

## Multiple Choice

- (1) Die reellen Zahlen können geordnet werden. (2x)
- (2) Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  invertierbar. Ist  $f$  differenzierbar auf  $\mathbb{R}$  dann ist auch  $f^{-1}$  differenzierbar auf  $\mathbb{R}$ . (2x)
- (3) Jede nach unten beschränkte und monoton fallende Folge besitzt einen Grenzwert.
- (4)  $(e^{3x})' = e^{3x}$
- (5) Ist  $(a_n)$  konvergent, dann ist auch  $(\sum_{k=1}^n (a_{k+1} - a_k))$  konvergent. (2x)
- (6) Der Konvergenzradius einer Potenzreihe kann grösser werden, wenn diese abgeleitet wird.
- (7) Die Menge der berechenbaren reellen Zahlen bilden einen Körper.
- (8) Gilt  $f(a) < 0 < f(b)$  für eine stetige Funktion  $f$  in  $\mathbb{R}$ , dann besitzt diese eine Nullstelle.
- (9) Jede nach oben beschränkte und monoton fallende Folge  $(a_n)$  besitzt einen Grenzwert. (2x)
- (10) Wenn  $f$  in  $\mathbb{R}$  stetig ist, dann ist  $f$  in jedem endlichen Intervall von  $\mathbb{R}$  integrierbar. (2x)
- (11) Jede reelle Zahl kann mit einem Algorithmus berechnet werden.
- (12) Jede Funktion ist berechenbar.
- (13) Sei  $a_n \in (0, 1)^\infty$ . Konvergiert  $(\sqrt{a_n})$  dann konvergiert auch  $(a_n)$ .
- (14) Jede nach unten beschränkte und monoton steigende Folge besitzt einen Grenzwert.
- (15) Sei  $f$  eine beliebige Funktion in  $\mathbb{R}$ . Wenn  $f$  auf  $\mathbb{R}$  differenzierbar ist, dann ist  $\frac{1}{f}$  in  $\mathbb{R}$  stetig.

## Definitionen

Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Definieren Sie (ggf. nur mit Hilfe von Nullfolgen)

- a)  $f$  besitzt einen Grenzwert  $M \in \mathbb{R}$  in  $x_0$  (2x)
- b) Eine Folge  $(a_n)$  konvergiert gegen den Grenzwert  $M \in \mathbb{R}$
- c)  $f$  ist differenzierbar in  $x_0$  (alt. stetig)
- d)  $f$  ist differenzierbar auf  $\mathbb{R}$  (alt. stetig)

## Beweise

- (1) Seien  $f$  und  $g$  differenzierbare Funktionen auf  $\mathbb{R}$ . Zeigen Sie mit Hilfe von Nullfolgen, dass  $q(x) = f(x) - 2g(x)$  differenzierbar auf  $\mathbb{R}$  ist. (2x)
- (2) Seien  $f$  und  $g$  in  $\mathbb{R}$  stetige Funktionen. Zeigen Sie mit Hilfe von Nullfolgen, dass  $q(x) = f(x) - g(x)$  stetig in  $\mathbb{R}$  ist.
- (3) Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Zeigen oder widerlegen Sie (alt. mit Nullfolgen)
  - (a) Wenn  $f^2$  differenzierbar auf  $\mathbb{R}$  ist, dann ist  $f$  auch differenzierbar auf  $\mathbb{R}$ .

- (b) Wenn  $f$  stetig in  $\mathbb{R}$  ist, dann ist  $f$  auch differenzierbar auf  $\mathbb{R}$ .  
(c) Wenn  $f$  stetig in  $\mathbb{R}$  ist, dann ist auch  $f^2$  stetig in  $\mathbb{R}$ .  
(d) Wenn  $f^2$  stetig in  $\mathbb{R}$  ist, dann ist auch  $f$  stetig in  $\mathbb{R}$ ,

## Rekurrenzen

- a) Finden Sie eine Rekurrenz  $g_n$  mit

$$(1 - 2x - x^2) \left( \sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n \right) = 1$$

(2x)

- b) Bestimmen Sie eine Formel für  $f_n \in \mathbb{R}$  (eine Rekurrenz mit den entsprechenden Startwerten  $f_0, f_1, f_2 \in \mathbb{Q}$ ) mit

$$(1 + 3x + 2x^2 + x^3) \left( \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n \right) = 1$$

## Grenzwerte

a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+4) \sqrt[5]{32 + \frac{1}{n}}}{3n+16}$$

e)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{8n^{100} + 1}{2n^{100} + 50n^{50} + 1}} + 5$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x + 2x^3 + 5x^7}{2e^{2x} - e^x - 1}$$

f)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + x^2 + 2x^{10}}{e^{3x} - ex}$$

c)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{8e^{2n} + 1}{e^{2n} + 4e^n + 1}} + \frac{n}{n+1}$$

g)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n + e^{n^2} + 5e^{n^3}}{1 + e^{n^3}}$$

d)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{xe^x}$$

h)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + x^2 + 2x^5}{e^{x^2} - e^{2x}}$$

## Konvergenz(radien)

Ermitteln Sie den Konvergenzradius.

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{12}}{(4n+1)^{12}} x^n$$

c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{(2n+1)^{10}} x^n$$

e)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{2n}}{n^n} x^n$$

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n}}{(2n)^n} x^n$$

d)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^n} x^n$$

Entscheiden Sie, ob folgende Reihen konvergieren.

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{100}}{n^{100}}$$

c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\pi}$$

e)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(2n)!}$$

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

d)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^2 + 2^{-n} + 2}$$

f)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{4n+1}}{n^n}$$

## Stammfunktionen

a)

$$\int x e^{4x}$$

d)

$$\int \frac{\sqrt{\frac{1}{x^3} + 5}}{x^4}$$

f)

$$\int \sin(x) e^{\cos(x)}$$

h)

$$\int x^2 e^x$$

b)

$$\int x^3 e^x$$

e)

$$\int \sin(x)^2$$

g)

$$\int x^2 \sin(x^3)$$

i)

$$\int \ln(5x)$$

c)

$$\int \sin(x) e^{-2 \cos(x)}$$

## Ableitungen

a)  $f(x) = (1-x)^a$  mit  $a \in \mathbb{R}$ c)  $f(x) = (1-x)^{1-x}$ b)  $f(x) = a^{1-x}$  mit  $a \in (0, \infty)$