Aufgabe 1. Für $n = 0$ gilt

$$\sum_{i=0}^{0} r^i = r^0 = 1 = \frac{1-r}{1-r},$$

Wir nehmen nun an, dass

$$\sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{1-r^{n+1}}{1-r},$$

und zeigen

$$\sum_{i=0}^{n+1} r^i = \frac{1-r^{n+2}}{1-r}.$$

Nachdem

$$\sum_{i=0}^{n+1} r^i = r^{n+1} + \sum_{i=0}^{n} r^i$$

muss weiters

$$\begin{aligned}\frac{1-r^{n+2}}{1-r} &= r^{n+1} + \frac{1-r^{n+1}}{1-r}\\ &= \frac{r^{n+1}(1-r)}{1-r} + \frac{1-r^{n+1}}{1-r}\\ &= \frac{r^{n+1}(1-r) + 1 - r^{n+1}}{1-r}\\ &= \frac{r^{n+1} - r^{n+2} + 1 - r^{n+1}}{1-r}\\ &= \frac{1-r^{n+2}}{1-r}.\end{aligned}$$

Aufgabe 2.

a) Für $n = 1$ haben wir $\sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 2-1 = 1 = 1^2$. Unter Annahme von $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$ soll nun $\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = (n+1)^2$ gelten. Wir haben

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = 2(n+1) - 1 + \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 2n + 1 + \sum_{k=1}^{n}(2k-1)$$

und zeigen nun (siehe binomische Formel)

$$\begin{aligned}(n+1)^2 &= 2n + 1 + n^2\\ n^2 + 2n + 1 &= 2n + 1 + n^2\end{aligned}$$

b) Für $n = 1$ haben wir $\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1 = (\sum_{k=1}^{1} k)^2$. Unter Annahme von $\sum_{k=1}^{n} k^3 = (\sum_{k=1}^{n} k)^2$ soll nun $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = (\sum_{k=1}^{n+1} k)^2$ gelten.

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2 \\
(n+1)^3 + \sum_{k=1}^{n} k^3 &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2 \\
(n+1)^3 + \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2 \\
(n+1)^3 + \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 &= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 \\
(n+1)^3 + \frac{(n(n+1))^2}{4} &= \frac{((n+1)(n+2))^2}{4} \\
(n+1)^3 + \frac{n^2 + 2n^3 + n^4}{4} &= \frac{4 + 12n + 13n^2 + 6n^3 + n^4}{4} \\
1 + 3n + 3n^2 + n^3 + \frac{n^2 + 2n^3 + n^4}{4} &= \frac{4 + 12n + 13n^2 + 6n^3 + n^4}{4} \\
4 + 12n + 13n^2 + 6n^3 + n^4 &= 4 + 12n + 13n^2 + 6n^3 + n^4
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3. Für $n = 1$ gilt $(1+x)^1 = 1 + x \geq 1 + x$. Unter Annahme von $(1+x)^n \geq 1 + nx$ soll nun $(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$ gelten.

$$
\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &\geq 1 + (n+1)x \\
(1+x)(1+x)^n &\geq 1 + nx + x \\
(1+x)(1+nx) &\geq 1 + nx + x \quad \text{(Einsetzen eines $\leq$ Wertes)} \\
1 + nx + x + n(x^2) &\geq 1 + nx + x \\
n(x^2) &\geq 0
\end{aligned}
$$

Letzterer Ausdruck ist wahr nachdem x^2 sicher positiv oder Null ist und $n \geq 1$.

Aufgabe 4.

a) Seien a und b neutrale Elemente bezüglich der Addition in K und x und y neutrale Elemente bezüglich der Multiplikation in K.

$$
\begin{aligned}
a + b = a \quad \text{und} \quad a + b = b, \quad \text{demzufolge } a = b. \\
xy = x \quad \text{und} \quad xy = y, \quad \text{demzufolge } x = y.
\end{aligned}
$$

b) Seien x und y additive Inverse von a in K. (Verwendet Assoziativität der Addition.)

$$x = x + 0 = x + (a + y) = (x + a) + y = 0 + y = y$$

c) Seien x und y multiplikative Inverse von a in K mit $a \neq 0$. (Verwendet Assoziativität der Multiplikation.)

$$x = x \cdot 1 = x \cdot (a \cdot y) = (x \cdot a) \cdot y = 1 \cdot y = y$$

Aufgabe 5.

a) Zu zeigen ist $c^{-1}d^{-1} = (cd)^{-1}$, anders formuliert

$$(c^{-1}d^{-1})(cd) = cc^{-1}dd^{-1} = 1 \cdot 1 = 1.$$

(Verwendet Assoziativität und Kommutativität der Multiplikation in der ersten Umformung, und die Eindeutigkeit des multiplikativen Inverses für die Schlussfolgerung.)

b) Zu zeigen ist

$$\begin{aligned} \frac{a}{c} + \frac{b}{d} = ac^{-1} + bd^{-1} &= ac^{-1}dd^{-1} + bd^{-1}cc^{-1} \\ &= c^{-1}d^{-1}(ad + bc) \\ &= (ad + bc)(cd)^{-1} = \frac{ad + bc}{cd} \end{aligned}$$

(Verwendet Neutralelement, „Herausheben“ und 5a.

Aufgabe 6.

7) Es gibt ein $\frac{1}{1} \in \mathbb{Q}$ mit $\frac{1}{1} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$ für alle $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$.

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{a}{b} = \frac{1 \cdot a}{1 \cdot b} = \frac{a}{b}$$

8) Für alle $\frac{a}{b} \neq 0 \in \mathbb{Q}$ gibt es ein $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$ mit $\frac{a}{b} \cdot \frac{x}{y} = 1$. Sei $\frac{x}{y} = \frac{b}{a}$.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{ba} = ab(ba)^{-1} = aa^{-1}bb^{-1} = 1$$

9) Für $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3} \in \mathbb{Q}$ gilt

$$\frac{p_1}{q_1} \cdot \left(\frac{p_2}{q_2} + \frac{p_3}{q_3}\right) = \frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2q_3 + p_3q_2}{q_2q_3} = \frac{p_1}{q_1} \cdot \left(\frac{p_2q_3}{q_2q_3} + \frac{p_3q_2}{q_2q_3}\right) = \frac{p_1}{q_1} \cdot \left(\frac{p_2}{q_2} + \frac{p_3}{q_3}\right)$$

Aufgabe 7. Für die Assoziativität gilt es zu zeigen, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} b_m c_k x^{m+k}\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_n b_m x^{n+m}\right) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_n b_m c_k x^{n+m+k} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_n b_m c_k x^{n+m+k}$$

Für die Kommutativität gilt es zu zeigen, dass

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_n b_m x^{n+m} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} b_n a_m x^{n+m}\end{aligned}$$

Aufgabe 8. Angenommen $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$, dann gibt es $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $\sqrt{3} = \frac{x}{y}$ wobei angenommen werden kann, dass $\mathrm{ggT}(x, y) = 1$. Aus der Annahme folgt

$$\begin{aligned}3 &= \frac{x^2}{y^2} \\ 3y^2 &= x^2 && x \text{ ist teilbar durch } 3 \\ 3y^2 &= (3k)^2 && \text{für ein bestimmtes } k \in \mathbb{Z} \\ 3y^2 &= 9k^2 \\ y^2 &= 3k^2 && y \text{ ist ebenfalls teilbar durch 3, Widerspruch}\end{aligned}$$