Aufgabe 1. (Sei $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ und (h_n) eine Nullfolge.)

$$\lim f(\tilde{x} + h_n) = \lim |\tilde{x} + h_n| = \begin{cases} \lim(\tilde{x} + h_n) = \tilde{x} + \lim h_n = \tilde{x} \\ \lim(-\tilde{x} - h_n) = -\tilde{x} - \lim h_n = -\tilde{x} \end{cases} = |\tilde{x}| = f(\tilde{x})$$

Aufgabe 2.

Aufgabe 3. Es gilt

$$\lim_{n\to x} f(n) = f(x) \qquad \text{weil } f \text{ stetig in } x \text{ ist und}$$
$$\lim_{n\to f(x)} g(n) = g(f(x)) \qquad \text{weil } g \text{ stetig in } f(x) \text{ ist.}$$

Wir wollen zeigen, dass $\lim_{n\to x} g(f(n)) = g(f(x))$.

$$\begin{aligned} \lim_{n\to x} g(f(n)) &= \lim_{n\to f(x)} g(n) \\ &= g\left(\lim_{n\to f(x)} n\right) && \text{weil } g \text{ stetig in } f(x) \\ &= g\left(f(x)\right) \end{aligned}$$

Aufgabe 4. $f(x) = 0$, überall in $\mathbb{R}$ stetig.

Aufgabe 5. Ist eine Funktion f in x_0 stetig dann gilt: Für alle $\epsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ derart, dass für alle x

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

(Definition nach Weierstrass und Jordan.)

Wähle ein $\epsilon \leq 1$. Zwischen zwei rationalen Zahlen gibt es immer eine reelle Zahl, also finden wir für beliebig kleine δ-Umgebungen mindestens eine reelle Zahl die einen Sprung mit Distanz 1 (also $\geq \epsilon$) verursacht. Zwischen zwei reellen Zahlen gibt es immer eine eine rationale Zahl ... selbes Argument. (Rationale Zahlen liegen dicht in $\mathbb{R}$.)

Aufgabe 6.

a) Die Vorzeichenfunktion ist in $x = 0$ unstetig, sonst stetig. (Siehe Skript.)

b)

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x, & \text{wenn } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Klarerweise gilt $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$ weil selbiges sowohl für $f_1(x) = x$ und $f_2(x) = 0$ gilt. Also ist f stetig in 0.

Weil aber sowohl die rationalen als auch die irrationalen Zahlen dichte Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind, kann es keinen weiteren Punkt geben an dem die Funktion stetig ist. (Siehe Aufgabe 5.)

Aufgabe 7. Es gilt

$$f(xy) = x\,f(y) \qquad\qquad f(yx) = y\,f(x)$$

und somit

$$\begin{aligned} x\,f(y) &= y\,f(x) \\ \frac{f(y)}{y} &= \frac{f(x)}{x}. \end{aligned}$$

Unsere Funktionen sind also notwendigerweise lineare Funktionen $f(x) = cx + d$ für $c, d \in \mathbb{R}$. Klarerweise sind dieses Funktionen wegen

$$\lim f(x + h_n) = \lim(cx + ch_n + d) = cx + d + \lim ch_n = cx = f(x)$$

global stetig.

Aufgabe 8. Nachdem f stetig in einem Punkt x' ist, gilt

$$\lim_{x\to x'} f(x) = f(x').$$

Wir wollen zeigen, dass für beliebige $\tilde{x}$ auch $\lim_{x\to\tilde{x}} f(x) = f(\tilde{x})$ gilt.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\tilde{x}} f(x) &= \lim_{x\to x'} f(x - x' + \tilde{x}) \\ &= \lim_{x\to x'} (f(x) - f(x') + f(\tilde{x})) \\ &= (\lim_{x\to x'} f(x)) - f(x') + f(\tilde{x}) \\ &= f(x') - f(x') + f(\tilde{x}) \\ &= f(\tilde{x}) \end{aligned}$$

Ist eine additive Funktion stetig in einem beliebigen Punkt, ist sie auch global stetig.