Aufgabe 1. Induktionsanfang: Für $n = 0$ gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{0}(-1)^k\binom{m+1}{k} &= (-1)^0\binom{m}{0}\\ (-1)^0\binom{m+1}{0} &= (-1)^0\binom{m}{0}\\ 1 &= 1\end{aligned}$$

nachdem für beliebiges $x \in \mathbb{N}$ gilt, dass $x^0 = 1$ und $\binom{x}{0} = 1$.

Induktionsvorraussetzung: Angenommen $n \in \mathbb{N}$ ist so, dass

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{m+1}{k} = (-1)^n\binom{m}{n} \tag{1}$$

gilt.

Induktionsschritt: Zu zeigen ist, dass dann auch

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\binom{m+1}{k} &= (-1)^{n+1}\binom{m}{n+1} &(2)\\ \left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{m+1}{k}\right) + (-1)^{n+1}\binom{m+1}{n+1} &= (-1)^{n+1}\binom{m}{n+1}\\ (-1)^n\binom{m}{n} + (-1)^{n+1}\binom{m+1}{n+1} &= (-1)^{n+1}\binom{m}{n+1} &(3)\end{aligned}$$

gilt. In (3) wurde (1) angewendet. Wenn n gerade dann $(-1)^n = 1$, andernfalls $(-1)^n = -1$. Angenommen n gerade (also $n+1$ ungerade), dann gilt für (3), dass

$$\begin{aligned}\binom{m}{n} - \binom{m+1}{n+1} &= -\binom{m}{n+1}\\ -\binom{m+1}{n+1} &= -\binom{m}{n+1} - \binom{m}{n}\\ \binom{m+1}{n+1} &= \binom{m}{n} + \binom{m}{n+1}.\end{aligned}$$

Angenommen n ungerade (also $n+1$ gerade), dann gilt für (3), dass

$$\begin{aligned}-\binom{m}{n} + \binom{m+1}{n+1} &= \binom{m}{n+1}\\ \binom{m+1}{n+1} &= \binom{m}{n} + \binom{m}{n+1}.\end{aligned}$$

Gemäß der Rekurrenz des Pascal-Dreiecks $\binom{m+1}{n+1} = \binom{m}{n} + \binom{m}{n+1}$ ist nun (2) bewiesen.

Aufgabe 2 Wir wissen $F_0 = 0$ und $F_1 = 1$.

Induktionsanfang: Für $n = 0$ gilt

$$\begin{aligned} F_0 &= (2F_1 - F_0)F_0 \\ 0 &= (2-0)0 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} F_1 &= F_1^2 + F_0^2 \\ 1 &= 1 + 0 \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

Induktionsvorraussetzung: Angenommen $n \in \mathbb{N}$ ist so, dass

$$F_{2n} = (2F_{n+1} - F_n)F_n \qquad\qquad F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2$$

gilt.

Induktionsschritt: Zu zeigen ist, dass dann auch

$$F_{2n+2} = (2F_{n+2} - F_{n+1})F_{n+1} \quad (4) \qquad\qquad F_{2n+3} = F_{n+2}^2 + F_{n+1}^2 \quad (5)$$

gilt. Wir wissen $F_{2n+2} = F_{2n+1} + F_{2n}$ und somit

$$\begin{aligned} (2F_{n+2} - F_{n+1})F_{n+1} &= F_{n+1}^2 + F_n^2 + (2F_{n+1} - F_n)F_n \\ (2F_{n+2} - F_{n+1})F_{n+1} &= F_{n+1}^2 + F_n^2 + 2F_{n+1}F_n - F_n^2 \\ (2F_{n+2} - F_{n+1})F_{n+1} &= F_{n+1}^2 + 2F_{n+1}F_n \\ 2F_{n+2} - F_{n+1} &= F_{n+1} + 2F_n \\ F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n, \end{aligned}$$

womit (4) bewiesen ist.

Wir wissen $F_{2n+3} = F_{2n+2} + F_{2n+1}$ und somit

$$\begin{aligned} F_{n+2}^2 + F_{n+1}^2 &= (2F_{n+2} - F_{n+1})F_{n+1} + F_{n+1}^2 + F_n^2 \\ F_{n+2}^2 &= (2F_{n+2} - F_{n+1})F_{n+1} + F_n^2. \end{aligned}$$

Nachdem $F_{n+2} - F_{n+1} = F_n$ und somit $2F_{n+2} - F_{n+1} = F_{n+2} + F_{n+2} - F_{n+1} = F_{n+2} + F_n$, gilt

$$\begin{aligned} F_{n+2}^2 &= (F_{n+2} + F_n)F_{n+1} + F_n^2 \\ F_{n+2}^2 - F_n^2 &= (F_{n+2} + F_n)F_{n+1} \\ F_{n+2} - F_n &= F_{n+1} \\ F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n, \end{aligned}$$

womit (5) bewiesen ist.

Aufgabe 3

a) Wir haben $f(x) = rx(1-x)$, es gilt $f'(x) = -2rx + r$ und $f''(x) = -2r$. An der Stelle

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &= -2rx + r \\ \frac{-r}{-2r} &= x \\ \frac{1}{2} &= x \end{aligned}$$

befindet sich eine Extremstelle. Nachdem f'' für unser r immer negativ ist, ist an dieser Stelle das Maximum von f. Die Funktion $f(x_n)$ modelliert den Wert x_{n+1}. Somit ist n_{x+1} das Maximum wenn $x_n = \frac{1}{2}$, das größtmögliche x_{n+1} kann nun durch

$$x_{n+1} = r \cdot \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}r$$

beschrieben werden. Nachdem $0 < r < 4$ gilt demzufolge $0 < x_{n+1} < 1$.

b) Induktionsanfang: Zu zeigen ist, dass $x_1 < 1$. Unter der Annahme $0 \leq x_0 \leq 1$ ist x_1 nach a) immer kleiner als 1.

Induktionsvorraussetzung: Angenommen $n \in \mathbb{N}$ ist so, dass $x_n < \frac{1}{n}$ gilt.

Induktionsschritt: Zu zeigen ist nun, dass $x_{n+1} < \frac{1}{n+1}$. Es gilt $x_{n+1} = rx_n(1-x_n)$ und hierfür $rx_n(1 - x_n) \leq x_n(1 - x_n)$ nachdem $r \leq 1$, somit wird r nicht weiter beachtet. Wir wissen $x_n(1 - x_n) < \frac{1}{n}(1 - \frac{1}{n})$ nachdem $x_n < \frac{1}{n}$. Es gilt

$$\frac{1}{n}(1 - \frac{1}{n}) = \frac{n-1}{n^2} = \frac{(n-1)(n+1)}{n^2(n+1)} = \frac{n^2-1}{n^2} \cdot \frac{1}{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \cdot \frac{1}{n+1},$$

woraus folgt, dass $\frac{n-1}{n^2} \leq \frac{1}{n+1}$ beziehungsweise in weiterer Folge $x_n < \frac{1}{n} < \frac{1}{n+1}$, was zu zeigen war.

c) Man betrachte f aus a). Im gegebenen Fall muss gelten, dass

$$\begin{aligned} n &= f(n) = rn(1-n) \\ \frac{1}{r} &= 1 - n \\ \frac{r-1}{r} &= n. \end{aligned} \tag{6}$$

Man wähle nun also ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x_{n+1} = \frac{r-1}{r}$, dann gilt gemäß (6) $x_n = x_{n+1}$.