Aufgabe 1. Zu zeigen ist

$$|a+b| \leq |a| + |b|.$$

Es gilt $|x| = \max(x, -x)$. Dann ist $|a+b| = \max(a+b, -(a+b)) = \max(a+b, -a-b)$. Weiters, nachdem $\pm x \leq |x|$,

$$\begin{aligned} a+b &\leq |a| + b \leq |a| + |b|, \quad \text{und} \\ -a-b &\leq |a| - b \leq |a| + |b|. \end{aligned}$$

Aufgabe 2.

$$\begin{aligned} 0 &\leq (x-y)^2 && \text{Quadrat einer reellen Zahl ist } \geq 0 \\ 0 &\leq x^2 - 2xy + y^2 \\ 4xy &\leq x^2 + 2xy + y^2 \\ 4xy &\leq (x+y)^2 \\ \sqrt{xy} &\leq \frac{x+y}{2} && \text{Quadratwurzel, dann Division durch 2} \end{aligned}$$

Aufgabe 3.

a) $\frac{2}{\sqrt{5}}$

b) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Aufgabe 4. Wir haben $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$. Für beliebiges $\epsilon > 0$ gibt es ein n_ϵ mit $|0 - |a_n|| < \epsilon$ für $n > n_\epsilon$. Weil $|0 - |a_n|| = ||a_n|| = |a_n| = |0 - a_n|$ gilt auch $|0 - a_n| < \epsilon$ und somit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Aufgabe 5. Sei (a_n) eine Folge die gegen a konvergiert. Für ein $\epsilon > 0$ gibt es also n_ϵ derart, dass

$$|a_n - a| < \epsilon \quad \Longrightarrow \quad |a_n| < |a| + \epsilon \qquad \text{(für alle } n \geq n_\epsilon)$$

Für alle $n \geq n_\epsilon$ haben wir nun also $|a| + \epsilon$ als obere Schranke. Es gibt endlich viele $1 \leq n < n_\epsilon$ also können wir durch $a_m = \max(a_1, a_2, \dots, a_{n_\epsilon - 1})$ eine obere Schranke für $n < n_\epsilon$ finden. Die obere Schranke für (a_n) ist dann $\max(a_m, |a| + 1)$.

Die untere Schranke lässt sich analog konstruieren, unter Verwendung von min und $|a| - \epsilon$.

Aufgabe 6. Angenommen die gegebene Folge (a_n) konvergiert gegen ein a. Für alle $\epsilon > 0$ muss es also ein n_ϵ geben, mit $|a - a_n| < \epsilon$ für $n \geq n_\epsilon$. Sei $\epsilon = \frac{1}{2}$. Es gibt kein a derart, dass für alle $n > n_\epsilon$ gilt

$$\begin{aligned} |a-1| < \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad |a+1| &< \frac{1}{2} \\ |a-1| + |a+1| &< 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 7. Zu zeigen ist, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ gilt.

a) Sei $\epsilon > 0$ und $n_\epsilon = \frac{2}{\epsilon^2}$. Dann gilt

$$|a - a_n| = \left|0 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\epsilon^2}}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{e}} = \frac{e}{\sqrt{2}} < e$$

Aufgabe 8. Sei (a_n) eine gegen a konvergierende Folge. Für alle $\epsilon > 0$ gibt es also ein n_ϵ ab dem für alle $n \geq n_\epsilon$

$$|a - a_n| < \epsilon$$

Dann gilt auch

$$\lambda|a - a_n| < \lambda\epsilon$$
$$|\lambda a - \lambda a_n| < \lambda\epsilon$$

für alle $\epsilon > 0$ und ab jeweiligen n_ϵ. Somit konvergiert (λa_n) gegen λa wenn (a_n) gegen a konvergiert.