Aufgabe 1.

a) Keine Äquivalenzrelation. Symmetrie gilt nicht: Für $a = 1$ und $b = -1$ gilt $a \sim_1 b$ $(1-(-1) \geq 0)$, nicht aber $b \sim_1 a$ $(-1-1 \ngeq 0)$.

b) Äquivalenzrelation.

c) Keine Äquivalenzrelation. Reflexivität gilt nicht: Für $a = 1$ und $b = a$ gilt $a \sim_3 b$ nicht $(ab \nless 0)$.

d) Äquivalenzrelation.

e) Äquivalenzrelation.

f) Keine Äquivalenzrelation. Transitivität gilt nicht: Für $c = 10^{-50}$, $x = 2c$, $y = 2.5c$ und $z = 3c$ gelten zwar $|x - y| < c$ $(0.5c < c)$ und $|y - z| < c$ $(0.5c < c)$, nicht aber $|x - z| < c$ $(c \nless c)$.

Aufgabe 2.

$$\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{\blacksquare\}, \{\bullet\}, \{\blacktriangle\}, \{\blacksquare, \bullet\}, \{\blacksquare, \blacktriangle\}, \{\bullet, \blacktriangle\}, \{\blacksquare, \bullet, \blacktriangle\}\}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
[\emptyset]_\sim &= \{\emptyset\} \\
[\{\bullet\}]_\sim &= \{\{\bullet\}\} \\
[\{\blacktriangle\}]_\sim &= \{\{\blacktriangle\}\} \\
[\{\bullet, \blacktriangle\}]_\sim &= \{\{\bullet, \blacktriangle\}\} \\
[\{\blacksquare\}]_\sim = [\{\blacksquare, \bullet\}]_\sim = [\{\blacksquare, \blacktriangle\}]_\sim = [\{\blacksquare, \bullet, \blacktriangle\}]_\sim &= \{\{\blacksquare\}, \{\blacksquare, \bullet\}, \{\blacksquare, \blacktriangle\}, \{\blacksquare, \bullet, \blacktriangle\}\}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3.

a) Die Funktion isEqual(T_1, T_2) gibt genau dann „True“ zurück wenn jede Komponente von T_1 auch in T_2 enthalten ist und umgekehrt, andernfalls gibt sie „False“ zurück. „Zwei Mengen A, B sind gleich, wenn für jedes Objekt x gilt $x \in A \Leftrightarrow x \in B$.“ (Skriptum, S. 4) Nachdem Tupeln in diesem Kontext Mengen darstellen, modelliert isEqual also eine Gleichheitsrelation zwischen Mengen. „Für jede Menge A ist die Gleichheitsrelation $=$ eine Äquivalenzrelation, denn für alle Objekte x, y, z gilt $x = x$ (Reflexivität), $x = y \Leftrightarrow y = x$ (Symmetrie) und $x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z$ (Transitivität).“ (Skriptum, S. 21)

Somit wird durch $T_1 \sim T_2 \Leftrightarrow$ isEqual(T_1, T_2) eine Äquivalenzrelation definiert.

b) Wie in a) erwähnt sind zwei Mengen gleich, wenn für jedes Objekt x gilt $x \in A \Leftrightarrow x \in B$. Das ist das einzige Kriterium, nicht „wie oft“ oder „in welcher Reihenfolge“ ein Element vorkommt. (Skriptum, S.4) Somit hat die konkrete Wahl von Tupeln aus den Äquivalenzklassen die u als Eingabe erhält keinen Einfluss auf ihr Ergebnis.

Die Implementierung passt also insofern zu jener aus a) als bei gleichbleibenden (nach isEqual) Eingabetupeln auch das ausgegebene Tupel gleich bleibt. Gilt isEqual(T_1, T_1') und isEqual(T_2, T_2') gilt auch isEqual(union(T_1, T_2), union(T_1', T_2')).

c) Die Länge eines Tupels ist nicht zwingendermaßen gleich der Größe der Menge die es codiert. So gilt etwa $|\{1,2,3\}| = |\{1,2,2,3,3,3\}| = 3$ aber $\text{size}((1,2,3)) = 3$ und $\text{size}((1,2,2,3,3,3)) = 6$.