Aufgabe 1.

$$f(x) = a(0) + a(1)x + a(2)x^2 + a(3)x^3 + \cdots$$

$$\begin{aligned} g(x) &= 3\left(a(0) + a(1)x + a(2)x^2 + a(3)x^3 + \cdots\right) + \left(a(0) + a(1)x + a(2)x^2 + a(3)x^3 + \cdots\right)^2 \\ &= 3a(0) + 3a(1)x + 3a(2)x^2 + 3a(3)x^3 + \cdots + a(0)^2 + a(1)^2x^2 + a(2)^2x^4 + a(3)^2x^6 + (\cdots)^2 \\ &= \underbrace{(3a(0) + a(0)^2)}_{\text{1st}} x^0 + \underbrace{3a(1)}_{\text{2nd}} x + \underbrace{(3a(2) + a(1)^2)}_{\text{3rd}} x^2 + \underbrace{3a(3)}_{\text{4th}} x^3 + \cdots \end{aligned}$$

Aufgabe 2.

Aufgabe 3. Satz 7.14. kann nicht verwendet werden weil $\sin' = \cos$ und es gibt $x \in \mathbb{R}$ mit $\cos(x) = 0$.

Aufgabe 4. Sei $x_0 \in (a, b)$. Sei (h_n) eine Nullfolge mit $h_n \in (a - x_0, b - x_0) \setminus \{0\}$.

$$\begin{aligned} (f + g)'(x_0) &= \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0 + h_n) + g(x_0 + h_n) - f(x_0) - g(x_0)}{h_n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} + \lim_{n\to\infty} \frac{g(x_0 + h_n) - g(x_0)}{h_n} \\ &= f'(x_0) + g'(x_0) \end{aligned}$$

Aufgabe 5.

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) &= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{g}\right)(x_0 + h_n) - \left(\frac{1}{g}\right)(x_0)}{h_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{g(x_0+h_n)} - \frac{1}{g(x_0)}}{h_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{g(x_0)-g(x_0+h_n)}{g(x_0+h_n)g(x_0)}}{h_n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{g(x_0) - g(x_0 + h_n)}{g(x_0 + h_n)g(x_0)h_n} = -\lim_{n\to\infty} \frac{g(x_0 + h_n) - g(x_0)}{h_n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{g(x_0 + h_n)g(x_0)} \\ &= -\lim_{n\to\infty} \frac{g(x_0 + h_n) - g(x_0)}{h_n} \cdot \frac{1}{\lim_{n\to\infty}(g(x_0 + h_n))g(x_0)} \\ &= -g'(x_0)\frac{1}{g(x_0)^2} = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(f(x)\frac{1}{g(x)}\right)' = f'(x)\frac{1}{g(x)} + f(x)\left(-\frac{g'(x)}{g(x)^2}\right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$