

**Aufgabe 1.**

- a) Aus Funktionsplot ergibt sich: Bijektiv (für  $x$  gegen  $-1$  nähert sich der Wert  $\infty$  an) mit  $f^{-1} = f$ .
- b) Bijektiv mit  $g^{-1}(x) = \frac{x+1}{3}$ .
- c) Nicht injektiv,  $h_1(-1) = -3 = h_1(1)$  aber surjektiv (für alle  $y \in [-4, \infty)$  gibt es ein  $x \in \mathbb{R}$  mit  $y = x^2 - 4$  weil  $\sqrt{y+4} \in \mathbb{R}$ ).
- d) Injektiv weil es gibt keine ungleichen  $x_1, x_2$  mit  $x_1^2 = x_2^2$ , also auch keine mit  $x_1^2 - k = x_2^2 - k$ . Nicht surjektiv weil es kein  $x \in \mathbb{R}$  (geschweige denn  $x \in [0, \infty)$ ) gibt mit  $x^2 - 4 = -5$  bzw.  $x^2 = -1$ .

**Aufgabe 2.****Aufgabe 3.**

- a) Assoziativität, Kommutativität und Distributivität können angenommen werden. Es gibt Neutralelemente zur Addition  $(0, 0)$  und Multiplikation  $(1, 0)$ . Jedes Element  $(x, y)$  hat ein additives Inverses  $(-x, -y)$ . Für das multiplikative Inverse muss

$$ax - by = 1 \quad \text{und} \quad ay + bx = 0$$

also

$$\left( \frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2} \right).$$

- b) Kann kein geordneter Körper sein weil

$$(0, 1)^2 = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0)$$

und das Quadrat eines Elements immer  $\geq 0$  sein muss.

**Aufgabe 4.**

- a) Sei  $n = \deg(a)$  und  $m = \deg(b)$ . Dann ist die Addition

$$\begin{aligned} & (a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0) + (b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0) \\ &= a_n x^n + \cdots + (a_m + b_m) x^m + \cdots + (a_1 + b_1) x + (a_0 + b_0) \end{aligned}$$

wieder in  $P$  weil

- für  $n > m$  gilt, dass  $\text{lc}(a+b) = \text{lc}(a)$  und wir wissen, dass  $\text{lc}(a) \geq 0$
- für  $n < m$  gilt, dass  $\text{lc}(a+b) = \text{lc}(b)$  und wir wissen, dass  $\text{lc}(a) \geq 0$
- für  $n = m$  gilt, dass  $\text{lc}(a+b) = \text{lc}(a) + \text{lc}(b)$  und wir wissen, dass  $\text{lc}(a) \geq 0$  und  $\text{lc}(b) \geq 0$  und somit  $\text{lc}(a) + \text{lc}(b) \geq 0$ .

Die Multiplikation

$$\begin{aligned} & (a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0) + (b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0) \\ &= \sum_{k=0}^n (a_k b_m x^{m+k} + \cdots + a_k b_1 x^{1+k} + a_k b_0 x^k) \end{aligned}$$

ist ebenfalls wieder in  $P$  weil in der ausgerechneten Summe der erste Term  $a_n b_m x^{m+n}$  sein wird, und  $a_n b_m \geq 0$  wie oben.

- b) • Reflexivität.  $a \preccurlyeq a$  ist trivialerweise in  $P$  weil  $\text{lc}(a - a = 0) = 0 \geq 0$ .
- Antisymmetrie. Wenn  $a \preccurlyeq b$  (also  $b - a \in P$ ) und  $b \preccurlyeq a$  (also  $a - b \in P$ ) dann muss  $a = b$ .

$$\begin{aligned} & (b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0) - (a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0) \\ &= -a_n x^n + \cdots + (b_m - a_m) x^m + \cdots + (b_1 - a_1) x + (b_0 - a_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0) - (b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0) \\ &= a_n x^n + \cdots + (a_m - b_m) x^m + \cdots + (a_1 - b_1) x + (a_0 - b_0) \end{aligned}$$

Es muss also  $\deg(a) = \deg(b)$  sonst ist für eines der Polynome der erste Koeffizient sicher negativ. Aus demselben Grund muss  $a_m \geq b_m$  und  $b_m \geq a_m$  und somit  $a_m = b_m$ . Wenn aber  $a_m = b_m$  dann ist  $a_m - b_m = b_m - a_m = 0$ . Dann werden  $a_{m-1}$  und  $b_{m-1}$  die führenden Koeffizienten, für die nun wieder dasselbe gilt. Also muss  $a - b = 0$  bzw.  $a = b$ .

- Transitivität. Wenn  $a \preccurlyeq b$  und  $b \preccurlyeq c$  dann muss  $a \preccurlyeq c$ .

$$\begin{aligned} & (b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0) - (a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0) \\ &= -a_n x^n + \cdots + (b_m - a_m) x^m + \cdots + (b_1 - a_1) x + (b_0 - a_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (c_k x^k + \cdots + c_1 x + c_0) - (b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0) \\ &= -b_m x^m + \cdots + (c_k - b_k) x^k + \cdots + (c_1 - b_1) x + (c_0 - b_0) \end{aligned}$$

Es muss  $\deg(b) \geq \deg(a)$  und  $\deg(c) \geq \deg(b)$  wegen der Implikationsannahme  $a, b, c \in P$ . Also muss auch  $\deg(c) \geq \deg(a)$ . Deswegen muss im Polynom  $c - a$  also der führende Koeffizient jener von  $c$  sein,  $\text{lc}(c - a) = c_k$ . Somit  $c - a \in P$  bzw.  $a \preccurlyeq c$ .

- Totalität. Es muss immer  $a \preccurlyeq b$  und/oder  $b \preccurlyeq a$  gelten. Wenn  $a \preccurlyeq b$  nicht gilt, dann ist  $\text{lc}(b - a) < 0$  — also *entweder*  $\deg(a) > \deg(b)$  oder  $n = \deg(a) = \deg(b)$  und  $a_n > b_n$ . In beiden Fällen gilt klarerweise  $b \preccurlyeq a$ .

**Aufgabe 5.** Angenommen ein Polynom  $f$  hat eine Nullstelle  $\frac{s}{t} \in \mathbb{Q}$ , dann

$$\begin{aligned} & a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \\ & a_n \left(\frac{s}{t}\right)^n + a_n \left(\frac{s}{t}\right)^{n-1} + \cdots + a_1 \left(\frac{s}{t}\right) + a_0 = 0 \\ & a_n s^n + a_n s^{n-1} t + \cdots + a_1 s t^{n-1} + a_0 t^n = 0 \\ & s (a_n s^{n-1} + a_n s^{n-2} t + \cdots + a_1 t^{n-1}) = -a_0 t^n \end{aligned}$$

Also  $s \mid a_0 t^n$ . Gemäß der Annahme sind  $s$  und  $t$  teilerfremd, also  $s \mid a_0$ . Der selbe Prozess kann auch für  $t \mid a_n$  angewendet werden ( $a_n s^n$  auf rechte Seite, links  $t$  herausheben).

### Aufgabe 6.

- a) Die Werte von  $\sqrt{p}$  sind äquivalent zu den Nullstellen der Funktion  $f(x) = x^2 - p$ . Wenn  $p$  prim ist dann sind die möglichen rationalen Nullstellen von  $f$  also  $\pm p$ . Klarerweise sind das keine Nullstellen, also hat  $f$  keine rationalen Nullstellen wenn  $p$  prim ist, bzw.  $\sqrt{p}$  keine rationalen Werte.
- b) 2 und 3 sind Primzahlen also sind  $\sqrt{2}$  und  $\sqrt{3}$  irrational. Die Summe zweier irrationalen Zahlen ist entweder Null oder irrational.

Die rationalen Nullstellen von  $32x^4 - 12x^3 - 55x^2 - 17x + 3$  sind alle jene  $\frac{s}{t} \in \mathbb{Q}$  mit  $s \mid 3$  und  $t \mid 32$ . Also  $-\frac{3}{4}$  und  $\frac{1}{8}$ .

### Aufgabe 7.

**Aufgabe 8.** Illustration.

$$\begin{aligned} \frac{BC}{AB} &= \frac{BH}{BC} \quad \text{und} \quad \frac{AC}{AB} = \frac{AH}{AC} \\ BC^2 &= AB \cdot BH \quad \text{und} \quad AC^2 = AB \cdot AH \\ BC^2 + AC^2 &= AB \cdot BH + AB \cdot AH \\ BC^2 + AC^2 &= AB \cdot (BH + AH) \\ BC^2 + AC^2 &= AB^2 \end{aligned}$$