# 第7章 小波和多分辨率处理

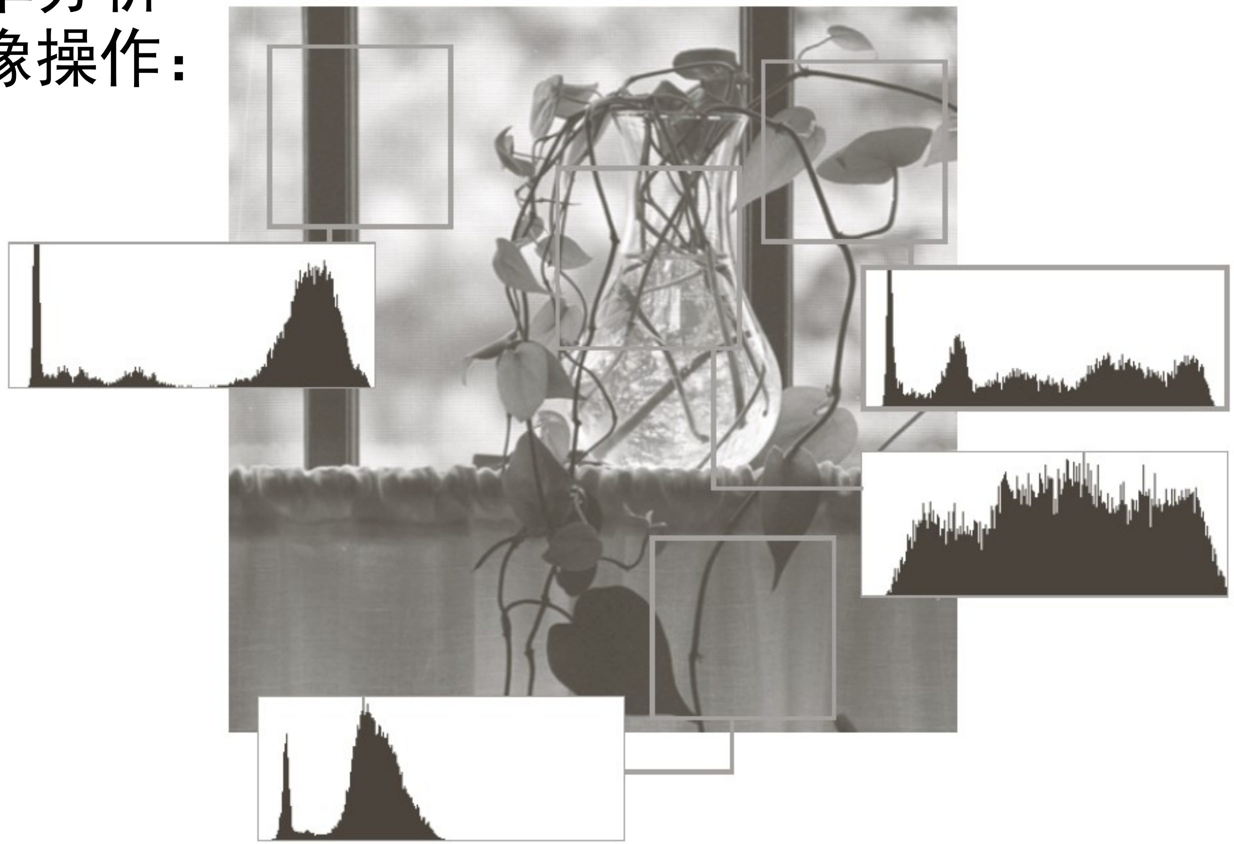
- 小波变换的基函数是小波型，它具有变化的频率和有限的持续时间
- 小波是多分辨率理论这种信号处理和分析方法的基础，多分辨率理论涉及多个分辨率下的信号（或图像）表示与分析。这种方法的优势是某种分辨率下无法检测的特性，在另一种分辨率下容易检测
- 本章从多分辨率的角度来审视基于小波的变换。主要内容集中于离散小波变换的开发和利用

# 第7章 小波和多分辨率处理

# 第7章 小波和多分辨率处理

# 7.1 背景

- 三个与多分辨率分析紧密联系的图像操作：
  - 图像金字塔
  - 子带编码
  - 哈尔变换

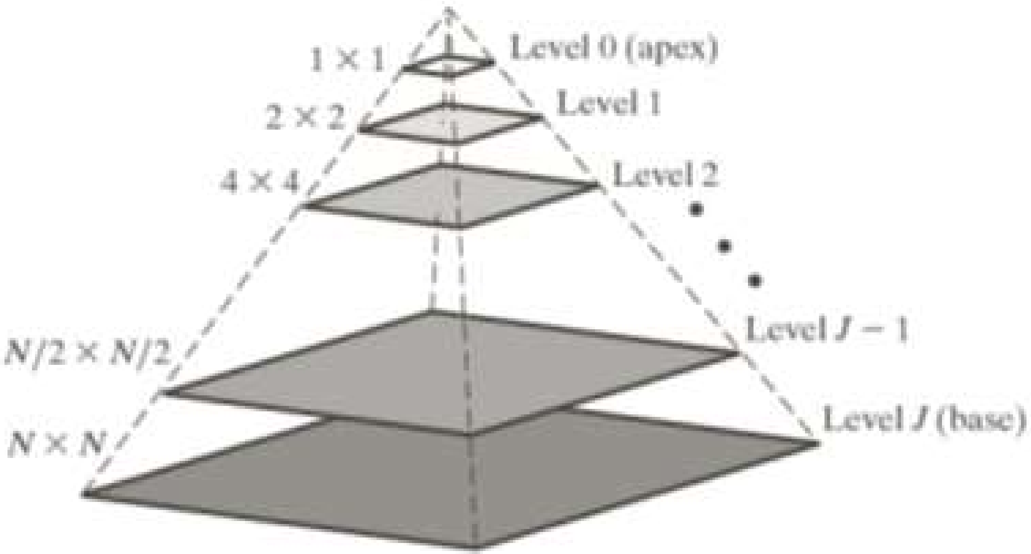


图像不同区域局部直方图

# 图像金字塔

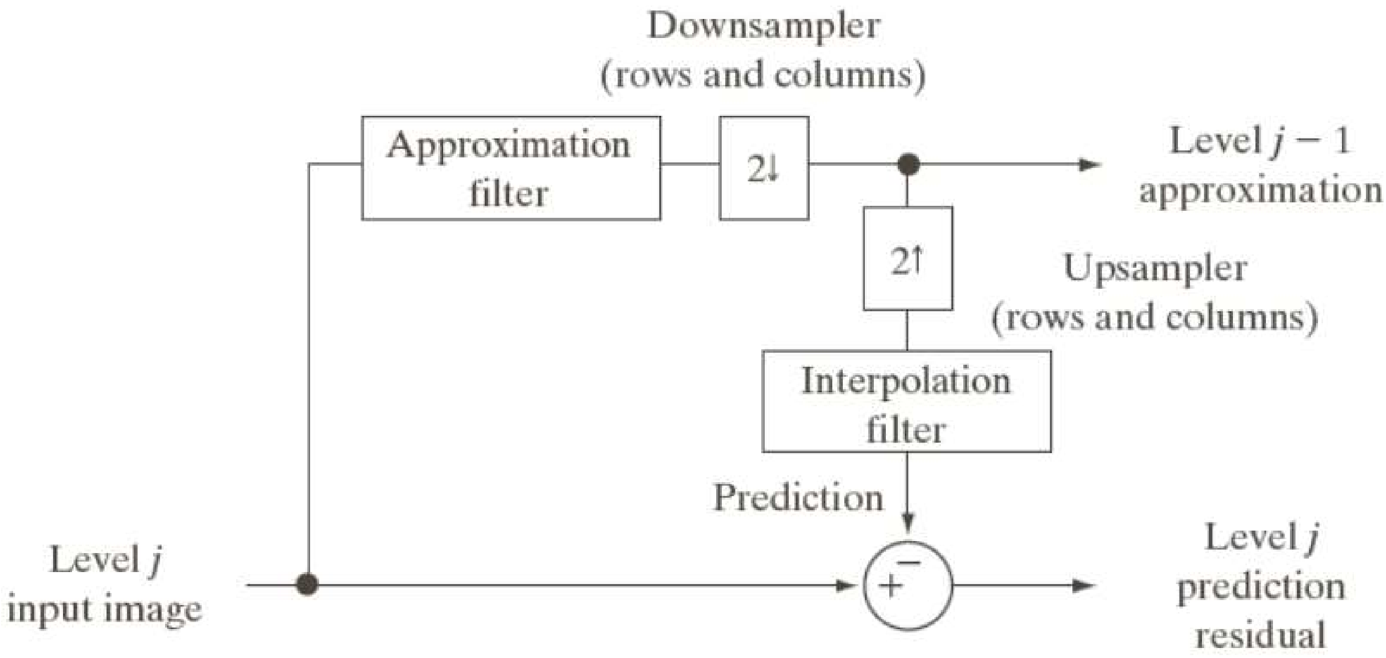
- $P+1$级图像金字塔像素总数是

$$N^2\left(1+\frac{1}{4^1}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{4^P}\right)\leq\frac{4}{3}N^2$$



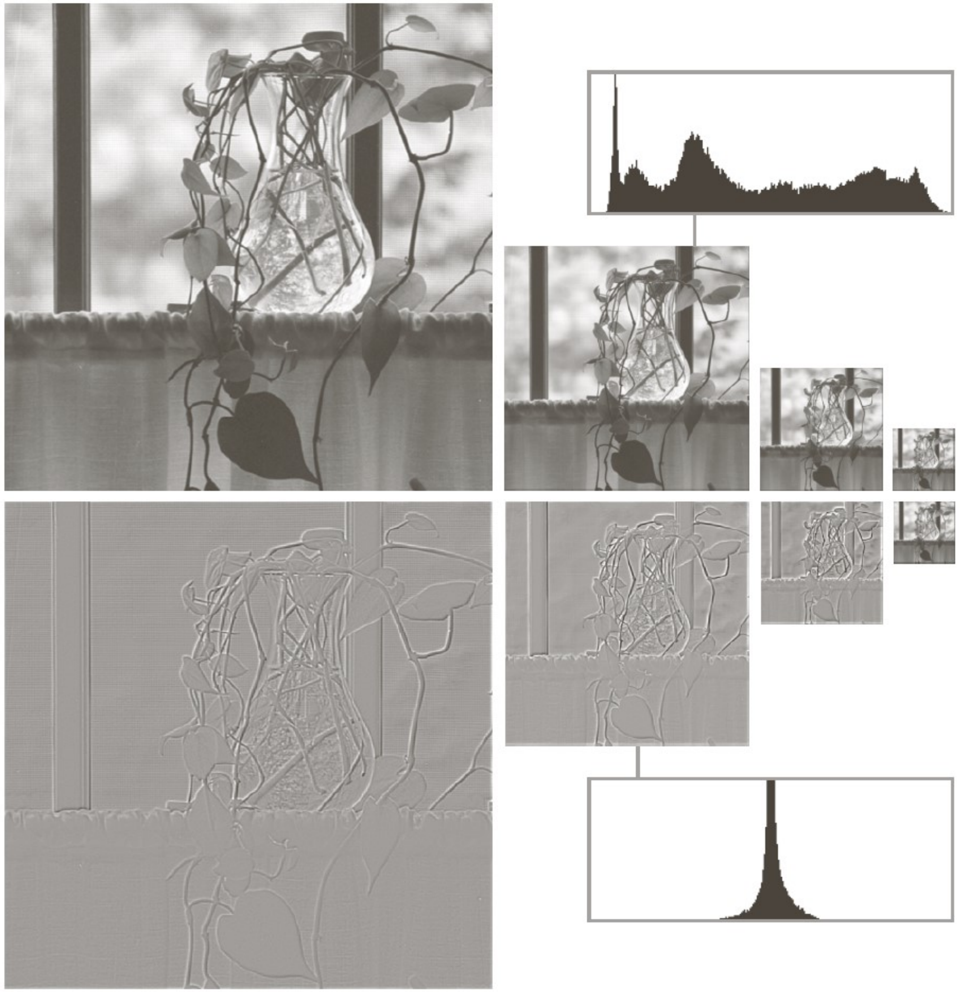
# 图像金字塔

- 预测残差金字塔计算方式
  - 步骤一：计算第$j$级输入图像分辨率降低的近似
  - 步骤二：由步骤一产生的分辨率降低的近似，创建第$j$级输入图像的一个估计
  - 步骤三：计算步骤二的预测图像和步骤一的输入之间的差



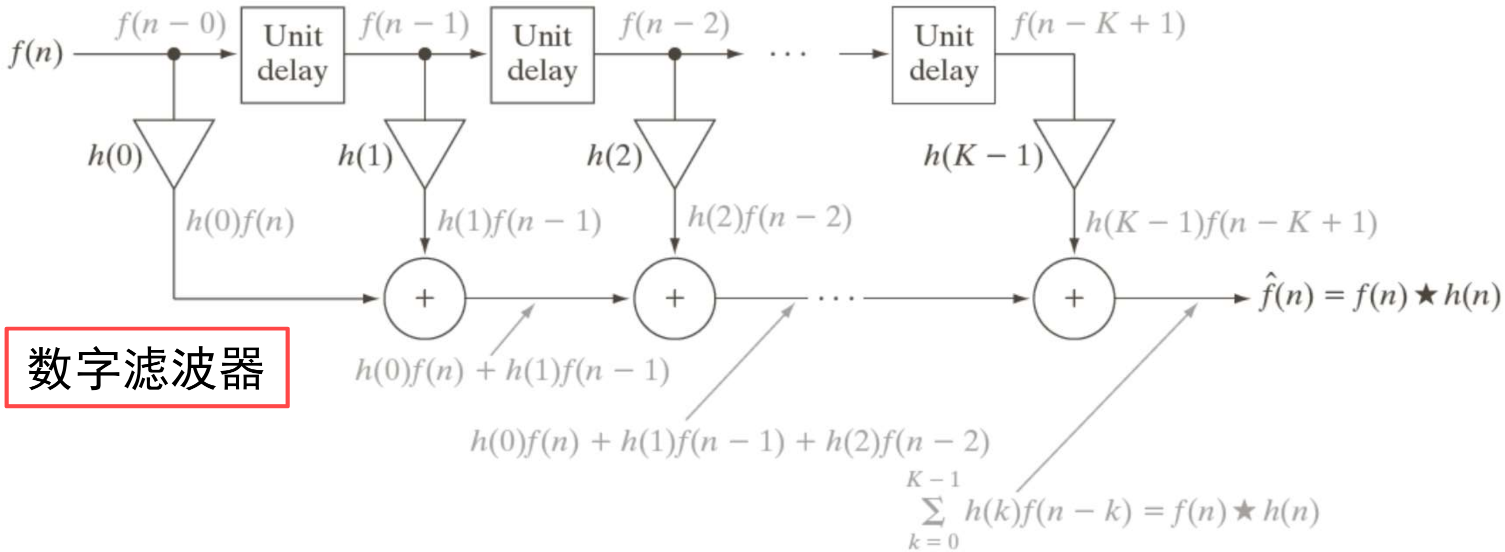
# 图像金字塔

- 上图：近似金字塔，称为高斯金字塔，因为构建金字塔时使用了高斯滤波器。分辨率越低，伴随的细节越少
- 下图：预测残差金字塔，通常称为拉普拉斯金字塔

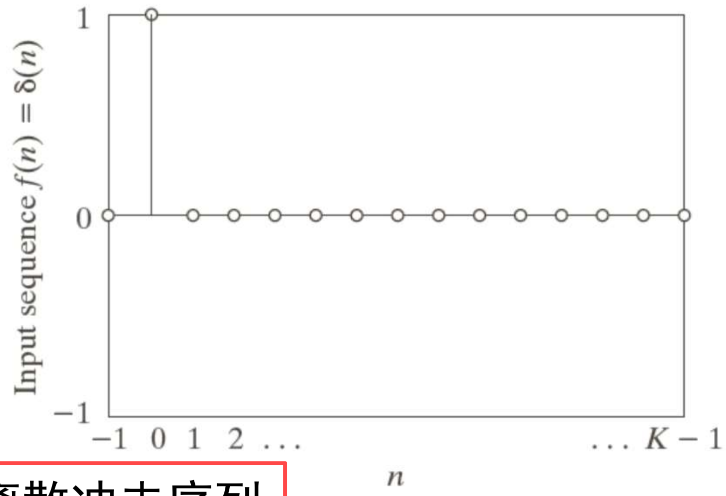


两种图像金字塔及它们的直方图

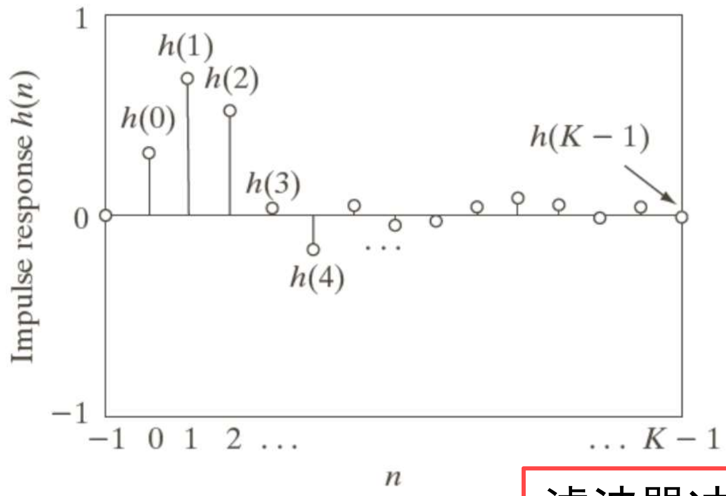
# 子带编码




数字滤波器

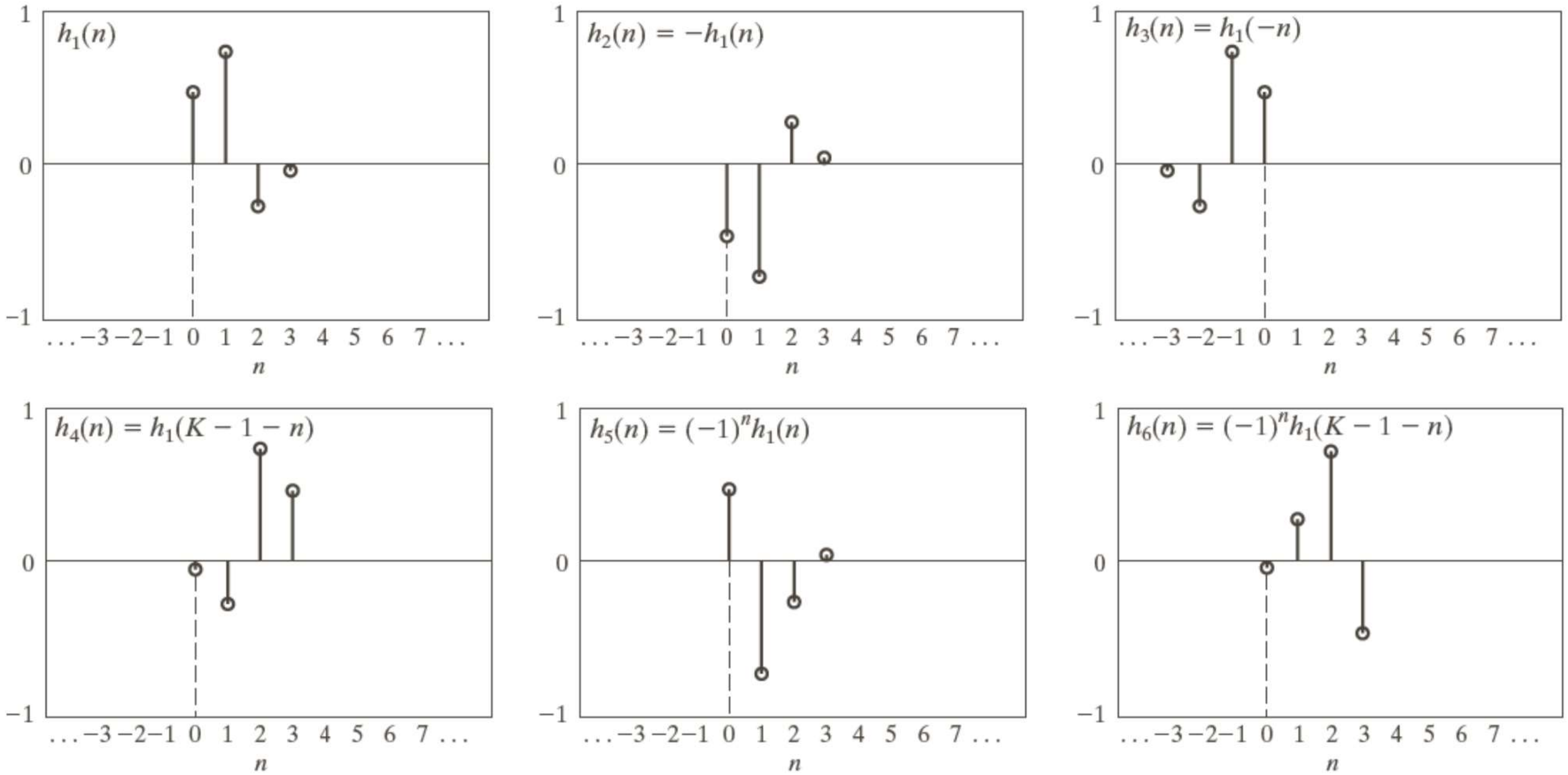



单元离散冲击序列




滤波器冲击响应

# 子带编码



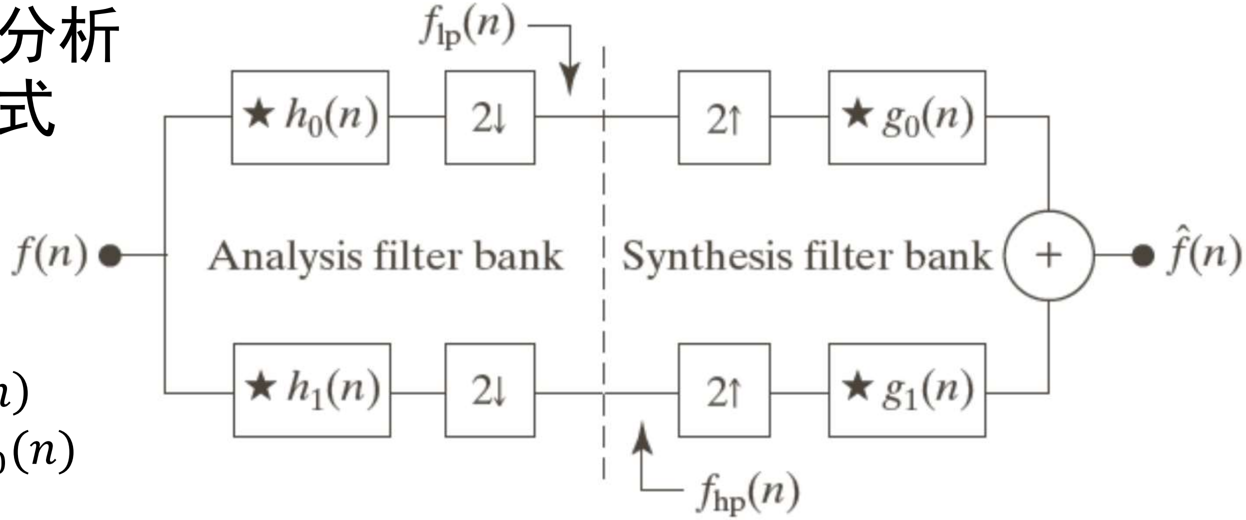

6个功能相关的滤波器的冲击响应：

(a) 参考响应　(b) 符号反转　(c, d) 顺序反转（与延迟有关）

(e) 调制　　　(e) 顺序反转和调制

# 子带编码：两波段子带编码和解码

- 综合滤波器和分析滤波器串联方式

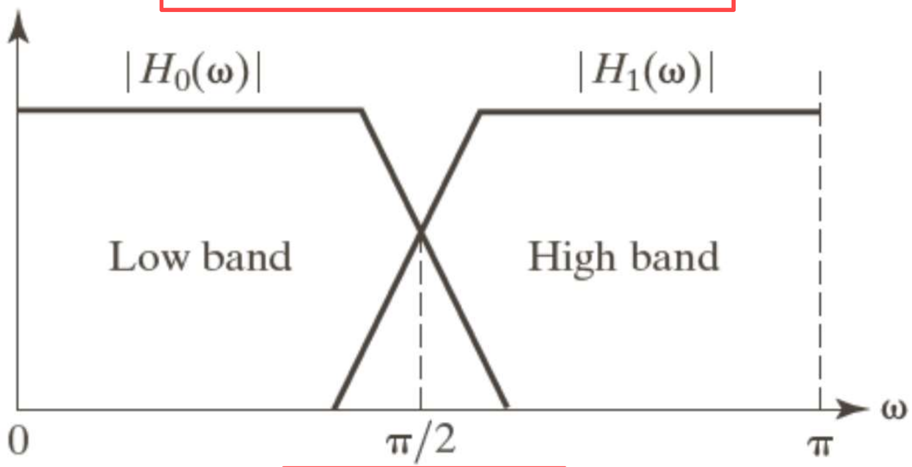



二带子带编码和解码系统

$$g_0(n) = (-1)^n h_1(n)$$
$$g_1(n) = (-1)^{n+1} h_0(n)$$

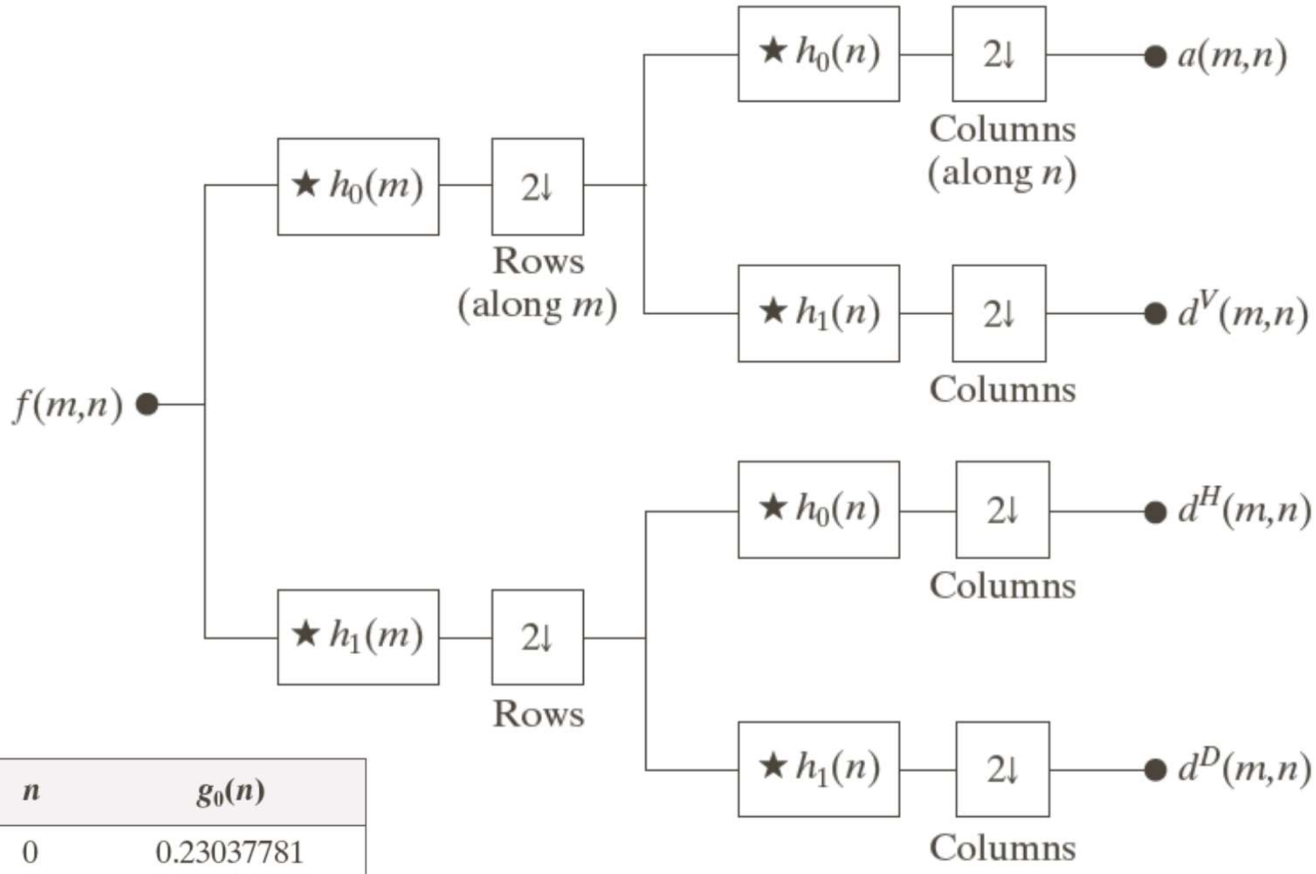
或

$$g_0(n) = (-1)^{n+1} h_1(n)$$
$$g_1(n) = (-1)^n h_0(n)$$




频谱可分性

# 子带编码：二维子带编码




近似子带

垂直细节子带

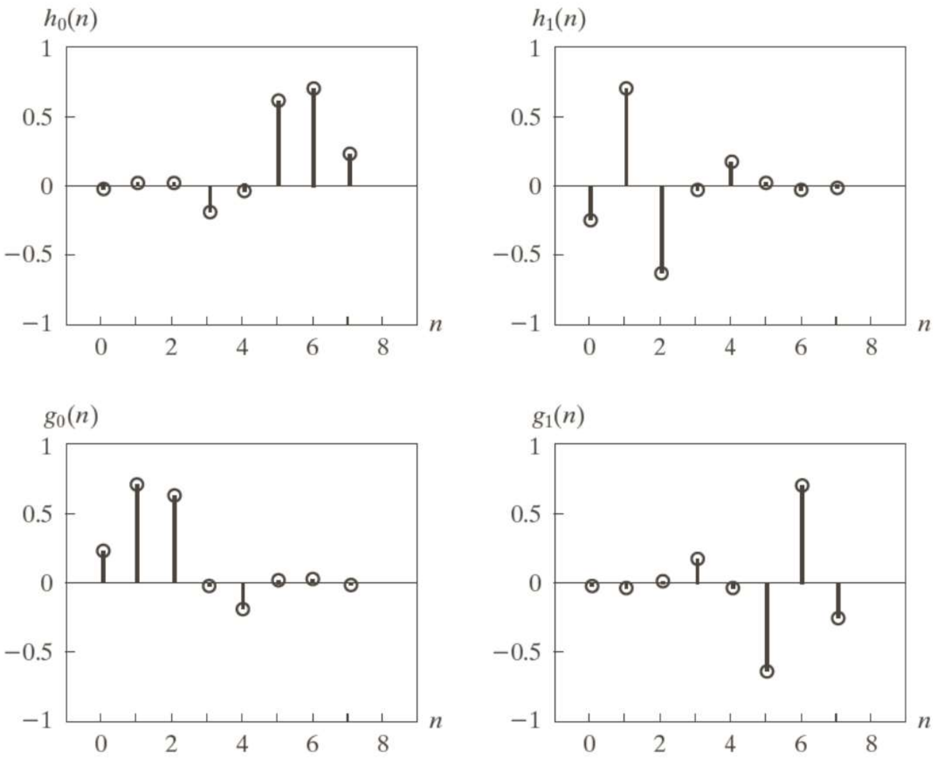
水平细节子带

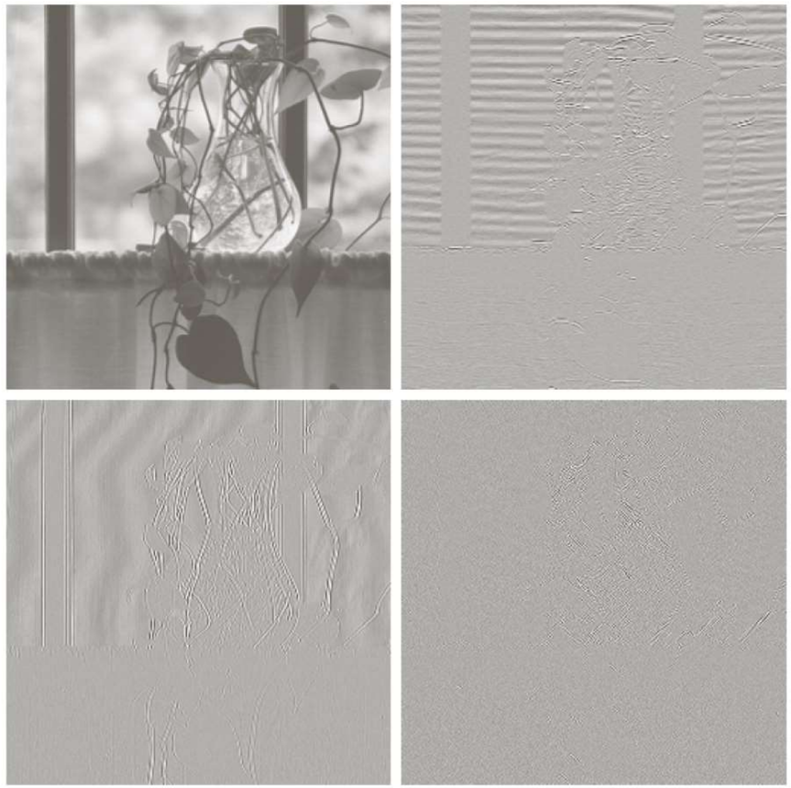
对角线细节子带

| $n$ | $g_0(n)$ |
|---|---|
| 0 | 0.23037781 |
| 1 | 0.71484657 |
| 2 | 0.63088076 |
| 3 | −0.02798376 |
| 4 | −0.18703481 |
| 5 | 0.03084138 |
| 6 | 0.03288301 |
| 7 | −0.01059740 |

$g_0(n)$的Daubechies 8抽头归一化正交滤波器系数

# 子带编码



4个8抽头Daubechies归一化
正交滤波器的冲击响应

子带分离结果，4个子带分别是：
(a) 近似子带 (b) 水平细节子带
(c) 垂直细节自带 (d) 对角线细节子带

# 哈尔变换

- 哈尔（Haar）变换的矩阵表示

$$T = HFH^{\mathrm{T}}$$

$\boldsymbol{H}$：$N \times N$哈尔变换矩阵， $\boldsymbol{F}$：$N \times N$图像矩阵，$\boldsymbol{T}$：$N \times N$变换结果

- 哈尔基函数

$$h_0(z) = h_{00}(z) = \frac{1}{\sqrt{N}}, z \in [0,1]$$

$$h_k(z) = h_{pq}(z) = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{cases} z^{p/2}, (q-1)/2^p \le z < (q-0.5)/2^p \\ -z^{\frac{p}{2}}, (q-0.5)/2^p \le z < q/2^p \\ 0, \text{其他}, z \in [0,1] \end{cases}$$

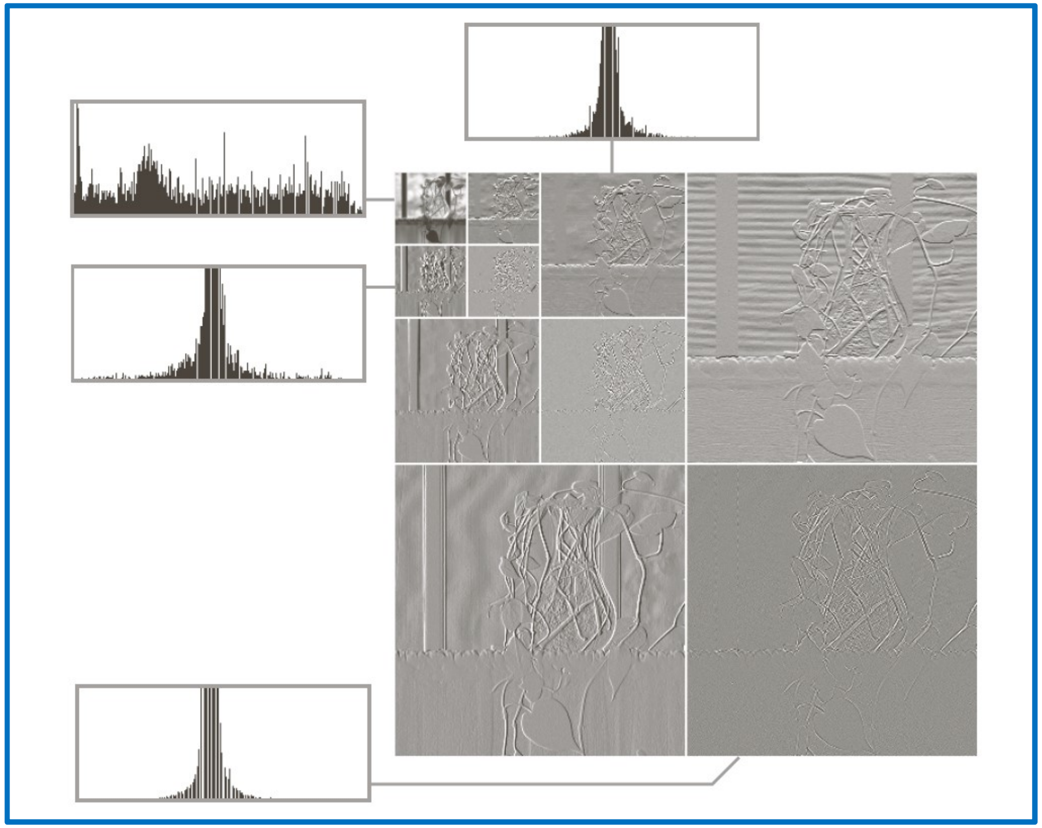
- 哈尔矩阵

$$H_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad H_4 = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

# 哈尔变换

$$H_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}$$

$H_2$的行可用于定义一个2抽头完美重建滤波器组的分析滤波器$h_0(n)$和$h_1(n)$



用$H_2$哈尔基函数的离散小波变换，并显示了其局部直方图的变化

由$H_2$哈尔基函数的离散小波变换得到的集中不同近似
$(64\times64,\ 128\times128,\ 256\times256)$

# 第7章 小波和多分辨率处理

7.1 背景

7.2 多分辨率展开

7.3 一维小波变换

7.4 快速小波变换

7.5 二维小波变换

7.6 小波包

# 7.2 多分辨率展开

- 在多分辨率分析中，尺度函数被用于建立一个函数或一幅图像的一系列近似，每个近似与其最近邻近似在分辨率方面都用基2来区分
- 使用称为小波的附加函数来对相邻近似之间的差进行编码
- 基础概念
  - 级数展开
  - 尺度函数
  - 小波函数

# 级数展开

- 信号或函数$f(x)$通常能分解为一系列展开函数的线性组合

$$f(x)=\sum_{k}\alpha_k\varphi_k(x) \qquad V=\overline{\underset{k}{\mathrm{Span}}\{\varphi_k(x)\}}$$

$$\alpha_k=\langle\tilde{\varphi}_k(x),f(x)\rangle=\int\tilde{\varphi}_k^*(x)f(x)dx$$

- 依靠展开集合的正交性，该计算假定是三种形式之一
  - 情况1：如果展开函数构成$V$的一个正交基，则
    $$\alpha_k=\langle\varphi_k(x),f(x)\rangle$$
  - 情况2：如果展开函数本身不正交，但却是$V$的一个正交基，则
    $$\langle\varphi_j(x),\tilde{\varphi}_k(x)\rangle=\delta_{jk}=\begin{cases}0, j\neq k\\1, j=k\end{cases}$$
  - 情况3：如果展开集合不是$V$的一个基，但支持展开，则
    $$A\parallel f(x)\parallel^2\leq\sum_{k}|\langle\varphi_k(x),f(x)\rangle|^2\leq B\parallel f(x)\parallel^2$$

# 尺度函数

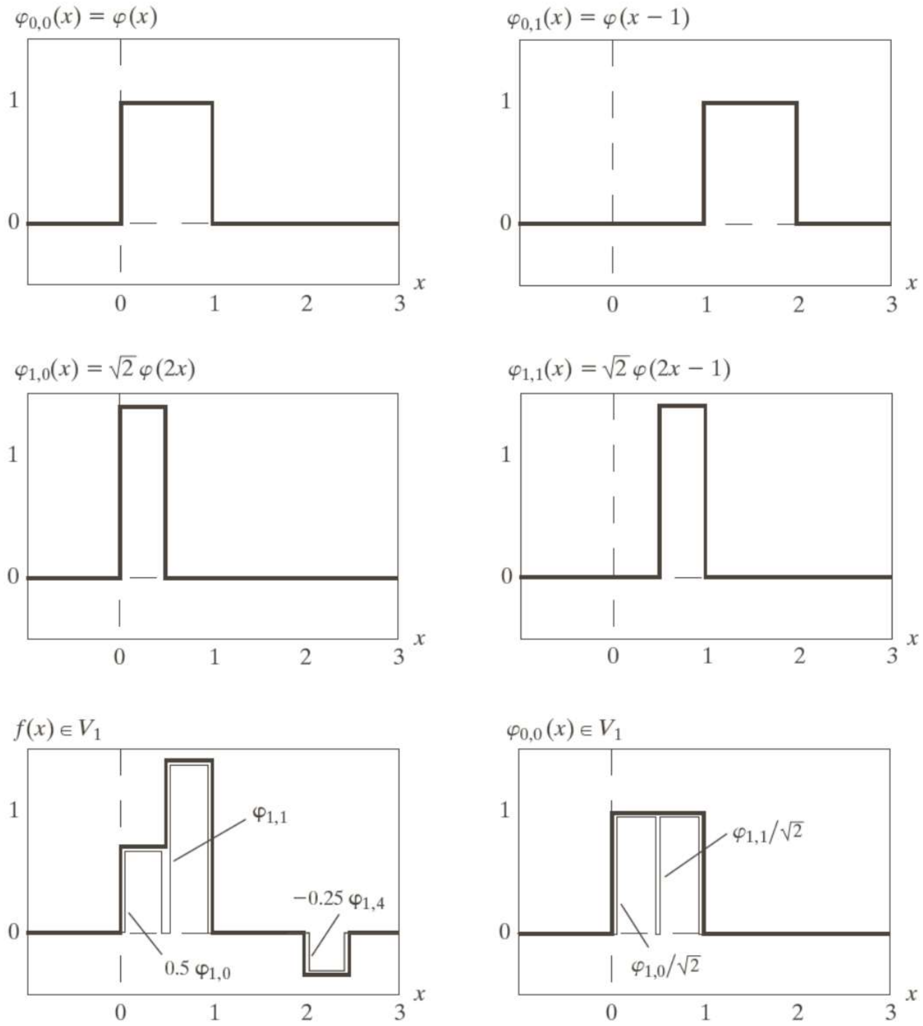
- 考虑由整数平移和实数二值尺度、平方可积函数$\varphi(x)$组成的展开函数集合，即$\{\varphi_{j,k}(x)\}$，其中

$$\varphi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}}\varphi(2^j x - k)$$

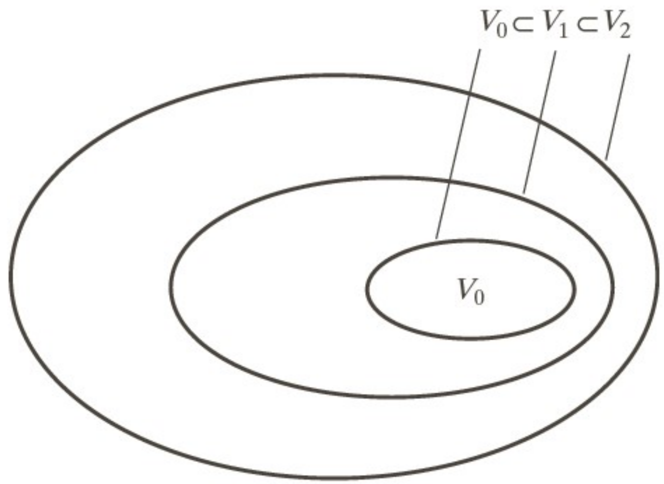
  $\varphi(x)$被称为尺度函数

- 简单尺度函数满足多分辨率分析（MRA）4个基本要求
  - MRA要求1：尺度函数对其整数平移是正交的
  - MRA要求2：低尺度的尺度函数跨越的子空间，嵌套在高尺度跨越的尺度空间内
  - MRA要求3：唯一对所有的$V_j$通用的函数是$f(x) = 0$
  - MRA要求4：任何函数都可以按任意精度表示

# 尺度函数




一些哈尔尺度函数




尺度函数跨越的
嵌套函数空间

# 小波函数

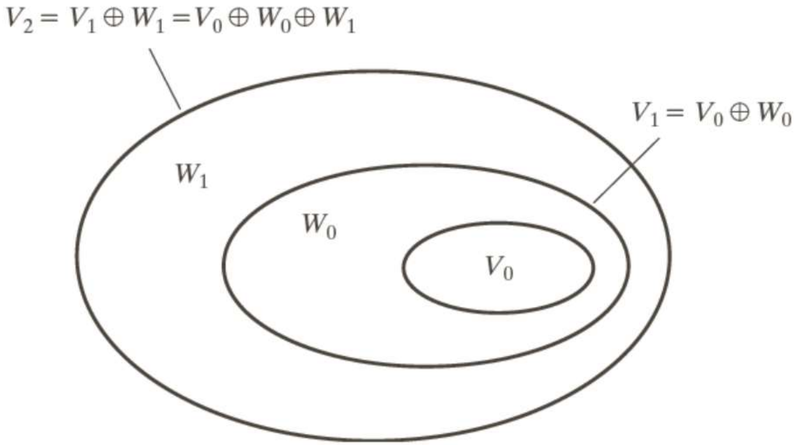
- 定义小波集合$\{\psi_{j,k}(x)\}$

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j x - k)$$

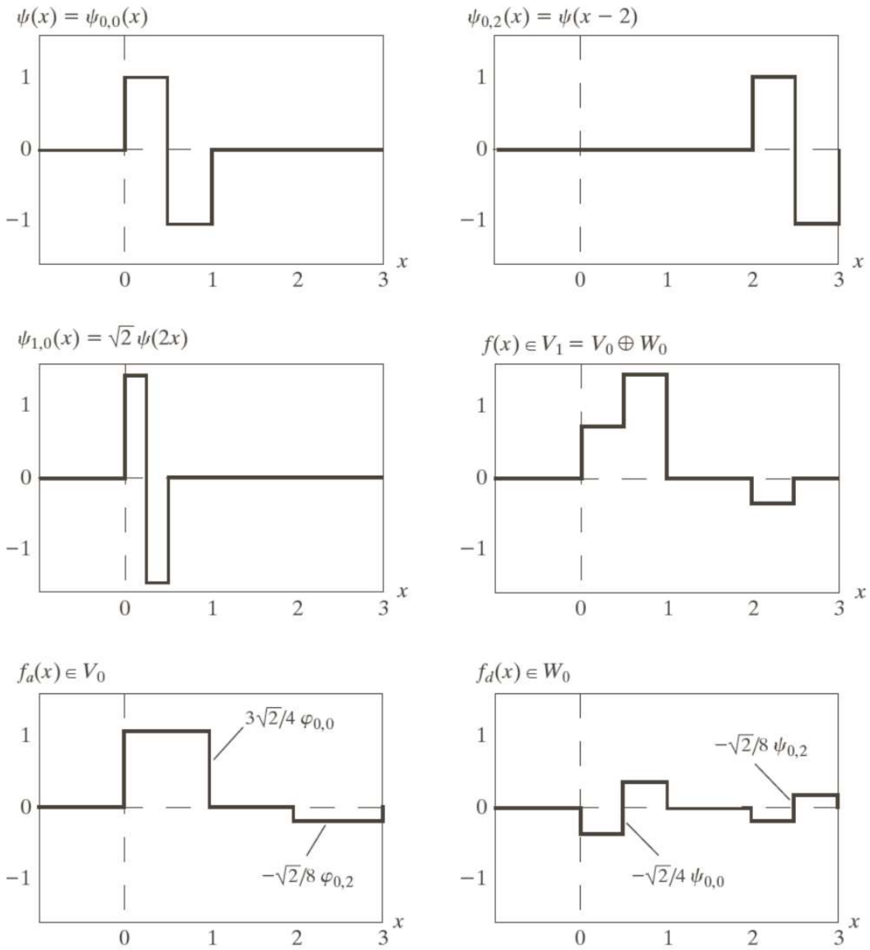
$$f(x) = \sum_k \alpha_k \psi_{j,k}(x)$$

$$W_j = \overline{\underset{k}{\mathrm{Span}}\{\psi_{j,k}(x)\}}$$

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j$$




尺度函数与小波函数空间之间的关系




$W_o$和$W_1$中的哈尔小波函数

# 第7章 小波和多分辨率处理

7.1 背景

7.2 多分辨率展开

7.3 一维小波变换

7.4 快速小波变换

7.5 二维小波变换

7.6 小波包

# 7.3 一维小波变换

- 三个紧密相关的小波变换
  - 一般的小波级数展开 ⟷ 傅里叶级数展开
  - 离散小波变换 ⟷ 离散傅里叶变换
  - 连续小波变换 ⟷ 积分傅里叶变换

- 小波级数展开

$$f(x) = \sum_k c_{j0}(k)\varphi_{j0,k}(x) + \sum_{j=j_0}^{\infty}\sum_k d_j(k)\,\psi_{j,k}(x)$$

$$c_{j0}(k) = \langle f(x), \varphi_{j0,k}(x)\rangle = \int f(x)\varphi_{j0,k}(x)\,dx$$

$$d_j(k) = \langle f(x), \psi_{j,k}(x)\rangle = \int f(x)\psi_{j,k}(x)dx$$

# 小波级数展开

$$y=\begin{cases}x^2, 0\le x\le 1\\ 0, \quad\quad 其他\end{cases}$$

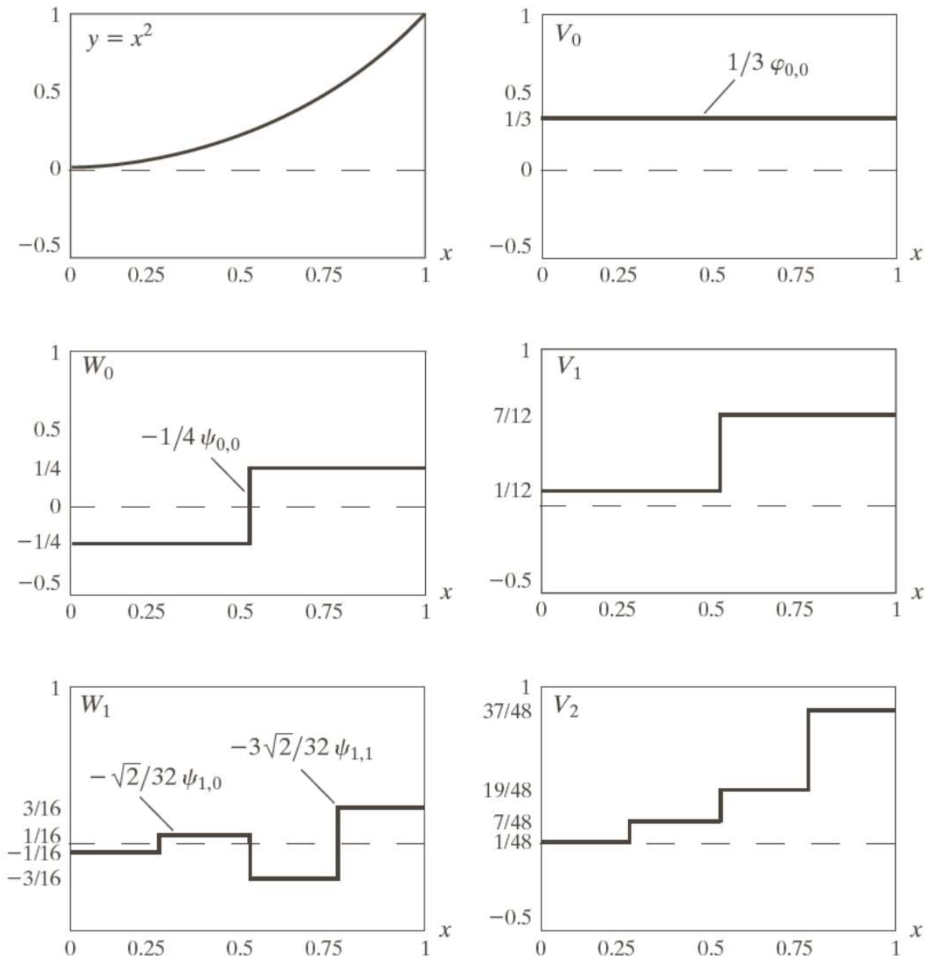
$$c_0(0)=\int_0^1 x^2\varphi_{0,0}(x)dx$$

$$=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$$

$$d_0(0)=\int_0^1 x^2\psi_{0,0}(x)dx$$

$$=\int_0^{0.5} x^2dx-\int_{0.5}^1 x^2dx=-\frac{1}{4}$$

…… ……




使用哈尔小波的$y=x^2$的小波级数展开

# 离散小波变换

- 如果待展开的函数是离散的（即数字序列），得到的系数就称之为离散小波变换（DWT）
- 正向DTW系数

$$W_\varphi(j_0,k)=\frac{1}{\sqrt{M}}\sum_n f(n)\varphi_{j_0,k}(n)$$

$$W_\psi(j,k)=\frac{1}{\sqrt{M}}\sum_n f(n)\psi_{j,k}(n)\,,j\geq j_0$$

- 反向DWT系数

$$f(n)=\frac{1}{\sqrt{M}}\sum_k W_\varphi(j_0,k)\varphi_{j_0,k}(n)+\frac{1}{\sqrt{M}}\sum_{j=j_0}^{\infty}\sum_k W_\psi(j,k)\,\psi_{j,k}(n)$$

# 连续小波变换

- 连续小波变换（CWT）将一个连续函数变换为两个变量（平移和尺度）的高冗余度函数
- 连续平方可积函数$f(x)$的连续小波变换与实数值小波$\psi(x)$的关系定义为

$$W_\psi(s,\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\psi_{s,\tau}(x)dx$$

$$\psi_{s,\tau}(x) = \frac{1}{\sqrt{s}}\psi(\frac{x-\tau}{s})$$

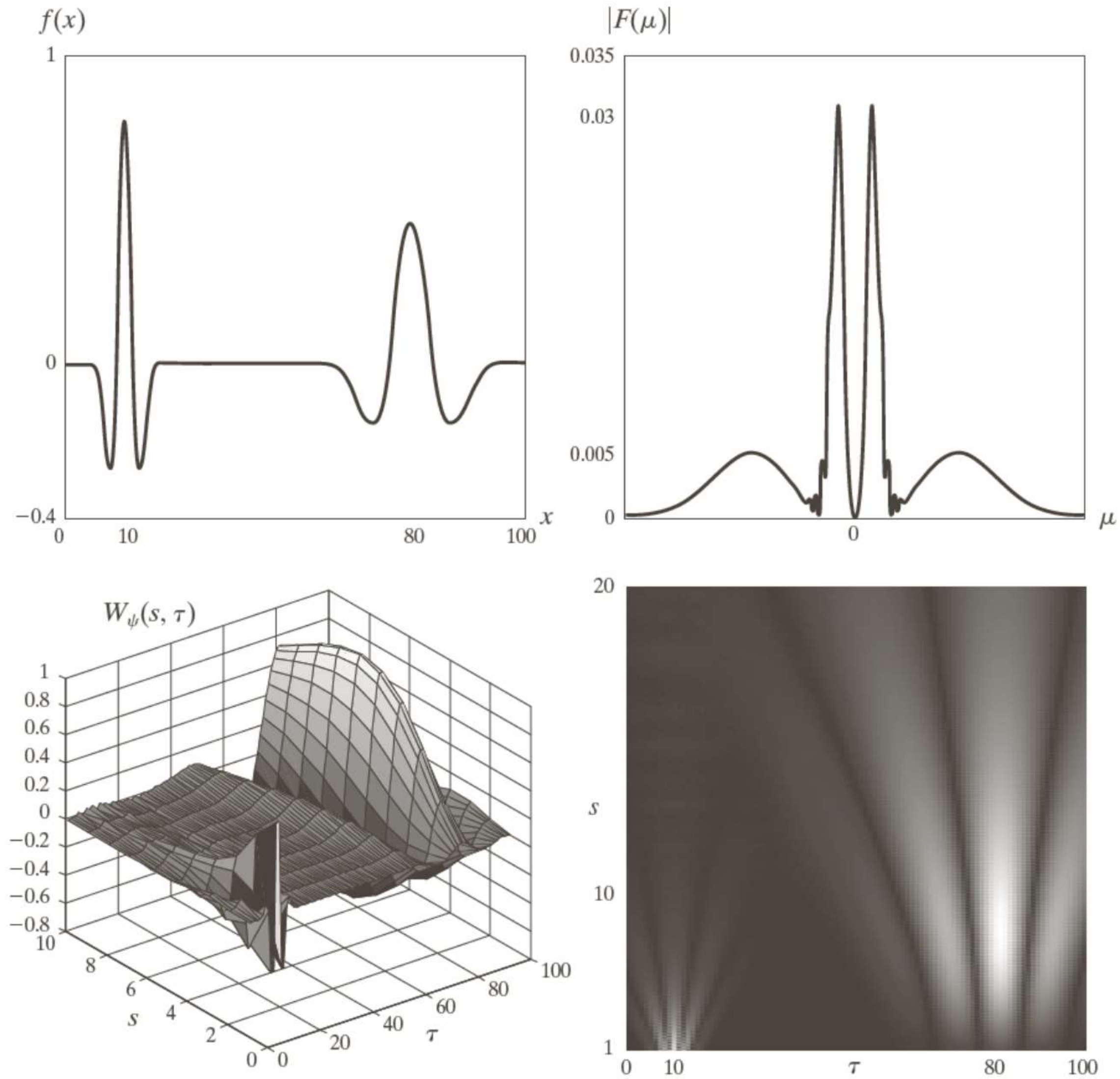
$s$：尺度参数
$\tau$：平移参数

- 给定$W_\psi(s,\tau)$，连续小波反变换为

$$f(x) = \frac{1}{C_\psi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} W_\psi(s,\tau)\frac{\psi_{s,\tau}(x)}{s^2}d\tau\, ds$$

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\psi(\mu)|^2}{|\mu|}d\mu$$

# 连续小波变换




a b
c d

**FIGURE 7.16** The continuous wavelet transform (c and d) and Fourier spectrum (b) of a continuous 1-D function (a).

连续小波变换[(c)和(d)]和连续一维函数(a)的傅里叶谱(b)

# 第7章 小波和多分辨率处理

7.1 背景

7.2 多分辨率展开

7.3 一维小波变换

7.4 快速小波变换

7.5 二维小波变换

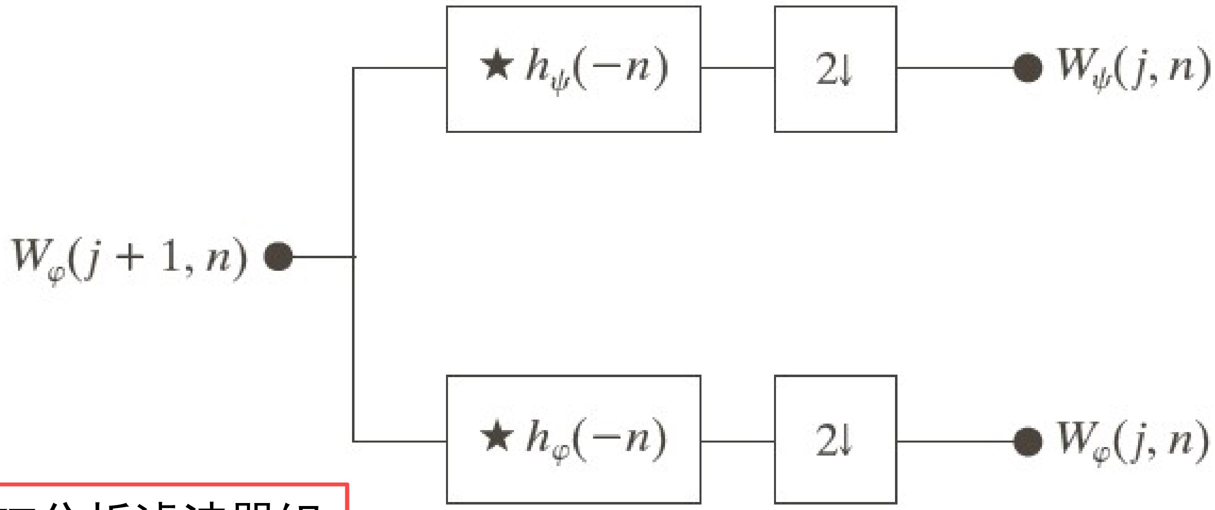
7.6 小波包

# 7.4 快速小波变换

- 快速小波变换（FWT）是实现离散小波变换（DWT）的高效计算，也称Mallat人字形算法

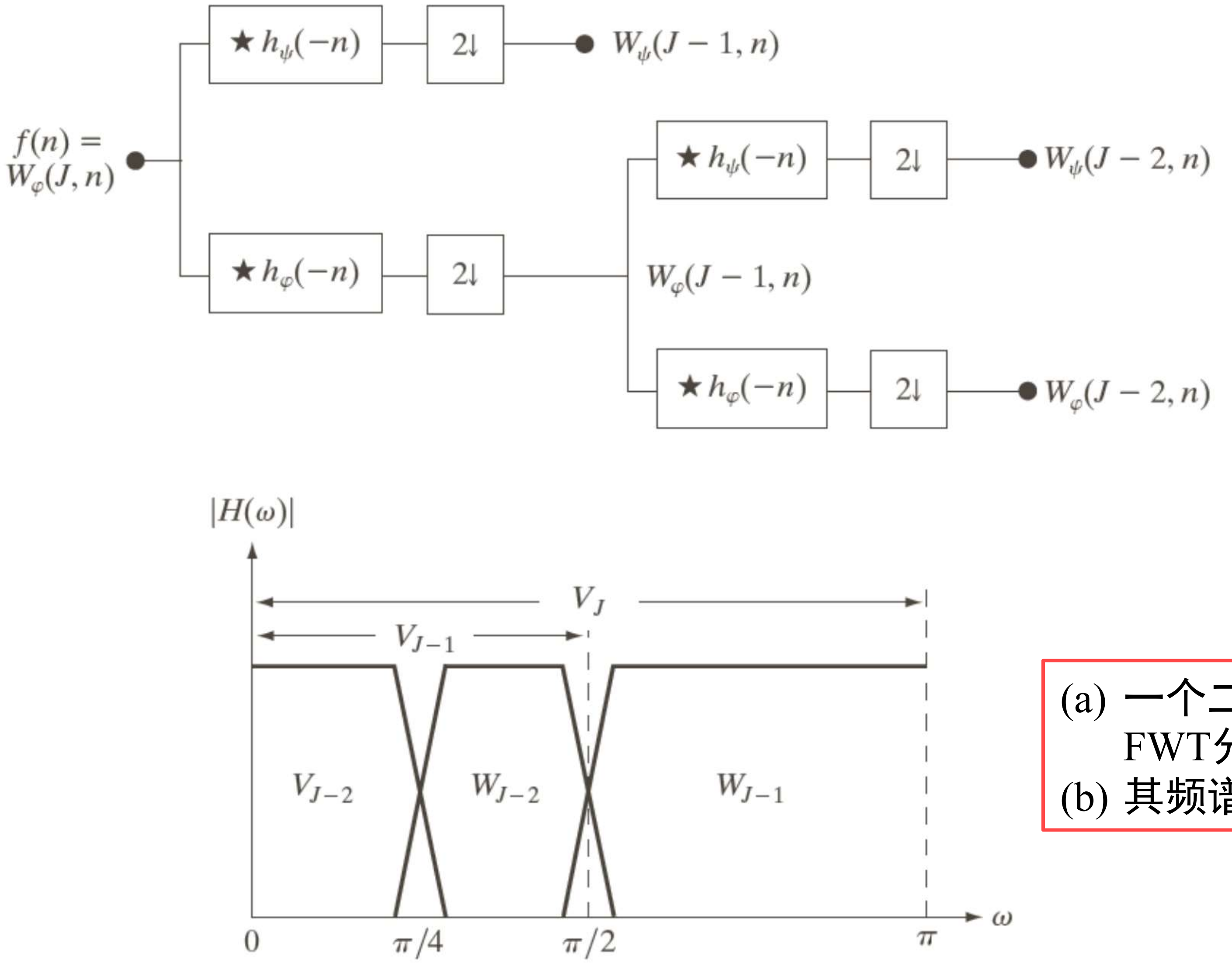
$$W_\psi(j,k) = h_\psi(-n) \bigstar W_\varphi(j+1,n)\Big|_{n=2k,k\geq 0}$$

$$W_\varphi(j,k) = h_\varphi(-n) \bigstar W_\varphi(j+1,n)\Big|_{n=2k,k\geq 0}$$




一个FWT分析滤波器组

# 7.4 快速小波变换

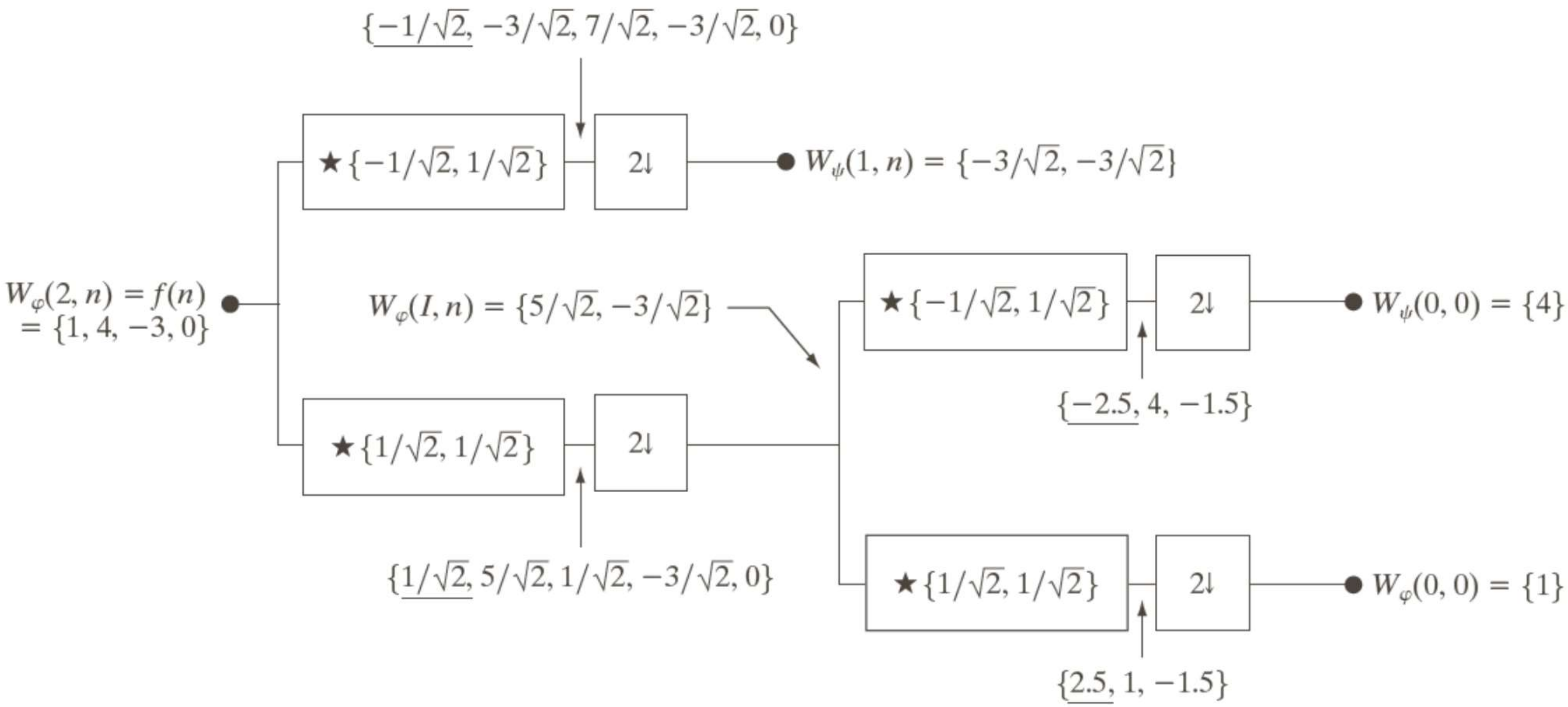



a
b

**FIGURE 7.18**
(a) A two-stage or two-scale FWT analysis bank and (b) its frequency splitting characteristics.

(a) 一个二级或二尺度FWT分析滤波器组
(b) 其频谱分离特性

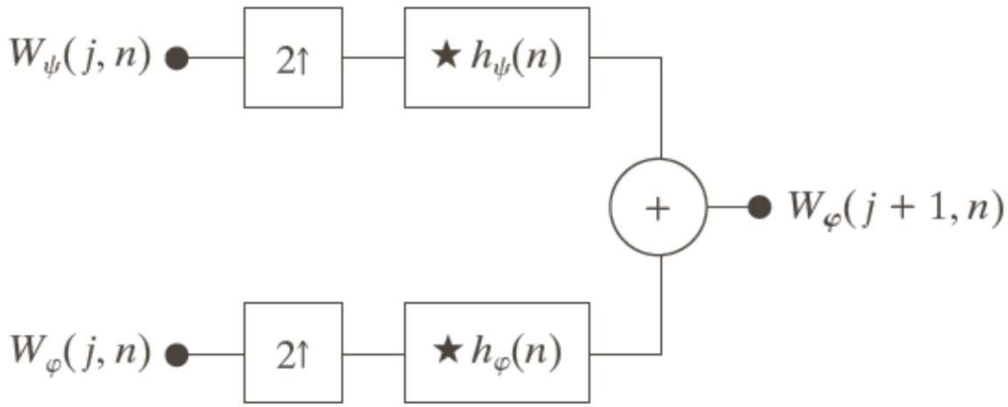
# 7.4 快速小波变换



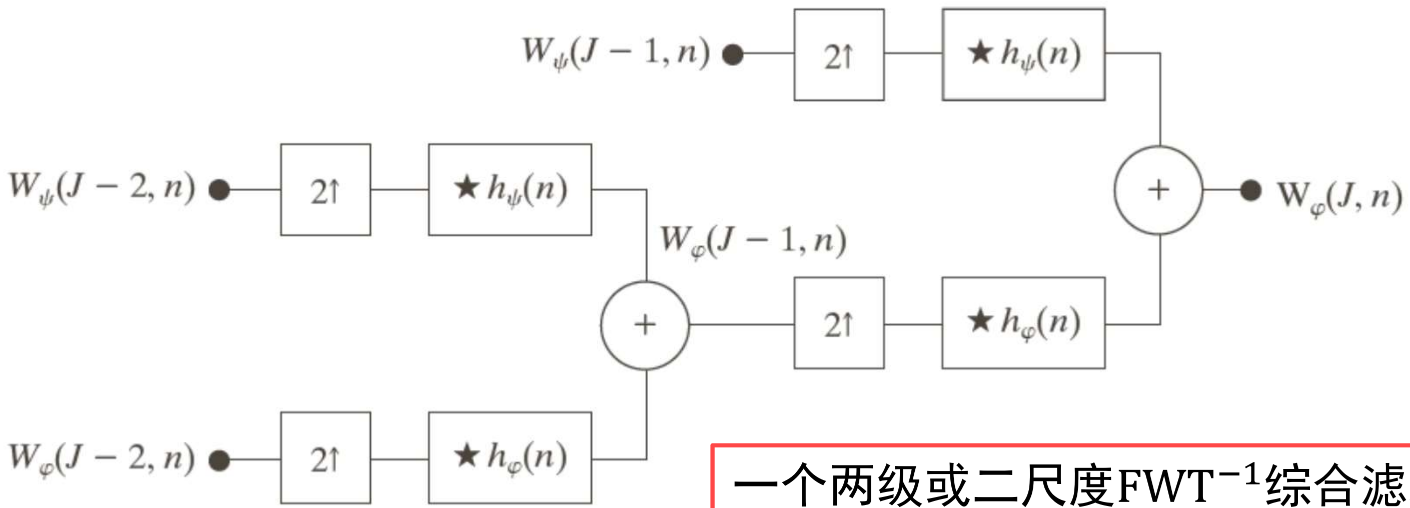

使用哈尔尺度和小波向量计算序列$\{1,4,-3,0\}$的一个二尺度快速小波变换

# 7.4 快速小波变换

FWT$^{-1}$综合滤波器组



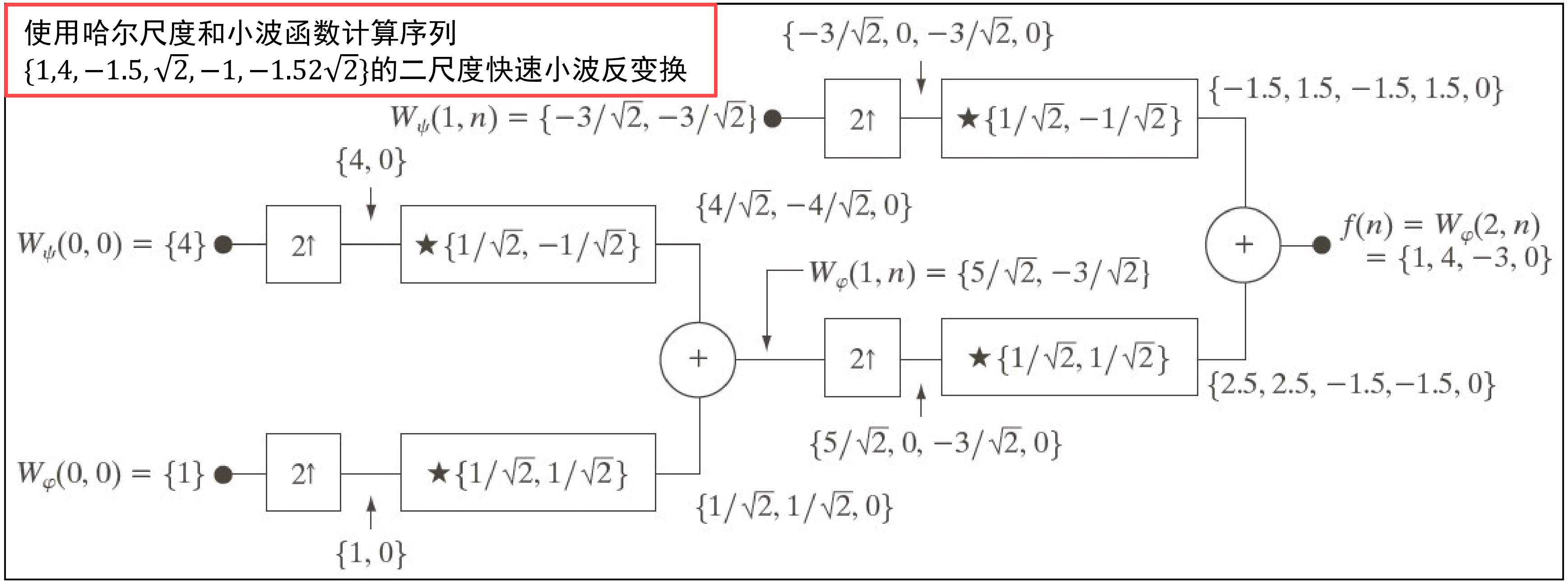

$$W_\varphi(j+1,k)=h_\varphi(k)\bigstar W_\varphi^{2\uparrow}(j,k)+h_\psi(k)\bigstar W_\psi^{2\uparrow}(j,k)\Big|_{k\geq 0}$$

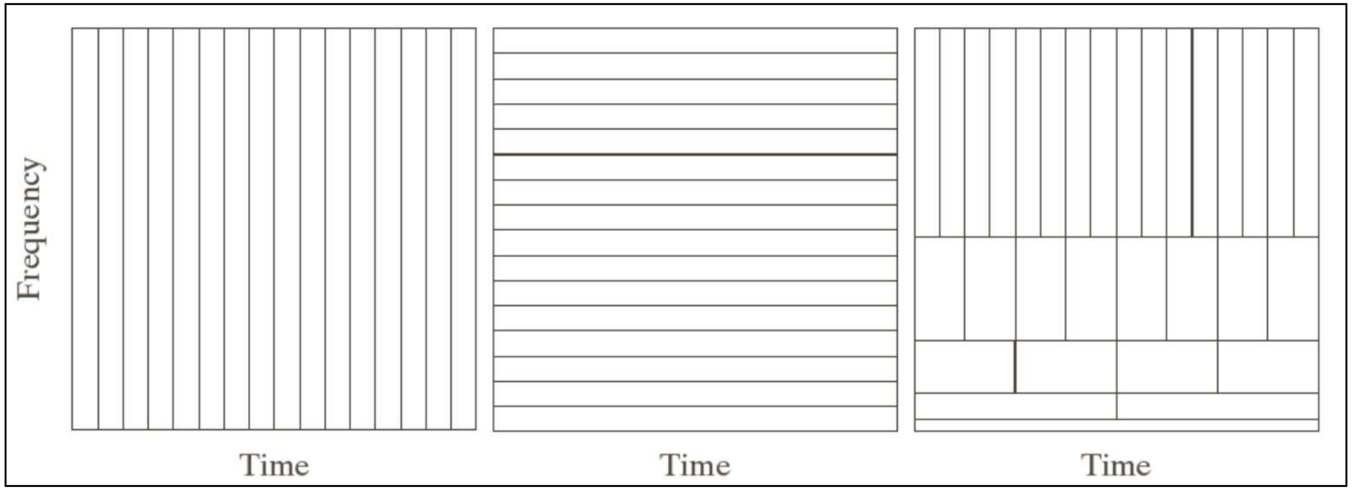



一个两级或二尺度FWT$^{-1}$综合滤波器组

# 7.4 快速小波变换

使用哈尔尺度和小波函数计算序列 $\{1,4,-1.5\sqrt{2},-1,-1.5\sqrt{2}\}$ 的二尺度快速小波反变换




与(a)取样数据，(b)FFT和(c)FWT相关的基函数的时间-频率片。
注意，图(c)中等高矩阵的水平条带表示FWT的尺度

# 第7章 小波和多分辨率处理

7.1 背景

7.2 多分辨率展开

7.3 一维小波变换

7.4 快速小波变换

7.5 二维小波变换

7.6 小波包

# 7.5 二维小波变换

- 在二维情况下，需要1个二维尺度函数$\varphi(x,y)$和3个二维小波$\psi^H(x,y)$, $\psi^V(x,y)$和$\psi^D(x,y)$。每个二维小波都是两个一维函数的乘积

| | |
|---|---|
| 可分离尺度函数 | $\varphi(x,y)=\varphi(x)\varphi(y)$ |
| 列方向变化（水平边缘） | $\psi^H(x,y)=\psi(x)\varphi(y)$ |
| 行方向变化（垂直边缘） | $\psi^V(x,y)=\varphi(x)\psi(y)$ |
| 对角线方向变化 | $\psi^D(x,y)=\psi(x)\psi(y)$ |

# 7.5 二维小波变换

- 大小为$M \times N$的图像$f(x,y)$的离散小波变换是

$$W_\varphi(j_0,m,n)=\frac{1}{\sqrt{MN}}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\varphi_{j_0,m,n}(x,y)$$

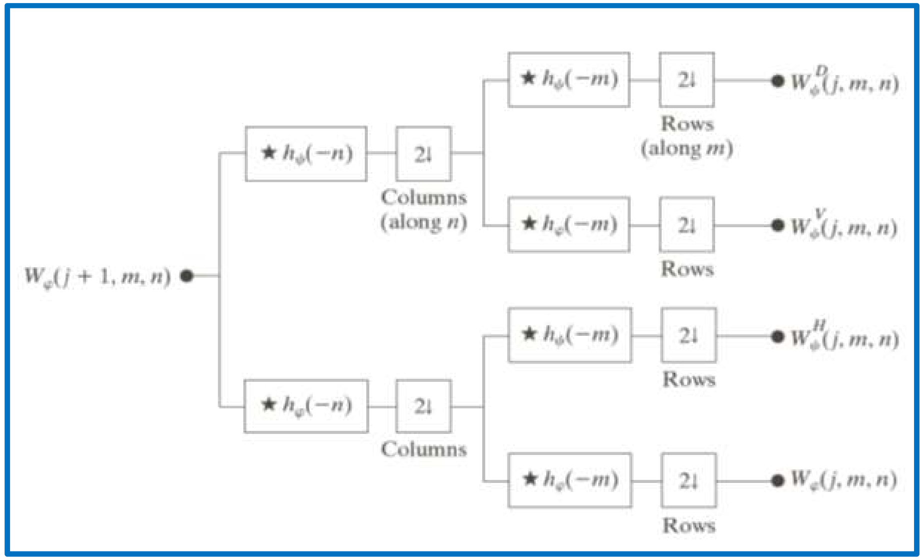
$$W_\psi^i(j,m,n)=\frac{1}{\sqrt{MN}}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\psi_{j,m,n}^i(x,y)\,,i=\{H,V,D\}$$

- $f(x,y)$离散小波反变换

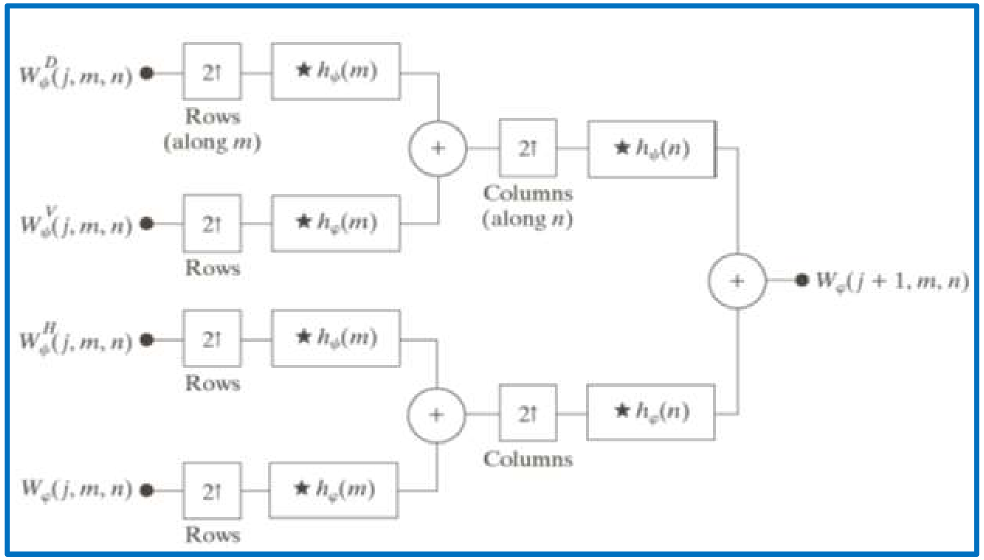
$$f(x,y)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{MN}}\sum_m\sum_n W_\psi(j_0,m,n)\varphi_{j_0,m,n}(x,y)$$
$$+\frac{1}{\sqrt{MN}}\sum_{i=H,V,D}\sum_{j=j_0}^{\infty}\sum_m\sum_n W_\psi^i(j,m,n)\psi_{j,m,n}^i(x,y)$$

# 7.6 二维小波变换

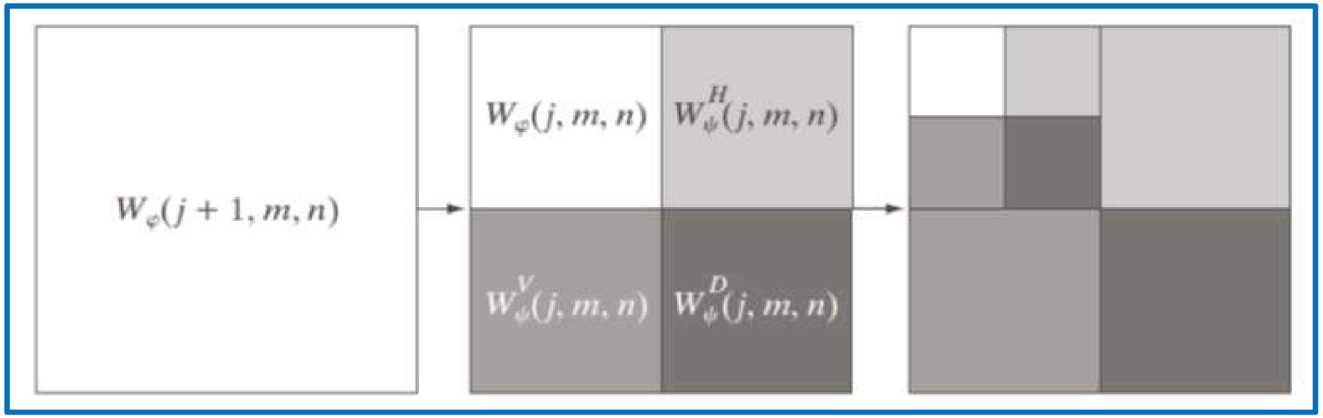
## □ 二维快速小波变换




分析滤波器组

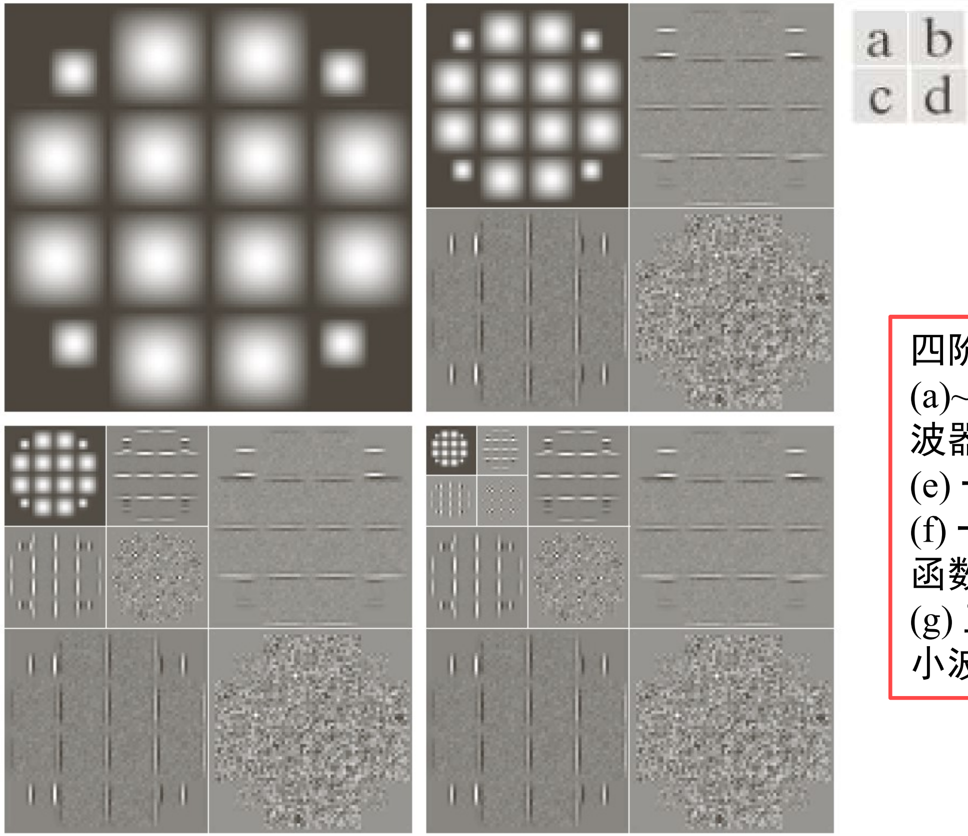



综合滤波器组



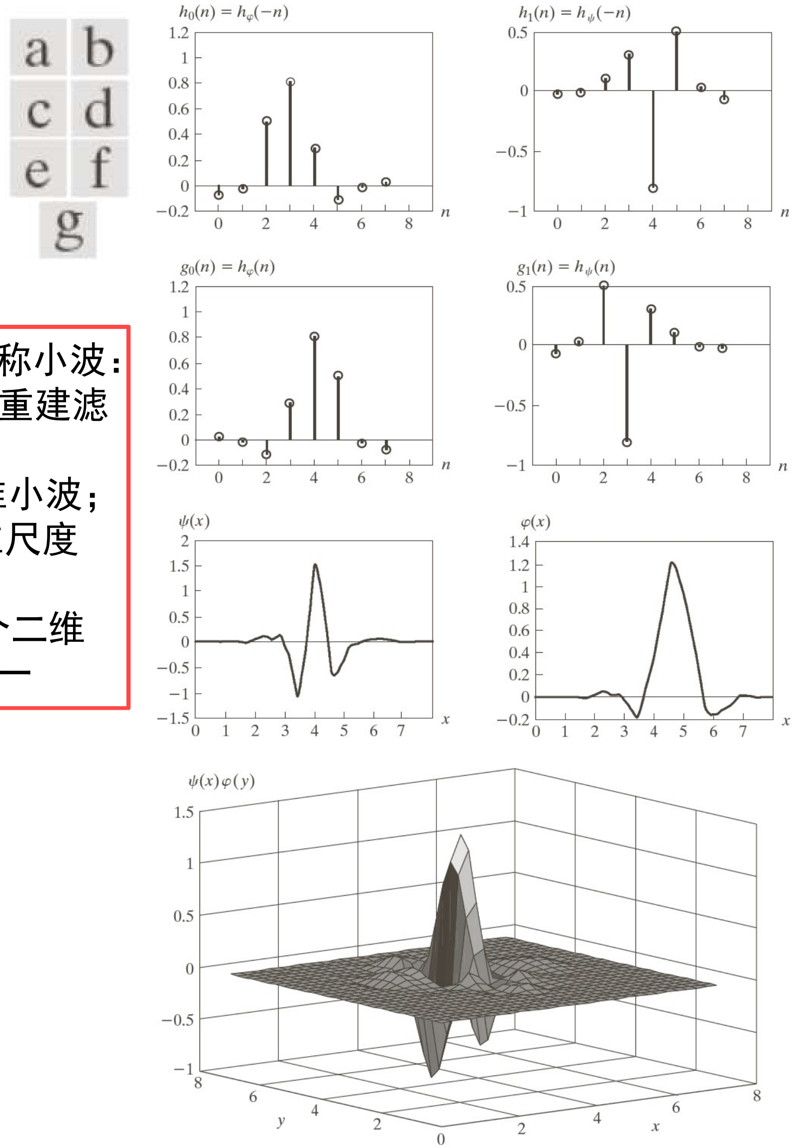

分解结果

# 7.6 二维小波变换

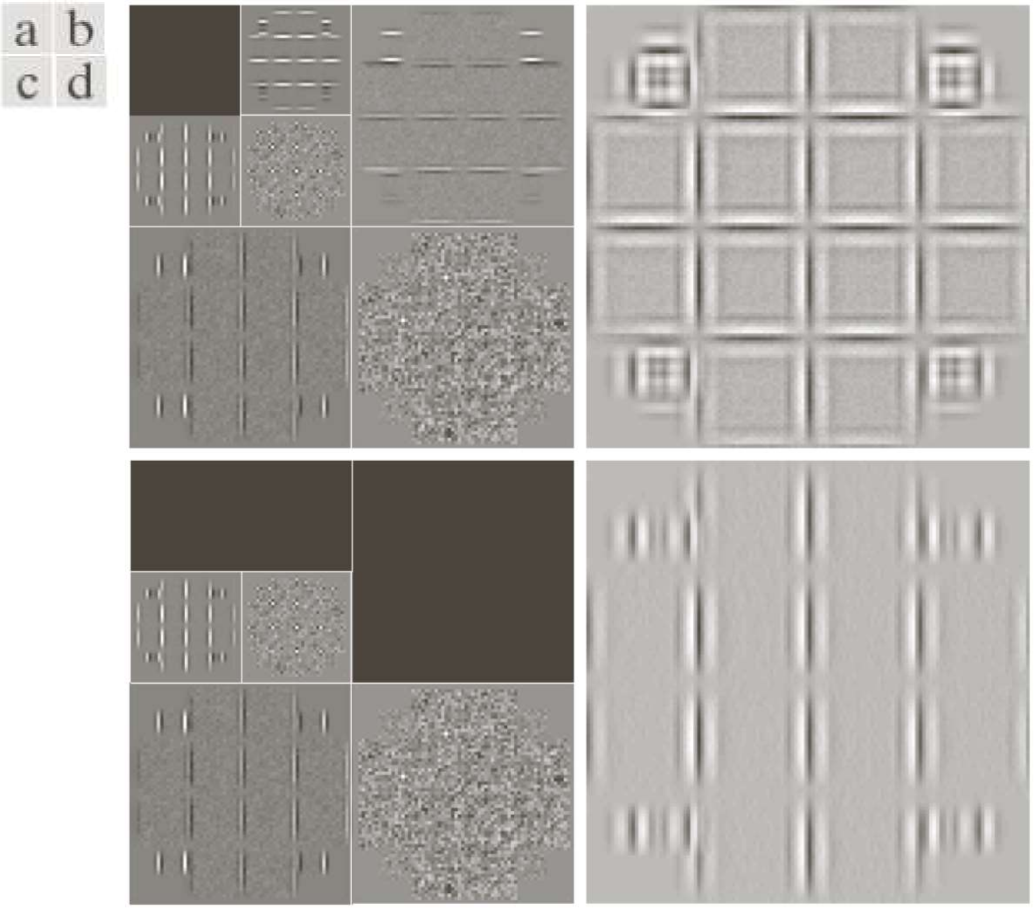



计算二维三尺度FWT
(a) 原图像；(b) 一尺度FWT；
(c) 二尺度FWT；(d) 三尺度FWT

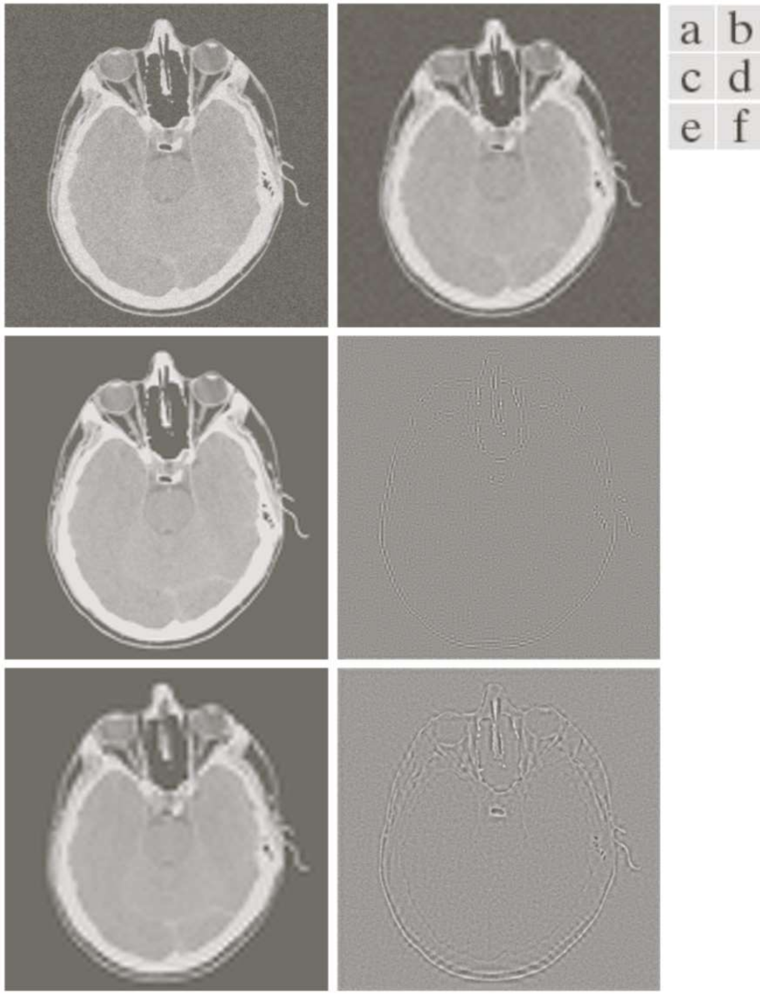
四阶对称小波：
(a)~(b) 重建滤波器；
(e) 一维小波；
(f) 一维尺度函数；
(g) 三个二维小波之一



# 7.6 二维小波变换




针对边缘检测改进的DWT
(a) ~ (c) 删除所选系数的二尺度分解
(b) ~ (d) 相应的重建




为噪声去除修改DWT：(a) 人的头部噪声CT图像；(b)，(c)和(e)对细节系数进行阈值处理后的各种重建；(d)和(f)在(c)和(e)重建过程中所删除的信息

# 第7章 小波和多分辨率处理

7.1 背景

7.2 多分辨率展开

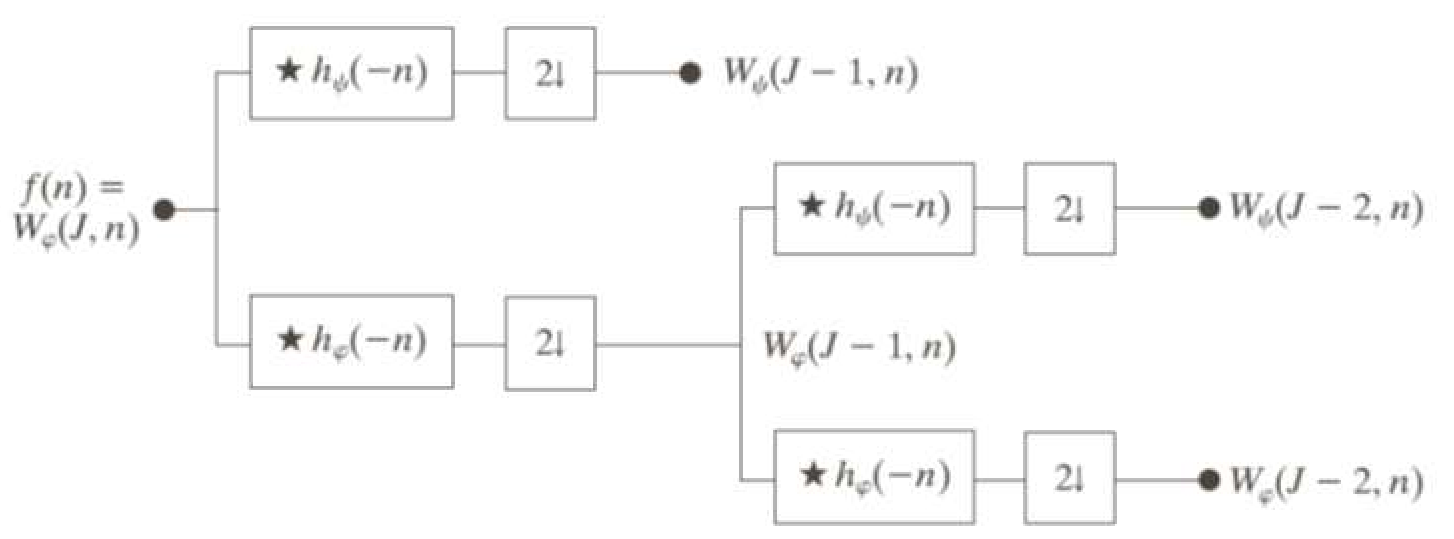
7.3 一维小波变换

7.4 快速小波变换

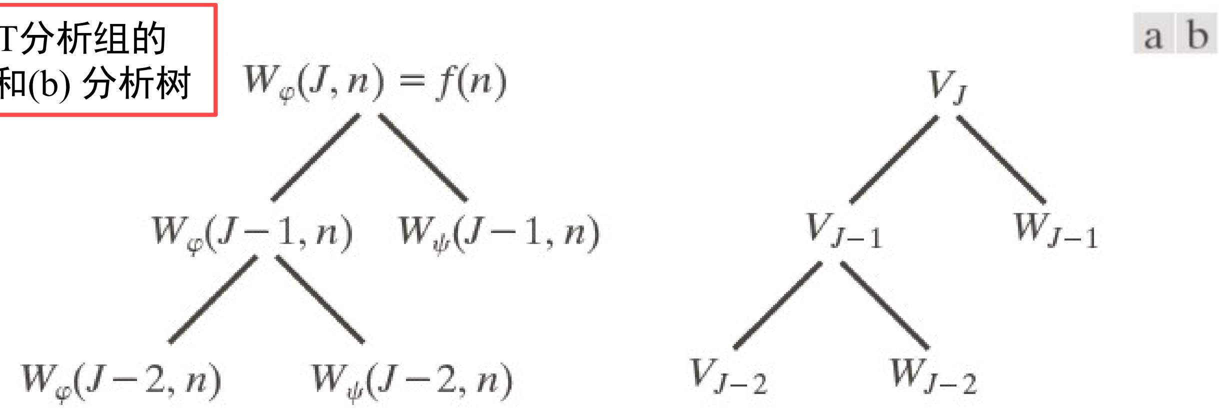
7.5 二维小波变换

7.6 小波包

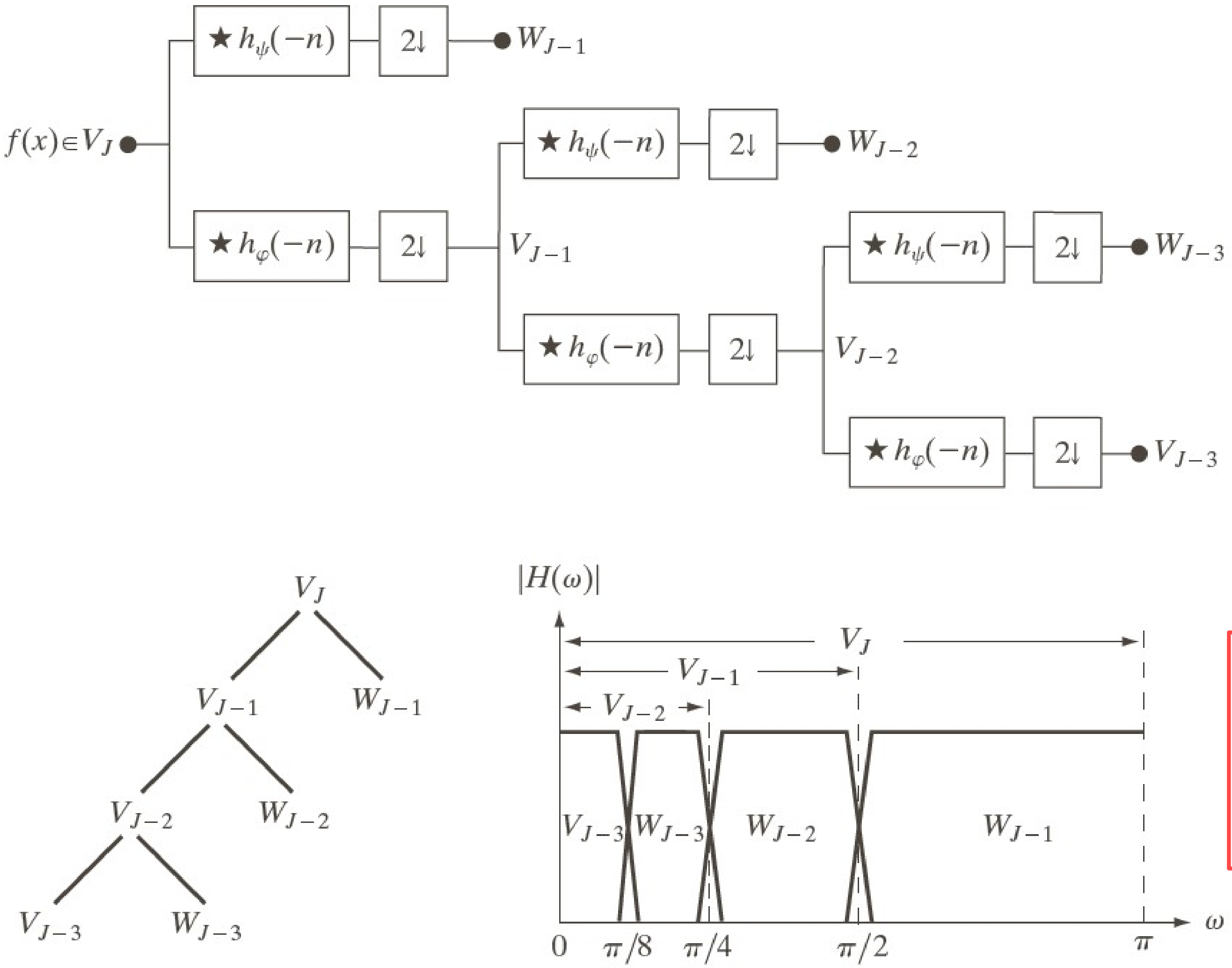
# 7.6 小波包




二尺度FWT分析组的
(a) 系数树和(b) 分析树



# 7.6 小波包

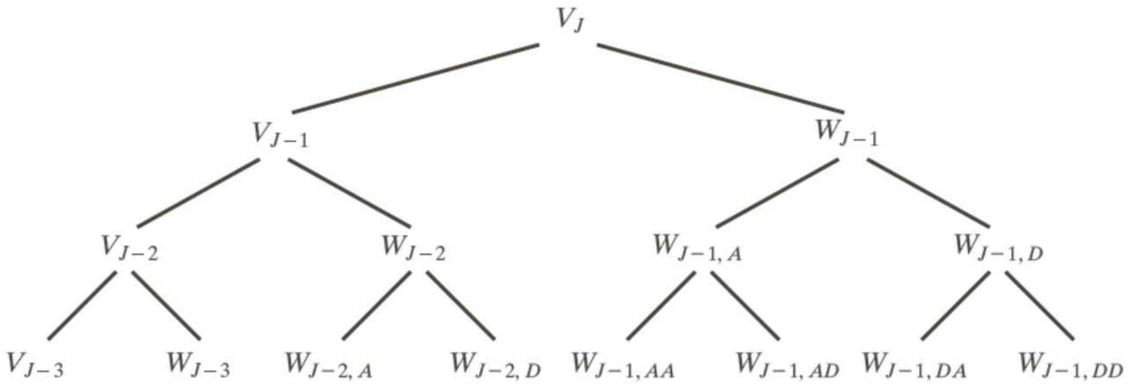



a
b c

**FIGURE 7.30**
A three-scale FWT filter bank: (a) block diagram; (b) decomposition space tree; and (c) spectrum splitting characteristics.

三尺度FWT分析组：
(a) 方框图
(b) 分解空间树
(c) 频谱分离特性

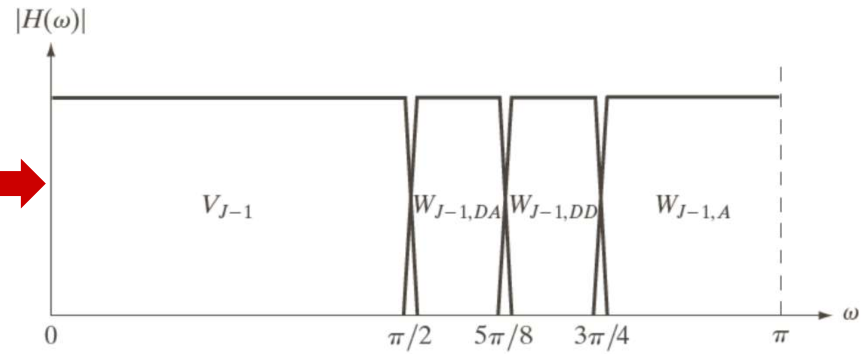
# 7.6 小波包



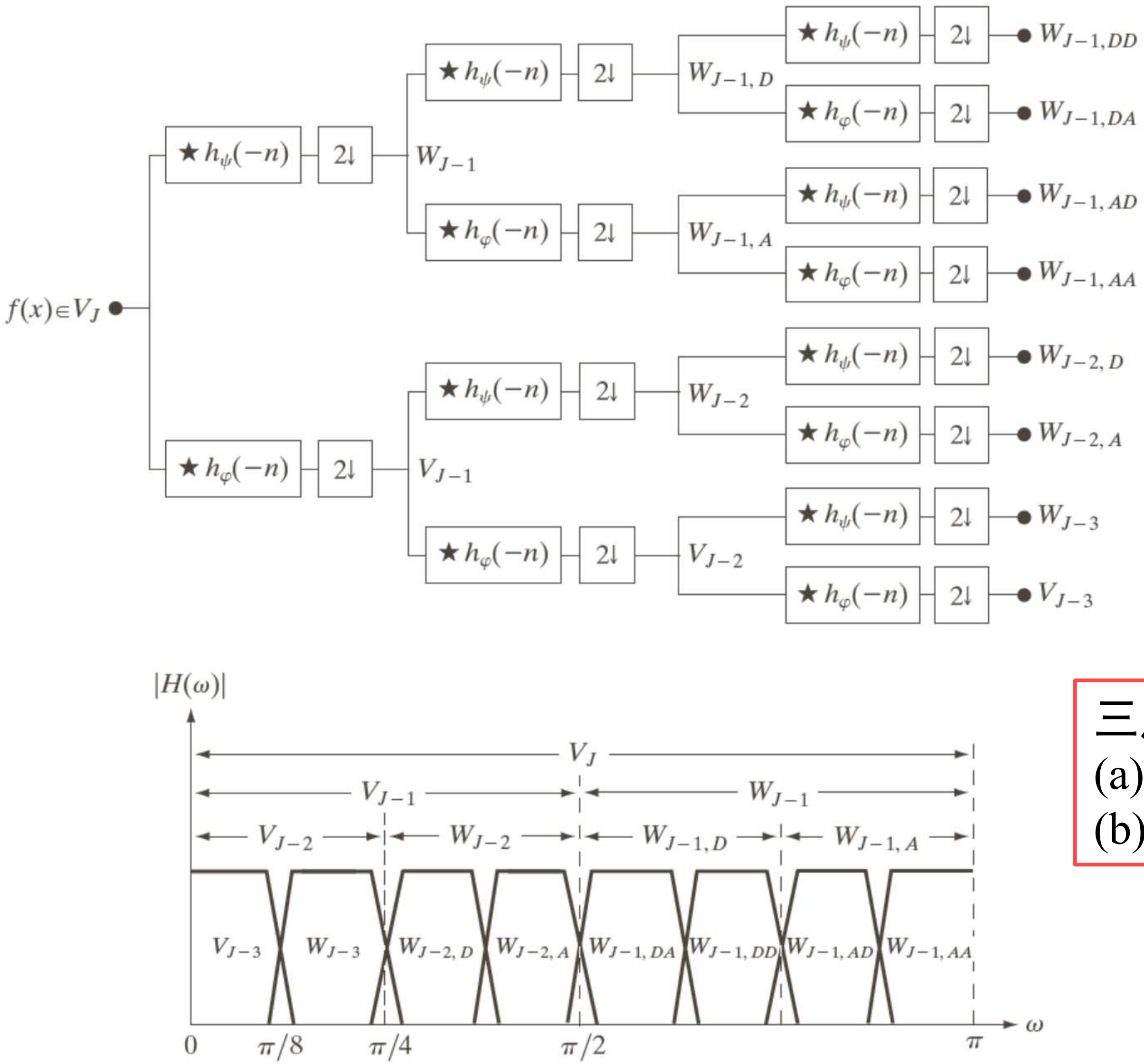

- 上图中的小波包支持26中不同的分解，例如

$$V_J = V_{J-3} \oplus W_{J-3} \oplus W_{J-2,A} \oplus W_{J-2,D} \oplus W_{J-1,AA} \oplus W_{J-1,AD} \oplus W_{J-1,DA} \oplus W_{J-1,DD}$$

$$V_J = V_{J-1} \oplus W_{J-1,A} \oplus W_{J-1,DA} \oplus W_{J-1,DD}$$



# 7.6 小波包

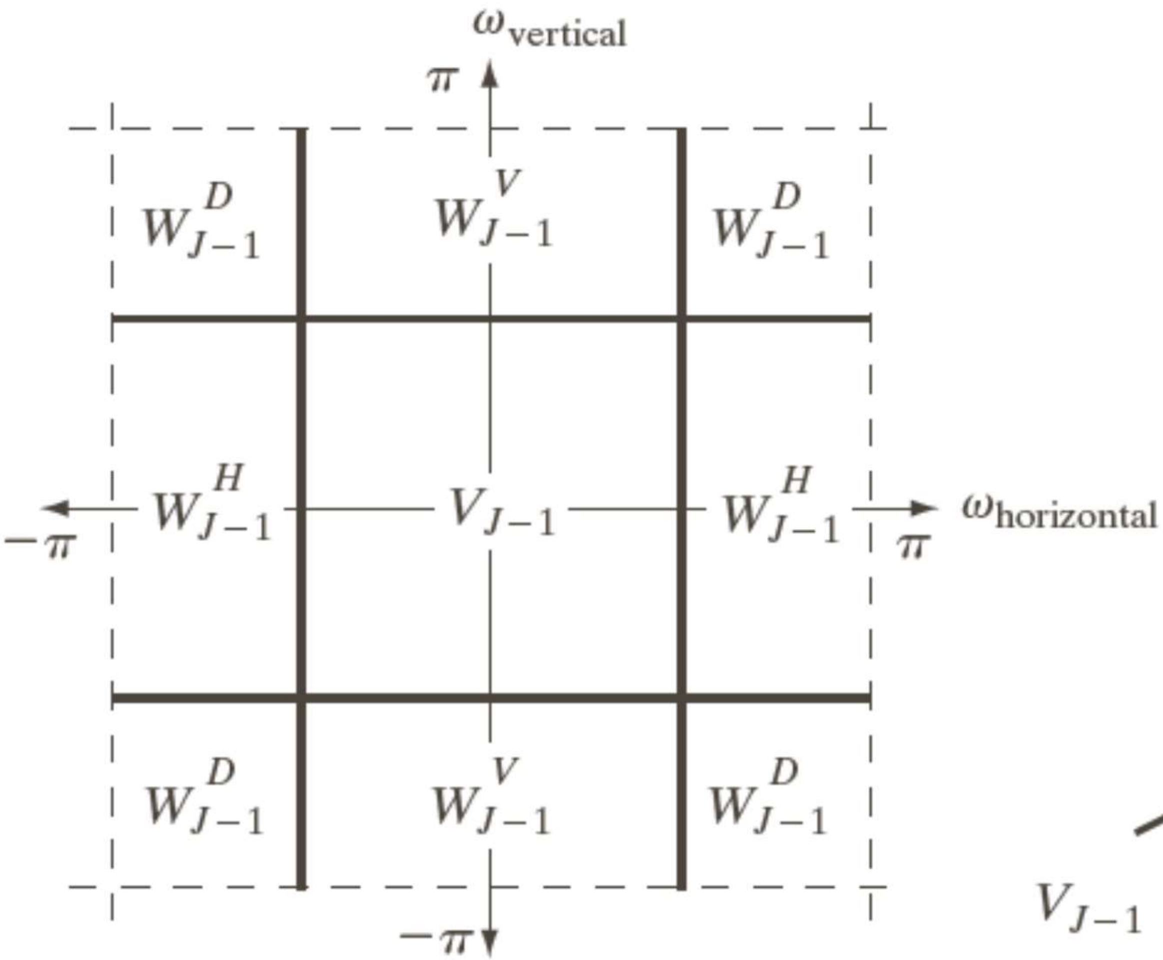



a
b

**FIGURE 7.32**
The (a) filter bank and (b) spectrum splitting characteristics of a three-scale full wavelet packet analysis tree.

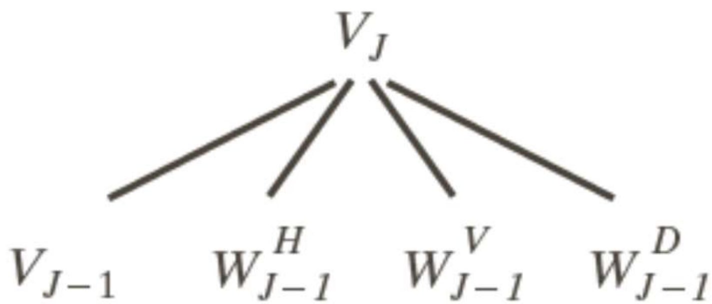
三尺度完全小波包分析树
(a) 滤波器组
(b) 频谱分离特性

# 7.6 小波包




a b

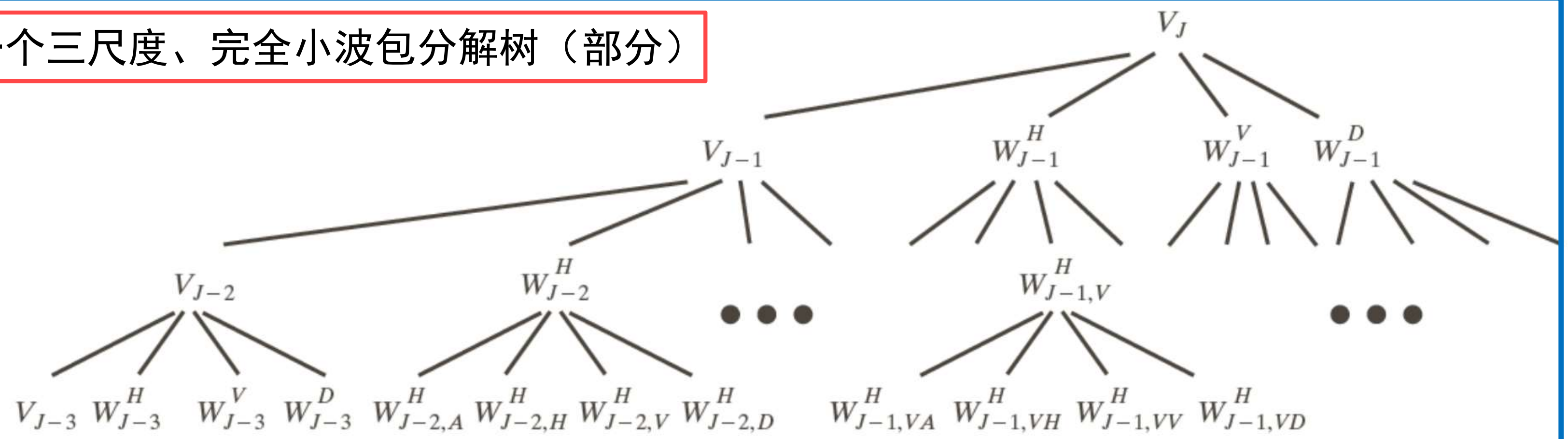
**FIGURE 7.34** The first decomposition of a two-dimensional FWT: (a) the spectrum and (b) the subspace analysis tree.




一个二维FWT的第一次分解 (a) 频谱 (b) 子空间分析树

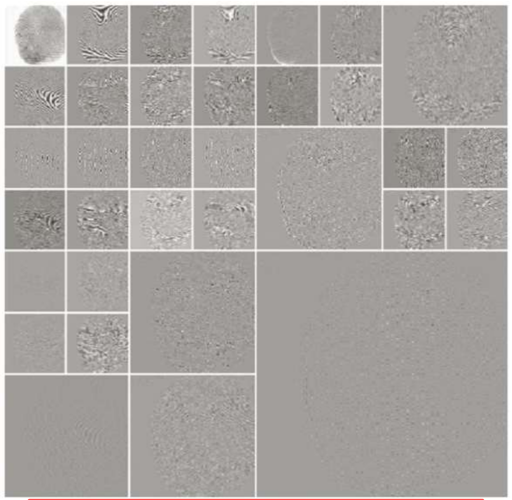
# 7.6 小波包

一个三尺度、完全小波包分解树（部分）



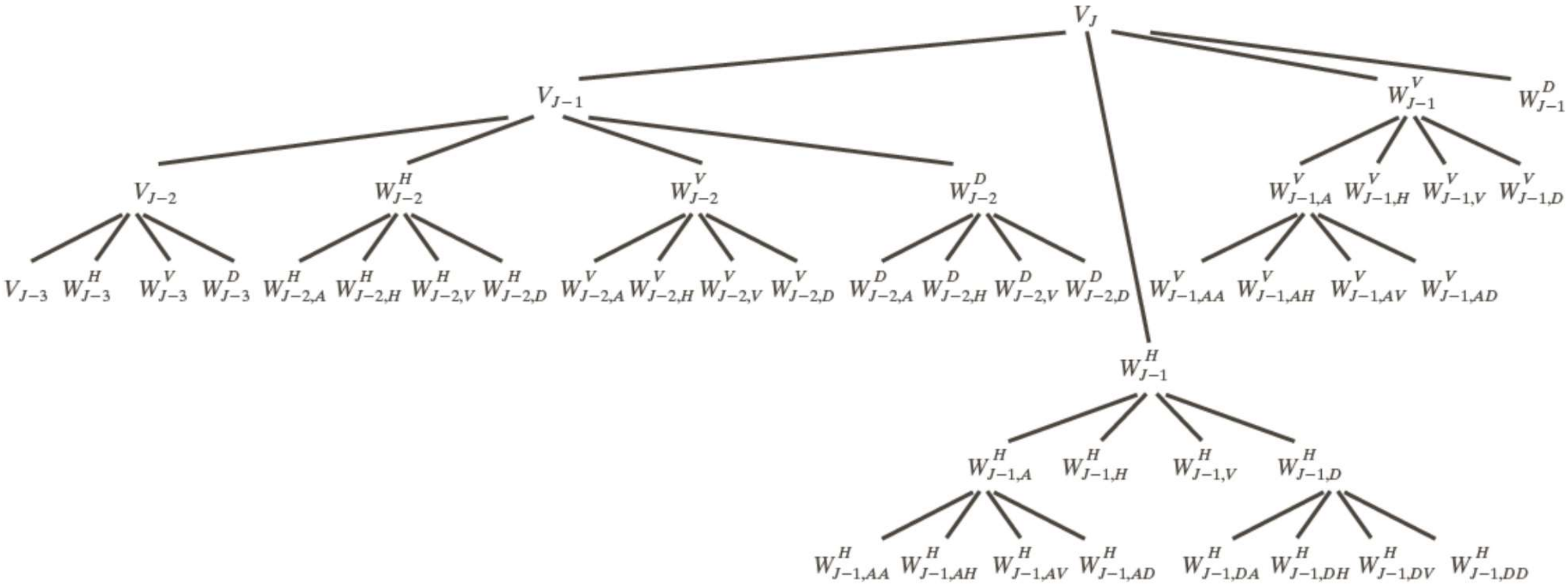


(a) 一副扫描的指纹图像
(b) 该图像的三尺度、全小波包分解



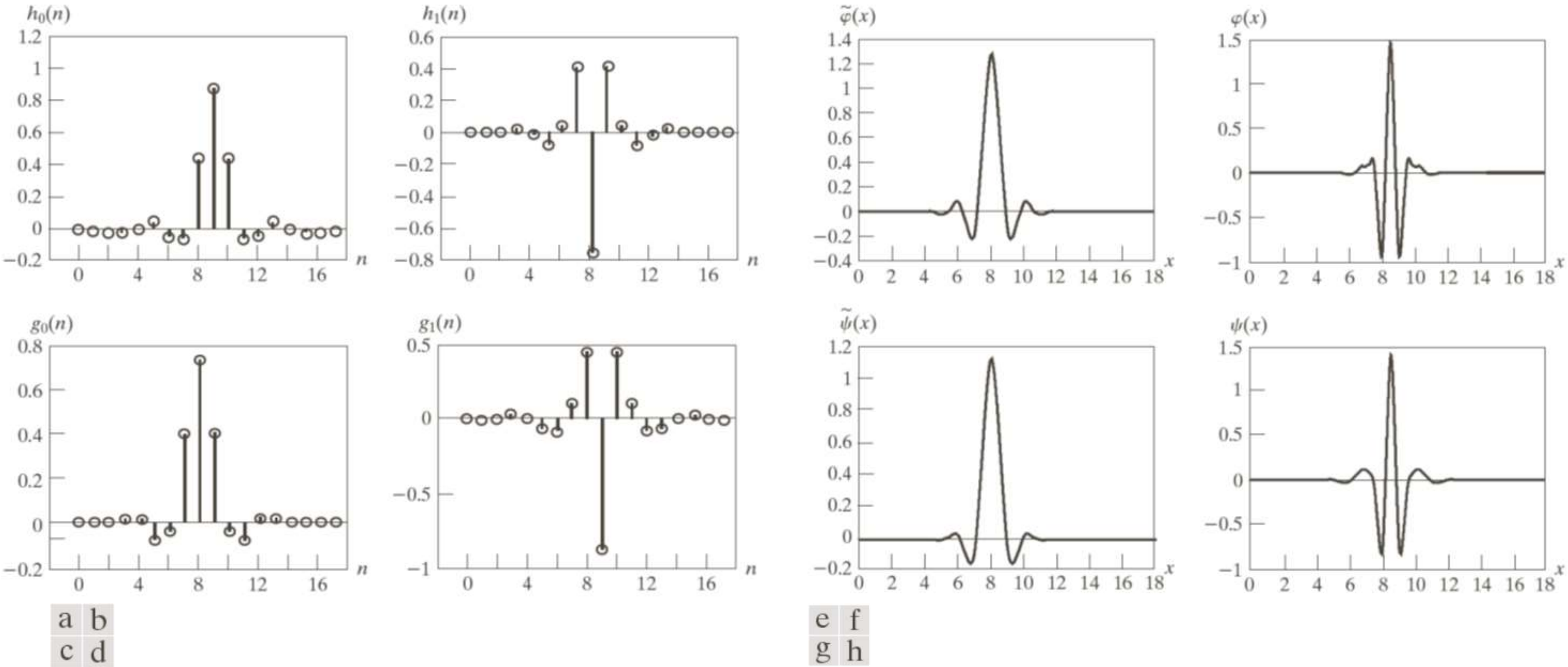
指纹的一种最佳小波分解

# 7.6 小波包




指纹的最佳小波分解的小波包分析树

# 7.6 小波包




Cohen Daubechies Feauveau 双正交小波族成员：
(a)和(b)分解滤波器系数；(c)和(d)重建滤波器系数；
(e)~(h)双小波和尺度函数。