

**Aufgabe 1.** Induktionsanfang: Für  $n = 0$  gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^0 (-1)^k \binom{m+1}{k} &= (-1)^0 \binom{m}{0} \\ (-1)^0 \binom{m+1}{0} &= (-1)^0 \binom{m}{0} \\ 1 &= 1\end{aligned}$$

nachdem für beliebiges  $x \in \mathbb{N}$  gilt, dass  $x^0 = 1$  und  $\binom{x}{0} = 1$ .

Induktionsvoraussetzung: Angenommen  $n \in \mathbb{N}$  ist so, dass

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{m+1}{k} = (-1)^n \binom{m}{n} \quad (1)$$

gilt.

Induktionsschritt: Zu zeigen ist, dass dann auch

$$\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{m+1}{k} = (-1)^{n+1} \binom{m}{n+1} \quad (2)$$

$$\begin{aligned}\left( \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{m+1}{k} \right) + (-1)^{n+1} \binom{m+1}{n+1} &= (-1)^{n+1} \binom{m}{n+1} \\ (-1)^n \binom{m}{n} + (-1)^{n+1} \binom{m+1}{n+1} &= (-1)^{n+1} \binom{m}{n+1}\end{aligned} \quad (3)$$

gilt. In (3) wurde (1) angewendet. Wenn  $n$  gerade dann  $(-1)^n = 1$ , andernfalls  $(-1)^n = -1$ . Angenommen  $n$  gerade (also  $n+1$  ungerade), dann gilt für (3), dass

$$\begin{aligned}\binom{m}{n} - \binom{m+1}{n+1} &= -\binom{m}{n+1} \\ -\binom{m+1}{n+1} &= -\binom{m}{n+1} - \binom{m}{n} \\ \binom{m+1}{n+1} &= \binom{m}{n} + \binom{m}{n+1}.\end{aligned}$$

Angenommen  $n$  ungerade (also  $n+1$  gerade), dann gilt für (3), dass

$$\begin{aligned}-\binom{m}{n} + \binom{m+1}{n+1} &= \binom{m}{n+1} \\ \binom{m+1}{n+1} &= \binom{m}{n} + \binom{m}{n+1}.\end{aligned}$$

Gemäß der Rekurrenz des Pascal-Dreiecks  $\binom{m+1}{n+1} = \binom{m}{n} + \binom{m}{n+1}$  ist nun (2) bewiesen.

**Aufgabe 2** Wir wissen  $F_0 = 0$  und  $F_1 = 1$ .

Induktionsanfang: Für  $n = 0$  gilt

$$\begin{array}{ll} F_0 = (2F_1 - F_0)F_0 & F_1 = F_1^2 + F_0^2 \\ 0 = (2 - 0)0 & 1 = 1 + 0 \\ 0 = 0 & 1 = 1 \end{array}$$

Induktionsvoraussetzung: Angenommen  $n \in \mathbb{N}$  ist so, dass

$$F_{2n} = (2F_{n+1} - F_n)F_n \qquad F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2$$

gilt.

Induktionsschritt: Zu zeigen ist, dass dann auch

$$F_{2n+2} = (2F_{n+2} - F_{n+1})F_{n+1} \qquad (4) \qquad F_{2n+3} = F_{n+2}^2 + F_{n+1}^2 \qquad (5)$$

gilt. Wir wissen  $F_{2n+2} = F_{2n+1} + F_{2n}$  und somit

$$\begin{aligned} (2F_{n+2} - F_{n+1})F_{n+1} &= F_{n+1}^2 + F_n^2 + (2F_{n+1} - F_n)F_n \\ (2F_{n+2} - F_{n+1})F_{n+1} &= F_{n+1}^2 + F_n^2 + 2F_{n+1}F_n - F_n^2 \\ (2F_{n+2} - F_{n+1})F_{n+1} &= F_{n+1}^2 + 2F_{n+1}F_n \\ 2F_{n+2} - F_{n+1} &= F_{n+1} + 2F_n \\ F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n, \end{aligned}$$

womit (4) bewiesen ist.

Wir wissen  $F_{2n+3} = F_{2n+2} + F_{2n+1}$  und somit

$$\begin{aligned} F_{n+2}^2 + F_{n+1}^2 &= (2F_{n+2} - F_{n+1})F_{n+1} + F_{n+1}^2 + F_n^2 \\ F_{n+2}^2 &= (2F_{n+2} - F_{n+1})F_{n+1} + F_n^2. \end{aligned}$$

Nachdem  $F_{n+2} - F_{n+1} = F_n$  und somit  $2F_{n+2} - F_{n+1} = F_{n+2} + F_{n+2} - F_{n+1} = F_{n+2} + F_n$ , gilt

$$\begin{aligned} F_{n+2}^2 &= (F_{n+2} + F_n)F_{n+1} + F_n^2 \\ F_{n+2}^2 - F_n^2 &= (F_{n+2} + F_n)F_{n+1} \\ F_{n+2} - F_n &= F_{n+1} \\ F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n, \end{aligned}$$

womit (5) bewiesen ist.

### Aufgabe 3

a) Wir haben  $f(x) = rx(1-x)$ , es gilt  $f'(x) = -2rx + r$  und  $f''(x) = -2r$ . An der Stelle

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 = -2rx + r \\ \frac{-r}{-2r} &= x \\ \frac{1}{2} &= x \end{aligned}$$

befindet sich eine Extremstelle. Nachdem  $f''$  für unser  $r$  immer negativ ist, ist an dieser Stelle das Maximum von  $f$ . Die Funktion  $f(x_n)$  modelliert den Wert  $x_{n+1}$ . Somit ist  $x_{n+1}$  das Maximum wenn  $x_n = \frac{1}{2}$ , das größtmögliche  $x_{n+1}$  kann nun durch

$$x_{n+1} = r \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}r$$

beschrieben werden. Nachdem  $0 < r < 4$  gilt demzufolge  $0 < x_{n+1} < 1$ .

- b) Induktionsanfang: Zu zeigen ist, dass  $x_1 < 1$ . Unter der Annahme  $0 \leq x_0 \leq 1$  ist  $x_1$  nach a) immer kleiner als 1.

Induktionsvoraussetzung: Angenommen  $n \in \mathbb{N}$  ist so, dass  $x_n < \frac{1}{n}$  gilt.

Induktionsschritt: Zu zeigen ist nun, dass  $x_{n+1} < \frac{1}{n+1}$ . Es gilt  $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$  und hierfür  $rx_n(1 - x_n) \leq x_n(1 - x_n)$  nachdem  $r \leq 1$ , somit wird  $r$  nicht weiter beachtet. Wir wissen  $x_n(1 - x_n) < \frac{1}{n}(1 - \frac{1}{n})$  nachdem  $x_n < \frac{1}{n}$ . Es gilt

$$\frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{n-1}{n^2} = \frac{(n-1)(n+1)}{n^2(n+1)} = \frac{n^2-1}{n^2} \cdot \frac{1}{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \cdot \frac{1}{n+1},$$

woraus folgt, dass  $\frac{n-1}{n^2} \leq \frac{1}{n+1}$  beziehungsweise in weiterer Folge  $x_n < \frac{1}{n} < \frac{1}{n+1}$ , was zu zeigen war.

- c) Man betrachte  $f$  aus a). Im gegebenen Fall muss gelten, dass

$$\begin{aligned} n &= f(n) = rn(1 - n) \\ \frac{1}{r} &= 1 - n \\ \frac{r-1}{r} &= n. \end{aligned} \tag{6}$$

Man wähle nun also ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $x_{n+1} = \frac{r-1}{r}$ , dann gilt gemäß (6)  $x_n = x_{n+1}$ .