Aufgabe 1.

a) Für alle rationalen Zahlen x gibt es mindestens eine natürliche Zahl y für die gilt, dass $y \leq x$.

b) Für alle reellen Zahlen x gilt, dass x nicht auch eine rationale Zahl ist wenn $x^2 = 2$.

c) Für alle Kombinationen aus einer rationalen Zahl x und einer ganzen Zahl y gilt, dass es für $x < y$ mindestens eine rationale Zahl z gibt, für die gilt, dass $x < z$ und $z < y$.

d) $\exists\, x \in \mathbb{R} : x^2 = 2 \wedge \exists\, y \in \mathbb{R} : y^2 = 2 \wedge x \neq y$

Aufgabe 2.

a) Für ein gewisses x ist $p(x)$ wahr und $q(x)$ falsch. Die linke Seite der Äquivalenz ist falsch, die rechte wahr.

b) Für jedes x gilt entweder $p(x)$ oder $q(x)$. Die linke Seite der Äquivalenz ist falsch, die rechte wahr.

c) Für jedes x gibt es genau ein y für welches $p(x, y)$ gilt. Die linke Seite der Äquivalenz ist wahr, die rechte falsch.

Aufgabe 3. Zu zeigen ist, dass $A \cap B$ eine Untermenge von $A \cup B$ ist. Für die Menge $A \cap B$ gilt $\forall\, x : x \in A \wedge x \in B$. Für die Menge $A \cup B$ gilt $\forall\, x : x \in A \vee x \in B$. Um zu zeigen, dass $A \subseteq B$ sei darzulegen, dass $\forall\, x \in A : x \in B$.

Man betrachte ein beliebiges x mit $x \in A$ und $x \in B$. Es gilt nun $x \in (A \cap B)$. Für $x \in (A \cup B)$ muss nur gelten, dass $x \in A$ oder $x \in B$. Für das gewählte x trifft sogar beides zu; es gilt also auch $x \in (A \cup B)$.

Es wurde gezeigt, dass alle Elemente von $A \cap B$ auch Element von $A \cup B$ sind. Somit gilt $A \cap B \subseteq A \cup B$