**Aufgabe 1.**

a) $h$ ist ein Graphenhomomorphismus. Es gilt

$$\forall\, u, v \in V_1 : (u, v) \in E_1 \Rightarrow (h(u), h(v)) \in E_2$$

unter Annahme von $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$.

b) $h$ ist ein Graphenhomomorphismus. Für alle $x \in V_1$ gilt auch $h(x) = 1$, somit gilt auch immer $h(x) \in \{1\}$.

c) $h$ ist kein Graphenhomomorphismus. Es gibt keinen direkten Weg von der Kreuzung Graben/Kollegiumgasse (1) zur Kreuzung Kollegiumgasse/Pfarrplatz (2), die entsprechende Straße ist eine Einbahn in die entgegengesetzte Richtung.

**Aufgabe 2.** $G_1$ und $G_3$ können nicht zu $G_2$ isomorph sein. $G_1$ und $G_3$ beinhalten beide einen Knoten (1 bzw. 7) mit zwei nach außen und keinen nach innen gerichteten Kanten. $G_2$ beinhaltet keinen solchen Knoten.

$G_1$ und $G_3$ sind zueinander isomorph, ein Isomorphismus $h$ ist etwa

$$\begin{array}{c|ccccccc} v & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline h(v) & 7 & 4 & 1 & 2 & 5 & 3 & 6 \end{array}\,.$$

**Aufgabe 3.** Es gibt einen bijektiven Graphenhomomorphismus $h : V_1 \to V_2$ (und einen Graphenhomomorphismus $h^{-1} : V_2 \to V_1$). Der Graph $U = (V_u, E_u)$ sei ein beliebiger Untergraph von $G_1$, somit gibt es einen injektiven Graphenhomomorphismus $t : V_u \to V_1$. Zu zeigen ist, dass es nun auch einen einen injektiven Graphenhomomorphismus $f : V_u \to V_2$ gibt.

Es gelte $f = h \circ t$. Diese Funktion ist injektiv (Skriptum, Satz 1.1, S. 15) und ein Graphenhomomorphismus von $V_u$ nach $V_2$ nachdem gilt, dass

$$\forall\, u, v \in V_u : (u, v) \in E_u \Rightarrow (t(u), t(v)) \in E_1$$

und

$$\forall\, u, v \in V_1 : (u, v) \in E_1 \Rightarrow (h(u), h(v)) \in E_2$$

beziehungsweise also

$$\forall\, u, v \in V_u : (u, v) \in E_u \Rightarrow (h(t(u)), h(t(v))) \in E_2.$$