Aufgabe 1. Es gilt

$$\lim\left(\sin(n)\cdot\frac{1}{n}\right)=\lim\sin(n)\cdot\lim\frac{1}{n}=0$$

weil $\sin(n)$ beschränkt ist und $\lim\frac{1}{n}=0$.

Aufgabe 2.

$$a_{n+1}=\sqrt{2a_n}=\sqrt{2\sqrt{2a_{n-1}}}=\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2a_{n-2}}}}=\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\sqrt[8]{a_{n-2}}$$

Aufgabe 3. Weil T eine obere Schranke ist, gilt $a_n\leq T$ für alle n.

$$T_n=\max\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}\quad\text{und}\quad a_1\leq T,a_2\leq T,\ldots,a_n\leq T\quad\text{somit}\quad\max\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}\leq T$$

Also gilt $T_n\leq T$.

Aufgabe 4. T_n ist nach oben durch T beschränkt und monoton wachsend (wegen max), also gibt es ein eindeutiges $\lim T_n=T_0$. T_0 ist $\geq a_n$ für alle n aber auch $\in(a_n)$, also das Maximum und somit auch das Supremum.

Aufgabe 5.

a) Wir interessieren uns nur für gerade n, andernfalls ist $a_n=\frac{1}{n}$ und für das sup irrelevant (weil kleiner).

$$A_k=\sup_{n\geq k}a_n=\sup_{n\geq 1}a_{n+k-1}=2+\frac{1}{k}$$

Nachdem $\lim A_k=2$ ist $\limsup\cdots=2$.

b) $(b)_n$ ist nicht nach oben beschränkt ($\lim b_n=\infty$), es gilt somit $\limsup_{k\to\infty}=\infty$.

c) Wir sind wieder nur an geraden n interessiert und haben

$$C_k=\frac{1}{n}\quad\text{somit}\quad\limsup_{n\to\infty}c_n=0$$

Aufgabe 6. Sei $k\in\mathbb{N}$, und

$$\begin{aligned}A_k&=\sup\{a_k,a_{k+1},\ldots\}&&\Longrightarrow&&\limsup_{n\to\infty}a_n=\lim_{k\to\infty}A_k\\B_k&=\sup\{a_k,a_{k+1},\ldots\}&&\Longrightarrow&&\limsup_{n\to\infty}b_n=\lim_{k\to\infty}B_k\\C_k&=\sup\{a_k+b_k,a_{k+1}+b_{k+1},\ldots\}&&\Longrightarrow&&\limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{k\to\infty}C_k\end{aligned}$$

Wähle ein k, dann gilt für $n\geq k$

$$a_n+b_n\leq A_k+B_k$$

weil A_k und B_k jeweils das Supremum, also die (kleinste) obere Schranke sind. Klarerweise gilt somit

$$C_k \leq A_k + B_k \quad \text{bzw.} \quad \sup_{n\geq k}(a_n + b_n) \leq \sup_{n\geq k} a_n + \sup_{n\geq k} b_n.$$

was für (a) zu zeigen war, mit $K = 1$.

Für (b) reicht es, den Limes auf beiden Seiten anzuwenden

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{n\geq k}(a_n + b_n) \leq \lim_{k\to\infty} \sup_{n\geq k} a_n + \lim_{k\to\infty} \sup_{n\geq k} b_n$$
$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$$

Aufgabe 7. Sei (a_n) eine konvergente Folge mit $\lim a_n = a$, sie ist also beschränkt — es gibt ein $\sup a_n$ für alle n. Sei $A_k = \sup_{n\geq k} a_n$. Klarerweise ist $A_k \geq A_{k+1} \geq A_{k+2} \geq \cdots$, die Folge ist monoton fallend. Weiters ist (A_k) wie (a_n) beschränkt, somit gibt es ein $\lim_{k\to\infty} \sup_{n\geq k} a_n$ bzw. ein $\limsup_{n\to\infty} a_n = A$.

Sei $\epsilon > 0$, dann gilt für alle $n \geq N_1$

$$|a - a_n| < \epsilon$$

Klarerweise gilt dann für alle $n \geq N_2$

$$|a - \sup_{k\geq n} a_k| < \epsilon.$$

Aufgabe 8.

a) $1, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 4, \ldots$ mit Häufungspunkten 1 und 2.

b) n.

c) Sei (a_n) eine auf a konvergierende Folge mit Häufungspunkten a, b und $a \neq b$. Sei $\epsilon = \frac{|a-b|}{2}$, dann gibt es für alle $n > N$

$$|a_n - a| < \epsilon$$

aber wegen

$$|a_n - b| = |a_n - a + a - b| \geq ||a_n - a| - |a - b|| = ||a_n - a| - 2\epsilon| = 2\epsilon - |a_n - a| \not> \epsilon$$

kann es nicht unendliche viele Punkte die willkürlich nahe an b kommen geben. Also kann b kein Häufungspunkt sein.

d) k für $k > 0$.