



第11章 表示和描述

11.1 表示

11.2 边界描绘子

11.3 区域描绘子

11.4 使用主成分进行描绘

11.5 关系描绘子



第11章 表示和描述

11.1 表示

11.2 边界描绘子

11.3 区域描绘子

11.4 使用主成分进行描绘

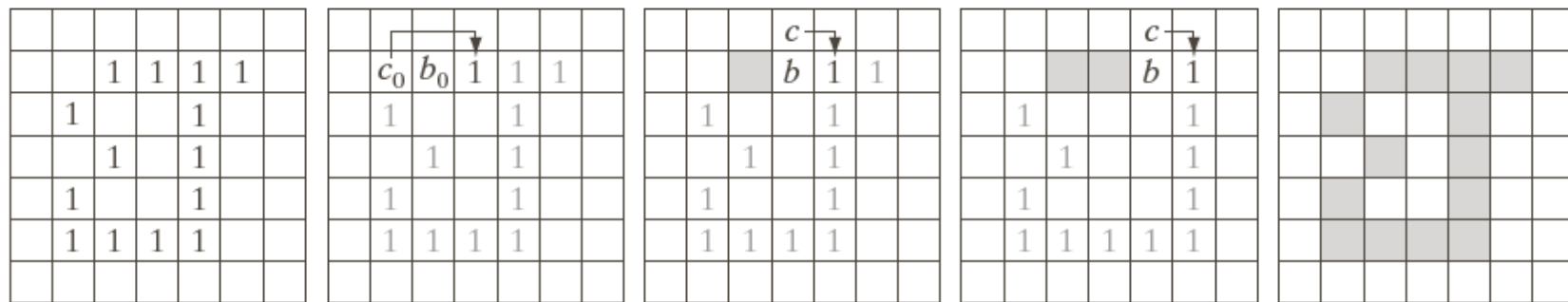
11.5 关系描绘子

11.1.1 边界追踪

□ 边界追踪：对一个区域上的边界点以逆时针或顺时针方向排序

边界追踪步骤：

1. 令起始点 b_0 为图像中**左上角**标记为1的点， c_0 为 b_0 西侧的邻点。从 c_0 开始顺时针考察 b_0 的8个邻点，设 b_1 为遇到的第一个前景点、 c_1 为 b_1 之前的点。
2. 令 $b = b_1$ 和 $c = c_1$
3. 从 c 开始按顺时针方向进行，考察 b 的8个邻点为 n_1, n_1, \dots, n_8 ，找到标记为1的第一个 n_k 。
4. 令 $b = n_k$ 和 $c = n_{k-1}$
5. 重复步骤3和步骤4，直到 $b = b_0$ 且找到的下一个边界点为 b_1 。



a b c d e

FIGURE 11.1 Illustration of the first few steps in the boundary-following algorithm. The point to be processed next is labeled in black, the points yet to be processed are gray, and the points found by the algorithm are labeled as gray squares.

11.1.1 边界追踪

为了了解边界跟踪算法中规定的停止规则的必要性，考虑如下示例：

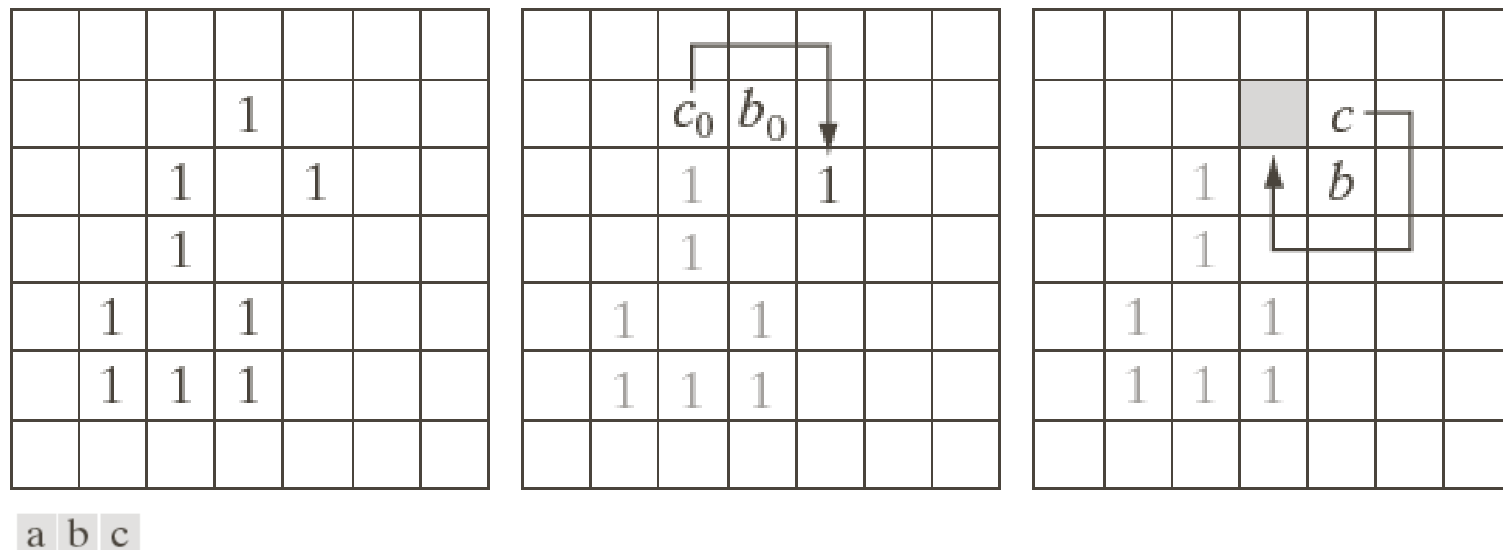
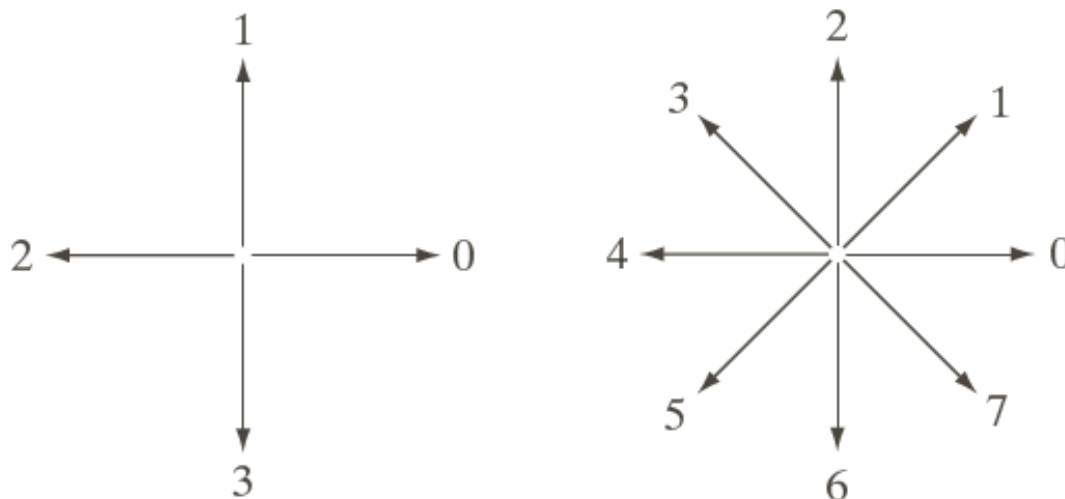


FIGURE 11.2 Illustration of an erroneous result when the stopping rule is such that boundary-following stops when the starting point, b_0 , is encountered again.

上述边界跟踪算法可以直接用于图像区域。

11.1.2 链码

- 链码用于表示由**顺次链接**的具有**指定长度和方向**的直线段组成的边界
- 通常，这种表示基于这些线段的4连接或8连接
- 每个线段的方向使用一种数字编号方案编码
 - 弗雷曼链码

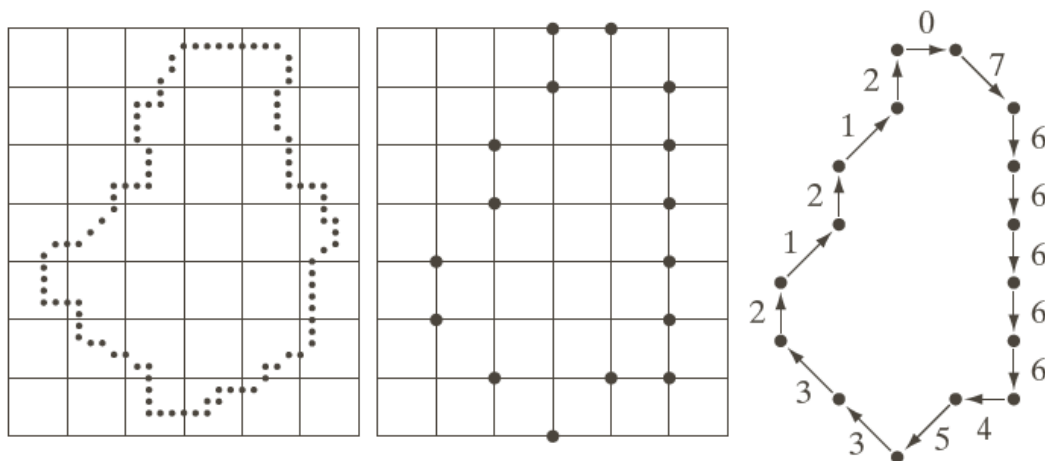
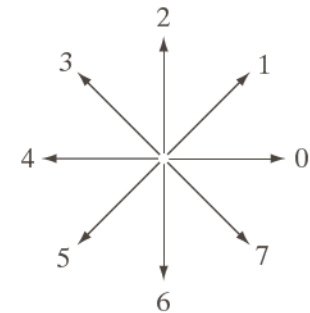


a b

FIGURE 11.3
Direction numbers for (a) 4-directional chain code, and (b) 8-directional chain code.

11.1.2 链码

- 链码示例
 - 左：叠加有重取样网格的数字边界；
 - 中：重取样结果；
 - 右：8方向链码边界。



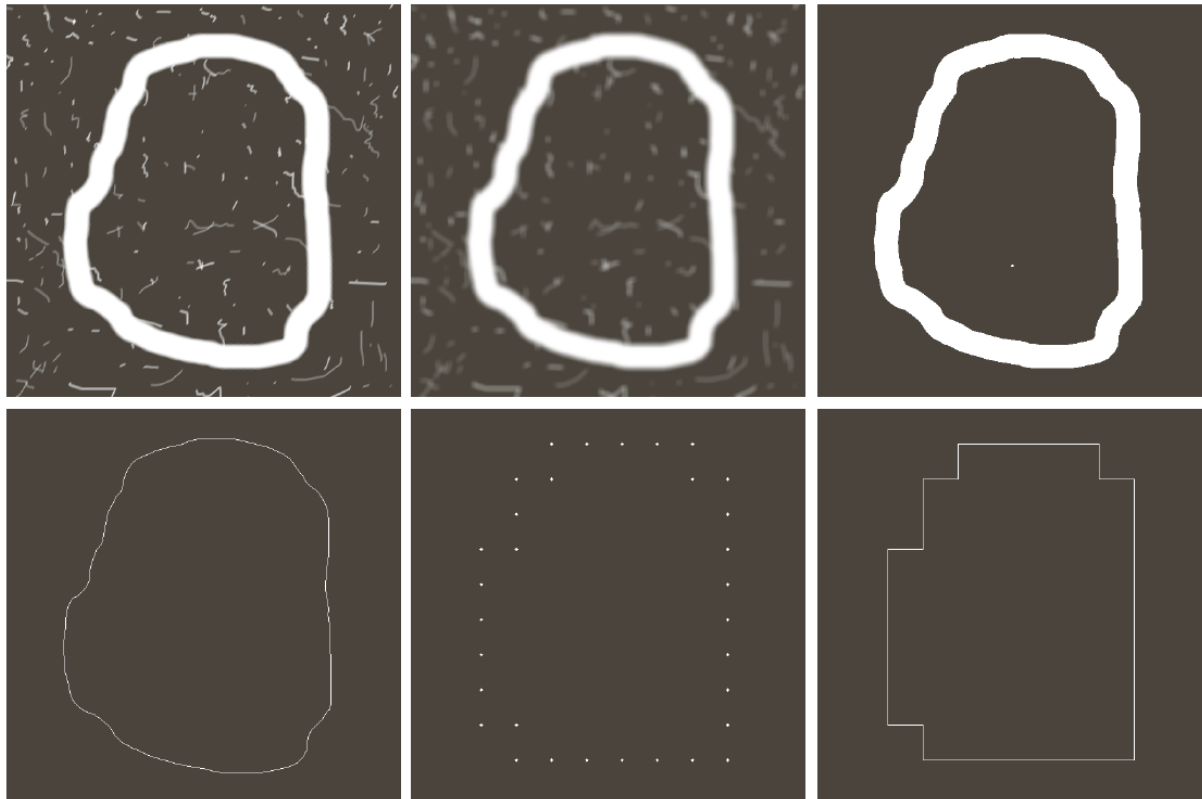
a b c

FIGURE 11.4
 (a) Digital boundary with resampling grid superimposed.
 (b) Result of resampling.
 (c) 8-directional chain-coded boundary.

- 链码归一化
 - 起点归一化：循环移位，重新选择起点，是的编码序列值最小
 - 旋转归一化：计算一阶差分
 - 尺寸归一化：改变重取样网格的大小

11.1.2 链码

- 例：弗雷曼链码及它的某些变化
 - 简单近似保留了原始边界的主要特征

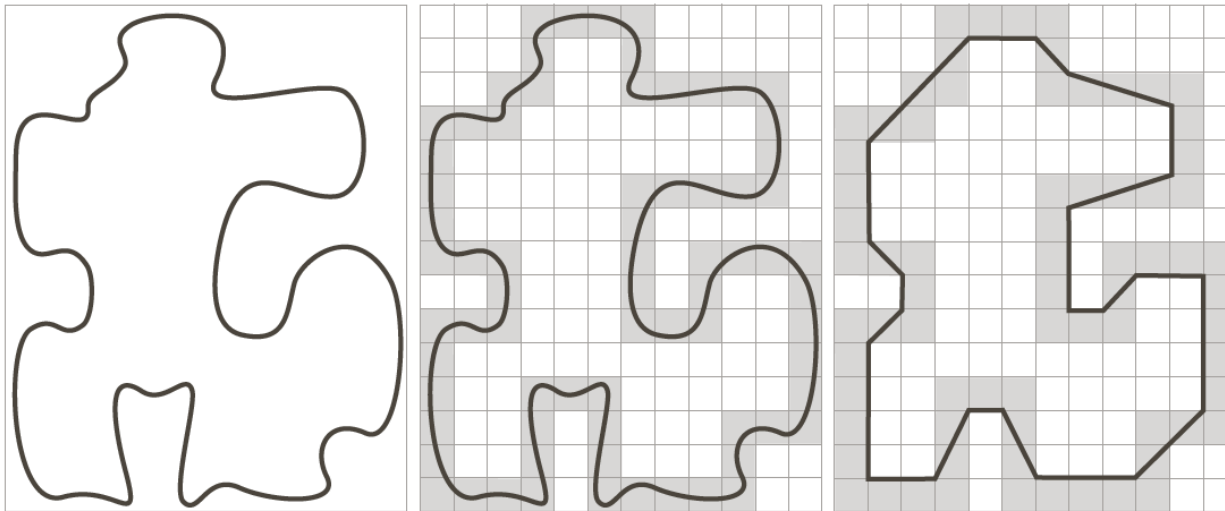


a	b	c
d	e	f

FIGURE 11.5 (a) Noisy image. (b) Image smoothed with a 9×9 averaging mask. (c) Smoothed image, thresholded using Otsu's method. (d) Longest outer boundary of (c). (e) Subsampled boundary (the points are shown enlarged for clarity). (f) Connected points from (e).

11.1.3 最小周长多边形近似

直观方法理解MPP：将连接单元的集合封入一条边界中(b)，将边界想象成橡皮条，橡皮条收缩会产生最小周长的多边形。



a b c

FIGURE 11.6 (a) An object boundary (black curve). (b) Boundary enclosed by cells (in gray). (c) Minimum-perimeter polygon obtained by allowing the boundary to shrink. The vertices of the polygon are created by the corners of the inner and outer walls of the gray region.

11.1.3 最小周长多边形近似

MPP 的顶点要么与内墙中的**凸顶点**（白点）一致，要么与外墙中的**凹顶点**（黑点）一致。

只有内墙的凸顶点和外墙的凹顶点才能成为 MPP 的顶点。

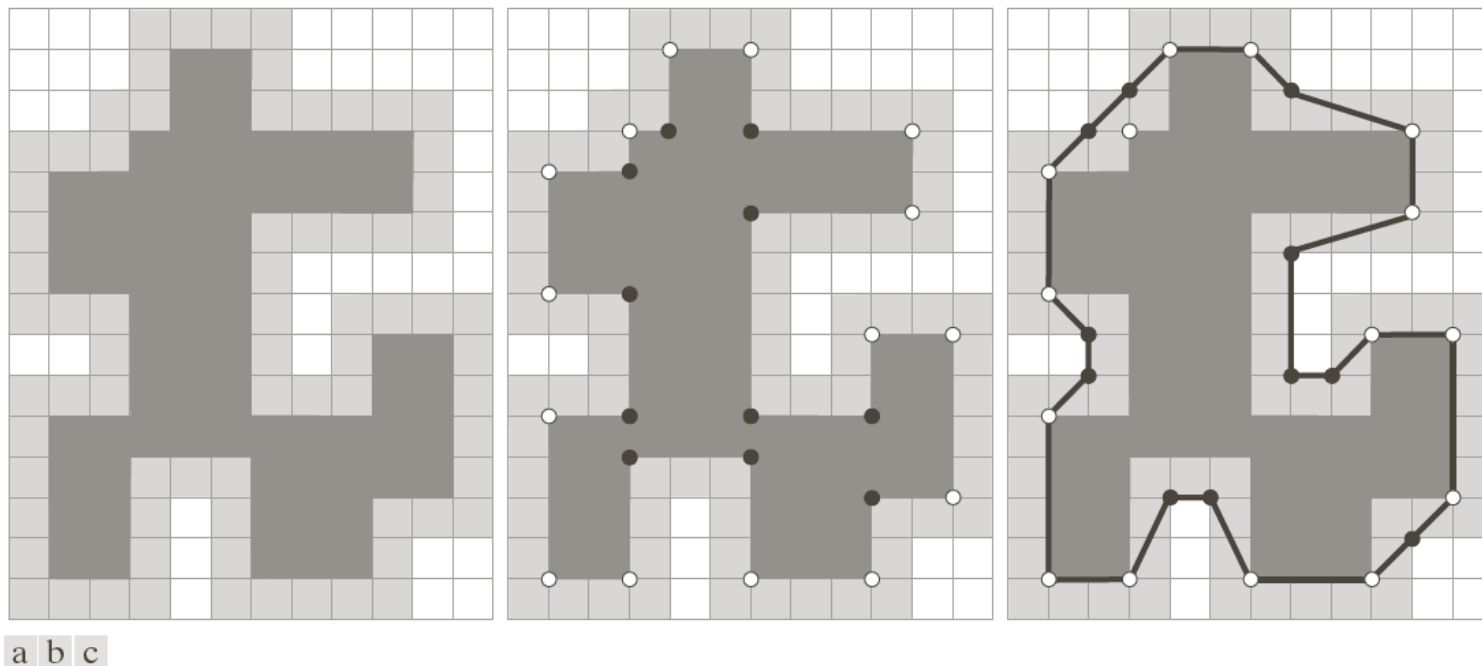


FIGURE 11.7 (a) Region (dark gray) resulting from enclosing the original boundary by cells (see Fig. 11.6). (b) Convex (white dots) and concave (black dots) vertices obtained by following the boundary of the dark gray region in the counterclockwise direction. (c) Concave vertices (black dots) displaced to their diagonal mirror locations in the outer wall of the bounding region; the convex vertices are not changed. The MPP (black boundary) is superimposed for reference.

11.1.3 最小周长多边形近似

- MPP 算法示例
 - MPP的优点之一：边界平滑



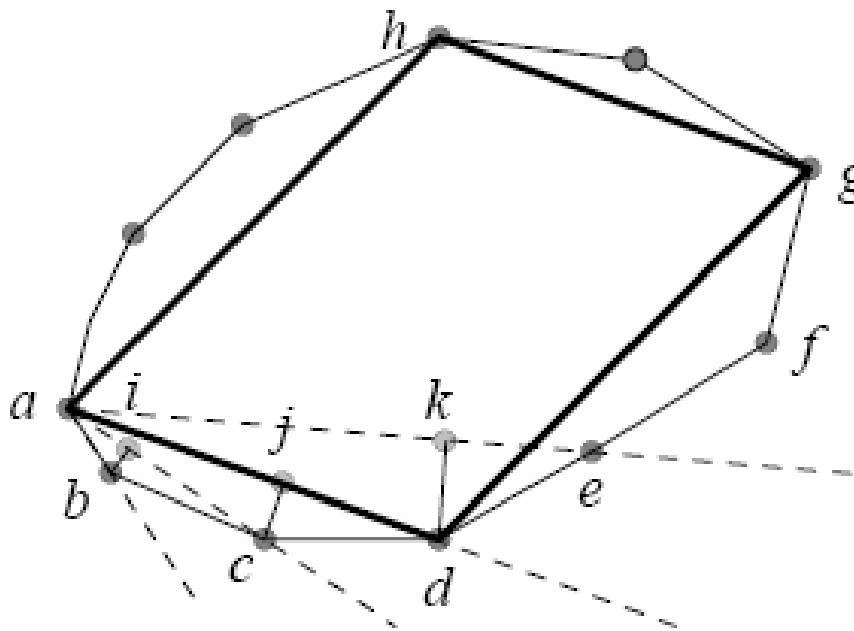
a	b	c
d	e	f
g	h	i

FIGURE 11.8

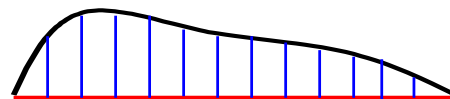
(a) 566×566 binary image.
 (b) 8-connected boundary.
 (c) through (i), MMPs obtained using square cells of sizes 2, 3, 4, 6, 8, 16, and 32, respectively (the vertices were joined by straight lines for display). The number of boundary points in (b) is 1900. The numbers of vertices in (c) through (i) are 206, 160, 127, 92, 66, 32, and 13, respectively.

11.1.4 其他多边形近似

- 聚合技术：沿一条边界来聚合一些点，直到拟合这些聚合点的直线的最小均方误差超过某个预设的阈值。
 - 与起点有关
 - 贪婪算法



误差计算



11.1.4 其他多边形近似

- **分裂技术：**分裂边界线段的一种方法是将线段不断地细分成两部分，直到满足规定的准则为止。

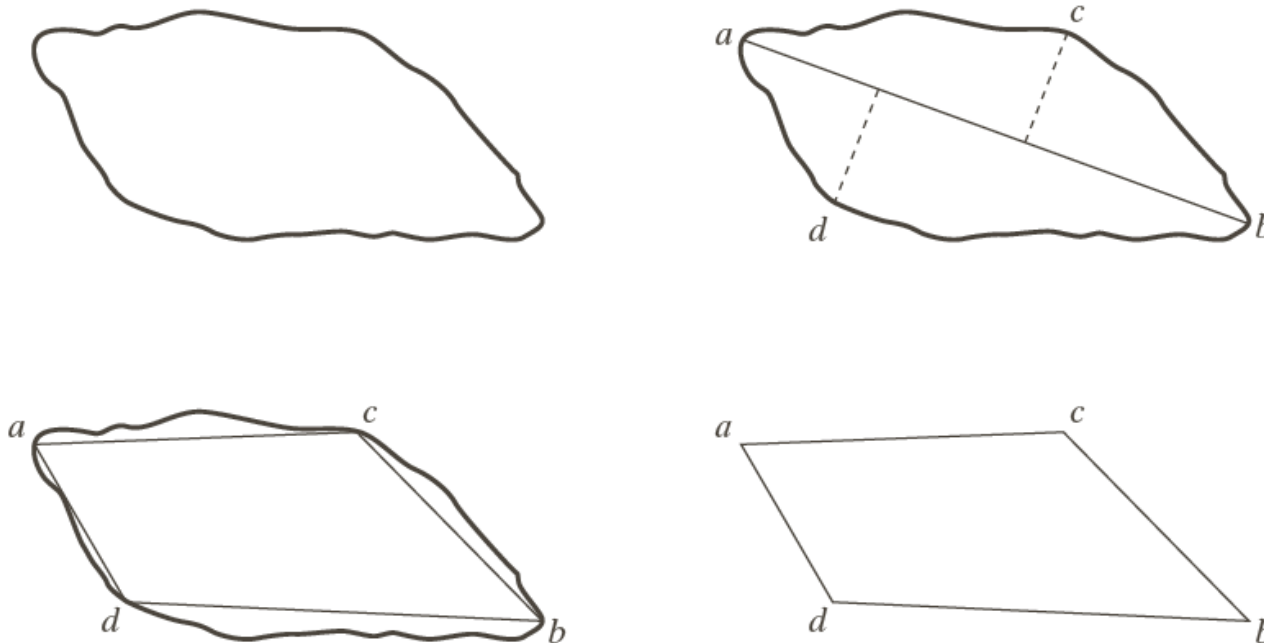
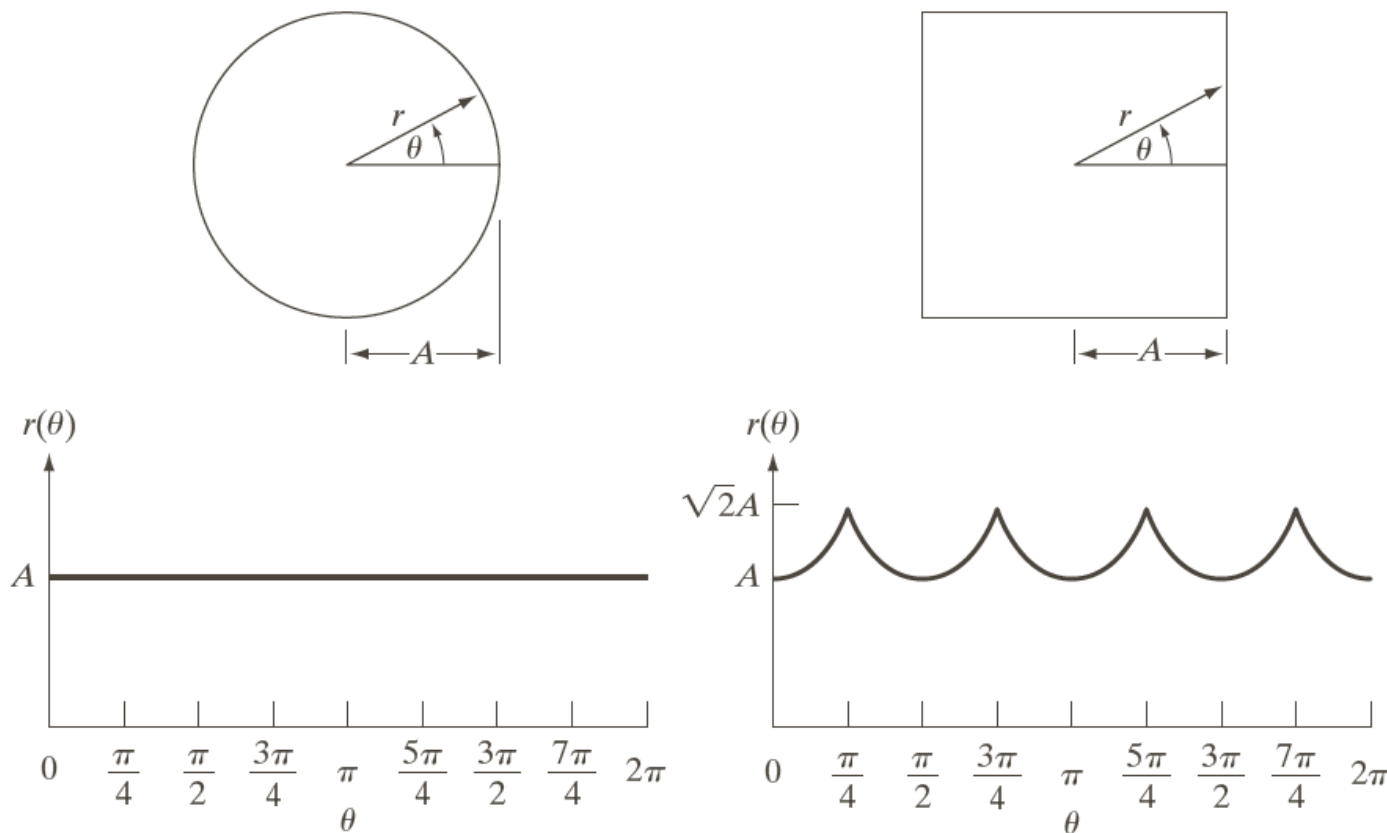


FIGURE 11.9
(a) Original boundary.
(b) Boundary divided into segments based on extreme points. (c) Joining of vertices.
(d) Resulting polygon.

11.1.5 标记图

- 标记图是边界的一维函数表示，它可以使用各种方式来生成
- 一种最简单的方法是以角度函数的形式画出质心到边界的距离，如下：

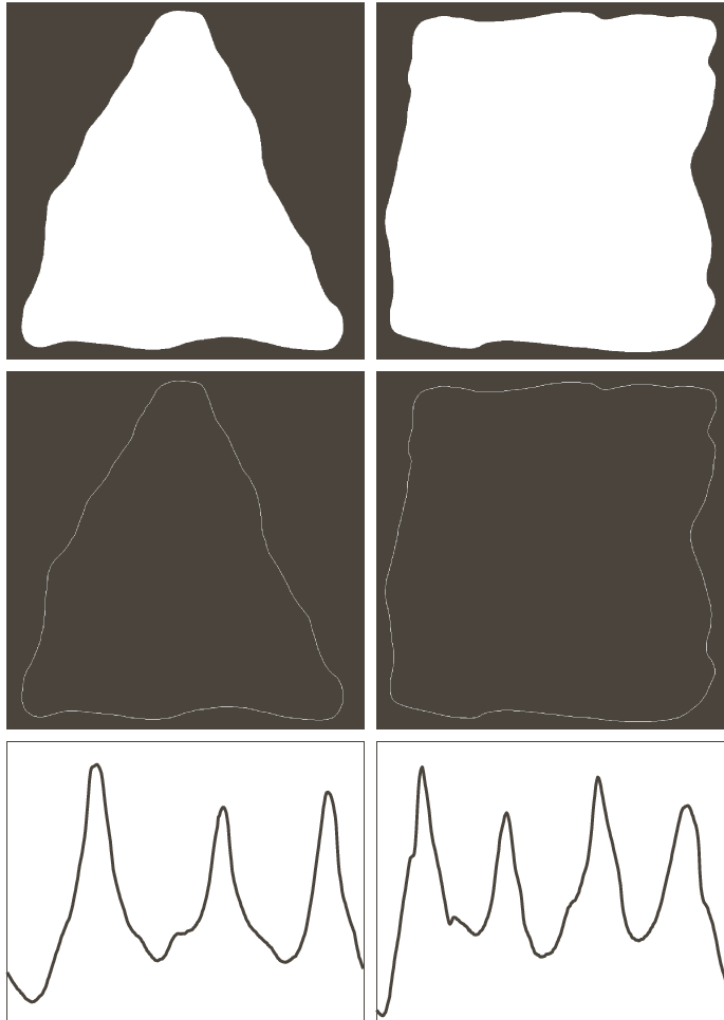


a b

FIGURE 11.10 Distance-versus-angle signatures. In (a) $r(\theta)$ is constant. In (b), the signature consists of repetitions of the pattern $r(\theta) = A \sec \theta$ for $0 \leq \theta \leq \pi/4$ and $r(\theta) = A \csc \theta$ for $\pi/4 < \theta \leq \pi/2$.

11.1.5 标记图

两个简单物体的标记图：



a	b
c	d
e	f

FIGURE 11.11

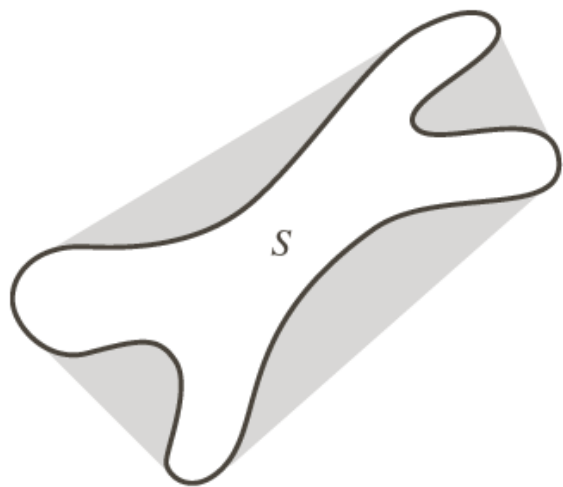
Two binary regions, their external boundaries, and their corresponding $r(\theta)$ signatures. The horizontal axes in (e) and (f) correspond to angles from 0° to 360° , in increments of 1° .

11.1.6 边界线段

将边界分解成线段能降低边界的复杂性，从而简化描述过程。

图左显示了物体（集合 S ）及其凸缺（阴影区）。

区域边界可以按照如下方式来分割：追踪 S 的轮廓，并标记进入或离开一个凸缺的转变点。



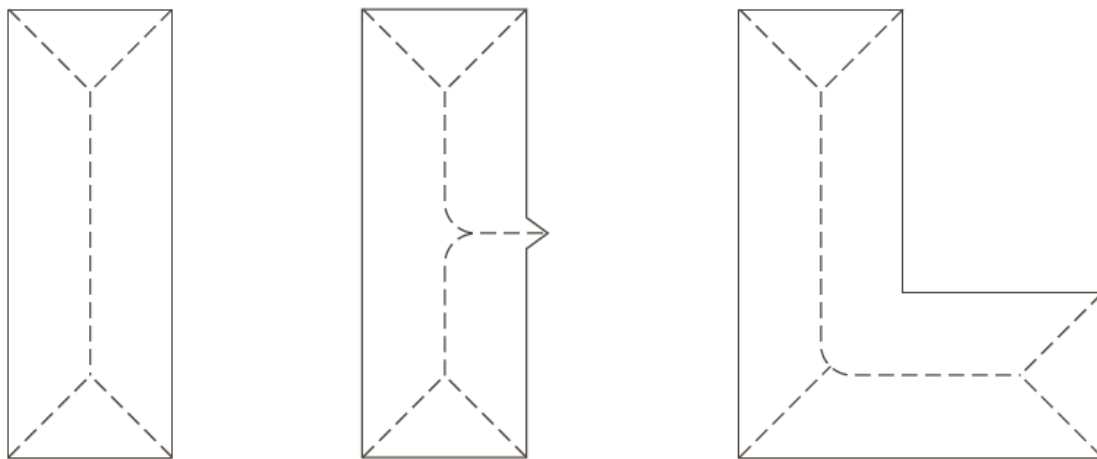
a b

FIGURE 11.12
(a) A region, S , and its convex deficiency (shaded).
(b) Partitioned boundary.

11.1.7 骨架

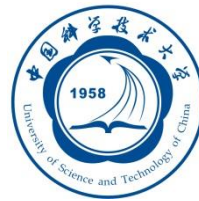
表示平面区域内结构形状的一种重要方法是将它简化为图形。这种简化可以通过一种**细化**(也成为骨架化)算法得到该区域的骨架来实现。

骨架可以由**中轴变换** (MAT) 来定义：边界为 B 的区域 R ，对 R 中的每个点 p ，我们在 B 中**找到与其最接近的邻点**，如果 p 有多个这样的邻点，则认为 p 属于 R 的中轴（骨架）。



a b c

FIGURE 11.13
Medial axes
(dashed) of three
simple regions.



11.1.7 骨架

- 直接利用定义计算骨架点，代价太大。
- 实际中可采用**逐次消除边界点**的迭代细化算法。
- 这个过程中，有3个限制条件需要满足：
 - (1) 不能删除端点
 - (2) 不能破坏连接性
 - (3) 不能导致区域的过度腐蚀

11.1.7 骨架

Step1 :

(1) 标记同时满足下列条件的边界点

i) $2 \leq N(p_1) \leq 6$; ii) $S(p_1) = 1$; iii) $p_2 \cdot p_4 \cdot p_6 = 0$; iv) $p_4 \cdot p_6 \cdot p_8 = 0$;

其中 $N(p_1)$ 是 p_1 邻域的非零点数;

$S(p_1)$ 是从 p_2 开始顺时针转一圈后, $0 \rightarrow 1$ 变化的次数。

(2) 当所有边界点都检验完毕后, 将标记点去掉。

p_9	p_2	p_3
p_8	p_1	p_4
p_7	p_6	p_5

Step2 :

(1) 标记同时满足下列条件的边界点

i) $2 \leq N(p_1) \leq 6$; ii) $S(p_1) = 1$; iii) $p_2 \cdot p_4 \cdot p_8 = 0$; iv) $p_2 \cdot p_6 \cdot p_8 = 0$;

(2) 当所有边界点都检验完毕后, 将标记点去掉。

Step3: 重复Step1,2直到没有点满足标记条件

11.1.7 骨架

□ 算法解释

i) $2 \leq N(p_1) \leq 6$; ii) $S(p_1) = 1$; iii) $p_2 \cdot p_4 \cdot p_6 = 0$; iv) $p_4 \cdot p_6 \cdot p_8 = 0$;
 i) $2 \leq N(p_1) \leq 6$; ii) $S(p_1) = 1$; iii) $p_2 \cdot p_4 \cdot p_8 = 0$; iv) $p_2 \cdot p_6 \cdot p_8 = 0$;

- 条件 i) 保证不消去线段端点和过多侵蚀区域。
- 条件 ii) 保证不中断原本连通的点。
- 条件 iii)和 iv)保证消去的点不是骨架点

p_9	p_2	p_3
p_8	p_1	p_4
p_7	p_6	p_5

0	1	0
0	p	0
0	0	0

1	1	1
1	p	1
1	0	1

0	0	0
1	p	1
0	0	0

0	1	1
0	p	0
1	1	0

1	1	0
1	p	0
0	0	0

0	0	0
0	p	1
0	1	1



第11章 表示和描述

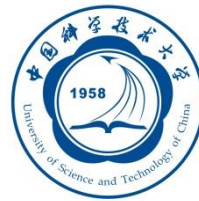
11.1 表示

11.2 边界描绘子

11.3 区域描绘子

11.4 使用主成分进行描绘

11.5 关系描绘子



11.2.1 简单的边界描绘子

- 边界的长度
- 边界 B 的直径

$$Diam(B) = \max_{i,j} [D(p_i, p_j)]$$

- 直径值和连接组成该直径的两个端点的直线段的方向是边界的有用描绘子。

- 偏心率

- 边界的短轴定义为与长轴垂直的直线。
- 长轴与短轴之比称为边界的偏心率，偏心率也是一个有用的描绘子。

- 曲率

- 斜率的变化率
- 近似表达：用相邻边界线段的斜率差作为这两条线段交点处的斜率

11.2.2 形状数

如下所示，阶为 4, 6, 8 的所有形状数，以及它们的链码表示、一次差分
和相应的形状数。

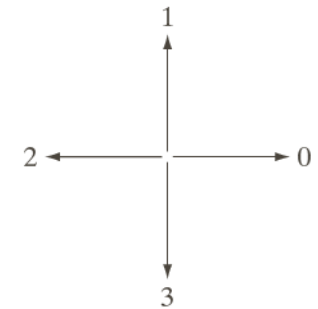
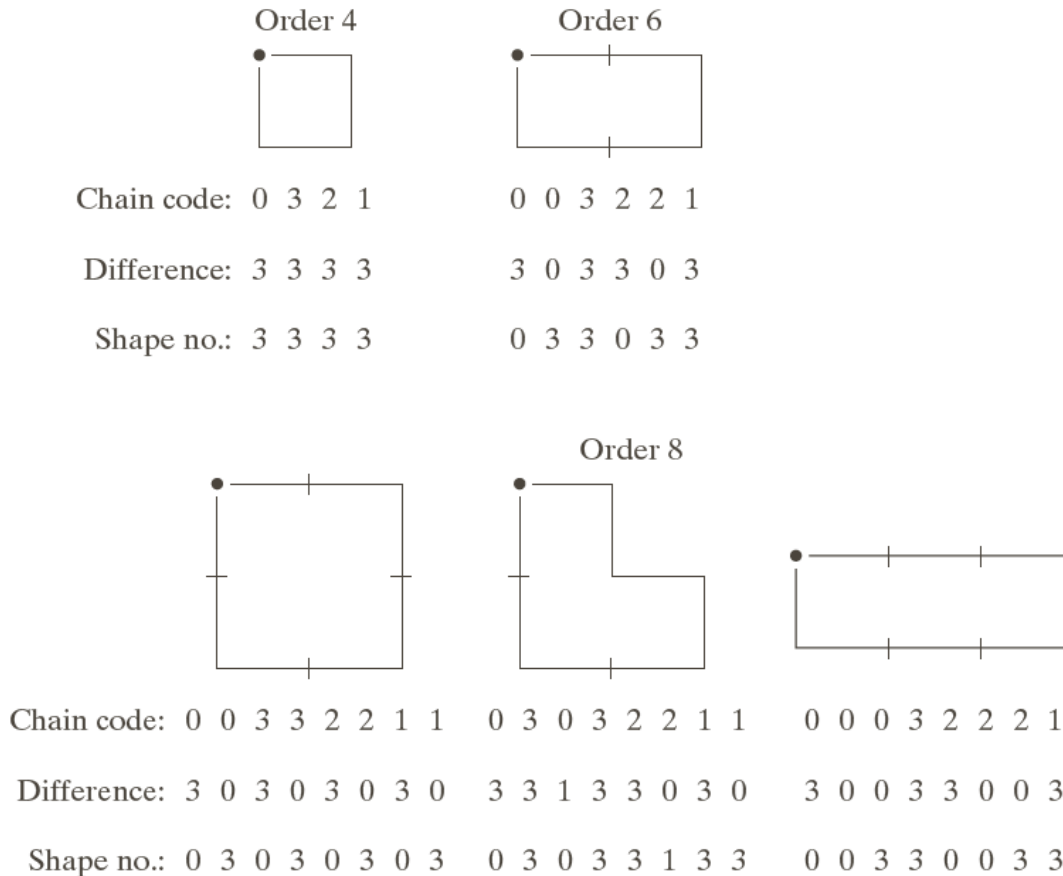
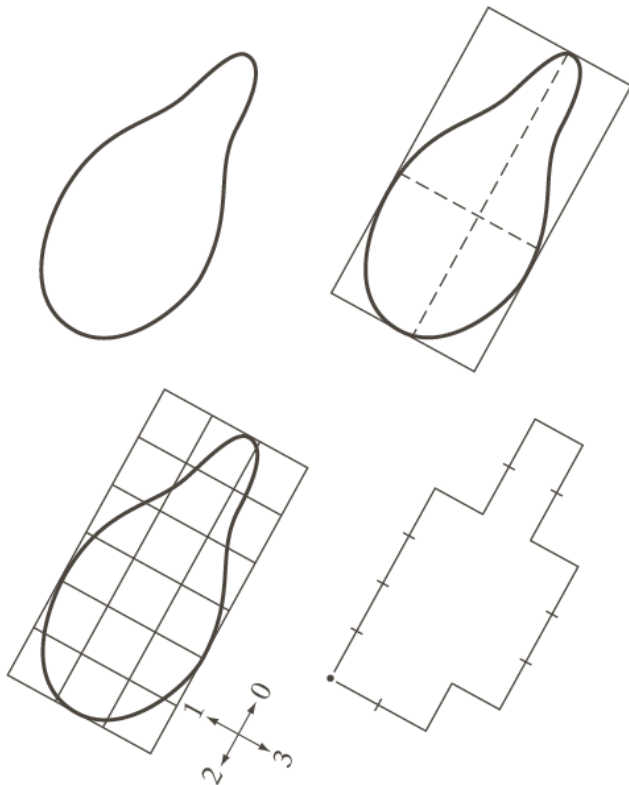


FIGURE 11.17
All shapes of
order 4, 6, and 8.
The directions are
from Fig. 11.3(a),
and the dot
indicates the
starting point.

11.2.2 形状数

- 归一化网格方向
- 获得指定阶数N的形状数
 - 从所有满足($2(m+n)=N$)矩阵中，取长短轴比例与区域最接近的那个。
 - 对外接矩形进行 $m \times n$ 网格划分，求出边界点（面积50%以上包在边界内的正方形划入内部）。
 - 求出链码、差分码以及形状数。



Chain code: 0 0 0 0 3 0 0 3 2 2 3 2 2 2 1 2 1 1

Difference: 3 0 0 0 3 1 0 3 3 0 1 3 0 0 3 1 3 0

Shape no.: 0 0 0 3 1 0 3 3 0 1 3 0 0 3 1 3 0 3

a	b
c	d

FIGURE 11.18
Steps in the
generation of a
shape number.

11.2.3 傅里叶描绘子

- 对于平面内一个 K 点数字边界，逆时针编号： $(x_0, y_0), \dots, (x_{K-1}, y_{K-1})$
- 每个点坐标当作一个复数 $s(k) = x_k + jy_k$
 - 将二维问题简化为一维问题
- 边界序列点的离散傅里叶变换（DFT）为

$$a(u) = \sum_{k=0}^{K-1} s(k) e^{-j2\pi uk/K}$$

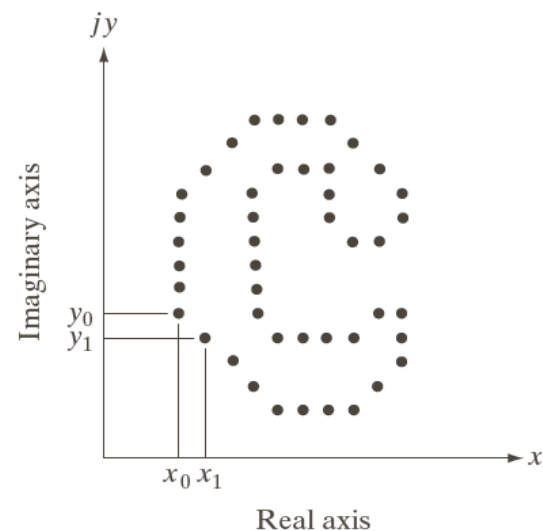
- 复系数 $a(u)$ 成为边界的傅里叶描绘子

- 复系数 $a(u)$ 的反变换可恢复 $s(k)$:

$$s(k) = \frac{1}{K} \sum_{u=0}^{K-1} a(u) e^{j2\pi uk/K}$$

- 仅用前 P 个复系数恢复 $s(k)$:

$$\hat{s}(k) = \frac{1}{K} \sum_{u=0}^{P-1} a(u) e^{j2\pi uk/K}$$



高频成分说明
精细细节，而
低频成分决定
全局形状

11.2.3 傅里叶描绘子

- 由傅里叶变换可知，高频成分说明精细细节，而低频成分决定全局形状
 - 少数的傅里叶描绘子就可以捕获边界的大体特征。

分别使用 1434、286、144、72、36、18、8个傅里叶描绘子重建染色体边界：

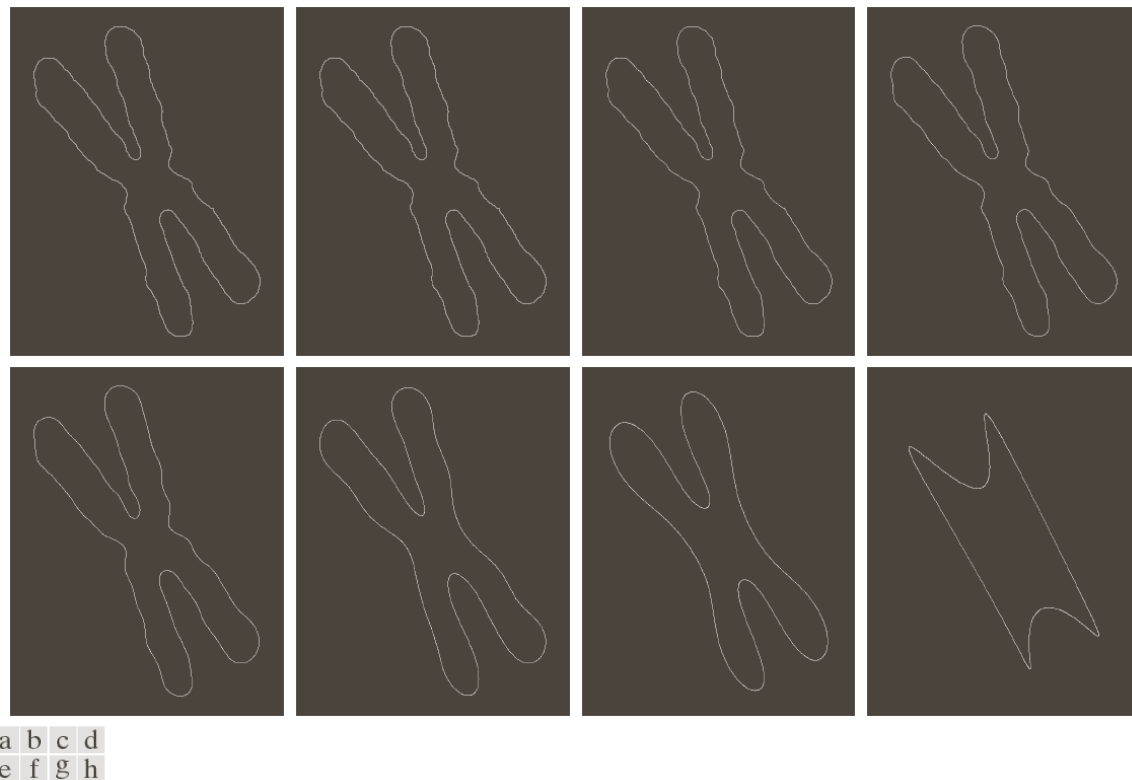


FIGURE 11.20 (a) Boundary of human chromosome (2868 points). (b)–(h) Boundaries reconstructed using 1434, 286, 144, 72, 36, 18, and 8 Fourier descriptors, respectively. These numbers are approximately 50%, 10%, 5%, 2.5%, 1.25%, 0.63%, and 0.28% of 2868, respectively.

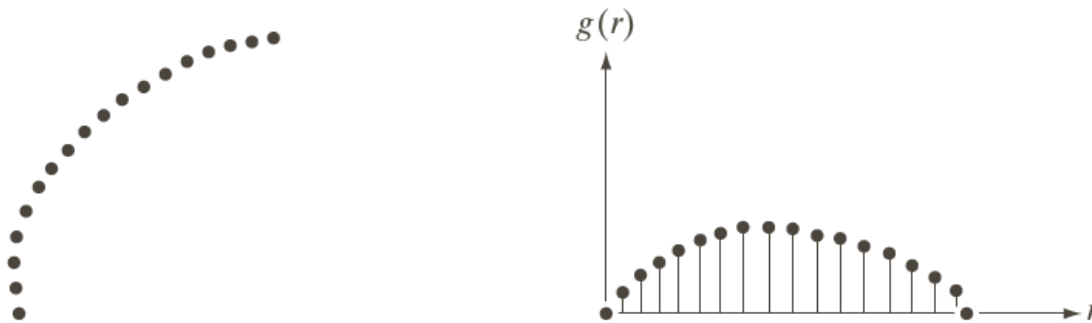
11.2.3 傅里叶描绘子

傅里叶描绘子的一些基本性质：

Transformation	Boundary	Fourier Descriptor
Identity	$s(k)$	$a(u)$
Rotation	$s_r(k) = s(k)e^{j\theta}$	$a_r(u) = a(u)e^{j\theta}$
Translation	$s_t(k) = s(k) + \Delta_{xy}$	$a_t(u) = a(u) + \Delta_{xy}\delta(u)$
Scaling	$s_s(k) = \alpha s(k)$	$a_s(u) = \alpha a(u)$
Starting point	$s_p(k) = s(k - k_0)$	$a_p(u) = a(u)e^{-j2\pi k_0 u/K}$

11.2.4 统计矩

- 边界线段的形状可使用统计矩来定量描述。
- 首先，将线段的两个端点连接起来，然后旋转该直线线段，直至其为水平线段（如下）。将 g 归一化为单位面积，可计算幅度 g 的矩。



a b

FIGURE 11.21
(a) Boundary segment.
(b) Representation as a 1-D function.

$$\mu_n(r) = \sum_{i=0}^{K-1} (r_i - m)^n g(r_i) \quad \text{其中} \quad m = \sum_{i=0}^{K-1} r_i g(r_i)$$

- μ_n 与 $f(r)$ 的形状有直接联系
 - μ_2 描述了曲线相对于均值的扩散程度
 - μ_3 描述了曲线相对于均值的对称性



第11章 表示和描述

11.1 表示

11.2 边界描绘子

11.3 区域描绘子

11.4 使用主成分进行描绘

11.5 关系描绘子



11.3.1 一些简单的区域描绘子

- 区域的**面积** A 定义为该区域中像素的数量。
- 区域的**周长** P 是其边界的长度。
- 这两个描绘子频繁用于度量一个区域的致密性，即 $(\text{周长})^2/\text{面积}$ 。
- 另一个致密性描绘子为**圆度率**，即一个区域的面积与具有相同周长的一个圆（最致密形状）的面积之比，如下：

$$R_c = \frac{4\pi A}{P^2}$$

11.3.2 拓扑描绘子

□ 对一幅二值图象A，可以定义两个欧拉数

(1) 4-连通欧拉数 $E_4(A)$

4-连通的目标个数 减去 8-连通的孔数

$$E_4(A) = C_4(A) - H_8(A)$$

(2) 8-连通欧拉数 $E_8(A)$

8-连通的目标个数 减去 4-连通的孔数

$$E_8(A) = C_8(A) - H_4(A)$$

FIGURE 11.23
A region with
two holes.

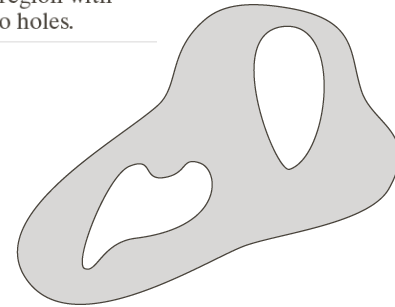
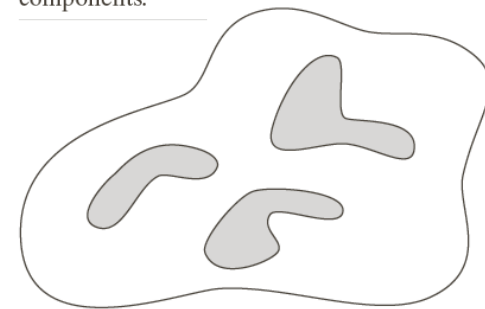


FIGURE 11.24
A region with
three connected
components.



11.3.2 拓扑描绘子

□ 多边形网

全由直线段（包围）构成的区域集合

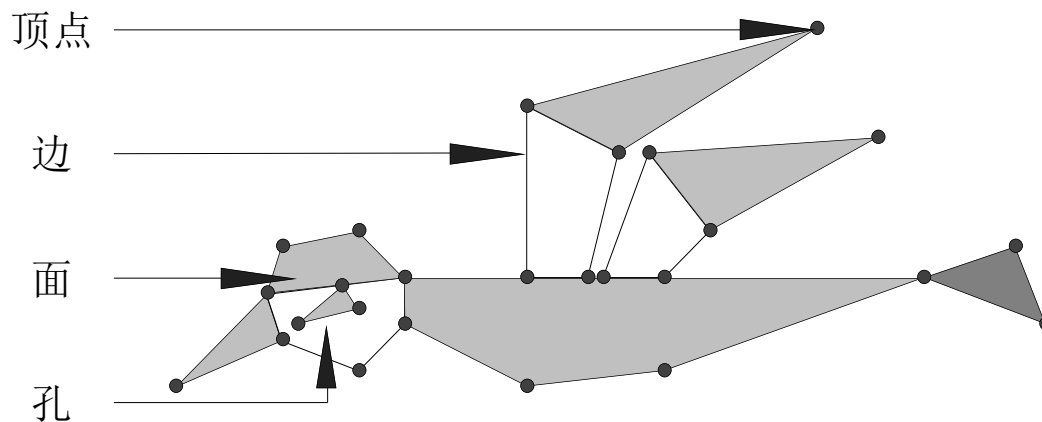
□ 欧拉公式

$$V - Q + F = E = C - H$$

V : 顶点数

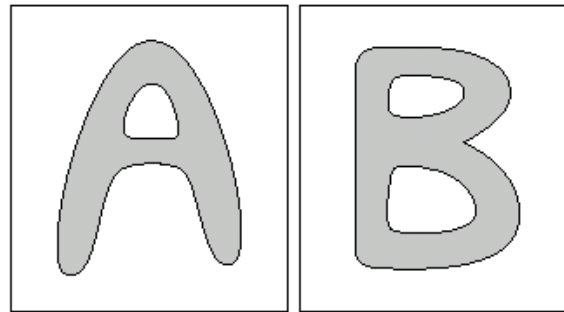
Q : 边线数

F : 面数



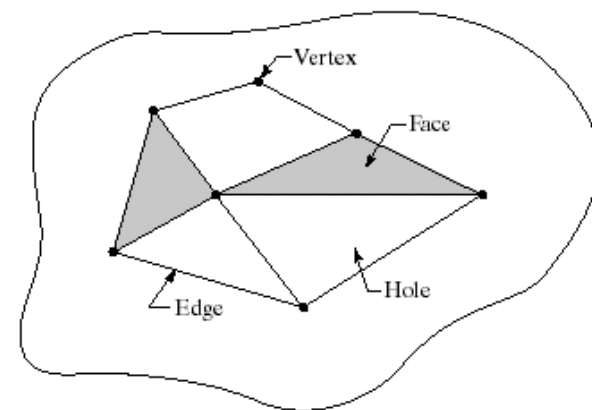
$$V = 26, Q = 35, F = 7, C = 1, H = 3, E = -2$$

11.3.2 拓扑描绘子



Euler number are 0 and -1 respectively

$$V - Q + F = E = C - H$$

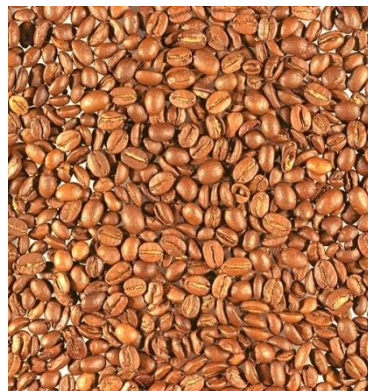


$$V = 7, Q = 11, F = 2, C = 1, H = 3, E = -2$$

11.3.3 纹理

什么是纹理

- 纹理与尺度有密切联系。任何物体的表面，如果一直放大下去进行观察的话一定会显现出纹理。
- 纹理具有区域性质的特点。对单个像素来说讨论纹理是没有意义的。纹理可用来辨识图象中的不同区域。





11.3.3 纹理

纹理分析的方法

(1) 统计法

利用对图象灰度分布和关系的统计规则

(2) 结构法

根据描述几何关系的放置/排列规则来描述**纹理基元**

(3) 频谱法

根据傅里叶频谱的分布，特别是高能量窄脉冲来描述纹理的全局周期性质

11.3.3 纹理

统计法：灰度共生矩阵

● 思想

纹理是由灰度分布在空间位置上反复出现而形成

纹理图像在图像空间中相隔某距离的两像素间会存在一定的灰度关系，即灰度的空间相关性

共生矩阵方法用条件概率来反映纹理，是相邻像素的灰度相关性的表现。

● 方法

根据图像像素之间的位置关系（距离，方向），构造一种矩阵，作为纹理的描述

矩阵的行坐标和列坐标表示不同的灰度，考察一对对象素出现的频度，以此作为矩阵中的元素



11.3.3 纹理

- 设 S 为目标区域 R 中具有特定空间联系（可由位置算子确定）的像素对的集合
- 共生矩阵 P 中的元素（#代表数量）

$$p(g_1, g_2) = \frac{\#\{[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] \in S \mid f(x_1, y_1) = g_1 \ \& \ f(x_2, y_2) = g_2\}}{\#S}$$

- 分子：具有某种空间关系的、灰度值分别为 g_1 和 g_2 的像素对的个数
- 分母：像素对的总和个数

11.3.3 纹理

生成共生矩阵的方式：

关系： g_2 在 g_1 的右边

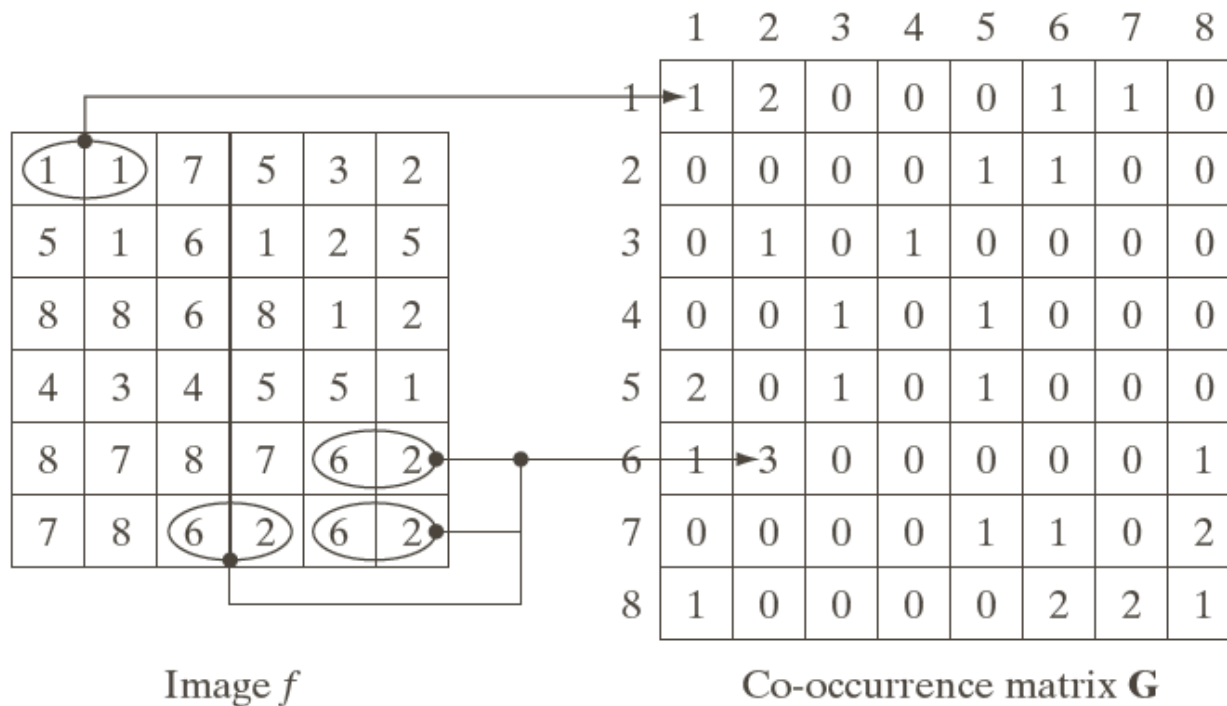


FIGURE 11.29
How to generate
a co-occurrence
matrix.

11.3.3 纹理

随机模式，周期模式（正弦波），混合纹理模式图片（上图）及其共生矩阵（下图）

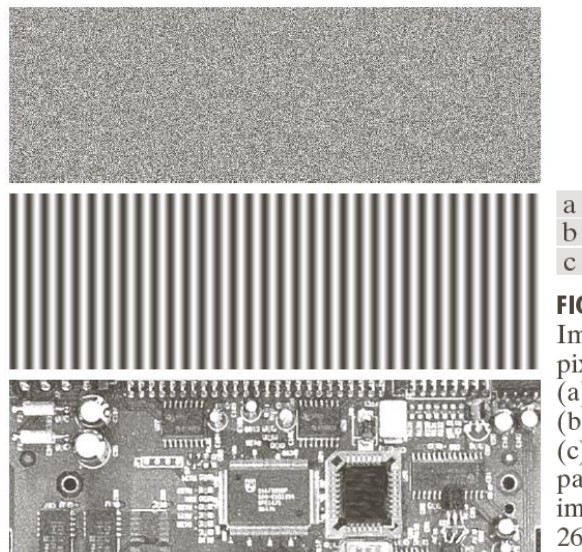
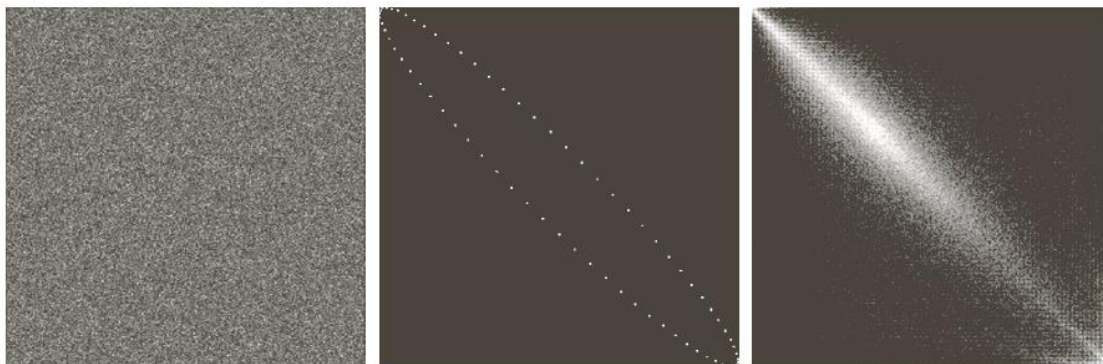


FIGURE 11.30
Images whose pixels have (a) random, (b) periodic, and (c) mixed texture patterns. Each image is of size 263×800 pixels.

关系： g_2 在 g_1 的右边



a b c

FIGURE 11.31
 256×256 co-occurrence matrices, G_1 , G_2 , and G_3 , corresponding from left to right to the images in Fig. 11.30.



11.3.3 纹理

结构法：纹理基元和排列规则

结构法的基本思想：复杂的纹理可由一些简单的**纹理基元**（基本纹理元素）以一定的有规律的形式重复排列组合而成

(1) 确定纹理基元

(2) 建立排列规则

8个重写规则（ a ：模式， b ：向下， c ：向左）

- (1) $S \rightarrow aA$ （变量 S 可用 aA 来替换）
- (2) $S \rightarrow bA$ （变量 S 可用 bA 来替换）
- (3) $S \rightarrow cA$ （变量 S 可用 cA 来替换）
- (4) $A \rightarrow aS$ （变量 A 可用 aS 来替换）
- (5) $A \rightarrow bS$ （变量 A 可用 bS 来替换）
- (6) $A \rightarrow cS$ （变量 A 可用 cS 来替换）
- (7) $A \rightarrow c$ （变量 A 可用常量 c 来替换）
- (8) $S \rightarrow a$ （变量 S 可用常量 a 来替）

11.3.3 纹理

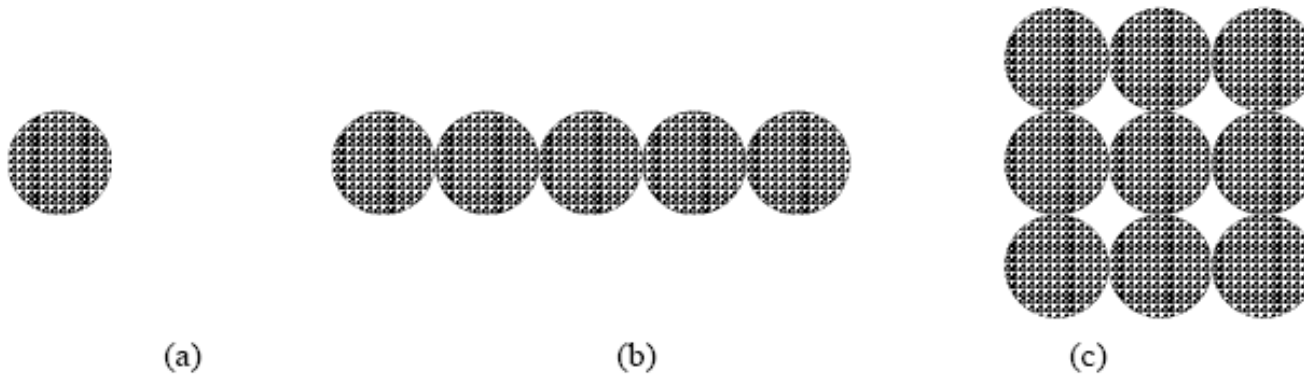
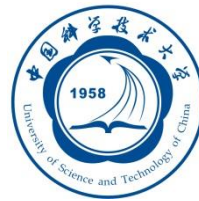


图 11.3.1 不同 2-D 模式的生成

(b): (1), (4), (1), (4), (8)

(c): (1), (4), (1), (5), (3), (6), (3), (4), (1), (4), (2), (6), (3), (6), (1), (4), (8)



11.3.3 纹理

傅里叶频谱

借助傅里叶频谱的频率特性来描述周期/近乎周期的2-D图象模式的方向性

- (1) 傅里叶频谱中突起的峰值对应纹理模式的主方向
- (2) 这些峰在频域平面的位置对应模式的基本周期
- (3) 利用滤波把周期性成分除去，用统计方法描述剩下的非周期性部分

11.3.3 纹理

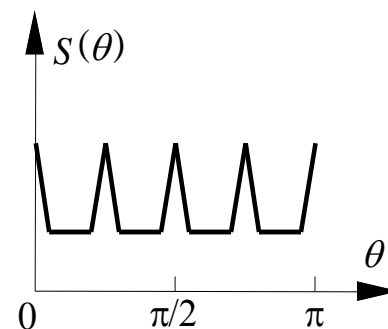
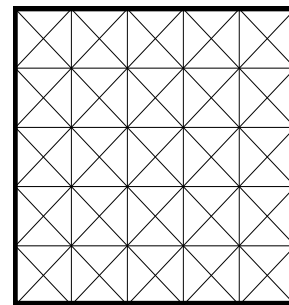
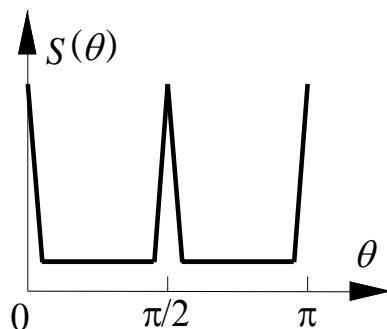
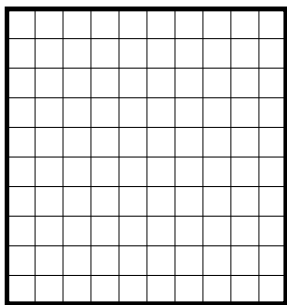
傅里叶频谱

极坐标系中频谱函数 $S(r, \theta)$

- 对每个确定的方向 θ , $S(r, \theta)$ 是1个1-D函数 $S_\theta(r)$
- 对每个确定的频率 r , $S(r, \theta)$ 是1个1-D函数 $S_r(\theta)$

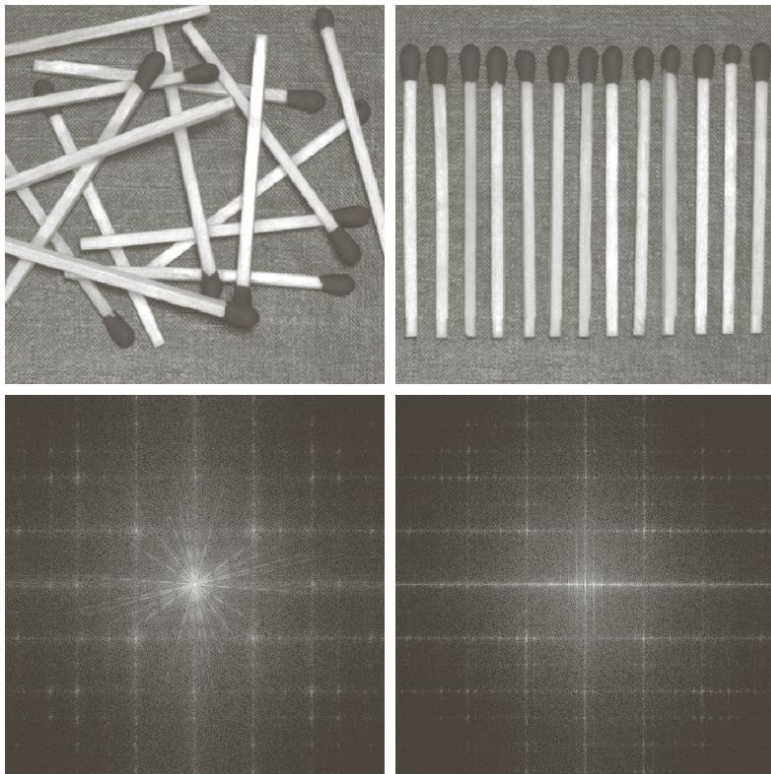
$$S(r) = \sum_{\theta=0}^{\pi} S_\theta(r)$$

$$S(\theta) = \sum_{r=1}^R S_r(\theta)$$

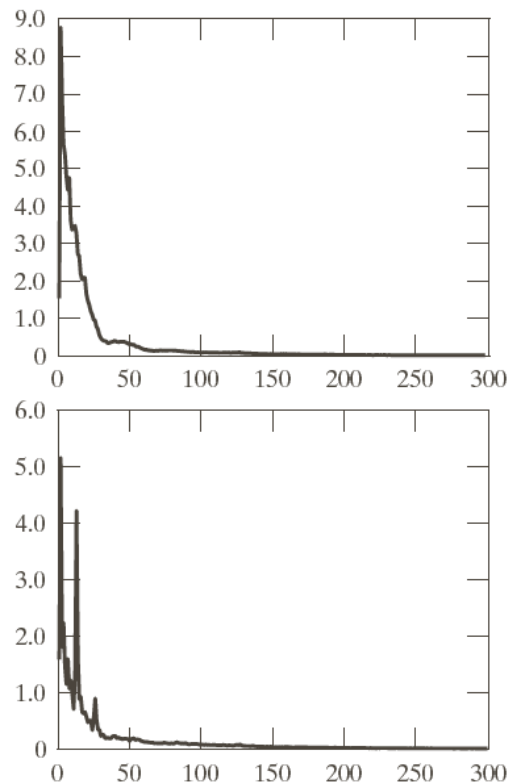


11.3.3 纹理

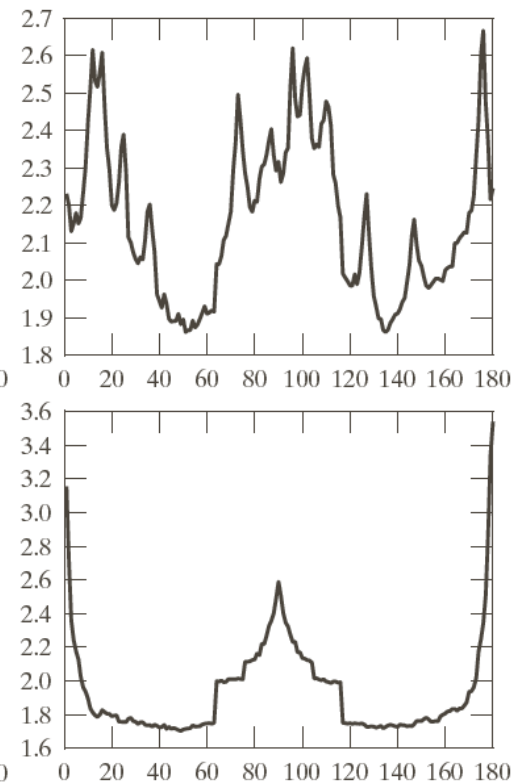
频谱法分析纹理示例：



$S(r)$



$S(\theta)$





11.3.4 不变矩

区域矩：用所有属于区域内的点计算

$f(x, y)$ 的 $p + q$ 阶矩

$$m_{pq} = \sum_x \sum_y x^p y^q f(x, y)$$

$f(x, y)$ 的 $p + q$ 阶中心矩

$$\mu_{pq} = \sum_x \sum_y (x - \bar{x})^p (y - \bar{y})^q f(x, y)$$

$f(x, y)$ 的归一化的中心矩

$$N_{pq} = \frac{\mu_{pq}}{\mu_{00}^\gamma} \quad \text{其中 } \gamma = \frac{p+q}{2} + 1, \quad p+q = 2, 3, \dots$$



11.3.4 不变矩

平移、旋转、尺度不变矩

$$T_1 = N_{20} + N_{02} \quad T_2 = (N_{20} - N_{02})^2 + 4N_{11}^2$$

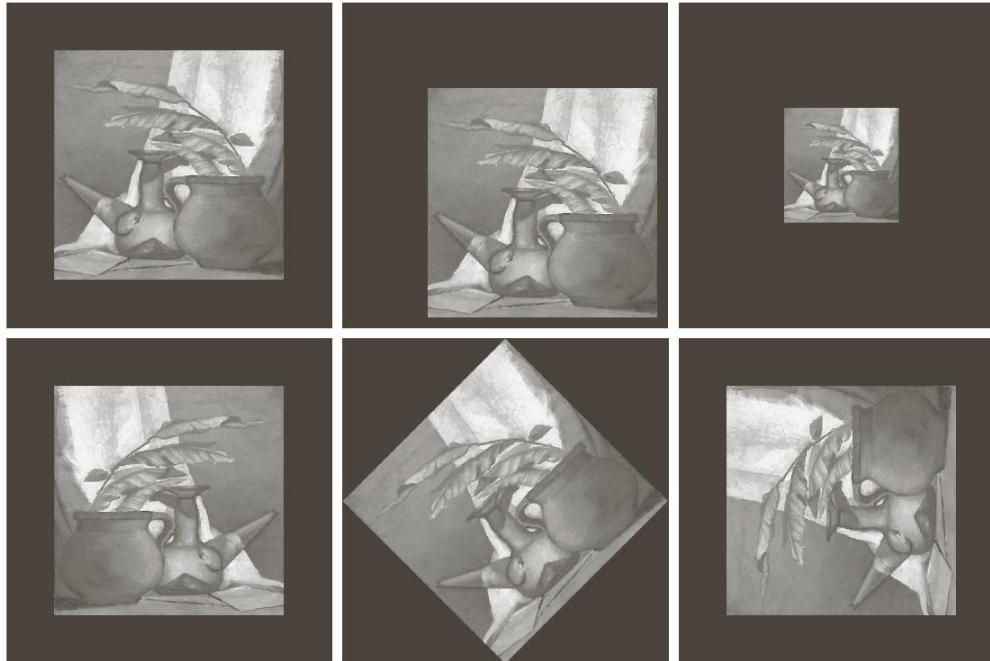
$$T_3 = (N_{30} - 3N_{12})^2 + (3N_{21} - N_{03})^2 \quad T_4 = (N_{30} + N_{12})^2 + (N_{21} + N_{03})^2$$

$$T_5 = (N_{30} - 3N_{12})(N_{30} + N_{12})[(N_{30} + N_{12})^2 - 3(N_{21} + N_{03})^2] + \\ (3N_{21} - N_{03})(N_{21} + N_{03})[3(N_{30} + N_{12})^2 - (N_{21} + N_{03})^2]$$

$$T_6 = (N_{20} - N_{02})[(N_{30} + N_{12})^2 - (N_{21} + N_{03})^2] + \\ 4N_{11}(N_{30} + N_{12})(N_{21} + N_{03})$$

$$T_7 = (3N_{21} - N_{03})(N_{30} + N_{12})[(N_{30} + N_{12})^2 - 3(N_{21} + N_{03})^2] + \\ (3N_{12} - N_{30})(N_{21} + N_{03})[3(N_{30} + N_{12})^2 - (N_{21} + N_{03})^2]$$

11.3.4 不变矩



Moment Invariant	Original Image	Translated	Half Size	Mirrored	Rotated 45°	Rotated 90°
ϕ_1	2.8662	2.8662	2.8664	2.8662	2.8661	2.8662
ϕ_2	7.1265	7.1265	7.1257	7.1265	7.1266	7.1265
ϕ_3	10.4109	10.4109	10.4047	10.4109	10.4115	10.4109
ϕ_4	10.3742	10.3742	10.3719	10.3742	10.3742	10.3742
ϕ_5	21.3674	21.3674	21.3924	21.3674	21.3663	21.3674
ϕ_6	13.9417	13.9417	13.9383	13.9417	13.9417	13.9417
ϕ_7	-20.7809	-20.7809	-20.7724	20.7809	-20.7813	-20.7809



第11章 表示和描述

11.1 表示

11.2 边界描绘子

11.3 区域描绘子

11.4 使用主成分进行描绘

11.5 关系描绘子

11.4 主成分描绘

- 向量 x 的协方差矩阵: $C_x = E\{(x - m_x)(x - m_x)^T\}$
- 由于 C_x 是对称的, 所以总可以找到一组 n 个**正交**的特征向量。
 - 令 A 为一个矩阵, 其行由 C_x 的特征向量组成, 特征向量的排序方式为 A 的第一行对应于最大特征值的特征向量, 最后一行对应最小特征值的特征向量。
- 假设将 A 用做将向量 x 映射向 y 的一个变换矩阵 (霍特林变换):
$$y = A(x - m_x)$$
- 可以证明
 - y 的均值为零向量: $m_y = E\{y\} = 0$
 - y 的协方差矩阵 C_y 为对角矩阵:

$$C_y = AC_x A^T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

其中 λ_i 为 C_x 的第 i 个特征向量对应的特征值, λ_i 等于向量 y 的第 i 维的方差, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$

11.4 主成分描绘

- 任何向量 x 都能通过下式由其对应的 y 来恢复 ($A^{-1} = A^T$):

$$x = A^T y + m_x$$

- 假设由最大的 k 个特征值对应的特征向量来形成矩阵 A_k ，其矩阵大小为 $k \times n$ ，对应得到的向量 y 为 k 维，从而实现数据降维
- 使用 A_k 重建向量 x ，得到：

$$\hat{x} = A_k^T y + m_x$$

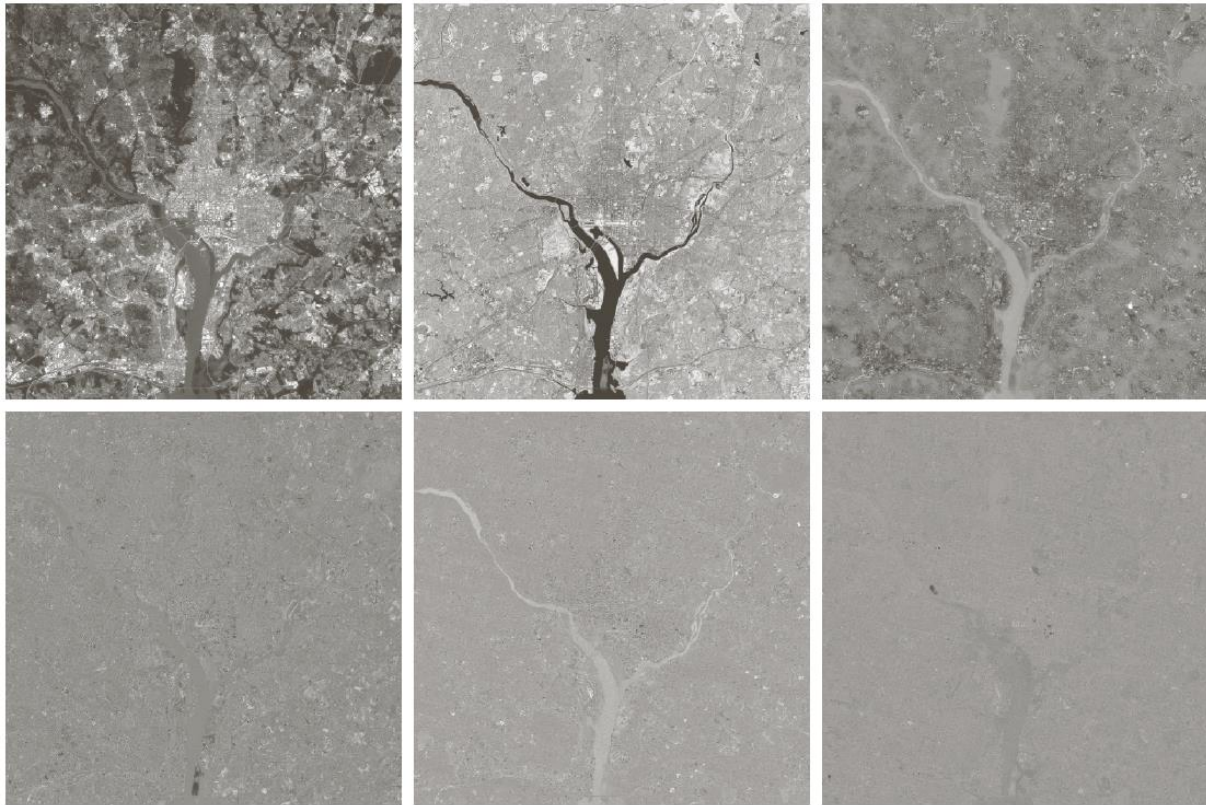
- 可以证明， x 和 \hat{x} 之间的均方误差由下式给出($\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$):

$$e_{ms} = \sum_{i=1}^n \lambda_i - \sum_{i=1}^k \lambda_i = \sum_{i=k+1}^n \lambda_i$$

- 将向量 x 和其近似值 \hat{x} 之间的均方误差降至最小，从这个意义上，上述变换（霍特林变换，又称主成分变换）是最优的

11.4 主成分描绘

- 主成分图像。前两个特征值远大于其他特征值，因此对比度细节的重要部分包含在前两幅图像中。



a	b	c
d	e	f

FIGURE 11.40 The six principal component images obtained from vectors computed using Eq. (11.4-6). Vectors are converted to images by applying Fig. 11.39 in reverse.

11.4 主成分描绘

- 仅使用两幅主成分图像重建的多光谱图像：

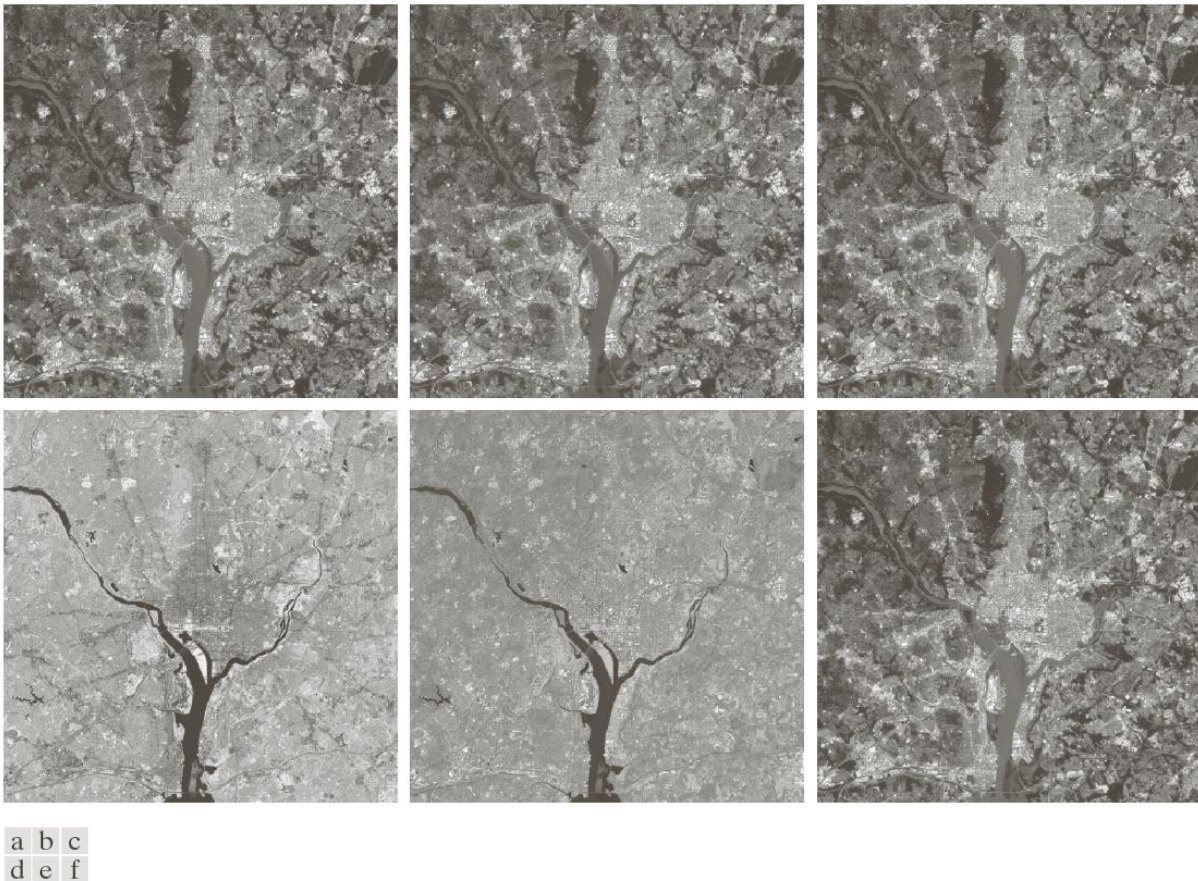
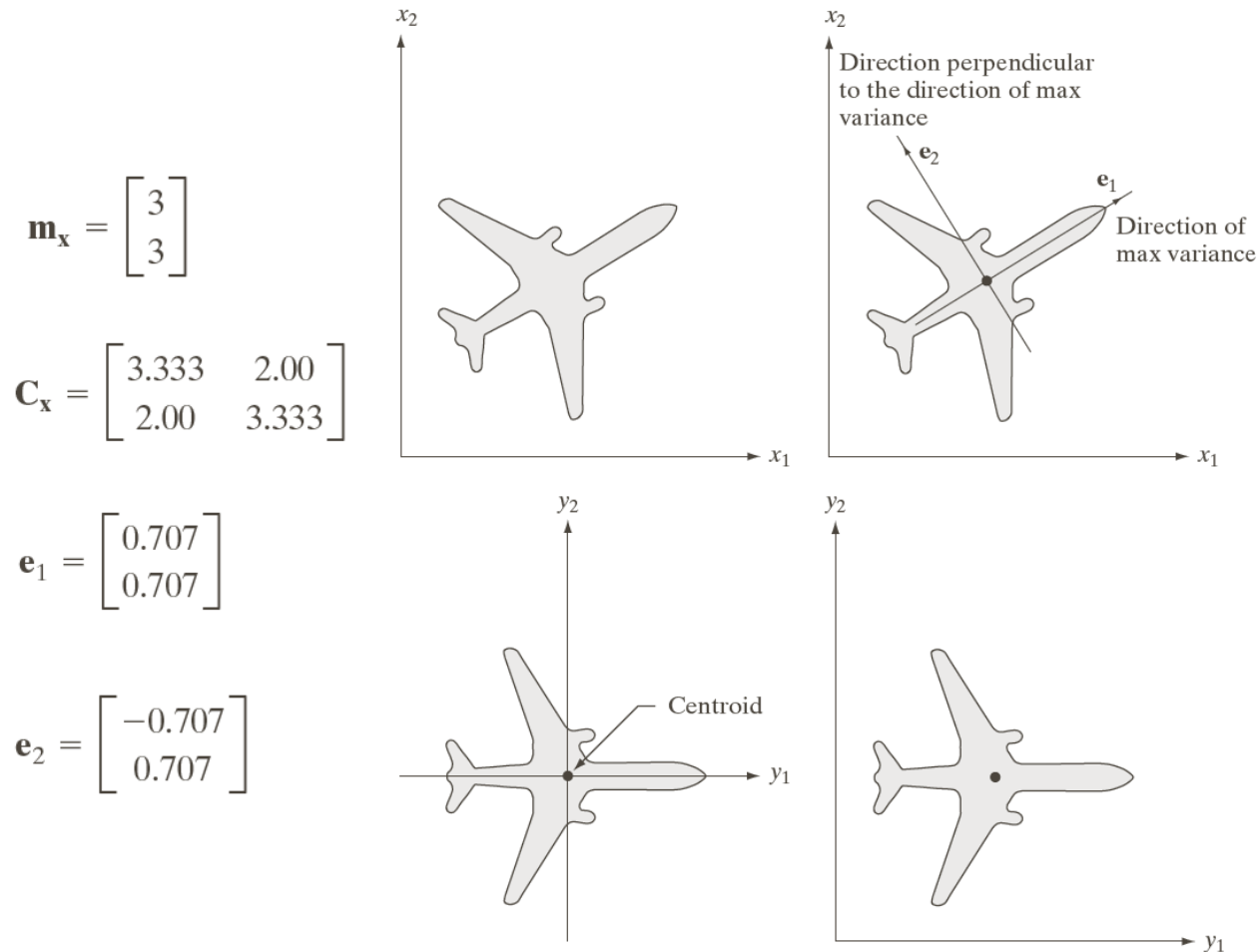


FIGURE 11.41 Multispectral images reconstructed using only the two principal component images corresponding to the two principal component images with the largest eigenvalues (variance). Compare these images with the originals in Fig. 11.38.

11.4 主成分描绘

例子：

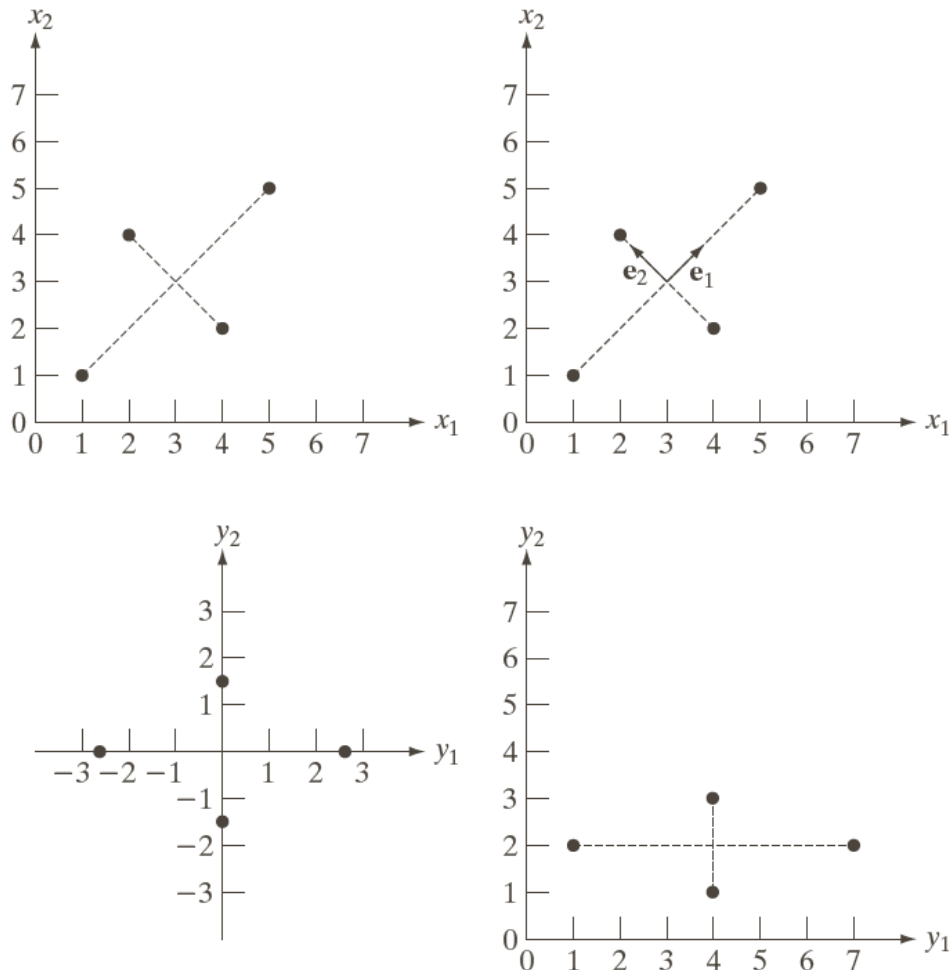


a	b
c	d

FIGURE 11.43
 (a) An object.
 (b) Object showing eigenvectors of its covariance matrix.
 (c) Transformed object, obtained using Eq. (11.4-6).
 (d) Object translated so that all its coordinate values are greater than 0.

11.4 主成分描绘

例子：



a b
c d

FIGURE 11.44

A manual example.

(a) Original points.

(b) Eigenvectors of the covariance matrix of the points in (a).

(c) Transformed points obtained using Eq. (11.4-6).

(d) Points from (c), rounded and translated so that all coordinate values are integers greater than 0. The dashed lines are included to facilitate viewing. They are not part of the data.



第11章 表示和描述

11.1 表示

11.2 边界描绘子

11.3 区域描绘子

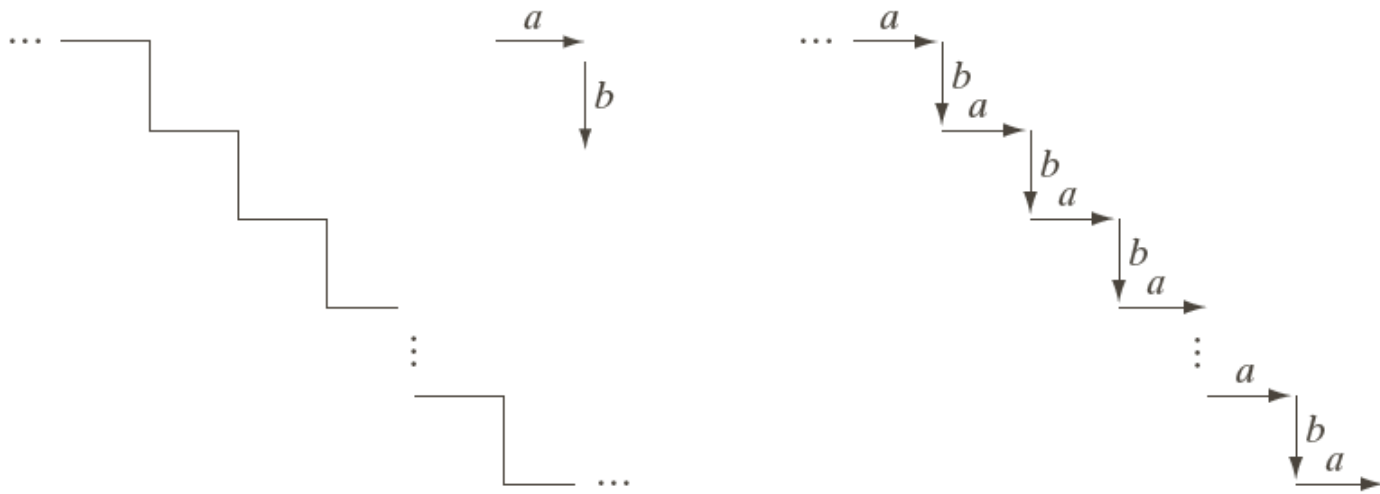
11.4 使用主成分进行描绘

11.5 关系描绘子

11.5 关系描绘子

关系描绘子主要的目的是以**重写规则**的形式来获取边界或区域中的基本重复模式。例如，对下图的阶梯结构采用基本的**递归**单元进行重写：

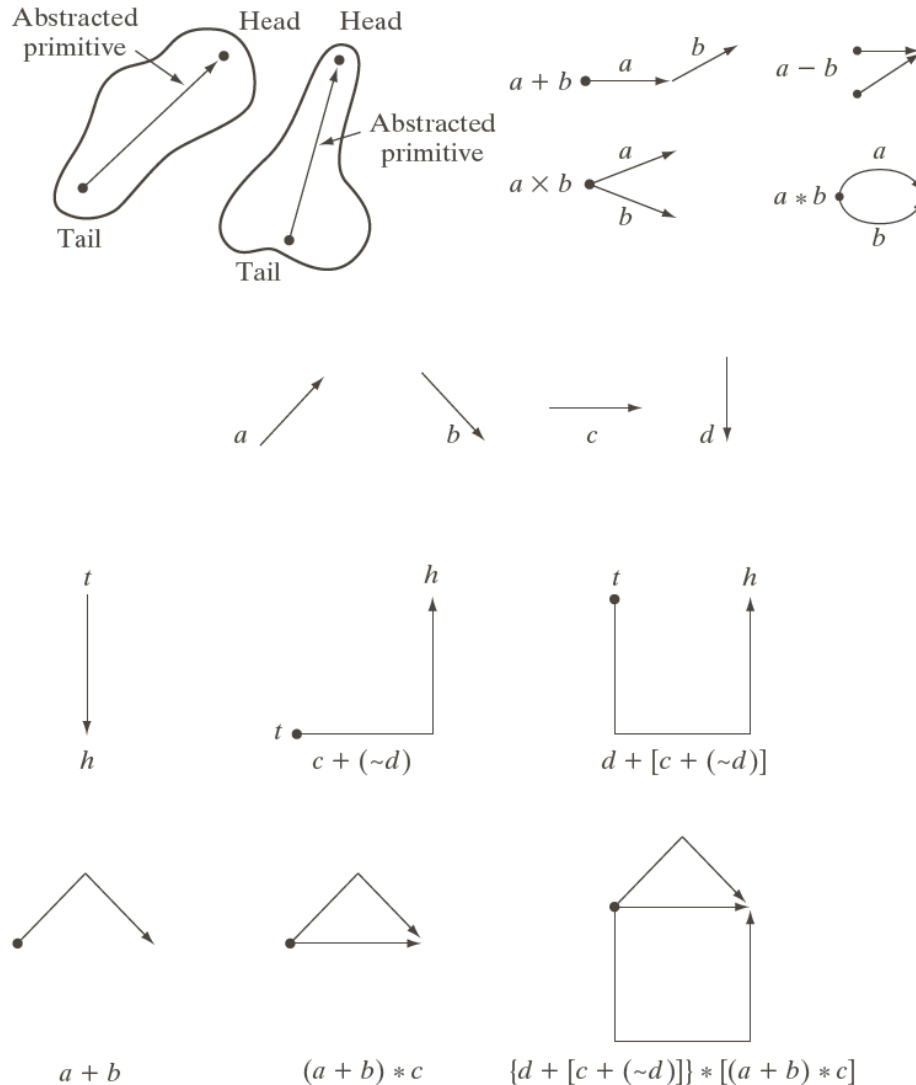
- (1) $S \rightarrow aA$,
- (2) $A \rightarrow bS$, and
- (3) $A \rightarrow b$,



a b

FIGURE 11.45
(a) A simple staircase structure.
(b) Coded structure.

11.5 关系描绘子



使用有向线段来描绘图像的各个部分，除了采用首尾相连的方式外，有向线段也可以采用其他的方式来连接，如左图：

a b
c
d

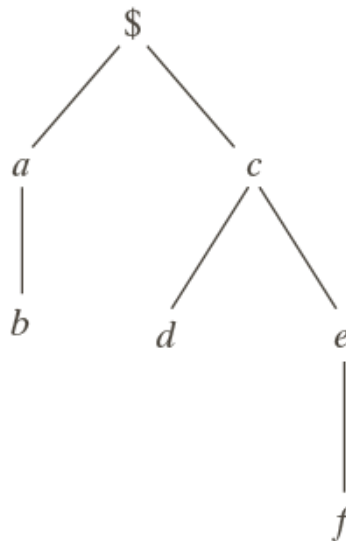
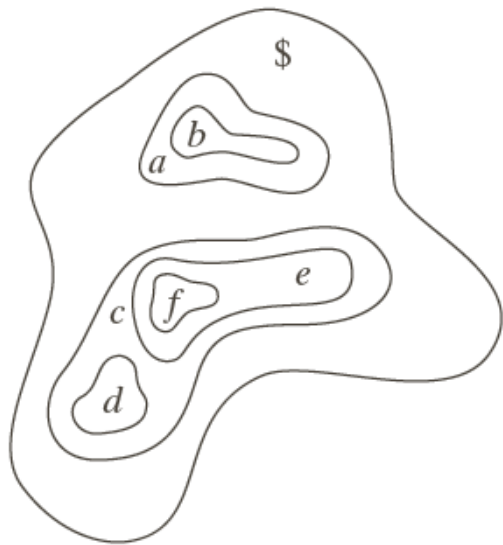
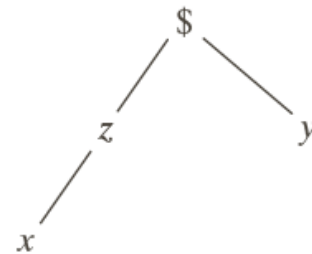
FIGURE 11.48
(a) Abstracted primitives.
(b) Operations among primitives.
(c) A set of specific primitives.
(d) Steps in building a structure.

11.5 关系描绘子

树描绘子

一棵树 T 是有着一个或多个节点的有限集合：

1. 仅有一个表示根节点 $\$$
2. 余下的节点被分成不相交的集合，每个集合依次都是一棵树，称为 T 的子树。



a b

FIGURE 11.50

(a) A simple composite region.
(b) Tree representation obtained by using the relationship "inside of."