

Aufgabe 1. Es gilt eine surjektive Funktion von S_n in die Menge P aller Partitionen von $\{1, \dots, n\}$ zu konstruieren.

Beobachtung: Zerlegt man ein $\pi \in S_n$ in disjunkte Zyklen z_1, \dots, z_m und interpretiert man die Zyklen $z = (k_1 \dots k_j)$ als $\bar{z} = \{k_1, \dots, k_j\}$ so ergibt $\{\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m\}$ eine Menge von Mengen die $\in P$ ist. Beweis: Zu zeigen ist, dass für $\{\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m\}$ die Bedingungen einer Partition gelten. Nach der Definition von Zyklen gilt $\bar{z}_i \in \mathcal{P}(\{1, \dots, n\})$, $\bar{z}_i \neq \emptyset$ und $\bar{z}_1 \cup \dots \cup \bar{z}_m = \{1, \dots, n\}$. Weiters gilt $\bar{z}_i \cap \bar{z}_j = \emptyset$ für $i \neq j$ nachdem die Zyklen disjunkt sind.

Die gesuchte Funktion geht gemäß der obigen Beobachtung vor. Diese Funktion ist surjektiv, für alle $p \in P$ gibt es ein $\pi \in S_n$ mit $f(\pi) = p$, nachdem für den Inhalt einer beliebigen Partition $p = \{u_1, \dots, u_k\} \in P$ und für (gemäß der obigen Ausführungen uminterpretierten) disjunkte Zyklen gleiche Bedingungen gelten. Die Funktion ist allerdings nicht injektiv, nachdem zwei verschiedene Zyklen — etwa $(1\ 2\ 3)$ und $(1\ 3\ 2)$ — zur gleichen Menge uminterpretiert werden.

Aufgabe 2. Könnte kein Topf leer sein, so würde es $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten zur Aufteilung geben. Nachdem dies nicht der Fall ist, muss $\binom{n}{k}$ (keine leeren Töpfe), $\binom{n}{k-1}$ (ein leerer Topf), $\binom{n}{k-2}$ (zwei leeren Töpfe), $\dots, \binom{n}{k-k}$ (k leere Töpfe) berechnet und summiert werden.

Aufgabe 3. Wenn die Reihenfolge der Bücher irrelevant wäre, so würde $\binom{n+k-1}{k-1}$ die Anzahl der Möglichkeiten modellieren, sie zu platzieren. Man denke die Böden zu „Separatoren“ um. Dann gibt es für k Böden immer $k-1$ Separatoren, weil der erste Separator zwischen dem ersten und zweiten (und nicht unter dem ersten) „Stock“ liegt. Im Kontext des Binomialkoeffizienten gibt es dann insgesamt $n+k-1$ mögliche Positionen zwischen denen $k-1$ Separatoren verschoben werden können.

| n | k | $\binom{n+k-1}{k-1}$ | n | k | $\binom{n+k-1}{k-1}$ | |
|---|-----|----------------------|---|-----|----------------------|-----|
| 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | |
| 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | |
| 1 | 3 | 3 | 2 | 3 | 6 | ... |
| 1 | 4 | 4 | 2 | 4 | 10 | |
| | ... | | | ... | | |

Nachdem die Reihenfolge der Bücher relevant ist, muss dieser Wert noch um die Anzahl der möglichen Permutationen der Menge der Bücher, $|S_n| = n!$, skaliert werden.