Aufgabe 1.

a) Zulässig. Die Elemente einer Äquivalenzklasse sind alle gleich lang.

b) Zulässig. Die Elemente einer Äquivalenzklasse haben alle die gleichen Buchstaben.

c) Nicht zulässig. Die Elemente einer Äquivalenzklasse können sich in der Anordnung der Buchstaben unterscheiden.

d) Zulässig. Zu zeigen ist $x \sim y \Rightarrow xx \sim yy$ ($\sim$ sei die gegebene Relation, $x, y \in \Omega^*$). Es gilt $|x| = |y|$ und somit auch $|xx| = |yy|$ (Skriptum, Definition 2.2, S. 8). Ist ein beliebiger Buchstabe c nicht in einem beliebigen Wort ω enthalten so ist er auch nicht in $\omega\omega$ enthalten.

Somit haben xx und yy die gleiche Länge und beinhalten die gleichen Buchstaben. Es gilt $xx \sim yy$.

Aufgabe 2.

a) Nicht widerspruchsfrei. Es gilt etwa $h([0]_\sim) = 0$ und $f([0]_\sim) = 3$.

b) Widerspruchsfrei. Es gilt

$$\begin{aligned} [0]_\sim = [3]_\sim = [6]_\sim &= \{0, 3, 6\} \\ [1]_\sim = [4]_\sim &= \{1, 4\} \\ [2]_\sim = [5]_\sim = [8]_\sim &= \{2, 5, 8\} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} [0]_{\equiv_3} = [3]_{\equiv_3} = [6]_{\equiv_3} \\ [1]_{\equiv_3} = [4]_{\equiv_3} \\ [2]_{\equiv_3} = [5]_{\equiv_3} = [8]_{\equiv_3}. \end{aligned}$$

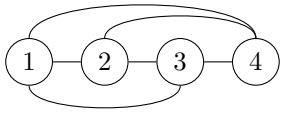
c) Widerspruchsfrei. Es gilt

$$\begin{aligned} [0]_{\equiv_6} = [6]_{\equiv_6} = [12]_{\equiv_6} \\ [2]_{\equiv_6} = [8]_{\equiv_6} \\ [4]_{\equiv_6} = [10]_{\equiv_6} = [16]_{\equiv_6} \end{aligned}$$

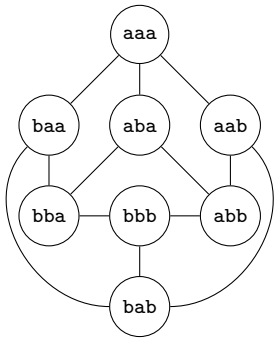
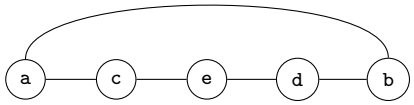
d) Nicht widerspruchsfrei. Es gilt etwa $h([0]_\sim) = \{\ldots, -6, 0, 6, 12, \ldots\}$ aber $h([3]_\sim) = \{\ldots, -9, -3, 3, 9, \ldots\}$ bei $[0]_\sim = [3]_\sim$.

Aufgabe 3.

a)



b)



c)