

Aufgabe 1. Für $n = 0$ gilt

$$\sum_{i=0}^0 r^i = r^0 = 1 = \frac{1-r}{1-r},$$

Wir nehmen nun an, dass

$$\sum_{i=0}^n r^i = \frac{1-r^{n+1}}{1-r},$$

und zeigen

$$\sum_{i=0}^{n+1} r^i = \frac{1-r^{n+2}}{1-r}.$$

Nachdem

$$\sum_{i=0}^{n+1} r^i = r^{n+1} + \sum_{i=0}^n r^i$$

muss weiters

$$\begin{aligned} \frac{1-r^{n+2}}{1-r} &= r^{n+1} + \frac{1-r^{n+1}}{1-r} \\ &= \frac{r^{n+1}(1-r)}{1-r} + \frac{1-r^{n+1}}{1-r} \\ &= \frac{r^{n+1}(1-r) + 1-r^{n+1}}{1-r} \\ &= \frac{r^{n+1} - r^{n+2} + 1 - r^{n+1}}{1-r} \\ &= \frac{1-r^{n+2}}{1-r}. \end{aligned}$$

Aufgabe 2.

- a) Für $n = 1$ haben wir $\sum_{k=1}^1 (2k-1) = 2-1 = 1 = 1^2$. Unter Annahme von $\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$ soll nun $\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = (n+1)^2$ gelten. Wir haben

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = 2(n+1) - 1 + \sum_{k=1}^n (2k-1) = 2n+1 + \sum_{k=1}^n (2k-1)$$

und zeigen nun (siehe binomische Formel)

$$\begin{aligned} (n+1)^2 &= 2n+1 + n^2 \\ n^2 + 2n+1 &= 2n+1 + n^2 \end{aligned}$$

- b) Für $n = 1$ haben wir $\sum_{k=1}^1 k^3 = 1 = (\sum_{k=1}^1 k)^2$. Unter Annahme von $\sum_{k=1}^n k^3 = (\sum_{k=1}^n k)^2$ soll nun $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = (\sum_{k=1}^{n+1} k)^2$ gelten.

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} k \right)^2 \\
 (n+1)^3 + \sum_{k=1}^n k^3 &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} k \right)^2 \\
 (n+1)^3 + \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2 &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} k \right)^2 \\
 (n+1)^3 + \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 &= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right)^2 \\
 (n+1)^3 + \frac{(n(n+1))^2}{4} &= \frac{((n+1)(n+2))^2}{4} \\
 (n+1)^3 + \frac{n^2 + 2n^3 + n^4}{4} &= \frac{4 + 12n + 13n^2 + 6n^3 + n^4}{4} \\
 1 + 3n + 3n^2 + n^3 + \frac{n^2 + 2n^3 + n^4}{4} &= \frac{4 + 12n + 13n^2 + 6n^3 + n^4}{4} \\
 4 + 12n + 13n^2 + 6n^3 + n^4 &= 4 + 12n + 13n^2 + 6n^3 + n^4
 \end{aligned}$$

Aufgabe 3. Für $n = 1$ gilt $(1+x)^1 = 1+x \geq 1+x$. Unter Annahme von $(1+x)^n \geq 1+nx$ soll nun $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$ gelten.

$$\begin{aligned}
 (1+x)^{n+1} &\geq 1+(n+1)x \\
 (1+x)(1+x)^n &\geq 1+nx+x \\
 (1+x)(1+nx) &\geq 1+nx+x \quad (\text{Einsetzen eines } \leq \text{ Wertes}) \\
 1+nx+x+n(x^2) &\geq 1+nx+x \\
 n(x^2) &\geq 0
 \end{aligned}$$

Letzterer Ausdruck ist wahr nachdem x^2 sicher positiv oder Null ist und $n \geq 1$.

Aufgabe 4.

- a) Seien a und b neutrale Elemente bezüglich der Addition in K und x und y neutrale Elemente bezüglich der Multiplikation in K .

$$\begin{aligned}
 a+b &= a \quad \text{und} \quad a+b = b, \quad \text{demzufolge } a = b. \\
 xy &= x \quad \text{und} \quad xy = y, \quad \text{demzufolge } x = y.
 \end{aligned}$$

- b) Seien x und y additive Inverse von a in K . (Verwendet Assoziativität der Addition.)

$$x = x + 0 = x + (a + y) = (x + a) + y = 0 + y = y$$

- c) Seien x und y multiplikative Inverse von a in K mit $a \neq 0$. (Verwendet Assoziativität der Multiplikation.)

$$x = x \cdot 1 = x \cdot (a \cdot y) = (x \cdot a) \cdot y = 1 \cdot y = y$$

Aufgabe 5.

- a) Zu zeigen ist $c^{-1}d^{-1} = (cd)^{-1}$, anders formuliert

$$(c^{-1}d^{-1})(cd) = cc^{-1}dd^{-1} = 1 \cdot 1 = 1.$$

(Verwendet Assoziativität und Kommutativität der Multiplikation in der ersten Umformung, und die Eindeutigkeit des multiplikativen Inverses für die Schlussfolgerung.)

- b) Zu zeigen ist

$$\begin{aligned} \frac{a}{c} + \frac{b}{d} &= ac^{-1} + bd^{-1} = ac^{-1}dd^{-1} + bd^{-1}cc^{-1} \\ &= c^{-1}d^{-1}(ad + bc) \\ &= (ad + bc)(cd)^{-1} = \frac{ad + bc}{cd} \end{aligned}$$

(Verwendet Neutralelement, „Herausheben“ und 5a.)

Aufgabe 6.

- 7) Es gibt ein $\frac{1}{1} \in \mathbb{Q}$ mit $\frac{1}{1} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$ für alle $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$.

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{a}{b} = \frac{1 \cdot a}{1 \cdot b} = \frac{a}{b}$$

- 8) Für alle $\frac{a}{b} \neq 0 \in \mathbb{Q}$ gibt es ein $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$ mit $\frac{a}{b} \cdot \frac{x}{y} = 1$. Sei $\frac{x}{y} = \frac{b}{a}$.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{ba} = ab(ba)^{-1} = aa^{-1}bb^{-1} = 1$$

- 9) Für $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3} \in \mathbb{Q}$ gilt

$$\frac{p_1}{q_1} \cdot \left(\frac{p_2}{q_2} + \frac{p_3}{q_3} \right) = \frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2q_3 + p_3q_2}{q_2q_3} = \frac{p_1}{q_1} \cdot \left(\frac{p_2q_3}{q_2q_3} + \frac{p_3q_2}{q_2q_3} \right) = \frac{p_1}{q_1} \cdot \left(\frac{p_2}{q_2} + \frac{p_3}{q_3} \right)$$

Aufgabe 7. Für die Assoziativität gilt es zu zeigen, dass

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} b_m c_k x^{m+k} \right) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_n b_m x^{n+m} \right) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \\ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_n b_m c_k x^{n+m+k} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_n b_m c_k x^{n+m+k} \end{aligned}$$

Für die Kommutativität gilt es zu zeigen, dass

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_n b_m x^{n+m} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} b_n a_m x^{n+m}\end{aligned}$$

Aufgabe 8. Angenommen $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$, dann gibt es $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $\sqrt{3} = \frac{x}{y}$ wobei angenommen werden kann, dass $\text{ggT}(x, y) = 1$. Aus der Annahme folgt

$$\begin{array}{ll} 3 = \frac{x^2}{y^2} & \\ 3y^2 = x^2 & x \text{ ist teilbar durch } 3 \\ 3y^2 = (3k)^2 & \text{für ein bestimmtes } k \in \mathbb{Z} \\ 3y^2 = 9k^2 & \\ y^2 = 3k^2 & y \text{ ist ebenfalls teilbar durch } 3, \text{ Widerspruch} \end{array}$$