Aufgabe 1. (Sei $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ und (h_n) eine Nullfolge.)

$$\lim f(\tilde{x} + h_n) = \lim |\tilde{x} + h_n| = \begin{cases} \lim(\tilde{x} + h_n) = \tilde{x} + \lim h_n = \tilde{x} \\ \lim(-\tilde{x} - h_n) = -\tilde{x} - \lim h_n = -\tilde{x} \end{cases} = |\tilde{x}| = f(\tilde{x})$$

Aufgabe 2.

Aufgabe 3. Sei x_n eine Folge die auf x konvergiert. Weil f stetig in x ist, konvergiert $(f(x_n))$ gegen $f(x)$. Weil g stetig in $f(x)$ ist, konvergiert $(g(f(x_n)))$ gegen $g(f(x))$. Also ist $g \circ f$ stetig in x.

Aufgabe 4. $f(x) = 0$, überall in $\mathbb{R}$ stetig.

Aufgabe 5. Ist eine Funktion f in x_0 stetig dann gilt: Für alle $\epsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ derart, dass für alle x

$$|x - x_0| < \delta \quad \implies \quad |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

(Definition nach Weierstrass und Jordan.)

Wähle $\epsilon = 1/2$. Zwischen zwei rationalen Zahlen gibt es immer eine irrationale Zahl, also finden wir für beliebig kleine δ mindestens eine irrationale Zahl die einen Sprung $> \epsilon$ verursacht. Zwischen zwei reellen Zahl gibt es immer eine eine rationale Zahl ... selbes Konzept.

Aufgabe 6.

a) Die Vorzeichenfunktion ist in $x = 0$ unstetig, sonst stetig.

b)

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x, & \text{wenn } x \in \mathbb{Q} \\ -x & \text{sonst} \end{cases}$$

ist in $x = 0$ stetig, sonst unstetig.

Aufgabe 7. Es gilt

$$f(xy) = x\,f(y) \qquad\qquad f(yx) = y\,f(x)$$

und somit

$$\begin{aligned} x\,f(y) &= y\,f(x) \\ \frac{f(y)}{y} &= \frac{f(x)}{x}. \end{aligned}$$

Unsere Funktionen sind also notwendigerweise lineare Funktionen $f(x) = cx + d$ für $c, d \in \mathbb{R}$. Klarerweise sind dieses Funktionen wegen

$$\lim f(x + h_n) = \lim(cx + ch_n + d) = cx + d + \lim ch_n = cx = f(x)$$

global stetig.

Aufgabe 8. Nachdem f stetig in einem Punkt x' ist, gilt

$$\lim_{x \to x'} f(x) = f(x').$$

Wir wollen zeigen, dass für beliebige $\tilde{x}$ auch $\lim_{x \to \tilde{x}} f(x) = f(\tilde{x})$ gilt.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to \tilde{x}} f(x) &= \lim_{x \to x'} f(x - x' + \tilde{x}) \\
&= \lim_{x \to x'} (f(x) - f(x') + f(\tilde{x})) \\
&= (\lim_{x \to x'} f(x)) - f(x') + f(\tilde{x}) \\
&= f(x') - f(x') + f(\tilde{x}) \\
&= f(\tilde{x})
\end{aligned}$$

Ist eine additive Funktion stetig in einem beliebigen Punkt, ist sie auch global stetig.