



# 数字图象处理

---

中国科学技术大学  
电子工程与信息科学系

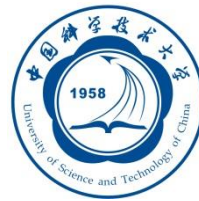
主讲教师：李厚强 (lihq@ustc.edu.cn)  
周文罡 (zhwg@ustc.edu.cn)

助教：王宁 (wn6149@mail.ustc.edu.cn)



# 第7章 小波和多分辨率处理

- 小波变换的基函数是小波型，它具有变化的频率和有限的持续时间
- 小波是多分辨率理论这种信号处理和分析方法的基础，多分辨率理论涉及多个分辨率下的信号（或图像）表示与分析。这种方法的优势是某种分辨率下无法检测的特性，在另一种分辨率下容易检测
- 本章从多分辨率的角度来审视基于小波的变换。主要内容集中于离散小波变换的开发和利用



# 第7章 小波和多分辨率处理

---

7.1 背景

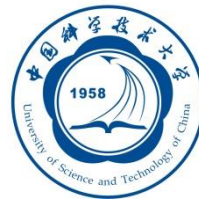
7.2 多分辨率展开

7.3 一维小波变换

7.4 快速小波变换

7.5 二维小波变换

7.6 小波包



# 第7章 小波和多分辨率处理

---

## 7.1 背景

## 7.2 多分辨率展开

## 7.3 一维小波变换

## 7.4 快速小波变换

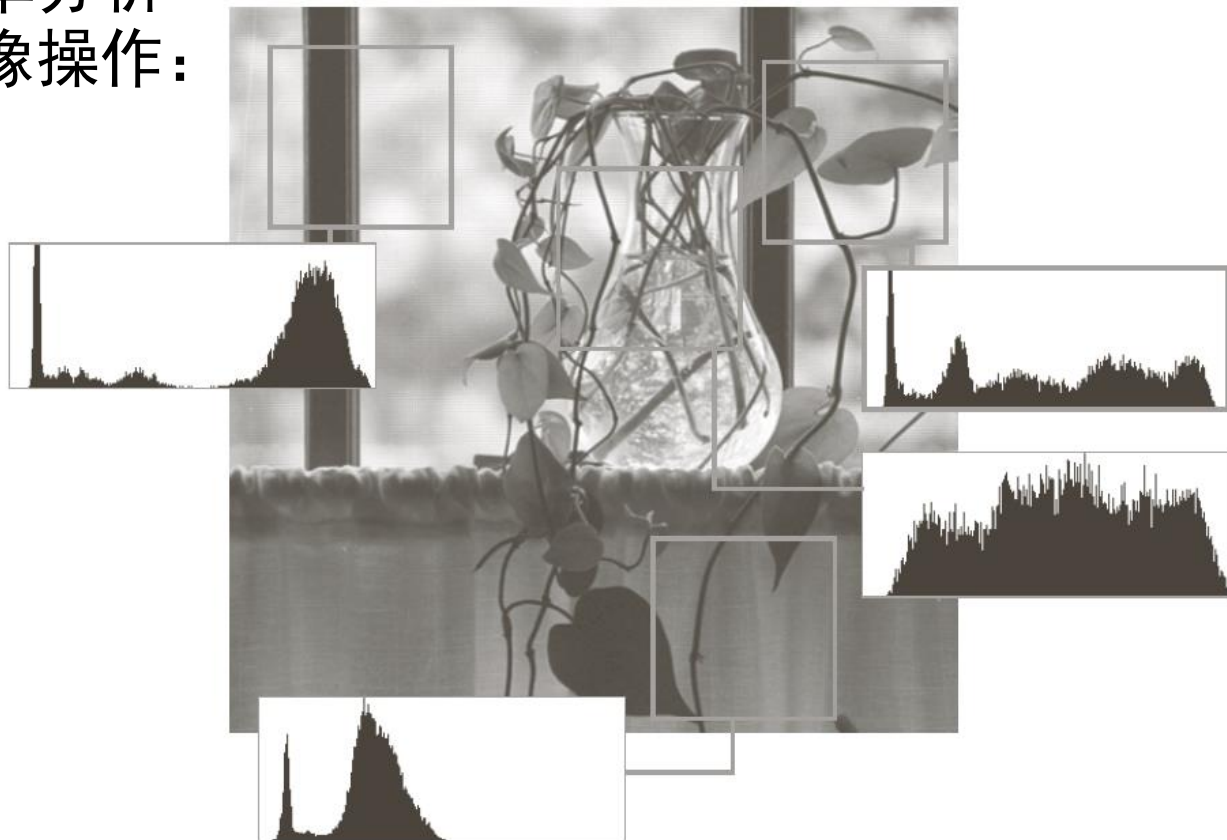
## 7.5 二维小波变换

## 7.6 小波包

# 7.1 背景

## □ 三个与多分辨率分析 紧密联系的图像操作：

- 图像金字塔
- 子带编码
- 哈尔变换

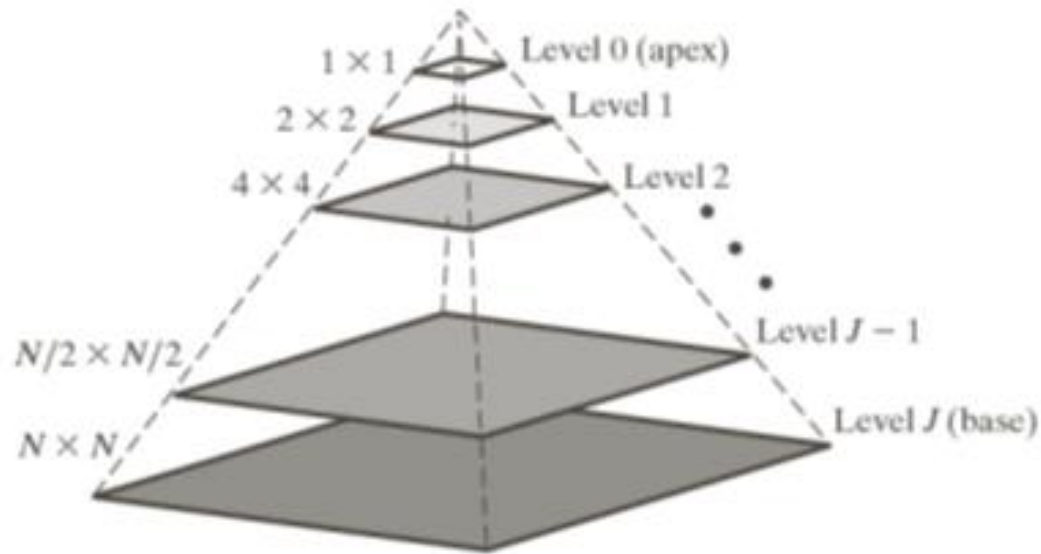


图像不同区域局部直方图

# 图像金字塔

□  $P + 1$ 级图像金字塔像素总数是

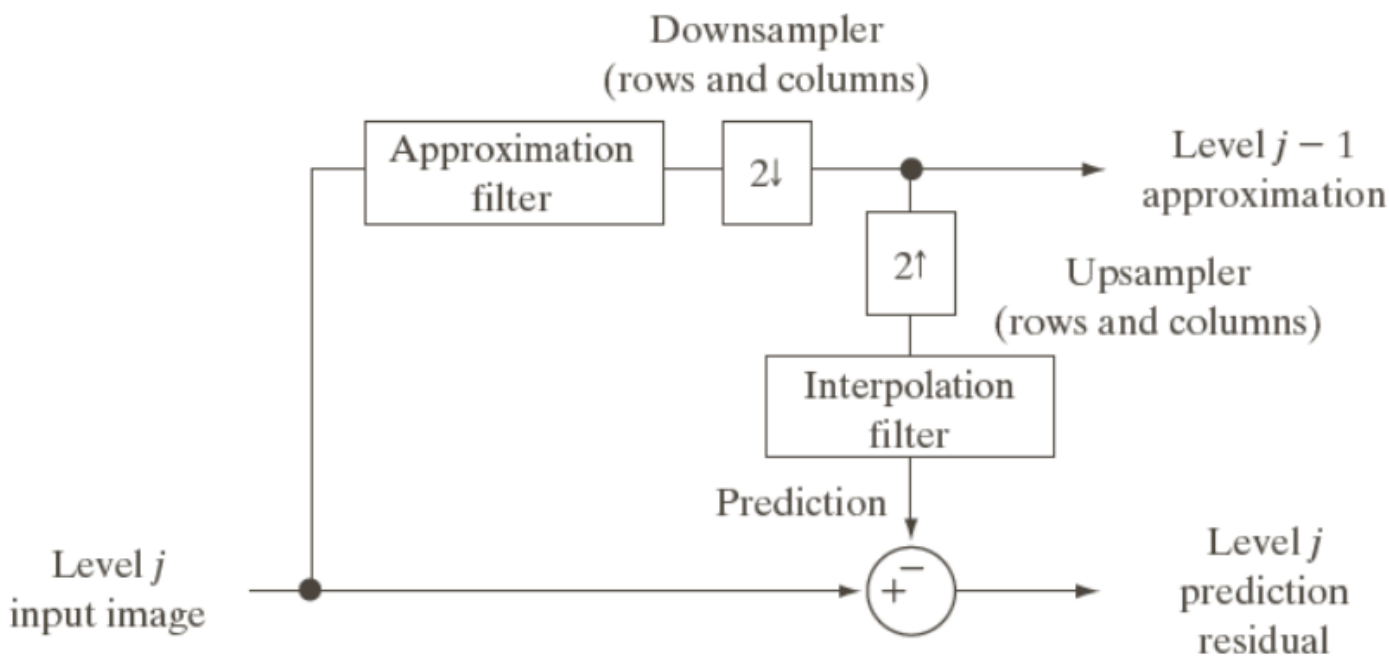
$$N^2 \left( 1 + \frac{1}{4^1} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^P} \right) \leq \frac{4}{3} N^2$$



# 图像金字塔

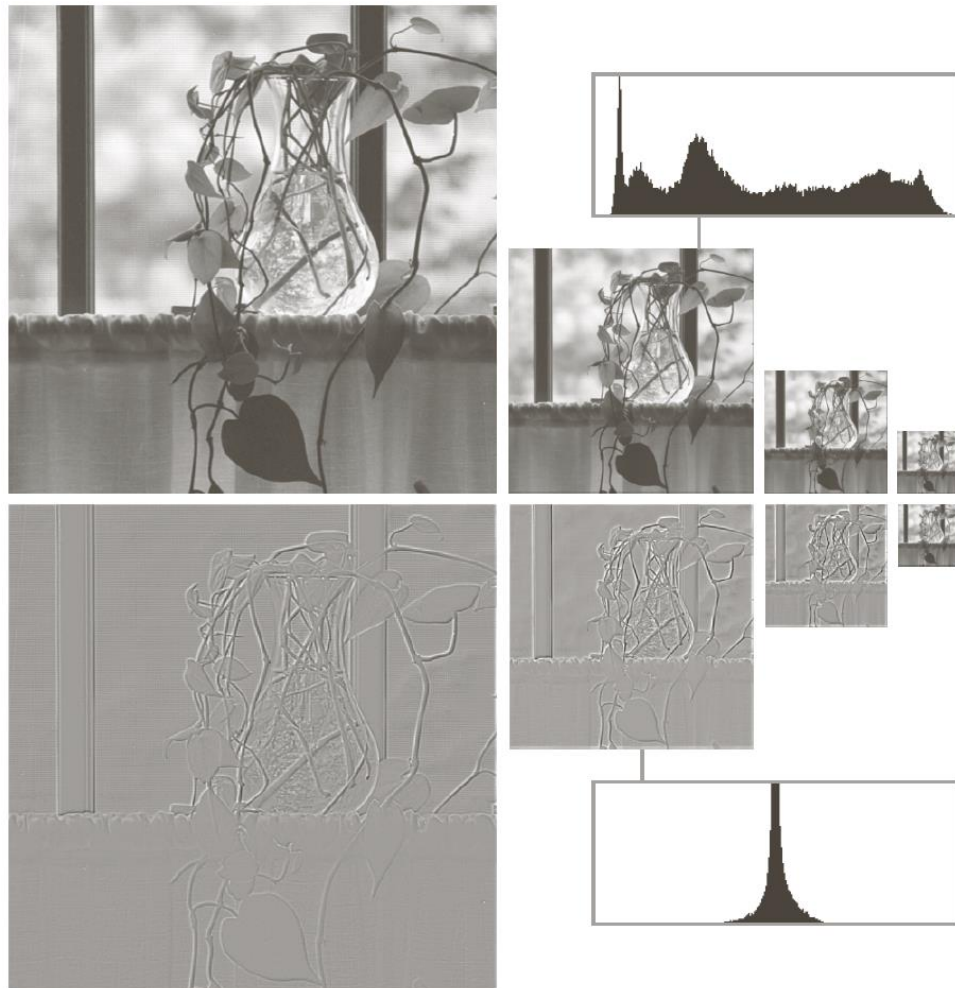
## □ 预测残差金字塔计算方式

- 步骤一：计算第 $j$ 级输入图像分辨率降低的近似
- 步骤二：由步骤一产生的分辨率降低的近似，创建第 $j$ 级输入图像的一个估计
- 步骤三：计算步骤二的预测图像和步骤一的输入之间的差



# 图像金字塔

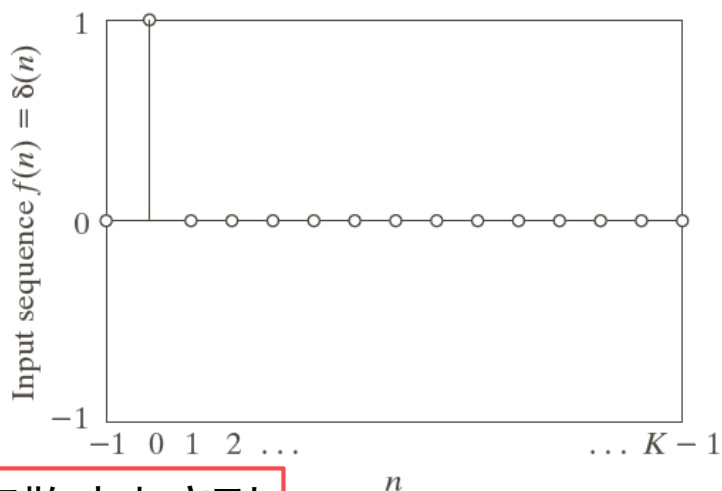
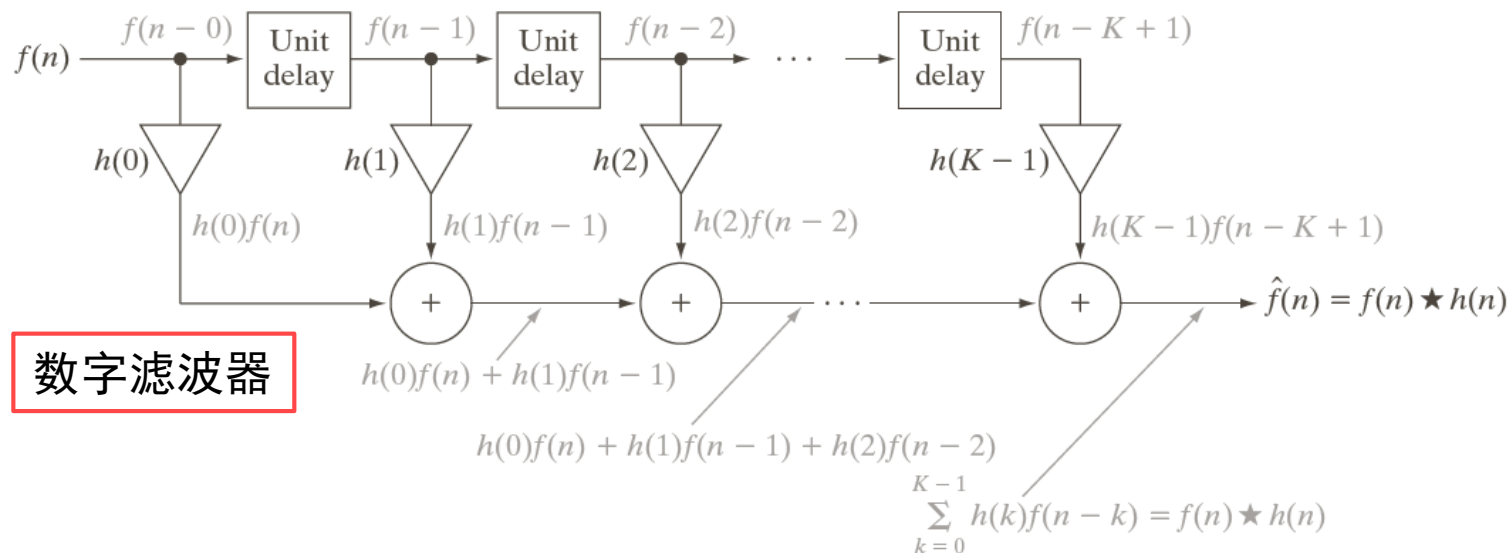
- 上图：近似金字塔，称为高斯金字塔，因为构建金字塔时使用了高斯滤波器。分辨率越低，伴随的细节越少
- 下图：预测残差金字塔，通常称为拉普拉斯金字塔



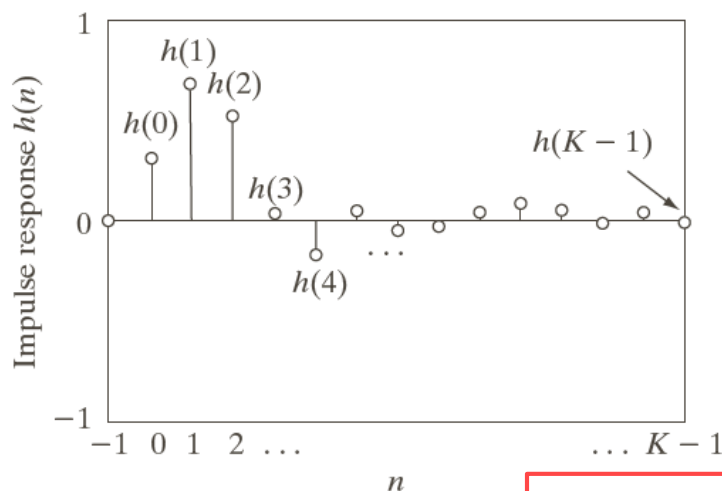
两种图像金字塔及它们的直方图



# 子带编码

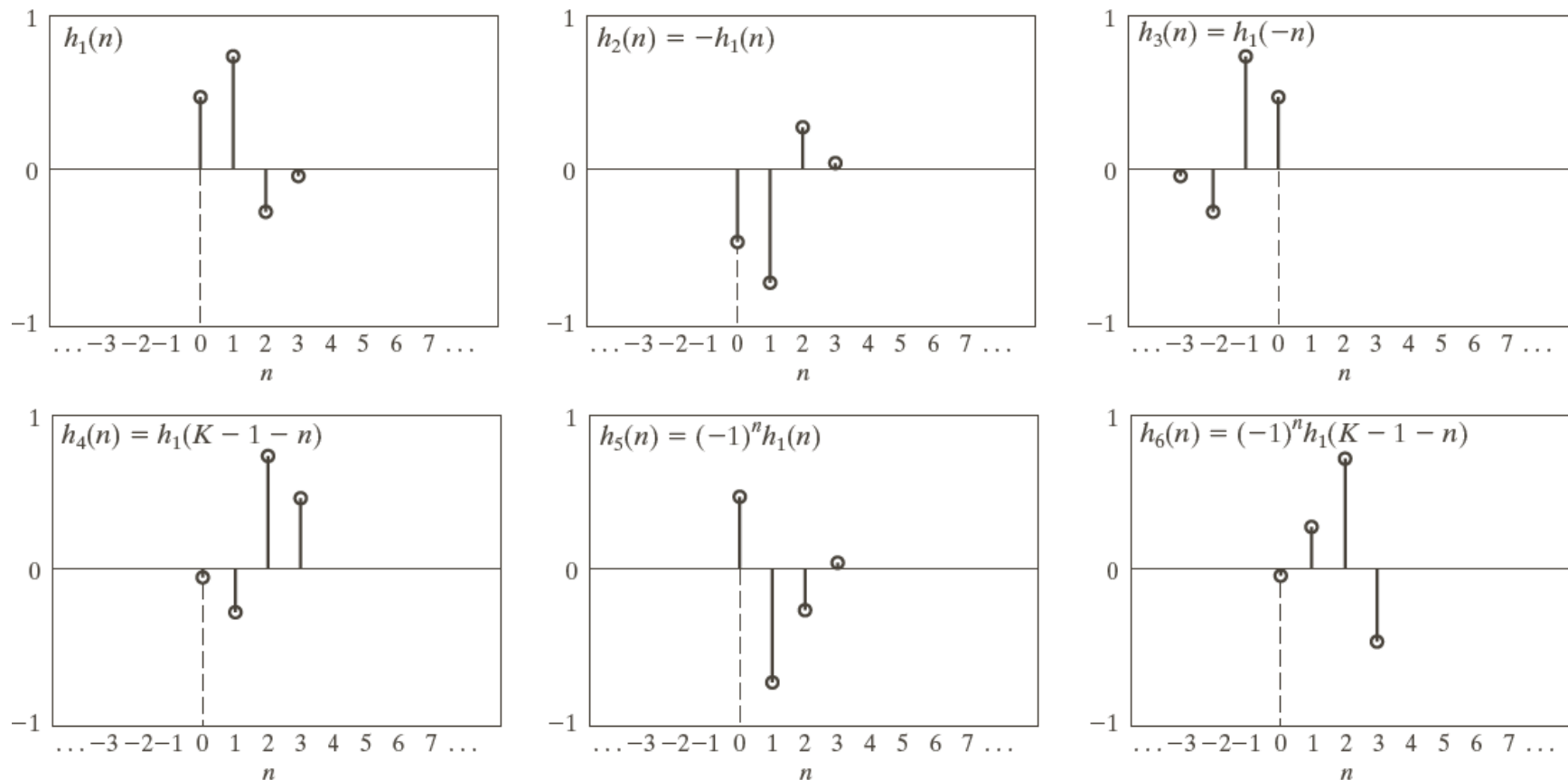


单元离散冲击序列



滤波器冲击响应

# 子带编码



6个功能相关的滤波器的冲击响应：

- (a) 参考响应 (b) 符号反转 (c, d) 顺序反转（与延迟有关）  
 (e) 调制 (e) 顺序反转和调制

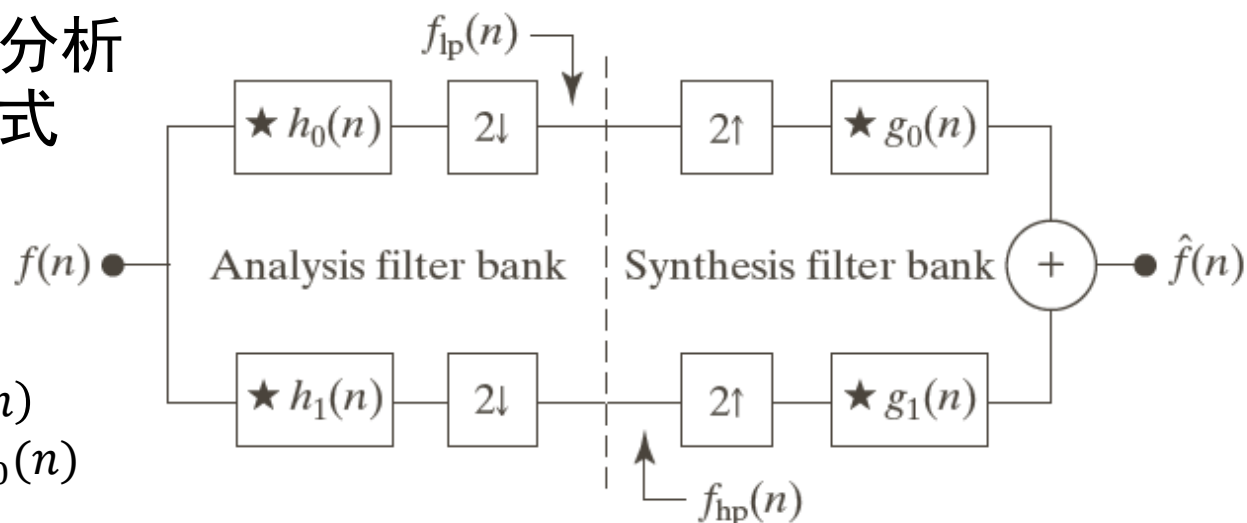
# 子带编码

## □ 综合滤波器和分析滤波器串联方式

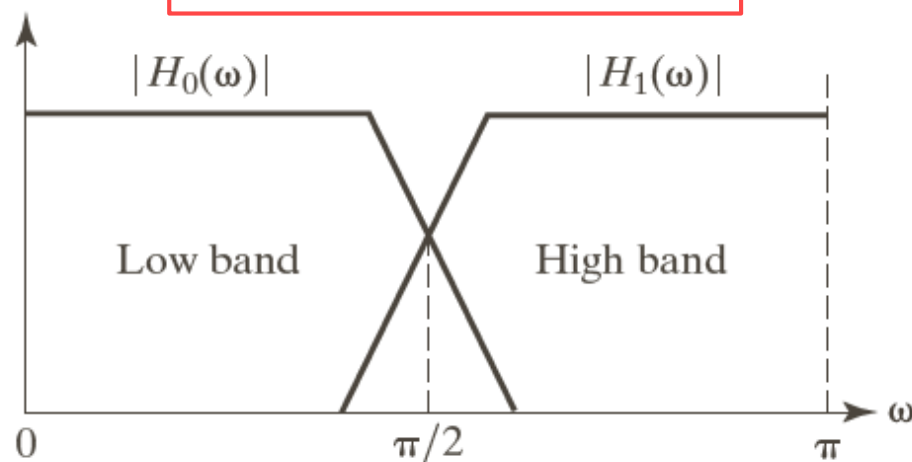
$$\begin{aligned} g_0(n) &= (-1)^n h_1(n) \\ g_1(n) &= (-1)^{n+1} h_0(n) \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} g_0(n) &= (-1)^{n+1} h_1(n) \\ g_1(n) &= (-1)^n h_0(n) \end{aligned}$$

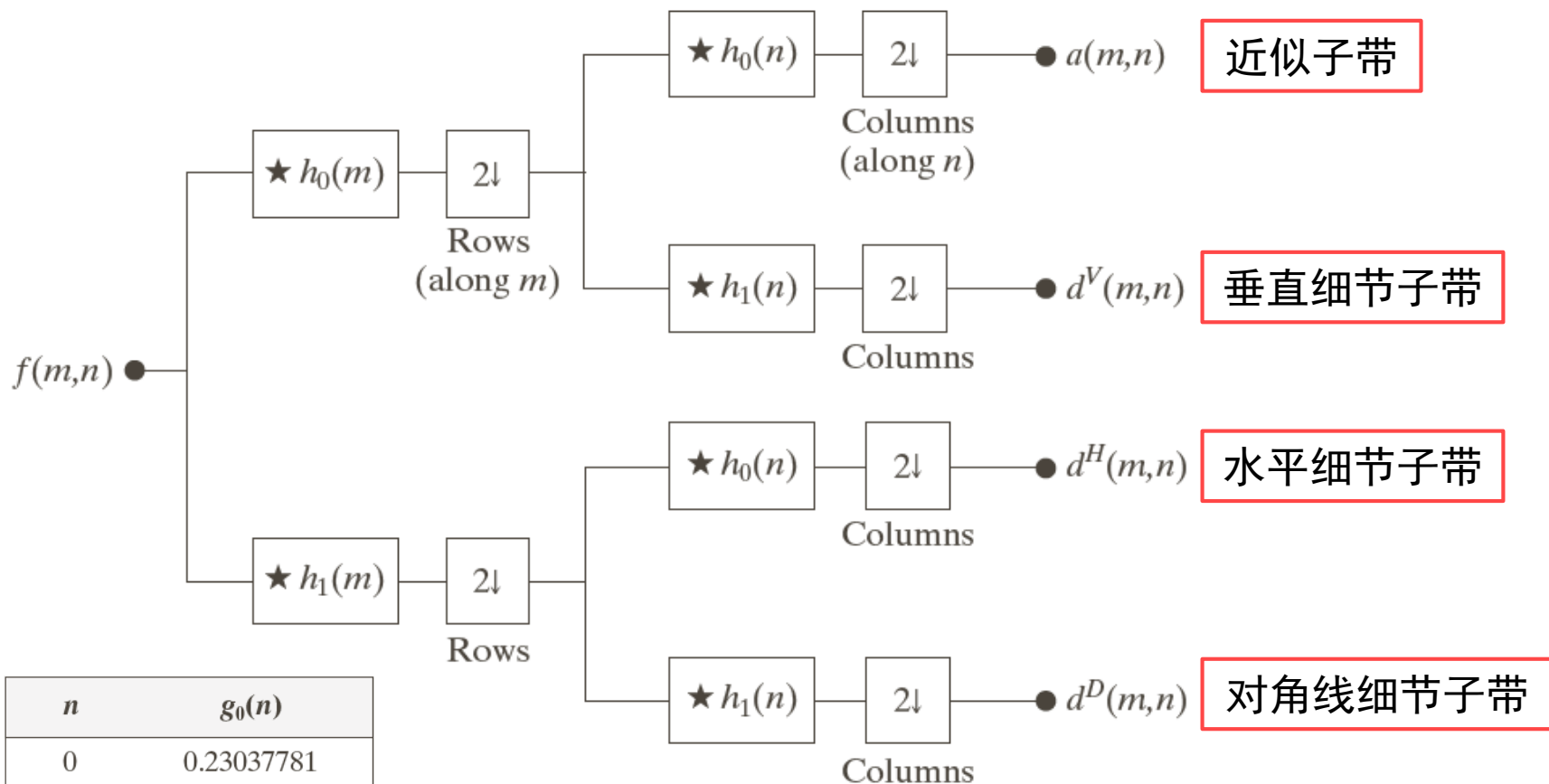


二带子带编码和解码系统



频谱可分性

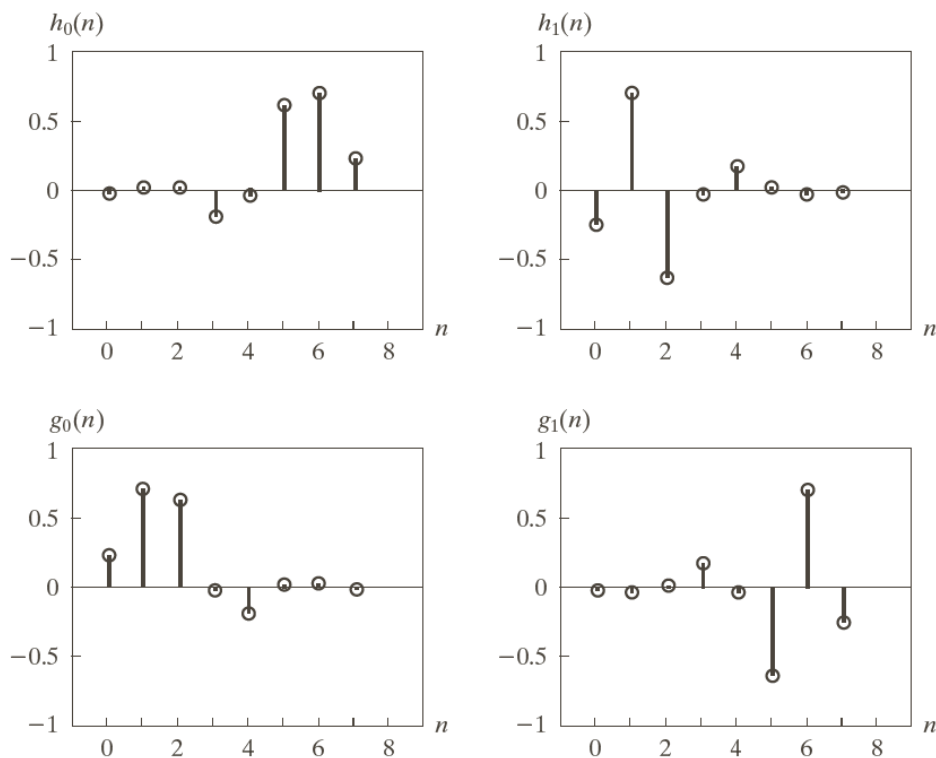
# 子带编码



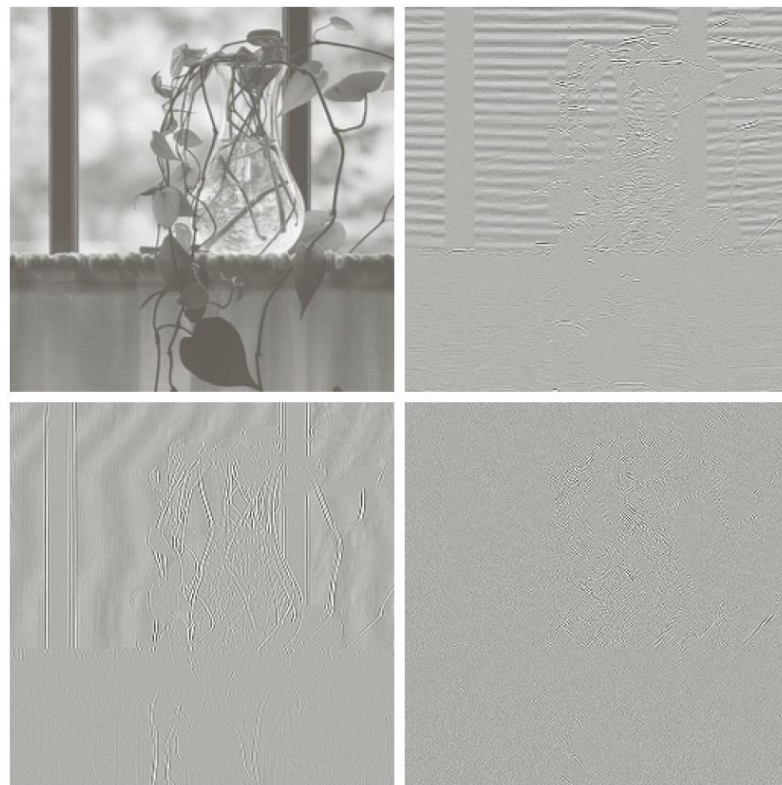
$n$	$g_0(n)$
0	0.23037781
1	0.71484657
2	0.63088076
3	-0.02798376
4	-0.18703481
5	0.03084138
6	0.03288301
7	-0.01059740

$g_0(n)$ 的Daubechies 8抽头  
归一化政教滤波器系数

# 子带编码



4个8抽头Daubechies归一化  
正交滤波器的冲击响应



子带分离结果，4个子带分别是：  
(a) 近似子带      (b) 水平细节子带  
(c) 垂直细节子带      (d) 对角线细节子带

# 哈尔变换

## □ 哈尔（Haar）变换的矩阵表示

$$\mathbf{T} = \mathbf{H}\mathbf{F}\mathbf{H}^T$$

$\mathbf{F}$ :  $N \times N$ 的哈尔变换矩阵,  $\mathbf{T}$ :  $N \times N$ 变换结果

## □ 哈尔基函数

$$h_0(z) = h_{00}(z) = \frac{1}{\sqrt{N}}, z \in [0,1]$$

$$h_k(z) = h_{pq}(z) = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{cases} z^{p/2}, (q-1)/2^p \leq z < (q-0.5)/2^p \\ -z^{p/2}, (q-0.5)/2^p \leq z < q/2^p \\ 0, \text{其他}, z \in [0,1] \end{cases}$$

## □ 哈尔矩阵

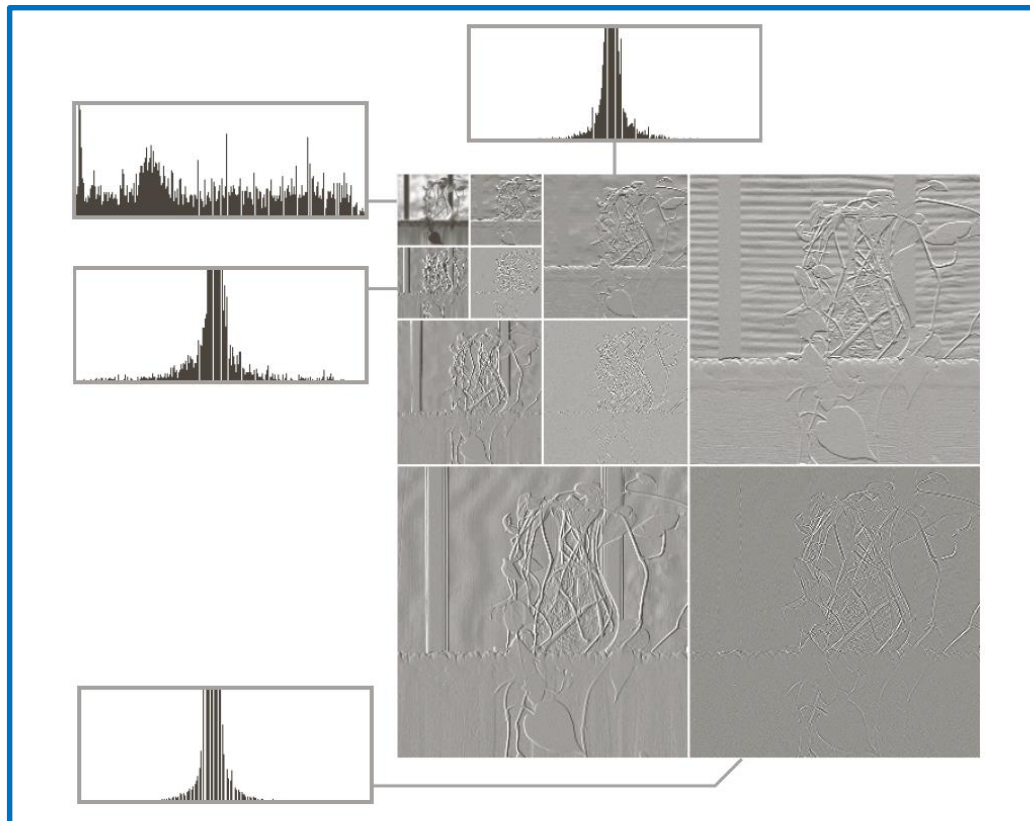
$$H_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$H_4 = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

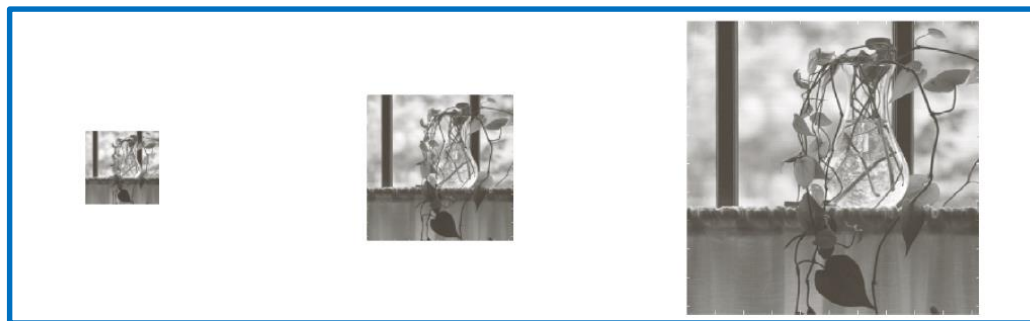
# 哈尔变换

$$H_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

用 $H_2$ 哈尔基函数的离散小波变换，并显示了其局部直方图的变化



由 $H_2$ 哈尔基函数的离散小波变换得到的集中不同近似  
( $64 \times 64$ ,  $128 \times 128$ ,  $256 \times 256$ )





# 第7章 小波和多分辨率处理

---

7.1 背景

7.2 多分辨率展开

7.3 一维小波变换

7.4 快速小波变换

7.5 二维小波变换

7.6 小波包





## 7.2 多分辨率展开

- 在多分辨率分析中，尺度函数被用于建立一个函数或一幅图像的一系列近似，每个近似与其最近邻近似在分辨率方面都用基2来区分
- 使用称为小波的附加函数来对相邻近似之间的差进行编码
- 基础概念
  - 级数展开
  - 尺度函数
  - 小波函数

# 级数展开

- 信号或函数  $f(x)$  通常能分解为一系列展开函数的线性组合

$$f(x) = \sum_k \alpha_k \varphi_k(x) \quad V = \overline{\text{Span}\{\varphi_k(x)\}}$$

$$\alpha_k = \langle \tilde{\varphi}_k(x), f(x) \rangle = \int \tilde{\varphi}_k^*(x) f(x) dx$$

- 依靠展开集合的正交性，该计算嘉定是三种形式之一

- 情况1：如果展开函数构成  $V$  的一个正交基，则

$$\alpha_k = \langle \varphi_k(x), f(x) \rangle$$

- 情况2：如果展开函数本身不正交，但却是  $V$  的一个正交基，则

$$\langle \varphi_j(x), \tilde{\varphi}_k(x) \rangle = \delta_{jk} = \begin{cases} 0, j \neq k \\ 1, j = k \end{cases}$$

- 情况3：如果展开集合不是  $V$  的一个基，但支持展开，则

$$A \| f(x) \|^2 \leq \sum_k |\langle \varphi_k(x), f(x) \rangle|^2 \leq B \| f(x) \|^2$$

# 尺度函数

- 考虑由整数评议和实数二值尺度、平方可积函数 $\varphi(x)$ 组成的展开函数集合，即 $\{\varphi_{j,k}(x)\}$ ，其中

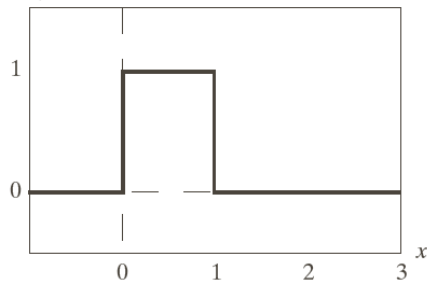
$$\varphi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j x - k)$$

$\varphi(x)$ 被称为尺度函数

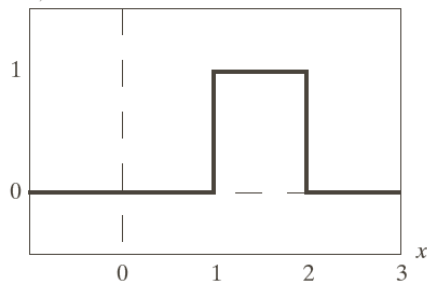
- 简单尺度函数满足多分辨率分析（MRA）4个基本要求
  - MRA要求1：尺度函数对其整数平移是正交的
  - MRA要求2：低尺度的尺度函数跨越的子空间，嵌套在高尺度跨越的尺度空间内
  - MRA要求3：唯一对所有的 $V_j$ 通用的函数是 $f(x) = 0$
  - MRA要求4：任何函数都可以按任意精度表示

# 尺度函数

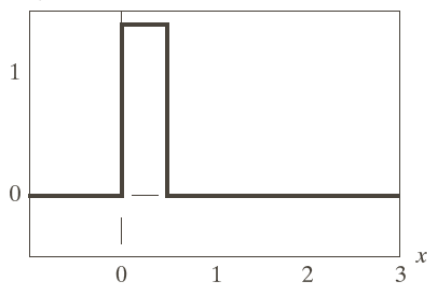
$$\varphi_{0,0}(x) = \varphi(x)$$



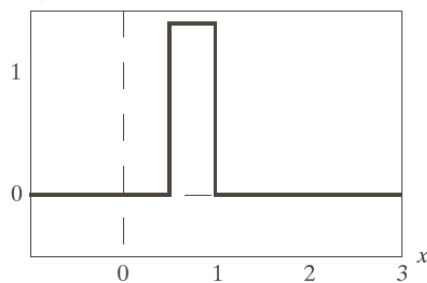
$$\varphi_{0,1}(x) = \varphi(x-1)$$



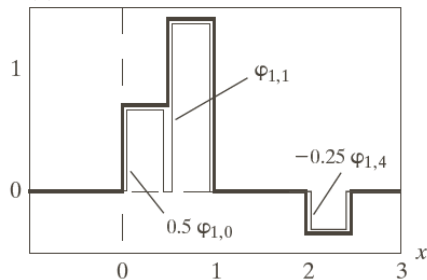
$$\varphi_{1,0}(x) = \sqrt{2} \varphi(2x)$$



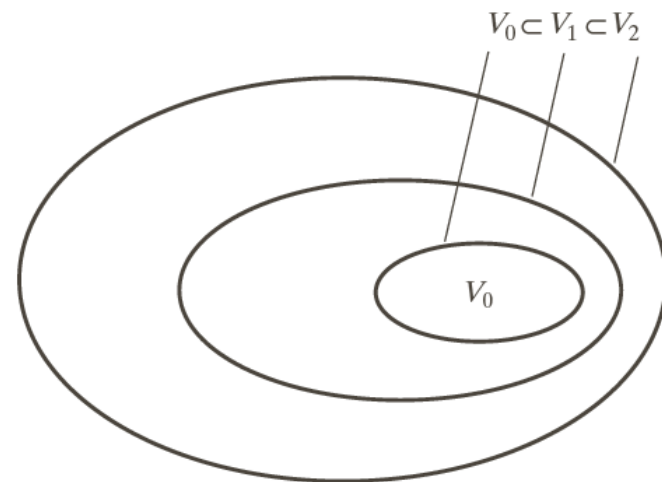
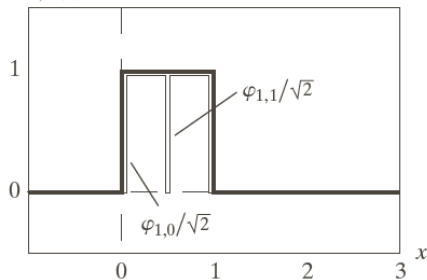
$$\varphi_{1,1}(x) = \sqrt{2} \varphi(2x-1)$$



$$f(x) \in V_1$$



$$\varphi_{0,0}(x) \in V_1$$



尺度函数跨越的  
嵌套函数空间

一些哈尔尺度函数

# 小波函数

□ 定义小波集合  $\{\psi_{j,k}(x)\}$

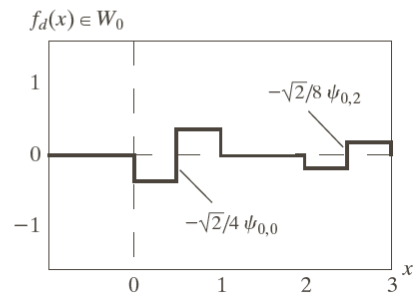
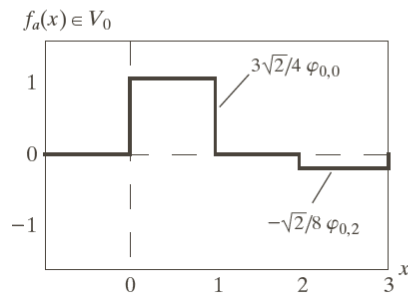
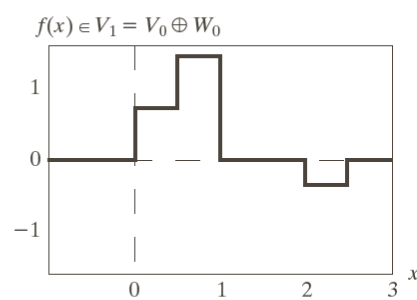
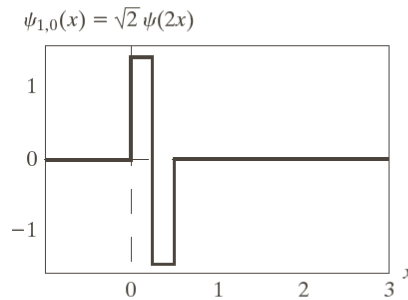
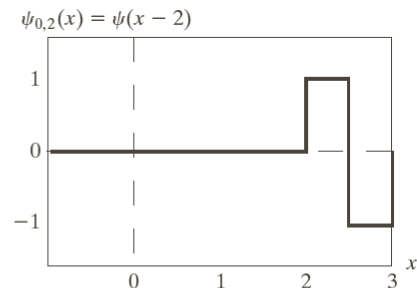
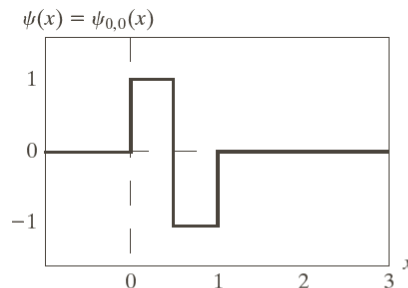
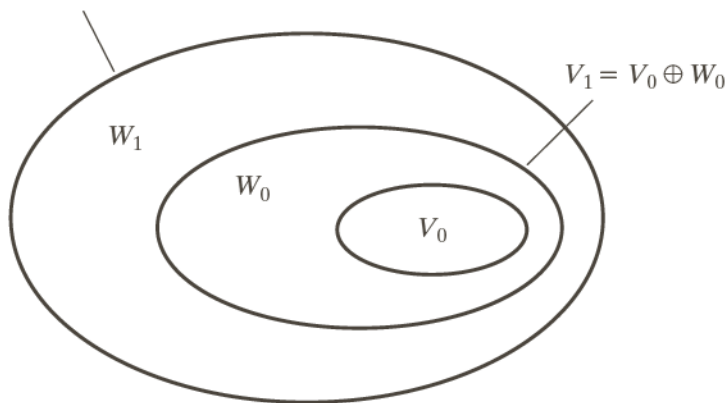
$$\psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - k)$$

$$f(x) = \sum_k \alpha_k \psi_{j,k}(x)$$

$$W_j = \overline{\text{Span}\{\psi_{j,k}(x)\}}$$

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j$$

$$V_2 = V_1 \oplus W_1 = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1$$



$W_0$  和  $W_1$  中的哈尔小波函数

尺度函数与小波函数空间之间的关系



# 第7章 小波和多分辨率处理

---

7.1 背景

7.2 多分辨率展开

7.3 一维小波变换

7.4 快速小波变换

7.5 二维小波变换

7.6 小波包

## 7.3 一维小波变换

### □ 三个紧密相关的小波变换

- 一般的小波级数展开  $\longleftrightarrow$  傅里叶级数展开
- 离散小波变换  $\longleftrightarrow$  离散傅里叶变换
- 连续小波变换  $\longleftrightarrow$  积分傅里叶变换

### □ 小波级数展开

$$f(x) = \sum_k c_{j_0}(k) \varphi_{j_0,k}(x) + \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_k d_j(k) \psi_{j,k}(x)$$

$$c_{j_0}(k) = \langle f(x), \varphi_{j_0,k}(x) \rangle = \int f(x) \varphi_{j_0,k}(x) dx$$

$$d_j(k) = \langle f(x), \psi_{j,k}(x) \rangle = \int f(x) \psi_{j,k}(x) dx$$

# 小波级数展开

$$y = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

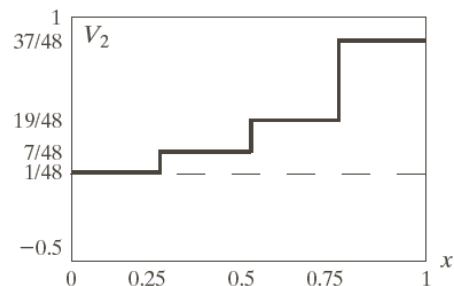
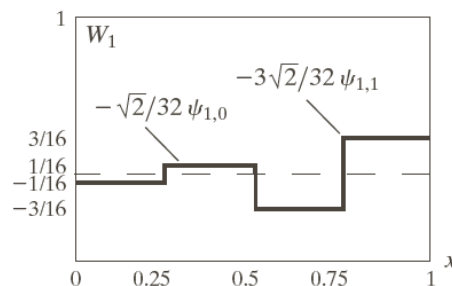
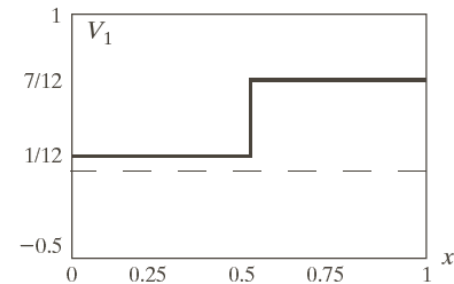
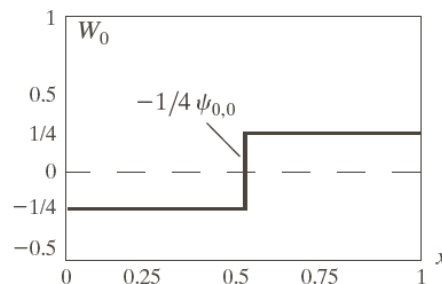
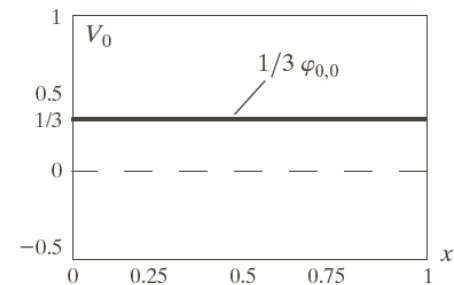
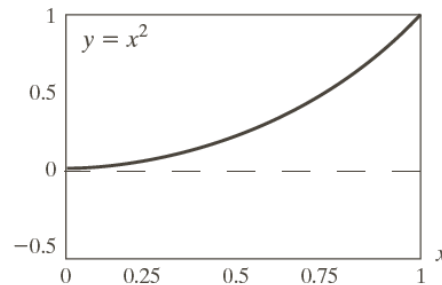
$$c_0(0) = \int_0^1 x^2 \varphi_{0,0}(x) dx$$

$$= \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

$$d_0(0) = \int_0^1 x^2 \psi_{0,0}(x) dx$$

$$= \int_0^{0.5} x^2 dx - \int_{0.5}^1 x^2 dx = -\frac{1}{4}$$

... ..



使用哈尔小波  $y = x^2$  的小波级数展开



# 离散小波变换

- 如果待展开的函数是离散的（即数字序列），得到的系数就称之为离散小波变换（DWT）
- 正向DTW系数

$$W_{\varphi}(j_0, k) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_n f(n) \varphi_{j_0, k}(n)$$

$$W_{\psi}(j, k) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_n f(n) \psi_{j, k}(n), j \geq j_0$$

- 反向DWT系数

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_k W_{\varphi}(j_0, k) \varphi_{j_0, k}(n) + \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_k W_{\psi}(j, k) \psi_{j, k}(n)$$

# 连续小波变换

- 连续小波变换 (CWT) 将一个连续函数变换为两个变量 (平移和尺度) 的高冗余度函数
- 连续平方可积函数  $f(x)$  的连续小波变换与实数值小波  $\psi(x)$  的关系定义为

$$W_{\psi}(s, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi_{s,\tau}(x) dx$$

$$\psi_{s,\tau}(x) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{x - \tau}{s}\right)$$

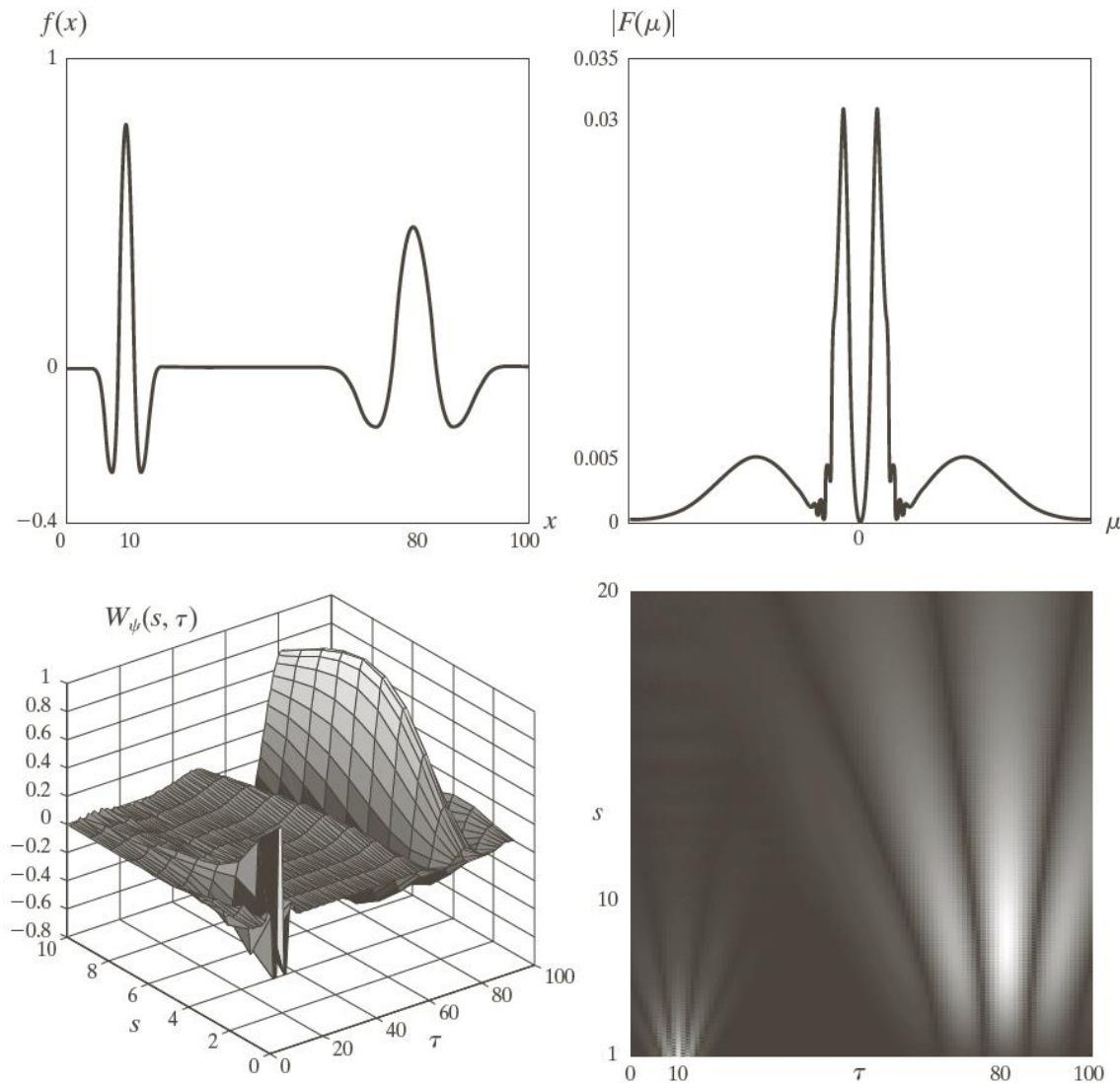
$s$ : 尺度参数  
 $\tau$ : 平移参数

- 给定  $W_{\psi}(s, \tau)$ , 连续小波反变换为

$$f(x) = \frac{1}{C_{\psi}} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\psi}(s, \tau) \frac{\psi_{s,\tau}(x)}{s^2} d\tau ds$$

$$C_{\psi} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\psi(\mu)|^2}{|\mu|} d\mu$$

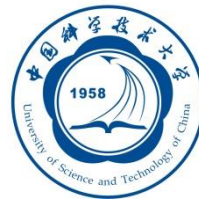
# 连续小波变换



a b  
c d

**FIGURE 7.16**  
The continuous wavelet transform (c and d) and Fourier spectrum (b) of a continuous 1-D function (a).

连续小波变换[(c)和(d)]和连续一维函数(a)的傅里叶谱(b)



# 第7章 小波和多分辨率处理

---

7.1 背景

7.2 多分辨率展开

7.3 一维小波变换

7.4 快速小波变换

7.5 二维小波变换

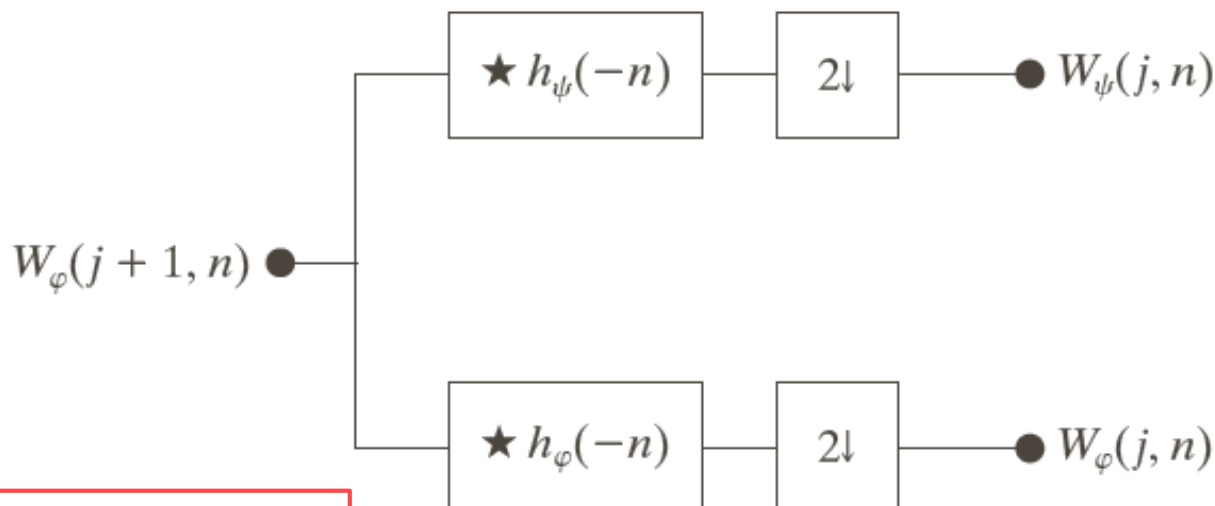
7.6 小波包

# 7.4 快速小波变换

- 快速小波变换（FWT）是实现离散小波变换（DWT）的高效计算，也称Mallat人字形算法

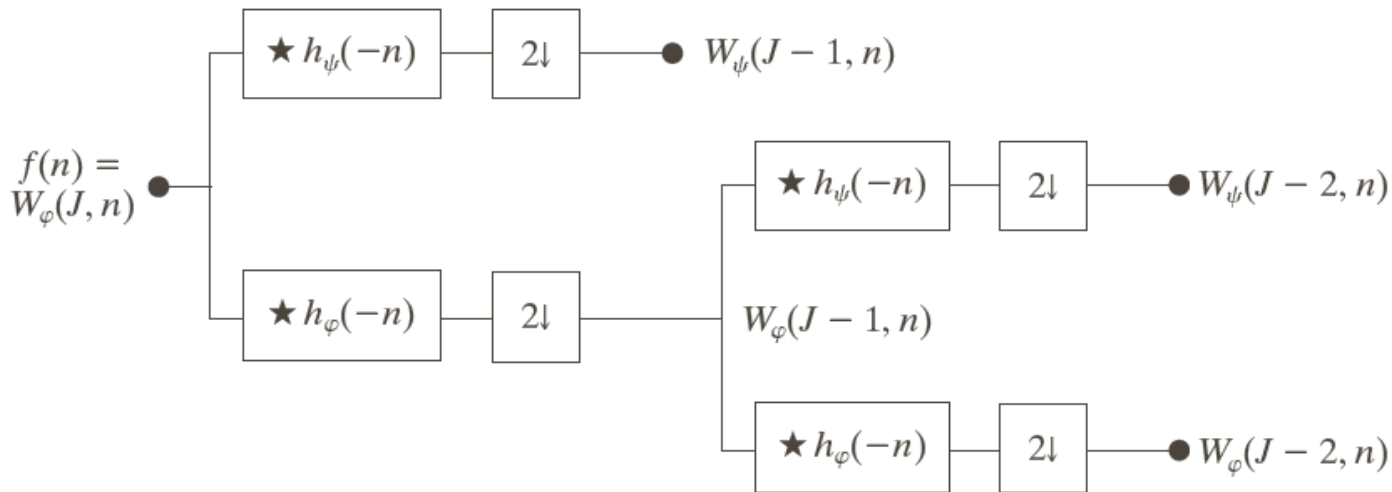
$$W_{\psi}(j, k) = h_{\psi}(-n) \star W_{\varphi}(j + 1, n) \Big|_{n=2k, k \geq 0}$$

$$W_{\varphi}(j, k) = h_{\varphi}(-n) \star W_{\varphi}(j + 1, n) \Big|_{n=2k, k \geq 0}$$



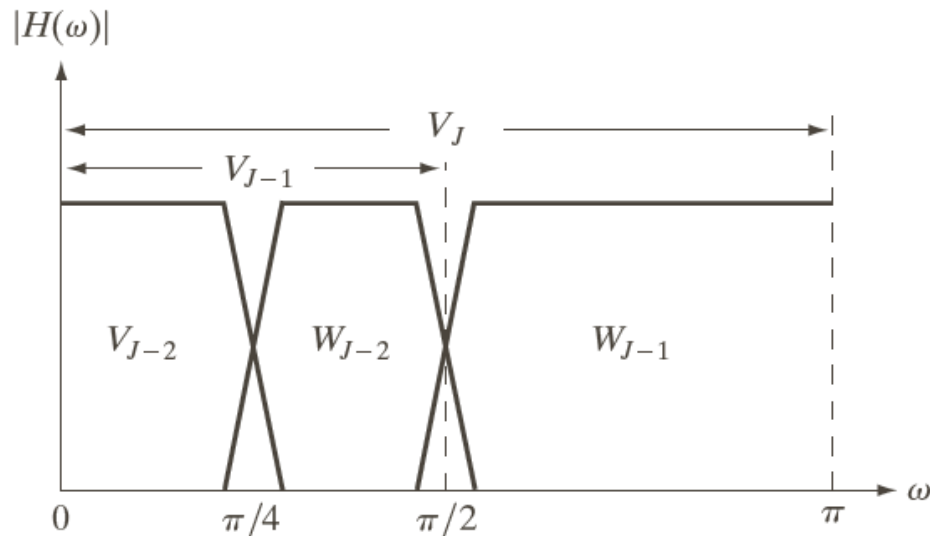
一个FWT分析滤波器组

# 7.4 快速小波变换



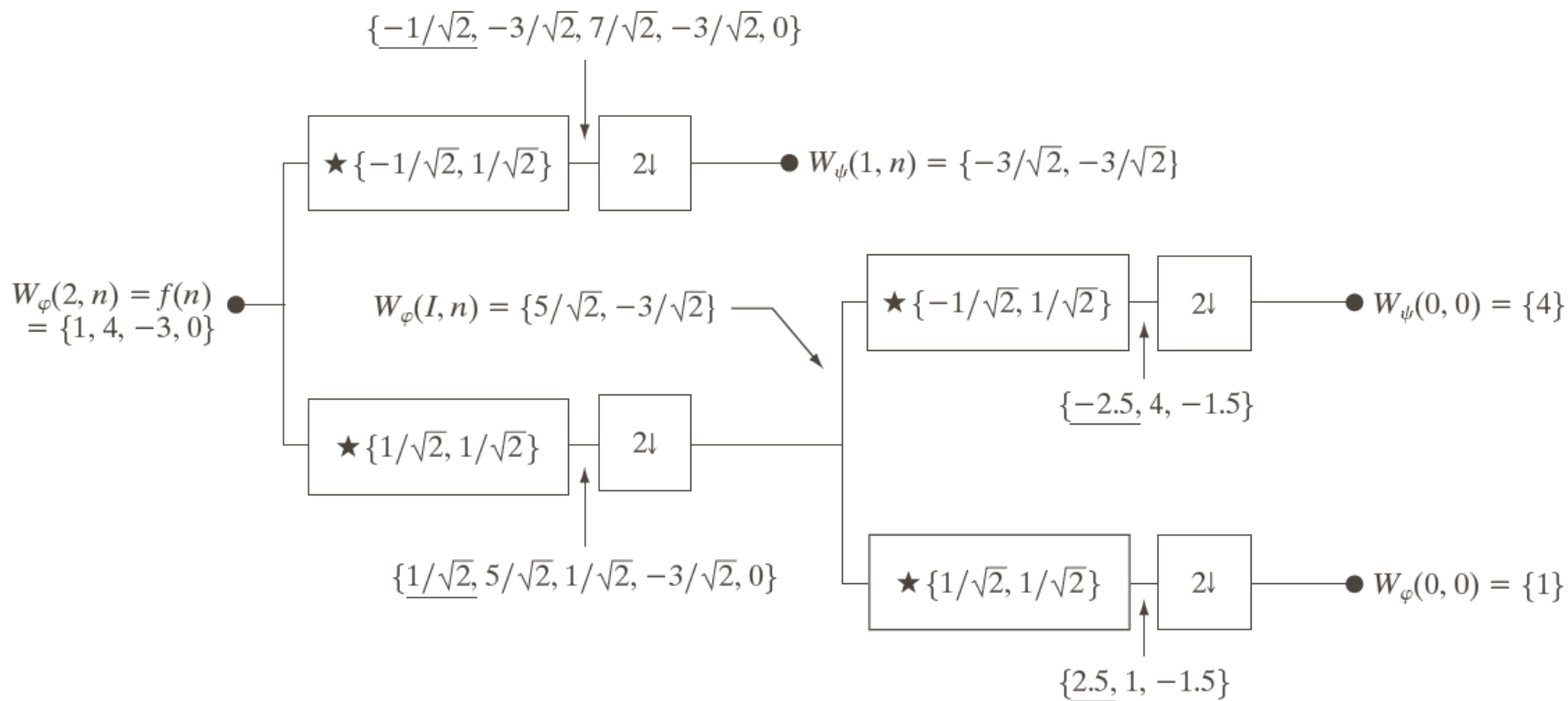
a  
b

**FIGURE 7.18**  
(a) A two-stage or two-scale FWT analysis bank and (b) its frequency splitting characteristics.



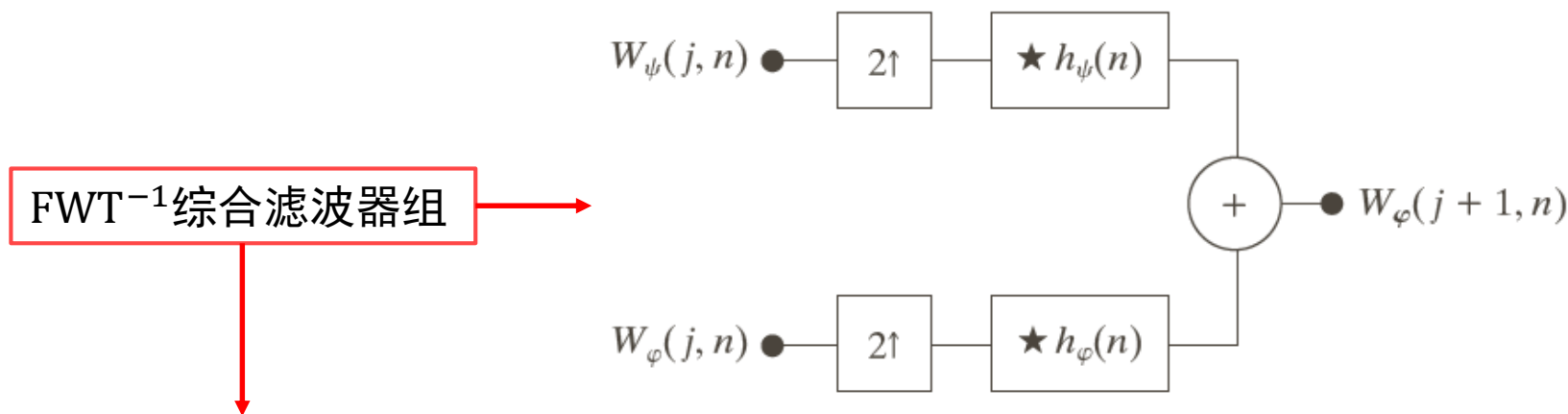
(a) 一个二级或二尺度  
FWT分析滤波器组  
(b) 其频谱分离特性

# 7.4 快速小波变换

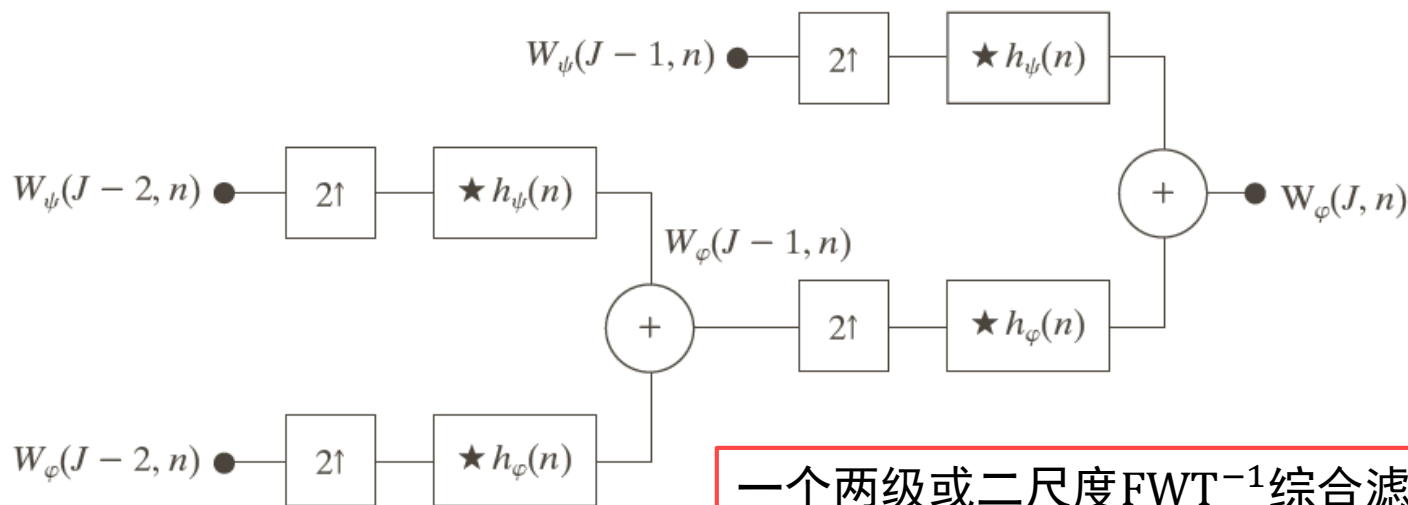


使用哈尔尺度和小波向量计算序列  $\{1, 4, -3, 0\}$  的一个二尺度快速小波变换

# 7.4 快速小波变换



$$W_\phi(j+1, k) = h_\phi(k) \star W_\phi^{2\uparrow}(j, k) + h_\psi(k) \star W_\psi^{2\uparrow}(j, k) \Big|_{k \geq 0}$$

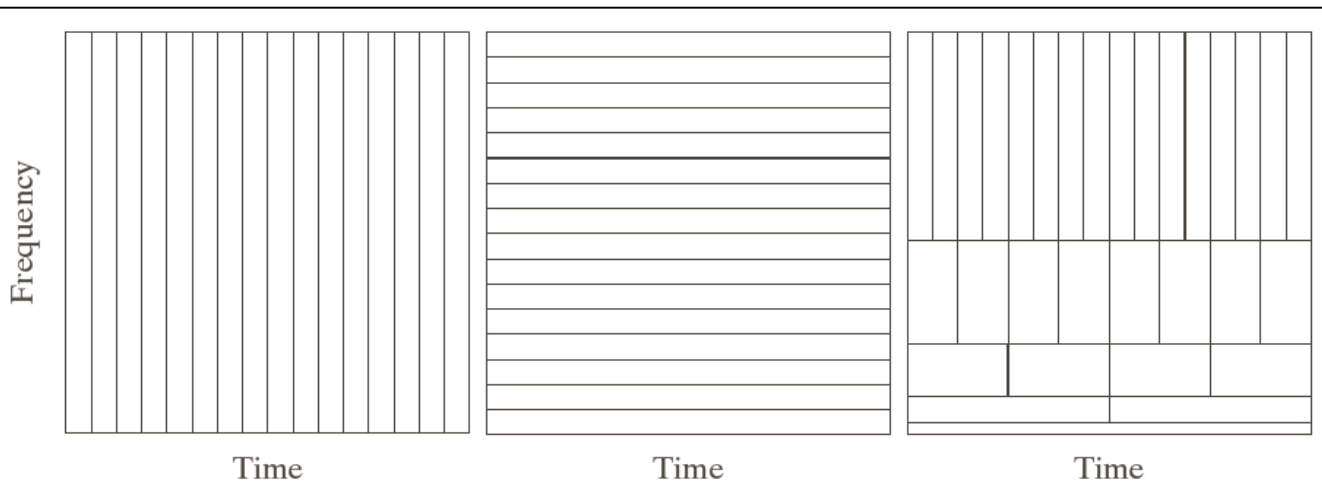
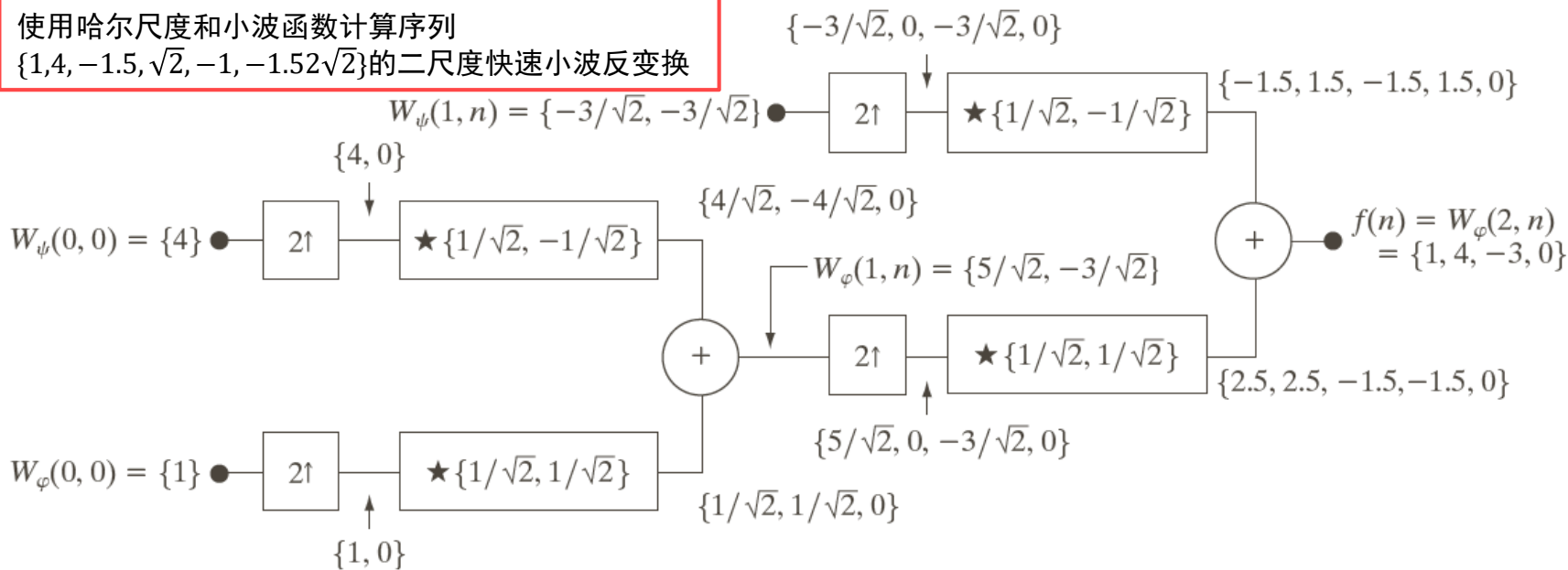


一个两级或二尺度FWT<sup>-1</sup>综合滤波器组



# 7.4 快速小波变换

使用哈尔尺度和小波函数计算序列  
 $\{1, 4, -1.5, \sqrt{2}, -1, -1.52\sqrt{2}\}$ 的二尺度快速小波反变换



与(a)取样数据, (b)FFT和(c)FWT相关的基函数的时间-频率片。  
 注意, 图(c)中中高矩阵的水平条带表示FWT的尺度



# 第7章 小波和多分辨率处理

---

7.1 背景

7.2 多分辨率展开

7.3 一维小波变换

7.4 快速小波变换

7.5 二维小波变换

7.6 小波包

## 7.5 二维小波变换

- 在二维情况下，需要1个二维尺度函数 $\varphi(x, y)$ 和3个二维小波 $\psi^H(x, y)$ ,  $\psi^V(x, y)$ 和 $\psi^D(x, y)$ 。每个二维小波都是两个一维函数的乘积

可分离尺度函数

$$\varphi(x, y) = \varphi(x)\varphi(y)$$

列方向变化（水平边缘）

$$\psi^H(x, y) = \psi(x)\varphi(y)$$

行方向变化（垂直边缘）

$$\psi^V(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$$

对角线方向变化

$$\psi^D(x, y) = \psi(x)\psi(y)$$

## 7.5 二维小波变换

- 大小为  $M \times N$  的图像  $f(x, y)$  的离散小波变换是

$$W_\varphi(j_0, m, n) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \varphi_{j_0, m, n}(x, y)$$

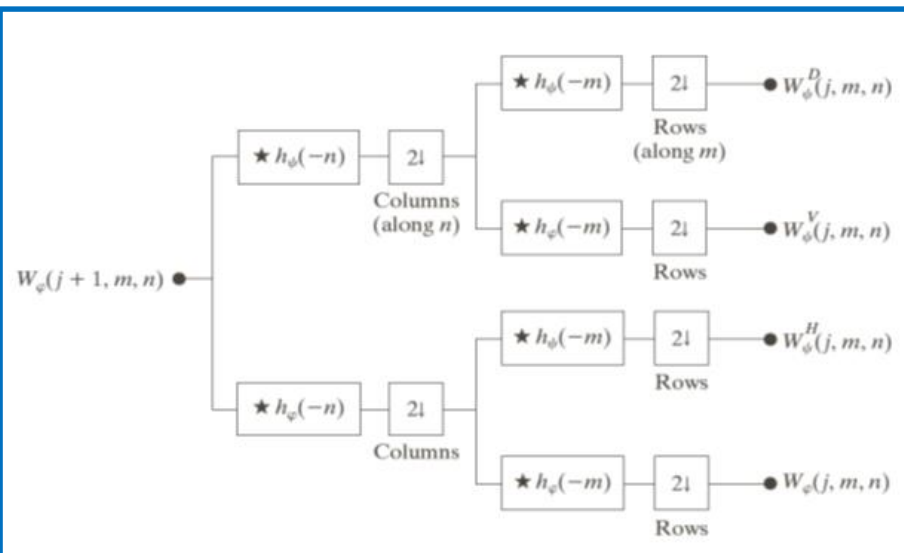
$$W_\psi^i(j, m, n) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \psi_{j, m, n}^i(x, y), i = \{H, V, D\}$$

- $f(x, y)$  离散小波反变换

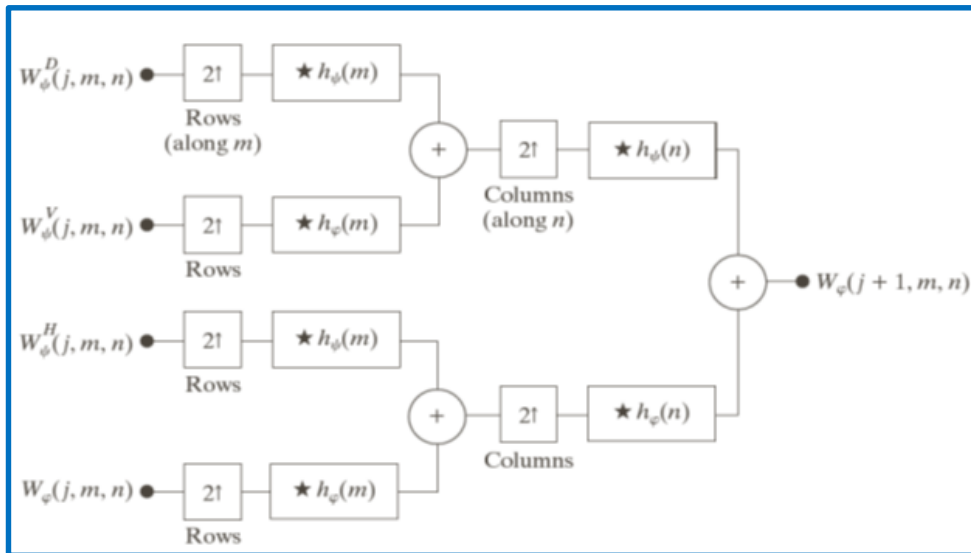
$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_m \sum_n W_\psi(j_0, m, n) \varphi_{j_0, m, n}(x, y) \\ &+ \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{i=H, V, D} \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_m \sum_n W_\psi^i(j, m, n) \psi_{j, m, n}^i(x, y) \end{aligned}$$

# 7.6 二维小波变换

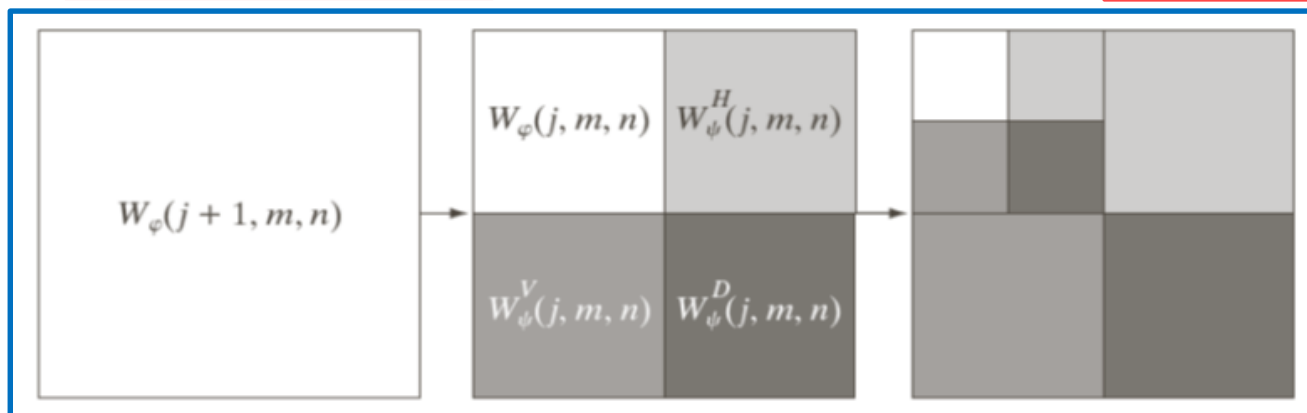
## 二维快速小波变换



分析滤波器组

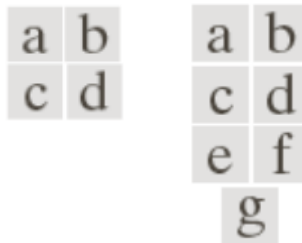
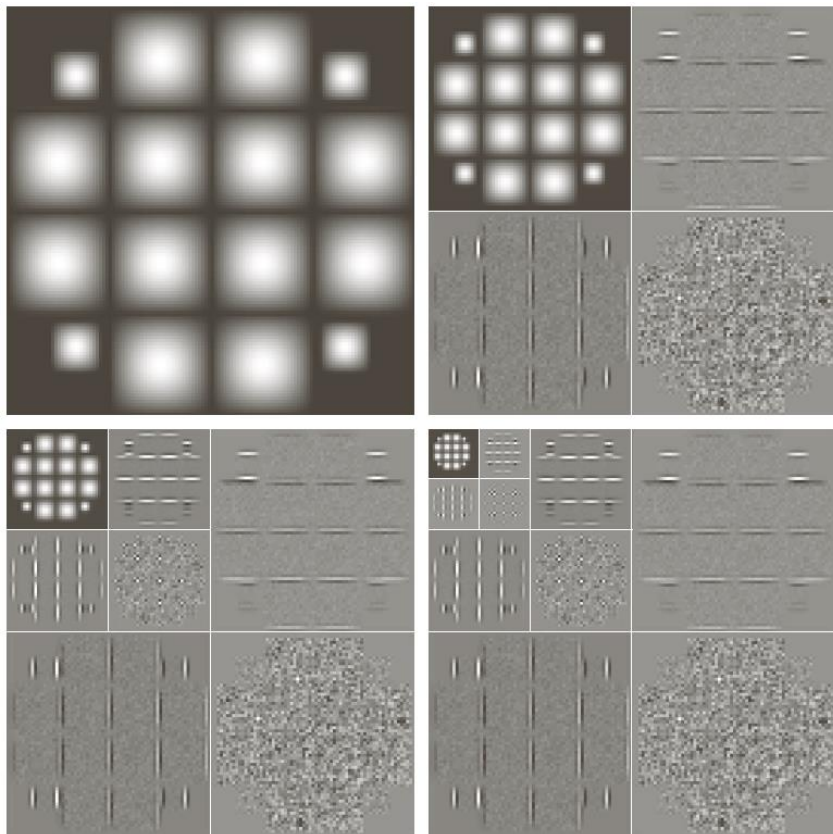


综合滤波器组

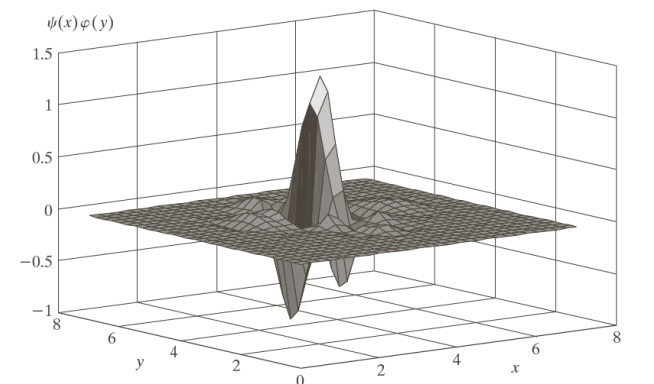
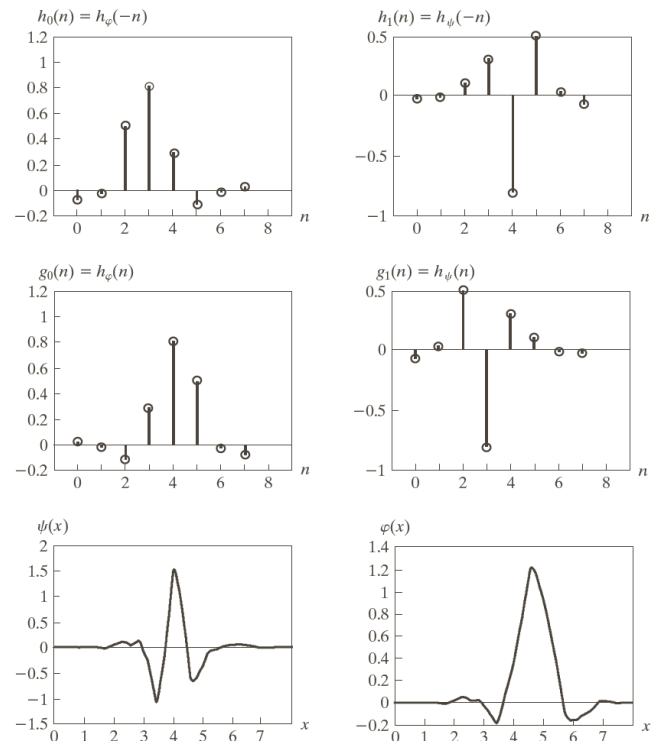


分解结果

# 7.6 二维小波变换

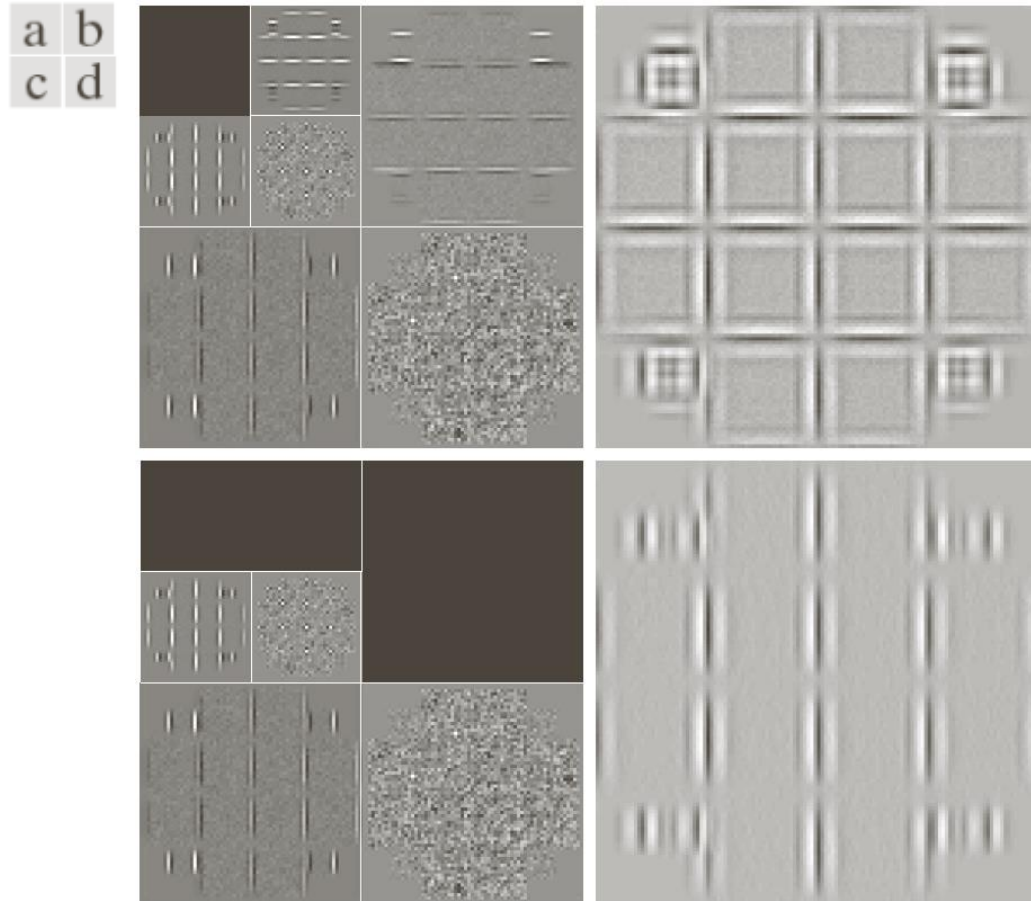


四阶对称小波：  
(a)~(b) 重建滤波器；  
(e) 一维小波；  
(f) 一维尺度函数；  
(g) 三个二维小波之一



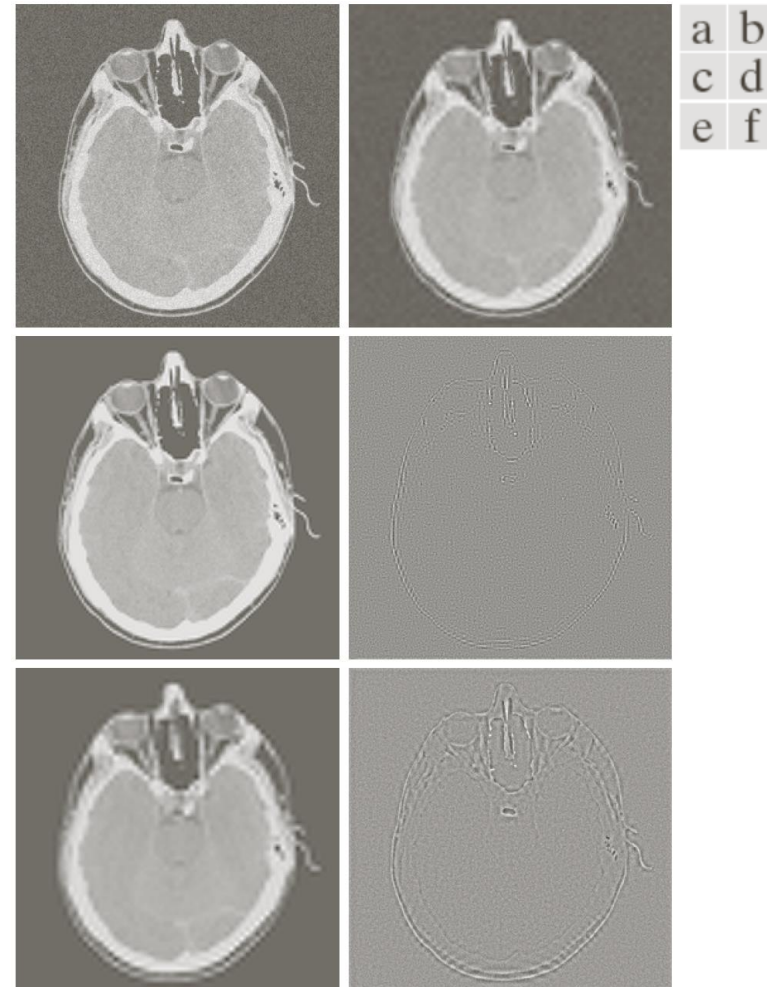
计算二维三尺度FWT  
(a) 原图像；(b) 一尺度FWT；  
(c) 二尺度FWT；(d) 三尺度FWT

# 7.6 二维小波变换



针对边缘检测改进的DWT

(a) ~ (c) 删除所选系数的二尺度分解  
(b) ~ (d) 相应的重建



为噪声去除修改DWT: (a) 人的头部噪声CT图像;  
(b), (c)和(e)对细节系数进行阈值处理后的各种重建;  
(d)和(f)在(c)和(e)重建过程中所删除的信息



# 第7章 小波和多分辨率处理

---

7.1 背景

7.2 多分辨率展开

7.3 一维小波变换

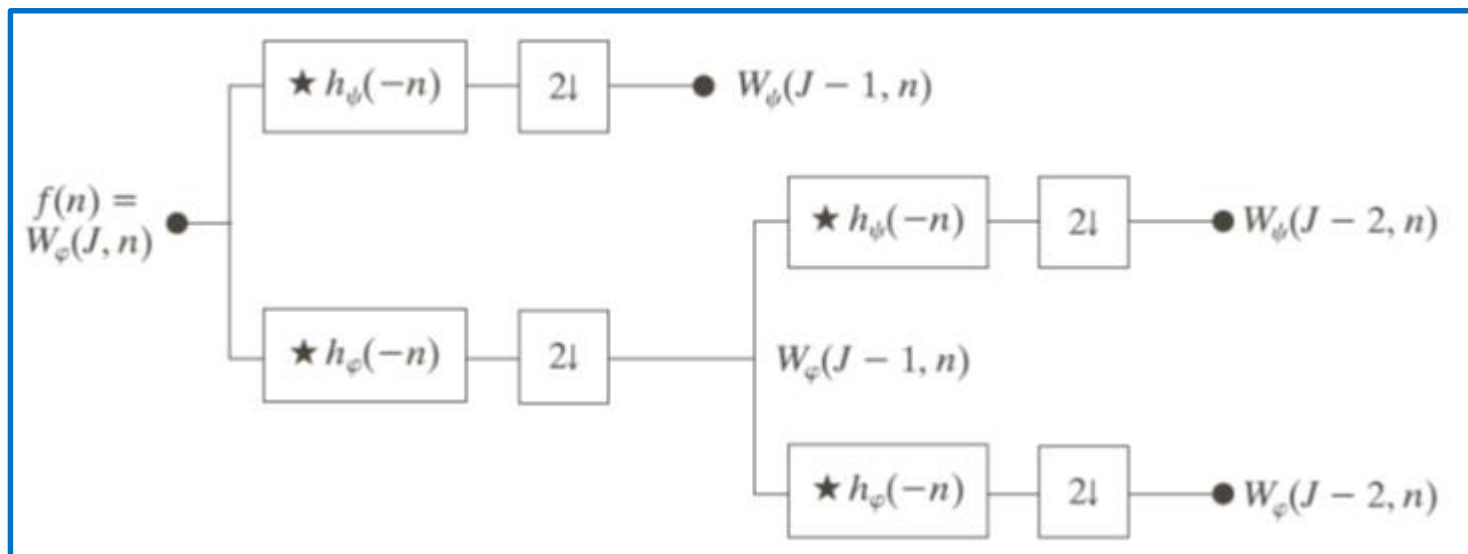
7.4 快速小波变换

7.5 二维小波变换

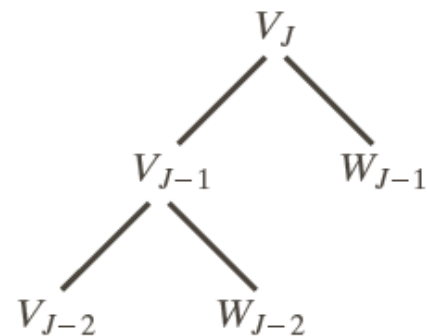
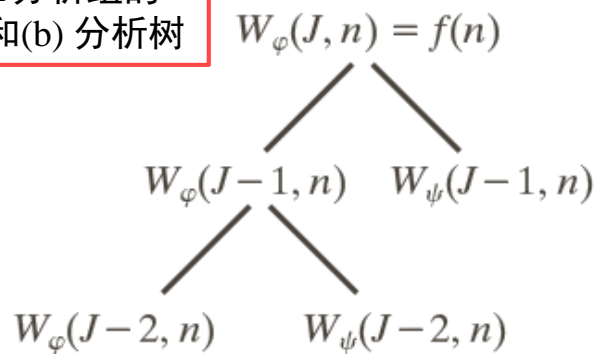
7.6 小波包



# 7.6 小波包

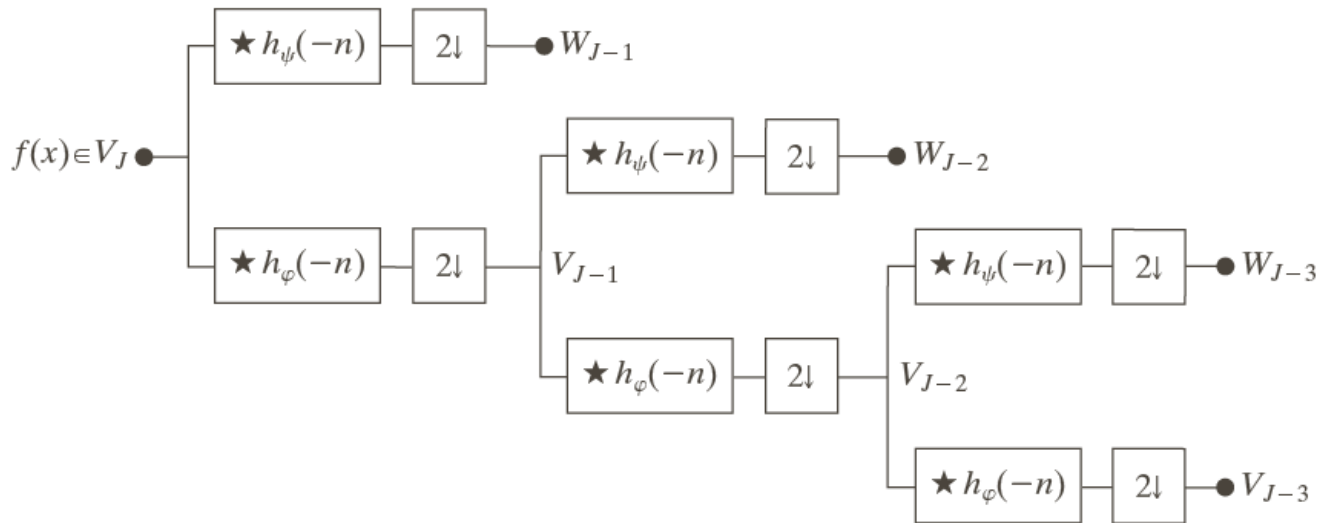


二尺度FWT分析组的  
(a) 系数树和(b) 分析树



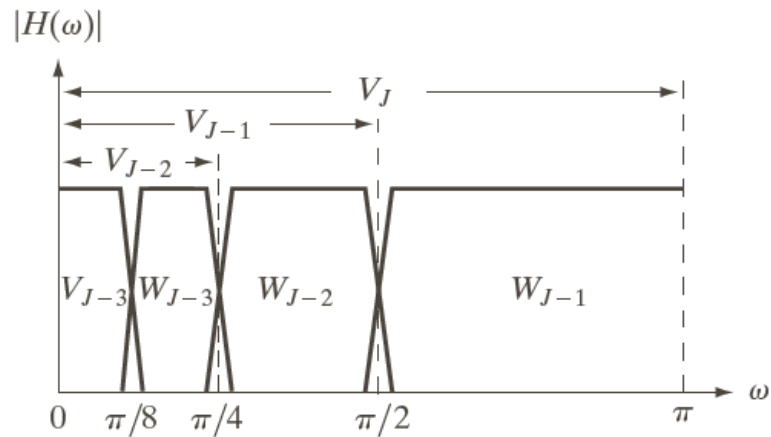
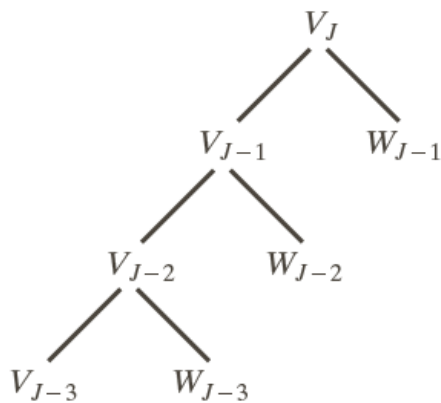
a b

# 7.6 小波包



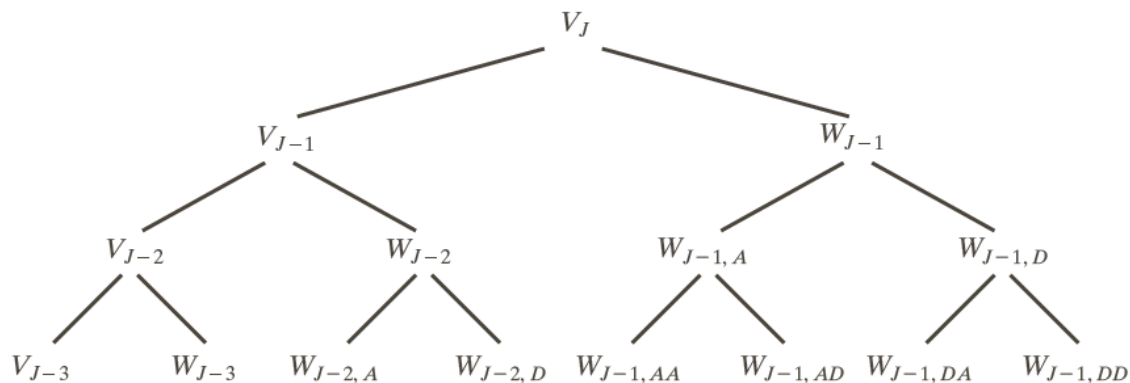
a  
b c

**FIGURE 7.30**  
A three-scale  
FWT filter bank:  
(a) block diagram;  
(b) decomposition  
space tree; and  
(c) spectrum  
splitting  
characteristics.



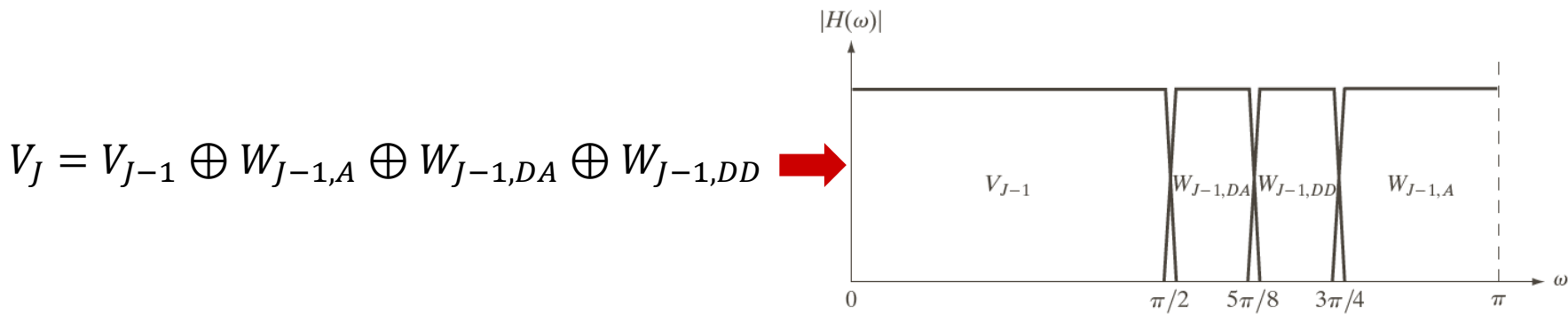
三尺度FWT分析组：  
(a) 方框图  
(b) 分解空间树  
(c) 频谱分离特性

# 7.6 小波包

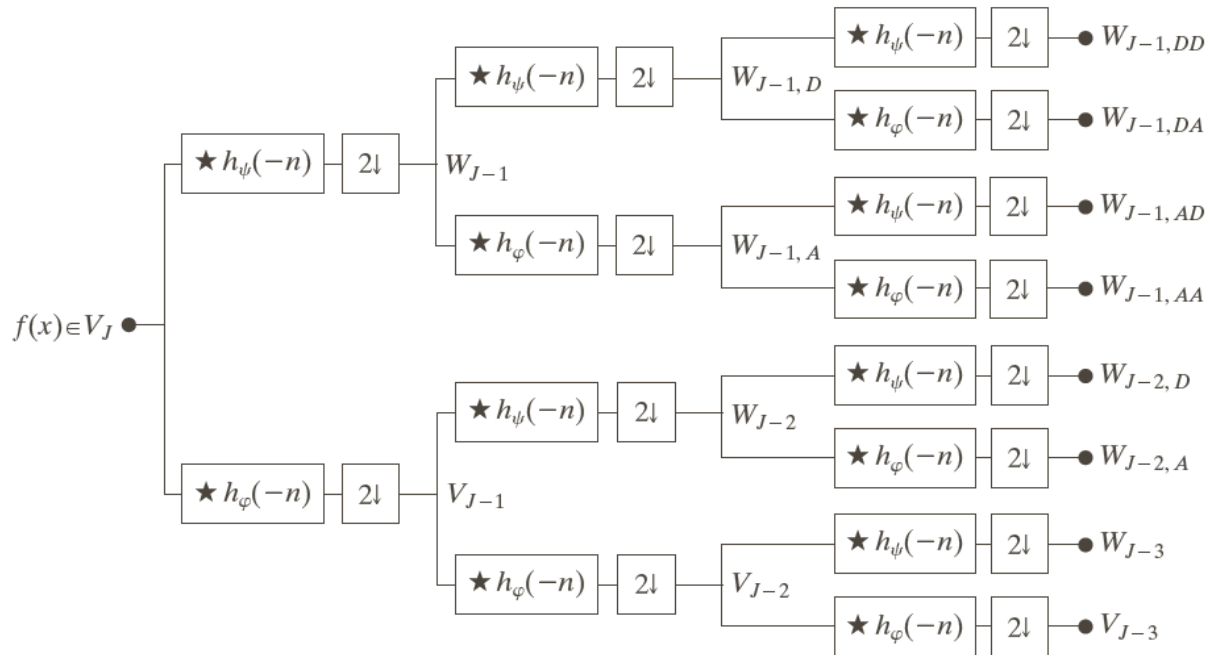


□ 上图中的小波包支持26中不同的分解，例如

$$V_J = V_{J-3} \oplus W_{J-3} \oplus W_{J-2,A} \oplus W_{J-2,D} \oplus W_{J-1,AA} \oplus W_{J-1,AD} \oplus W_{J-1,DA} \oplus W_{J-1,DD}$$

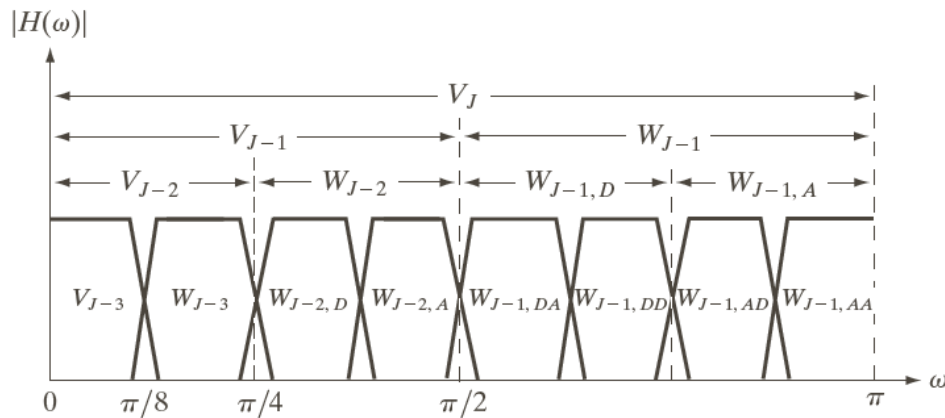


# 7.6 小波包



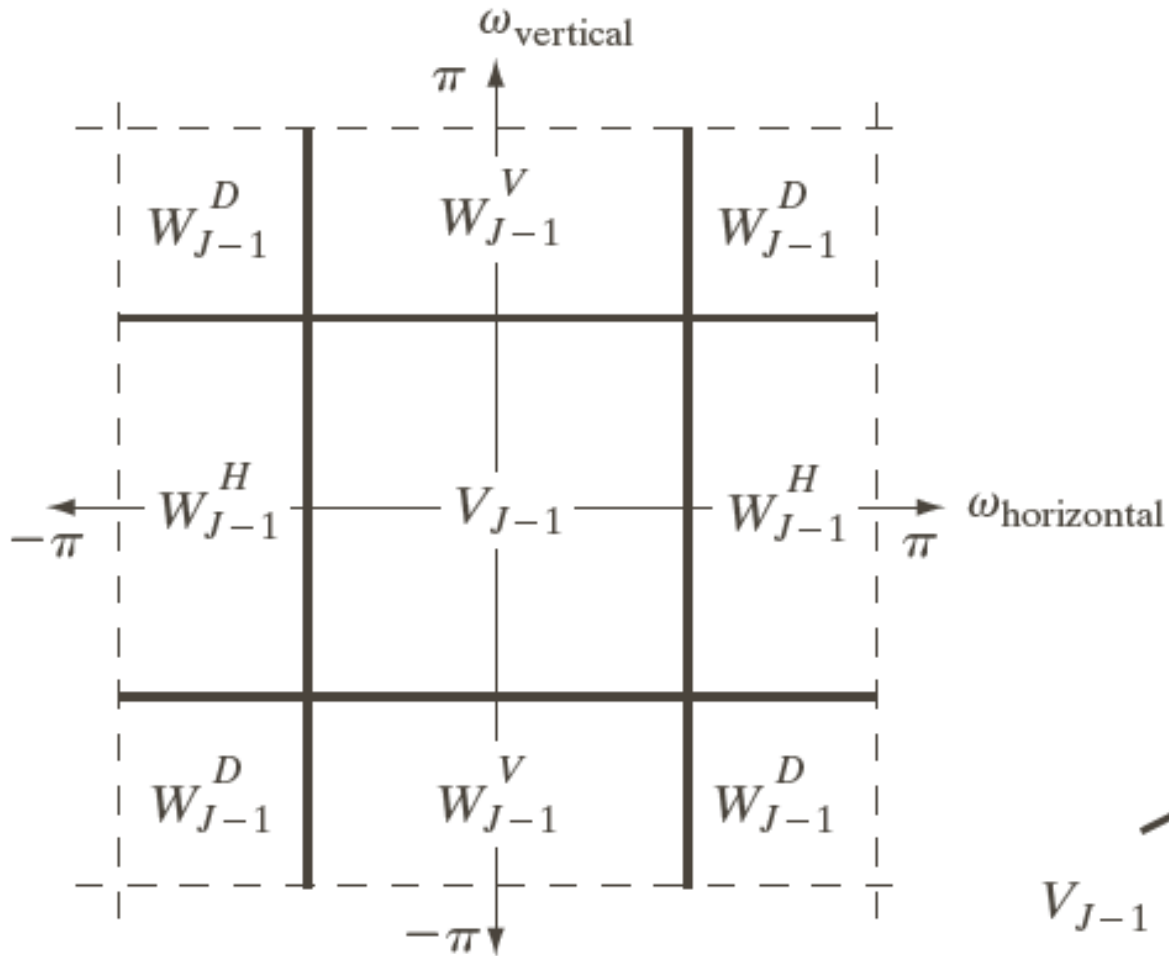
a  
b

**FIGURE 7.32**  
The (a) filter bank  
and (b) spectrum  
splitting  
characteristics of  
a three-scale full  
wavelet packet  
analysis tree.



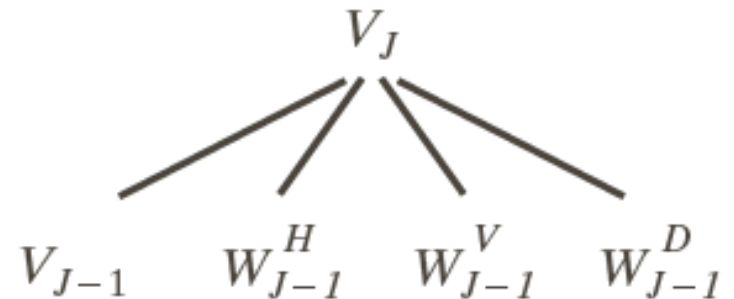
三尺度完全小波包分析树  
(a) 滤波器组  
(b) 频谱分离特性

# 7.6 小波包



a b

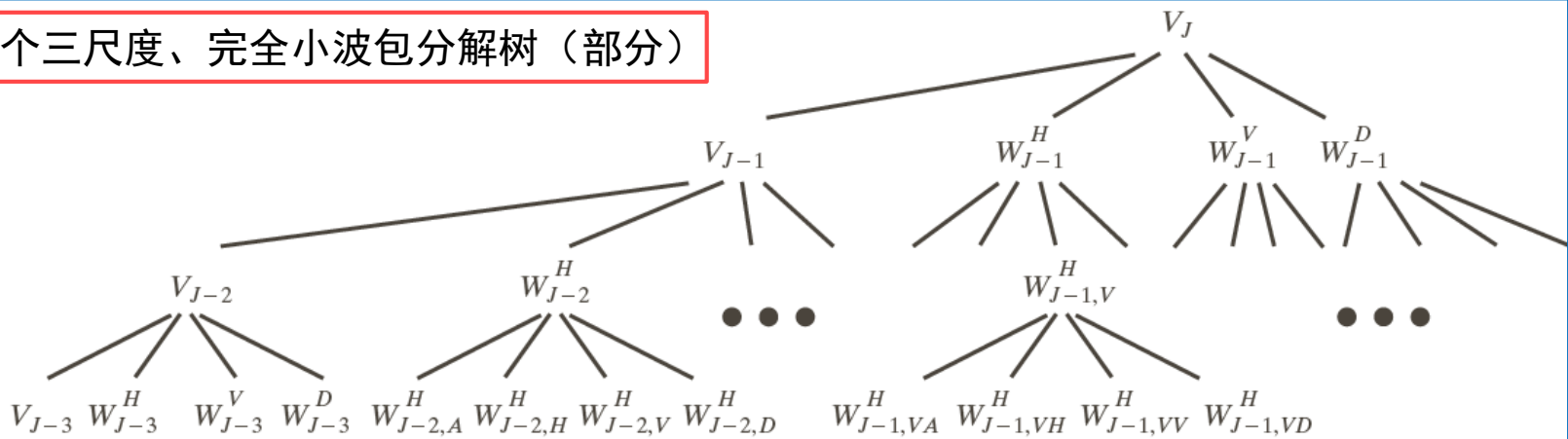
**FIGURE 7.34**  
The first decomposition of a two-dimensional FWT: (a) the spectrum and (b) the subspace analysis tree.



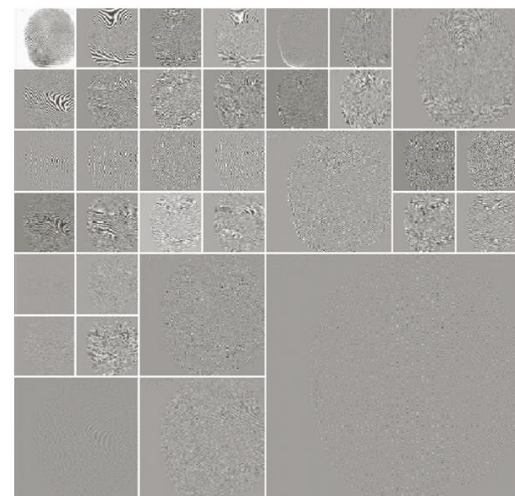
一个二维FWT的第一次分解 (a) 频谱 (b) 子空间分析树

# 7.6 小波包

一个三尺度、完全小波包分解树（部分）

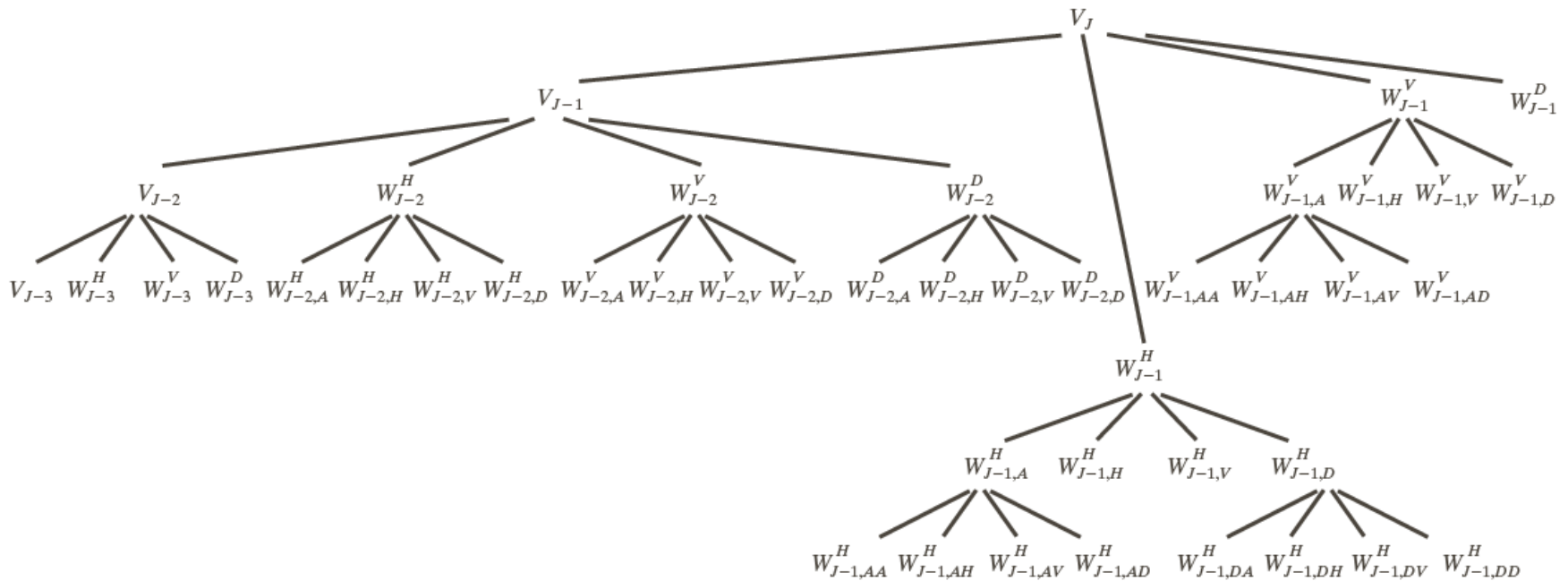


(a) 一副扫描的指纹图像  
(b) 该图像的三尺度、全小波包分解



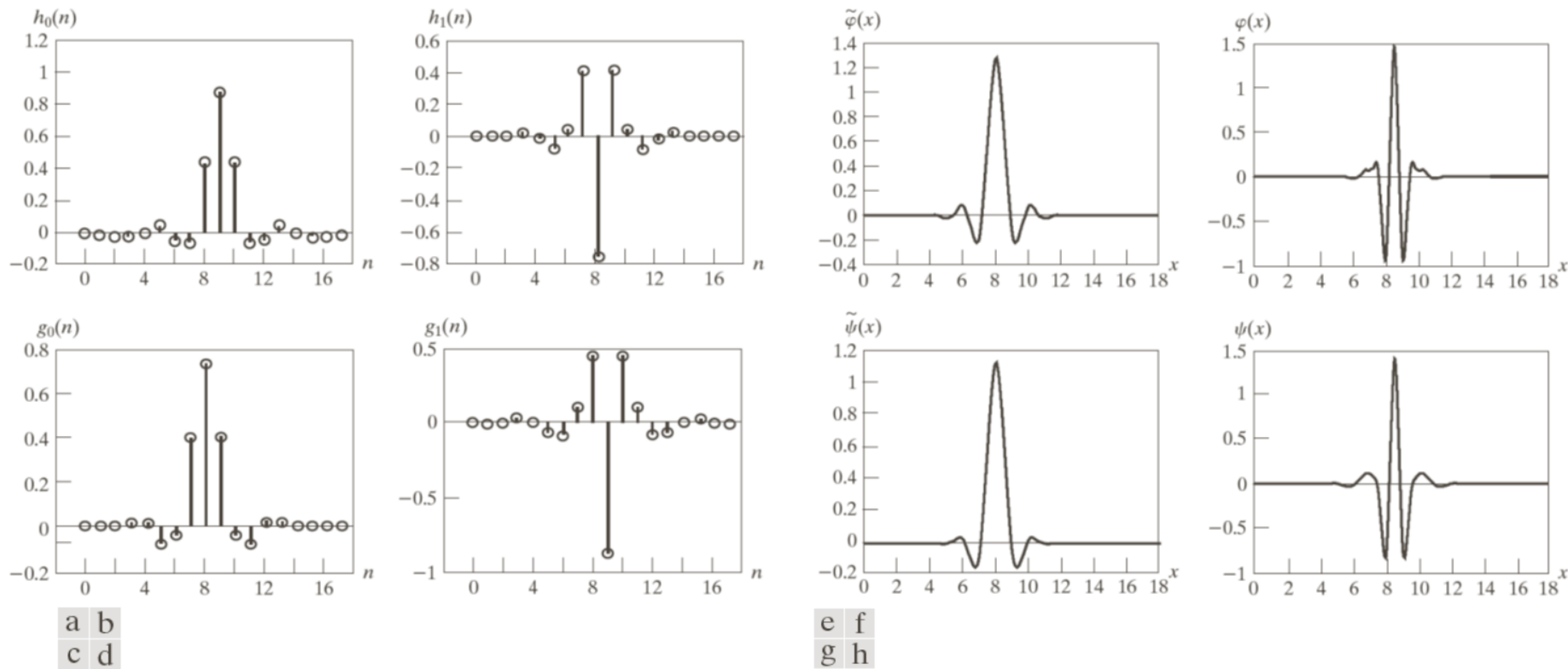
指纹的一种最佳小波分解

# 7.6 小波包



指纹的最佳小波分解的小波包分析树

# 7.6 小波包



Cohen Daubechies Feauveau 双正交小波族成员：  
 (a)和(b)分解滤波器系数；(c)和(d)重建滤波器系数；  
 (e)~(h)双小波和尺度函数。





# 第7章 小波和多分辨率处理

---

Thanks