

**Aufgabe 1.** Es gilt

$$\lim \left( \sin(n) \cdot \frac{1}{n} \right) = \lim \sin(n) \cdot \lim \frac{1}{n} = 0$$

weil  $\sin(n)$  beschränkt ist und  $\lim \frac{1}{n} = 0$ .

**Aufgabe 2.**

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n} = \sqrt{2\sqrt{2a_{n-1}}} = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2a_{n-2}}}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdot \sqrt[8]{a_{n-2}}$$

**Aufgabe 3.** Weil  $T$  eine obere Schranke ist, gilt  $a_n \leq T$  für alle  $n$ .

$$T_n = \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \quad \text{und} \quad a_1 \leq T, a_2 \leq T, \dots, a_n \leq T \quad \text{somit} \quad \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \leq T$$

Also gilt  $T_n \leq T$ .

**Aufgabe 4.**  $T_n$  ist nach oben durch  $T$  beschränkt und monoton wachsend (wegen  $\max$ ), also gibt es ein eindeutiges  $\lim T_n = T_0$ .  $T_0$  ist  $\geq a_n$  für alle  $n$  aber auch  $\in (a_n)$ , also das Maximum und somit auch das Supremum.

**Aufgabe 5.**

- a) Wir interessieren uns nur für gerade  $n$ , andernfalls ist  $a_n = \frac{1}{n}$  und für das sup irrelevant (weil kleiner).

$$A_k = \sup_{n \geq k} a_n = \sup_{n \geq 1} a_{n+k-1} = 2 + \frac{1}{k}$$

Nachdem  $\lim A_k = 2$  ist  $\limsup \dots = 2$ .

- b)  $(b)_n$  ist nicht nach oben beschränkt ( $\lim b_n = \infty$ ), es gilt somit  $\limsup_{k \rightarrow \infty} = \infty$ .  
c) Wir sind wieder nur an geraden  $n$  interessiert und haben

$$C_k = \frac{1}{n} \quad \text{somit} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$$

**Aufgabe 6.** Sei  $k \in \mathbb{N}$ , und

$$\begin{aligned} A_k = \sup\{a_k, a_{k+1}, \dots\} &\implies \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k \\ B_k = \sup\{a_k, a_{k+1}, \dots\} &\implies \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{k \rightarrow \infty} B_k \\ C_k = \sup\{a_k + b_k, a_{k+1} + b_{k+1}, \dots\} &\implies \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} C_k \end{aligned}$$

Wähle ein  $k$ , dann gilt für  $n \geq k$

$$a_n + b_n \leq A_k + B_k$$

weil  $A_k$  und  $B_k$  jeweils das Supremum, also die (kleinste) obere Schranke sind. Klarerweise gilt somit

$$C_k \leq A_k + B_k \quad \text{bzw.} \quad \sup_{n \geq k} (a_n + b_n) \leq \sup_{n \geq k} a_n + \sup_{n \geq k} b_n.$$

was für (a) zu zeigen war, mit  $K = 1$ .

Für (b) reicht es, den Limes auf beiden Seiten anzuwenden

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{n \geq k} (a_n + b_n) &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{n \geq k} a_n + \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{n \geq k} b_n \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n \end{aligned}$$

**Aufgabe 7.** Sei  $(a_n)$  eine konvergente Folge mit  $\lim a_n = a$ , sie ist also beschränkt — es gibt ein  $\sup a_n$  für alle  $n$ . Sei  $A_k = \sup_{n \geq k} a_n$ . Klarerweise ist  $A_k \geq A_{k+1} \geq A_{k+2} \geq \dots$ , die Folge ist monoton fallend. Weiters ist  $(A_k)$  wie  $(a_n)$  beschränkt, somit gibt es ein  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{n \geq k} a_n$  bzw. ein  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ .

Sei  $\epsilon > 0$ , dann gilt für alle  $n \geq N_1$

$$|a - a_n| < \epsilon$$

Klarerweise gilt dann für alle  $n \geq N_2$

$$|a - \sup_{k \geq n} a_k| < \epsilon.$$

**Aufgabe 8.**

- a) 1, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 4, ... mit Häufungspunkten 1 und 2.
- b)  $n$ .
- c) Sei  $(a_n)$  eine auf  $a$  konvergierende Folge mit Häufungspunkten  $a, b$  und  $a \neq b$ . Sei  $\epsilon = \frac{|a-b|}{2}$ , dann gibt es für alle  $n > N$

$$|a_n - a| < \epsilon$$

aber wegen

$$|a_n - b| = |a_n - a + a - b| \geq ||a_n - a| - |a - b|| = ||a_n - a| - 2\epsilon| = 2\epsilon - |a_n - a| \not< \epsilon$$

kann es nicht unendliche viele Punkte die willkürlich nahe an  $b$  kommen geben. Also kann  $b$  kein Häufungspunkt sein.

- d)  $k$  für  $k > 0$ .