

## Vektoren

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (u_2 v_3) - (u_3 v_2) \\ (u_3 v_1) - (u_1 v_3) \\ (u_1 v_2) - (v_2 u_1) \end{pmatrix}$$

Die Länge eines Vektors ist  $\sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}$ .

Der Vektor  $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$  ist normal auf die Vektoren  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$ . Zwei Vektoren sind dann normal wenn ihr Skalarprodukt null ist.

Die Normalenform einer Ebene  $E$  in  $\mathbb{R}^3$  ist

$$E = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid (\vec{x} - \vec{a})\vec{n} = 0 \}$$

mit  $\vec{n}$  normal auf  $\vec{a}$ . Parameterform ist

$$E = \{ \vec{a} + \lambda \vec{u} + \sigma \vec{v} \mid \lambda, \sigma \in \mathbb{R} \}$$

wobei  $a$  übl. Ortsvektor und  $u, v$  ausgehend von  $a$ .

Von Gleichungsform  $ax + by + cz = d$  einer Ebene auf Normalenform: Normalvektor ist  $(a \ b \ c)^T$ , dann  $\vec{a}$  finden mit  $\vec{a}\vec{n} = d$ . Von Parameterform in Normalenform:  $n = u \times v$ ,  $a$  bleibt. Von Normalenform auf Gleichungsform: Ausrechnen.

Orthogonalisierung einer Basis  $\{v_1, \dots, v_n\}$ :

- 1)  $w_1 = v_1$ , dann für  $i = 2, \dots, n$
- 2)  $w_i = v_i - (\text{proj}_{w_1}(v_i) + \dots + \text{proj}_{w_{i-1}}(v_i))$

mit

$$\text{proj}_u(v) = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle} \cdot u$$

(Wenn  $v_1, \dots, v_n$  keine Basis bilden bzw. linear abhängig sind funktioniert es auch, dann ist aber ein  $w_i = \vec{0}$ . Vektoren  $w_i$  können beliebig skaliert werden.)

Vektoren eines Orthogonalsystems sind immer linear unabhängig.

## Matrizen

Eine (quadr.) Matrix  $A$  ist *singulär* wenn  $\det(A) = 0$ , also wenn sie nicht invertierbar ist, bzw. ihre Spalten linear abhängig sind. Anderfalls ist sie *regulär*.

$$\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$$

Für  $3 \times 3$ :

$$a_{1,1} \begin{pmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} - a_{1,2} \begin{pmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{pmatrix} + a_{1,3} \begin{pmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{pmatrix}$$

Eine Basistransformationsmatrix  $A_C^B$  („B ausgedr. durch C“) ist

$$A_C^B = ((v_1)_C \ \dots \ (v_n)_C)$$

mit  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ .

Alle  $v \in K^n \setminus \{\vec{0}\}$  mit

$$A \cdot v = \lambda \cdot v$$

heißen Eigenvektoren,  $\lambda$  sind zugehörige Eigenwerte.

Eigenwerte einer Matrix  $A$  sind Nullstellen von

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_n).$$

Algebraische Vielfachheit ist die Potenz der Nullstelle. Dimension des Eigenraums ist geometrische Vielfachheit. Es gilt alg. V.  $\geq$  geo. V.

Der Eigenraum zu einem Eigenwert  $\lambda$  ist

$$E_{A,\lambda} = \text{Ker}(A - \lambda E_n) \\ \{ \vec{v} \mid (A - \lambda E_n) = \vec{0} \}$$

Zur Diagonalisierung ( $\lambda$  sind Eigenwerte,  $v$  sind Eigenräume):

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad \text{mit} \\ P = (v_1, \dots, v_n)$$

Nur möglich wenn für alle Werte alg. V. = geo V.

Zeilen- und Spaltenraum ist die lineare Hülle der Zeilen- bzw. Spaltenvektoren. (Auf Dimension aufpassen!)

Vertauschungsmatrix  $T_{i,j}$  vertauscht Zeilen  $i$  und  $j$ . In Einheitsmatrix Zeilen  $i$  u.  $j$ . vertauschen. Skalierungsm.  $S_i(\lambda)$  skaliert Zeile  $i$  mit  $\lambda$ . Additionsmatrix  $R_{i,j}(\lambda)$  addiert das  $\lambda$ -fache der Zeile  $j$  zur Zeile  $i$ . In Einheitsmatrix  $\lambda$  bei  $(i,j)$ .

Es gilt  $\dim Z(A) = \dim S(A) = \text{Rg}(A)$ . Alle Nichtnull-Zeilen der Matrix in Zeilenstufenf. bilden Basis von  $Z(A)$ . Spalten der urspr. Matrix  $A$  in denen in Zeilenstufenf. ein Pivot-El. ist sind Basis von  $S(A)$ . Ausserdem  $\dim Z(A) + \dim \text{Ker}(A) = n$  bei  $A^{m \times n}$ .

$$\begin{aligned}\dim \text{Ker}(A) &= n - \text{Rg}(A) \\ \dim \text{Coker}(A) &= m - \text{Rg}(A)\end{aligned}$$

## Strukturen

$\mathbb{Z}_n$  ist dann ein Körper wenn  $n$  prim ist. Ein  $x \in \mathbb{Z}_n$  ist dann teilbar wenn  $\text{ggT}(n, x) = 1$ . Die Gleichung

$$ax + by = c$$

hat dann eine Lösung in  $\mathbb{N}$  wenn  $\text{ggT}(a, b) \mid c$ .

In der Menge  $\mathbb{Z}_n[x]/(f)$  sind  $n^{\deg(f)}$  Elemente. Das multiplikative Inverse eines Elements einer

solchen Menge kann durch den EEA ermittelt werden.

Beim EEA gilt

$$u_i = u_{i-2} - (u_{i-1} \cdot q_i)$$

(Selbiges gilt für  $v$ .)

## Polynome

Für Nullst. von  $a_2x^2 + a_1x + a_0$

$$\frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2}$$

Sei  $p = a_nx^n + \dots + a_1x + a_0$ . Wenn  $p$  eine Nullstelle  $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$  besitzt dann  $a \mid a_0$  und  $b \mid a_n$ . (Bei Polynom in  $\mathbb{Z}_n$  ist oft ausprobieren aller möglichen Nullstellen einfacher. Bei Polynom in  $\mathbb{Q}$  sind alle Nullst.  $\frac{a}{b}$ , „erraten“ werden *alle* Nullstellen.)

Hat ein Pol. eine Nullst.  $n$  so enthält es den Faktor  $(x - n)$ . Somit ist es reduzibel. Alles in  $\mathbb{C}$  ist reduzibel (kompl. Lösungsformel). Wenn in  $\mathbb{Z}_n$  Nullstelle dann reduzibel.