Aufgabe 1.

a) Aus Funktionsplot ergibt sich: Bijektiv (für x gegen -1 nähert sich der Wert ∞ an) mit $f^{-1} = f$.

b) Bijektiv mit $g^{-1}(x) = \frac{x+1}{3}$.

c) Nicht injektiv, $h_1(-1) = -3 = h_1(1)$ aber surjektiv (für alle $y \in [-4, \infty)$ gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $y = x^2 - 4$ weil $\sqrt{y+4} \in \mathbb{R}$).

d) Injektiv weil es gibt keine ungleichen x_1, x_2 mit $x_1^2 = x_2^2$, also auch keine mit $x_1^2 - k = x_2^2 - k$. Nicht surjektiv weil es kein $x \in \mathbb{R}$ (geschweige denn $x \in [0, \infty)$) gibt mit $x^2 - 4 = -5$ bzw. $x^2 = -1$.

Aufgabe 2.

Aufgabe 3.

a) Assoziativität, Kommutativität und Distributivität können angenommen werden. Es gibt Neutralelemente zur Addition $(0, 0)$ und Multiplikation $(1, 0)$. Jedes Element (x, y) hat ein additives Inverses $(-x, -y)$. Für das multiplikative Inverse muss

$$ax - by = 1 \quad \text{und} \quad ay + bx = 0$$

also

$$\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2} \right).$$

b) Kann kein geordneter Körper sein weil

$$(0, 1)^2 = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0)$$

und das Quadrat eines Elements immer ≥ 0 sein muss.

Aufgabe 4.

a) Sei $n = \deg(a)$ und $m = \deg(b)$. Dann ist die Addition

$$\begin{aligned} &(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0) + (b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0) \\ &= a_n x^n + \cdots + (a_m + b_m) x^m + \cdots + (a_1 + b_1) x + (a_0 + b_0) \end{aligned}$$

wieder in P weil

- für $n > m$ gilt, dass $\mathrm{lc}(a + b) = \mathrm{lc}(a)$ und wir wissen, dass $\mathrm{lc}(a) \geq 0$
- für $n < m$ gilt, dass $\mathrm{lc}(a + b) = \mathrm{lc}(b)$ und wir wissen, dass $\mathrm{lc}(a) \geq 0$
- für $n = m$ gilt, dass $\mathrm{lc}(a + b) = \mathrm{lc}(a) + \mathrm{lc}(b)$ und wir wissen, dass $\mathrm{lc}(a) \geq 0$ und $\mathrm{lc}(b) \geq 0$ und somit $\mathrm{lc}(a) + \mathrm{lc}(b) \geq 0$.

Die Multiplikation

$$\begin{aligned}&(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0) + (b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0)\\ =& \sum_{k=0}^{n} (a_k b_m x^{m+k} + \cdots + a_k b_1 x^{1+k} + a_k b_0 x^k)\end{aligned}$$

ist ebenfalls wieder in P weil in der ausgerechneten Summe der erste Term $a_n b_m x^{m+n}$ sein wird, und $a_n b_m \geq 0$ wie oben.

b)

- Reflexivität. $a \preccurlyeq a$ ist trivialerweise in P weil $\operatorname{lc}(a - a = 0) = 0 \geq 0$.
- Antisymmetrie. Wenn $a \preccurlyeq b$ (also $b - a \in P$) und $b \preccurlyeq a$ (also $a - b \in P$) dann muss $a = b$.

$$\begin{aligned}&(b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0) - (a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0)\\ =& -a_n x^n + \cdots + (b_m - a_m) x^m + \cdots + (b_1 - a_1) x + (b_0 - a_0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0) - (b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0)\\ =& a_n x^n + \cdots + (a_m - b_m) x^m + \cdots + (a_1 - b_1) x + (a_0 - b_0)\end{aligned}$$

  Es muss also $\deg(a) = \deg(b)$ sonst ist für eines der Polynome der erste Koeffizient sicher negativ. Aus demselben Grund muss $a_m \geq b_m$ und $b_m \geq a_m$ und somit $a_m = b_m$. Wenn aber $a_m = b_m$ dann ist $a_m - b_m = b_m - a_m = 0$. Dann werden a_{m-1} und b_{m-1} die führenden Koeffizienten, für die nun wieder dasselbe gilt. Also muss $a - b = 0$ bzw. $a = b$.
- Transitivität. Wenn $a \preccurlyeq b$ und $b \preccurlyeq c$ dann muss $a \preccurlyeq c$.

$$\begin{aligned}&(b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0) - (a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0)\\ =& -a_n x^n + \cdots + (b_m - a_m) x^m + \cdots + (b_1 - a_1) x + (b_0 - a_0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(c_k x^k + \cdots + c_1 x + c_0) - (b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0)\\ =& -b_m x^m + \cdots + (c_k - b_k) x^k + \cdots + (c_1 - b_1) x + (c_0 - b_0)\end{aligned}$$

  Es muss $\deg(b) \geq \deg(a)$ und $\deg(c) \geq \deg(b)$ wegen der Implikationsannahme $a, b, c \in P$. Also muss auch $\deg(c) \geq \deg(a)$. Deswegen muss im Polynom $c - a$ also der führende Koeffizient jener von c sein, $\operatorname{lc}(c - a) = c_k$. Somit $c - a \in P$ bzw. $a \preccurlyeq c$.
- Totalität. Es muss immer $a \preccurlyeq b$ und/oder $b \preccurlyeq a$ gelten. Wenn $a \preccurlyeq b$ nicht gilt, dann ist $\operatorname{lc}(b - a) < 0$ — also *entweder* $\deg(a) > \deg(b)$ oder $n = \deg(a) = \deg(b)$ und $a_n > b_n$. In beiden Fällen gilt klarerweise $b \preccurlyeq a$.

Aufgabe 5. Angenomen ein Polynom f hat eine Nullstelle $\frac{s}{t} \in \mathbb{Q}$, dann

$$\begin{aligned}a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 &= 0\\ a_n \left(\frac{s}{t}\right)^n + a_n \left(\frac{s}{t}\right)^{n-1} + \cdots + a_1 \left(\frac{s}{t}\right) + a_0 &= 0\\ a_n s^n + a_n s^{n-1} t + \cdots + a_1 s t^{n-1} + a_0 t^n &= 0\\ s\left(a_n s^{n-1} + a_n s^{n-2} t + \cdots + a_1 t^{n-1}\right) &= -a_0 t^n\end{aligned}$$

Also $s \mid a_0 t^n$. Gemäß der Annahme sind s und t teilerfremd, also $s \mid a_0$. Der selbe Prozess kann auch für $t \mid a_n$ angewendet werden ($a_n s^n$ auf rechte Seite, links t herausheben).

Aufgabe 6.

a) Die Werte von $\sqrt{p}$ sind äquivalent zu den Nullstellen der Funktion $f(x) = x^2 - p$. Wenn p prim ist dann sind die möglichen rationalen Nullstellen von f also $\pm p$. Klarerweise sind das keine Nullstellen, also hat f keine rationalen Nullstellen wenn p prim ist, bzw. $\sqrt{p}$ keine rationalen Werte.

b) 2 und 3 sind Primzahlen also sind $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ irrational. Die Summe zweier irrationalen Zahlen ist entweder Null oder irrational.

Die rationalen Nullstellen von $32x^4 - 12x^3 - 55x^2 - 17x + 3$ sind alle jene $\frac{s}{t} \in \mathbb{Q}$ mit $s \mid 3$ und $t \mid 32$. Also $-\frac{3}{4}$ und $\frac{1}{8}$.

Aufgabe 7.

Aufgabe 8. Illustration.

$$
\begin{aligned}
\frac{BC}{AB} = \frac{BH}{BC} \quad &\text{und} \quad \frac{AC}{AB} = \frac{AH}{AC} \\
BC^2 = AB \cdot BH \quad &\text{und} \quad AC^2 = AB \cdot AH \\
BC^2 + AC^2 &= AB \cdot BH + AB \cdot AH \\
BC^2 + AC^2 &= AB \cdot (BH + AB) \\
BC^2 + AC^2 &= AB^2
\end{aligned}
$$