

**Aufgabe 1** Wir wissen

$$\begin{aligned}\forall, u_1, v_1 \in U_1 : u_1 \circ v_1 \in U_1 \wedge u_1^{-1} \in U_1 \\ \forall, u_2, v_2 \in U_2 : u_2 \circ v_2 \in U_2 \wedge u_2^{-1} \in U_2.\end{aligned}$$

- a) Zu zeigen ist, dass  $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$  und  $\forall u, v \in U_1 \cap U_2 : u \circ v \in U_1 \cap U_2 \wedge u^{-1} \in U_1 \cap U_2$ .

Ist  $e$  das Neutralelement einer Gruppe  $G$  so gilt für alle Untergruppen  $U$  von  $G$ , dass  $e \in U$ . Demzufolge gilt  $e \in U_1$  und  $e \in U_2$  und weiters  $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ .

Wenn  $u, v \in U_1 \cap U_2$  dann gilt  $u, v \in U_1$  und  $u, v \in U_2$ . Nachdem  $U_1$  und  $U_2$  Untergruppen sind gilt weiters  $u \circ v \in U_1$  und  $u \circ v \in U_2$ . Daraus folgt  $u \circ v \in U_1 \cap U_2$ .

Analog dazu, wenn  $u \in U_1 \cap U_2$  dann gilt  $u \in U_1$  und  $u \in U_2$ . Weiters gilt  $u^{-1} \in U_1$  und  $u^{-1} \in U_2$ . Daraus folgt  $u^{-1} \in U_1 \cap U_2$ .

Demzufolge ist  $U_1 \cap U_2$  eine Untergruppe von  $G$ .

- b) Zu zeigen ist, dass  $U_1 \cup U_2 \neq \emptyset$  und  $\forall u, v \in U_1 \cup U_2 : u \circ v \in U_1 \cup U_2 \wedge u^{-1} \in U_1 \cup U_2$ .

Nachdem  $U_1$  und  $U_2$  Untergruppen sind muss gelten, dass  $U_1 \neq \emptyset$  und  $U_2 \neq \emptyset$ . Demzufolge gilt  $U_1 \cup U_2 \neq \emptyset$ .

Man wähle ein  $u_1 \in U_1 \setminus U_2$  und ein  $u_2 \in U_2 \setminus U_1$ . Es gilt  $u_1, u_2 \in U_1 \cup U_2$ . Unter der Annahme, dass  $U_1 \cup U_2$  eine Untergruppe ist, muss nun gelten, dass

$$u_1 \circ u_2 \in U_1 \cup U_2 \Rightarrow \begin{cases} u_1 \circ u_2 \in U_1 & \text{oder} \\ u_1 \circ u_2 \in U_2 \end{cases}$$

und weiters, nachdem es in einer Untergruppe  $U$  für jedes  $v \in U$  ein  $v^{-1} \in U$  gibt,

$$\begin{aligned}u_1 \circ u_2 \in U_1 &\Rightarrow u_1 \circ u_1^{-1} \circ u_2 \in U_1 \Rightarrow u_2 \in U_1 \\ u_1 \circ u_2 \in U_2 &\Rightarrow u_2 \circ u_2^{-1} \circ u_1 \in U_2 \Rightarrow u_1 \in U_2.\end{aligned}$$

Beide „Implikationsmöglichkeiten“ von  $u_1 \circ u_2 \in U_1 \cup U_2$  führen also zu einem Widerspruch nachdem gilt, dass  $u_1 \notin U_2$  und  $u_2 \notin U_1$ . Demnach ist  $U_1 \cup U_2$  nicht zwingend eine Untergruppe von  $G$ .

(Tatsächlich wurde gezeigt, dass  $U_1 \cup U_2$  nur dann eine Untergruppe von  $G$  ist, wenn entweder für alle  $u_1 \in U_1$  gilt, dass  $u_1 \in U_2$ , oder für alle  $u_2 \in U_2$  gilt, dass  $u_2 \in U_1$  — also wenn  $U_1 \subseteq U_2$  oder  $U_2 \subseteq U_1$ .)

**Aufgabe 2**

- a)  $\langle (1\ 2)(3\ 4) \rangle = \{id, (1\ 2)(3\ 4)\}$   
 b)  $\langle (1\ 2), (3\ 4) \rangle = \{id, (1\ 2), (3\ 4), (1\ 2)(3\ 4)\}$   
 c)  $\langle (1\ 2\ 3\ 4) \rangle = \{id, (1\ 2\ 3\ 4), (4\ 3\ 2\ 1), (1\ 3)(2\ 4)\}$   
 d)  $\langle (1\ 2\ 3\ 4), (1\ 3) \rangle = \{id, (1\ 2\ 3\ 4), (1\ 3), (4\ 3\ 2\ 1), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3), (1\ 2)(3\ 4), (2\ 4)\}$

**Aufgabe 3**

- a)  $\langle (1\ 2\ 3), (4\ 5) \rangle$
- b)  $\langle (1\ 2\ 3\ 4\ 5), (1\ 3\ 5\ 2\ 4) \rangle$
- c)  $\langle (2\ 4)(3\ 5) \rangle$