

**Aufgabe 1.** Sei  $\epsilon > 0$ . Dann gibt es ein  $N$  derart, dass für alle  $n \geq N$  gilt

$$|a - a_n| < \epsilon \qquad |a - c_n| < \epsilon$$

(Finde  $N_1$  für  $a_n$  und  $N_2$  für  $c_n$ , dann ist  $N = \max(N_1, N_2)$ .) Insbesondere gilt jetzt

$$a - \epsilon < a_n \qquad a + \epsilon > c_n$$

und wegen  $a_n \leq b_n \leq c_n$  weiters

$$\begin{aligned} a - \epsilon &< a_n \leq b_n \leq c_n < a + \epsilon \\ a - \epsilon &< b_n < a + \epsilon \\ -\epsilon &< b_n - a < \epsilon \\ |b_n - a| &< \epsilon, \end{aligned}$$

also  $\lim b_n = a$ .

**Aufgabe 2.**

a)

$$\lim \frac{2n^2 + 3n + 1}{4n^2 - 5n - 1} = \lim \frac{\frac{2n^2 + 3n + 1}{n^2}}{\frac{4n^2 - 5n - 1}{n^2}} = \lim \frac{2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{4 - \frac{5}{n} - \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim 2 + \lim \frac{3}{n} + \lim \frac{1}{n^2}}{\lim 4 - \lim \frac{5}{n} - \lim \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

b)

$$\lim \frac{5n^2 - n + 1}{5n^3 + 5n^2 + 5n - 1} = \lim \frac{\frac{5n^2 - n + 1}{n^3}}{\frac{5n^3 + 5n^2 + 5n - 1}{n^3}} = \lim \frac{\frac{5}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{5 + \frac{5}{n} + \frac{5}{n^2} - \frac{1}{n^3}} = \lim \frac{0}{\dots} = 0$$

c)

$$\begin{aligned} \lim \left( 4n - \frac{(2n-1)^2}{n} \right) &= \lim \frac{4n^2 - (2n-1)^2}{n} = \lim \frac{4n^2 - 4n^2 + 4n - 1}{n} = \lim \frac{4n - 1}{n} \\ &= \lim 4 - \frac{1}{n} = 4 \end{aligned}$$

d) Weg falsch?

$$\lim (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim \sqrt{n+1} - \lim \sqrt{n} = \sqrt{\lim(n+1)} - \sqrt{\lim n} = \infty - \infty = 0$$

**Aufgabe 3.**

a) Wegen

$$\frac{n!}{2^n} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots 1}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2} = \frac{n}{2} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{2} \cdots \frac{1}{2} \geq \frac{n}{4}$$

haben wir  $\frac{n}{4}$  als untere Schranke. Aber  $\lim \frac{n}{4} = \infty$  also  $\lim \frac{n!}{2^n} = \infty$ .

b) Durch

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 1}{n \cdot n \cdot n \cdots n} = 1 \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdots \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}$$

finden wir eine obere Schranke  $\lim \frac{1}{n} = 0$ . Klarerweise gilt als untere Schranke  $\frac{n!}{n^n} > 0$ . Also muss  $\lim \frac{n!}{n^n} = 0$ .

#### Aufgabe 4.

a)

$$\lim \sqrt{\frac{n+1}{16n+1}} = \sqrt{\lim \frac{n+1}{16n+1}} = \sqrt{\lim \frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{16n+1}{n}}} = \sqrt{\lim \frac{1+\frac{1}{n}}{16+\frac{1}{n}}} = \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$$

b) Wegen

$$\lim \frac{1-n^2}{1-n^3} = \lim \frac{\frac{1-n^2}{n^3}}{\frac{1-n^3}{n^3}} = \lim \frac{\frac{1}{n^3} - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3} - 0} = 0$$

ist auch  $\lim (-1)^n \frac{1-n^2}{1-n^3} = 0$ .

c)

$$\lim \frac{1+2+\cdots+n}{n^2} = \lim \frac{1}{n^2} + \lim \frac{2}{n^2} + \cdots + \lim \frac{n}{n^2} = 0$$

**Aufgabe 5.** Wähle  $\epsilon = \frac{1}{2}|a|$ . Dann

$$\begin{aligned} |a - a_n| &< \epsilon \\ |a - a_n| &< \frac{1}{2}|a|, \end{aligned}$$

für alle  $n$  ab einem gewissen  $N$ . Folglich muss ab diesen  $N$  auch  $|a_n|$  grösser als  $\frac{1}{2}|a|$  sein, was zu zeigen war.

#### Aufgabe 6.

- a) Für  $q = 0$  ist  $q^n$  konstant und der Grenzwert trivial. Für  $0 < q < 1$  ist  $q^n$  monoton fallend und  $> 0$ . Für  $-1 < q < 0$  ist  $q^n$  monoton steigend und  $< 0$ . Also  $\lim a_n = 0$ .
- b)  $1^n = 1$  also  $\lim a_n = 1$ .
- c) Für alle  $t \in \mathbb{R}$  soll für  $n \geq N$  gelten, dass  $|q^n| \geq t$ . Man wähle  $N = \log_q(t)$ , dann ist  $|q^N| = t$  und weil  $q^n$  monoton steigend ist auch  $q^n \geq t$ .
- d) Man wähle  $t = 2$ , dann gilt für alle  $n$ , dass  $(-1)^n \leq 2$ , also hat  $(-1)^n$  nicht den uneigentlichen Grenzwert  $\infty$ .

**Aufgabe 7.** Sei  $\epsilon > 0$  und  $M$  eine obere Schranke für  $(a_n)$  und  $(b_n)$ . Für  $(a_n)$  und  $(b_n)$  gibt es jeweils  $N_1, N_2$  wo für  $n \geq N_1, N_2$

$$|a - a_n| < \frac{\epsilon}{2M} \qquad |b - b_n| < \frac{\epsilon}{2M}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} |ab - a_nb_n| &= |(a - a_n)b_n + a(b_n - b)| \\ &\leq |a - a_n||b_n| + |a||b_n - b| \\ &\leq M|a - a_n| + M|b_n - b| \quad M \text{ ist sicher grösser als } |b_n|, |a| \\ &< M\frac{\epsilon}{2M} + M\frac{\epsilon}{2M} = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \end{aligned}$$

**Aufgabe 8.**

a) Es gilt

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &< \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \\ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &< \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

weil  $\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 1$ .

b) Für  $n = 0$  gilt

$$\begin{aligned} (1+b)^0 &= \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} b^k \\ 1 &= \binom{0}{0} b^0 = 1 \end{aligned}$$

Angenommen es gilt

$$(1+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b^k,$$

dann gilt

$$\begin{aligned}
 (1+b)^{n+1} &= (1+b)^n \cdot (1+b) \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b^k \cdot (1+b) \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b^{k+1} \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b^k + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} b^k + \binom{n}{n} b^{n+1} \\
 &= \sum_{k=0}^n \left( \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) b^k + b^{n+1} \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} b^k + b^{n+1} \\
 &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} b^k
 \end{aligned}$$

c) Für  $n = 1$  gilt  $2^0 = 1 < 2$ . Sei also  $n > 1$ , dann

$$\sum_{k=1}^n 2^{-(k-1)} = 1 + 2^{-1} + 2^{-2} + \dots + 2^{-n-1}$$

Es gilt  $x^{-y} = \frac{1}{x^y}$ , hier also  $2^{-n} = \frac{2^{-(n-1)}}{2}$ ; jedes Glied der Summe ist halb so groß wie das vorhergehende. Die Summe fängt bei 1 an, ist also  $< 2$ .