Vektoren

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (u_2 v_3) - (u_3 v_2) \\ (u_3 v_1) - (u_1 v_3) \\ (u_1 v_2) - (v_2 u_1) \end{pmatrix}$$

Die Länge eines Vektors ist $\sqrt{v_1^2 + \ldots v_n^2}$.

Der Vektor $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ ist normal auf die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$. Zwei Vektoren sind dann normal wenn ihr Skalarprodukt null ist.

Die Normalenform einer Ebene E in $\mathbb{R}^3$ ist

$$E = \{ \ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid (\vec{x} - \vec{a})\vec{n} = 0 \ \}$$

mit $\vec{n}$ normal auf $\vec{a}$. Parameterform ist

$$E = \{ \ \vec{a} + \lambda\vec{u} + \sigma\vec{v} \mid \lambda, \sigma \in \mathbb{R}\}$$

wobei a übl. Ortsvektor und u, v ausgehend von a.

Von Gleichungsform $ax + by + cz = d$ einer Ebene auf Normalenform: Normalvektor ist $(a \ b \ c)^T$, dann $\vec{a}$ finden mit $\vec{a}\vec{n} = d$. Von Parameterform in Normalenform: $n = u \times v$, a bleibt. Von Normalenform auf Gleichungsform: Ausrechnen.

Orthogonalisierung einer Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$:

1) $w_1 = v_1$, dann für $i = 2, \ldots, n$
2) $w_i = v_i - (\mathrm{proj}_{w_1}(v_i) + \ldots + \mathrm{proj}_{w_{i-1}}(v_i))$

mit

$$\mathrm{proj}_u(v) = \frac{\langle u, v\rangle}{\langle u, u\rangle} \cdot u$$

(Wenn $v_1, \ldots, v_n$ keine Basis bilden bzw. linear abhängig sind funktioniert es auch, dann ist aber ein $w_i = \vec{0}$. Vektoren w_i können beliebig skaliert werden.)

Vektoren eines Orthogonalsystems sind immer linear unabhängig.

Matrizen

Eine (quadr.) Matrix A ist *singulär* wenn $\det(A) = 0$, also wenn sie nicht invertierbar ist, bzw. ihre Spalten linear abhängig sind. Anderfalls ist sie *regulär*.

$$\det\left(\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}\right) = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$$

Für 3×3:

$$a_{1,1}\begin{pmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} - a_{1,2}\begin{pmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{pmatrix} + a_{1,3}\begin{pmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{pmatrix}$$

Eine Basistransformationsmatrix A_C^B („B ausgedr. durch C“) ist

$$A_C^B = ((v_1)_C \ \cdots \ (v_n)_C)$$

mit $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$.

Alle $v \in K^n \backslash \{\vec{0}\}$ mit

$$A \cdot v = \lambda \cdot v$$

heißen Eigenvektoren, λ sind zugehörige Eigenwerte.

Eigenwerte einer Matrix A sind Nullstellen von

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_n).$$

Algebraische Vielfachheit ist die Potenz der Nullstelle. Dimension des Eigenraums ist geometrische Vielfachheit. Es gilt alg. V. $\geq$ geo. V.

Der Eigenraum zu einem Eigenwert λ ist

$$E_{A,\lambda} = \mathrm{Ker}(A - \lambda E_n)$$
$$\{\vec{v} \mid (A - \lambda E_n) = \vec{0}\}$$

Zur Diagonalisierung (λ sind Eigenwerte, v sind Eigenräume):

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \quad \text{mit}$$
$$P = (v_1, \ldots v_n)$$

Nur möglich wenn für alle Werte alg. V. = geo V.

Zeilen- und Spaltenraum ist die lineare Hülle der Zeilen- bzw. Spaltenvektoren. (Auf Dimension aufpassen!)

Vertauschungsmatrix $T_{i,j}$ vertauscht Zeilen i und j. In Einheitsmatrix Zeilen i u. j. vertauschen. Skalierungsm. $S_i(\lambda)$ skaliert Zeile i mit λ. Additionsmatrix $R_{i,j}(\lambda)$ addiert das λ-fache der Zeile j zur Zeile i. In Einheitsmatrix λ bei (i, j).

Es gilt $\dim Z(A) = \dim S(A) = \mathrm{Rg}(A)$. Alle Nichtnull-Zeilen der Matrix in Zeilenstufenf. bilden Basis von $Z(A)$. Spalten der urspr. Matrix A in denen in Zeilenstufenf. ein Pivot-El. ist sind Basis von $S(A)$. Ausserdem $\dim Z(A) + \dim \mathrm{Ker}(A) = n$ bei $A^{m\times n}$.

$$\dim \mathrm{Ker}(A) = n - \mathrm{Rg}(A)$$
$$\dim \mathrm{Coker}(A) = m - \mathrm{Rg}(A)$$

Strukturen

$\mathbb{Z}_n$ ist dann ein Körper wenn n prim ist. Ein $x \in \mathbb{Z}_n$ ist dann teilbar wenn ggT(n, x) = 1. Die Gleichung

$$ax + by = c$$

hat dann eine Lösung in $\mathbb{N}$ wenn $\mathrm{ggT}(a, b) \mid c$.

In der Menge $\mathbb{Z}_n[x]/(f)$ sind $n^{\deg(f)}$ Elemente. Das multiplikative Inverse eines Elements einer solchen Menge kann durch den EEA ermittelt werden.

Beim EEA gilt

$$u_i = u_{i-2} - (u_{i-1} \cdot q_i)$$

(Selbiges gilt für v.)

Polynome

Für Nullst. von $a_2x^2 + a_1x + a_0$

$$\frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2}$$

Sei $p = a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0$. Wenn p eine Nullstelle $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ besitzt dann $a \,|\, a_0$ und $b \,|\, a_n$. (Bei Polynom in $\mathbb{Z}_n$ ist oft ausprobieren aller möglichen Nullstellen einfacher. Bei Polynom in $\mathbb{Q}$ sind alle Nullst. $\frac{a}{b}$, „erraten“ werden *alle* Nullstellen.)

Hat ein Pol. eine Nullst. n so enthält es den Faktor $(x - n)$. Somit ist es reduzibel. Alles in $\mathbb{C}$ ist reduzibel (kompl. Lösungsformel). Wenn in $\mathbb{Z}_n$ Nullstelle dann reduzibel.