

**Aufgabe 1.** Zu zeigen ist

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

Es gilt  $|x| = \max(x, -x)$ . Dann ist  $|a + b| = \max(a + b, -(a + b)) = \max(a + b, -a - b)$ . Weiters, nachdem  $\pm x \leq |x|$ ,

$$\begin{aligned} a + b &\leq |a| + b \leq |a| + |b|, \quad \text{und} \\ -a - b &\leq |a| - b \leq |a| + |b|. \end{aligned}$$

**Aufgabe 2.**

$$\begin{aligned} 0 &\leq (x - y)^2 && \text{Quadrat einer reellen Zahl ist } \geq 0 \\ 0 &\leq x^2 - 2xy + y^2 \\ 4xy &\leq x^2 + 2xy + y^2 \\ 4xy &\leq (x + y)^2 \\ \sqrt{xy} &\leq \frac{x + y}{2} && \text{Quadratwurzel, dann Division durch 2} \end{aligned}$$

**Aufgabe 3.**

- a)  $\frac{2}{\sqrt{5}}$
- b)  $\frac{\sqrt{5}}{3}$
- c)  $\frac{1}{\sqrt{2}}$

**Aufgabe 4.** Wir haben  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$ . Für beliebiges  $\epsilon > 0$  gibt es ein  $n_\epsilon$  mit  $|0 - |a_n|| < \epsilon$  für  $n > n_\epsilon$ . Weil  $|0 - |a_n|| = ||a_n|| = |a_n| = |0 - a_n|$  gilt auch  $|0 - a_n| < \epsilon$  und somit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

**Aufgabe 5.** Sei  $(a_n)$  eine Folge die gegen  $a$  konvergiert. Für ein  $\epsilon > 0$  gibt es also  $n_\epsilon$  derart, dass

$$|a_n - a| < \epsilon \implies |a_n| < |a| + \epsilon \quad (\text{für alle } n \geq n_\epsilon)$$

Für alle  $n \geq n_\epsilon$  haben wir nun also  $|a| + \epsilon$  als obere Schranke. Es gibt endlich viele  $1 \leq n < n_\epsilon$  also können wir durch  $a_m = \max(a_1, a_2, \dots, a_{n_\epsilon-1})$  eine obere Schranke für  $n < n_\epsilon$  finden. Die obere Schranke für  $(a_n)$  ist dann  $\max(a_m, |a| + 1)$ .

Die untere Schranke lässt sich analog konstruieren, unter Verwendung von  $\min$  und  $|a| - \epsilon$ .

**Aufgabe 6.** Angenommen die gegebene Folge  $(a_n)$  konvergiert gegen ein  $a$ . Für alle  $\epsilon > 0$  muss es also ein  $n_\epsilon$  geben, mit  $|a - a_n| < \epsilon$  für  $n \geq n_\epsilon$ . Sei  $\epsilon = \frac{1}{2}$ . Es gibt kein  $a$  derart, dass für alle  $n > n_\epsilon$  gilt

$$\begin{aligned} |a - 1| &< \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad |a + 1| < \frac{1}{2} \\ |a - 1| + |a + 1| &< 1 \end{aligned}$$

**Aufgabe 7.** Zu zeigen ist, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$  gilt.

a) Sei  $\epsilon > 0$  und  $n_\epsilon = \frac{2}{\epsilon^2}$ . Dann gilt

$$|a - a_n| = \left| 0 - \frac{1}{\sqrt{n}} \right| = \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\epsilon^2}}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{e}} = \frac{e}{\sqrt{2}} < e$$

**Aufgabe 8.** Sei  $(a_n)$  eine gegen  $a$  konvergierende Folge. Für alle  $\epsilon > 0$  gibt es also ein  $n_\epsilon$  ab dem für alle  $n \geq n_\epsilon$

$$|a - a_n| < \epsilon$$

Dann gilt auch

$$\begin{aligned} \lambda |a - a_n| &< \lambda \epsilon \\ |\lambda a - \lambda a_n| &< \lambda \epsilon \end{aligned}$$

für alle  $\epsilon > 0$  und ab jeweiligen  $n_\epsilon$ . Somit konvergiert  $(\lambda a_n)$  gegen  $\lambda a$  wenn  $(a_n)$  gegen  $a$  konvergiert.