

**Aufgabe 1.** Zu zeigen ist

$$f(n) = O(g(n)) \wedge g(n) = O(h(n)) \Rightarrow f(n) = O(h(n)).$$

Angenommen die linke Seite der Implikation,

$$\exists c > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |f(n)| \leq c|g(n)| \quad (1)$$

$$\exists k > 0 \exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_1 : |g(n)| \leq k|h(n)| \quad (2)$$

gilt. Die Ungleichung aus (1) kann zu  $\frac{|f(n)|}{c} \leq |g(n)|$  umformuliert werden und in (2) eingesetzt werden:

$$\exists k > 0 \exists n_1 \in \mathbb{N} : \frac{|f(n)|}{c} \leq k|h(n)|$$

$$\exists k > 0 \exists n_1 \in \mathbb{N} : |f(n)| \leq ck|h(n)|$$

Dann gilt

$$\exists j > 0 \exists n_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_2 : |f(n)| \leq j|h(n)|$$

für  $j = ck$  und  $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$ . Somit gilt  $f(n) = O(h(n))$  wenn  $f(n) = O(g(n))$  und  $g(n) = O(h(n))$ , die O-Notation ist transitiv.

**Aufgabe 2.** Es gilt  $f(n) = \sqrt{n} = \Theta(\sqrt{n})$ .

- a) Es gilt  $a = 1$ ,  $b = 2$  und  $c = \log_2(1) = 0$ . Es greift Fall 4 wegen  $f(n) = \Omega(n^{0+\frac{1}{2}}) = \Omega(\sqrt{n})$  ( $\epsilon = \frac{1}{2}$ ). Somit gilt  $T(n) = \Omega(\sqrt{n})$ .
- b) Es gilt  $a = 2$ ,  $b = 2$  und  $c = \log_2(2) = 1$ . Es greift Fall 1 wegen  $f(n) = O(n^{1-\frac{1}{2}}) = O(\sqrt{n})$  ( $\epsilon = \frac{1}{2}$ ). Somit gilt  $T(n) = \Theta(\sqrt{n})$ .
- c) Es gilt  $a = 2$ ,  $b = 4$  und  $c = \log_4(2) = \frac{1}{2}$ . Es greifen Fall 2 und 3 wegen  $f(n) = O(n^{\frac{1}{2}} \log(n)^0) = O(\sqrt{n})$  und  $f(n) = \Omega(n^{\frac{1}{2}} \log(n)^0) = \Omega(\sqrt{n})$  ( $k = 0$ ). Somit gilt  $T(n) = \Theta(\sqrt{n} \log(n))$ .

**Aufgabe 3.** Die folgende Tabelle zeigt für jede Zeile die maximale Anzahl der Ausführungen („Häufigkeit“) und die daraus resultierende maximale Anzahl an Operationen. Nachdem etwa Zeile 3 zu einem früheren Abbruch von Schleifeniterationen führen kann sind diese Werte als oberes Limit zu verstehen, nicht zwingend als tatsächlich erreichbares Maximum.

Zeile	Häufigkeit	Operationen	
1	1	0	
2	1	$n$	
3	$n$	$3n$	
4	$n$	$2n^2$	Größtmögl. $i = n$ also $2n \cdot n = 2n^2$
5	$2n^2$	$12n^2$	
6	$2n^2$	$6n^3 + 1$	Größtmögl. $j = 2i = 2n$ also $2n + n = 3n$ und $2n^2 3n = 6n^3$
7	$6n^3$	0	
8	$6n^3$	$18n^3$	
9	$6n^3$	0	
10	$6n^3$	$24n^3$	
11	1	0	

Die größte vorkommende maximale Anzahl der Operationen ist  $24n^3$ , somit benötigt der Algorithmus  $O(n^3)$  arithmetische Operationen.