Aufgabe 1. Weil $\tilde{f}$ stetig in x_0 ist gibt es für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart, dass für alle $\tilde{x}$

$$|\tilde{x} - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |\tilde{f}(\tilde{x}) - \tilde{f}(x_0)| < \epsilon.$$

Gemäß der Definition von $\tilde{f}$ kann nun zu

$$|\tilde{x} - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(\tilde{x}) - M| < \epsilon$$

umgeformt werden, das entspricht der (ϵ, δ)-Definition des Limits bzw. $\lim_{x \to x_0} f(x) = M$. Wenn die Funktion nicht stetig an x_0 ist gibt es solche ϵ und δ von Anfang an nicht — dann kann die Funktion an dieser Stelle auch kein entsprechendes Limit haben.

Aufgabe 2. Seien

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x < 0 \\ 1 & \text{wenn } x \geq 0 \end{cases} \qquad\qquad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x < 0 \\ 0 & \text{wenn } x \geq 0 \end{cases}$$

zwei in $x = 0$ nicht stetige Funktionen. Dann ist $g(f(x))$ stetig in $x = 0$. (Weil $g(f(x)) = 0$.)

Aufgabe 3. Es gilt $f(0) = 1$ und $f(x) = 0$ für alle $x \neq 0$. Die (ϵ, δ)-Definition sagt aus, dass das Limit von f für $x \to p$ dann L ist, wenn

$$0 < |x - p| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon.$$

In diesem Fall ist $p = 0$ und $L = 0$. Sei $\epsilon > 0$ beliebig und wähle $\delta = \epsilon$, dann gilt

$$0 < |x| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x)| < \epsilon$$

weil $f(x) = 0$ für alle $x \neq 0$ und x in der Implikation nicht null werden kann.

Aufgabe 4.

Aufgabe 5. Dem Hinweis folgend: Sei $a > b$, dann

$$\max\{a, b\} = a = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}(a + b + a - b) = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$$

Analog für $b > a$, $a = b$ ist trivial. Diese Funktion ist stetig.

Die Addition zweier stetiger Funktionen ist stetig. Es gilt

$$f(x) + g(x) = \max(f(x), g(x)) + \min(f(x), g(x)),$$

somit muss $\min(f, g)$ stetig sein.

Aufgabe 6. Die gegebene Funktion ist die Thomaesche Funktion. Sei $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$. Sei $\epsilon > 0$ und wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $1/n < \epsilon$. Es gibt endliche viele reduzierte rationale Zahlen $r = p/q$ im Intervall $(x - 1, x + 1)$ für ein q mit $1 \geq q \geq n$. Sei δ die kleinste Distanz zwischen x und einem solchen r. Dann gilt $\delta > 0$ weil $x \notin \mathbb{Q}$.

Wenn $|x - y| < \delta$ dann ist entweder y irrational, und somit $f(y) = 0$. Oder $y = p/q$ mit $q > n$, und somit $f(y) = 1/q < 1/n < \epsilon$. In beiden Fällen gilt $|f(x) - f(y)| = |f(y)| < \epsilon$ wegen $f(x) = 0$, also

$$|x - y| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Somit ist f stetig für $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$. (Vgl. Introduction to Analysis, Chapter 7.)

Aufgabe 7.

Aufgabe 8.