Aufgabe 1. Die Relation $\leq$ auf A ist nur dann eine Halbordnung wenn sie auch eine transitive Relation ist (Skriptum, Definition 7.3). Es muss also gelten, dass

$$\forall\ x, y, z \in A : x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z.$$

Weiters muss für eine Halbordnung die Antisymmetrie gelten (Skriptum, Definition 7.2) gelten, also

$$\forall\ x, y \in A : x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y.$$

Wählt man nun $x = a$, $y = b$ und $z = c$ so kann aus dem gegebenen Ausdruck $a \leq b \leq c \leq a$ gemäß der Transitivität abgeleitet werden, dass $a \leq b$ und $b \leq a$. Gemäß der Antisymmetrie müsste nun gelten, dass $a = b$. Gegeben ist allerdings $a \neq b$. Die gegebene Relation kann also keine Halbordnung sein.

Aufgabe 2. Es gelte $x, y \in N$.

a) Isoton nachdem $x \leq y \Rightarrow x^2 \leq y^2$.

b) Nicht isoton nachdem $x \leq y \not\Rightarrow x^2 \mid y^2$. (Man wähle etwa $x = 2$ und $y = 3$. Es gilt $2 \leq 3$, nicht aber $4 \mid 9$.)

c) Isoton nachdem $x \mid y \Rightarrow x^2 \leq y^2$. ($x \mid y$ impliziert, $x \cdot n = y$ für ein $n \in \mathbb{Z}$. Es gilt also auch $|x| \leq |y|$ und somit $x^2 \leq y^2$.)

d) Isoton nachdem $x \mid y \Rightarrow x^2 \mid y^2$.

Aufgabe 3.

a) I beschreibt die Injektivität von f und H die „Halbgeordnetheit" von $\sqsubseteq$. Zu zeigen ist $I \Rightarrow H$.

Man wähle beliebige $a_1, a_2 \in A$ derart, dass $a_1 \neq a_2$ und $f(a_1) = f(a_2)$. Nachdem $\leq$ eine Halbordnung ist gilt nun $f(a_1) \leq f(a_2)$ und $f(a_2) \leq f(a_1)$. Es muss nun also gelten, dass $a_1 \sqsubseteq a_2$ und $a_2 \sqsubseteq a_1$. Nachdem $a_1 \neq a_2$ kann $\sqsubseteq$ gemäß der Vorraussetzung der Antisymmetrie keine Halbordnung sein.

Es wurde gezeigt, dass wenn f nicht injektiv ist, $\sqsubseteq$ keine Halbordnung auf A sein kann — $\neg I \Rightarrow \neg H$. Damit gilt $I \Rightarrow H$

b) Man wähle beliebige $a_1, a_2 \in A$ mit $a_1 = a_2$. Unter der Annahme, dass $\sqsubseteq$ eine Halbordnung ist, gilt nun $a_1 \sqsubseteq a_2$ und $a_2 \sqsubseteq a_1$. Nachdem $a_1 \sqsubseteq a_2 \Leftrightarrow f(a_1) \leq f(a_2)$ gilt nun weiter $f(a_1) \leq f(a_2)$ und $f(a_2) \leq f(a_1)$. Gemäß der Antisymmetrie muss nun gelten, dass $f(a_1) = f(a_2)$.

Ist $\sqsubseteq$ eine Halbordnung muss f also injektiv sein. ($H \Rightarrow I$.)