Aufgabe 2.

- Assoziativität:

$$
\begin{aligned}
(x_1, x_2) \oplus ((y_1, y_2) \oplus (z_1, z_2)) &= ((x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2)) \oplus (z_1, z_2) \\
(x_1, x_2) \oplus (y_1 + z_1, y_2 + z_2) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \oplus (z_1, z_2) \\
(x_1 + y_1 + z_1, x_2 + y_2 + z_2) &= (x_1 + y_1 + z_1, x_2 + y_2 + z_2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(x_1, x_2) * ((y_1, y_2) * (z_1, z_2)) &= ((x_1, x_2) * (y_1, y_2)) * (z_1, z_2) \\
(x_1, x_2) * (y_1 z_1, y_1 z_2 + y_2 z_1) &= (x_1 y_1, x_1 y_2 + x_2 y_1) * (z_1, z_2) \\
(x_1 y_1 z_1, x_1(y_1 z_2 + y_2 z_1) + x_2 y_1 z_1) &= (x_1 y_1 z_1, x_1 y_2 z_2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1) z_1) \\
(x_1 y_1 z_1, x_1 y_1 z_2 + x_1 y_2 z_1 + x_2 y_1 z_1) &\neq (x_1 y_1 z_1, x_1 y_2 z_2 + x_1 y_2 z_1 + x_2 y_1 z_1)
\end{aligned}
$$

  Operation $*$ ist nicht assoziativ.

- Kommutativität:

$$
\begin{aligned}
(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) &= (y_1, y_2) \oplus (x_1, x_2) \\
(x_1 + y_1, x_2 + y_2) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(x_1, x_2) * (y_1, y_2) &= (y_1, y_2) * (x_1, x_2) \\
(x_1 y_1, x_1 y_2 + x_2 y_1) &= (y_1 x_1, y_1 x_2 + y_2 x_1)
\end{aligned}
$$

- Neutrale Elemente:

$$(x_1, x_2) \oplus (0, 0) = (x_1 + 0, x_2 + 0) = (x_1, x_2)$$

$$(x_1, x_2) * (1, 0) = (x_1 \cdot 1, x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 1) = (x_1, x_2)$$

- Invertierbarkeit:

$$(x_1, x_2) \oplus (-x_1, -x_2) = (x_1 - x_1, x_2 - x_2) = (0, 0)$$

$$
\begin{aligned}
&(x_1, x_2) * (x_1', x_2') = (x_1 x_1', x_1 x_2' + x_2 x_1') = (1, 0) \\
&\Rightarrow x_1 x_1' = 1 \;\Rightarrow\; x_1' = x_1^{-1} \\
&\Rightarrow x_1 x_2' + x_2 x_1' = 0 \;\Rightarrow\; x_2' = 0 \quad \text{aber } x_2 x_1' \text{ nur dann null wenn } x_2 = x_2
\end{aligned}
$$

  Operation $*$ hat nicht für alle Elemente ein Inverses.

- Distributivität

$$
\begin{aligned}
(x_1, x_2) * ((y_1, y_2) \oplus (z_1, z_2)) &= ((x_1, x_2) * (y_1, y_2)) \oplus ((x_1, x_2) * (z_1, z_2)) \\
(x_1, x_2) * (y_1 + z_1, y_2 + z_2) &= (x_1 y_1, x_1 y_2 + x_2 y_1) \oplus (x_1 z_1, x_1 z_2 + x_2 z_1) \\
(x_1(y_1 + z_1), x_1(y_2 + z_2) + x_2(y_1 + z_1)) &= (x_1 y_1 + x_1 z_1, x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_1 z_2 + x_2 z_1) \\
(x_1 y_1 + x_1 z_1), x_1 y_2 + x_1 z_2 + x_2 y_1 + x_2 z_1) &= (x_1 y_1 + x_1 z_1, x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_1 z_2 + x_2 z_1)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3. Sei $x = \frac{k}{n} \in \mathbb{Q}$, also $k, n \in \mathbb{Z}$. Wir berechnen nun die Dezimaldarstellung von x und verwenden dafür „Division mit Rest“: Es gibt für alle $p, q \in \mathbb{Z}$ eindeutige $a, b \in \mathbb{Z}$ mit

$$p = aq + b \quad \text{mit } 0 \leq b < |q|$$

Wir nennen von nun an a den Quotient und b den Rest von $\frac{p}{q}$.

Der Teil links vom Dezimalpunkt ist der Quotient von k und n, mit Rest r_0. Die folgenden Ziffern (rechts vom Dezimalpunkt) berechnen sich durch

i	
1	Quotient von $10r_0$ und n
2	Quotient von $10r_1$ und n
$\vdots$	$\vdots$

wobei r_i der Rest der Division im Schritt i ist. Der Rest ist immer zwischen 0 und $|q| - 1$, also muss sich nach mindestens $|q|$ Schritten eine Ziffer wiederholen, bzw. ein Muster bilden.

Aufgabe 4. Gegeben sei eine periodische Zahl $x = a.b\overline{c}$ wobei a, b und c eine Folge von Ziffern sind und c periodisch ist. Sei $n = \lceil \log_{10}(b) \rceil$ die Anzahl der Ziffern in b dann kann der periodische Teil durch $10^n x = ab.\overline{c}$ isoliert werden. Ein nicht periodischer Teil ist also kein Problem.

Sei $x = a.\overline{c}$ und m die Anzahl der Ziffern in c. Dann kann $\overline{c}$ als geometrische Reihe geschrieben werden.

$$x = a + c + 10^{-m}c + 10^{-2m}c + \cdots$$

Multiplikation mit $10^m - 1$ führt nun zu

$$\begin{aligned}
(10^m - 1)x &= (10^m - 1)a + 10^m(c + 10^{-m}c + 10^{-2m}c + \cdots) - (c + 10^{-m} + 10^{-2m}c + \cdots) \\
&= (10^m - 1)a + (10^m c + c + 10^{-m}c + \cdots) - (c + 10^{-m} + 10^{-2m}c + \cdots) \\
&= (10^m - 1)a + 10^m c
\end{aligned}$$

Nachdem c aus m Ziffern besteht ist $10^m c$ eine ganze Zahl. Demzufolge

$$x = \frac{(10^m - 1)a + 10^m c}{(10^m - 1)}$$

wobei $(10^m - 1)a \in \mathbb{Z}$ und $(10^m - 1) \in \mathbb{N}$, wie gefordert.

Aufgabe 5.

a) $74.73\overline{64}$

b) $28.84\overline{0}$

c)

$$\begin{aligned} x &= 123.421\overline{124} \\ 1000x &= 123421.\overline{124} \\ 1000000x &= 123421124.\overline{124} \\ 1000000x - 1000x &= 123421124.\overline{124} \\ 999000x &= 123297703 \\ x &= \frac{123297703}{999000} \end{aligned}$$

d) Ja. $3 \cdot 0.\overline{3} = 0.\overline{9}$ und $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$ also $0.\overline{9} = 1$.

Aufgabe 6.

a) Injektiv, zwei Studenten werden nie die selbe Matrikelnummer haben. Nicht surjektiv, es gibt nur endlich viele Studenten (aber unendlich Elemente in $\mathbb{N}$).

b) Undefiniert für $f_2(0)$ weil $0 \notin \mathbb{N}$. Ansonsten surjektiv (alle $\mathbb{N}$ werden getroffen) aber nicht injektiv (jedes $n \in \mathbb{N}$ wird zwei mal getroffen).

c) Bijektiv, $z \geq 0$ werden auf gerade Zahlen in $\mathbb{N}$ abgebildet, $z < 0$ auf ungerade.

d) Surjektiv (stetig mit Minimum -1 und Maximum 1, trifft also alle $[-1, 1]$ mindestend einmal) aber nicht injektiv ($\cos(x) = \cos(x + 2\pi)$).

e) Bijektiv. Siehe obiges Argument aber diesmal entspricht die Definitionsmenge einer halben Periode, ergo nichts doppelt.

Aufgabe 7. Es seien $f : A \to B$, $h_1, h_2 : X \to A$ und $g_1, g_2 : B \to Y$ beliebige Funktionen.

a) Wir wollen zeigen, dass

$$\forall\, x, y \in A : x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, h_1, h_2 : f \circ h_1 = f \circ h_2 \Rightarrow h_1 = h_2.$$

Angenommen die linke Seite gilt, es gibt also keine ungleichen x, y derart, dass $f(x) = f(y)$. Seien h_1, h_2 nun Abbildungen von einer beliebigen Menge X auf A. Wenn für alle $x \in X$ gilt, dass $f(h_1(x)) = f(h_2(x))$ dann muss gemäß unserer Annahme auch $h_1(x) = h_2(x)$ gelten.

Angenommen die linke Seite gilt nicht, es gibt also ungleiche x, y mit $f(x) = f(y)$. Dann gilt auch die rechte Seite nicht, denn dann gibt es h_1, h_2 mit $f(h_1(x)) = f(h_2(x))$ aber $h_1(x) \neq h_2(x)$. Man wähle etwa $f(x) = 0$, $h_1(x) = 1$ und $h_2(x) = 2$. Dann gilt $f(h_1(x)) = f(h_2(x))$ aber $h_1 \neq h_2$.

b) Wir wollen zeigen, dass

$$\forall\, y \in B : \exists\, x \in A : f(x) = y \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, g_1, g_2 : g_1 \circ f = g_2 \circ f \Rightarrow g_1 = g_2.$$

Angenommen es gibt für alle $b \in B$ ein $a \in A$ mit $f(a) = b$. Weiters sei angenommen, dass $g_1(f(a)) = g_2(f(a))$ für alle $a \in A$. Nachdem klarerweise $f(a) = f(a)$ und f alle Elemente von B erreicht gilt deshalb auch $g_1 = g_2$.

Angenommen es gibt ein $b \in B$ für das es kein $a \in A$ mit $f(a) = b$ gibt. Das ist etwa für $f(x) = 0$ der Fall. Man wähle weiters $g_1(x) = x$ und $g_2(x) = 2x$. Dann gilt zwar $g_1(f(0)) = g_2(f(0))$ aber nicht $g_1 = g_2$.

Aufgabe 8.

- Reflexivität:

$$\begin{aligned}(x_1, x_2) &\leq_1 (x_1, x_2)\\ (x_1 < x_1) \vee (x_1 = x_1 \wedge x_2 &\leq x_2)\\ \perp \vee (\top \wedge \top)&\\ \top&\end{aligned}$$

- Antisymmetrie:

$$\begin{aligned}(x_1, x_2) \leq_1 (y_1, y_2) \wedge (y_1, y_2) \leq_1 (x_1, x_2) &\Rightarrow (x_1, x_2) = (y_1, y_2)\\ ((x_1 < y_1) \vee (x_1 = y_1 \wedge x_2 \leq y_2)) \wedge ((y_1 < x_1) \vee (y_1 = x_1 \wedge y_2 \leq x_2)) &\Rightarrow (x_1, x_2) = (y_1, y_2)\end{aligned}$$

Sei $x_1 < y_1$, dann gilt der linke Teil, nicht aber der Rechte wegen $y_1 \not< x_1$ und $y_1 \neq x_1$. Es muss also $x_1 \geq y_1$. Dann gilt der linke Teil nur wenn $x_1 = y_1$ und zusätzlich $x_2 \leq y_2$. Dann gilt der rechte Teil nur wenn auch $y_2 \leq x_2$. Somit muss also $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$.

- Transitivität:

$$\begin{aligned}(x_1, x_2) \leq_1 (y_1, y_2) \wedge (y_1, y_2) \leq_1 (z_1, z_2) &\Rightarrow (x_1, x_2) \leq_1 (z_1, z_2)\\ ((x_1 < y_1) \vee (x_1 = y_1 \wedge x_2 \leq y_2)) \wedge ((y_1 < z_1) \vee (y_1 = z_1 \wedge y_2 \leq z_2))&\\ \Rightarrow ((x_1 < z_1) \vee (x_1 = z_1 \wedge x_2 \leq z_2))&\end{aligned}$$

Seien (x_1, x_2), (y_1, y_2) und (z_1, z_2) derart, dass die linke Seite der Implikation gilt.

Dann haben wir also entweder $x_1 < y_1$ und $y_1 < z_1$ woraus sofort $x_1 < z_1$ folgt. Oder $x_1 = y_1 = z_1$ und $x_2 \leq y_2 \leq z_2$ woraus sofort $x_1 = z_1$ und $x_2 \leq z_2$ folgt.

- Totalität:

$$\begin{gathered}(x_1, x_2) \leq_1 (y_1, y_2) \vee (y_1, y_2) \leq_1 (x_1, x_2)\\ ((x_1 < y_1) \vee (x_1 = y_1 \wedge x_2 \leq y_2)) \vee ((y_1 < x_1) \vee (y_1 = x_1 \wedge y_2 \leq x_2))\end{gathered}$$

Klarerweise gilt entweder $x_1 < y_1$, $x_1 > y_1$ oder $x_1 = y_1$ in den ersten beiden Fällen gilt die Aussage trivialerweise. Wenn $x_1 = y_1$ muss zusätzlich gelten, dass $x_2 \leq y_2$ oder $y_2 \leq x_2$. Nachdem $\leq$ auf $\mathbb{R}$ eine Totalordnung ist trifft das zu.