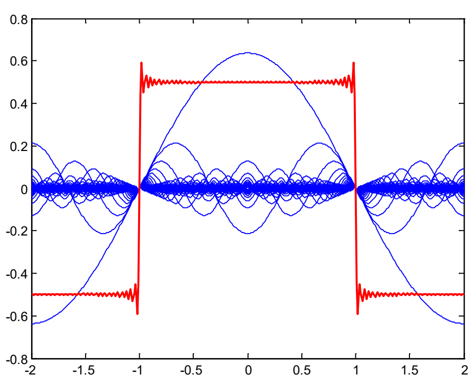
信号与系统

第8讲 信号通过系统的频域分析方法

郭红星

华中科技大学计算机学院

May 9, 2020



复习

- 连续时间系统的时域分析
  - 线性系统响应的时域求解
  - **零输入与零状态响应**
  - **冲激响应与卷积积分**

- 连续信号的正交分解
  - 周期信号的傅里叶级数表示
  - 非周期信号的傅里叶变换
  - 傅里叶变换的基本性质

本讲内容

- 信号通过系统的频域分析方法
- 理想低通滤波器的冲激响应与阶跃响应
  - 系统的物理可实现性
  - 吉布斯现象的理论证明及振铃效应
- **系统无失真传输及有失真时的线性畸变**
  - 群时延和相位时延
  - 线性相位的本质及其重要性

4.1 连续系统的频域分析方法

单频周期正弦信号激励下的系统响应

问题：设 $e(t)=\sin\omega_0 t$，系统单位冲激响应为$h(t)$，求响应$r(t)$。

因为$r(t)=e(t)*h(t)$，由时域卷积定理有：$R(j\omega)=E(j\omega)H(j\omega)$

而： $E(j\omega)=j\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$ $H(j\omega)=|H(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$

所以：$R(j\omega)=j\pi H(j\omega)[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$

$=j\pi|H(j\omega_0)|[e^{-j\varphi_0}\delta(\omega+\omega_0)-e^{j\varphi_0}\delta(\omega-\omega_0)]$

其中，$\varphi_0=\varphi(\omega_0)$
CFT的奇偶性质

利用频移性质

$$r(t)=|H(j\omega_0)|\sin(\omega_0 t+\varphi_0)$$

思考：系统对输入作了何种改变？

再思考：输出信号是否产生新的频率分量？

一般信号激励系统的响应

思考：如何分析系统输入为一般信号的响应？

叠加性: 等于一系列正弦信号同时作用于系统时所引起的响应之和。

均匀性： 正弦激励产生的响应仍是同频率的正弦信号。

时域： $e(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow r(t)$　　$r(t)=e(t)*h(t)$

激励　　响应

频域： $E(j\omega) \rightarrow \boxed{H(j\omega)} \rightarrow R(j\omega)$　　$R(j\omega)=E(j\omega)H(j\omega)$

$H(j\omega)$被定义为**频响函数**

$$H(j\omega)=\frac{R(j\omega)}{E(j\omega)}=|H(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$$

相频特性

幅频特性

系统响应的频域求解步骤

a. 求激励的频谱 $E(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} e(t)e^{-j\omega t}dt$

b. 求频响函数 $H(j\omega)=\dfrac{R(j\omega)}{E(j\omega)}$

c. 计算响应的频谱 $R(j\omega)=H(j\omega)E(j\omega)$

d. 求$R(j\omega)$的傅里叶反变换

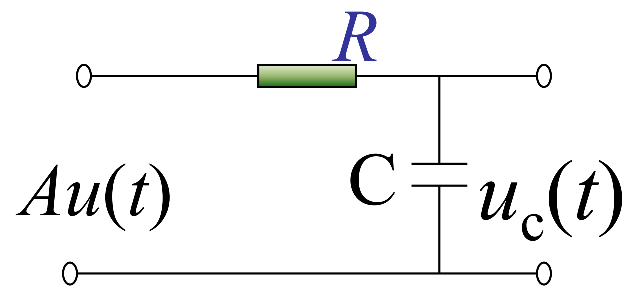
$$r(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} E(j\omega)H(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

阶跃信号通过RC电路的Z.S.R

- 求如图所示的电路对阶跃信号的响应$u_c(t)$

解：

$$a.Au(t) \leftrightarrow E[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}]$$



P163.图4-2

b. 求系统的频响函数$H(j\omega)$

课本上采用相量法

$$令\ \tau = RC$$

$$H(j\omega) = k_c(j\omega) = \frac{\frac{1}{j\omega c}}{R + \frac{1}{j\omega c}} = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$$

正弦稳态响应—相量法的理论基础就是傅里叶变换（以电容为例）

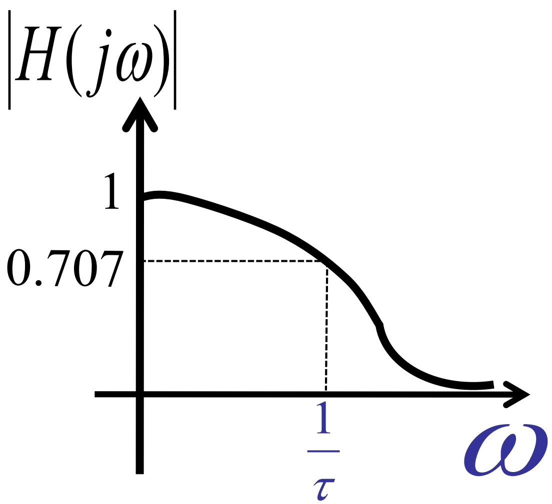
电子元件等效导纳？傅里叶变换

RC电路对阶跃信号的响应

$$\left|H(j\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{\left(1+\omega^2\tau^2\right)}}$$

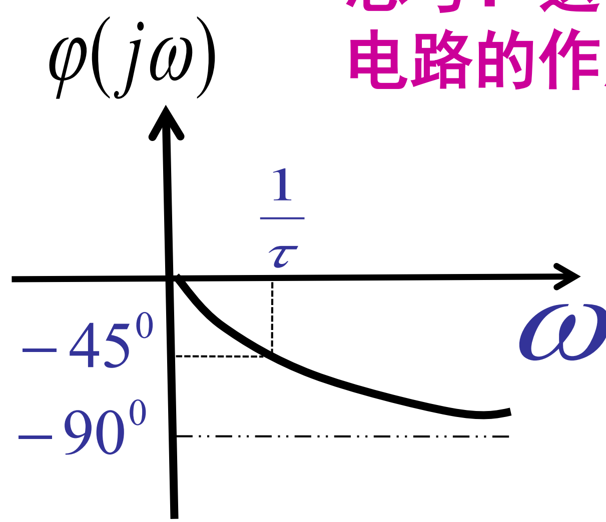
$$\varphi(j\omega) = -arctg\,\omega\tau$$

思考：这个RC电路的作用？



RC低通滤波器

■幅频响特性曲线



■相频响特性曲线

RC低通滤波器对阶跃信号的响应

C. $$U_c(j\omega)=E(j\omega)H(j\omega)=A[\pi\delta(j\omega)+\frac{1}{j\omega}][\frac{1}{1+j\omega\tau}]$$

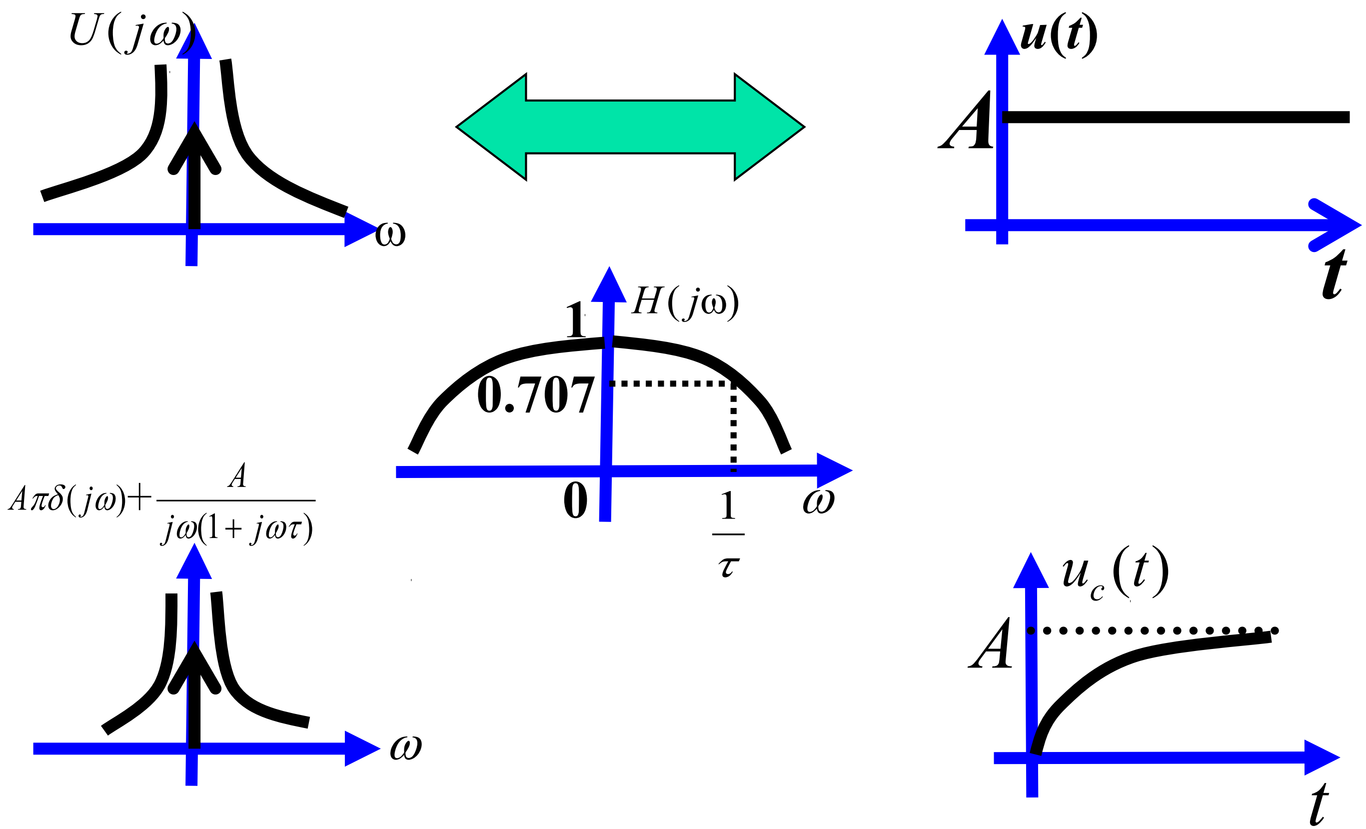
$$=A[\pi\delta(j\omega)+\frac{1}{j\omega}][1-\frac{j\omega\tau}{1+j\omega\tau}]=A[\pi\delta(j\omega)+\frac{1}{j\omega}]-A[\pi\delta(j\omega)+\frac{1}{j\omega}]\frac{j\omega\tau}{1+j\omega\tau}$$

$$=A[\pi\delta(j\omega)+\frac{1}{j\omega}]-A\frac{\tau}{1+j\omega\tau}=A[\pi\delta(j\omega)+\frac{1}{j\omega}]-\frac{A}{j\omega+\frac{1}{\tau}}$$

d.对输出的频谱函数$U_c(j\omega)$进行傅里叶反变换得：

$$u_c(t)=A(1-e^{-\frac{1}{\tau}t})u(t)$$

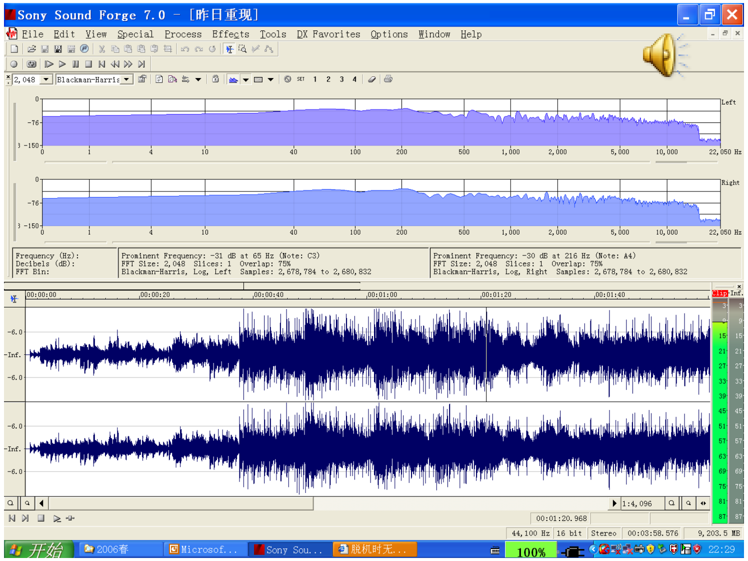
RC低通滤波器响应的物理解释

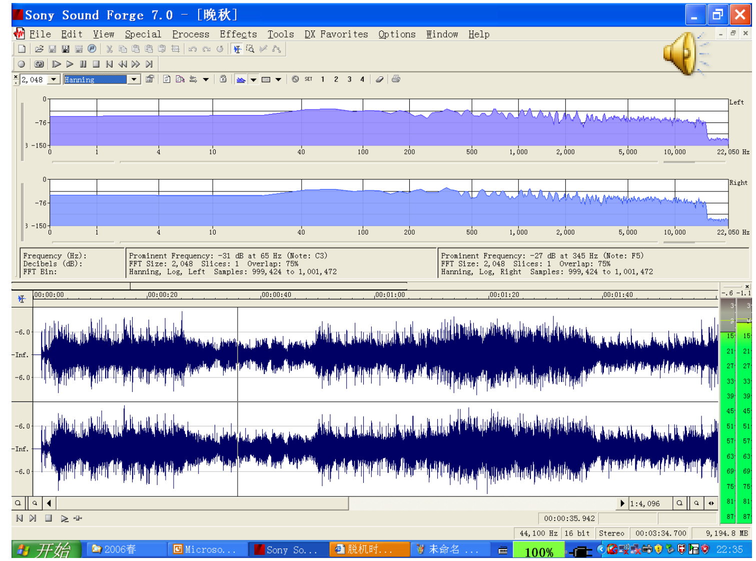


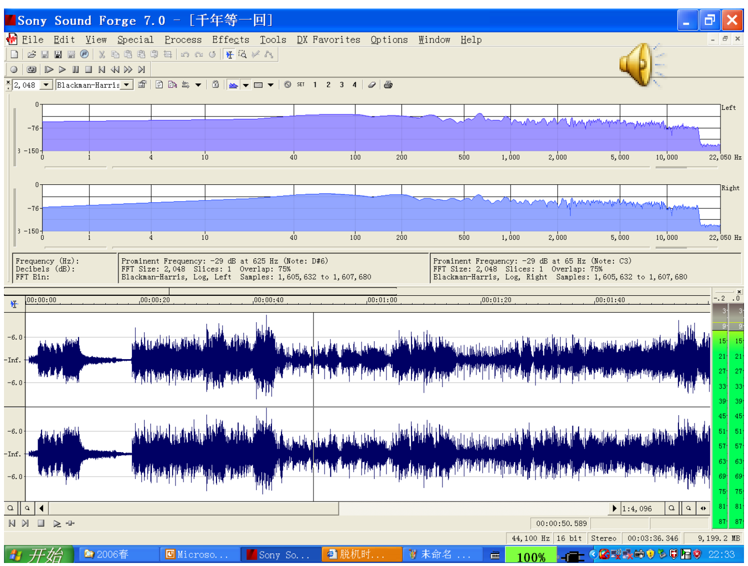
■输入信号经过低通滤波器后，高频分量受到衰减，因此输出不能象输入那样陡峭；冲激谱线仍然存在，所以输出中仍存在直流分量。

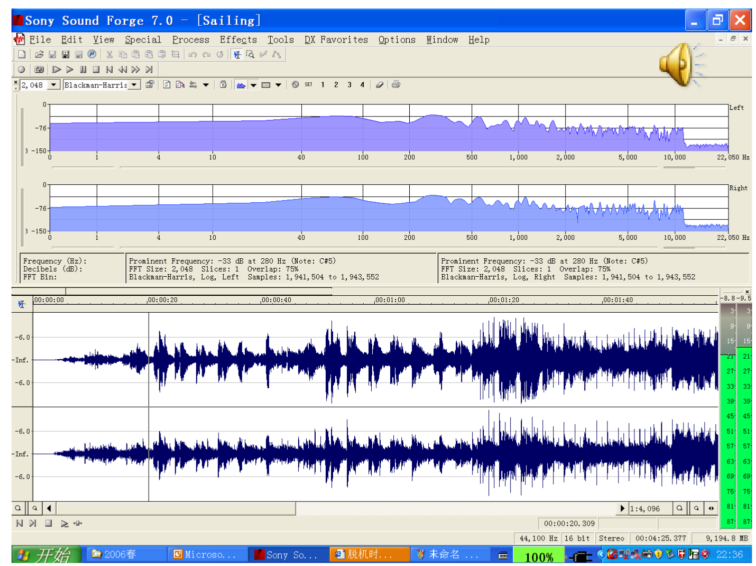
4.2 理想低通滤波器与信号失真

音频的波形与频谱

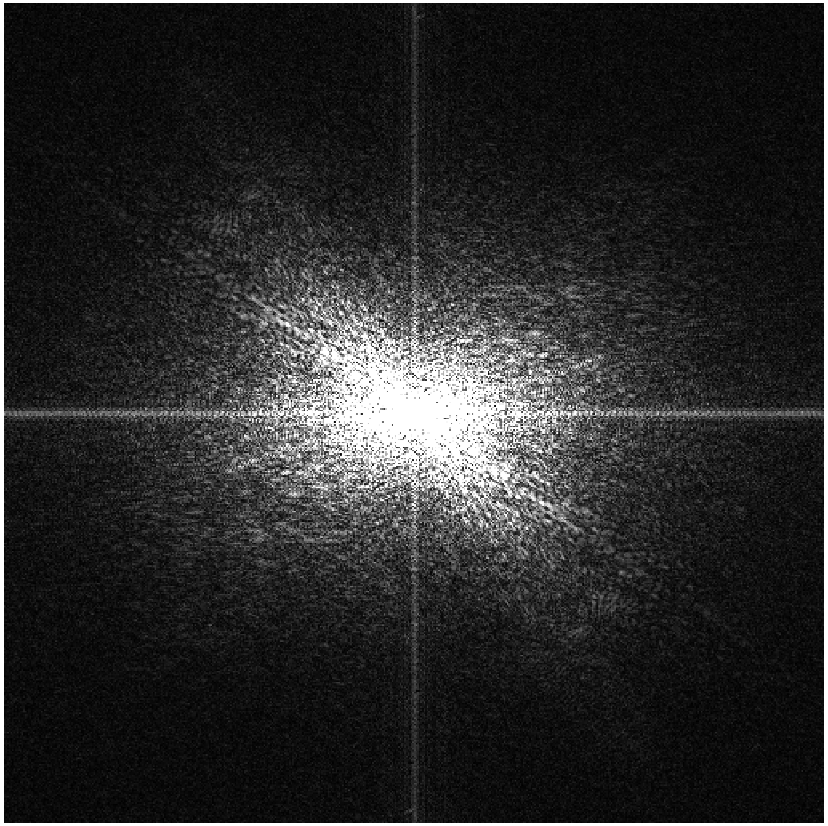

Sony Sound Forge 7.0 - [昨日重现]


Sony Sound Forge 7.0 - [晚秋]


Sony Sound Forge 7.0 - [千年等一回]

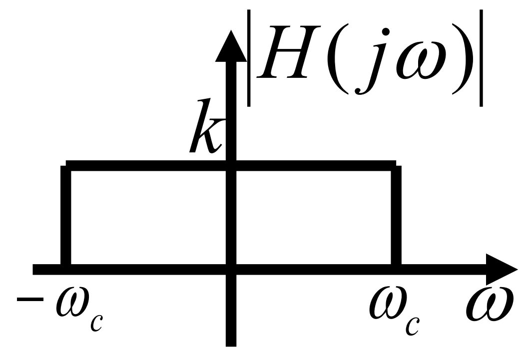

Sony Sound Forge 7.0 - [Sailing]

Lena灰度图像及其频谱



理想低通滤波器(ILPF)

$$H(j\omega)=\begin{cases} k & -\omega_c<\omega<\omega_c \\ 0 & \omega\text{为其它值} \end{cases}$$

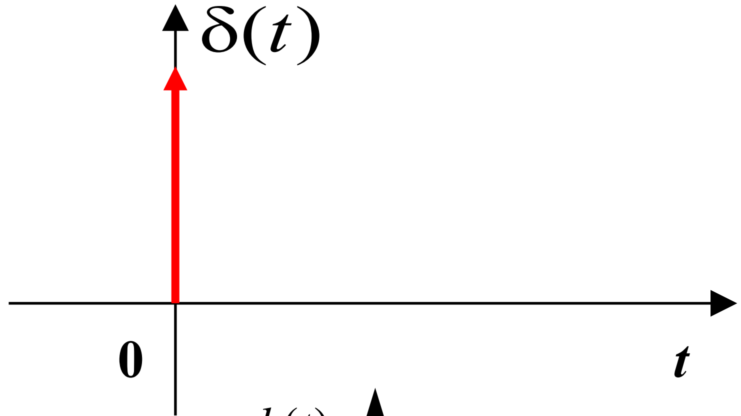


为简单起见，这里假设相位特性为0，对应课本上t_0=0的情形

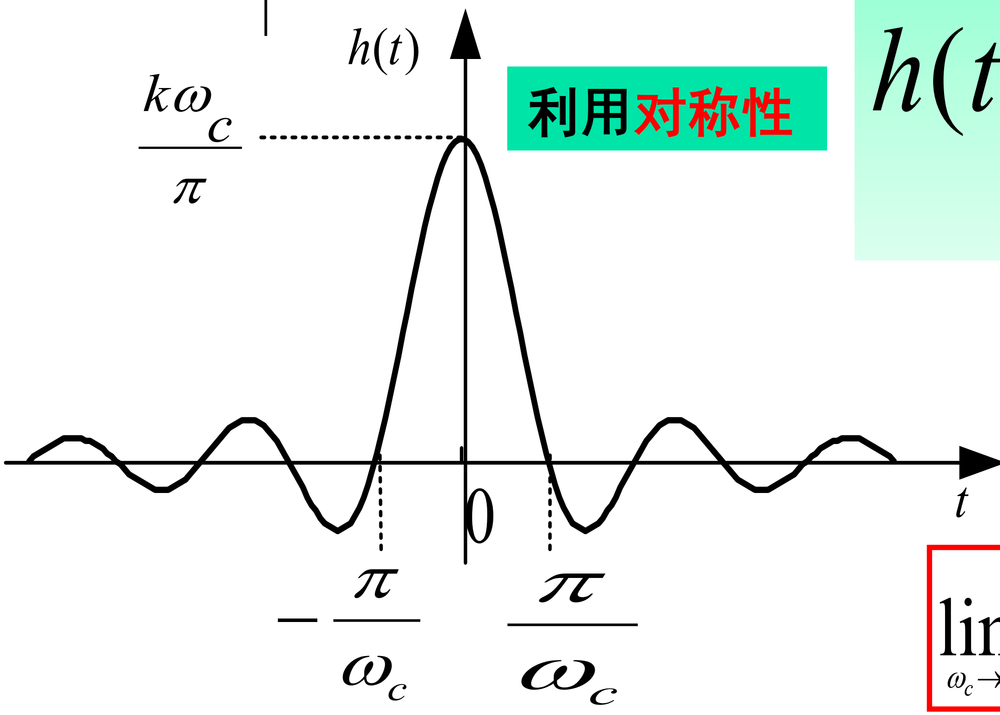
■ILPF的单位冲激响应

$$h(t)\leftrightarrow H(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{-j\omega t}dt$$

理想低通滤波器的单位冲激响应



思考：理想低通滤波器是物理可实现的吗？



利用对称性

$$h(t)=\frac{k\omega_c}{\pi}\frac{\sin\omega_c t}{\omega_c t}$$

波形分析：

- 波形产生了失真。
- $h(t)$的主峰发生在$t=0$处。

$$\boxed{\lim_{\omega_c\to\infty}h(t)=\lim_{\omega_c\to\infty}\frac{k\omega_c}{\pi}Sa(\omega_c t)=k\delta(t)}$$

系统的物理可实现性及其判定

1.时域—因果性

$$t<0,\quad h(t)=0$$

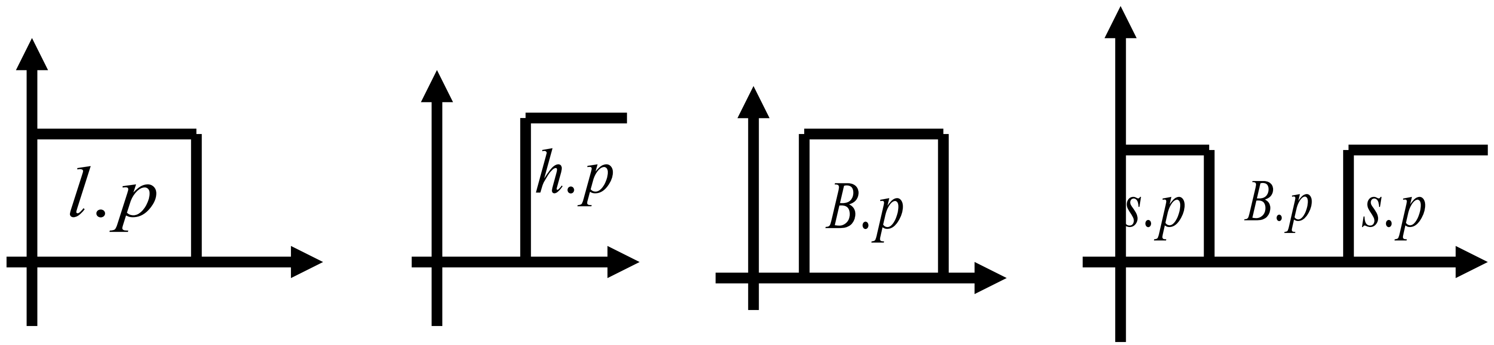
2.频域—频响函数$H(\mathrm{j}\omega)$在某些离散频率处可以是零，但在一有限频带内不能为零

限制了衰减速度

$$\left|H(j\omega)\right|\neq 0$$

- 上述准则是物理可实现系统的**必要条件**，而**不是充分条件**。

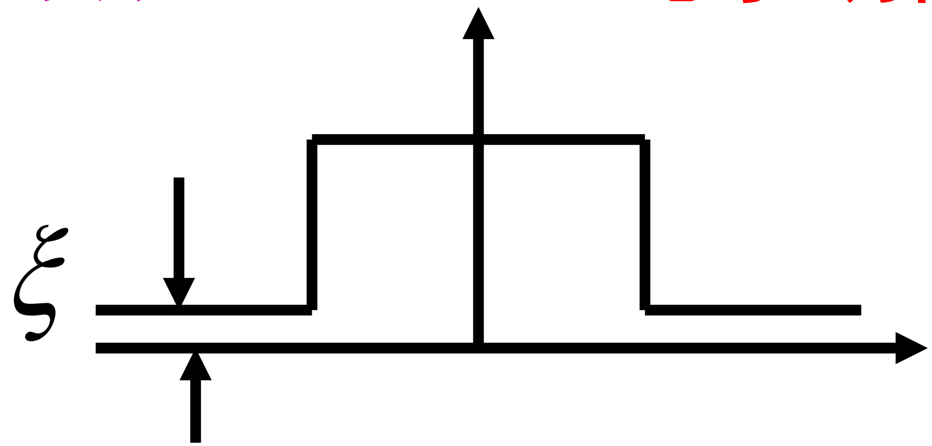
一些理想系统的物理可实现性



都不能实现

思考：为什么？

I.L.P可以任意逼近.



- 如何获得最好的逼近—这就引出了滤波器的设计问题
- 如何“取出”信号中部分频率—窗函数的设计问题

ILPF的单位阶跃响应$r_u(t)$

$$\because u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau,$$

$$\therefore r_u(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{t}\frac{\omega_c}{\pi}Sa(\omega_c\tau)d\tau$$

这里取$k=1$

令：$x=\omega_c\tau, dx=\omega_c d\tau, d\tau=\dfrac{dx}{\omega_c}$

$$r_u(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\omega_c t}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{1}{\pi}[\int_{-\infty}^{0}\frac{\sin x}{x}dx+\int_{0}^{\omega_c t}\frac{\sin x}{x}dx]$$

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{\sin x}{x}dx=-\int_{\infty}^{0}\frac{\sin x}{x}dx=\int_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}.....(1)$$

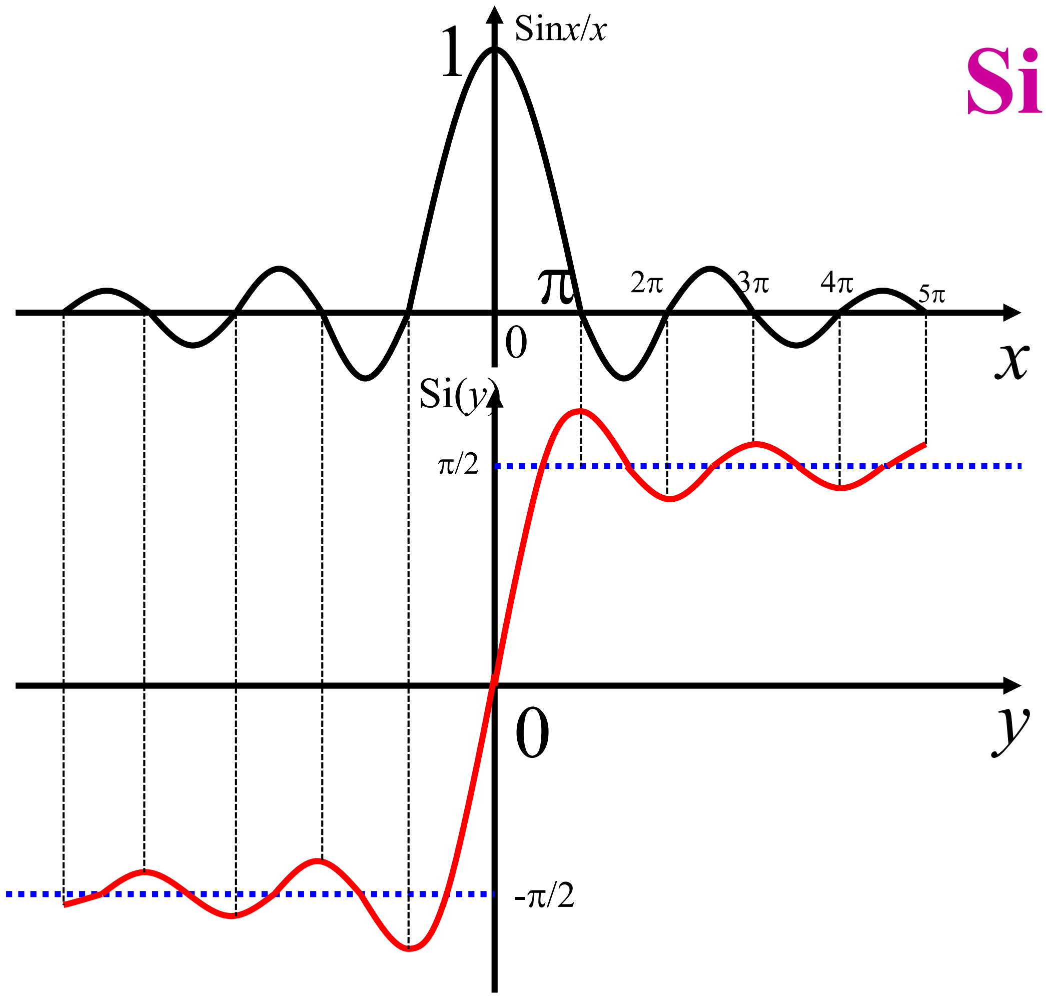
利用傅氏变换的对称性计算

$$Si(y)=\int_{0}^{y}\frac{\sin x}{x}dx=\int_{0}^{y}Sa(x)dx...(2)$$

这就是所谓的正弦积分

$$r_u(t)=[\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}Si(\omega_c t)]$$

正弦积分的说明



Si(y)是Sa(x)的积分

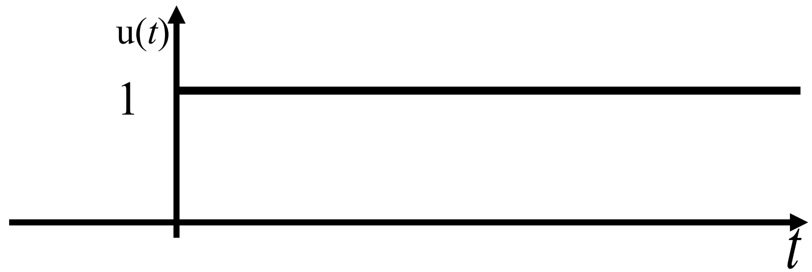
① Sa(x)在±$n\pi$处变号，所以Si(y)在±$n\pi$处出现**极值**。

② Si(y)是奇函数，即 Si($-y$)= -Si(y)。

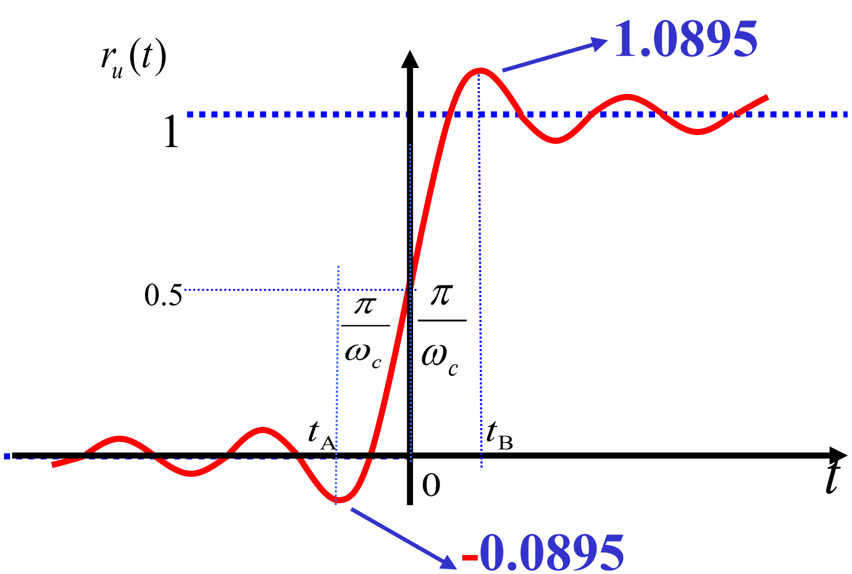
③ Si(0)=0, Si(∞)= $\pi/2$。

④ 在y=0附近， 近似为直线。

ILPF的单位阶跃响应$r_\mathrm{u}(t)$



$$r_u(t)=[\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}Si(\omega_c t)]$$



Gibbs现象

a. $t\to\pm\infty$的振荡为Gibbs波纹。

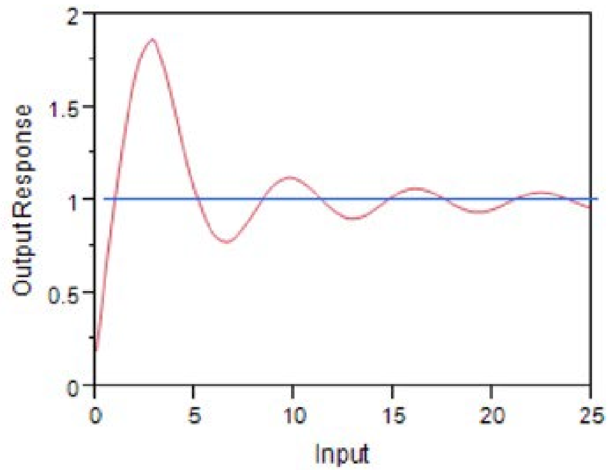
b. 在输入信号的跳变位置会出现上冲和下冲。

c. 当 $\omega_c\to\infty, r_u(t)\to u(t-t_0)$

$$r_u(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}+\frac{Si(-\infty)}{\pi}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0 & t<0\\ \frac{1}{2}+\frac{Si(\infty)}{\pi}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1 & t>0\end{cases}$$

■理想低通滤波器响应的动态演示Demo2

Gibbs现象所引起的振铃效应



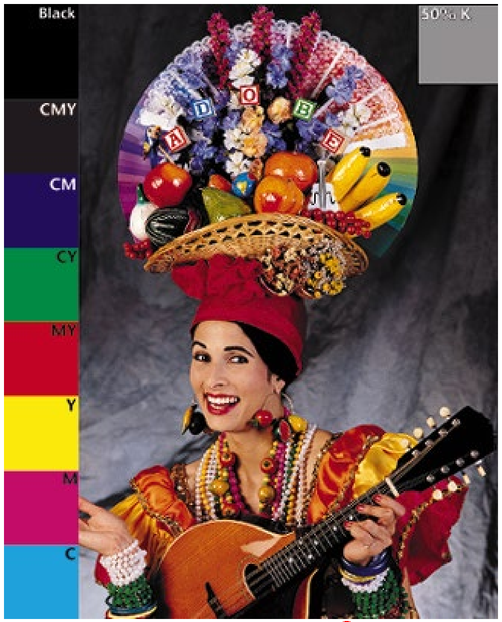
Oscillating output in Gibb's phenomenon

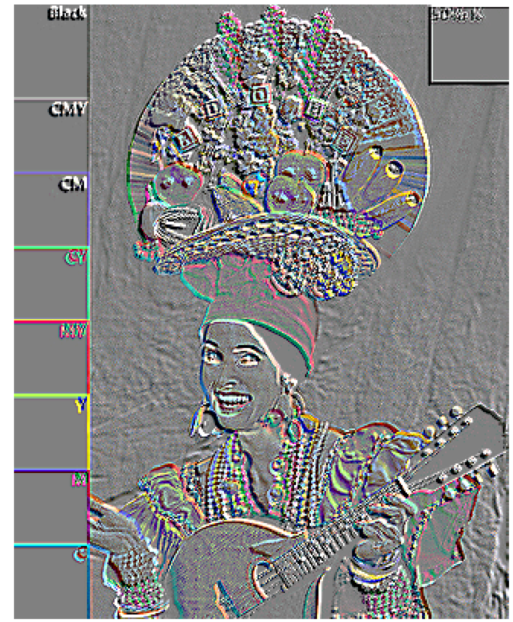
Original image

Image with ringing artifact

信号(图像)传输与失真

正常

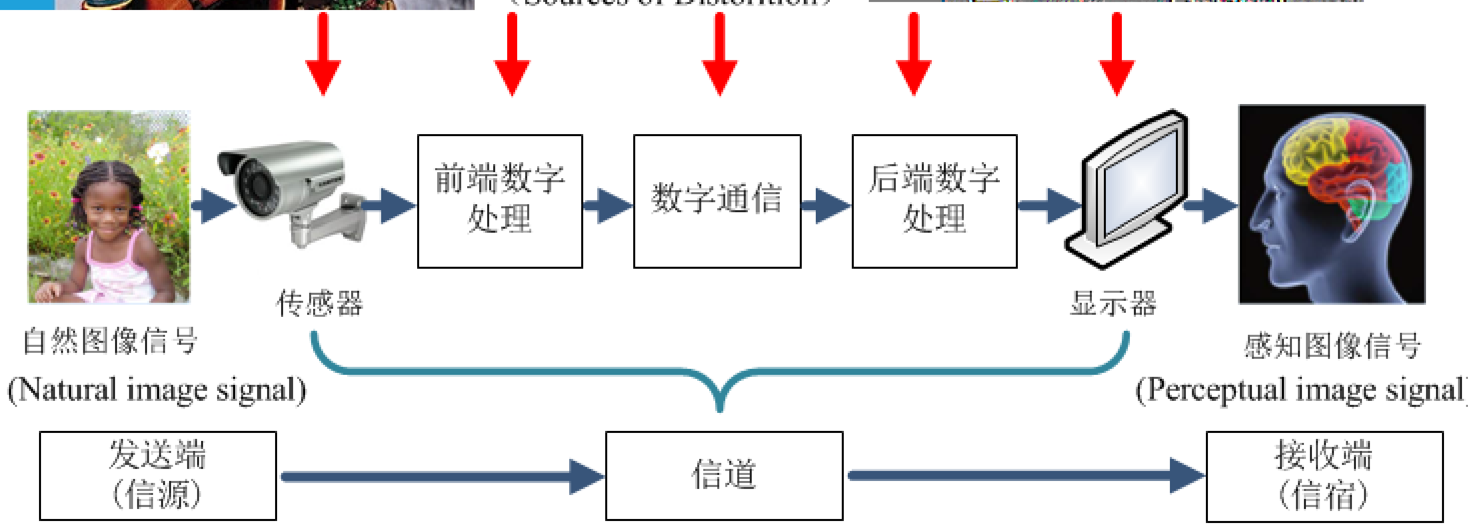




失真

失真源

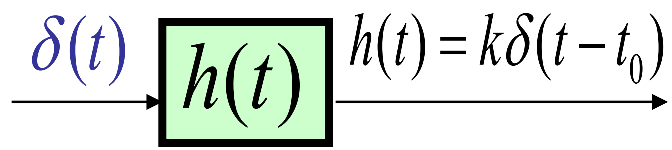
（Sources of Distorition）



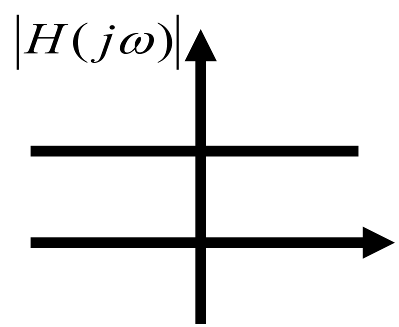
无失真传输的系统要求

- 从时域波形上看，输出仅对输入作**线性缩放和延时**，则系统输出无失真,即：

$$r(t) = ke(t - t_0)$$

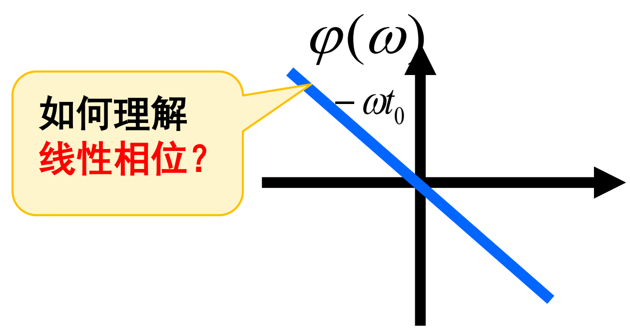


$$H(j\omega) = ke^{-j\omega t_0} = |H(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$$



$$a.\ |H(j\omega)| = k$$

$$b.\ \varphi(\omega) = -\omega t_0$$



相位时延和群时延

$$\cos[\omega t+\varphi(\omega)]=\cos[\omega(t+\frac{\varphi(\omega)}{\omega})]$$

① **相位时延**：$t_p=-\varphi(\omega_i)/\omega_i$。其为系统对**某个给定频率分量**所产生的延时。

② **群时延**：$t_g=-\varphi'(\omega)=-d\varphi(\omega)/d\omega$。其为系统对输入信号的**所有频率分量**所产生的延时。

振幅失真和相位失真

① <u>振幅</u>失真:$|H(j\omega)|=k$不能满足而引起的失真

② <u>相位</u>失真:$\varphi(\omega)=-\omega t_0$不能满足而引起的失真

思考，振幅失真和相位失真哪个的影响相对更大？

⇕

信号的幅度谱和相位谱哪一个更重要？

小结

- 线性系统的作用可以通过系统频响函数来表征，其只会改变输入信号各频率分量的大小和相位，不会产生新的频率分量
- 理想低通滤波器在物理上是不可实现的，只能想方设法去逼近
- **信号在传输的过程中会产生失真，线性失真可分为幅度失真和相位失真两个方面，后一个影响相对更大**
- 理解群时延和相位时延间的关系，及滤波器线性相位要求的本质—群时延为常数

课外作业

- 阅读4.1-4.3, 4.8;预习:5.1-5.2
- 作业:4.1,4.6两题

- 每星期三晚23:59:59前交上星期布置的作业
  - 请按照新版教学指南要求按时上传提交

- 地点:在南一楼中402室