谓词逻辑推理理论

谓词逻辑推理理论

在谓词逻辑中，由前提A_1，A_2，…，A_n推出结论B的形式结构仍然是$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \rightarrow B$。如果此式是永真式，则称由前提$A_1$，$A_2$，…，$A_n$推出结论$B$的推理正确，记作 $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \Rightarrow B$或者

A_1，A_2，…，$A_n \Rightarrow B$，否则称推理不正确。

由于谓词演算是在命题演算的基础上，进一步加入了谓词与量词等元素，因此容易想到，命题演算中有关推理演绎的规则依然适用于谓词演算，即在命题逻辑中的各项推理规则在谓词逻辑推理中仍然适用，当然也还有些只适用于谓词演算的概念与规则。

以下学习一些仅用于谓词逻辑的推理规则

To prove a theorem of the form $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$, our goal is to show that $P(c) \rightarrow Q(c)$ is true, where c is an arbitrary element of the domain, and then apply universal generalization.

TABLE 2 Rules of Inference for Quantified Statements.

Rule of Inference	*Name*
$\begin{array}{rl} & \forall x P(x) \\ \hline \therefore & P(c) \end{array}$	Universal instantiation
$\begin{array}{rl} & P(c) \text{ for an arbitrary } c \\ \hline \therefore & \forall x P(x) \end{array}$	Universal generalization
$\begin{array}{rl} & \exists x P(x) \\ \hline \therefore & P(c) \text{ for some element } c \end{array}$	Existential instantiation
$\begin{array}{rl} & P(c) \text{ for some element } c \\ \hline \therefore & \exists x P(x) \end{array}$	Existential generalization

全称量词消去规则（简称UI规则）

Universal Instantiation (UI)

$$\frac{\forall\ x A(x)}{A(t)}$$

规则成立的条件：

（1）t是任意个体变项或常量（在相同的个体域下）。

（2）A（t）中其它约束变元与A（x）中x以外的约束变元个数相同，如果说有的话。

全称量词引入规则（简称UG规则）

Universal Generalization (UG)

$$\frac{A(t)}{\forall x A(x)}$$

规则成立的条件：（在相同的个体域下）

（1）A（t）在任何解释I及I中对t的任何赋值下均为真。此处t是自由变量

（2）x不在A（t）中约束出现。

存在量词引入规则（简称EG规则）

Existential Generalization(EG)

$$\frac{A(c)}{\exists x A(x)}$$

规则成立的条件：（包含c的个体域下）。

（1）c只需是某个特定的个体常量。

（2）x不在A（c）中出现。

存在量词消去规则（简称EI规则）

Existential Instantiation (EI)

$$\frac{\exists x A(x)}{A(c)}$$

规则成立的条件：

（1）c是使A（c）为真的某个特定的个体常元。

（2）$\exists xA$（x）是闭式，且c不在A（x）中出现。

特别需要注意的是，使用这些规则的条件非常重要，如果在使用过程中违反了这些条件就可能导致错误的结论。

【例1】 证明推理"所有的自然数均是实数，3是自然数，因此，3是实数。"正确。

解 设N（x）：x是自然数，R（x）：x是实数，则推理形式化为：

$$\forall x(N(x)\rightarrow R(x)),\ N(3)\ \Rightarrow R(3)$$

下面进行证明。

（1） $\forall x(N(x)\rightarrow R(x))$ 前提引入

（2）$N(3)\rightarrow R(3)$ （1）UI

（3）$N(3)$ 前提引入

（4）$R(3)$ （2）（3）

【例2】 构造下面推理的证明：

前提 $\forall x(F(x) \to (G(x) \land H(x)))$，

$\exists x(F(x) \land P(x))$

结论 $\exists x(P(x) \land H(x))$

解	(1) $\forall x(F(x) \rightarrow (G(x) \land H(x)))$	前提引入
	(2) $\exists x(F(x) \land P(x))$	前提引入
	(3) $F(c) \land P(c)$	(2)EI
	(4) $F(c) \rightarrow (G(c) \land H(c))$	(1)UI
	(5) $F(c)$	(3)化简
	(6) $G(c) \land H(c)$	(4)(5)假言推理
	(7) $P(c)$	(3)化简
	(8) $H(c)$	(6)化简
	(9) $P(c) \land H(c)$	(7)(8)合取引入
	(10) $\exists x(P(x) \land H(x))$	(9)EG

思考问题：将这里的（3）和（4）顺序调换，有什么不一样吗？

【例3】 设前提为 $\forall x \exists y F(x, y)$，下面推理是否正确？

（1） $\forall x \exists y F(x, y)$	前提引入
（2） $\exists y F(t, y)$	（1）UI
（3） $F(t, c)$	（2）EI
（4） $\forall x F(x, c)$	（3）UG
（5） $\exists y \forall x F(x, y)$	（4）EG

解 $\forall x\exists yF(x,y)\Rightarrow\exists y\forall xF(x,y)$的推理不正确。利用前面谓词公式的解释，则由 $\forall x\exists yF(x,y)$为真，而$\exists y\forall xF(x,y)$意为“存在着最小实数”，是假命题，知推理不正确。之所以出现这样的错误，是第（3）步违反了EI规则成立的条件（2），因为这里的t与c是有关的。

【例4】 构造下面推理的证明：

前提 $\forall x(F(x)\to \mathrm{G}(x))$

结论 $\forall xF(x)\to \forall x\mathrm{G}(x)$

分析 本题直接证明很困难，注意到结论部分是蕴涵式，可考虑用附加前提证明法。

证明

（1）$\forall x(F(x)\to G(x))$　前提引入

（2）$\forall xF(x)$　附加前提引入

（3）$F(t)$　（2）UI

（4）$F(t)\to G(t)$　（1）UI

（5）$G(t)$　（3）（4）假言推理

（6）$\forall xG(x)$　（5）UG

（7）$\forall xF(x)\to \forall xG(x)$

能否用反正法？

例5 指出下面推理的错误

证明：

	（1）	$\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$	前提
	（2）	$\exists x P(x)$	（1）；I_1
	（3）	$\exists x Q(x)$	（1）；I_2
	（4）	$P(c)$	（2）；ES
错！	（5）	$Q(c)$	（3）；ES
	（6）	$P(c) \wedge Q(c)$	（4）（5）；I_9
	（7）	$\exists x (P(x) \wedge Q(x))$	（6）；EG

因此 $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x) \Rightarrow \exists x (P(x) \wedge Q(x))$

例6 指出下面推理的错误

设$D(x,y)$表示“x可被y 整除”，个体域为 $\{5,7,10,11\}$

因为$D(5，5)$和$D(10,5)$为真，所以 $\exists xD(x,5)$为真.

因为$D(7，5)$和$D(11,5)$为假，所以 $\forall xD(x,5)$为假.

分析有下面的推理过程：

(1) $\exists xD(x,5)$ 前提

(2) $D(z,5)$ (1);ES

错！(3) $\forall xD(x,5)$ (2);UG

因此， $\exists xD(x,5) \Rightarrow \forall xD(x,5)$.

【例7】在谓词逻辑推理系统中构造下面推理的证明：

没有不守信用的人是可以信赖的。有些可以信赖的人是受过教育的人。因此有些受过教育的人是守信用的。

设：$M(x)$：x是人，$F(x)$：x守信用，$G(x)$：x可信赖，

$H(x)$：x受过教育。

前提：$\neg\exists x(M(x) \wedge \neg F(x) \wedge G(x))$，$\exists x(M(x) \wedge G(x) \wedge H(x))$

结论：$\exists x(M(x) \wedge H(x) \wedge F(x))$

证明：$\neg\exists x(M(x) \land \neg F(x) \land G(x))$ 前提

$\forall x(\neg M(x) \lor F(x) \lor \neg G(x))$ Demorgen定律

$\forall x(\neg M(x) \lor \neg G(x) \lor F(x))$ 交换律

$\forall x(\neg (M(x) \land G(x)) \lor F(x))$ Demorgen定律

$\forall x((M(x) \land G(x)) \rightarrow F(x))$

$(M(t) \land G(t)) \rightarrow F(t)$ UI规则（t自由变量）

$\exists x(M(x) \land G(x) \land H(x))$ 前提

$M(c) \land G(c) \land H(c)$ EI

$M(c) \land G(c)$

$H(c)$

$(M(c) \land G(c)) \rightarrow F(c)$

$F(c)$

$M(c) \land H(c) \land F(c)$

$\exists x(M(x) \land H(x) \land F(x))$ 要证的结论

课外作业

教材 1.6 节

P46

T10 (a)

T12

T15

逻辑部分内容就讲到此

更多参考例题习题

补充：存在唯一量词∃!

很多的命题有存在唯一的表述，或者是说有且仅有一个。

量词表示： ∃!

例如：存在唯一的偶素数. P(x):x是素数，E(x):x是偶数

表示： $\exists!\ x(P(x)\wedge E(x))$

不用∃！的表示方法：

举例： $\exists!\ xA(x)$ 也可以表示为

$$\exists x\ (\ A(x) \wedge \forall y(y\neq x)\ \neg A(y)\ )$$

or $\exists x\ (\ A(x) \wedge \forall y(\ D(x,y)\rightarrow \neg A(y)\ )$,其中D(x,y)表示$y\neq x$.

Or $\exists x(A(x) \wedge \forall y(A(y)\rightarrow x=y))$

课堂练习：

符号化下面语句，并用构造证明法证明其推理的正确性。

所有的旅客或者坐头等舱或者坐经济舱，每个旅客当且仅当他富裕时坐头等舱，有些旅客富裕但并非所有的旅客均富裕。因此，有些旅客坐经济舱。

设F(x):x是旅客，G(x):x坐头等舱，H(x):x坐经济舱，S(x):x是富裕的。

前提：$\forall x(F(x) \to (G(x) \vee H(x)))$

$\forall x(F(x) \to (G(x) \leftrightarrow S(x)))$

$\exists x(F(x) \wedge S(x)) \wedge \neg\forall x(F(x) \to S(x))$

结论：$\exists x(F(x) \wedge H(x))$

【例8】在谓词逻辑中符号化自然数的三条公理（皮亚诺公理）。

（1）每个数都有唯一的一个数是它的后继数。

（2）没有一个数使0为它的后继数。

（3）每个不等于0的数都有唯一的一个数是它的直接先行者。

分析 在符号化命题的过程中，设定谓词尽可能少是一个原则。注意到"x是y的后继数"与"y是x的直接先行者"含义相同，所以可用一个谓词表示。

解 设$N(x)$：x是自然数，$F(x, y)$：x是y的后继数，$G(x, y)$：$x=y$，则

（1）$\forall x(N(x) \rightarrow \exists! y(N(y) \wedge F(y, x)))$

（2）$\neg \exists x(N(x) \wedge F(0, x))$

（3）$\exists x((N(x) \wedge \neg G(x, 0))$

$\rightarrow \exists! y(N(y) \wedge F(x, y)))$

【例9】将符号$\exists!xF(x)$表达成仅用量词的形式。

分析 $\exists!xF(x)$的意思是：存在唯一的x具有性质F。即有x具有性质F，且若还有y也具有性质F，则必有$x=y$。

解

$$\exists!xF(x) \Leftrightarrow \exists x(F(x) \wedge \forall y(F(y) \rightarrow x=y))$$

【例10】 设个体域为$\{a，b，c\}$，消去下列公式中的量词。

（1）$\forall xF(x) \land \exists yG(y)$

（2）$\forall x\exists y(F(x) \land G(y))$

（3）$\forall x\exists y(F(x,y) \rightarrow G(y))$

解 （1） $\forall x F(x) \land \exists y G(y) \Leftrightarrow$

$(F(a) \land F(b) \land F(c)) \land (F(a) \lor F(b) \lor F(c))$

（2） $\forall x \exists y (F(x) \land G(y)) \Leftrightarrow$

$\exists y(F(a) \land G(y)) \land \exists y(F(b) \land G(y)) \land \exists y(F(c) \land G(y))$

$\Leftrightarrow ((F(a) \land G(a)) \lor (F(a) \land G(b)) \lor (F(a) \land G(c))) \land$

$((F(b) \land G(a)) \lor (F(b) \land G(b)) \lor (F(b) \land G(c))) \land$

$((F(c) \land G(a)) \lor (F(c) \land G(b)) \lor (F(c) \land G(c)))$

（3） $\forall x \exists y（F（x,\ y）\rightarrow G（y））\Leftrightarrow$

$$\exists y(F(a,y)\rightarrow G(y)) \wedge \exists y(F(b,y)\rightarrow G(y))$$

$$\wedge \exists y(F(c,y)\rightarrow G(y))$$

$$\Leftrightarrow$$

$$((F(a,a)\rightarrow G(a)) \vee (F(a,b)\rightarrow G(b)) \vee (F(a,c)\rightarrow G(c))) \wedge$$

$$((F(b,a)\rightarrow G(a)) \vee (F(b,b)\rightarrow G(b)) \vee (F(b,c)\rightarrow G(c))) \wedge$$

$$((F(b,a)\rightarrow G(a)) \vee (F(b,b)\rightarrow G(b)) \vee (F(b,c)\rightarrow G(c)))$$

【例11】 构造下面推理的证明：

前提 $\forall xF(x) \lor \forall xG(x)$

结论 $\forall x(F(x) \lor G(x))$

证明

(1) $\forall xF(x) \lor \forall xG(x)$ 前提引入

(2) $\forall x \forall y(F(x) \lor G(y))$ (1) 置换

(3) $\forall y(F(t) \lor G(y))$ (2) UI

(4) $F(t) \lor G(t)$ (3) UI

(5) $\forall x(F(x) \lor G(x))$ (4) UG

补充课外习题

1．在谓词逻辑中将下列命题符号化。

（1）天下乌鸦一般黑。

（2）没有不散的筵席。

（3）闪光的未必是金子。

（4）有不是奇数的素数。

（5）有且仅有一个偶素数。

（6）猫是动物，但并非所有的动物都是猫。

（7）骆驼都比马大。

（8）有的骆驼比所有的马都大。

（9）所有的骆驼都比某些马大。

（10）有的骆驼比某些马大。

2．取个体域为实数集R，函数f在点a处连续的定义是：f在a点连续，当且仅当对每一个小正数ε，都存在正数δ，使得对所有的x，若$|x-a|<\delta$，则$|f(x)-f(a)|<\varepsilon$。把上述定义用符号的形式表示。

3．在整数集中，确定下列命题的真值，运算"·"是普通乘法。

（1）$\forall x \exists y (x \cdot y=0)$

（2）$\forall x \exists y (x \cdot y=1)$

（3）$\exists y \forall x (x \cdot y=1)$

（4）$\exists y \forall x (x \cdot y=x)$

4．给定谓词如下，试将下列命题译成自然语言。$P(x)$：x是素数。 $E(x)$：x是偶数。$O(x)$：x是奇数。$D(x, y)$：x整除y。

（1） $\forall E(2) \wedge P(2)$

（2）$\exists x(D(2, x) \rightarrow E(x))$

（3） $\forall \mathrm{x}(E(x) \wedge D(x, 6))$

（4） $\forall x(E(x) \rightarrow D(2, x))$

（5）$\forall x\,(E(x) \to \forall y\,(D(x, y) \to E(y)))$

（6）$\forall x\,(O(x) \to \forall y\,(P(y) \to D(x, y)))$

（7）$\forall x\,(P(x) \to \exists y\,(E(y) \land D(x, y)))$

（8）$\exists x\,(E(x) \land P(x) \land \exists y\,(E(y) \land P(y) \land x \neq y))$

5．指出下面公式中的变量是约束的，还是自由的，并指出量词的辖域。

（1）$\forall x(F(x)\wedge G(x))\rightarrow\forall x(F(x)\wedge H(x))$

（2）$\forall xF(x)\wedge(\forall xG(x)\vee(\forall xF(x)\rightarrow G(x)))$

（3）$\forall x((F(x)\wedge G(x,y))$

$\rightarrow(\ \ xF(x)\wedge R(x,y,z)))$

（4）$\exists x(yF(x,y,z))\leftrightarrow\forall y\exists xF(x,y,z)$

6．设个体域$D=\{a，b，c\}$，消去下列各式中的量词.

（1）$\forall xF(x) \rightarrow \forall y\ F(y)$

（2）$\exists x(F(x) \lor \forall yG(y))$

（3）$\forall x\forall y(F(x) \rightarrow G(y))$

（4）$\exists x\ \forall yF(x，y，z)$

7．求下列公式在解释I下的真值。

（1）$\forall x(F(x) \lor G(x))$，解释I：个体域$D=\{1，2\}$；$F(x)$：$x=1$；$G(x)$：$x=2$。

（2）$\forall x(p \rightarrow Q(x)) \lor R(a)$，解释I：个体域$D=\{-2，3，6\}$；$p$：$1<2$；$Q(x)$：$x \leq 3$，$R(x)$：$x>5$；$a$：5。

8．给定解释I和I中赋值v如下：

个体域D为实数集，E（x，y）：$x=y$，G（x，y）：$x>y$，N（x）：x是自然数，

f（x，y）$=x-y$，g（x，y）$=x+y$，N（x，y）$=x \cdot y$

v（x）=1，v（y）=-2

求下列公式在解释I和赋值v下的真值。

（1）$\forall x \forall y E(g(x, y), g(y, x))$

（2）$N(x) \wedge \ y(N(y) \rightarrow$

$(G(y, x) \vee E(y, x)))$

（3）$\forall y \exists z E(N(y, z), x)$

（4）$\forall x \forall y E(N(f(x, y), g(x, y)),$

$f(N(x, x), N(y, y)))$

（5）$E(g(x, g(x, y)), a)$

证明量词辖域扩缩律（4）：

$$\exists x\ A(x) \vee B \Leftrightarrow \forall x\,(A(x) \vee B)$$

9．构造下列推理的证明：

（1）前提：$\exists xF(x) \land \forall xG(x)$

结论：$\exists x(F(x) \land G(x))$

（2）前提：$\forall x(F(x) \lor G(x))$

结论：$\forall xF(x) \lor \exists xG(x)$

（提示：用附加前提法或归缪法证明）

10．在谓词逻辑中构造下列推理的证明。

（1）有理数都是实数。有的有理数是整数。因此，有的实数是整数。

（2）所有的有理数都是实数。所有的无理数也都是实数。任何虚数都不是实数。所以，虚数既非有理数也非无理数。

（3）不存在不能表示成分数的有理数。无理数都不能表示成分数。所以，无理数都不是有理数。

11．在谓词逻辑中构造下列推理的证明。

（1）有些病人相信所有的医生。所有的病人都不相信骗子。因此，所有的医生都不是骗子。

（2）任何人如果他喜欢步行，他就不喜欢乘汽车。每个人或者喜欢乘汽车，或者喜欢骑自行车。有的人不爱骑自行车。因此有的人不爱步行。