

**Aufgabe 1.** Das multiplikative Neutralelement ist 2 ( $1 \cdot 2 = 1$  und  $2 \cdot 2 = 2$ ). 1 hat kein multiplikatives Inverses ( $1 \cdot 1 = 1$  und  $1 \cdot 2 = 1$ ). Ergo kein Körper.

**Aufgabe 2.**

- Assoziativität:

$$(x_1, x_2) \oplus ((y_1, y_2) \oplus (z_1, z_2)) = ((x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2)) \oplus (z_1, z_2)$$

$$(x_1, x_2) \oplus (y_1 + z_1, y_2 + z_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \oplus (z_1, z_2)$$

$$(x_1 + y_1 + z_1, x_2 + y_2 + z_2) = (x_1 + y_1 + z_1, x_2 + y_2 + z_2)$$

$$(x_1, x_2) * ((y_1, y_2) * (z_1, z_2)) = ((x_1, x_2) * (y_1, y_2)) * (z_1, z_2)$$

$$(x_1, x_2) * (y_1 z_1, y_1 z_2 + y_2 z_1) = (x_1 y_1, x_1 y_2 + x_2 y_1) * (z_1, z_2)$$

$$(x_1 y_1 z_1, x_1(y_1 z_2 + y_2 z_1) + x_2 y_1 z_1) = (x_1 y_1 z_1, x_1 y_2 z_2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1) z_1)$$

$$(x_1 y_1 z_1, x_1 y_1 z_2 + x_1 y_2 z_1 + x_2 y_1 z_1) \neq (x_1 y_1 z_1, x_1 y_2 z_2 + x_1 y_2 z_1 + x_2 y_1 z_1)$$

Operation  $*$  ist nicht assoziativ.

- Kommutativität:

$$(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (y_1, y_2) \oplus (x_1, x_2)$$

$$(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

$$(x_1, x_2) * (y_1, y_2) = (y_1, y_2) * (x_1, x_2)$$

$$(x_1 y_1, x_1 y_2 + x_2 y_1) = (y_1 x_1, y_1 x_2 + y_2 x_1)$$

- Neutrale Elemente:

$$(x_1, x_2) \oplus (0, 0) = (x_1 + 0, x_2 + 0) = (x_1, x_2)$$

$$(x_1, x_2) * (1, 0) = (x_1 \cdot 1, x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 1) = (x_1, x_2)$$

- Invertierbarkeit:

$$(x_1, x_2) \oplus (-x_1, -x_2) = (x_1 - x_1, x_2 - x_2) = (0, 0)$$

$$(x_1, x_2) * (x'_1, x'_2) = (x_1 x'_1, x_1 x'_2 + x_2 x'_1) = (1, 0)$$

$$\Rightarrow x_1 x'_1 = 1 \Rightarrow x'_1 = x_1^{-1}$$

$$\Rightarrow x_1 x'_2 + x_2 x'_1 = 0 \Rightarrow x'_2 = 0 \quad \text{aber } x_2 x'_1 \text{ nur dann null wenn } x_2 = x_2$$

Operation  $*$  hat nicht für alle Elemente ein Inverses.

- Distributivität

$$(x_1, x_2) * ((y_1, y_2) \oplus (z_1, z_2)) = ((x_1, x_2) * (y_1, y_2)) \oplus ((x_1, x_2) * (z_1, z_2))$$

$$(x_1, x_2) * (y_1 + z_1, y_2 + z_2) = (x_1 y_1, x_1 y_2 + x_2 y_1) \oplus (x_1 z_1, x_1 z_2 + x_2 z_1)$$

$$(x_1(y_1 + z_1), x_1(y_2 + z_2) + x_2(y_1 + z_1)) = (x_1 y_1 + x_1 z_1, x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_1 z_2 + x_2 z_1)$$

$$(x_1 y_1 + x_1 z_1, x_1 y_2 + x_1 z_2 + x_2 y_1 + x_2 z_1) = (x_1 y_1 + x_1 z_1, x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_1 z_2 + x_2 z_1)$$

**Aufgabe 3.** Sei  $x = \frac{k}{n} \in \mathbb{Q}$ , also  $k, n \in \mathbb{Z}$ . Wir berechnen nun die Dezimaldarstellung von  $x$  und verwenden dafür „Division mit Rest“: Es gibt für alle  $p, q \in \mathbb{Z}$  eindeutige  $a, b \in \mathbb{Z}$  mit

$$p = aq + b \quad \text{mit } 0 \leq b < |q|$$

Wir nennen von nun an  $a$  den Quotient und  $b$  den Rest von  $\frac{p}{q}$ .

Der Teil links vom Dezimalpunkt ist der Quotient von  $k$  und  $n$ , mit Rest  $r_0$ . Die folgenden Ziffern (rechts vom Dezimalpunkt) berechnen sich durch

$$\begin{array}{ll} i & \\ 1 & \text{Quotient von } 10r_0 \text{ und } n \\ 2 & \text{Quotient von } 10r_1 \text{ und } n \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots \end{array}$$

wobei  $r_i$  der Rest der Division im Schritt  $i$  ist. Der Rest ist immer zwischen 0 und  $|q| - 1$ , also muss sich nach mindestens  $|q|$  Schritten eine Ziffer wiederholen, bzw. ein Muster bilden.

**Aufgabe 4.** Gegeben sei eine periodische Zahl  $x = a.b\bar{c}$  wobei  $a, b$  und  $c$  eine Folge von Ziffern sind und  $c$  periodisch ist. Sei  $n = \lceil \log_{10}(b) \rceil$  die Anzahl der Ziffern in  $b$  dann kann der periodische Teil durch  $10^n x = ab.\bar{c}$  isoliert werden. Ein nicht periodischer Teil ist also kein Problem.

Sei  $x = a.\bar{c}$  und  $m$  die Anzahl der Ziffern in  $c$ . Dann kann  $\bar{c}$  als geometrische Reihe geschrieben werden.

$$x = a + c + 10^{-m}c + 10^{-2m}c + \dots$$

Multiplikation mit  $10^m - 1$  führt nun zu

$$\begin{aligned} (10^m - 1)x &= (10^m - 1)a + 10^m(c + 10^{-m}c + 10^{-2m}c + \dots) - (c + 10^{-m}c + 10^{-2m}c + \dots) \\ &= (10^m - 1)a + (10^m c + c + 10^{-m}c + \dots) - (c + 10^{-m}c + 10^{-2m}c + \dots) \\ &= (10^m - 1)a + 10^m c \end{aligned}$$

Nachdem  $c$  aus  $m$  Ziffern besteht ist  $10^m c$  eine ganze Zahl. Demzufolge

$$x = \frac{(10^m - 1)a + 10^m c}{(10^m - 1)}$$

wobei  $(10^m - 1)a \in \mathbb{Z}$  und  $(10^m - 1) \in \mathbb{N}$ , wie gefordert.

**Aufgabe 5.**

a)  $74.73\overline{64}$

b)  $28.84\overline{0}$

c)

$$\begin{aligned}
 x &= 123.421\overline{124} \\
 1000x &= 123421.\overline{124} \\
 1000000x &= 123421124.\overline{124} \\
 1000000x - 1000x &= 123421124.\overline{124} \\
 999000x &= 123297703 \\
 x &= \frac{123297703}{999000}
 \end{aligned}$$

d) Ja.  $3 \cdot 0.\overline{3} = 0.\overline{9}$  und  $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$  also  $0.\overline{9} = 1$ .**Aufgabe 6.**

- a) Injektiv, zwei Studenten werden nie die selbe Matrikelnummer haben. Nicht surjektiv, es gibt nur endlich viele Studenten (aber unendlich Elemente in  $\mathbb{N}$ ).
- b) undefiniert für  $f_2(0)$  weil  $0 \notin \mathbb{N}$ . Ansonsten surjektiv (alle  $\mathbb{N}$  werden getroffen) aber nicht injektiv (jedes  $n \in \mathbb{N}$  wird zwei mal getroffen).
- c) Bijektiv,  $z \geq 0$  werden auf gerade Zahlen in  $\mathbb{N}$  abgebildet,  $z < 0$  auf ungerade.
- d) Surjektiv (stetig mit Minimum -1 und Maximum 1, trifft also alle  $[-1, 1]$  mindestens einmal) aber nicht injektiv ( $\cos(x) = \cos(x + 2\pi)$ ).
- e) Bijektiv. Siehe obiges Argument aber diesmal entspricht die Definitionsmenge einer halben Periode, ergo nichts doppelt.

**Aufgabe 7.** Es seien  $f : A \rightarrow B$ ,  $h_1, h_2 : X \rightarrow A$  und  $g_1, g_2 : B \rightarrow Y$  beliebige Funktionen.

a) Wir wollen zeigen, dass

$$\forall x, y \in A : x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y) \iff \forall h_1, h_2 : f \circ h_1 = f \circ h_2 \Rightarrow h_1 = h_2.$$

Angenommen die linke Seite gilt, es gibt also keine ungleichen  $x, y$  derart, dass  $f(x) = f(y)$ . Seien  $h_1, h_2$  nun Abbildungen von einer beliebigen Menge  $X$  auf  $A$ . Wenn für alle  $x \in X$  gilt, dass  $f(h_1(x)) = f(h_2(x))$  dann muss gemäß unserer Annahme auch  $h_1(x) = h_2(x)$  gelten.

Angenommen die linke Seite gilt nicht, es gibt also ungleiche  $x, y$  mit  $f(x) = f(y)$ . Dann gilt auch die rechte Seite nicht, denn dann gibt es  $h_1, h_2$  mit  $f(h_1(x)) = f(h_2(x))$  aber  $h_1(x) \neq h_2(x)$ . Man wähle etwa  $f(x) = 0$ ,  $h_1(x) = 1$  und  $h_2(x) = 2$ . Dann gilt  $f(h_1(x)) = f(h_2(x))$  aber  $h_1 \neq h_2$ .

b) Wir wollen zeigen, dass

$$\forall y \in B : \exists x \in A : f(x) = y \iff \forall g_1, g_2 : g_1 \circ f = g_2 \circ f \Rightarrow g_1 = g_2.$$

Angenommen es gibt für alle  $b \in B$  ein  $a \in A$  mit  $f(a) = b$ . Weiters sei angenommen, dass  $g_1(f(a)) = g_2(f(a))$  für alle  $a \in A$ . Nachdem klarerweise  $f(a) = f(a)$  und  $f$  alle Elemente von  $B$  erreicht gilt deshalb auch  $g_1 = g_2$ .

Angenommen es gibt ein  $b \in B$  für das es kein  $a \in A$  mit  $f(a) = b$  gibt. Das ist etwa für  $f(x) = 0$  der Fall. Man wähle weiters  $g_1(x) = x$  und  $g_2(x) = 2x$ . Dann gilt zwar  $g_1(f(0)) = g_2(f(0))$  aber nicht  $g_1 = g_2$ .

### Aufgabe 8.

- Reflexivität:

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) &\leq_1 (x_1, x_2) \\ (x_1 < x_1) \vee (x_1 = x_1 \wedge x_2 \leq x_2) \\ &\quad \perp \vee (\top \wedge \top) \\ &\quad \top \end{aligned}$$

- Antisymmetrie:

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) &\leq_1 (y_1, y_2) \wedge (y_1, y_2) \leq_1 (x_1, x_2) \Rightarrow (x_1, x_2) = (y_1, y_2) \\ ((x_1 < y_1) \vee (x_1 = y_1 \wedge x_2 \leq y_2)) \wedge ((y_1 < x_1) \vee (y_1 = x_1 \wedge y_2 \leq x_2)) &\Rightarrow (x_1, x_2) = (y_1, y_2) \end{aligned}$$

Sei  $x_1 < y_1$ , dann gilt der linke Teil, nicht aber der Rechte wegen  $y_1 \not\leq x_1$  und  $y_1 \neq x_1$ . Es muss also  $x_1 \geq y_1$ . Dann gilt der linke Teil nur wenn  $x_1 = y_1$  und zusätzlich  $x_2 \leq y_2$ . Dann gilt der rechte Teil nur wenn auch  $y_2 \leq x_2$ . Somit muss also  $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$ .

- Transitivität:

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) &\leq_1 (y_1, y_2) \wedge (y_1, y_2) \leq_1 (z_1, z_2) \Rightarrow (x_1, x_2) \leq_1 (z_1, z_2) \\ ((x_1 < y_1) \vee (x_1 = y_1 \wedge x_2 \leq y_2)) \wedge ((y_1 < z_1) \vee (y_1 = z_1 \wedge y_2 \leq z_2)) & \\ \Rightarrow ((x_1 < z_1) \vee (x_1 = z_1 \wedge x_2 \leq z_2)) & \end{aligned}$$

Seien  $(x_1, x_2)$ ,  $(y_1, y_2)$  und  $(z_1, z_2)$  derart, dass die linke Seite der Implikation gilt.

Dann haben wir also entweder  $x_1 < y_1$  und  $y_1 < z_1$  woraus sofort  $x_1 < z_1$  folgt. Oder  $x_1 = y_1 = z_1$  und  $x_2 \leq y_2 \leq z_2$  woraus sofort  $x_1 = z_1$  und  $x_2 \leq z_2$  folgt.

- Totalität:

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) &\leq_1 (y_1, y_2) \vee (y_1, y_2) \leq_1 (x_1, x_2) \\ ((x_1 < y_1) \vee (x_1 = y_1 \wedge x_2 \leq y_2)) \vee ((y_1 < x_1) \vee (y_1 = x_1 \wedge y_2 \leq x_2)) & \end{aligned}$$

Klarerweise gilt entweder  $x_1 < y_1$ ,  $x_1 > y_1$  oder  $x_1 = y_1$  in den ersten beiden Fällen gilt die Aussage trivialerweise. Wenn  $x_1 = y_1$  muss zusätzlich gelten, dass  $x_2 \leq y_2$  oder  $y_2 \leq x_2$ . Nachdem  $\leq$  auf  $\mathbb{R}$  eine Totalordnung ist trifft das zu.