

**Aufgabe 1.**

- a) Keine Äquivalenzrelation. Symmetrie gilt nicht: Für  $a = 1$  und  $b = -1$  gilt  $a \sim_1 b$  ( $1 - (-1) \geq 0$ ), nicht aber  $b \sim_1 a$  ( $-1 - 1 \not\geq 0$ ).
- b) Äquivalenzrelation.
- c) Keine Äquivalenzrelation. Reflexivität gilt nicht: Für  $a = 1$  und  $b = a$  gilt  $a \sim_3 b$  nicht ( $ab \not\leq 0$ ).
- d) Äquivalenzrelation.
- e) Äquivalenzrelation.
- f) Keine Äquivalenzrelation. Transitivität gilt nicht: Für  $c = 10^{-50}$ ,  $x = 2c$ ,  $y = 2.5c$  und  $z = 3c$  gelten zwar  $|x - y| < c$  ( $0.5c < c$ ) und  $|y - z| < c$  ( $0.5c < c$ ), nicht aber  $|x - z| < c$  ( $c \not< c$ ).

**Aufgabe 2.**

$$\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{\blacksquare\}, \{\bullet\}, \{\blacktriangle\}, \{\blacksquare, \bullet\}, \{\blacksquare, \blacktriangle\}, \{\bullet, \blacktriangle\}, \{\blacksquare, \bullet, \blacktriangle\}\}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} [\emptyset]_{\sim} &= \{\emptyset\} \\ [\{\bullet\}]_{\sim} &= \{\{\bullet\}\} \\ [\{\blacktriangle\}]_{\sim} &= \{\{\blacktriangle\}\} \\ [\{\bullet, \blacktriangle\}]_{\sim} &= \{\{\bullet, \blacktriangle\}\} \\ [\{\blacksquare\}]_{\sim} &= [\{\blacksquare, \bullet\}]_{\sim} = [\{\blacksquare, \blacktriangle\}]_{\sim} = [\{\blacksquare, \bullet, \blacktriangle\}]_{\sim} = \{\{\blacksquare\}, \{\blacksquare, \bullet\}, \{\blacksquare, \blacktriangle\}, \{\blacksquare, \bullet, \blacktriangle\}\} \end{aligned}$$

**Aufgabe 3.**

- a) Die Funktion  $\text{isEqual}(T_1, T_2)$  gibt genau dann „True“ zurück wenn jede Komponente von  $T_1$  auch in  $T_2$  enthalten ist und umgekehrt, andernfalls gibt sie „False“ zurück. „Zwei Mengen  $A, B$  sind gleich, wenn für jedes Objekt  $x$  gilt  $x \in A \Leftrightarrow x \in B$ .“ (Skriptum, S. 4) Nachdem Tupeln in diesem Kontext Mengen darstellen, modelliert  $\text{isEqual}$  also eine Gleichheitsrelation zwischen Mengen. „Für jede Menge  $A$  ist die Gleichheitsrelation = eine Äquivalenzrelation, denn für alle Objekte  $x, y, z$  gilt  $x = x$  (Reflexivität),  $x = y \Leftrightarrow y = x$  (Symmetrie) und  $x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z$  (Transitivität).“ (Skriptum, S. 21)

Somit wird durch  $T_1 \sim T_2 \Leftrightarrow \text{isEqual}(T_1, T_2)$  eine Äquivalenzrelation definiert.

- b) Wie in a) erwähnt sind zwei Mengen gleich, wenn für jedes Objekt  $x$  gilt  $x \in A \Leftrightarrow x \in B$ . Das ist das einzige Kriterium, nicht „wie oft“ oder „in welcher Reihenfolge“ ein Element vorkommt. (Skriptum, S.4) Somit hat die konkrete Wahl von Tupeln aus den Äquivalenzklassen die  $u$  als Eingabe erhält keinen Einfluss auf ihr Ergebnis.

Die Implementierung passt also insofern zu jener aus a) als bei gleichbleibenden (nach  $\text{isEqual}$ ) Eingabetupeln auch das ausgegebene Tupel gleich bleibt. Gilt  $\text{isEqual}(T_1, T'_1)$  und  $\text{isEqual}(T_2, T'_2)$  gilt auch  $\text{isEqual}(\text{union}(T_1, T_2), \text{union}(T'_1, T'_2))$ .

- c) Die Länge eines Tupels ist nicht zwingendermaßen gleich der Größe der Menge die es codiert.  
So gilt etwa  $|\{1, 2, 3\}| = |\{1, 2, 2, 3, 3, 3\}| = 3$  aber  $\text{size}((1, 2, 3)) = 3$  und  $\text{size}((1, 2, 2, 3, 3, 3)) = 6$ .