Aufgabe 1.

a) Für a = 868318803 und b = 1601135481 gilt gcd(a, b) = 3531, u = -104598 und v = 56725. Für a = 911761172 und b = 573241334 gilt gcd(a, b) = 958, u = -146941 und v = 233715.

Aufgabe 2.

- a) Alle $x \in [6]_{\equiv_{13}}$, bzw. alle $x \in \{13y + 6 : y \in \mathbb{Z}\}$.
- b) Alle $x \in [3]_{\equiv_{12}}$, bzw. alle $x \in \{12y + 3 : y \in \mathbb{Z}\}$
- c) Es gibt keine derartigen x.
- d) Alle $x \in [4]_{\equiv_{12}}$, bzw. alle $x \in \{12y + 4 : y \in \mathbb{Z}\}$

Aufgabe 3. Behauptet ist

$$\exists [y]_{\equiv_m} \in \mathbb{Z}_m : [x]_{\equiv_m} \cdot [y]_{\equiv_m} = [1]_{\equiv_m} \Longleftrightarrow \gcd(x,m) = 1.$$

" \Rightarrow " Angenommen es gibt ein solches $[y]_{\equiv_m}$. Es gilt also $xy\equiv_m 1$ beziehungsweise $\operatorname{mod}(xy,m)=\operatorname{mod}(1,m)$, woraus folgt $\operatorname{mod}(xy,m)=1$ nachdem $\operatorname{mod}(1,m)=1-m\lfloor 1/m\rfloor=1-m\cdot 0=1$. (Nachdem $m\geq 2$ gilt für alle m, dass $\lfloor 1/m\rfloor=0$.) Weiters gilt $\operatorname{gcd}(xy,m)=1$ nachdem

$$\{g, g'\} = \{xy, m\}$$

$$\{g, g'\} = \{m, \operatorname{mod}(xy, m)\}$$

$$\{g, g'\} = \{1, \operatorname{mod}(m, 1)\}$$

$$\{g, g'\} = \{1, 0\},$$

wobei der Algorithmus bei g'=0 mit $\gcd(xy,m)=g=1$ terminiert. (Nachdem $m\in\mathbb{N}$ gilt für alle m, dass $\lfloor m/1\rfloor=m$ und ergo $\operatorname{mod}(m,1)=0$.)

Die Primfaktorzerlegungen von $xy = \chi_1 \chi_2 \dots \chi_i$ und $m = m_1 m_2 \dots m_j$ sind nun also voneinander verschieden (haben eine leere Schnittmenge). Das Produkt xy kann weiter in die Primfaktoren von x und y, also $xy = x_1 x_2 \dots x_k y_1 y_2 \dots y_l$ zerlegt werden. Nachdem die Primfaktoren von xy und xy voneinander verschieden sind, müssen auch die Primfaktoren von xy und xy und yy und yy voneinander verschieden sein. Demzufolge gilt $\gcd(x,yy) = 1$ (und $\gcd(y,yy) = 1$), was zu zeigen war.

Nachdem gcd(x, m) = 1 gibt es $y, v \in \mathbb{Z}$ mit yx + vm = 1. Dann gilt

$$[1]_{\equiv_m} = [y]_{\equiv_m} [x]_{\equiv_m} + \underbrace{[vm]_{\equiv_m}}_{=[0]_{\equiv_m}} = [y]_{\equiv_m} [x]_{\equiv_m},$$

woraus folgt, dass $[y]_{\equiv_m}$ das gesuchte multiplikative Inverse von $[x]_{\equiv_m}$ ist, wie zu zeigen war.