

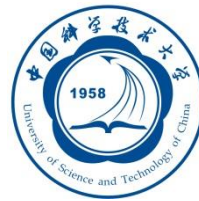
第7章 小波和多分辨率处理

- 小波变换：一种新的信号处理技术
 - 傅里叶变换的基函数是正弦波，而小波变换的基函数是小型波
 - 小波具有变化的频率和有限的持续时间
 - 傅里叶变换只提供频率信息，无时间信息
- 小波是多分辨率理论这种信号处理和分析方法的基础
 - 多分辨率理论涉及多个分辨率下的信号（或图像）表示与分析。
 - 这种方法的优势是：某种分辨率下无法检测的特性，在另一种分辨率下容易检测
- 本章从多分辨率的角度来审视基于小波的变换。
 - 主要内容集中于离散小波变换的开发和利用



第7章 小波和多分辨率处理

- 7.1 背景
- 7.2 多分辨率展开
- 7.3 一维小波变换
- 7.4 快速小波变换
- 7.5 二维小波变换
- 7.6 小波包



第7章 小波和多分辨率处理

7.1 背景

7.2 多分辨率展开

7.3 一维小波变换

7.4 快速小波变换

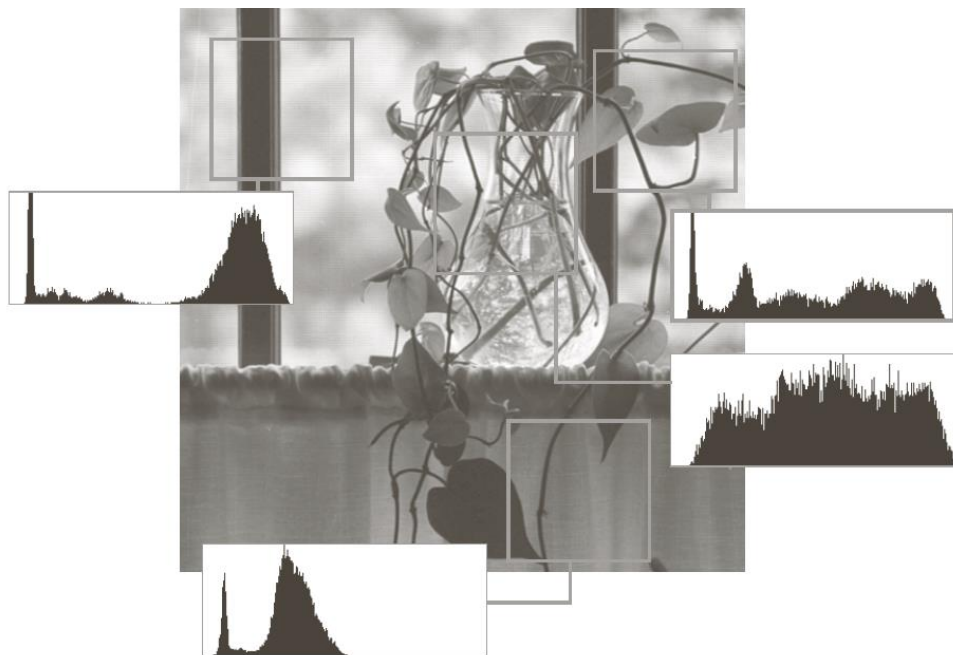
7.5 二维小波变换

7.6 小波包

7.1 背景：多分辨率分析（MRA）

□ 基本动机

- 图像中，区域由相似纹理和灰度级组成，不同区域结合形成物体
- 较小物体适合用较高分辨率分析
- 对于较大物体，用低分辨率分析即可
- 如果图像中同时存在较小物体和较大物体，则可用不同分辨率来研究他们



- 图像不同区域的局部直方图差异很大
- 难以对整图用统计模型进行分析

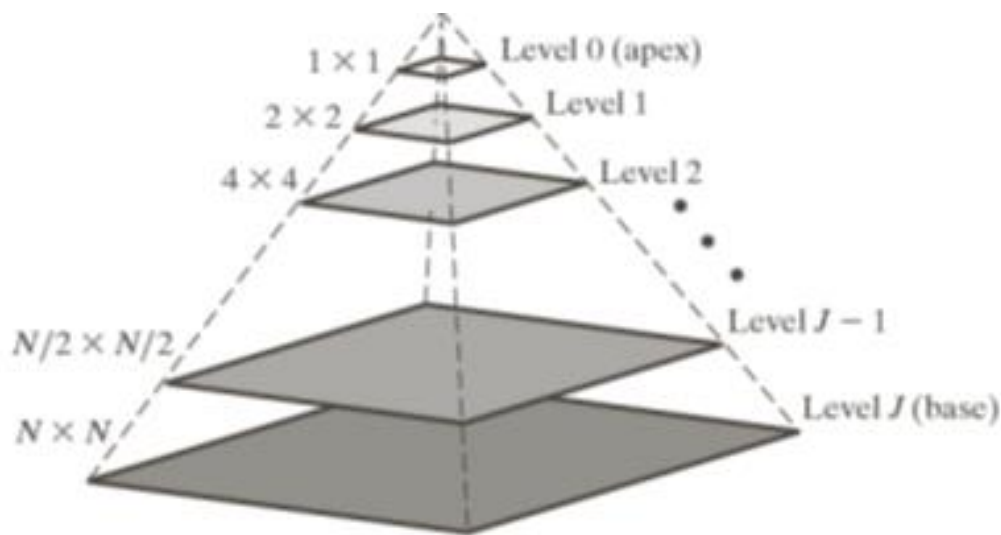
(1) 图像金字塔

□ 图像金字塔：

- 一系列以金字塔形状排列的、分辨率逐渐降低的图像集合
- 底部：高分辨率表示；顶部：低分辨率近似
- 最初用于图像压缩

□ $P + 1$ 级图像金字塔像素总数是

$$N^2 \left(1 + \frac{1}{4^1} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^P} \right) \leq \frac{4}{3} N^2$$



两个问题：

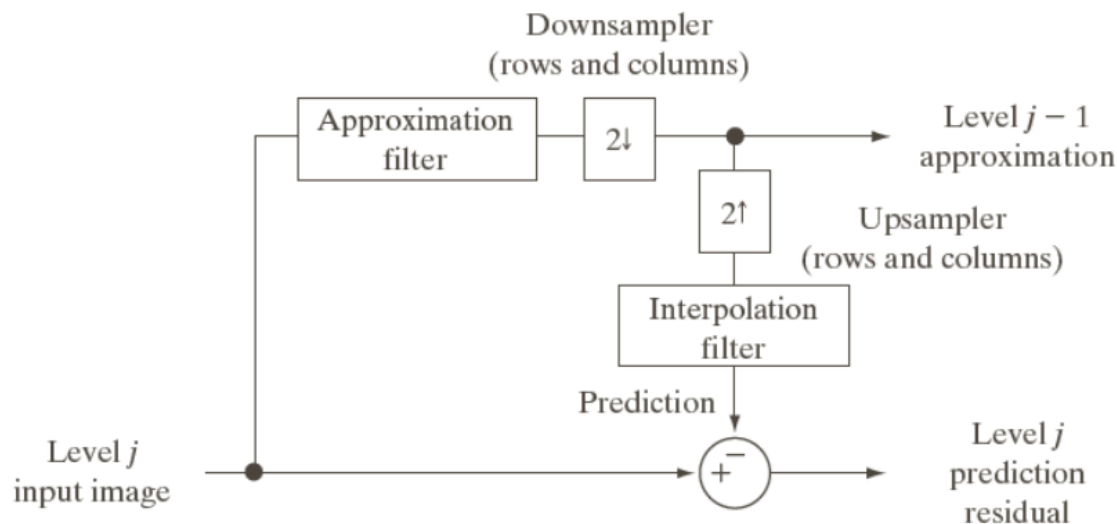
第一，如何构建该金字塔？

第二，金字塔相邻两级差别是什么？

(1) 图像金字塔

□ 创建近似金字塔和残差金字塔

- 步骤一：通过近似滤波器后，2倍下采样，得到第 $j-1$ 级近似
 - ✓ 近似滤波器：邻域平均、高斯低通滤波、无滤波
- 步骤二：由步骤一产生的分辨率降低的近似，2倍上采样，然后通过插值滤波，创建第 j 级输入图像的一个预测
 - ✓ 插值滤波：最近邻、双线性、双三次内插
- 步骤三：计算步骤二的预测图像和步骤一的输入之间的差，即预测残差

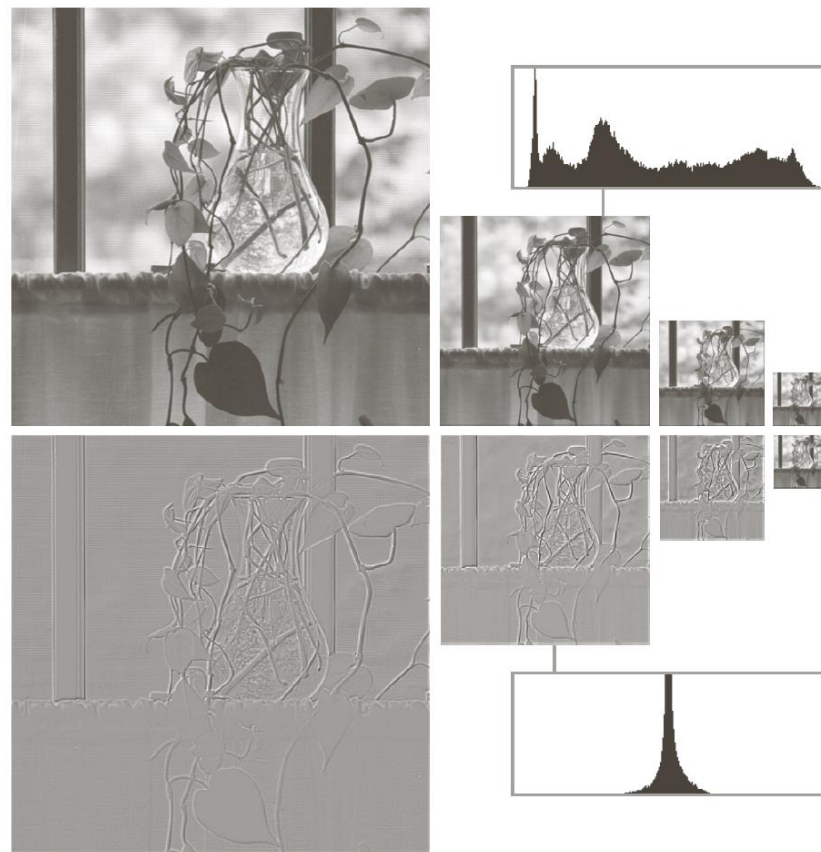


$$f_{2\uparrow}(n) = \begin{cases} f\left(\frac{n}{2}\right), & n \text{ 为偶数} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$f_{2\downarrow}(n) = f(2n)$$

(1) 图像金字塔

- 上图：近似金字塔，称为高斯金字塔
 - 因为构建金字塔时使用了高斯滤波器
 - 分辨率越低，细节越少
 - ✓ 低分辨率适合分析大结构或图像整体内容
 - ✓ 高分辨率适合分析单个物体特性
- 下图：预测残差金字塔，通常称为拉普拉斯金字塔
 - 直方图分布比较集中，适合用较少比特进行压缩



四级金字塔及它们的直方图

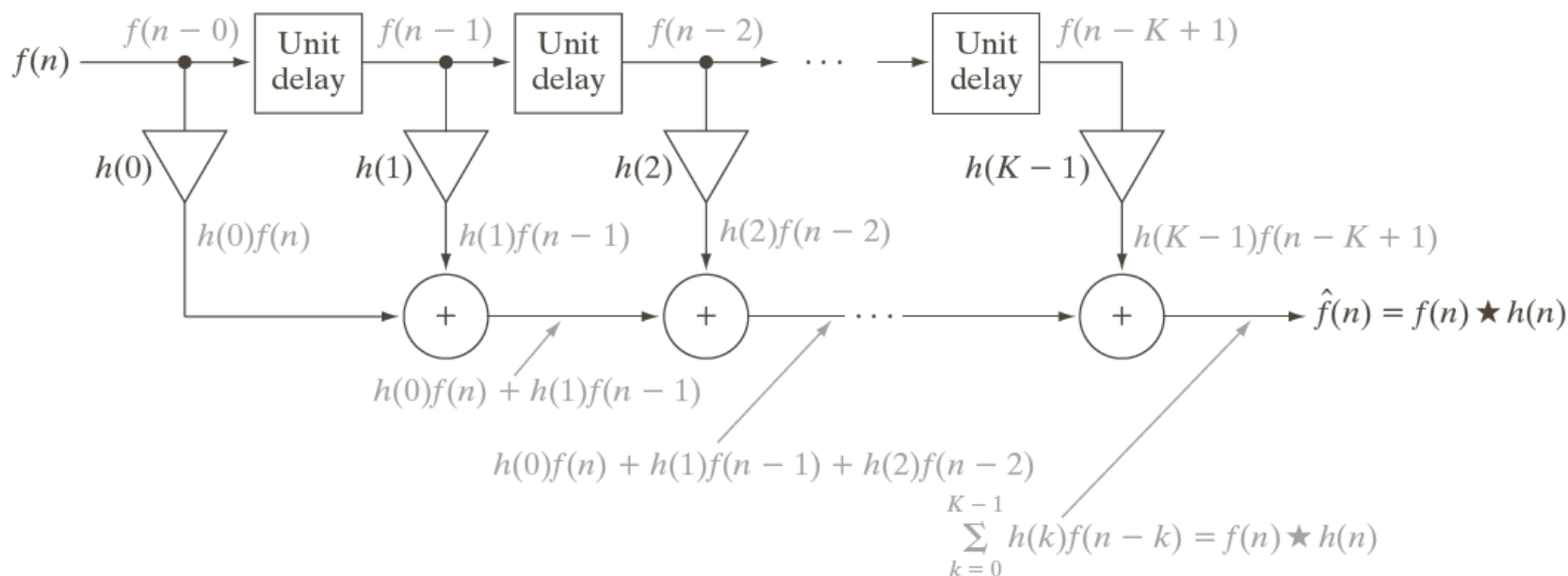
(2) 子带编码

□ 在子带编码中

- 一副图像可分解为一组频带受限的分量，称为子带
- 子带可以重组在一起，无误差重建原始图像

□ 数字滤波器

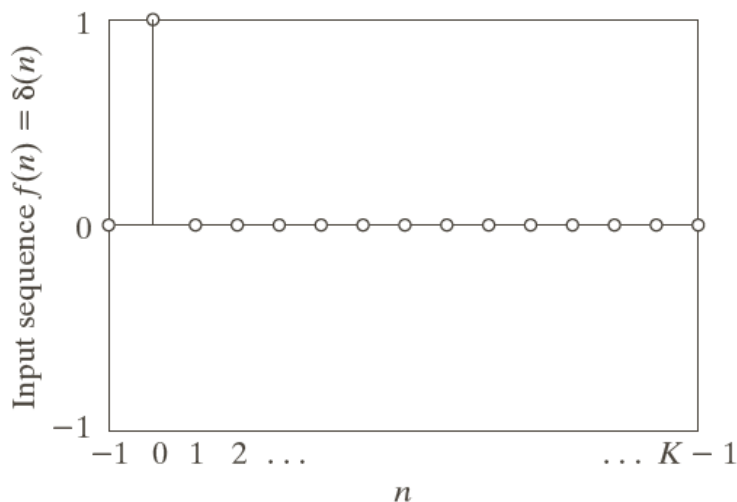
- 三个基本部件：延迟单元、乘法器、加法器
- 最终完成数字信号和滤波器的卷积运算



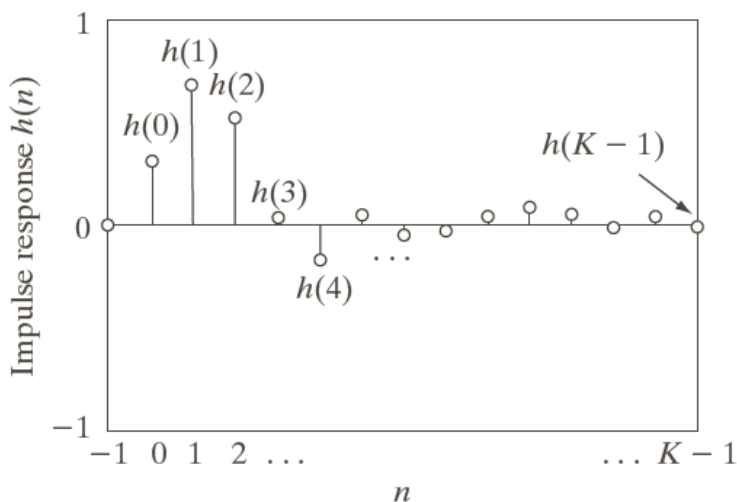
(2) 子带编码

- 如果输入是离散单位冲激，则输出为滤波器系数

$$\hat{f}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \cdot \delta(n - k) = h(n)$$



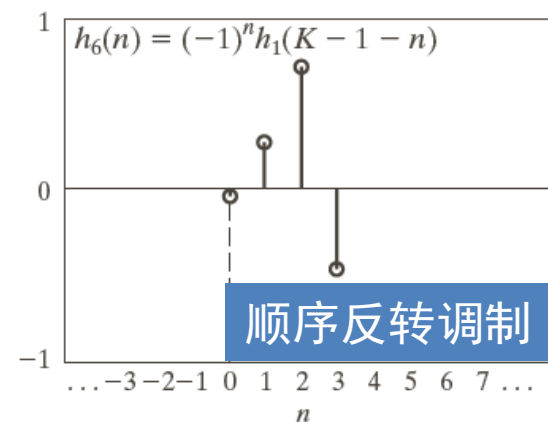
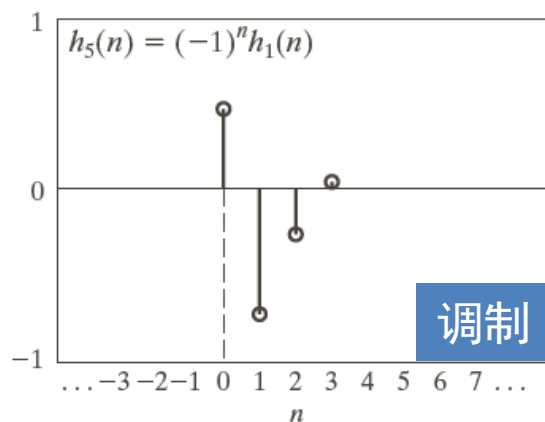
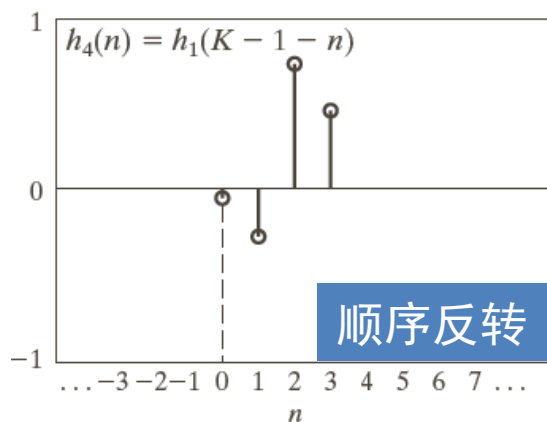
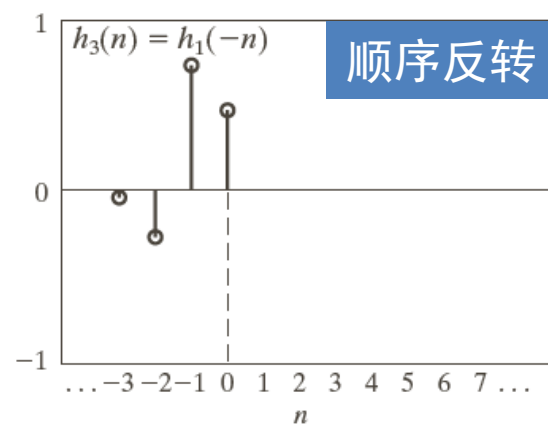
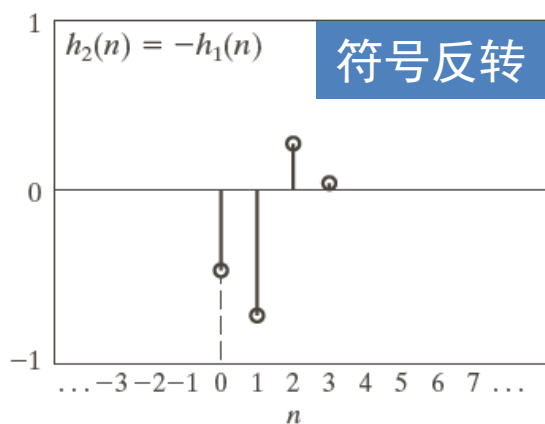
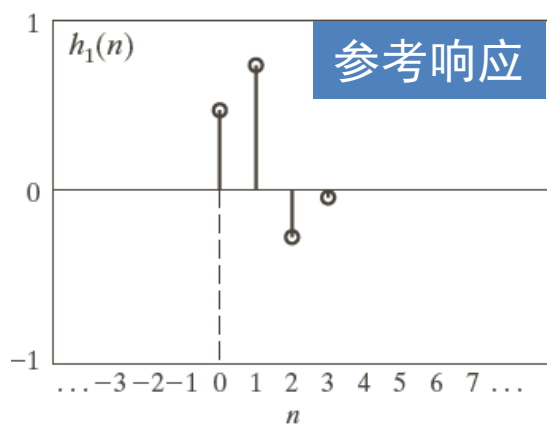
离散单位冲击



滤波器冲击响应

(2) 子带编码

□ 6个功能相关的滤波器的冲激响应：



(2) 子带编码：两波段子带编码和解码

□ 分析滤波器组和综合滤波器组串联

■ 选择合适滤波器，实现完美重构

- ✓ 定义原型滤波器，由其计算得到其他滤波器
- ✓ 双正交滤波器，归一化正交滤波器

双正交滤波器

$$g_0(n) = (-1)^n h_1(n)$$

$$g_1(n) = (-1)^{n+1} h_0(n)$$

或

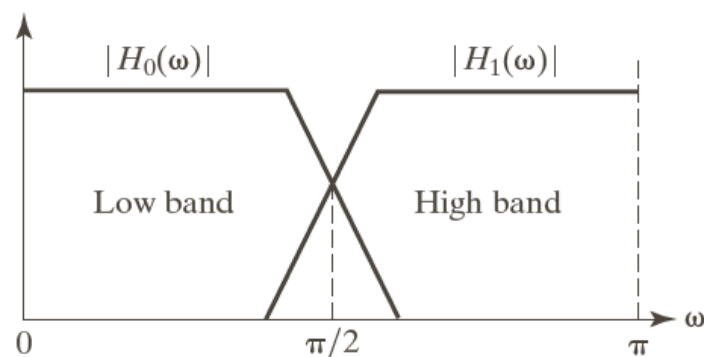
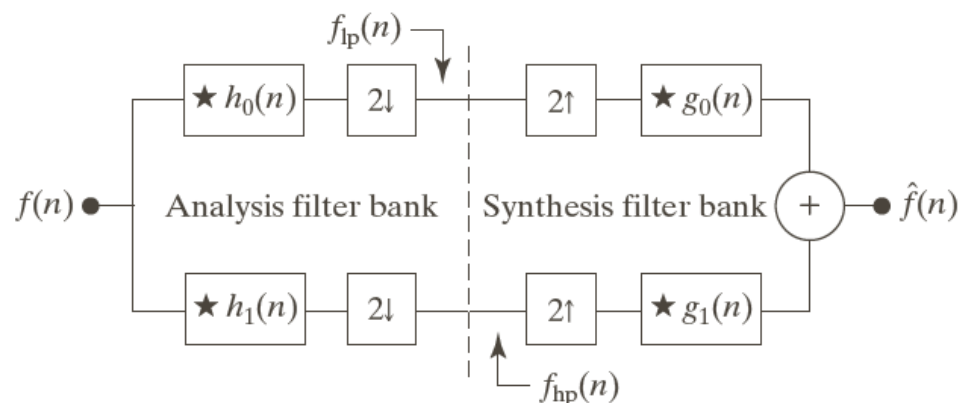
$$g_0(n) = (-1)^{n+1} h_1(n)$$

$$g_1(n) = (-1)^n h_0(n)$$

正交滤波器

$$g_1(n) = (-1)^n g_0(K-1-n)$$

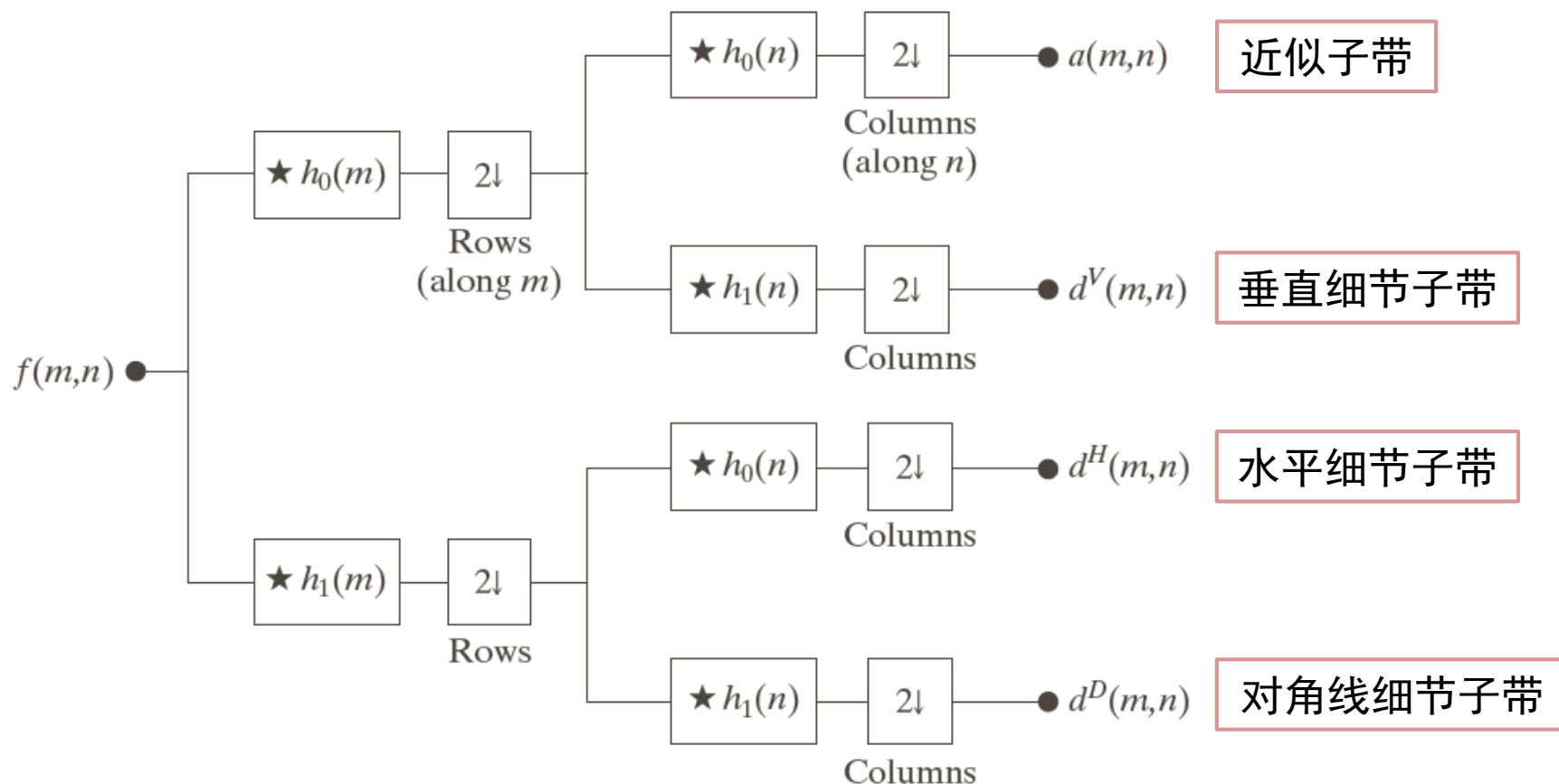
$$h_i(n) = g_i(K-1-n), i = \{0,1\}$$



(2) 子带编码：二维子带编码

□ 将输入图像分解为四个子带图像

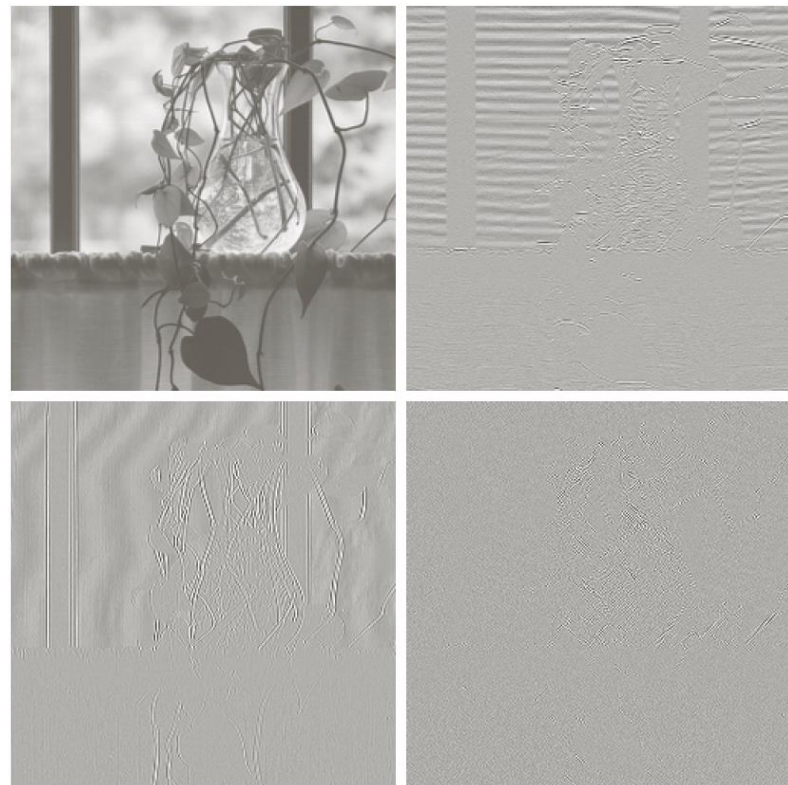
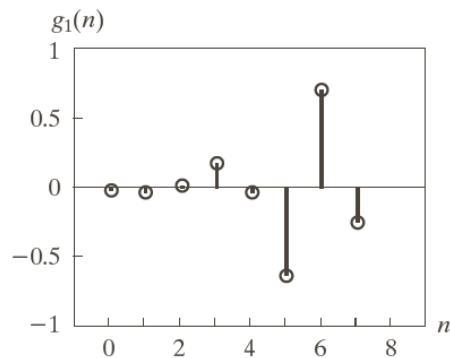
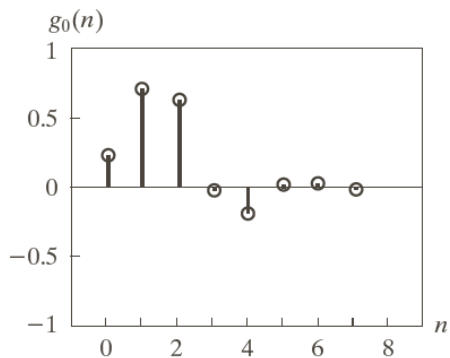
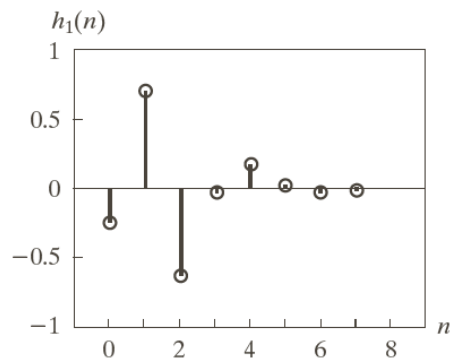
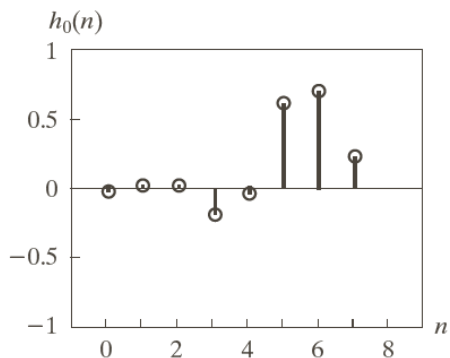
- 每个子带图像还可以分为4个更小子带，更小的子带还可以再分



(2) 子带编码示例

| n | $g_0(n)$ |
|-----|-------------|
| 0 | 0.23037781 |
| 1 | 0.71484657 |
| 2 | 0.63088076 |
| 3 | -0.02798376 |
| 4 | -0.18703481 |
| 5 | 0.03084138 |
| 6 | 0.03288301 |
| 7 | -0.01059740 |

4个8抽头Daubechies归一化
正交滤波器的冲击响应
(见公式7.1-14)



子带分离结果，4个子带分别是：
(a) 近似子带 (b) 水平细节子带
(c) 垂直细节子带 (d) 对角线细节子带

(3) 哈尔变换 (1910)

□ 哈尔(Haar)变换的矩阵表示

$$\mathbf{T} = \mathbf{H}\mathbf{F}\mathbf{H}^T$$

\mathbf{H} : $N \times N$ 哈尔变换矩阵, \mathbf{F} : $N \times N$ 图像矩阵, \mathbf{T} : $N \times N$ 变换结果

□ 哈尔基函数 ($k = 2^p + q - 1$)

$$h_0(z) = h_{00}(z) = \frac{1}{\sqrt{N}}, z \in [0,1]$$

$$h_k(z) = h_{pq}(z) = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{cases} 2^{p/2}, & (q-1)/2^p \leq z < (q-0.5)/2^p \\ -2^{p/2}, & (q-0.5)/2^p \leq z < q/2^p \\ 0, & \text{其他}, z \in [0,1] \end{cases}$$

□ 哈尔矩阵

$$H_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

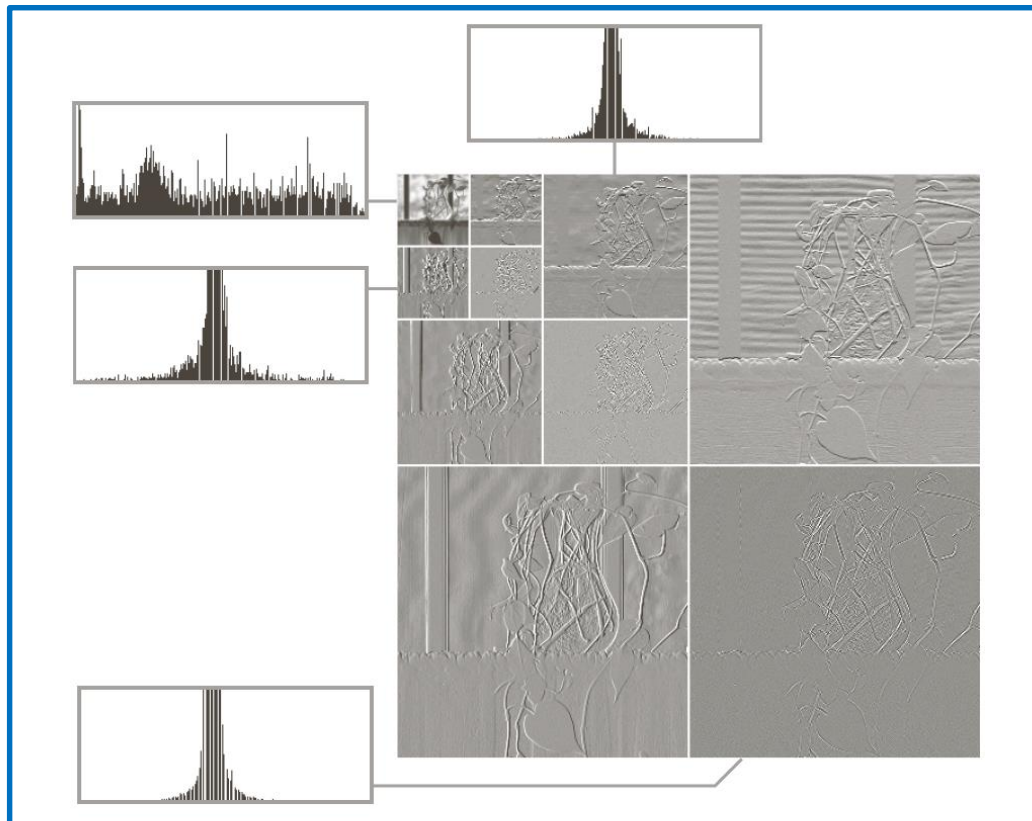
$$H_4 = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

(3) 哈尔变换

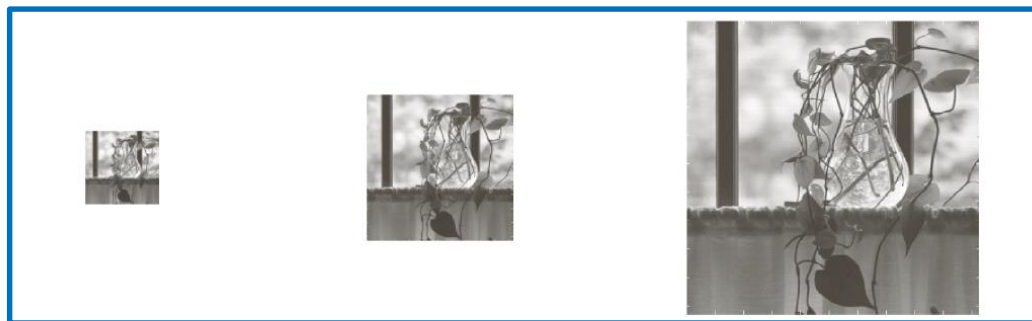
$$H_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

H_2 的行可用于定义一个2抽头完美重建滤波器组的分析滤波器 $h_0(n)$ 和 $h_1(n)$

每幅子图像描绘了原始图像中空间频率的一个特定频带



由 H_2 哈尔基函数的离散小波变换得到三种不同分辨率的近似图像 (64×64 , 128×128 , 256×256)





第7章 小波和多分辨率处理

7.1 背景

7.2 多分辨率展开

7.3 一维小波变换

7.4 快速小波变换

7.5 二维小波变换

7.6 小波包



7.2 多分辨率展开

- 在多分辨率分析中，**尺度函数**被用于建立一个函数或一幅图像的一系列**近似**
 - 每个**近似**与其最近邻**近似**在分辨率方面都用基2来区分
 - 使用称为**小波**的附加函数（**小波函数**）对相邻**近似**之间的差进行编码
- 基础概念
 - 级数展开
 - 尺度函数
 - 小波函数

级数展开

- 信号或函数 $f(x)$ 通常能分解为一系列展开函数的线性组合

$$f(x) = \sum_k \alpha_k \varphi_k(x)$$

- α_k 是实值展开系数, $\varphi_k(x)$ 是实值展开函数
- 如果展开唯一, 则称 $\varphi_k(x)$ 为基函数, $\{\varphi_k(x)\}$ 称为基

- 可展开的函数张成了一个函数空间, 成为展开集合的闭合跨度:

$$V = \overline{\text{Span}\{\varphi_k(x)\}_k}$$

- 对于任意 $f(x) \in V$, 利用 $\{\varphi_k(x)\}$ 的对偶函数集合 $\{\tilde{\varphi}_k(x)\}$, 其展开系数:

$$\alpha_k = \langle \tilde{\varphi}_k(x), f(x) \rangle = \int \tilde{\varphi}_k^*(x) f(x) dx$$

尺度函数

- 考虑由整数平移和实数二值尺度、平方可积函数 $\varphi(x)$ 组成的展开函数集合，即 $\{\varphi_{j,k}(x)\}$ ，其中

$$\varphi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j x - k)$$

$\varphi(x)$ 被称为尺度函数

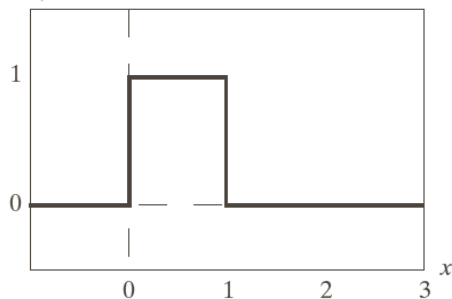
- 选择合适的 $\varphi(x)$ ，可使 $\varphi_{j,k}(x)$ 跨越 $L^2(\mathbf{R})$ ，即所有可度量的、平方可积函数的集合：

$$V_j = \overline{\text{Span}\{\varphi_{j,k}(x)\}_k}$$

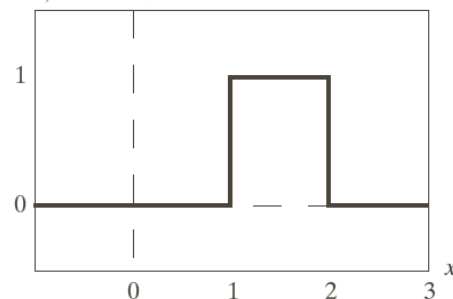
- 增大 j 会增大 V_j 的大小，进而允许子空间中包含具有较小变换的变量或较细的细节函数
 - 随着 j 的增大，用于表示子空间函数的 $\varphi_{j,k}(x)$ 会变窄， x 有较小变化即可分开

尺度函数：哈尔尺度函数

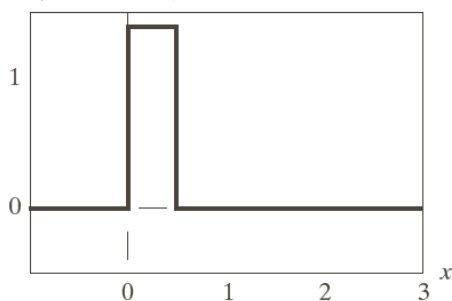
$$\varphi_{0,0}(x) = \varphi(x)$$



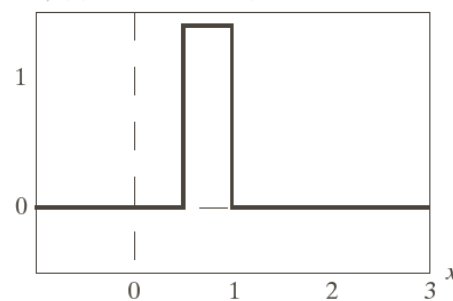
$$\varphi_{0,1}(x) = \varphi(x - 1)$$



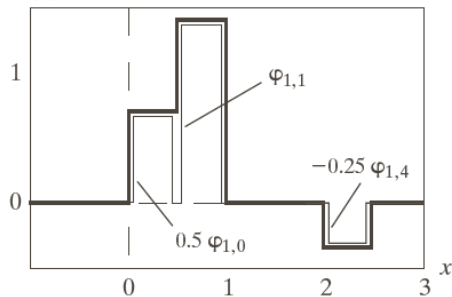
$$\varphi_{1,0}(x) = \sqrt{2} \varphi(2x)$$



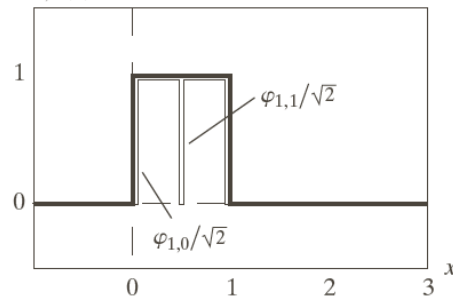
$$\varphi_{1,1}(x) = \sqrt{2} \varphi(2x - 1)$$



$$f(x) \in V_1$$



$$\varphi_{0,0}(x) \in V_1$$



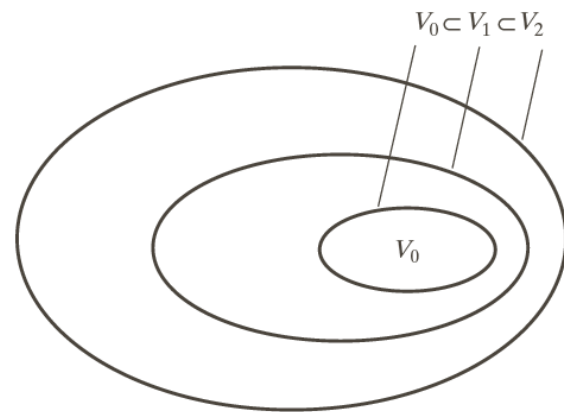
如果 $f(x)$ 是 V_0 的元素，那么它也是 V_1 的元素

尺度函数

□ 多分辨率分析（MRA）4个基本要求

- 1: 尺度函数对其整数平移是正交的
- 2: 低尺度的尺度函数跨越的子空间, 嵌套在高尺度跨越的尺度空间内, 即

$$V_{-\infty} \subset \cdots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_{\infty}$$



- 3: 唯一对所有的 V_j 通用的函数是 $f(x) = 0$
 - ✓ 没有信息的函数 $V_{-\infty} = \{0\}$
- 4: 任何可度量的、平方可积的函数都可以按任意精度表示
 - ✓ 任意空间的展开函数, 都可由相邻较高分辨率空间的展开函数建立

小波函数

□ 定义小波集合 $\{\psi_{j,k}(x)\}$: $\psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j x - k)$

□ 小波函数跨越的空间:

$$W_j = \overline{\text{Span}\{\psi_{j,k}(x)\}}$$

□ 如果函数 $f(x) \in W_j$, 则有:

$$f(x) = \sum_k \alpha_k \psi_{j,k}(x)$$

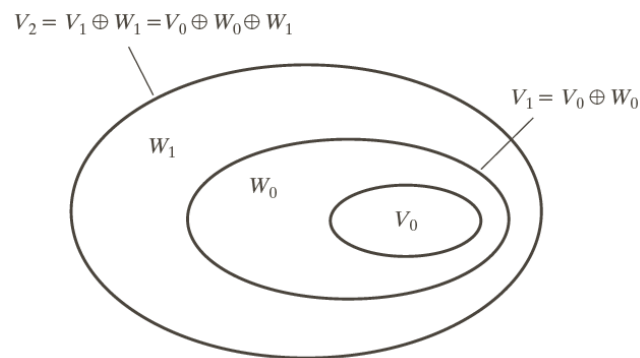
□ 尺度函数和小波函数子空间关系

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j$$

□ 任意小波函数, 可表示为平移后的双倍分辨率尺度函数的加权和

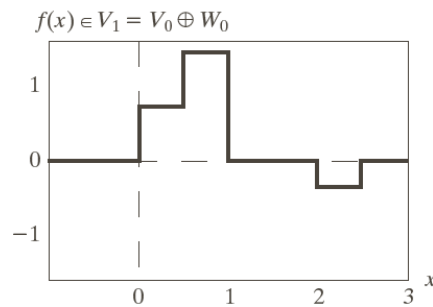
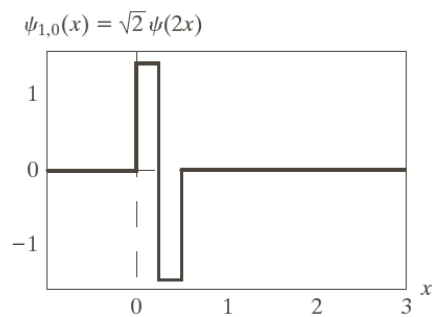
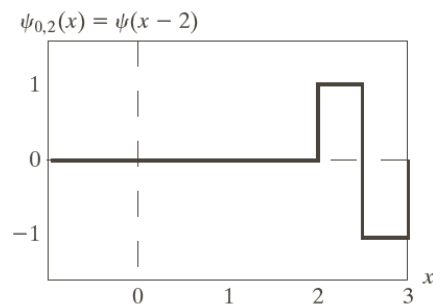
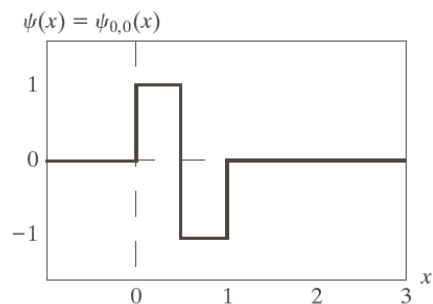
$$\psi(x) = \sum_n h_\psi(n) \sqrt{2} \varphi(2x - n) \quad h_\psi(n) \text{ 为小波函数系数}$$

可以证明: $h_\psi(n) = (-1)^n h_\varphi(n)$

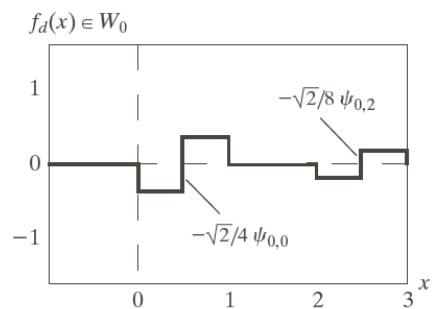
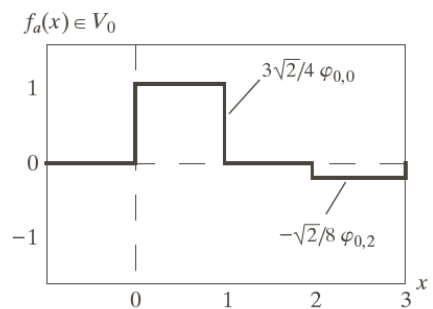


小波函数

□ 哈尔小波函数系数



$$f(x) = f_a(x) + f_d(x)$$





第7章 小波和多分辨率处理

7.1 背景

7.2 多分辨率展开

7.3 一维小波变换

7.4 快速小波变换

7.5 二维小波变换

7.6 小波包

7.3 一维小波变换

□ 三种小波变换

- 一般的小波级数展开 \longleftrightarrow 傅里叶级数展开
- 离散小波变换 \longleftrightarrow 离散傅里叶变换
- 连续小波变换 \longleftrightarrow 积分傅里叶变换

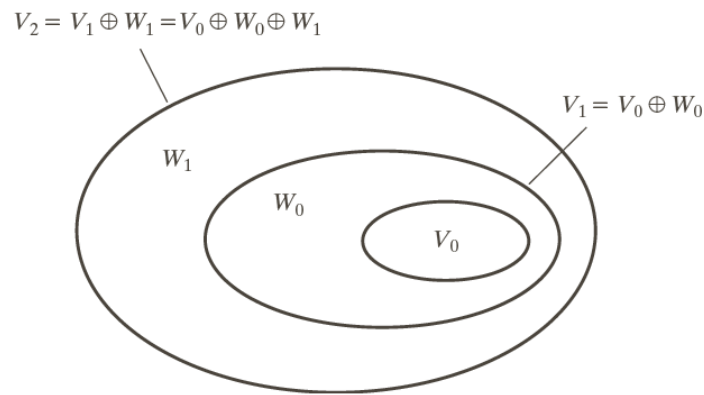
□ 小波级数展开

$$f(x) = \sum_k c_{j_0}(k) \varphi_{j_0,k}(x) + \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_k d_j(k) \psi_{j,k}(x)$$

$c_{j_0}(k)$: 近似或尺度系数; $d_j(k)$: 细节或小波系数

$$c_{j_0}(k) = \langle f(x), \varphi_{j_0,k}(x) \rangle = \int f(x) \varphi_{j_0,k}(x) dx$$

$$d_j(k) = \langle f(x), \psi_{j,k}(x) \rangle = \int f(x) \psi_{j,k}(x) dx$$



小波级数展开

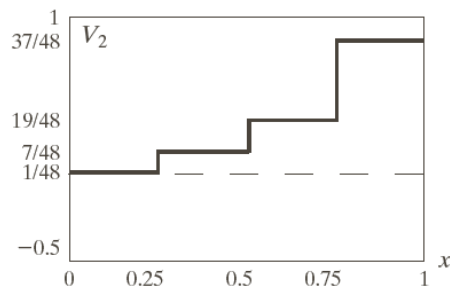
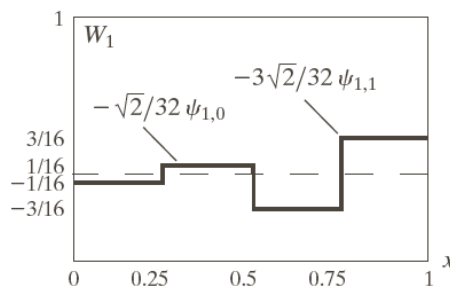
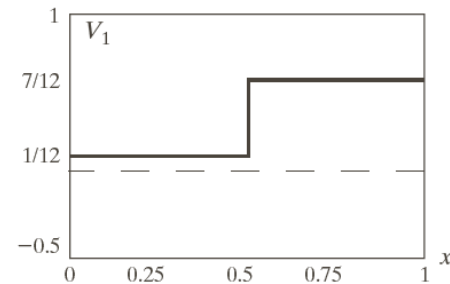
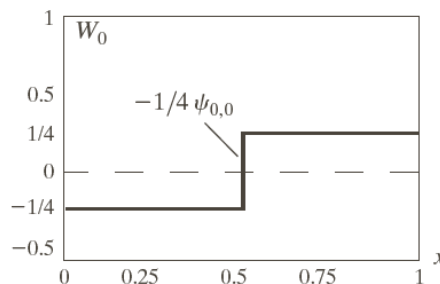
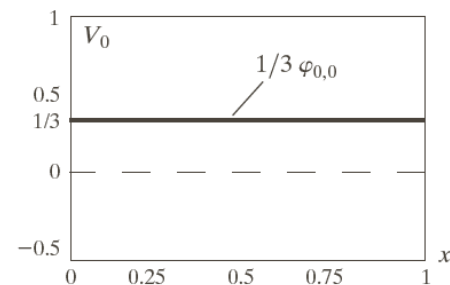
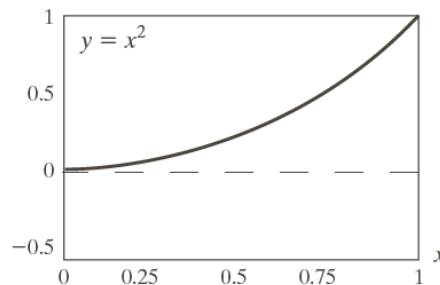
- 随着更高尺度的叠加，近似变得更接近测试函数的精确表示。
- 当 $j \rightarrow \infty$ 时，可实现精确重构表示

$$y = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$c_0(0) = \int_0^1 x^2 \varphi_{0,0}(x) dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

$$d_0(0) = \int_0^1 x^2 \psi_{0,0}(x) dx = -\frac{1}{4}$$

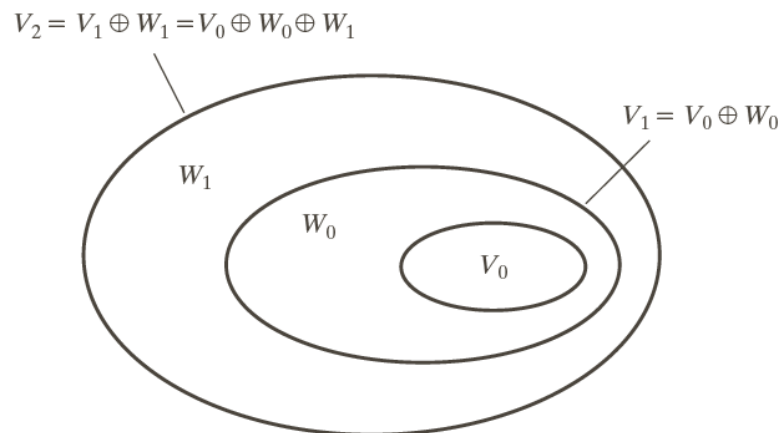
... ..



使用哈尔小波的 $y = x^2$ 的小波级数展开

离散小波变换 (DWT)

- 如果待展开的函数是离散的（即数字序列），得到的系数就称之为离散小波变换（DWT）



- 正向DTW系数

$$\text{近似系数: } W_{\varphi}(j_0, k) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_n f(n) \varphi_{j_0, k}(n)$$

$$\text{细节系数: } W_{\psi}(j, k) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_n f(n) \psi_{j, k}(n), j \geq j_0$$

- 反向DWT:

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_k W_{\varphi}(j_0, k) \varphi_{j_0, k}(n) + \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_k W_{\psi}(j, k) \psi_{j, k}(n)$$

连续小波变换 (CWT)

- 连续小波变换 (CWT) 将一个连续函数变换为两个变量（**平移**和**尺度**）的高冗余度函数

- 其结果可用于时间-频率分析

- 连续平方可积函数 $f(x)$ 的**连续小波变换**与实数值小波 $\psi(x)$ 的关系定义为

$$W_{\psi}(s, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi_{s, \tau}(x) dx$$
$$\psi_{s, \tau}(x) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{x - \tau}{s}\right)$$

s : 尺度参数
 τ : 平移参数

- 给定 $W_{\psi}(s, \tau)$, 连续小波反变换为

$$f(x) = \frac{1}{C_{\psi}} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\psi}(s, \tau) \frac{\psi_{s, \tau}(x)}{s^2} d\tau ds$$
$$C_{\psi} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\psi(\mu)|^2}{|\mu|} d\mu$$

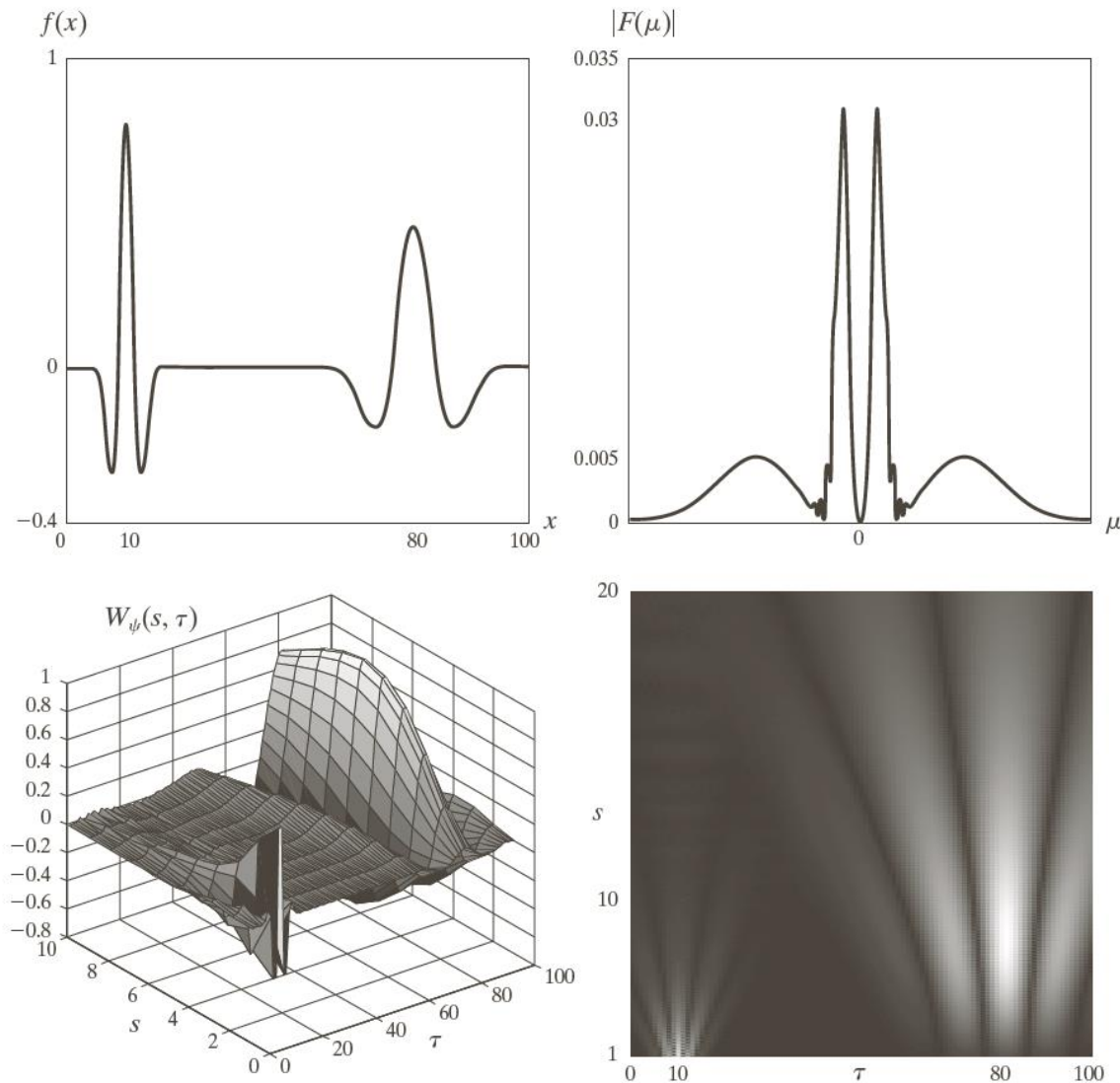


连续小波变换 (CWT)

□ CWT 与 DWT的相似性

- 连续平移参数 τ 取代了整数平移参数 k
- 连续尺度参数 s 与二进制参数 2^j 相反
 - ✓ 小波尺度与传统意义的频率表示关系是相反的
- 连续小波变换类似于尺度为 $j = -\infty$ 的离散小波变换，从而消除了与尺度函数间的联系，因此仅用小波项表示即可
- 与离散变换类似，连续变换的结果为一组系数，度量了 $f(x)$ 与基函数的相似性

连续小波变换



a b
c d

FIGURE 7.16
The continuous wavelet transform (c and d) and Fourier spectrum (b) of a continuous 1-D function (a).

连续小波变换[(c)和(d)]和连续一维函数(a)的傅里叶谱(b)

$$f(x) = \psi_{1,10}(x) + \psi_{6,80}(x)$$



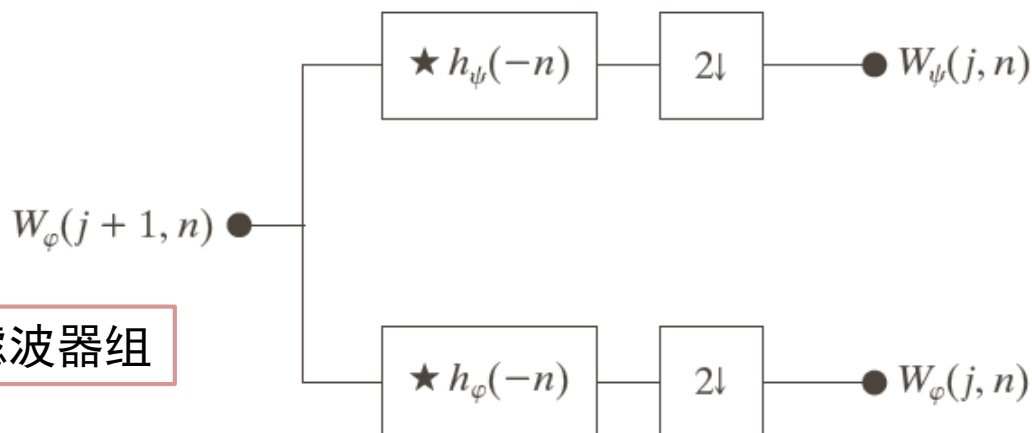
第7章 小波和多分辨率处理

- 7.1 背景
- 7.2 多分辨率展开
- 7.3 一维小波变换
- 7.4 快速小波变换
- 7.5 二维小波变换
- 7.6 小波包

7.4 快速小波变换

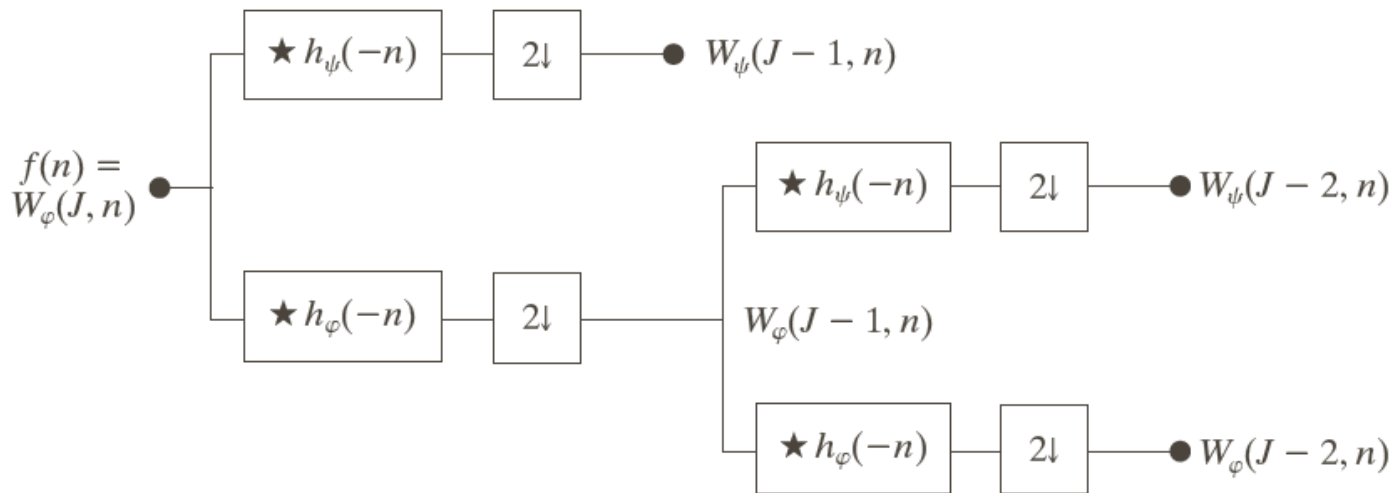
- 快速小波变换（FWT）是实现离散小波变换（DWT）的高效计算，也称Mallat人字形算法
 - 类似于2子带的子带编码
- 相邻尺度的DTW系数之间的关系

$$W_\psi(j, k) = h_\psi(-n) \star W_\varphi(j+1, n) \Big|_{n=2k, k \geq 0}$$
$$W_\varphi(j, k) = h_\varphi(-n) \star W_\varphi(j+1, n) \Big|_{n=2k, k \geq 0}$$



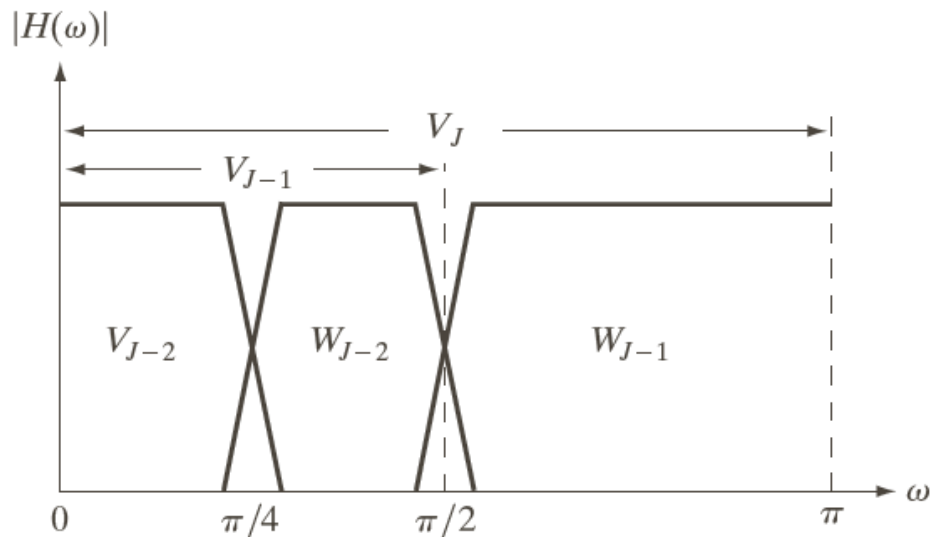
一个FWT分析滤波器组

7.4 快速小波变换



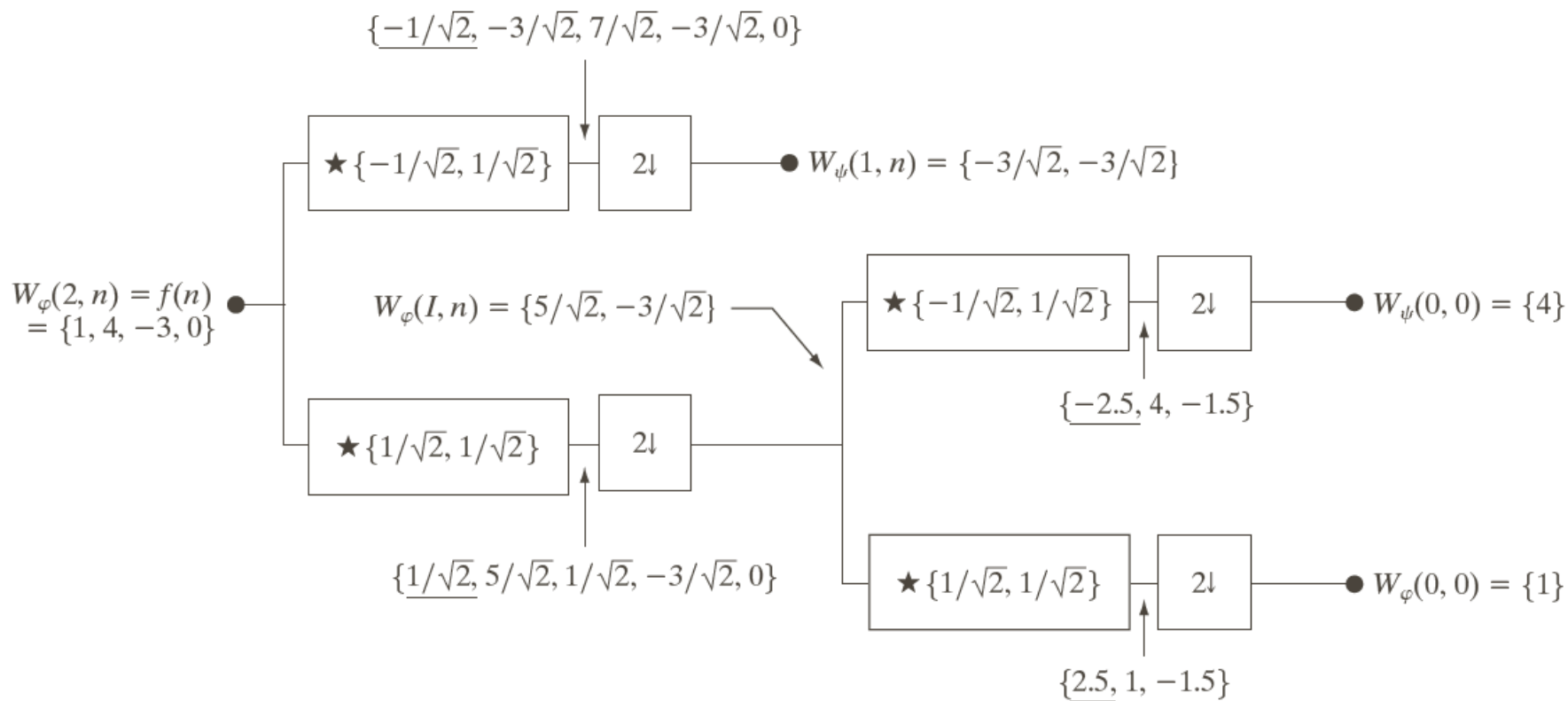
a
b

FIGURE 7.18
(a) A two-stage or two-scale FWT analysis bank and (b) its frequency splitting characteristics.



(a) 一个二级或二尺度
FWT分析滤波器组
(b) 其频谱分离特性

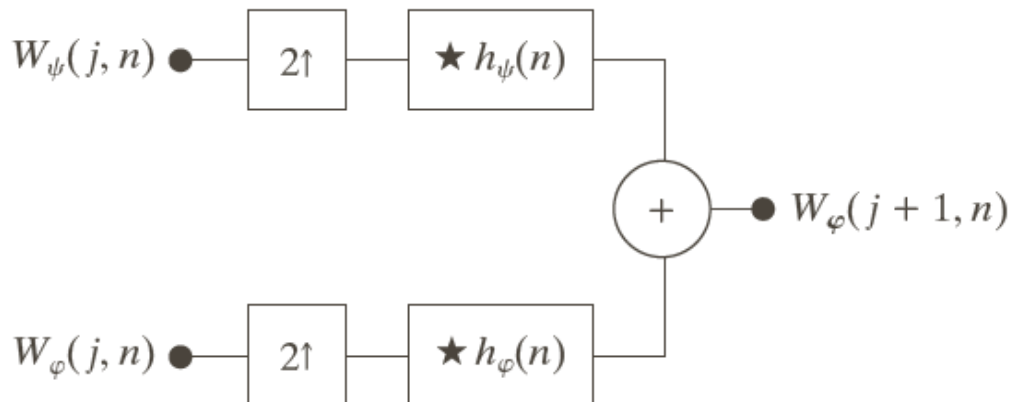
7.4 快速小波变换



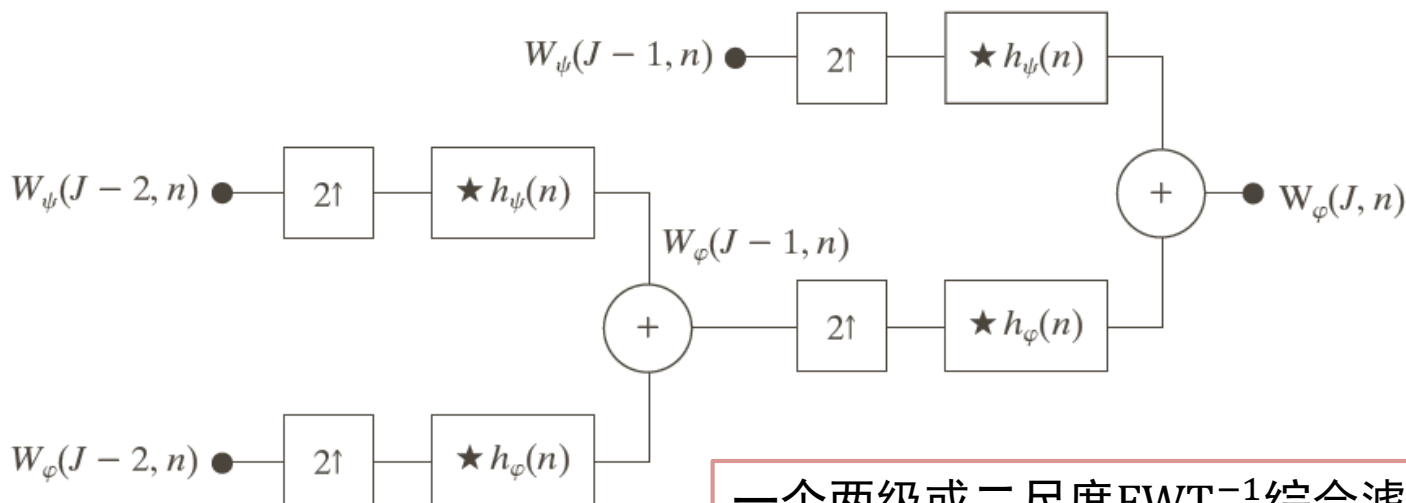
使用哈尔尺度和小波向量计算序列 $\{1, 4, -3, 0\}$ 的一个二尺度快速小波变换

7.4 快速小波变换：反变换

FWT⁻¹综合滤波器组



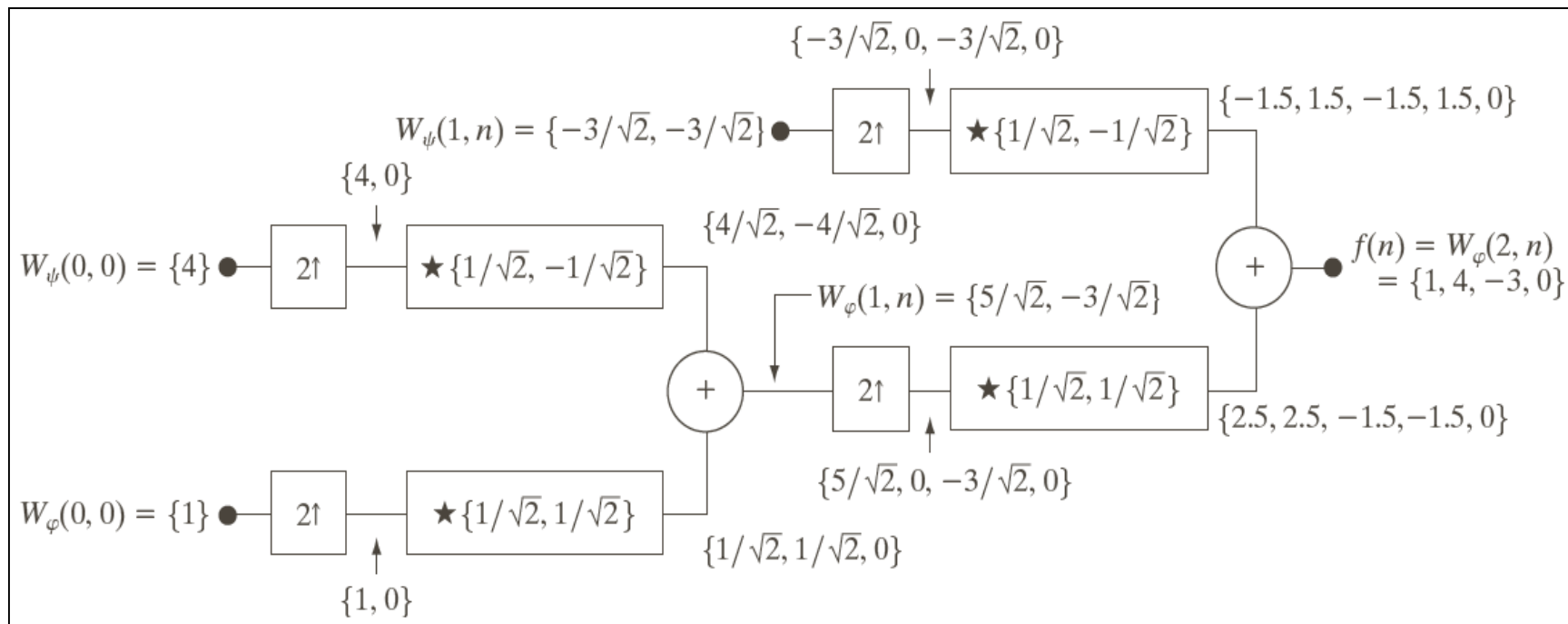
$$W_{\varphi}(j+1, k) = h_{\varphi}(k) \star W_{\varphi}^{2\uparrow}(j, k) + h_{\psi}(k) \star W_{\psi}^{2\uparrow}(j, k) \Big|_{k \geq 0}$$



一个两级或二尺度FWT⁻¹综合滤波器组

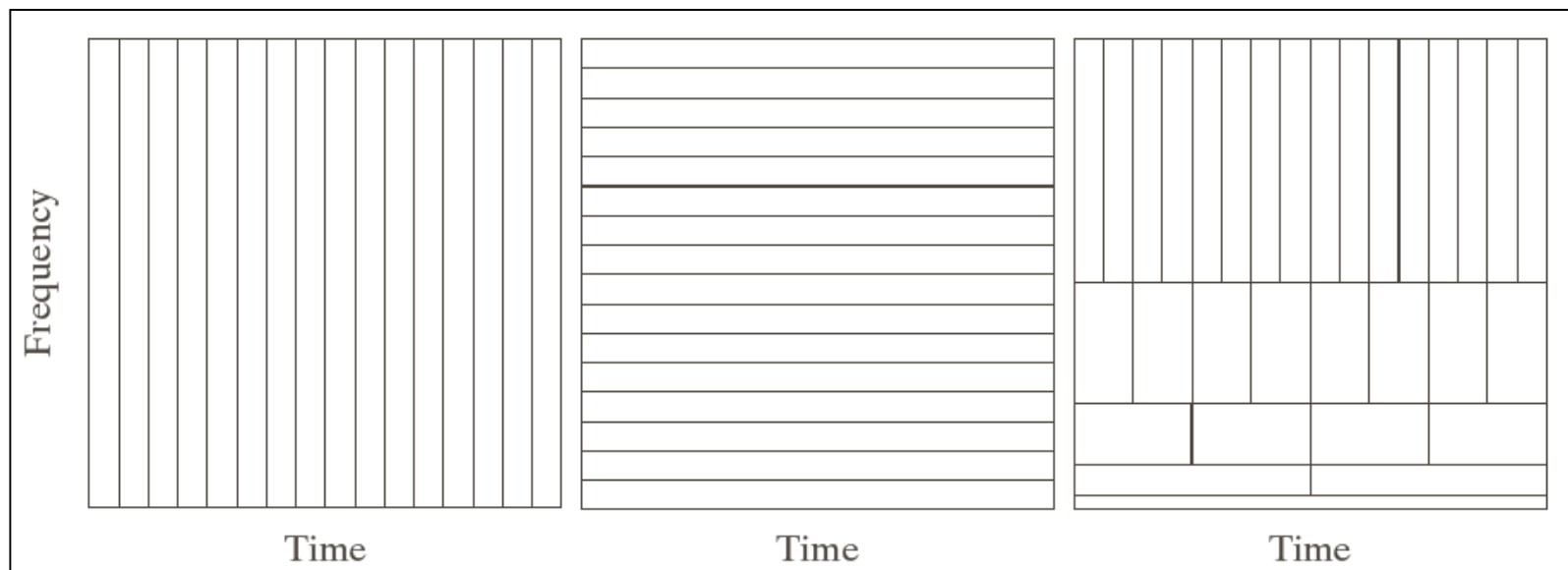
7.4 快速小波变换：反变换

- 使用哈尔尺度和小波函数计算序列 $\{1, 4, -1.5, \sqrt{2}, -1, -1.52\sqrt{2}\}$ 的二尺度快速小波反变换



7.4 快速小波变换

- 标准时域基指明了事件发生的时刻，但不提供频率信息
- 正弦基指出了发生较长时间的事件中出现的频率，但没有提供时间分辨率
- FWT的时间-频率片中时间和频率分辨率是变化的，但每个片的面积相同



(a) 冲激函数基

(a) 正弦函数(FFT)基

(c) FWT基



第7章 小波和多分辨率处理

7.1 背景

7.2 多分辨率展开

7.3 一维小波变换

7.4 快速小波变换

7.5 二维小波变换

7.6 小波包

7.5 二维小波变换

- 在二维情况下，需要1个二维尺度函数 $\varphi(x, y)$ 和3个二维小波 $\psi^H(x, y)$, $\psi^V(x, y)$ 和 $\psi^D(x, y)$
- 每个二维小波都是两个一维函数的乘积

可分离尺度函数

$$\varphi(x, y) = \varphi(x)\varphi(y)$$

列方向变化（水平边缘）

$$\psi^H(x, y) = \psi(x)\varphi(y)$$

行方向变化（垂直边缘）

$$\psi^V(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$$

对角线方向变化

$$\psi^D(x, y) = \psi(x)\psi(y)$$

7.5 二维小波变换

□ 大小为 $M \times N$ 的图像 $f(x, y)$ 的离散小波变换是

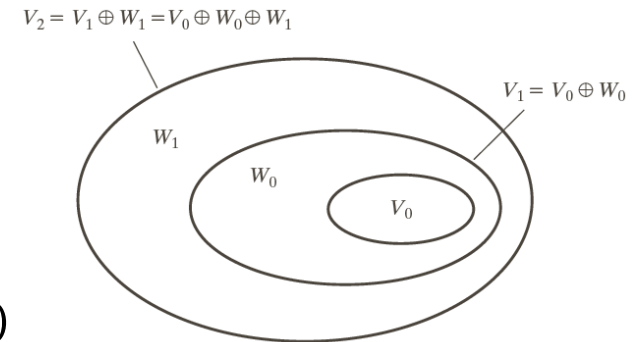
$$W_\varphi(j_0, m, n) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \varphi_{j_0, m, n}(x, y)$$

$$W_\psi^i(j, m, n) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \psi_{j, m, n}^i(x, y), \quad i = \{H, V, D\}$$

□ $f(x, y)$ 离散小波反变换

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_m \sum_n W_\varphi(j_0, m, n) \varphi_{j_0, m, n}(x, y)$$

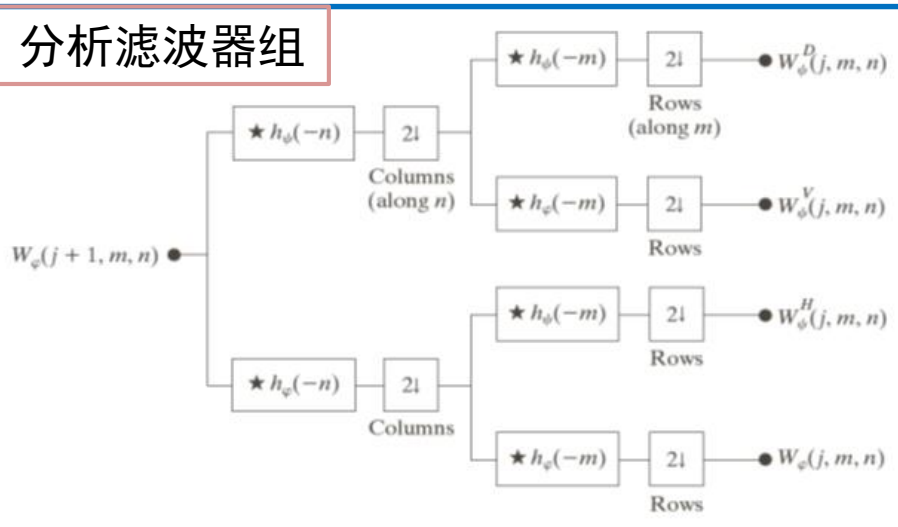
$$+ \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{i=H, V, D} \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_m \sum_n W_\psi^i(j, m, n) \psi_{j, m, n}^i(x, y)$$



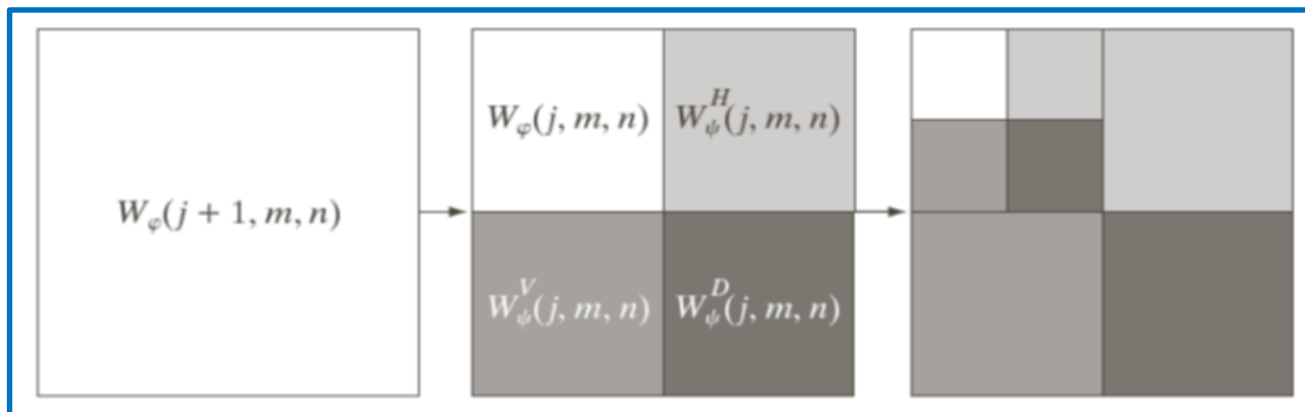
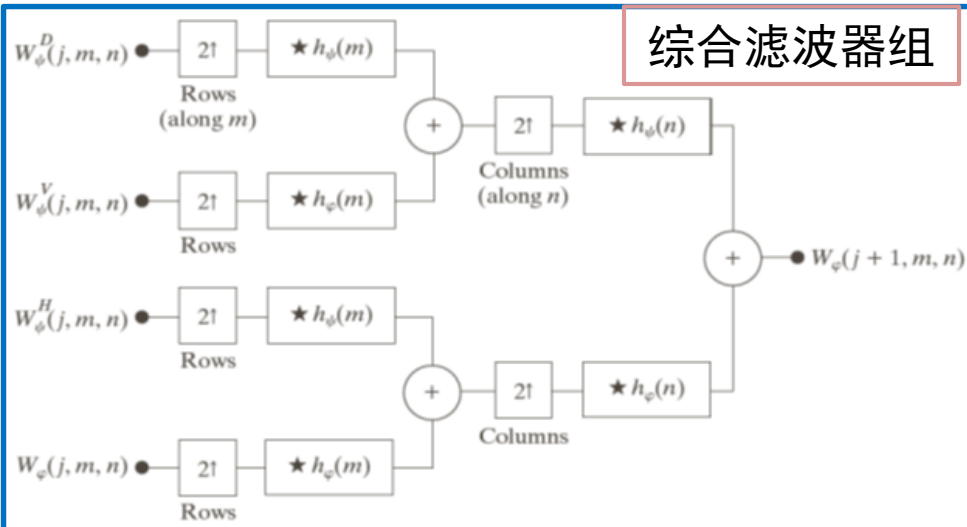
7.6 二维小波变换

二维快速小波变换

分析滤波器组

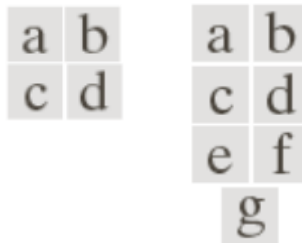
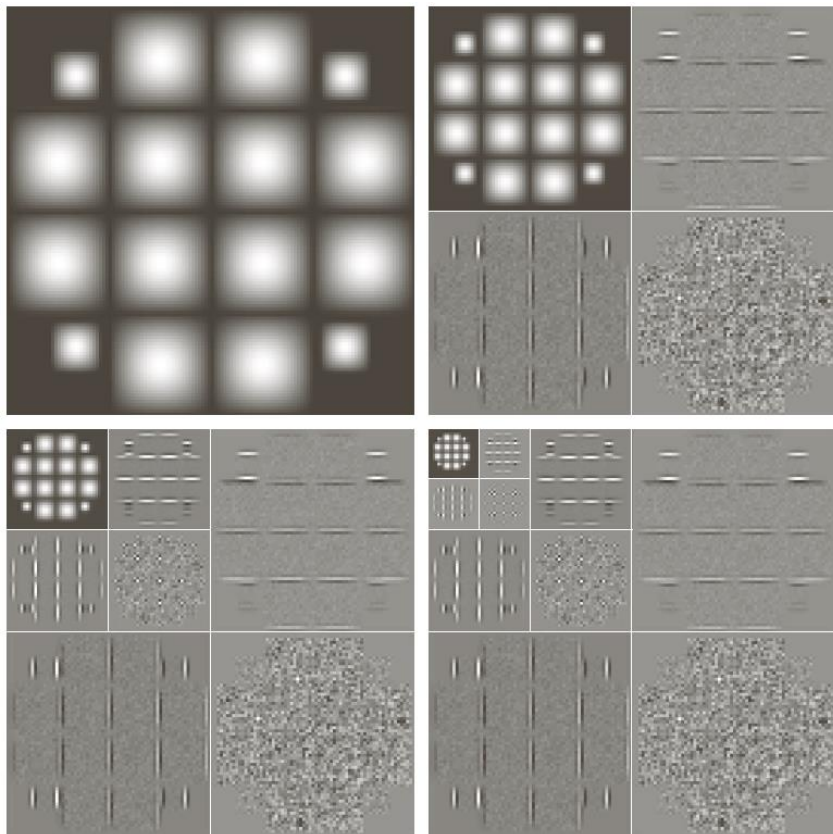


综合滤波器组

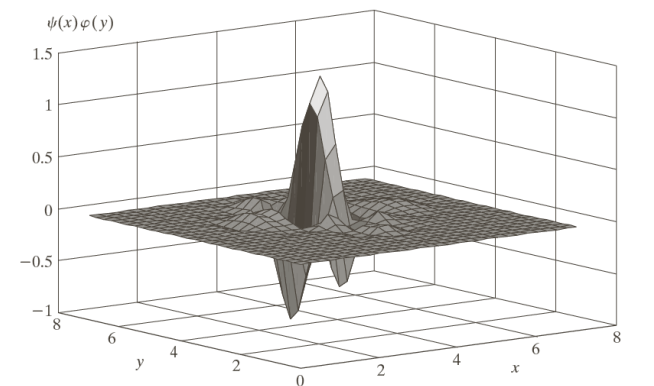
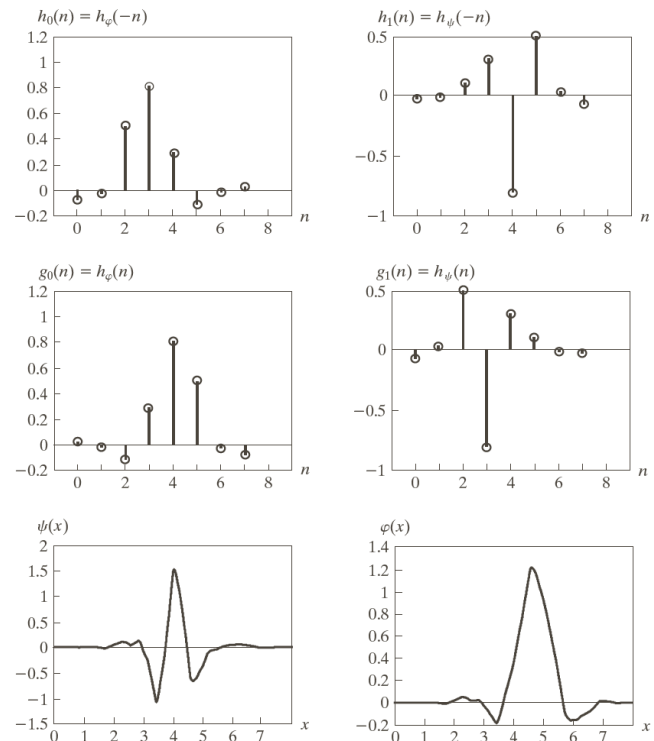


分解结果

7.6 二维小波变换

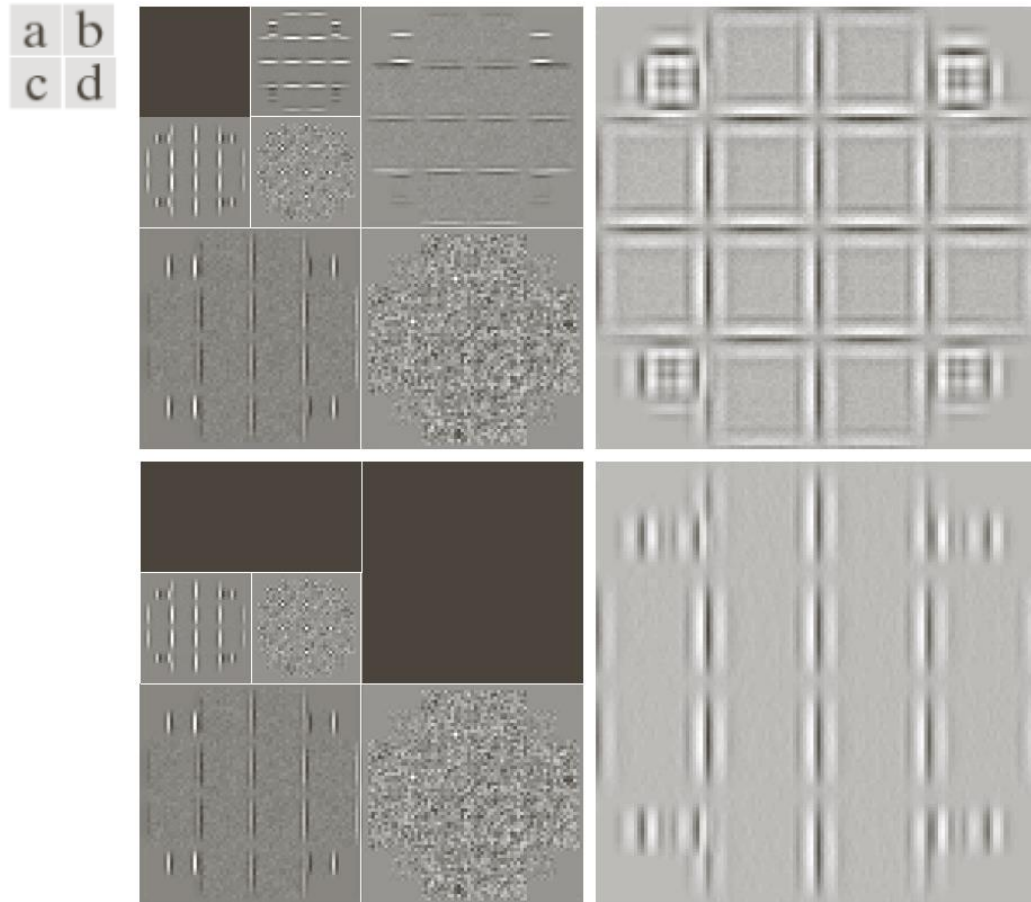


四阶对称小波：
(a)~(b) 重建滤波器；
(c) 一维小波；
(d) 一维尺度函数；
(e) 三个二维小波之一



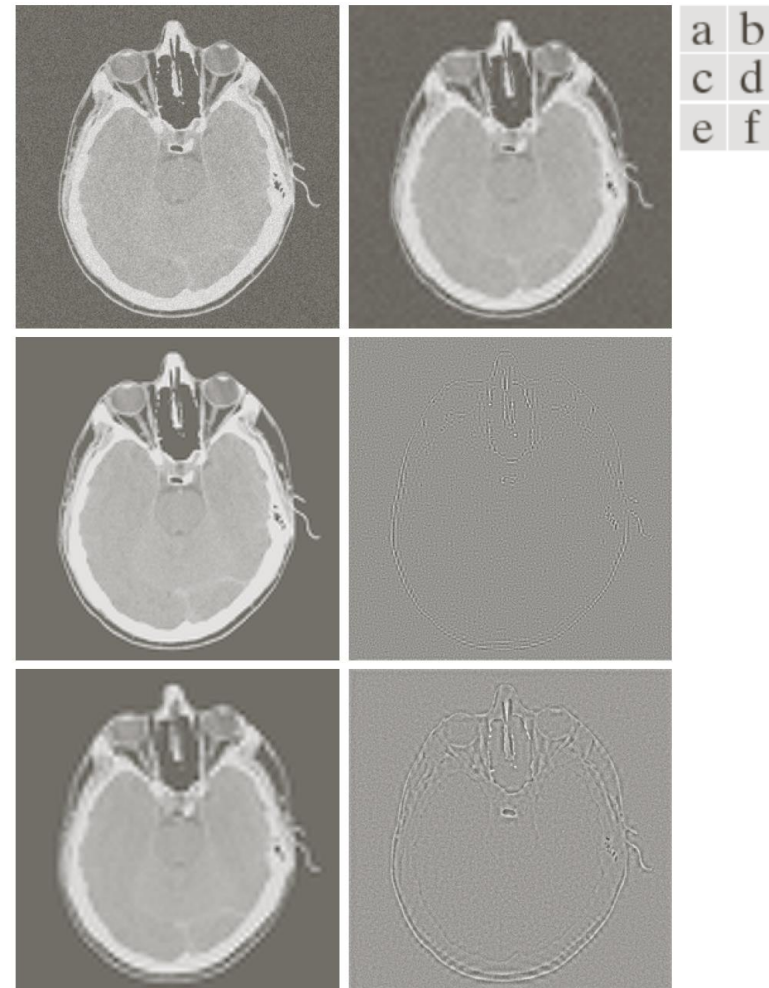
计算二维的三尺度FWT
(a) 原图像；(b) 一尺度FWT；
(c) 二尺度FWT；(d) 三尺度FWT

7.6 二维小波变换：边缘检测与去噪

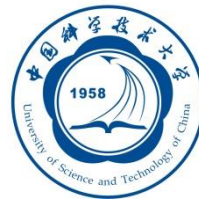


针对**边缘检测**改进的DWT

(a) ~ (c) 删除所选系数的二尺度分解
(b) ~ (d) 相应的重建



为**噪声去除**修改DWT：(a) 人的头部噪声CT图像；
(b)，(c)和(e)对细节系数进行阈值处理后的各种重建；
(d)和(f)在(c)和(e)重建过程中所删除的信息



第7章 小波和多分辨率处理

7.1 背景

7.2 多分辨率展开

7.3 一维小波变换

7.4 快速小波变换

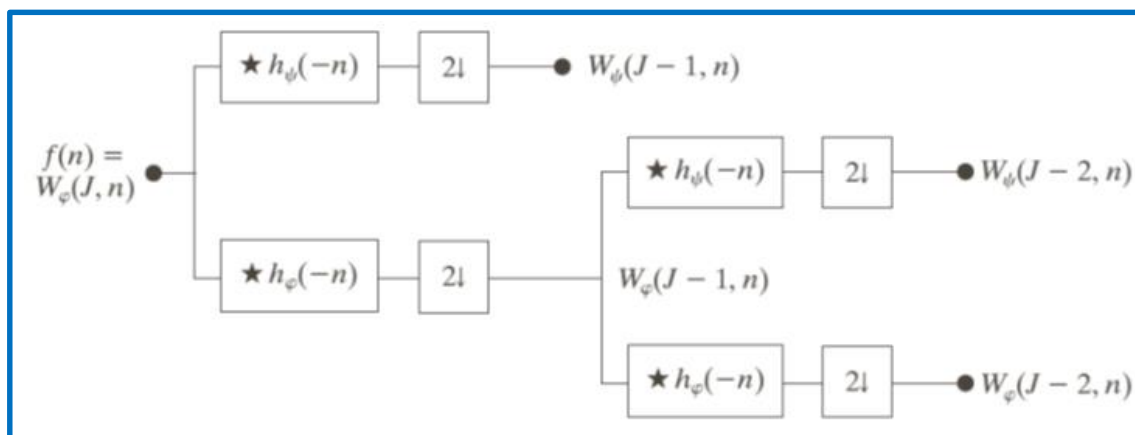
7.5 二维小波变换

7.6 小波包

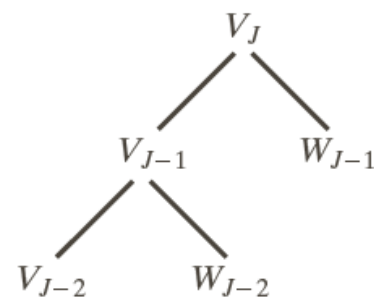
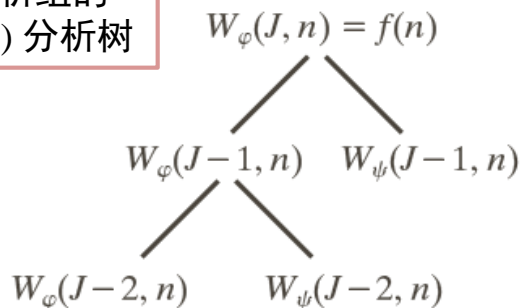
7.6 小波包

□ 将小波分解想象为一个二叉树

- 根节点被赋予最高尺度的近似，叶节点继承变换的近似和细节

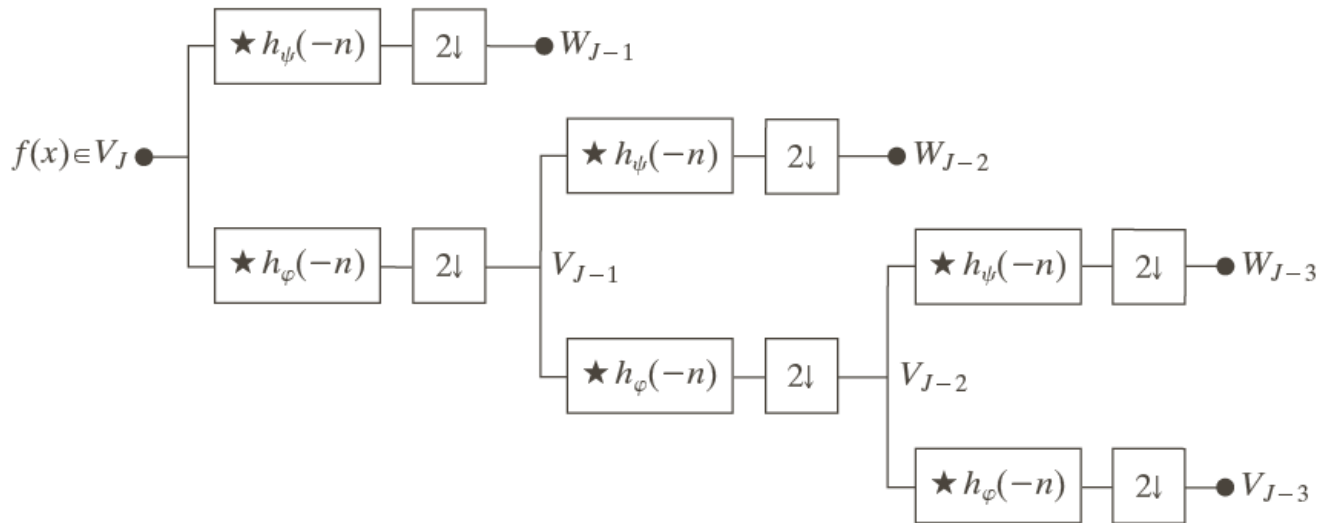


二尺度FWT分析组的
(a) 系数树和(b) 分析树



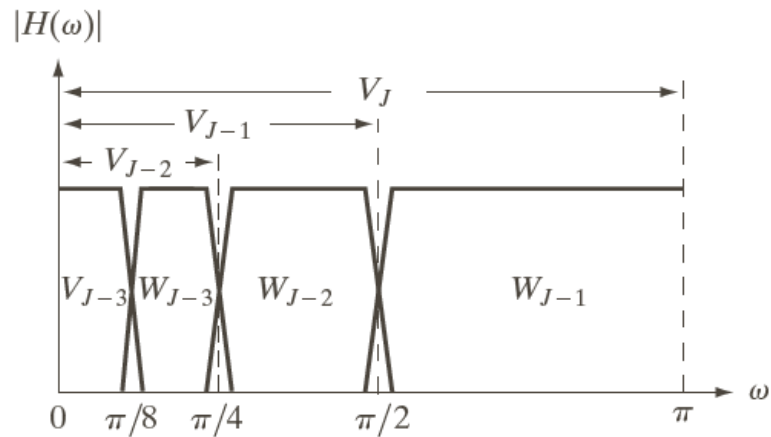
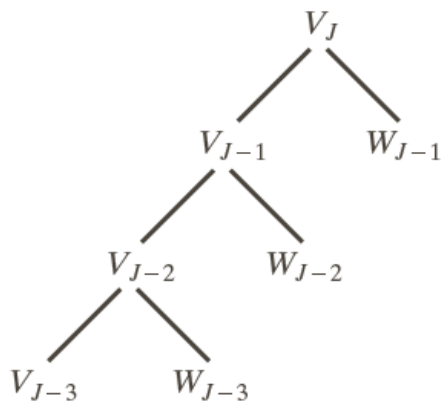
a b

7.6 小波包



a
b c

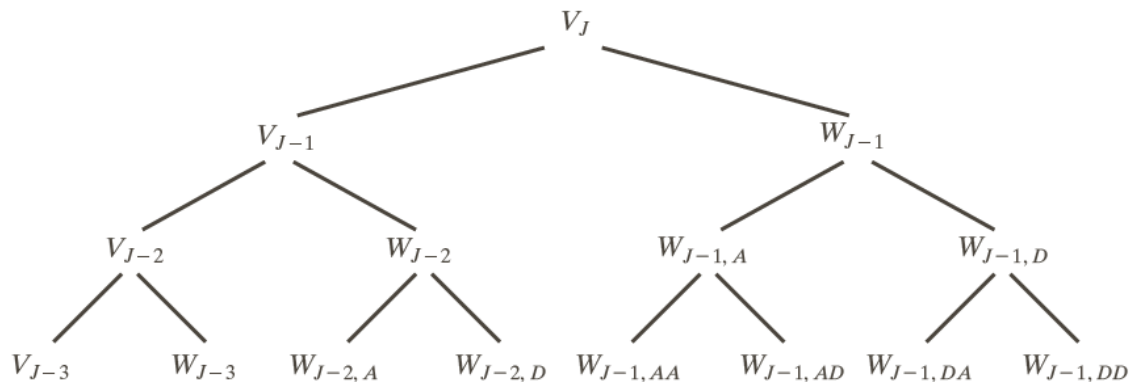
FIGURE 7.30
A three-scale
FWT filter bank:
(a) block diagram;
(b) decomposition
space tree; and
(c) spectrum
splitting
characteristics.



三尺度FWT分析组：
(a) 方框图
(b) 分解空间树
(c) 频谱分离特性

7.6 小波包

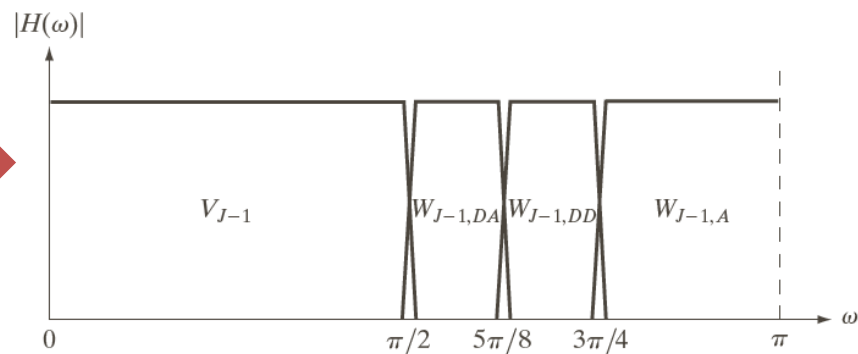
□ 在 W_{J-1} 上附加近似滤波和细节滤波



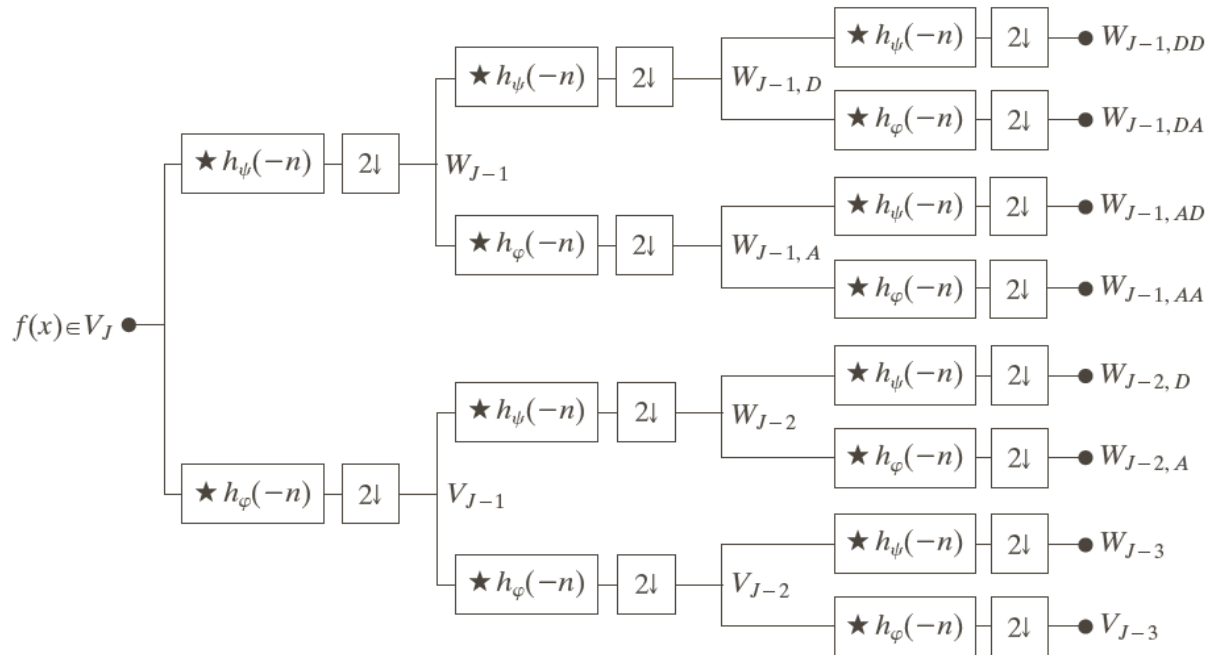
□ 上图中的小波包支持26中不同的分解，例如

$$V_J = V_{J-3} \oplus W_{J-3} \oplus W_{J-2,A} \oplus W_{J-2,D} \oplus W_{J-1,AA} \oplus W_{J-1,AD} \oplus W_{J-1,DA} \oplus W_{J-1,DD}$$

$$V_J = V_{J-1} \oplus W_{J-1,A} \oplus W_{J-1,DA} \oplus W_{J-1,DD} \rightarrow$$

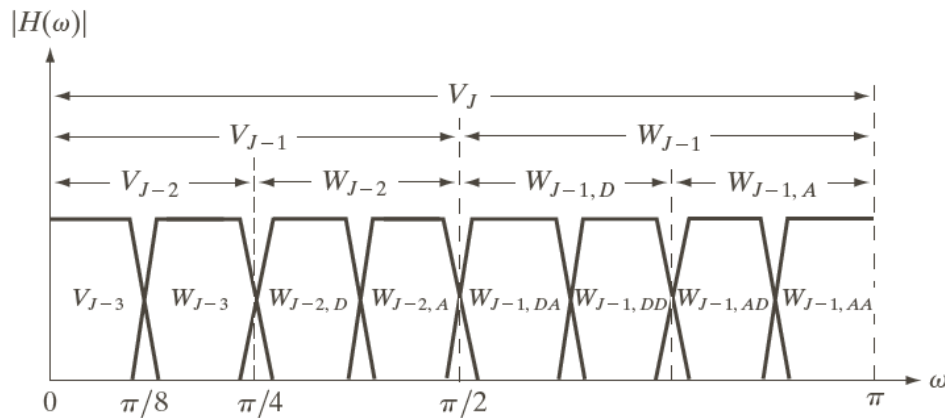


7.6 小波包



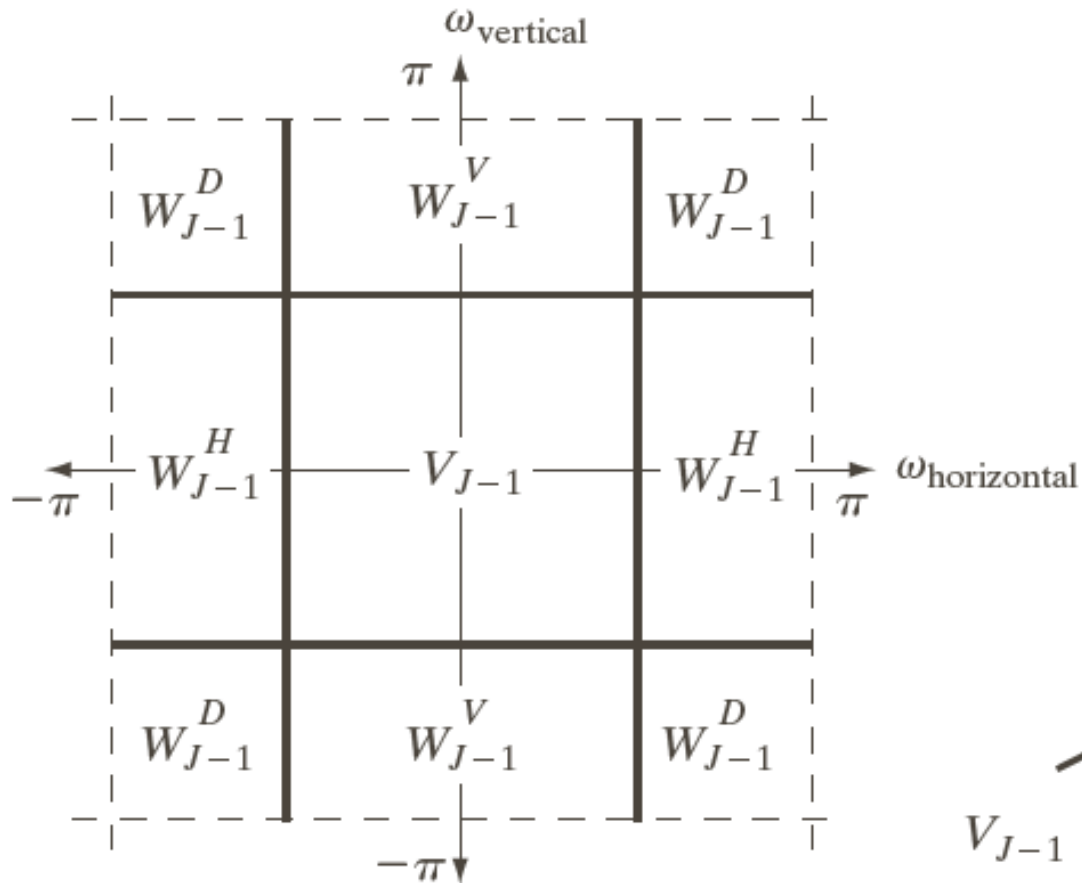
a
b

FIGURE 7.32
The (a) filter bank and (b) spectrum splitting characteristics of a three-scale full wavelet packet analysis tree.



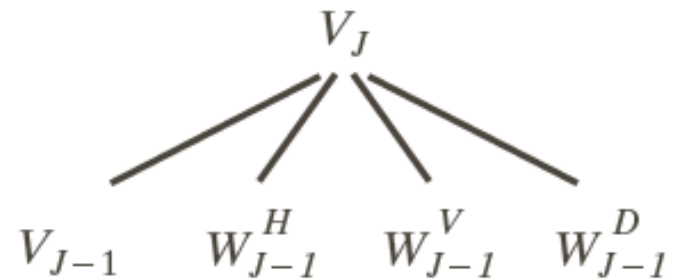
三尺度完全小波包分析树
(a) 滤波器组
(b) 频谱分离特性

7.6 小波包



a b

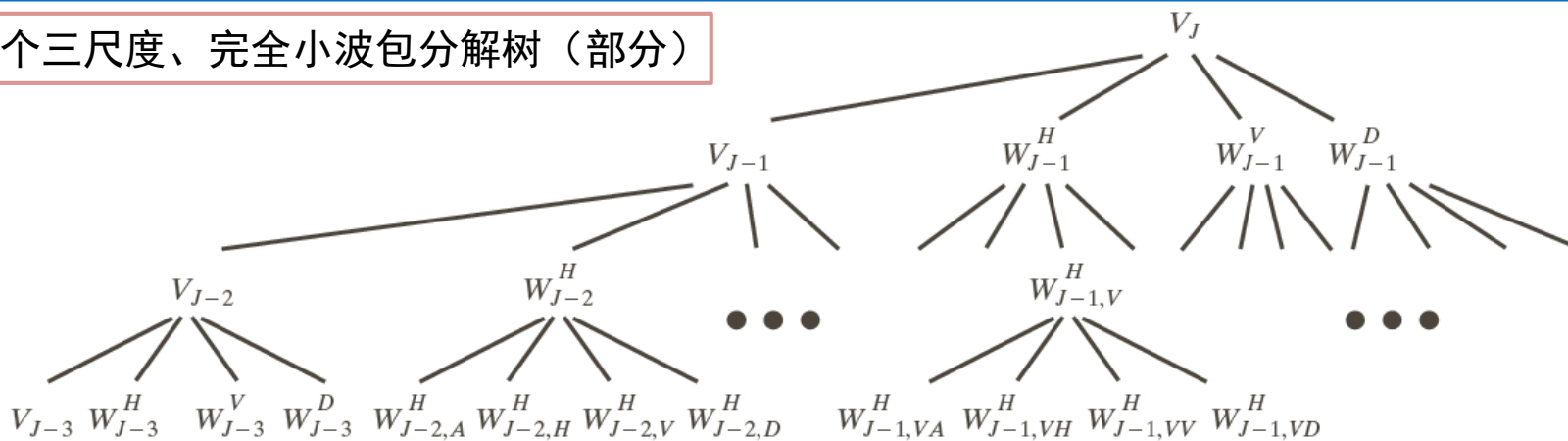
FIGURE 7.34
The first decomposition of a two-dimensional FWT: (a) the spectrum and (b) the subspace analysis tree.



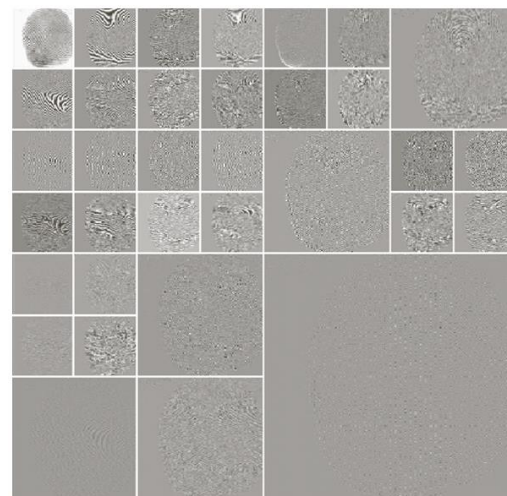
一个二维FWT的第一次分解 (a) 频谱 (b) 子空间分析树

7.6 小波包

一个三尺度、完全小波包分解树（部分）



(a) 一副扫描的指纹图像
(b) 该图像的三尺度、全小波包分解



指纹的一种最佳小波分解

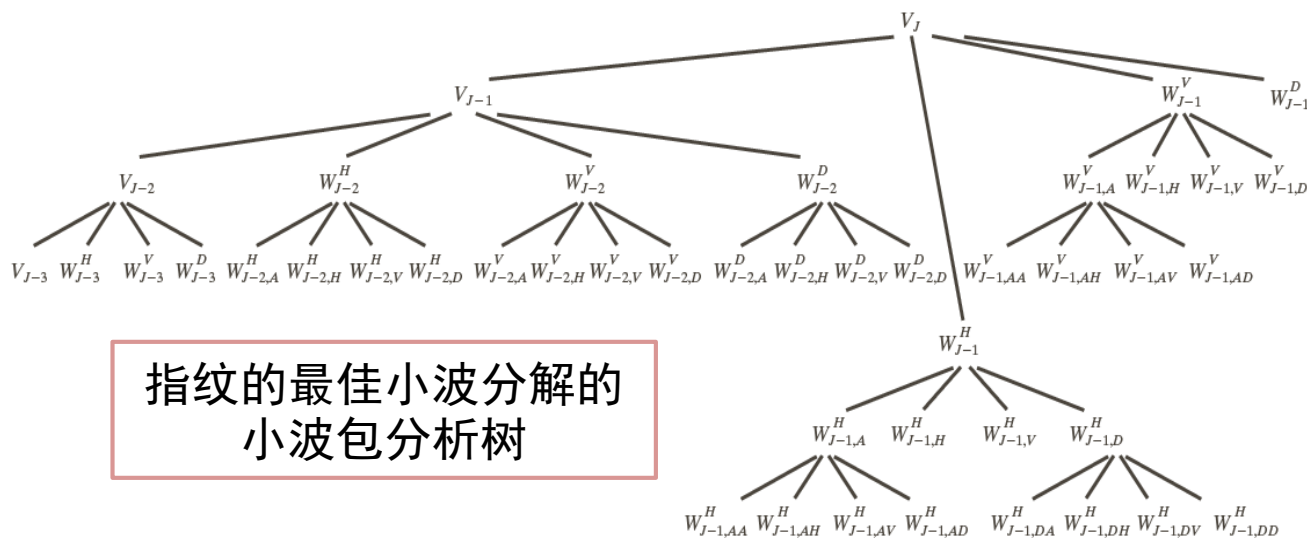
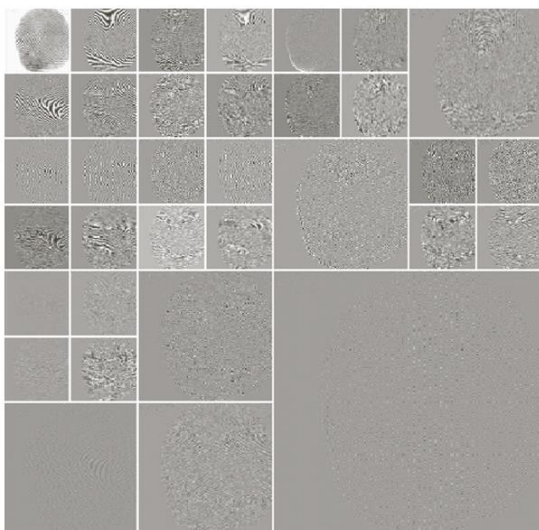
7.6 小波包：指纹图像压缩

- 面向指纹图像压缩，定义代价函数，即

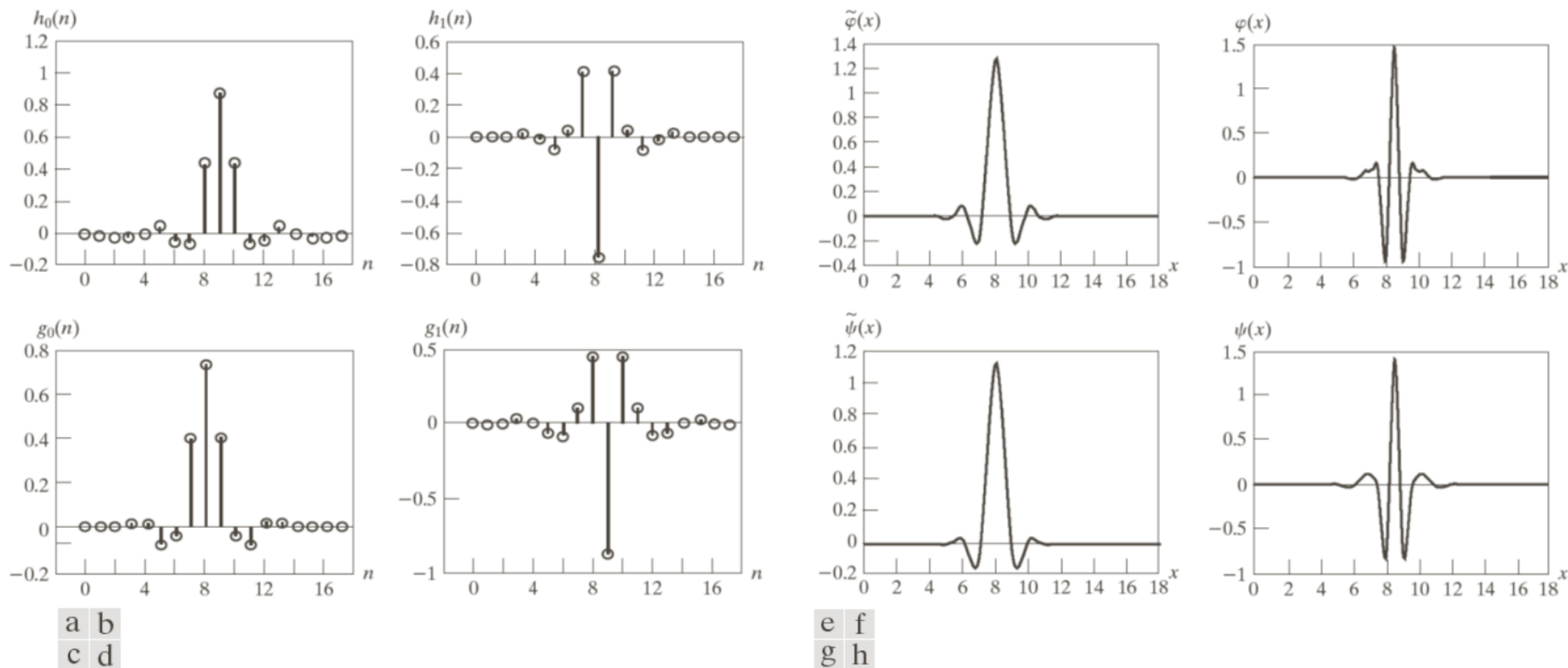
$$E(f) = \sum_{m,n} |f(m,n)|$$

- 父节点分解条件：子节点联合能量小于父节点能量，即

$$E_A + E_A + E_A + E_A < E_P$$



7.6 小波包



Cohen Daubechies Feauveau 双正交小波族成员：
 (a)和(b)分解滤波器系数；(c)和(d)重建滤波器系数；
 (e)~(h)双小波和尺度函数。