第7章 小波和多分辨率处理

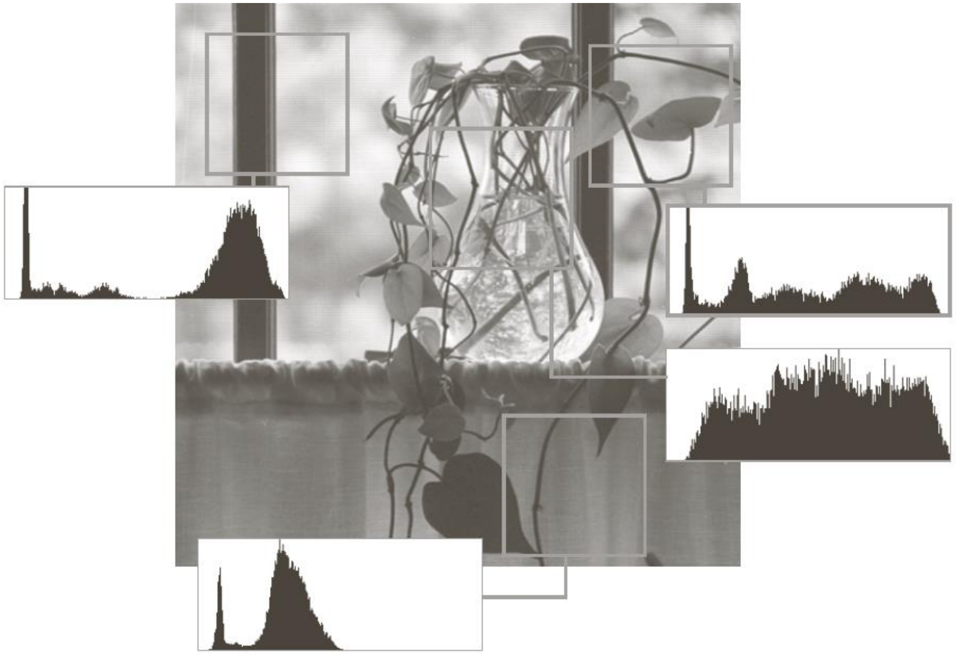
- 小波变换：一种新的信号处理技术
  - 傅里叶变换的基函数是正弦波，而小波变换的基函数是小型波
  - 小波具有变化的频率和有限的持续时间
  - 傅里叶变换只提供频率信息，无时间信息
- 小波是多分辨率理论这种信号处理和分析方法的基础
  - 多分辨率理论涉及多个分辨率下的信号（或图像）表示与分析。
  - 这种方法的优势是：某种分辨率下无法检测的特性，在另一种分辨率下容易检测
- 本章从多分辨率的角度来审视基于小波的变换。
  - 主要内容集中于离散小波变换的开发和利用

第7章 小波和多分辨率处理

第7章 小波和多分辨率处理

7.1 背景：多分辨率分析（MRA）

- 基本动机
  - 图像中，区域由相似纹理和灰度级组成，不同区域结合形成物体
  - 较小物体适合用较高分辨率分析
  - 对于较大物体，用低分辨率分析即可
  - 如果图像中同时存在较小物体和较大物体，则可用不同分辨率来研究他们

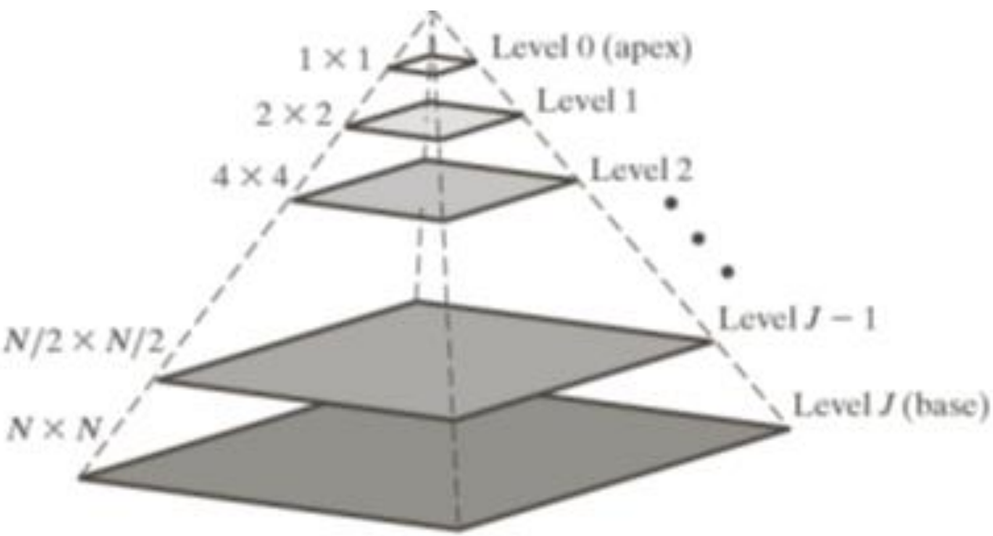


- 图像不同区域的局部直方图差异很大
- 难以对整图用统计模型进行分析

（1）图像金字塔

- 图像金字塔：
  - 一系列以金字塔形状排列的、分辨率逐渐降低的图像集合
  - 底部：高分辨率表示；顶部：低分辨率近似
  - 最初用于图像压缩
- $P+1$级图像金字塔像素总数是

$$N^2\left(1+\frac{1}{4^1}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{4^P}\right)\leq\frac{4}{3}N^2$$

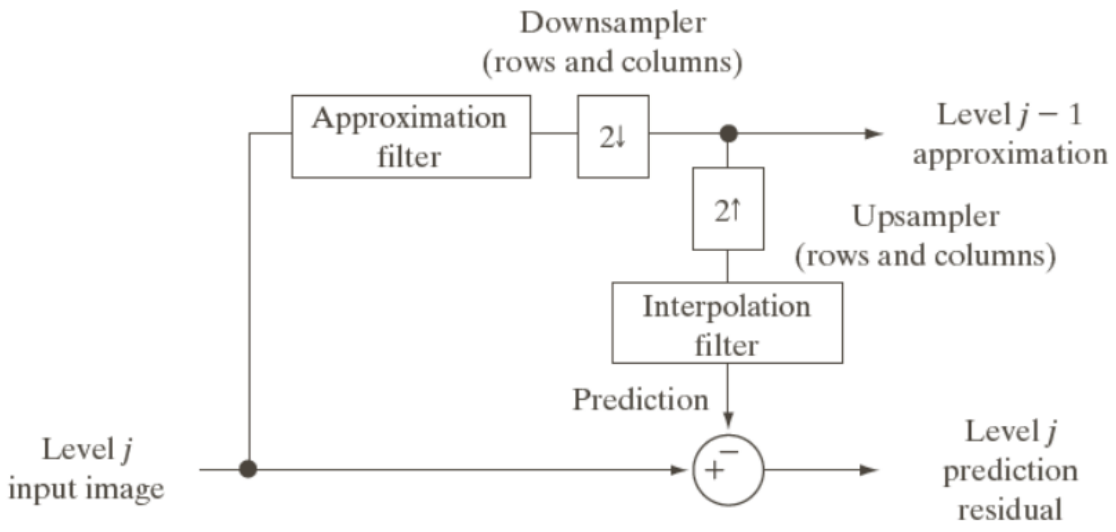


两个问题：

第一，如何构建该金字塔？
第二，金字塔相邻两级差别是什么？

（1）图像金字塔

- 创建**近似**金字塔和**残差**金字塔
  - 步骤一：通过**近似滤波器**后，2倍下采样，得到第j-1级近似
    - ✓ 近似滤波器：邻域平均、高斯低通滤波、无滤波
  - 步骤二：由步骤一产生的分辨率降低的近似，2倍上采样，然后通过**插值滤波**，创建第j级输入图像的一个预测
    - ✓ 插值滤波：最近邻、双线性、双三次内插
  - 步骤三：计算步骤二的预测图像和步骤一的输入之间的差，即预测残差



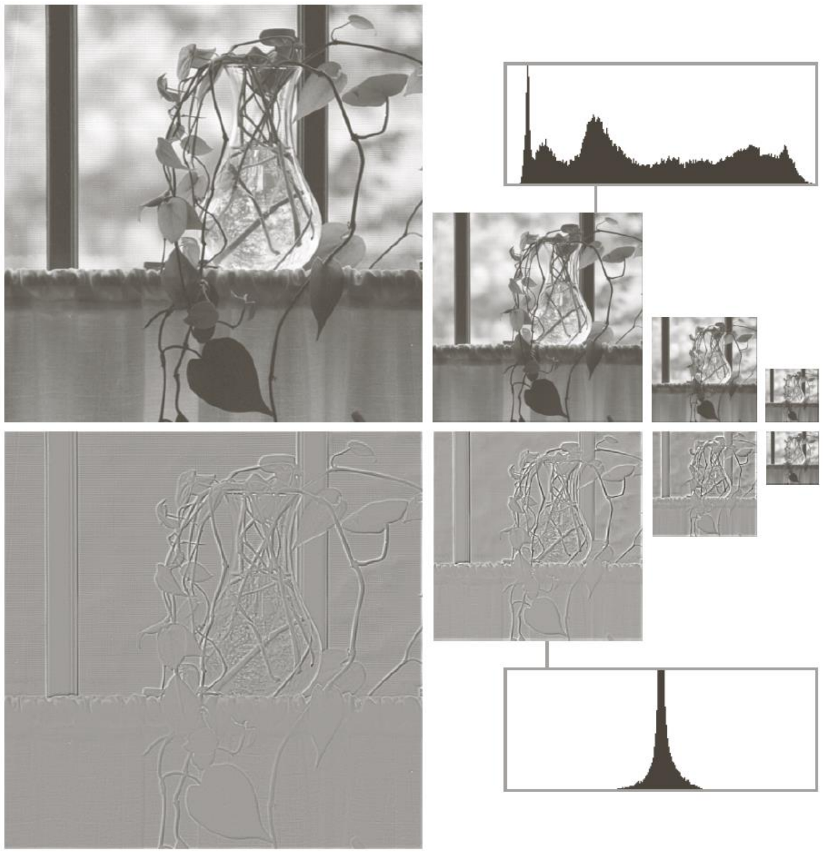
$$f_{2\uparrow}(n) = \begin{cases} f\left(\dfrac{n}{2}\right), & n\text{为偶数} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$f_{2\downarrow}(n) = f(2n)$$

（1）图像金字塔

- 上图：近似金字塔，称为高斯金字塔
  - 因为构建金字塔时使用了高斯滤波器
  - 分辨率越低，细节越少
    - ✓ 低分辨率适合分析大结构或图像整体内容
    - ✓ 高分辨率适合分析单个物体特性

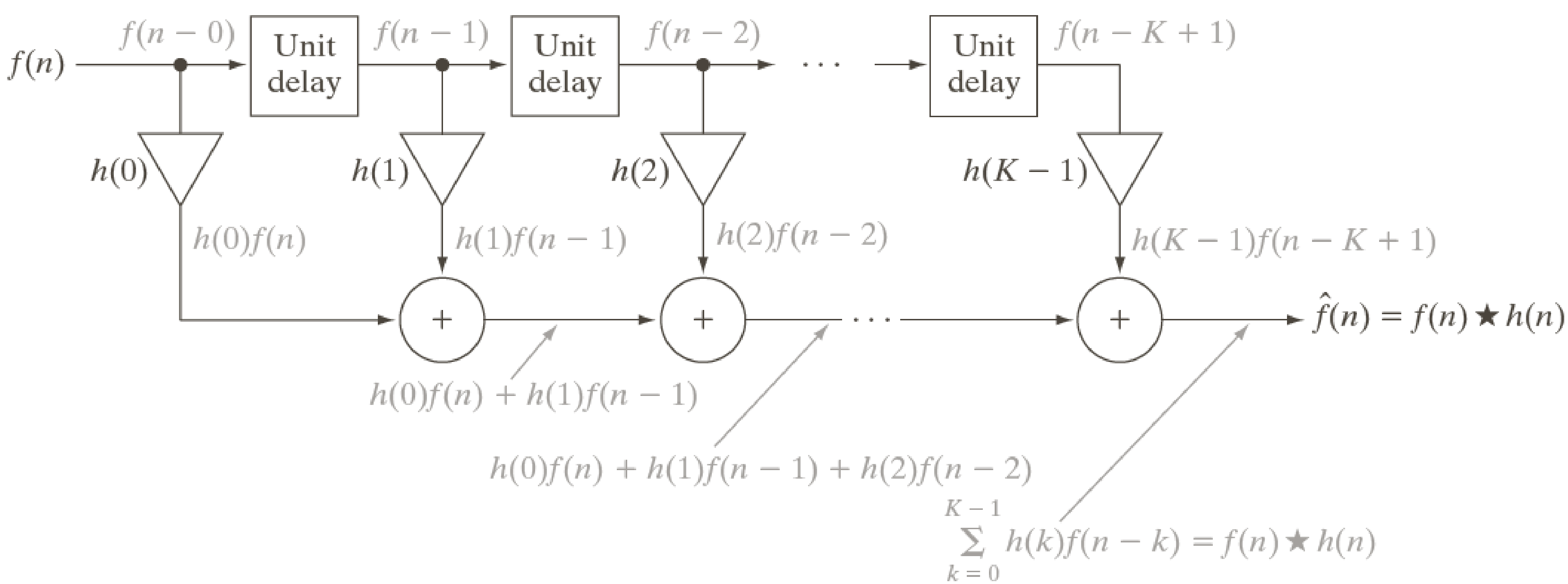
- 下图：预测残差金字塔，通常称为拉普拉斯金字塔
  - 直方图分布比较集中，适合用较少比特进行压缩



四级金字塔及它们的直方图

（2）子带编码

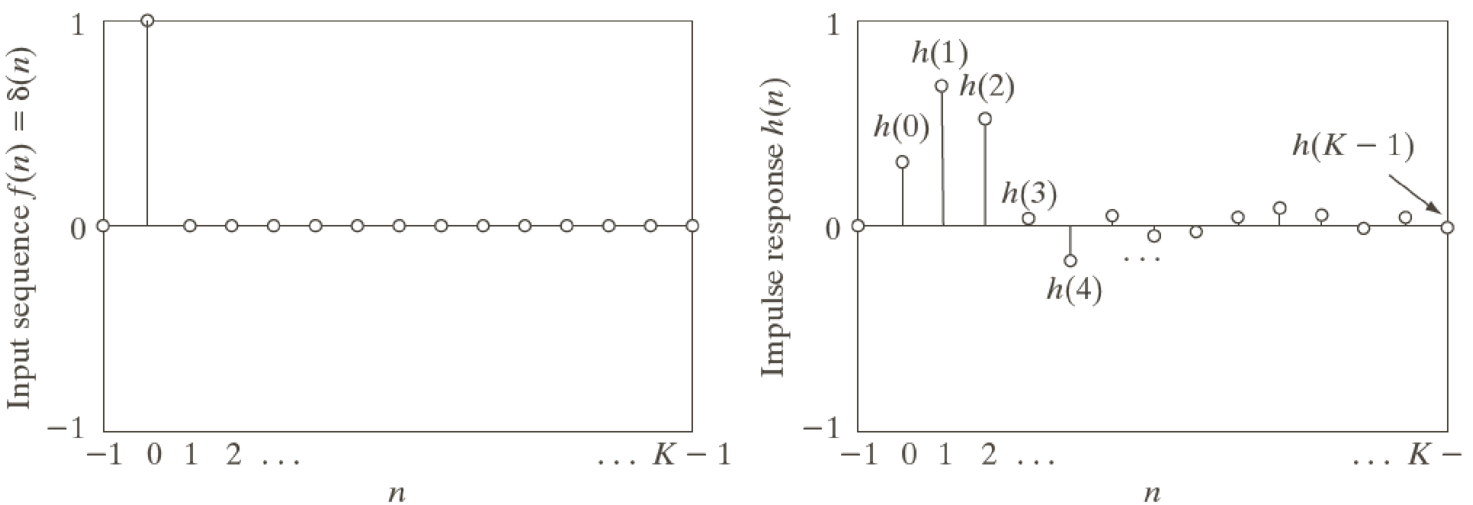
- 在子带编码中
  - 一副图像可分解为一组频带受限的分量，称为子带
  - 子带可以重组在一起，无误差重建原始图像
- 数字滤波器
  - 三个基本部件：延迟单元、乘法器、加法器
  - 最终完成数字信号和滤波器的卷积运算



（2）子带编码

- 如果输入是离散单位冲激，则输出为滤波器系数

$$\hat{f}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \cdot \delta(n-k) = h(n)$$

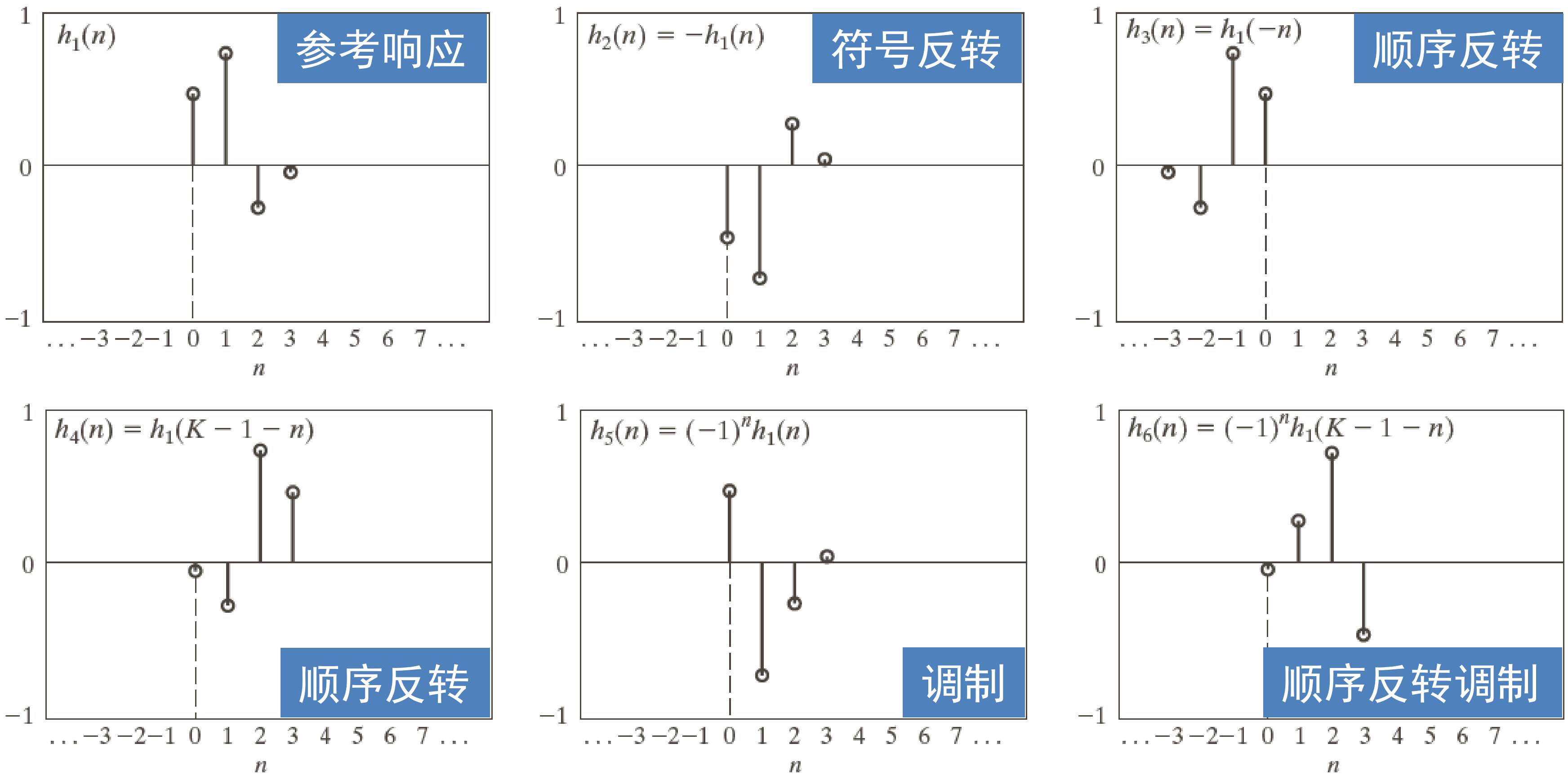


离散单位冲击

滤波器冲击响应

（2）子带编码

- 6个功能相关的滤波器的冲激响应：



（2）子带编码：两波段子带编码和解码

- 分析滤波器组和综合滤波器组串联
  - 选择合适滤波器，实现完美重构
    - ✓ 定义原型滤波器，由其计算得到其他滤波器
    - ✓ 双正交滤波器，归一化正交滤波器

双正交滤波器

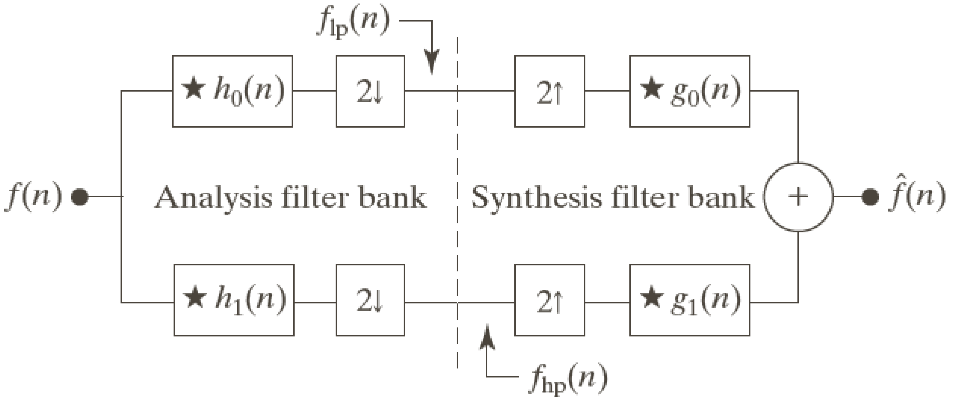
$$g_0(n) = (-1)^n h_1(n)$$
$$g_1(n) = (-1)^{n+1} h_0(n)$$

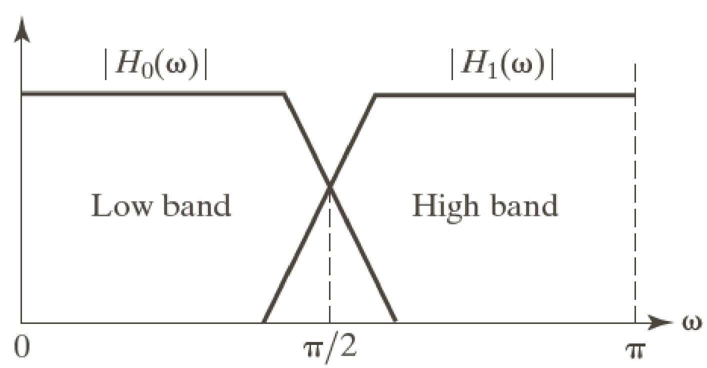
或

$$g_0(n) = (-1)^{n+1} h_1(n)$$
$$g_1(n) = (-1)^n h_0(n)$$

正交滤波器

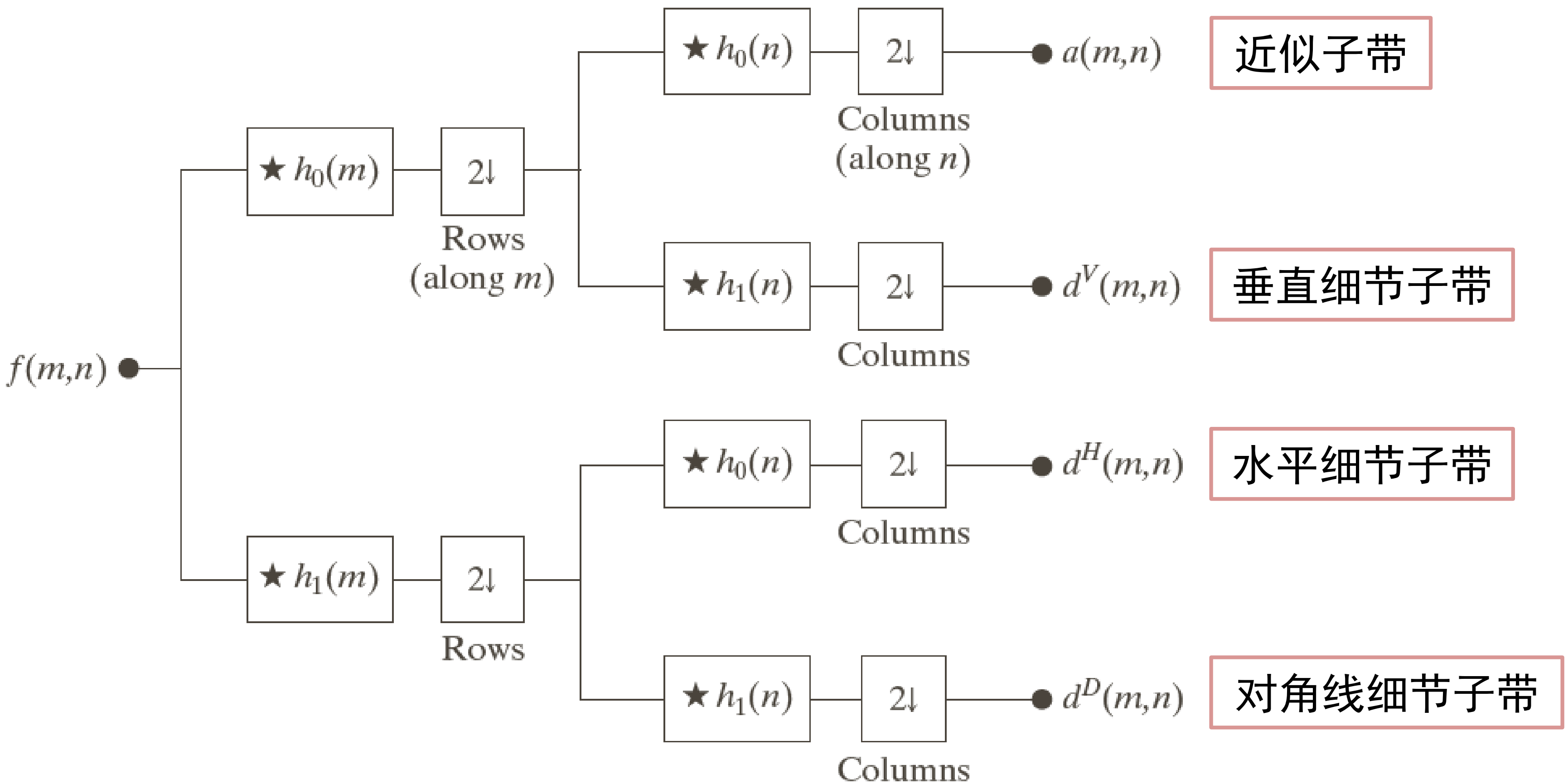
$$g_1(n) = (-1)^n g_0(K-1-n)$$
$$h_i(n) = g_i(K-1-n), i = \{0,1\}$$





（2）子带编码：二维子带编码

- 将输入图像分解为四个子带图像
  - 每个子带图像还可以分为4个更小子带，更小的子带还可以再分

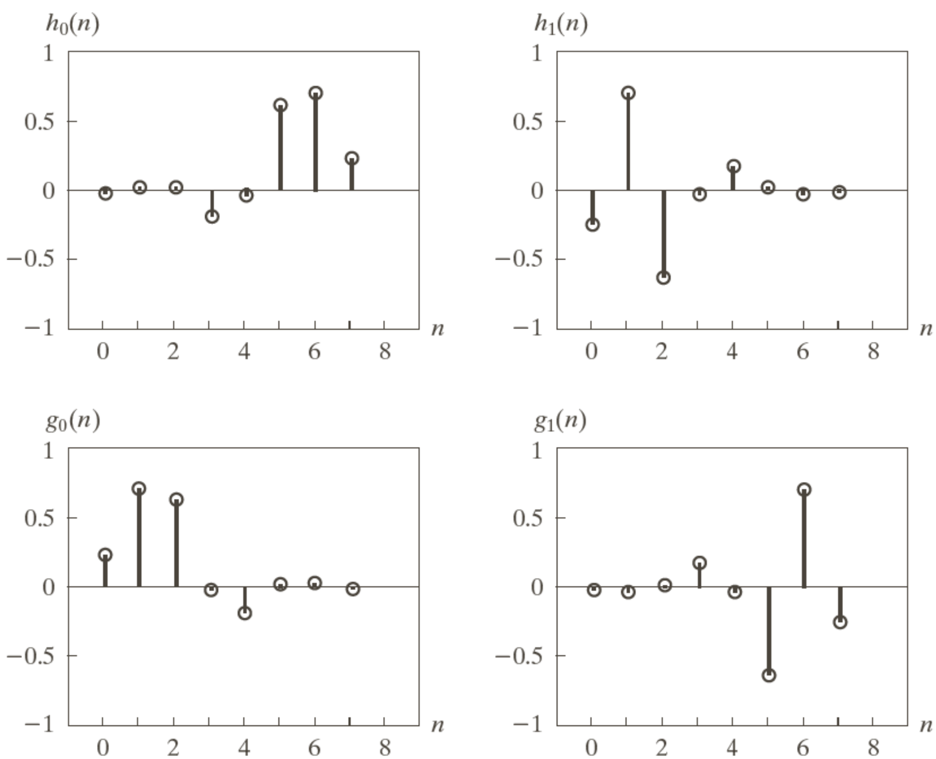


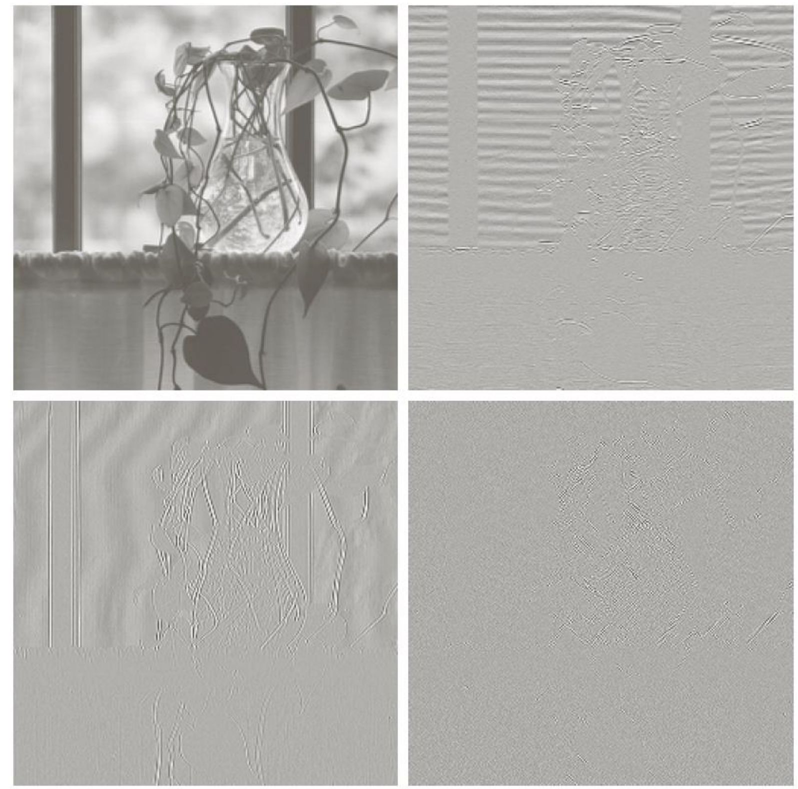
（2）子带编码示例

n	$g_0(n)$
0	0.23037781
1	0.71484657
2	0.63088076
3	−0.02798376
4	−0.18703481
5	0.03084138
6	0.03288301
7	−0.01059740

4个8抽头Daubechies归一化正交滤波器的冲击响应

（见公式7.1-14）





子带分离结果，4个子带分别是：

(a) 近似子带　(b) 水平细节子带

(c) 垂直细节自带　(d) 对角线细节子带

（3）哈尔变换（1910）

- 哈尔(Haar)变换的矩阵表示

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{HFH}^{\mathrm{T}}$$

$\boldsymbol{H}$：$N \times N$哈尔变换矩阵， $\boldsymbol{F}$：$N \times N$图像矩阵，$\boldsymbol{T}$：$N \times N$变换结果

- 哈尔基函数（ $k = 2^p + q - 1$ ）

$$h_0(z) = h_{00}(z) = \frac{1}{\sqrt{N}}, z \in [0,1]$$

$$h_k(z) = h_{pq}(z) = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{cases} z^{p/2}, (q-1)/2^p \leq z < (q-0.5)/2^p \\ -z^{\frac{p}{2}}, (q-0.5)/2^p \leq z < q/2^p \\ 0, \text{其他}, z \in [0,1] \end{cases}$$

- 哈尔矩阵

$$H_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad H_4 = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

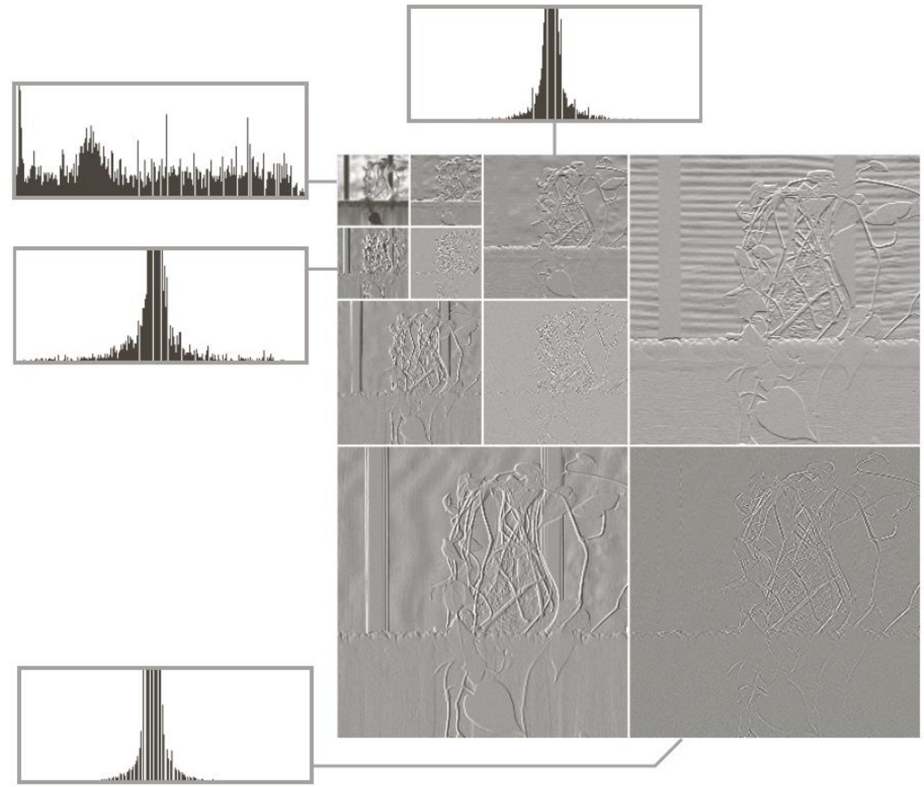
（3）哈尔变换

$$H_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

H_2的行可用于定义一个2抽头完美重建滤波器组的分析滤波器$h_0(n)$和$h_1(n)$

每幅子图像描绘了原始图像中空间频率的一个特定频带

由H_2哈尔基函数的离散小波变换得到三种不同分辨率的近似图像$(64 \times 64, 128 \times 128, 256 \times 256)$



第7章 小波和多分辨率处理

7.1 背景

7.2 多分辨率展开

7.3 一维小波变换

7.4 快速小波变换

7.5 二维小波变换

7.6 小波包

7.2 多分辨率展开

- 在多分辨率分析中，尺度函数被用于建立一个函数或一幅图像的一系列近似
  - 每个近似与其最近邻近似在分辨率方面都用基2来区分
  - 使用称为小波的附加函数（小波函数）对相邻近似之间的差进行编码
- 基础概念
  - 级数展开
  - 尺度函数
  - 小波函数

级数展开

- 信号或函数$f(x)$通常能分解为一系列展开函数的线性组合

$$f(x)=\sum_k \alpha_k\varphi_k(x)$$

  - α_k是实值展开系数，$\varphi_k(x)$是实值展开函数
  - 如果展开唯一，则称$\varphi_k(x)$为基函数，$\{\varphi_k(x)\}$称为基

- 可展开的函数张成了一个函数空间，成为展开集合的闭合跨度：

$$V=\overline{\underset{k}{\mathrm{Span}}\{\varphi_k(x)\}}$$

- 对于任意$f(x)\in V$，利用$\{\varphi_k(x)\}$的对偶函数集合$\{\tilde{\varphi}_k(x)\}$，其展开系数：

$$\alpha_k=\langle\tilde{\varphi}_k(x),f(x)\rangle=\int\tilde{\varphi}_k^*(x)f(x)dx$$

尺度函数

- 考虑由整数平移和实数二值尺度、平方可积函数$\varphi(x)$组成的展开函数集合，即$\{\varphi_{j,k}(x)\}$，其中

$$\varphi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}}\varphi(2^j x - k)$$

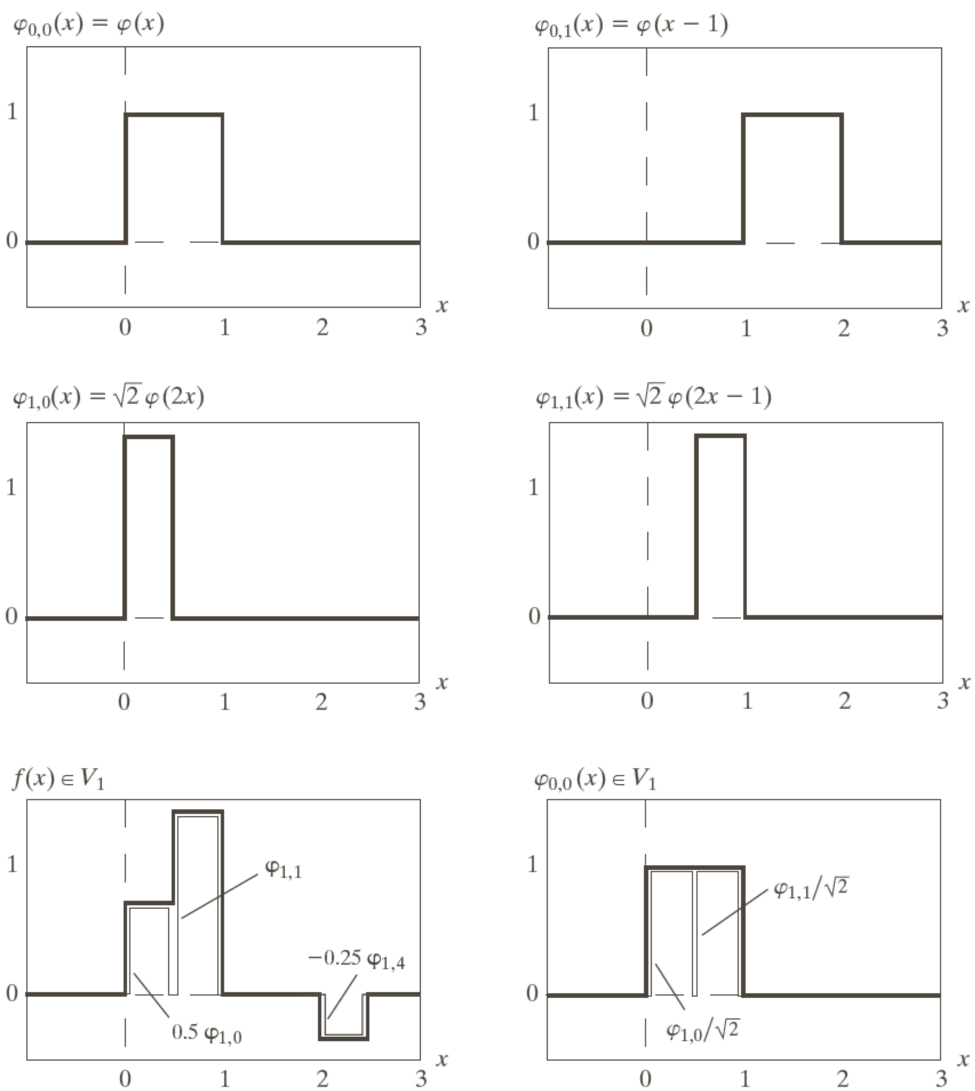
$\varphi(x)$被称为尺度函数

- 选择合适的$\varphi(x)$，可使$\varphi_{j,k}(x)$跨越 $L^2(\boldsymbol{R})$，即所有可度量的、平方可积函数的集合：

$$V_j = \overline{\underset{k}{\mathrm{Span}}\{\varphi_{j,k}(x)\}}$$

- 增大 j 会增大 V_j 的大小，进而允许子空间中包含具有较小变换的变量或较细的细节函数
  - 随着j 的增大，用于表示子空间函数的$\varphi_{j,k}(x)$会变窄，x有较小变化即可分开

尺度函数：哈尔尺度函数

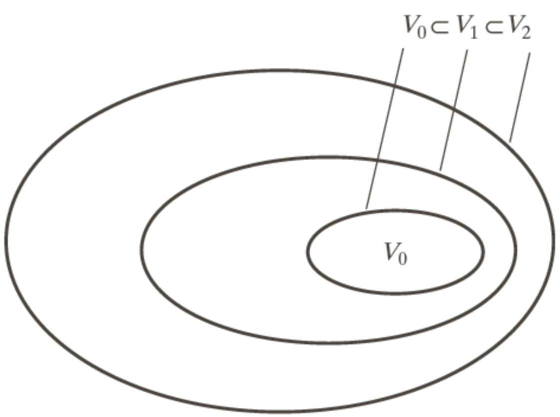


如果$f(x)$是V_0的元素，那么它也是V_1的元素

尺度函数

- 多分辨率分析（MRA）4个基本要求
  - 1：尺度函数对其整数平移是正交的
  - 2：低尺度的尺度函数跨越的子空间，嵌套在高尺度跨越的尺度空间内，即

$$V_{-\infty} \subset \cdots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_{\infty}$$



  - 3：唯一对所有的V_j通用的函数是$f(x) = 0$
    - ✓ 没有信息的函数$V_{-\infty}$=$\{0\}$
  - 4：任何可度量的、平方可积的函数都可以按任意精度表示
    - ✓ 任意空间的展开函数，都可由相邻较高分辨率空间的展开函数建立

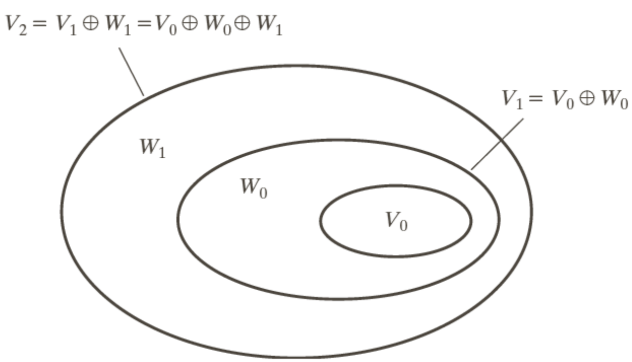
小波函数

- 定义小波集合$\{\psi_{j,k}(x)\}$：$\psi_{j,k}(x)=2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j x-k)$
- 小波函数跨越的空间：

$$W_j=\overline{\underset{k}{\mathrm{Span}}\{\psi_{j,k}(x)\}}$$

- 如果函数$f(x)\epsilon W_j$，则有：

$$f(x)=\sum_k \alpha_k\,\psi_{j,k}(x)$$



- 尺度函数和小波函数子空间关系

$$V_{j+1}=V_j\oplus W_j$$

- 任意小波函数，可表示为平移后的双倍分辨率尺度函数的加权和

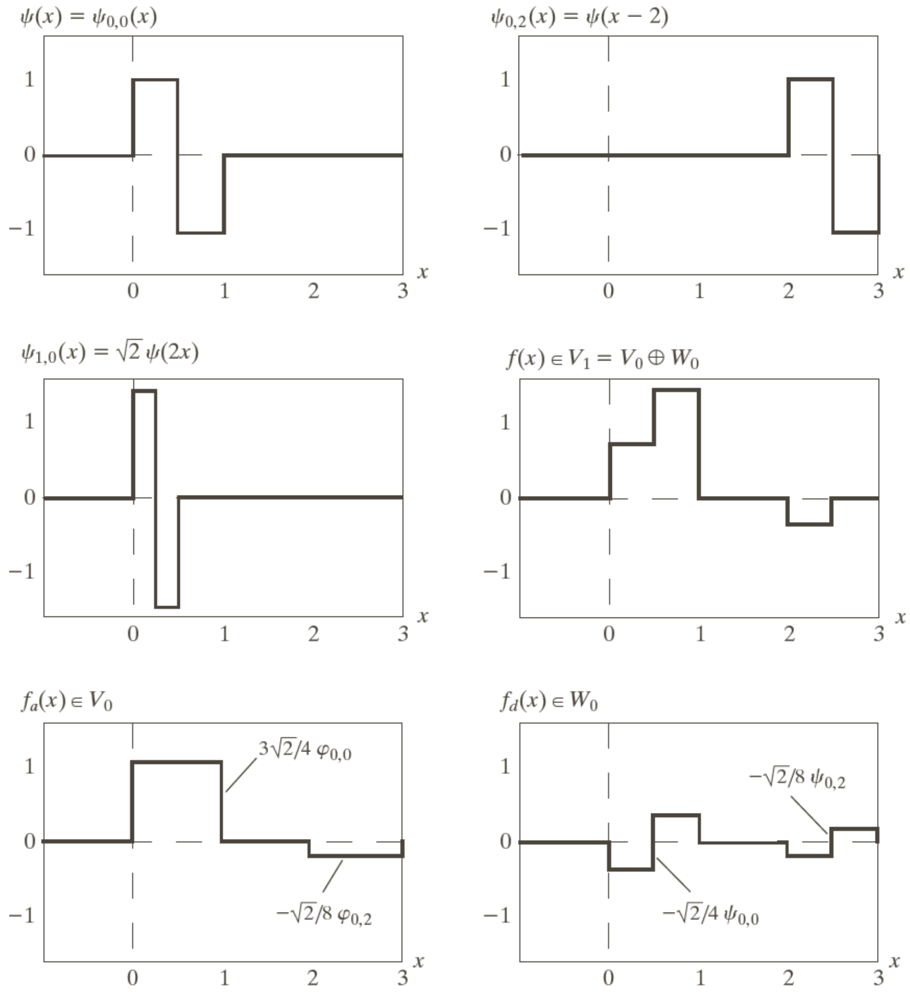
$$\psi(x)=\sum_n h_\psi(n)\sqrt{2}\varphi(2x-n)$$

$h_\psi(n)$为小波函数系数

可以证明：$h_\psi(n)=(-1)^n h_\varphi(n)$

小波函数

哈尔小波函数系数



$$f(x) = f_a(x) + f_d(x)$$

第7章 小波和多分辨率处理

7.1 背景

7.2 多分辨率展开

7.3 一维小波变换

7.4 快速小波变换

7.5 二维小波变换

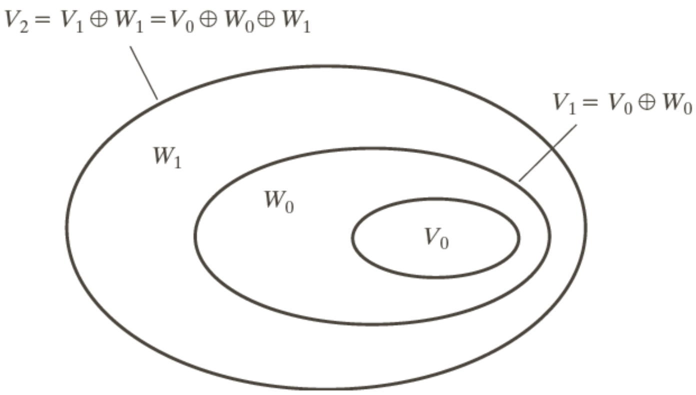
7.6 小波包

7.3 一维小波变换

- 三种小波变换
  - 一般的小波级数展开 ⟺ 傅里叶级数展开
  - 离散小波变换 ⟺ 离散傅里叶变换
  - 连续小波变换 ⟺ 积分傅里叶变换

- 小波级数展开

$$f(x)=\sum_k c_{j0}(k)\varphi_{j0,k}(x)+\sum_{j=j_0}^{\infty}\sum_k d_j(k)\,\psi_{j,k}(x)$$



$c_{j0}(k)$：近似或尺度系数；$d_j(k)$：细节或小波系数

$$c_{j0}(k)=\langle f(x),\varphi_{j0,k}(x)\rangle=\int f(x)\varphi_{j0,k}(x)\,dx$$

$$d_j(k)=\langle f(x),\psi_{j,k}(x)\rangle=\int f(x)\psi_{j,k}(x)dx$$

小波级数展开

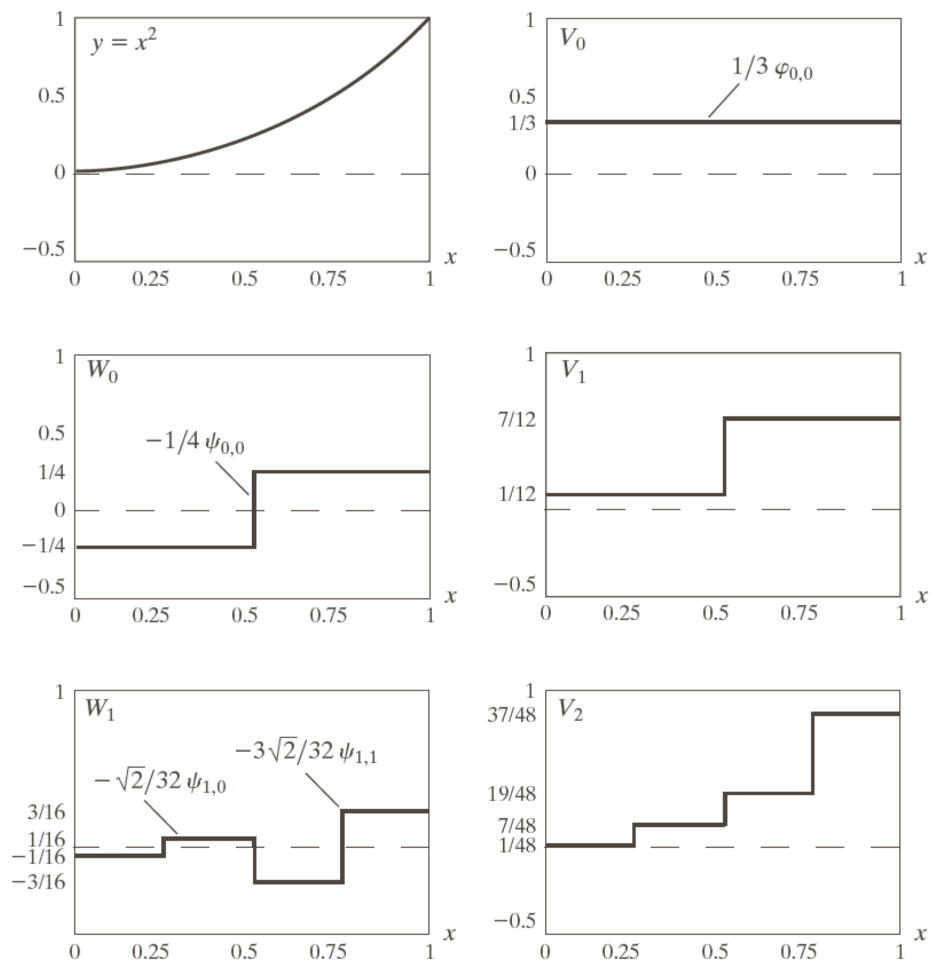
- 随着更高尺度的叠加，近似变得更接近测试函数的精确表示。
- 当$j \to \infty$时，可实现精确重构表示

$$y = \begin{cases} x^2, 0 \le x \le 1 \\ 0, \quad\quad \text{其他} \end{cases}$$

$$c_0(0) = \int_0^1 x^2 \varphi_{0,0}(x) dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

$$d_0(0) = \int_0^1 x^2 \psi_{0,0}(x) dx = -\frac{1}{4}$$

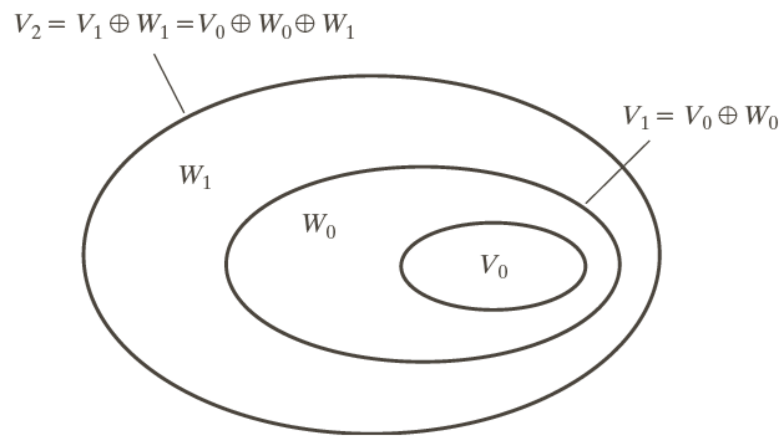
…… ……



使用哈尔小波的$y = x^2$的小波级数展开

离散小波变换（DWT）

- 如果待展开的函数是离散的（即数字序列），得到的系数就称之为离散小波变换（DWT）



- 正向DTW系数

近似系数：$W_\varphi(j_0, k) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_n f(n)\varphi_{j_0,k}(n)$

细节系数：$W_\psi(j, k) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_n f(n)\psi_{j,k}(n), j \geq j_0$

- 反向DWT：

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_k W_\varphi(j_0, k)\varphi_{j_0,k}(n) + \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_k W_\psi(j, k)\psi_{j,k}(n)$$

连续小波变换（CWT）

- 连续小波变换（CWT）将一个连续函数变换为两个变量（平移和尺度）的高冗余度函数
  - 其结果可用于时间-频率分析
- 连续平方可积函数$f(x)$的连续小波变换与实数值小波$\psi(x)$的关系定义为

$$W_\psi(s,\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\psi_{s,\tau}(x)dx$$

$$\psi_{s,\tau}(x)=\frac{1}{\sqrt{s}}\psi(\frac{x-\tau}{s})$$

s：尺度参数
τ：平移参数

- 给定$W_\psi(s,\tau)$，连续小波反变换为

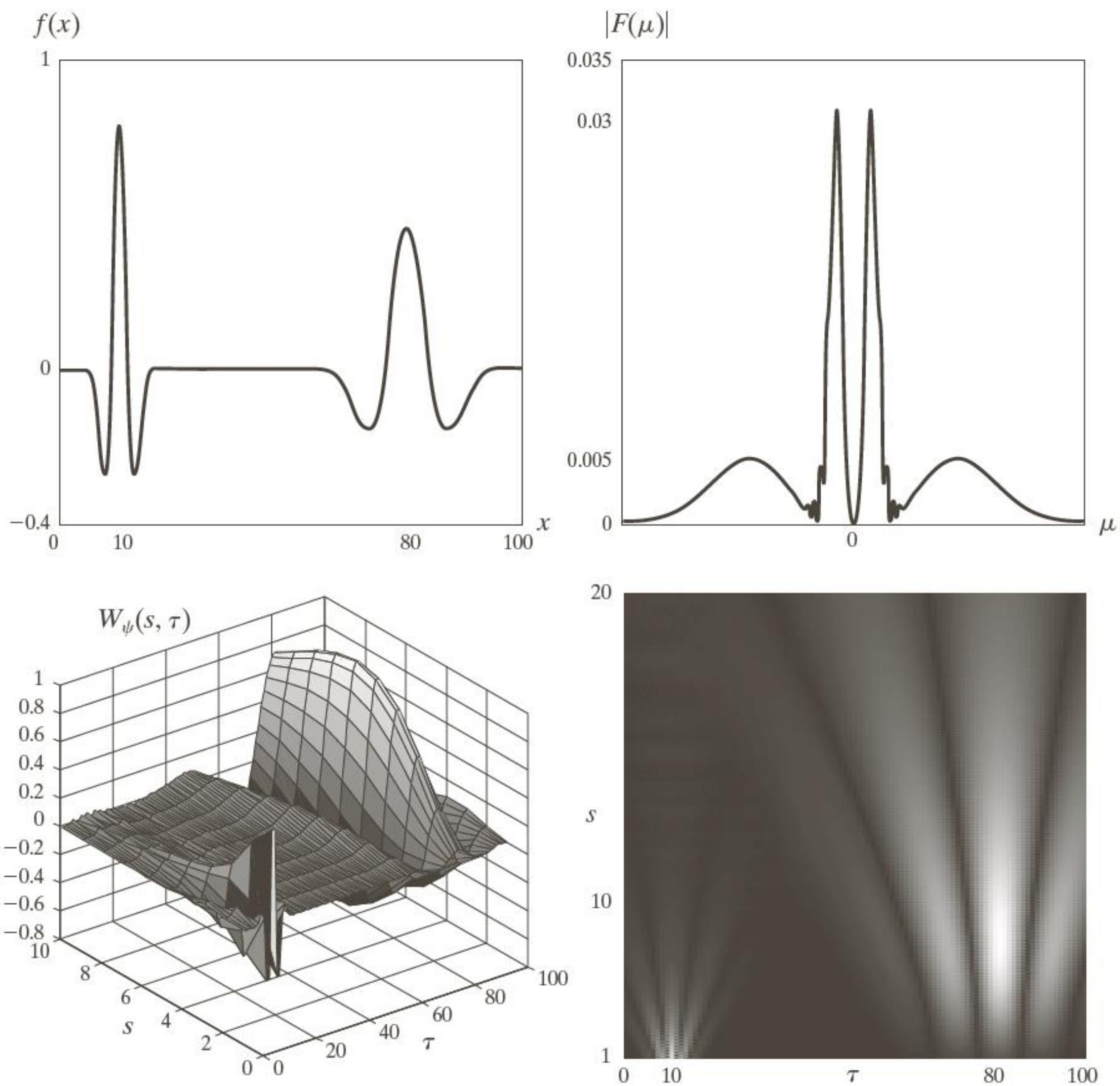
$$f(x)=\frac{1}{C_\psi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} W_\psi(s,\tau)\frac{\psi_{s,\tau}(x)}{s^2}d\tau\, ds$$

$$C_\psi=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\psi(\mu)|^2}{|\mu|}d\mu$$

连续小波变换（CWT）

- CWT 与 DWT的相似性
  - 连续平移参数 τ 取代了整数平移参数 k
  - 连续尺度参数 s 与二进制参数 2^j 相反
    - ✓ 小波尺度与传统意义的频率表示关系是相反的
  - 连续小波变换类似于尺度为 $j=-\infty$ 的离散小波变换，从而消除了与尺度函数间的联系，因此仅用小波项表示即可
  - 与离散变换类似，连续变换的结果为一组系数，度量了$f(x)$与基函数的相似性

连续小波变换



a b
c d

FIGURE 7.16 The continuous wavelet transform (c and d) and Fourier spectrum (b) of a continuous 1-D function (a).

连续小波变换[(c)和(d)]和连续一维函数(a)的傅里叶谱(b)

$$f(x) = \psi_{1,10}(x) + \psi_{6,80}(x)$$

第7章 小波和多分辨率处理

7.1 背景

7.2 多分辨率展开

7.3 一维小波变换

7.4 快速小波变换

7.5 二维小波变换

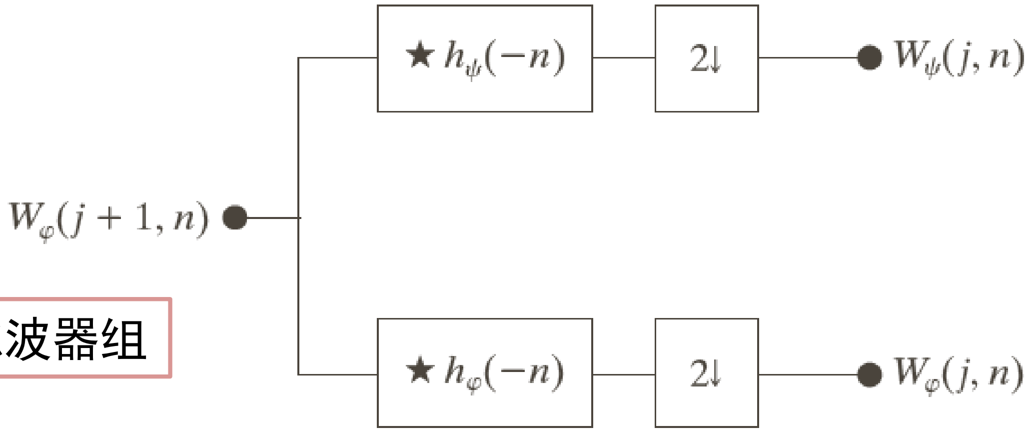
7.6 小波包

7.4 快速小波变换

- 快速小波变换（FWT）是实现离散小波变换（DWT）的高效计算，也称Mallat人字形算法
  - 类似于2子带的子带编码
- 相邻尺度的DTW系数之间的关系

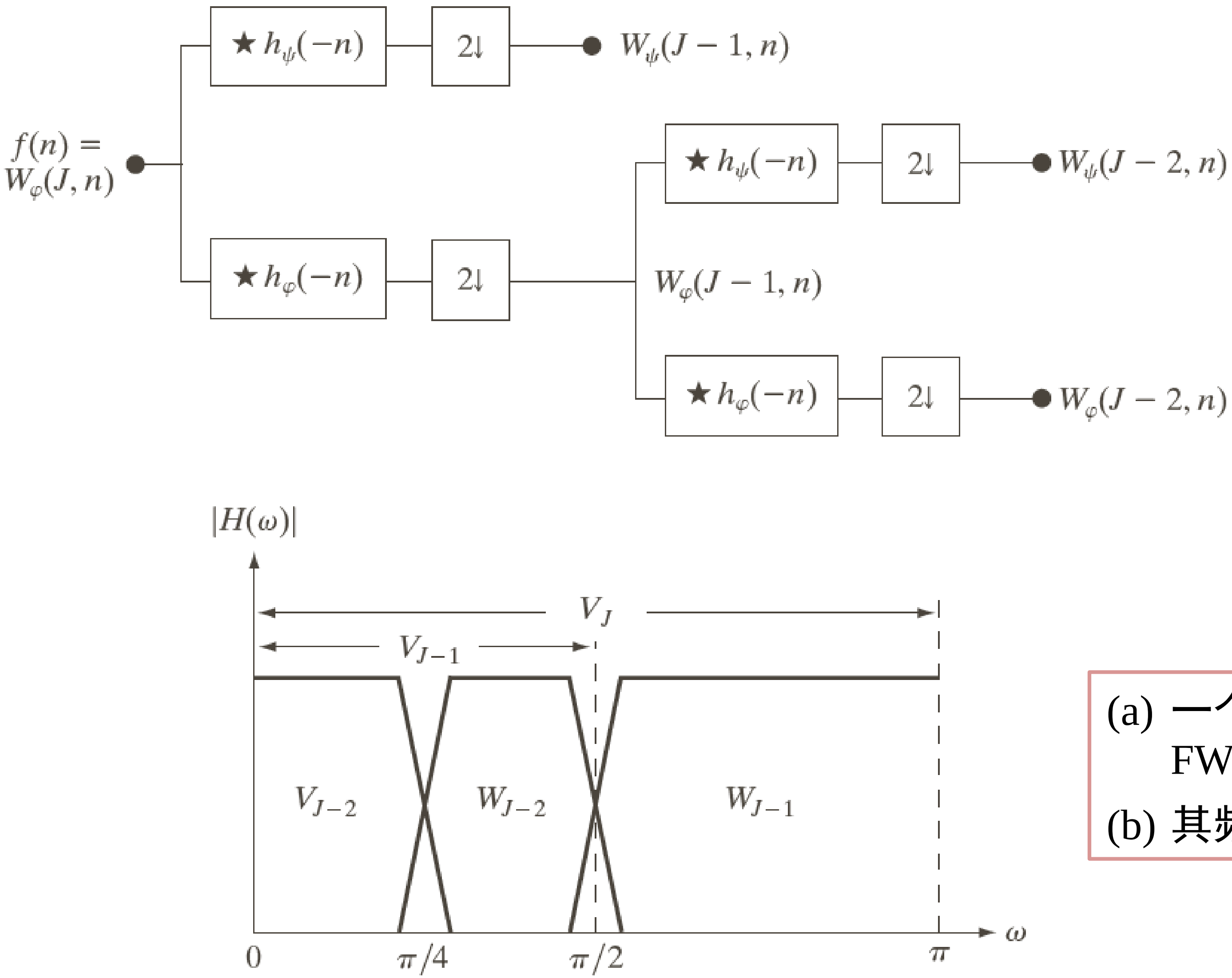
$$W_\psi(j,k) = h_\psi(-n) \star W_\varphi(j+1,n)\Big|_{n=2k,k\ge 0}$$

$$W_\varphi(j,k) = h_\varphi(-n) \star W_\varphi(j+1,n)\Big|_{n=2k,k\ge 0}$$



一个FWT分析滤波器组

7.4 快速小波变换



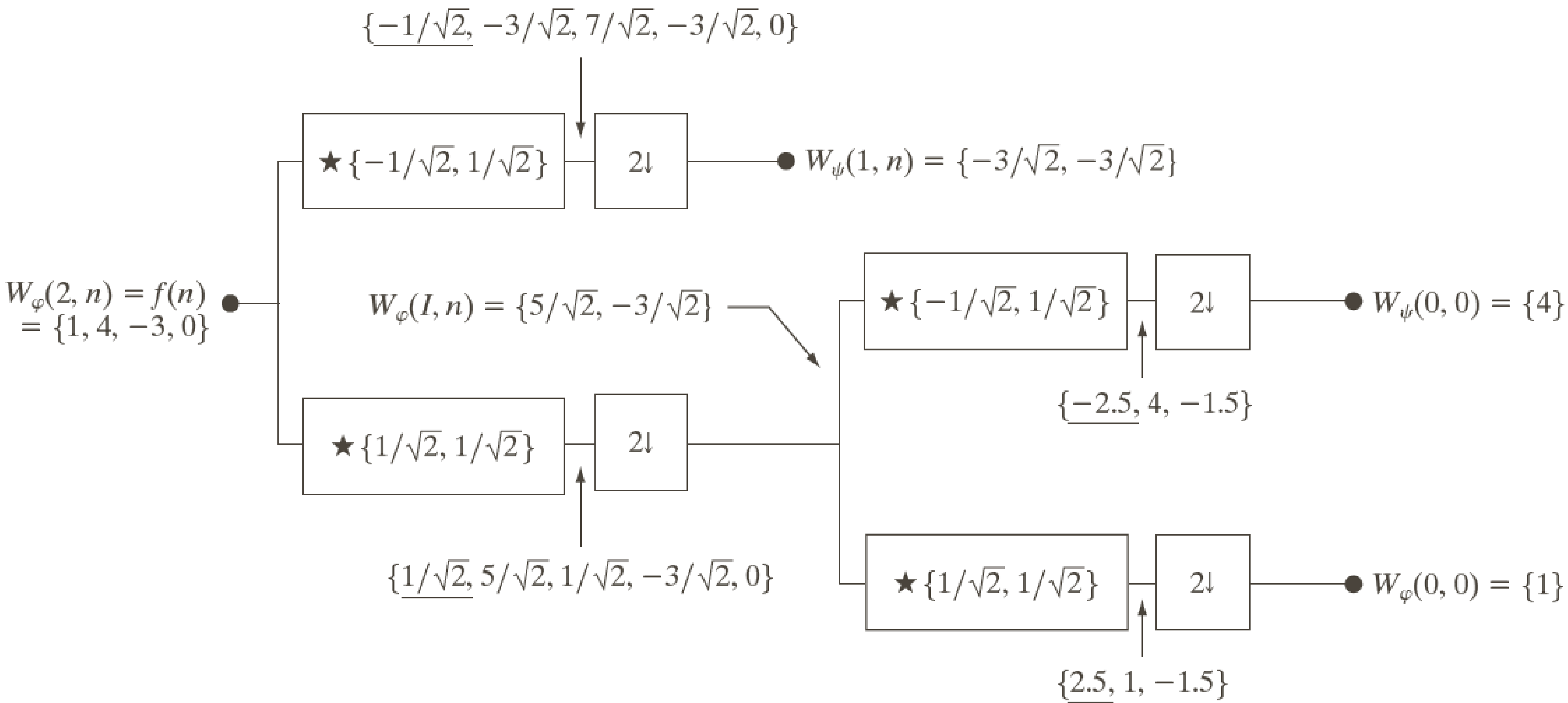
a
b

FIGURE 7.18
(a) A two-stage or two-scale FWT analysis bank and (b) its frequency splitting characteristics.

(a) 一个二级或二尺度FWT分析滤波器组

(b) 其频谱分离特性

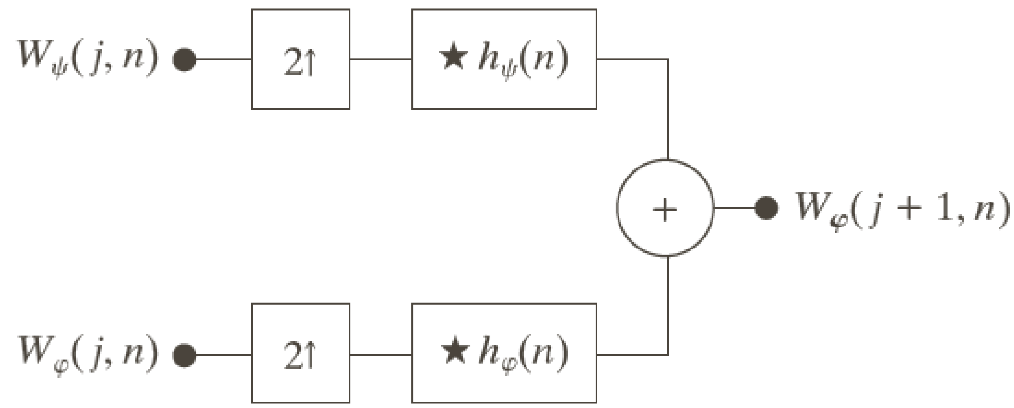
7.4 快速小波变换



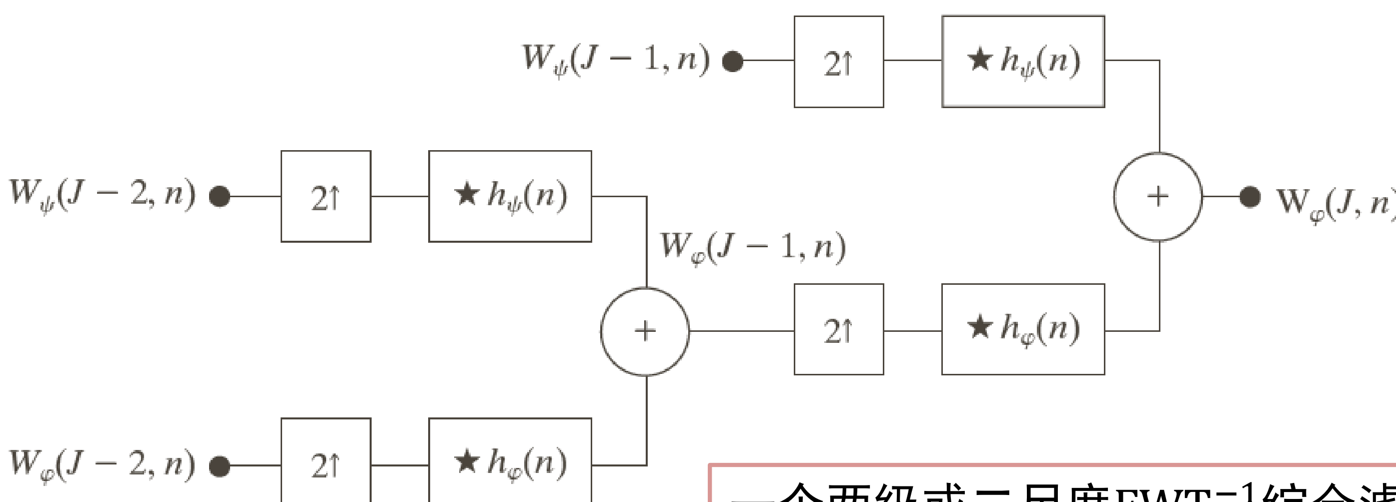
使用哈尔尺度和小波向量计算序列{1,4,-3,0}的一个二尺度快速小波变换

7.4 快速小波变换：反变换

FWT^{-1}综合滤波器组



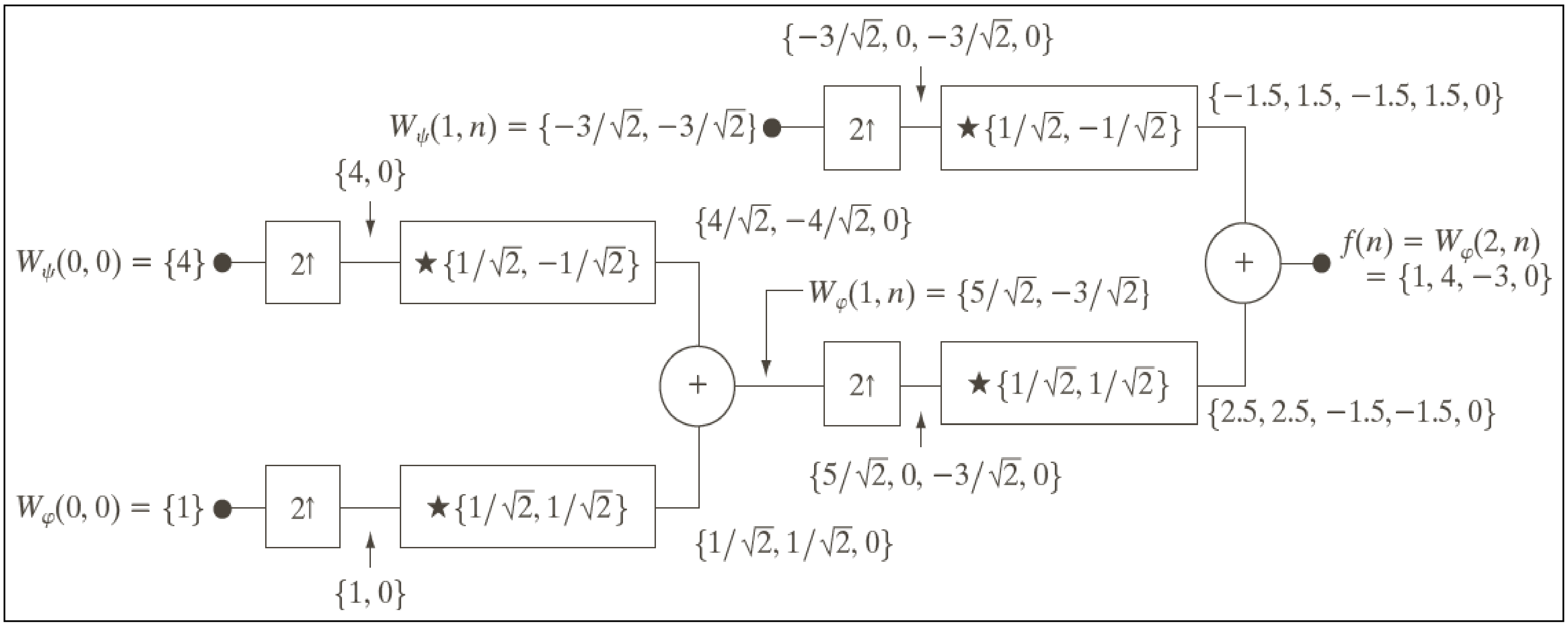
$$W_\varphi(j+1,k) = h_\varphi(k)\bigstar W_\varphi^{2\uparrow}(j,k) + h_\psi(k)\bigstar W_\psi^{2\uparrow}(j,k)\Big|_{k\geq 0}$$



一个两级或二尺度FWT^{-1}综合滤波器组

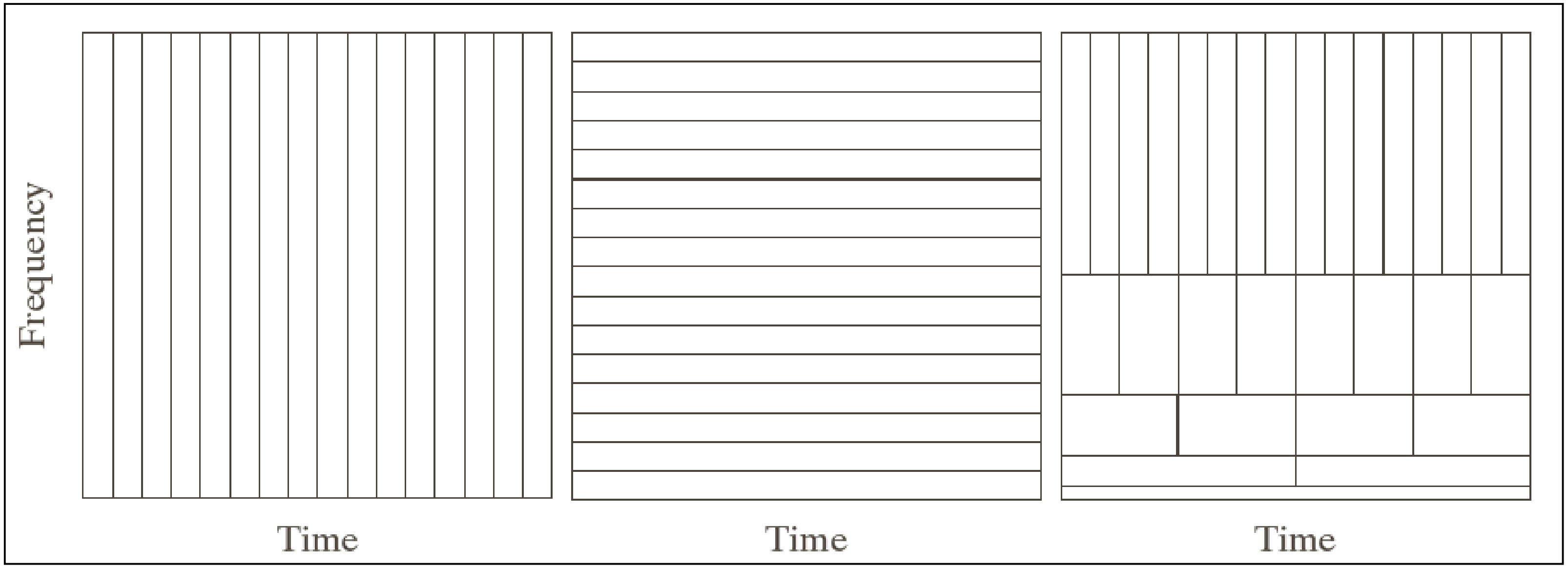
7.4 快速小波变换：反变换

- 使用哈尔尺度和小波函数计算序列$\{1,4,-1.5,\sqrt{2},-1,-1.52\sqrt{2}\}$的二尺度快速小波反变换



7.4 快速小波变换

- 标准时域基指明了事件发生的时刻，但不提供频率信息
- 正弦基指出了发生较长时间的事件中出现的频率，但没有提供时间分辨率
- FWT的时间-频率片中时间和频率分辨率是变化的，但每个片的面积相同



(a) 冲激函数基　　(a) 正弦函数(FFT)基　　(c) FWT基

第7章 小波和多分辨率处理

7.1 背景

7.2 多分辨率展开

7.3 一维小波变换

7.4 快速小波变换

7.5 二维小波变换

7.6 小波包

7.5 二维小波变换

- 在二维情况下，需要1个二维尺度函数$\varphi(x,y)$和3个二维小波$\psi^H(x,y)$, $\psi^V(x,y)$和$\psi^D(x,y)$
- 每个二维小波都是两个一维函数的乘积

可分离尺度函数 $$\varphi(x,y)=\varphi(x)\varphi(y)$$

列方向变化（水平边缘） $$\psi^H(x,y)=\psi(x)\varphi(y)$$

行方向变化（垂直边缘） $$\psi^V(x,y)=\varphi(x)\psi(y)$$

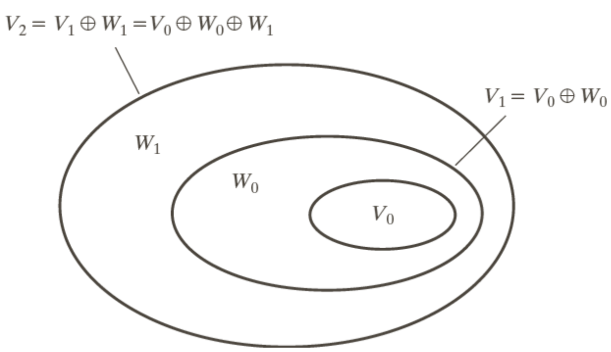
对角线方向变化 $$\psi^D(x,y)=\psi(x)\psi(y)$$

7.5 二维小波变换

- 大小为$M \times N$的图像$f(x,y)$的离散小波变换是

$$W_\varphi(j_0,m,n) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\varphi_{j_0,m,n}(x,y)$$

$$W_\psi^i(j,m,n) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\psi_{j,m,n}^i(x,y), \qquad i = \{H,V,D\}$$



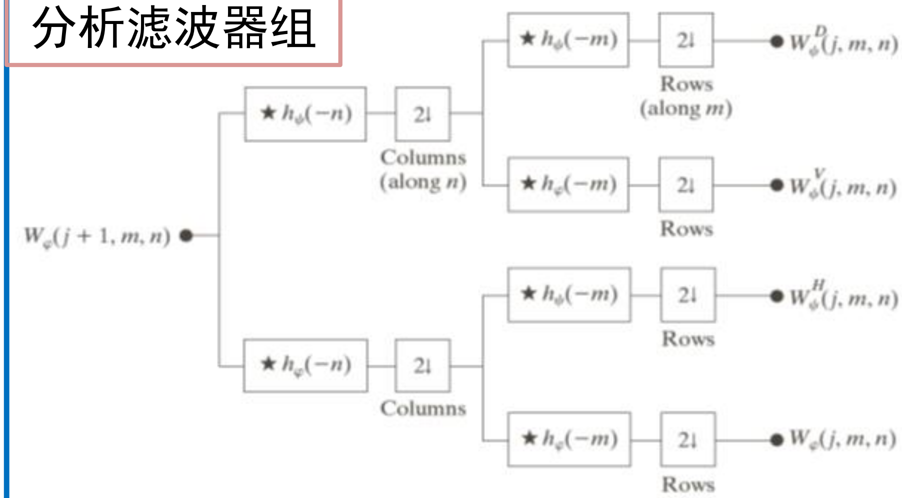
- $f(x,y)$离散小波反变换

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_m \sum_n W_\psi(j_0,m,n)\varphi_{j_0,m,n}(x,y) + \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{i=H,V,D} \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_m \sum_n W_\psi^i(j,m,n)\psi_{j,m,n}^i(x,y)$$

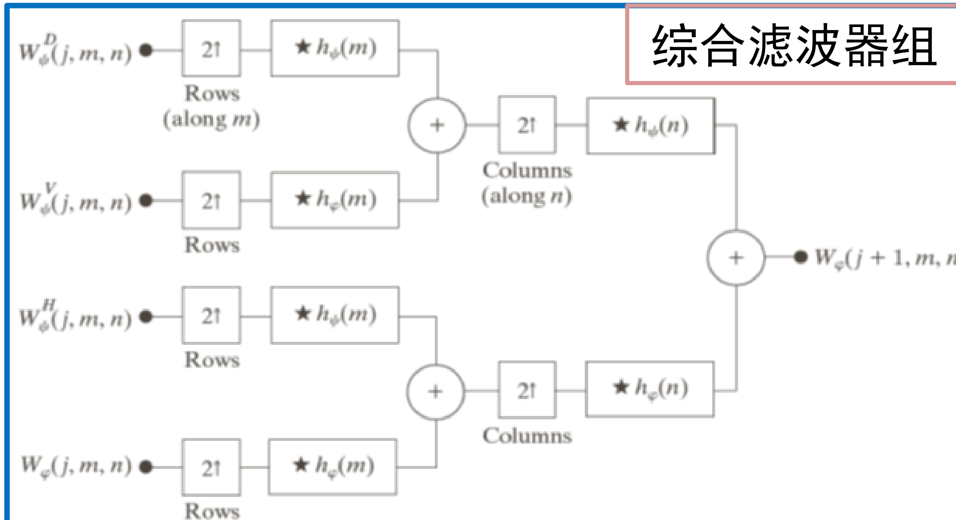
7.6 二维小波变换

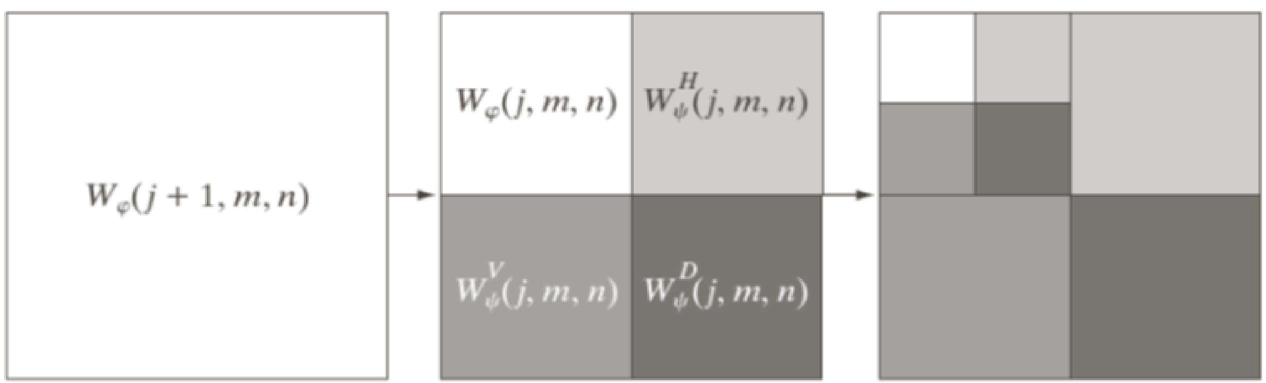
- 二维快速小波变换

分析滤波器组



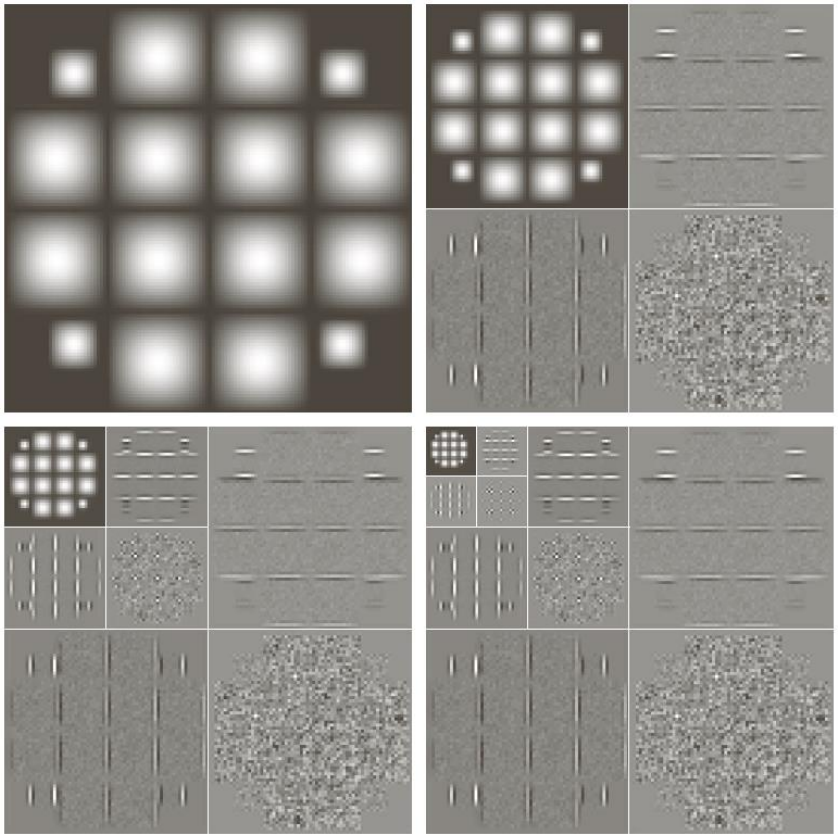
综合滤波器组



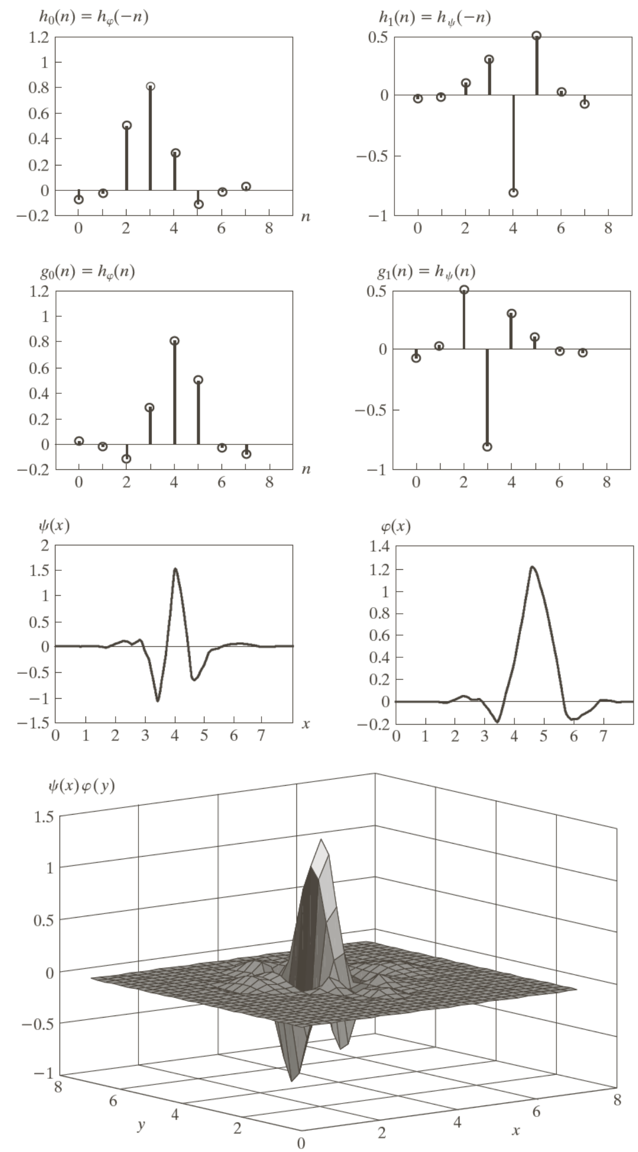


分解结果

7.6 二维小波变换

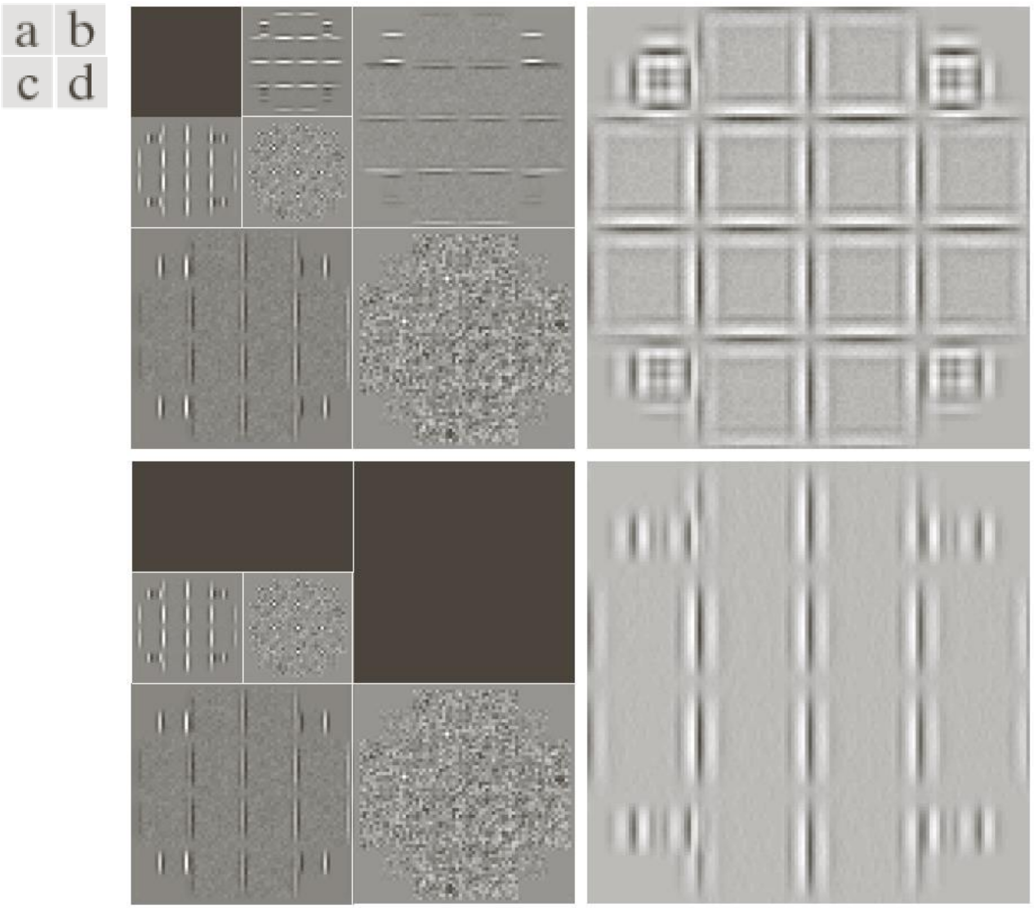


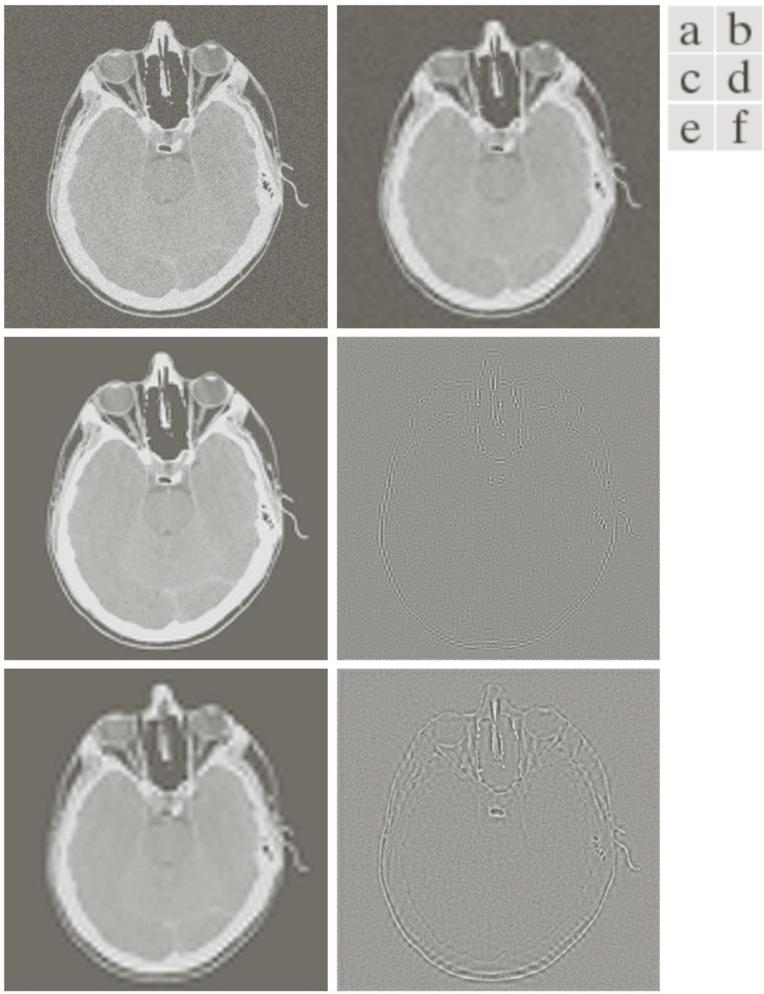
计算二维的三尺度FWT
(a) 原图像；(b) 一尺度FWT；
(c) 二尺度FWT；(d) 三尺度FWT



四阶对称小波：
(a)~(b) 重建滤波器；
(e) 一维小波；
(f) 一维尺度函数；
(g) 三个二维小波之一

7.6 二维小波变换：边缘检测与去噪





针对边缘检测改进的DWT
(a) ~ (c) 删除所选系数的二尺度分解
(b) ~ (d) 相应的重建

为噪声去除修改DWT：(a) 人的头部噪声CT图像；(b)，(c)和(e)对细节系数进行阈值处理后的各种重建；(d)和(f)在(c)和(e)重建过程中所删除的信息

第7章 小波和多分辨率处理

7.1 背景

7.2 多分辨率展开

7.3 一维小波变换

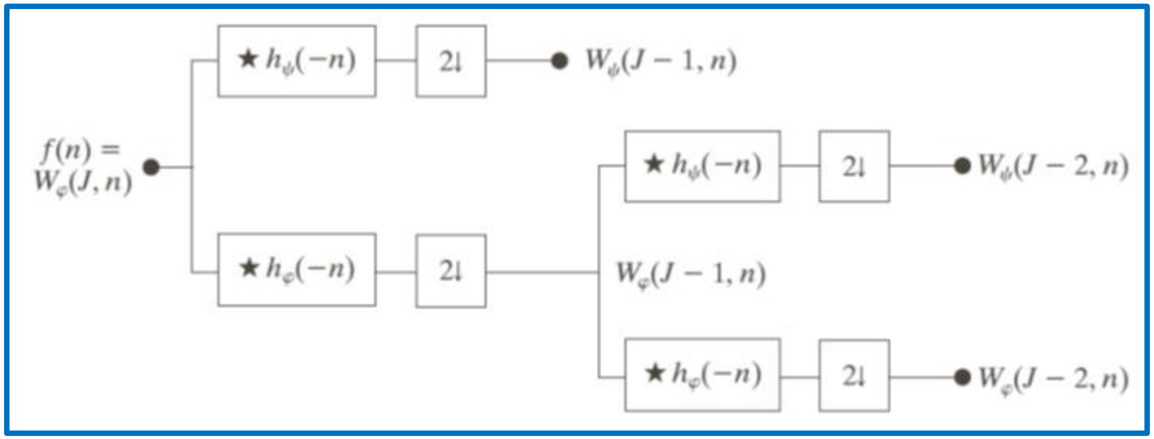
7.4 快速小波变换

7.5 二维小波变换

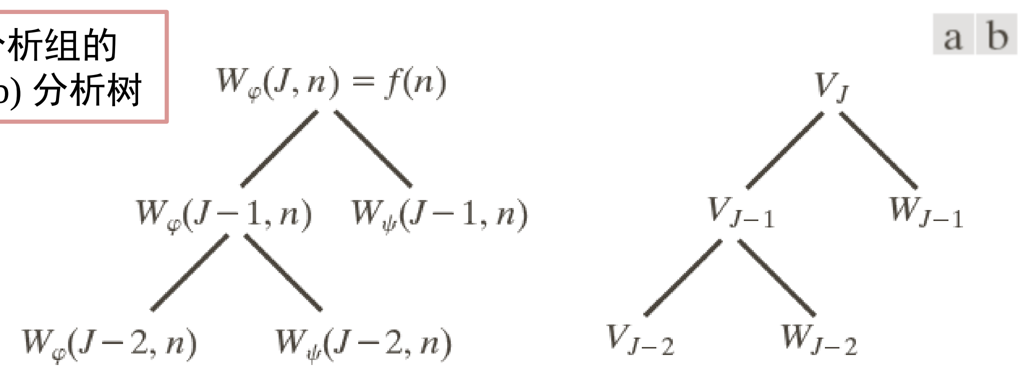
7.6 小波包

7.6 小波包

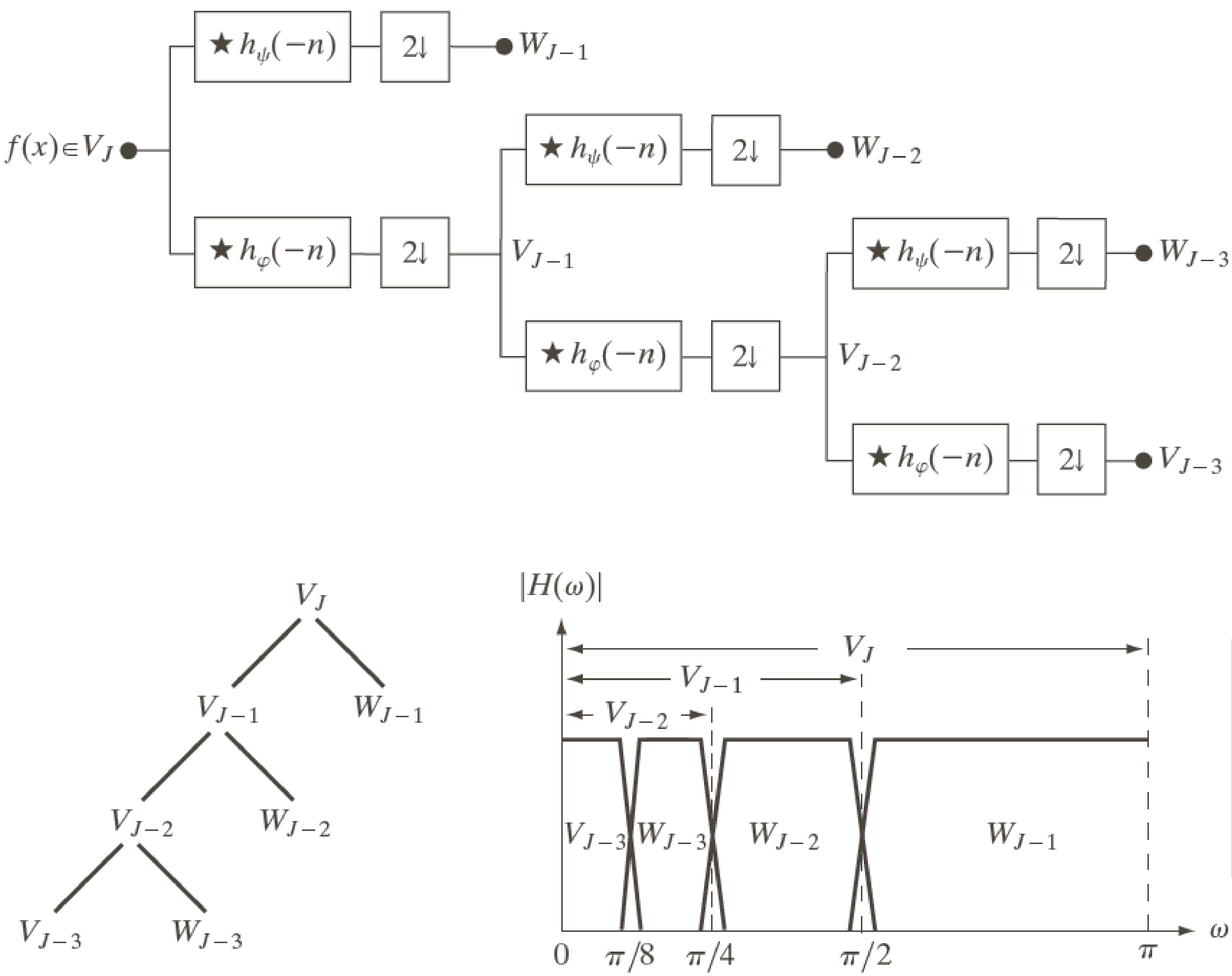
- 将小波分解想象为一个二叉树
  - 根节点被赋予最高尺度的近似，叶节点继承变换的近似和细节



二尺度FWT分析组的
(a) 系数树和(b) 分析树



7.6 小波包



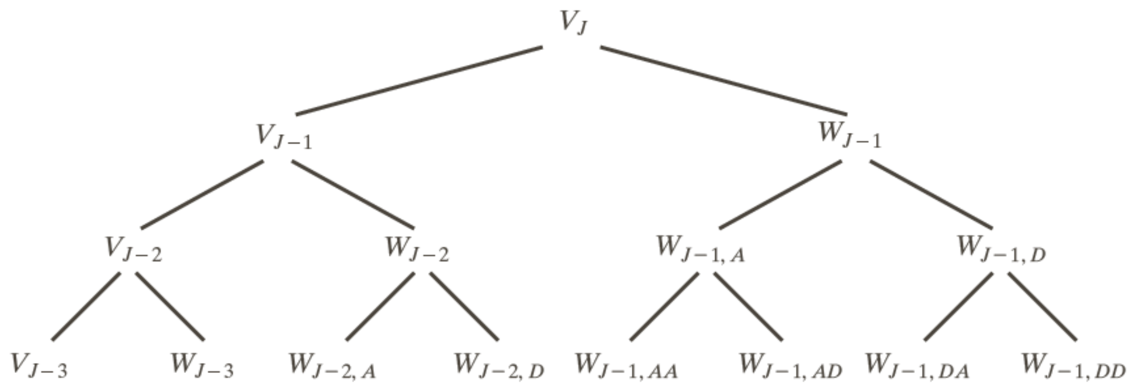
a
b c

FIGURE 7.30
A three-scale FWT filter bank: (a) block diagram; (b) decomposition space tree; and (c) spectrum splitting characteristics.

三尺度FWT分析组：
(a) 方框图
(b) 分解空间树
(c) 频谱分离特性

7.6 小波包

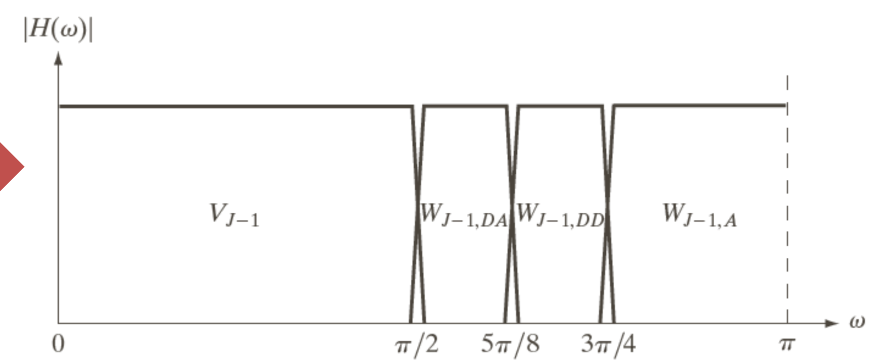
- 在W_{J-1}上附加近似滤波和细节滤波



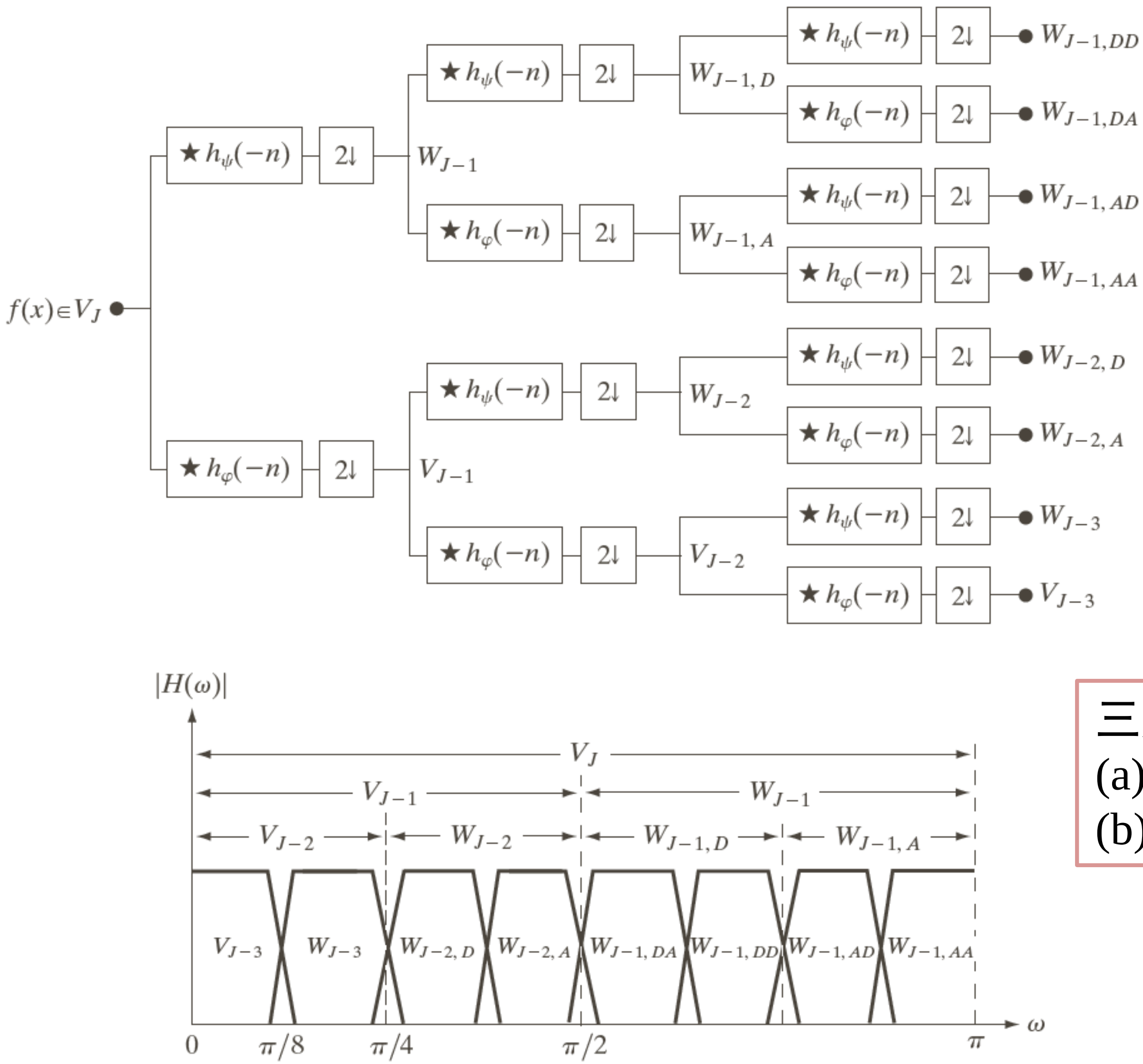
- 上图中的小波包支持26中不同的分解，例如

$$V_J = V_{J-3} \oplus W_{J-3} \oplus W_{J-2,A} \oplus W_{J-2,D} \oplus W_{J-1,AA} \oplus W_{J-1,AD} \oplus W_{J-1,DA} \oplus W_{J-1,DD}$$

$$V_J = V_{J-1} \oplus W_{J-1,A} \oplus W_{J-1,DA} \oplus W_{J-1,DD}$$



7.6 小波包

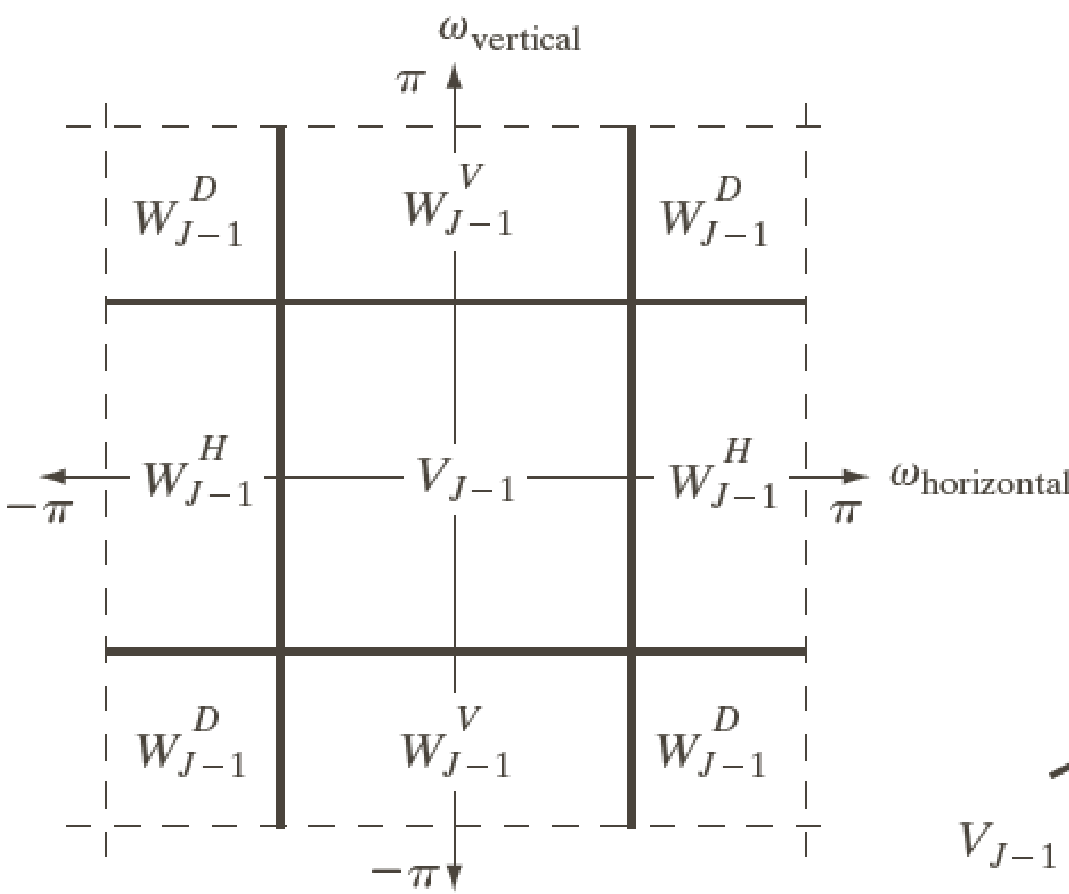


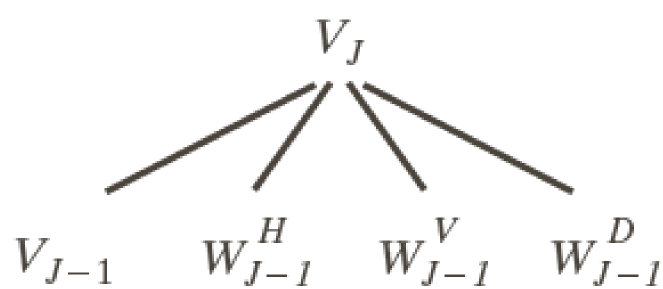
a
b

FIGURE 7.32 The (a) filter bank and (b) spectrum splitting characteristics of a three-scale full wavelet packet analysis tree.

三尺度完全小波包分析树
(a) 滤波器组
(b) 频谱分离特性

7.6 小波包





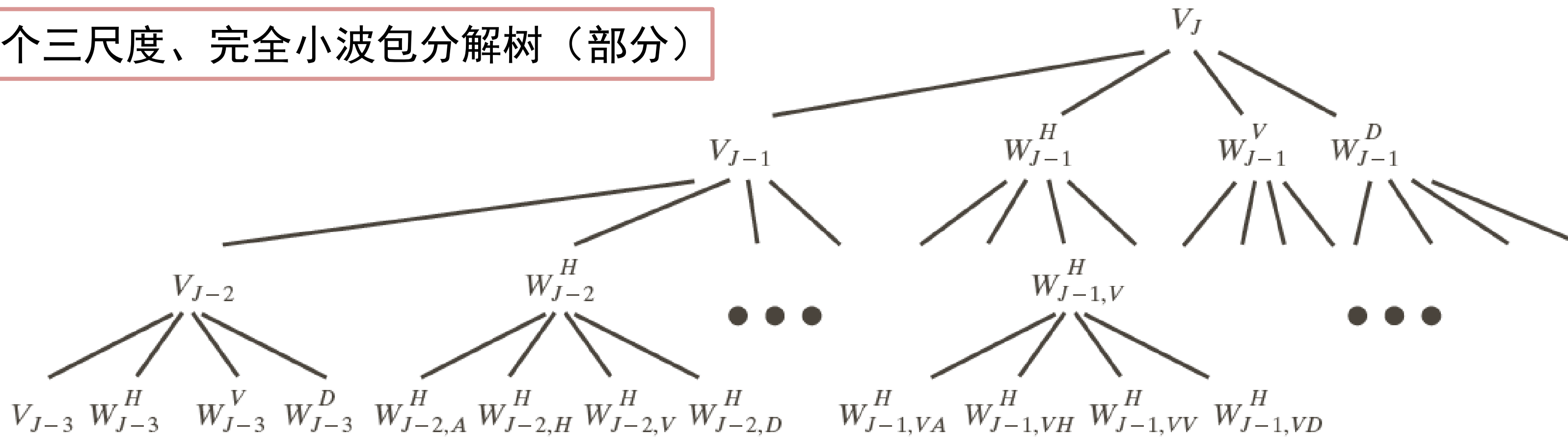
a b

FIGURE 7.34 The first decomposition of a two-dimensional FWT: (a) the spectrum and (b) the subspace analysis tree.

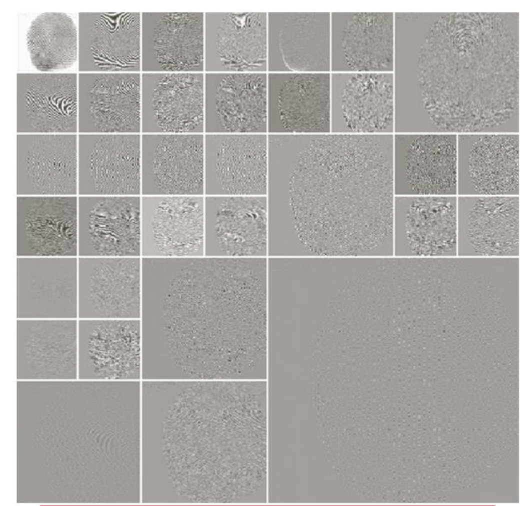
一个二维FWT的第一次分解 (a) 频谱 (b) 子空间分析树

7.6 小波包

一个三尺度、完全小波包分解树（部分）



(a) 一副扫描的指纹图像
(b) 该图像的三尺度、全小波包分解



指纹的一种最佳小波分解

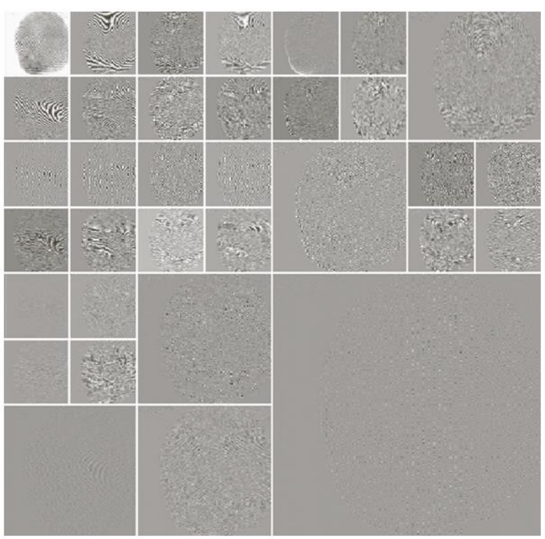
7.6 小波包：指纹图像压缩

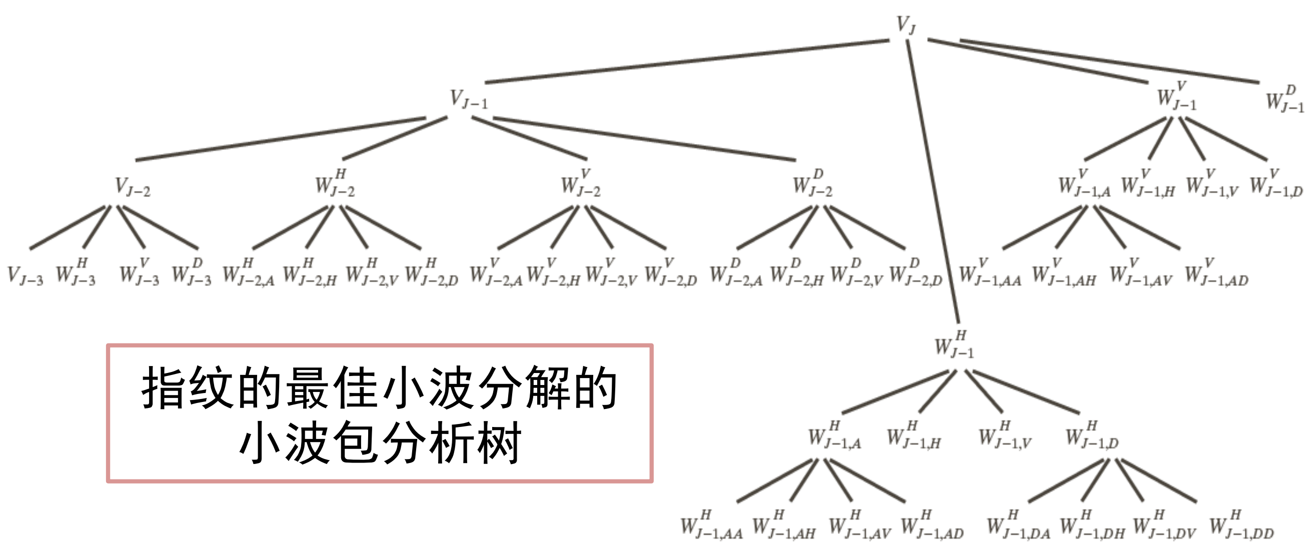
- 面向指纹图像压缩，定义代价函数，即

$$E(f)=\sum_{m,n}|f(m,n)|$$

- 父节点分解条件：子节点联合能量小于父节点能量，即

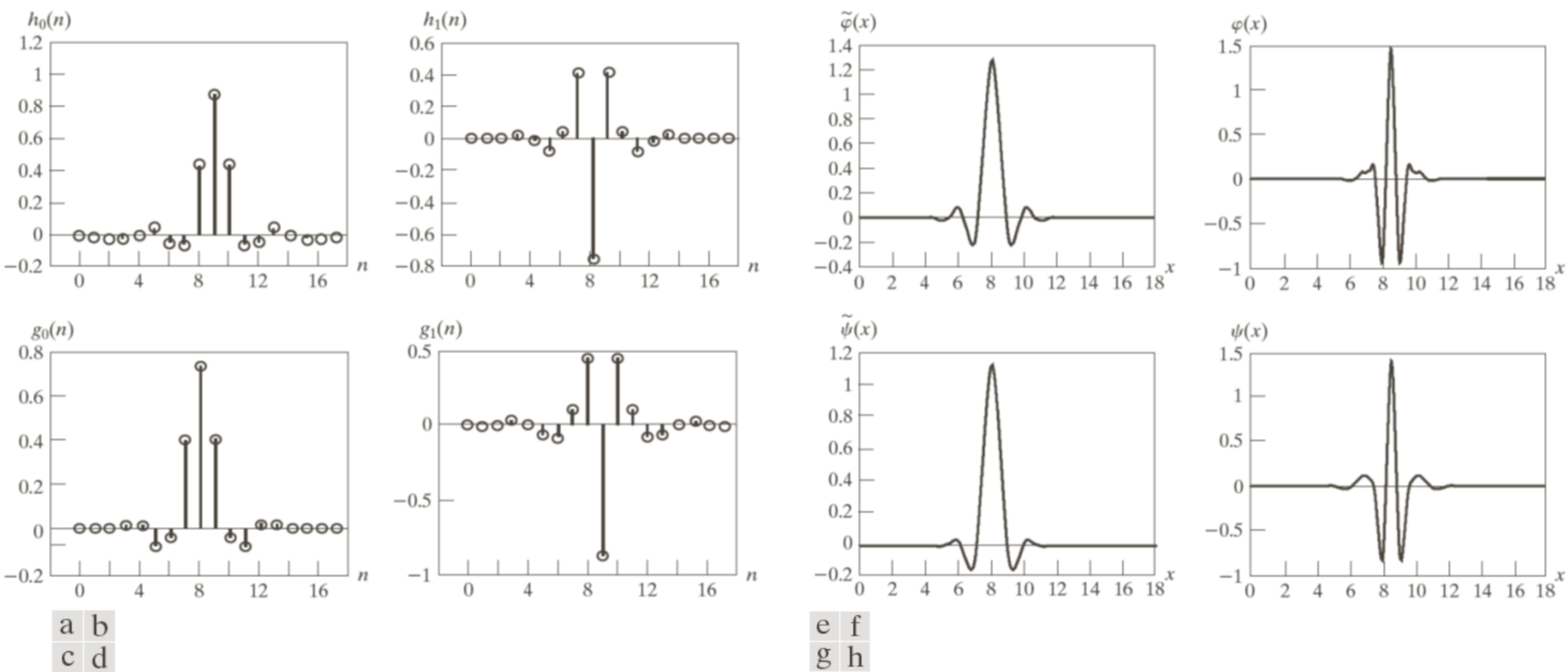
$$E_A+E_A+E_A+E_A<E_P$$





指纹的最佳小波分解的小波包分析树

7.6 小波包



Cohen Daubechies Feauveau 双正交小波族成员：
(a)和(b)分解滤波器系数；(c)和(d)重建滤波器系数；
(e)~(h)双小波和尺度函数。