Multiple Choice

(1) Die reellen Zahlen können geordnet werden. (2x)

(2) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ invertierbar. Ist f differenzierbar auf $\mathbb{R}$ dann ist auch f^{-1} differenzierbar auf $\mathbb{R}$. (2x)

(3) Jede nach unten beschränkte und monoton fallende Folge besitzt einen Grenzwert.

(4) $(e^{3x})' = e^{3x}$

(5) Ist (a_n) konvergent, dann ist auch $(\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k))$ konvergent. (2x)

(6) Der Konvergenzradius einer Potenzreihe kann grösser werden, wenn diese abgeleitet wird.

(7) Die Menge der berechenbaren reellen Zahlen bilden einen Körper.

(8) Gilt $f(a) < 0 < f(b)$ für eine stetige Funktion f in $\mathbb{R}$, dann besitzt diese eine Nullstelle.

(9) Jede nach oben beschränkte und monoton fallende Folge (a_n) besitzt einen Grenzwert. (2x)

(10) Wenn f in $\mathbb{R}$ stetig ist, dann ist f in jedem endlichen Intervall von $\mathbb{R}$ integrierbar. (2x)

(11) Jede reelle Zahl kann mit einem Algorithmus berechnet werden.

(12) Jede Funktion ist berechenbar.

(13) Sei $a_n \in (0,1)^\infty$. Konvergiert $(\sqrt{a_n})$ dann konvergiert auch (a_n).

(14) Jede nach unten beschränkte und monoton steigende Folge besitzt einen Grenzwert.

(15) Sei f eine beliebige Funktion in $\mathbb{R}$. Wenn f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist, dann ist $\frac{1}{f}$ in $\mathbb{R}$ stetig.

Definitionen

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$. Definieren Sie (ggf. nur mit Hilfe von Nullfolgen)

a) f besitzt einen Grenzwert $M \in \mathbb{R}$ in x_0 (2x)

b) Eine Folge (a_n) konvergiert gegen den Grenzwert $M \in \mathbb{R}$

c) f ist differenzierbar in x_0 (alt. stetig)

d) f ist differenzierbar auf $\mathbb{R}$ (alt. stetig)

Beweise

(1) Seien f und g differenzierbare Funktionen auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie mit Hilfe von Nullfolgen, dass $q(x) = f(x) - 2g(x)$ differenzierbar auf $\mathbb{R}$ ist. (2x)

(2) Seien f und g in $\mathbb{R}$ stetige Funktionen. Zeigen Sie mit Hilfe von Nullfolgen, dass $q(x) = f(x) - g(x)$ stetig in $\mathbb{R}$ ist.

(3) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeigen oder widerlegen Sie (alt. mit Nullfolgen)

   (a) Wenn f^2 differenzierbar auf $\mathbb{R}$ ist, dann ist f auch differenzierbar auf $\mathbb{R}$.

(b) Wenn f stetig in $\mathbb{R}$ ist, dann ist f auch differenzierbar auf $\mathbb{R}$.

(c) Wenn f stetig in $\mathbb{R}$ ist, dann ist auch f^2 stetig in $\mathbb{R}$.

(d) Wenn f^2 stetig in $\mathbb{R}$ ist, dann ist auch f stetig in $\mathbb{R}$,

Rekurrenzen

a) Finden Sie eine Rekurrenz g_n mit

$$(1-2x-x^2)\left(\sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n\right) = 1$$

(2x)

b) Bestimmen Sie eine Formel für $f_n \in \mathbb{R}$ (eine Rekurrenz mit den entsprechenden Startwerten $f_0, f_1, f_2 \in \mathbb{Q}$) mit

$$(1+3x+2x^2+x^3)\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n\right) = 1$$

Grenzwerte

a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+4)\sqrt[5]{32+\frac{1}{n}}}{3n+16}$$

b)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x+2x^3+5x^7}{2e^{2x}-e^x-1}$$

c)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{8e^{2n}+1}{e^{2n}+4e^n+1}+\frac{n}{n+1}}$$

d)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{xe^x}$$

e)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{8n^{100}+1}{2n^{100}+50n^{50}+1}+5}$$

f)

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x+x^2+2x^{10}}{e^{3x}-ex}$$

g)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n+e^{n^2}+5e^{n^3}}{1+e^{n^3}}$$

h)

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x+x^2+2x^5}{e^{x^2}-e^{2x}}$$

Konvergenz(radien)

Ermitteln Sie den Konvergenzradius.

a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{12}}{(4n+1)^{12}} x^n$$

b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n}}{(2n)^n} x^n$$

c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{(2n+1)^{10}} x^n$$

d)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^n} x^n$$

e)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{2n}}{n^n} x^n$$

Entscheiden Sie, ob folgende Reihen konvergieren.

a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{100}}{n^{100}}$$

b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\pi}$$

d)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^2+2^{-n}+2}$$

e)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(2n)!}$$

f)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{4n+1}}{n^n}$$

Stammfunktionen

a)
$$\int xe^{4x}$$

b)
$$\int x^3 e^x$$

c)
$$\int \sin(x) e^{-2\cos(x)}$$

d)
$$\int \frac{\sqrt{\frac{1}{x^3}+5}}{x^4}$$

e)
$$\int \sin(x)^2$$

f)
$$\int \sin(x) e^{\cos(x)}$$

g)
$$\int x^2 \sin(x^3)$$

h)
$$\int x^2 e^x$$

i)
$$\int \ln(5x)$$

Ableitungen

a) $f(x) = (1-x)^a$ mit $a \in \mathbb{R}$

b) $f(x) = a^{1-x}$ mit $a \in (0, \infty)$

c) $f(x) = (1-x)^{1-x}$