Aufgabe 1. Wegen $0 \leq a_k$ ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ monoton wachsend. Nach Annahme divergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, somit ist sie unbeschränkt. Wegen $a_k \leq b_k$ gilt $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k$, damit muss auch b_k unbeschränkt und somit divergent sein.

Aufgabe 2. Nach Annahme ist $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergent. Demnach muss auch $\sum_{k=1}^{\infty} 2|a_k|$ konvergent sein. Wegen $0 \leq a_k + |a_k| \leq 2|a_k|$ ist gemäß des Majorantenkriteriums $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + |a_k|)$ konvergent. Dann ist auch $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty}(a_k + |a_k|) - \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergent, weil es die Differenz zweier konvergenter Reihen ist.

Aufgabe 3.

a) Wegen $\lim_{k\to\infty} \frac{2k^2+1}{3k(k+1)} = \frac{2}{3} \neq 0$ ist die Reihe divergent.

b)

c)

d) (Harmonische Reihe[1].) Angenommen die Reihe konvergiert mit

$$H = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots$$

Dann ist mit

$$\begin{aligned} H &\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \cdots \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots \\ &\geq \frac{1}{2} + H \end{aligned}$$

ein Widerspruch gegeben.

Aufgabe 4.

$$\sum \frac{4}{4k^2 - 1} = 4 \sum \frac{1}{4k^2 - 1}$$

$$\frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k+2}$$

$$\sum \left(\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k+2} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{14}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{4n-6} - \frac{1}{4n-2}\right) + \left(\frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n+2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4n+2}$$

$$\lim \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{4n+2} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\sum \frac{4}{4k^2 - 1} = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

[1] `https://web.williams.edu/Mathematics/lg5/harmonic.pdf`

Aufgabe 5. Seien $\sum a_k$ und $\sum b_k$ zwei Reihen mit den Partialsummen (s_n) und (t_n) derart, dass es ein N mit $a_k = b_k$ für alle $k \geq N$ gibt. Dann gilt

$$s_n = \sum_{k=1} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_{N-1} + \sum_{k=N} a_k$$

und

$$\begin{aligned} t_n &= \sum_{k=1} b_k = b_1 + b_2 + \cdots + b_{N-1} + \sum_{k=N} a_k \\ &= s_n - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{N-1}) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_{N-1}). \end{aligned}$$

Angenommen $\sum b_k$ konvergiert, es gibt also $\lim t_n = t$. Dann sei

$$c = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{N-1}) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_{N-1})$$

eine von n unabhängige Konstante. Nun gilt

$$\begin{aligned} t_n &= s_n - C \\ \lim t_n &= \lim s_n - C \\ \lim s_n &= t + C, \end{aligned}$$

also konvergiert auch (s_n) bzw. $\sum a_k$.

Aufgabe 6.

a) Wegen $\lim \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 \neq 0$ ist die Reihe divergent.

b) Wegen $\lim \left(n - \frac{(n^2+n+1)}{n}\right) = -1 \neq 0$ ist die Reihe divergent.

c) Wegen $\lim |\frac{n!}{n^{2n}}|^{\frac{1}{n}} = \lim \frac{\sqrt[n]{n!}}{n^2} = 0 < 1$ ist die Reihe konvergent.

Aufgabe 7.

a)

$$\lim \left| \frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n} \right| = \lim \left| \frac{(n+1)!x}{n!} \right| = |x| \lim \left| \frac{(n+1)!}{n!} \right| = |x|\infty$$

Konvergenzradius ist 0.

b)

$$\lim \left| \frac{(n+2)(n+3)\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1}}{(n+1)(n+2)\left(\frac{x}{2}\right)^n} \right| = \lim \left| \frac{(n+3)\left(\frac{x}{2}\right)}{n+1} \right| = \left|\frac{x}{2}\right| \lim \left| \frac{n+3}{n+1} \right| = \left|\frac{x}{2}\right|$$

Konvergenzradius ist 2.

c)

$$\lim \left| \frac{x^n}{(\ln(n))^n} \right|^{\frac{1}{n}} = \lim \left| \frac{x}{\ln(n)} \right| = |x| \lim \left| \frac{1}{\ln(n)} \right| = 0$$

Konvergenzradius ist ∞.

Aufgabe 8.