Aufgabe 1.

a) Wir haben $T(n) = 3T(\frac{n}{3}) + n$ mit $T(1) = 1$. Wiederholtes Einsetzen

$$\begin{aligned} T(n) &= 3T\left(\frac{n}{3}\right) + n \\ &= 3 \cdot \left(3T\left(\frac{n}{9}\right) + \frac{n}{3}\right) + n = 9T\left(\frac{n}{9}\right) + 2n \\ &= 9 \cdot \left(3T\left(\frac{n}{27}\right) + \frac{n}{9}\right) + 2n = 27T\left(\frac{n}{27}\right) + 3n \end{aligned}$$

führt zum Schluss, dass

$$T(n) = 3^i \cdot T\left(\frac{n}{3^i}\right) + i \cdot n$$

mit einer maximalen Rekursionstiefe von $\log_3(n)$ nachdem $n/3^{\log_3(n)} = 1$.

Nach Einsetzen dieses Werts bleibt

$$\begin{aligned} T(n) &= 3^{\log_3(n)} \cdot T\left(\frac{n}{3^{\log_3(n)}}\right) + \log_3(n) \cdot n \\ &= n \cdot T(1) + \log_3(n) \cdot n = n + n \cdot \log_3(n). \end{aligned}$$

Die Annahme ist nun, dass $T(n) = O(n \cdot \log_3(n))$. Zu zeigen: Es gibt c, n_0 mit $n + n \cdot \log_3(n) \leq c(n \cdot \log_3(n))$ für alle $n \geq n_0$. Man wähle $c = 2$. Gemäß

$$\begin{aligned} n + n \cdot \log_3(n) &\leq 2(n \cdot \log_3(n)) \\ n &\leq n \cdot \log_3(n) \\ 1 &\leq \log_3(n) \\ 3 &\leq n \end{aligned}$$

gilt $n_0 = 3$. Somit gilt $T(n) = O(n \log_3(n))$ mit $c = 2$ und $n_0 = 3$.

b) Die Induktionsannahme ist $T(n) = n + n \log_3(n)$. Die Induktionsbasis $T(1) = 1 + 1 \cdot \log_3(1) = 1$ gilt. Gemäß

$$\begin{aligned} T(n) &= 3T\left(\frac{n}{3}\right) + n \\ &= 3\left(\frac{n}{3} + \frac{n}{3}\log_3\left(\frac{n}{3}\right)\right) + n \\ &= n + n\log_3\left(\frac{n}{3}\right) + n \\ &= n + n\log_3(n) \end{aligned}$$

gilt nun $T(n) = O(n + n\log_3(n))$.

Aufgabe 2.

a) Wir haben $a = 6, b = 3, n^{\log_3(6)} = n^{1.631\ldots}$ und $f(n) = n^2 \log(n)$. Es gilt $f(n) = \Omega(n^{\log_3(6)+\epsilon})$ nachdem es $c, n_0, \epsilon > 0$ gibt derart, dass

$$n^2 \log(n) \geq c \cdot n^{\log_3(6)+\epsilon}$$

für alle $n > n_0$. (Etwa für $c \leq \log(n)$ und $0 < \epsilon \leq (2 - \log_3(6))$ ab $n_0 = 0$.)

Ebenso gibt es ein $c < 1$ derart, dass

$$a\left(f\left(\frac{n}{3}\right)\right) \leq c \cdot f(n)$$
$$6\left(\left(\frac{n}{3}\right)^2 \log(\frac{n}{3})\right) \leq c \cdot n^2 \log(n)$$
$$\frac{6}{9} n^2 \log(\frac{n}{3}) \leq c \cdot n^2 \log(n)$$

nämlich $c = \frac{6}{9}$, nachdem klarerweise für alle $n > 0$ gilt, dass $\log(\frac{n}{3}) \leq \log(n)$. Somit haben wir $T(n) = \Theta(n^2 \log(n))$.

b) Wir haben $a = 4, b = 2, log_2(4) = 2$ und $f(n) = n^2$. Für $k = 0$ gilt $f(n) = \Theta(n^2 \cdot (\log(n))^0) = \Theta(n^2)$ und somit $T(n) = \Theta(n^2 \log(n))$.

c) Wir haben $a = \sqrt{2}$, $b = 2$, $\log_2(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}$ und $f(n) = \log(n)$. Nachdem $f(n) = O(\sqrt{n})$ (es gibt c mit $\log(n) \leq c\sqrt{n}$, etwa $c = 1$ für $n \geq 0$) und das auch für eine Funktion mit minimal kleinerer Wachstumsrate als $\sqrt{n}$ funktioniert, gilt $T(n) = \Theta(\sqrt{n})$.