab - a_n b_n| &= |(a - a_n)b_n + a(b_n - b)| \\ &\leq |a - a_n||b_n| + |a||b_n - b| \\ &\leq M|a - a_n| + M|b_n - b| \quad M \text{ ist sicher grösser als } |b_n|, |a| \\ &< M\frac{\epsilon}{2M} + M\frac{\epsilon}{2M} = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \end{aligned}$$

Aufgabe 8.

a) Es gilt

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$
$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

weil $\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 1$.

b) Für $n = 0$ gilt

$$(1 + b)^0 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} b^k$$
$$1 = \binom{0}{0} b^0 = 1$$

Angenommen es gilt

$$(1 + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^k,$$

dann gilt

$$\begin{aligned}
(1+b)^{n+1} &= (1+b)^n \cdot (1+b) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^k \cdot (1+b) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} b^k + \binom{n}{n} b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) b^k + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} b^k + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} b^k
\end{aligned}$$

c) Für $n = 1$ gilt $2^0 = 1 < 2$. Sei also $n > 1$, dann

$$\sum_{k=1}^{n} 2^{-(k-1)} = 1 + 2^{-1} + 2^{-2} + \cdots + 2^{-n-1}$$

Es gilt $x^{-y} = \frac{1}{x^y}$, hier also $2^{-n} = \frac{2^{-(n-1)}}{2}$; jedes Glied der Summe ist halb so groß wie das vorhergehende. Die Summe fängt bei 1 an, ist also < 2.