等价关系 Equivalence relations

- 思考： when we say something **equivalent等价**, what does it mean?
- Introduction to equivalence relation…
- 等价关系通常用来将某种程度或者某些方面很相似(相同)的对象联系到一起 Equivalence relations are used to relate objects that are similar in some way.
- Or we can say a kind of "**similar相似**", a very special type of binary relation.

等价关系 Equivalence relations

- **定义** 集合A上的二元关系R，如果它是自反的，对称的，且可传递的，则称R是A上的等价关系。
  - 如果两个元素a、b具有这个等价关系，我们称a与b等价
  - *例如* 数的相等关系是任何数集上的等价关系。
  - *又例如* 一群人的集合中姓氏相同的关系也是等价关系。
  - 但朋友关系不是等价关系，因为它不可传递。
  - 聚类分析（应用）:文本分类、细胞分类、人的群体分类等。

2. 元素a与b等价

设R是集合A上的等价关系，若元素aRb ，则称a与b等价，或称b与a等价, 常记作:a~b。

Equivalence Relations等价关系的特征

Since R is **symmetric对称**, a is equivalent to b whenever b is equivalent to a.

Since R is **reflexive自反**, every element is equivalent to itself.

Since R is **transitive可传递**, if a and b are equivalent and b and c are equivalent, then a and c are equivalent.

Obviously, these three properties are necessary for a reasonable definition of equivalence.

Think about why the definition needs these tree properties?

Answer: it is the abstraction and induction.

Examples

- The following are all equivalence relations:
- "Has the same first name as" on the set of all people.
- “Is similar to” or “congruent to 全等" on the set of all triangles.
- "Is congruent to modulo *n*" on the integers.
- "Has the same image under a function" on the elements of the domain of the function.

- 更多例子:

例　设A是任意集合，则A上的恒等关系和普遍关系U_A均是A上的等价关系。

例　　设 A={a, b, c, d}, A 上 的 关 系 {(a, a)，（a, b), (b, a), (b, b)，（c, c)，（c, d)，（d, c)，（d, d)}，R是A上的等价关系。

Negative Examples

•The relation **"≥"** between real numbers is reflexive and transitive, but not symmetric. For example, $7 \geq 5$ does not imply that $5 \geq 7$. It is, however, a partial order.

•The relation "**has a common factor greater than 1** " between natural numbers greater than 1, is reflexive and symmetric, but not transitive. (Example: The natural numbers 2 and 6 have a common factor greater than 1, and 6 and 3 have a common factor greater than 1, but 2 and 3 do not have a common factor greater than 1).

•The empty relation R on a non-empty set X (i.e. aRb is never true) is vacuously symmetric and transitive, but not reflexive.

Negative Examples

- The relation “is approximately equal to约等于" between real numbers, even if more precisely defined, is not an equivalence relation, because although reflexive and symmetric, it is not transitive, since multiple small changes can accumulate to become a big change.

Equivalence Relations等价关系

- It is a very special binary relation
- It is a kind of “similar”某种意义上的相似
- It is abstracted from the relations of real applications/world, very common in the real world.
- It is very useful concept, and math model.

思考问题

- 如何利用关系矩阵判断一个有限集合上的二元关系是否是等价关系?

- 如果说给定一个二元关系，需要编程序判断是否是等价关系，怎么做？不需要伪代码，只叙述思路。

Introduction of Equivalence Classes

物以类聚, 人以群分

怎么聚, 怎么分?

- Analysis of Clustering: Text Clustering、cell clustering in Medical、Grouping of People…

3. 等价类 equivalence classes

定义 设R是集合A上的等价关系，则A中等价于元素a的所有元素组成的集合称为a生成的等价类，用$[a]_R$表示，即$[a]_R=\{b \mid b\in A\wedge bRa\}$

而a称为这个类的代表元。

例如：对于A={a, b, c, d}上的等价关系R设{(a, a), (a, b), (b, a)，(b, b)，(c, c)，(c, d)，(d, c)，(d, d)}来说

$$[a]_R=\{a,b\},\quad [b]_R=\{a,b\}$$

等价类的三个基本性质

性质1. 对任意$a\in A$，$[a]_R$一定非空

因为对于任意的 $a\in A$，有aRa ，所以$a \in [a]_R$

性质2. 对任意的R，$b\in A$ 若aRb ，则$[a]_R = [b]_R$

为什么？

性质3. 对任意$a,b\in A$，若$(a,b)\notin R$，则$[a]_R \cap [b]_R =\varnothing$
为空集合

Why?

例3　设A={a, b, c, d}， A上的关系R={(a, a)， (a, b)， (b, c)， (a, c)，(c, c)， (b, b)， (b, a)， (c, b)，(c, a)， (d, d)　}

则R是A上的等价关系 $[a]_R=[b]_R=[c]_R=\{a,b,c\}$

$[d]_R$ = ？？

Note:同一个等价类中元素均相互等价。不同等价类中的元素互不等价！

等价关系及等价类举例

例:自然数集合N上的模同余关系。n是一个已知的自然数，R是N上的一个这样的二元关系，aRb当且仅当a与b关于n同模，即用n去除a和b的到的余数相同，记做a=b(mod n)。

问：R是N上的一个等价关系吗，为什么？如果是，求出所有的等价类。

求模同余的所有等价类举例说明…

以模5同余为例求所有等价类

等价关系equivalence classes与分划partitions

集合A上的等价关系与集合A上的分划具有一一对应关系。

定理 设R是集合A上的一个等价关系，则集合A中所有元素产生的等价类的集合 $\{[a]_R | a \in A\}$ 是A的一个分划。

证明（1）对每一元素$a \in A$，$[a]_R$ 是A的非空子集。

（2）对任意$a, b \in A$，或者$[a]_R$与$[b]_R$是A的同一子集或者不相交

（3）对所有的元素的等价类求并集，看并集是否等于A

$$\bigcup_{a \in A} [a]_R \subseteq A$$

这种由等价关系R的等价类所形成的A的分划称为A上由关系R导出的等价分划，记作 Π_R^A

- 举例说明：整数集合，其上的等价关系”模5同余”将整数集合分为5个子集合，就是一个分划。

定理 设$\Pi=\{A_1, A_2, \cdots, A_r\}$是集合A的一个分划，则存在A上的一个等价关系 R ，使得Π是A上由 R导出的等价分划。

证明： 在集合A上定义一个关系R，对于任意的$a, b \in$ A，当且仅当a与b在同一分划块中时，有aRb。

对任意$a \in$ A，a与a在同一分划块中，所以有aRa，即R自反。

又对任意的 $a,b \in$ A,若a与b在同一分划块中，则b与a在同一分划块中.即, 若aRb, 则bRa , 因此R是对称的。

对于任意$a,b,c \in$ A，若a与b在同一分划块中，b与c在

- 同一分划块中，因为 $A_i \cap A_j = \phi(i \neq ,j)$所以$a$与$c$也在同一分划块中，此即, 若$aRb$，bRc，则必有$a$Rc，因此R是可传递的。所以R是等价关系。

- 当然还需要说明R的等价类就是已知的分划

例 设A={a, b, c, d}，A上的分划 π_1= {{a}, {b, c}, {d}}

与π_2= {{a}, {b}, {c}, {d}}

试求出对应的等价关系，使得它们的等价类分别恰好是π_1和π_2的分划块。

解…

总结

集合A上的任意一个等价关系R都导出一个A上的分划，也即所有互不相同的等价类；

反之，A上的任一分划，也唯一地对应于一个等价关系R，使得该等价关系的等价分类跟已知的分划是一致的。

这也说明任何事物的分类、聚类、分块（分划）其实就是某个等价关系的等价分类！

Think About思考问题

Let’s back to the question: if |A| = n,

已知集合A上的一个等价关系R， 那么R的等价类的个数有哪些可能？

- *例5*　设A={a, b, c}，求出A上所有的等价关系。

思考：从哪入手考虑这个问题？

- *解*　先求出A上有多少个不同的分划。
  - 分成一个分划块的分划
  - 分成两个分划块的分划
  - 分成三个分划块的分划

5.商集Quotient set

- **Quotient set**
- Equivalence relation:~
- The set of all possible equivalence classes of *X* by ~, denoted X/~ , is the **quotient set** of *X* by ~. 所有等价类的集合

- This operation can be thought of (very informally) as the act of "dividing" the input set by the equivalence relation, hence both the name "quotient", and the notation, which are both reminiscent of division. （想象从集合到等价类集—商集的运算好比"除法"）

- **Projection （投影）**
- The **projection** of ~ is the function defined by $\pi(x) = [x]$ which maps elements of *X* into their respective equivalence classes by ~.

作业

- 5.5节 T2 (b), (d)
- T5, T6， T15 (c)
- T18

- 关注一下 T22前的概念“加细”

附加题--不要求做到作业本上

A、B是两个非空集合， f是A到B的函数。R为定义在A上的二元关系， 对任意的$a,b \in A$, aRb当且仅当$f(a)=f(b)$. 证明R是A上的等价关系。并且，

(1) $a \in A$, 求出等价类$[a]_R$

(2) 求出R的所有等价类。

Partial Orders (偏序)

Partial Orders (偏序关系)

- Ordering （排序） is a very important issue.
- There are so many useful techniques on “Ordering” .
- We often use binary relations to order some or all of the elements of sets. 用二元关系将集合的所有元素或者部分元素进行排序
- **Examples:** Lexicographic order(**字典排列法**), ordering real numbers, ordering students based on scores…
- Examples to introduce “partial order”

Partial Orders (偏序)

Definition: Let *R be a relation on A. Then R is a partial order iff R is*

reflexive, antisymmetric and transitive

(A, R) is called a partially ordered set or a poset.

集合A上的同时满足自反、反对称和可传递性的二元关系称为偏序关系。

集合A与相应的偏序关系一起称为偏序集, 记作(A, R)

Examples

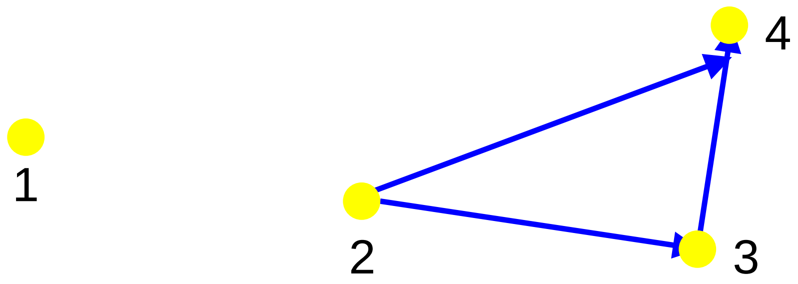
- ***例1*** 实数集R上的“≤”关系显然是一个偏序关系。
- ***例2*** The relation “⊆” on the power set 2^U of U is a partial order as well。

  同学们能否观察出这两个例题里的不一样的地方？

- ***例3*** 设A={1,2,3,4,6,8,12}，定义A上的整除关系：当且仅当*a* 整除*b* 时，有*a*R*b*。
- 容易证明 R是A上的偏序关系。

Examples

- 例题4： 下图表示的二元关系是偏序吗？



•实数集R上的“$<$”关系不是偏序关系。

•2^U上的真包含关系“$\subset$”也不是偏序关系。

理解偏序

Understand why the relation “order” needs the three properties from real ordering examples.

如何理解为什么“序”关系需要以上三种性质？

Partial Orders (偏序)

- Note: Partial orders allow elements to "precede" one another but not necessarily, which means that it is not required that any two things be related under a partial order.
- 偏序集下，一个元素可能"先于"另一个元素，但不是必须的，两个元素可以没有关系。

That's the *partial part of it!*

- Denotation: $\leq$ （很多情况下偏序用这种符号表示）

  we use $a \leq b$ to denote that $(a,b) \in R$ in an arbitrary poset (A,R).
- For any elements a and b in A, if either $a \leq b$ or $b \leq a$,

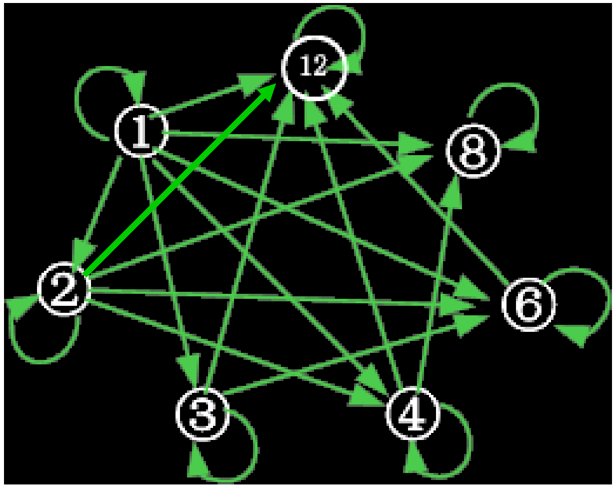
  we call a and b are comparable（可比较的）
- if neither $a \leq b$ nor $b \leq a$, we call a and b are incomparable （不可比较）

2 哈斯图 Hasse Diagram
偏序的一种特殊的图形表示方式

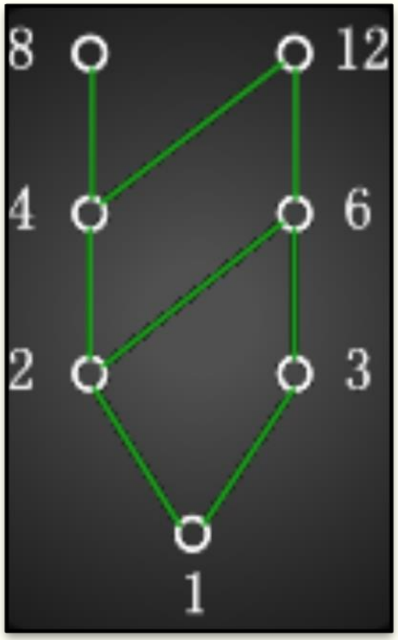
- **构造** Hasse diagram: (从关系的有向图出发构造Hasse图的方法）
- 1) 设计构造一个能表示 poset *(A, ≤)* 而且比较容易从中反映出内在的序的图形。我们让所有边由下朝上。
- 2) 去掉所有单边弧 Eliminate all loops
- 3) 去掉所有冗余的边，这些边本可以有传递性得到的。Eliminate all arcs that are redundant because of transitivity
- 4) 去掉所有的箭头eliminate the arrows at the ends of arcs since everything points up. （由下朝上就代表着方向）

偏序关系的哈斯图（**Hasse diagrams**）续

例如 前面例3中整除关系Hasse图如下：



有限集A上偏序关系“≤”的Hasse图有|A|个结点。

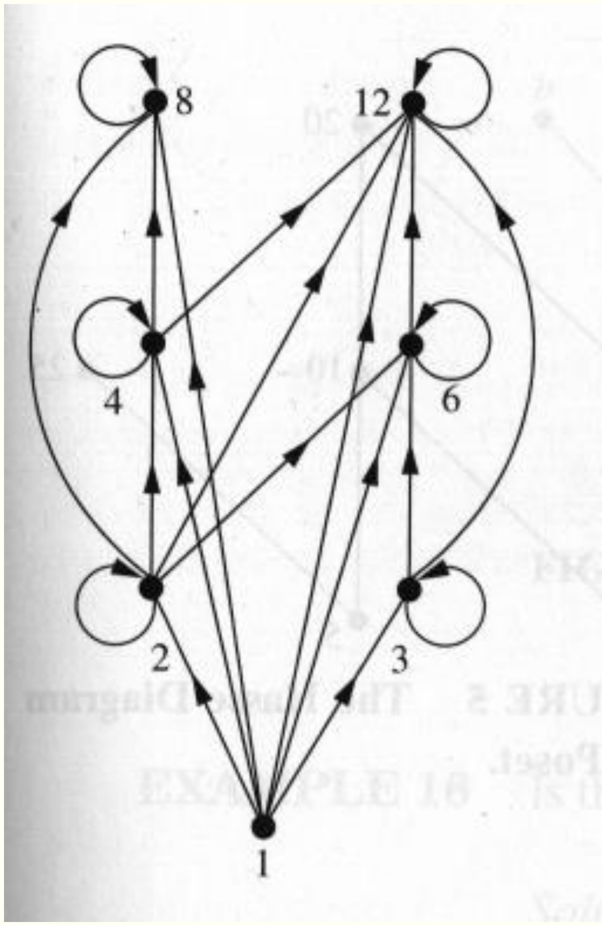


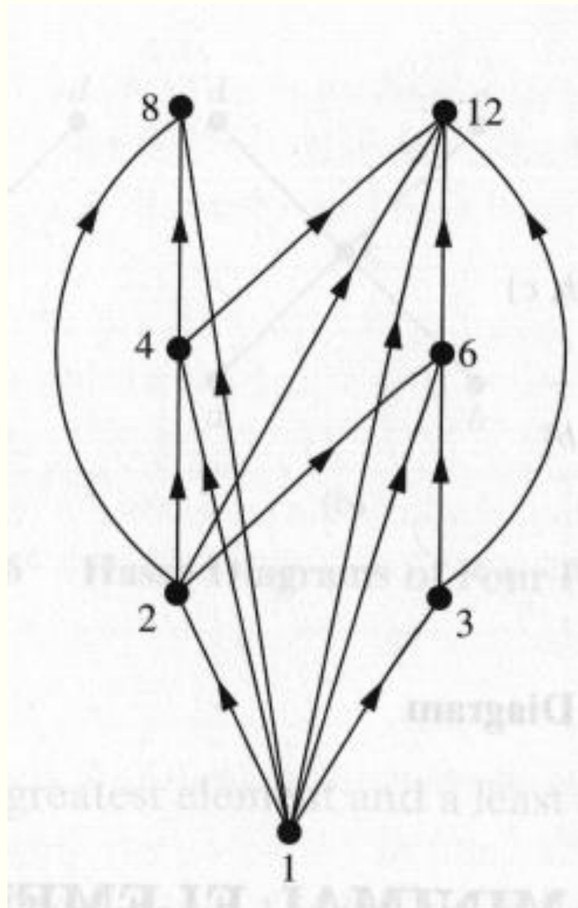
若元素a≠b且a≤b时，则结点a画在结点b的下方。

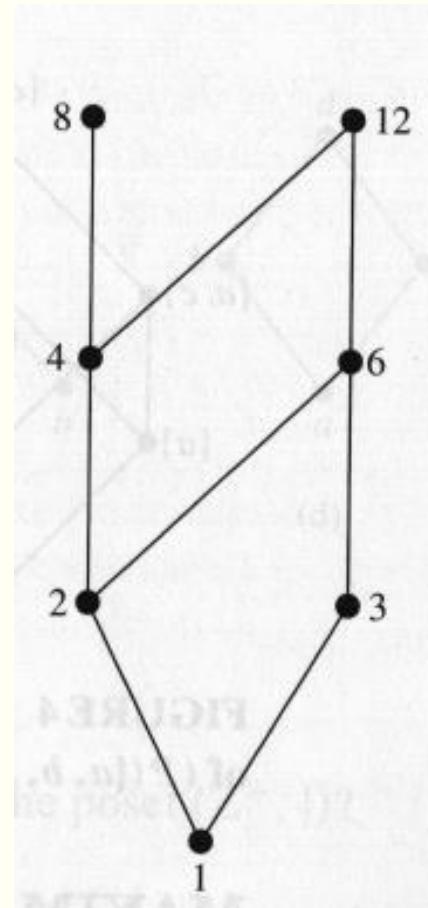
若a≤b ，且在集A中不存在任何其它元素c，使得a≤c, c≤b，则一条有向边由*a*指向*b*。

Hasse Diagram

- For the poset ({1,2,3,4,6,8,12}, |)

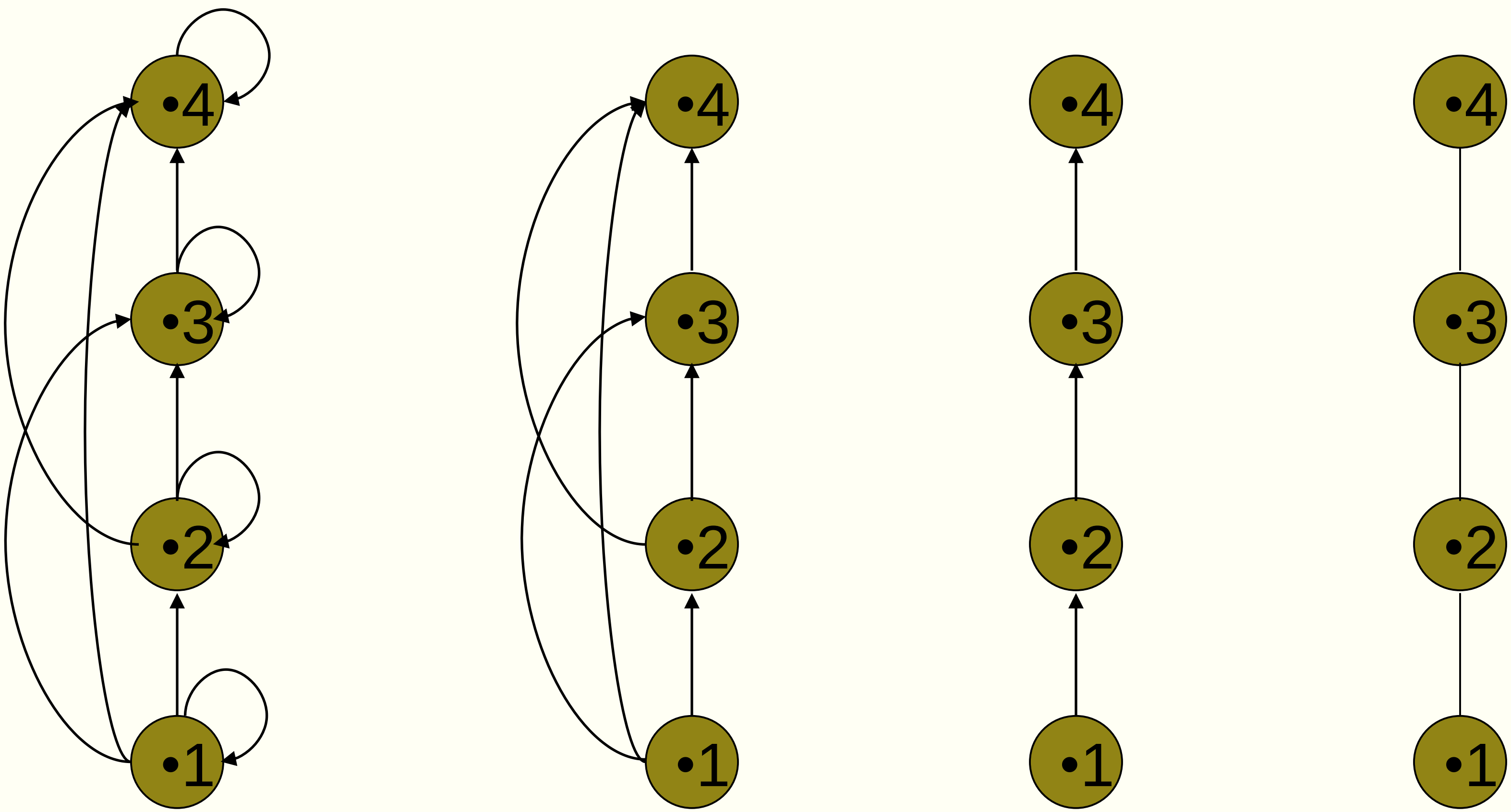






Example Hasse diagram

- "≤" on {1, 2, 3, 4}



例4　设$U=\{a, b, c\}$，则“$\subseteq$”关系是2^U上的偏序关系，偏序关系“$\subseteq$”的Hasse图如下：

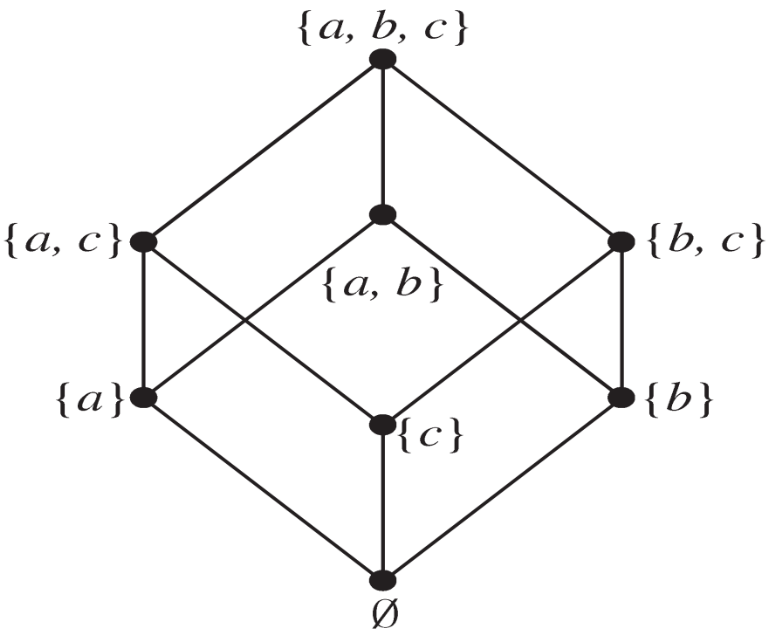
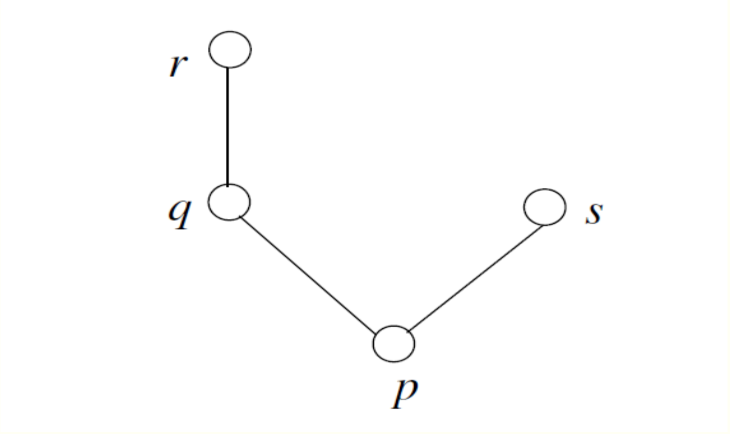


FIGURE 4　**The Hasse Diagram of $(P(\{a, b, c\}), \subseteq)$.**

Hasse Diagram



- **想想：** 能根据这个HASSE 图还原写出偏序关系吗？

Partial Orders—Total Order(全序)

- Definition: if any two objects x and y are always related in a poset ,either $x \leq y$ or $y \leq x$, it is called a total order or linear order or simple order. In this case the poset (A, $\leq$) is called a chain(链) as well

  (任意的两个元素都是可比较的，称为全序）
- *Your examples please…*
- *Understanding "**Partial**" …*
- *The key word "**Partial**" is used to describe partial orderings because pairs of elements may be incomparable, not always comparable. Otherwise, it is called* total order

最大、最小元（Greatest element & least element）

- 定义（**最小元**）一个偏序集$(A, \le)$, S为A的非空子集。如果S中存在一个元素a使得$\forall b \in S$, 有$a \le b$。则称a为S的最小元。

问题： 最小元是否一定存在？唯一吗？ 为什么？

- 举例说明…
- **定义（良序）**：如果一个偏序集合的任一非空子集均有最小元，则称之为良序集
- Examples...
- 鼓励学生自己定义最大元…

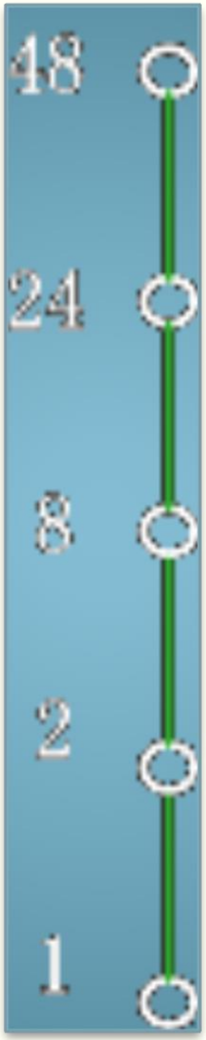
- 问题：全序与良序有什么关系?
- 良序集合一定是全序，反之不真。 但有限全序一定是良序，为什么？

- *例如* 实数集R上的数之间的小于或等于关系“≤”就是R上的一个全序，

- 正整数集N上的小于或等于关系“≤”也是N上的一个全序。

- N上的整除关系就仅是一个偏序而不是全序。

- *例5* 设A={1, 2, 8, 24, 48}，则A上的整除关系是A上的偏序，并且也是一个全序。是否是良序？



- 问题：（{1,2,3,4,5}， ≤）是一个全序，容易得到其最大元和最小元。那么（{1,2,3,4,5}， ≥）如何？

- 思考问题：一个有限的全序集是否是良序集？

- 请同学们自己得出结论并证明之或者给出反例。

字典顺序举例

- 想象字典是如何排序的? 是全序还是良序？

- 计算机系统中的字符串排序比较

极大元、极小元(maximal element & minimul element)

- **定义**（极小元）一个偏序集(A, $\le$) .如果$a\in A$. 如果A中不存在任何元素x使得$x\le a$。则称a为A的极小元。

- **问题**：A存在极小元吗？ 唯一吗？ 为什么？
- 举例说明…

- 学生自己定义极大元…

- 问题：极大极小元与最大最小元的关系如何？

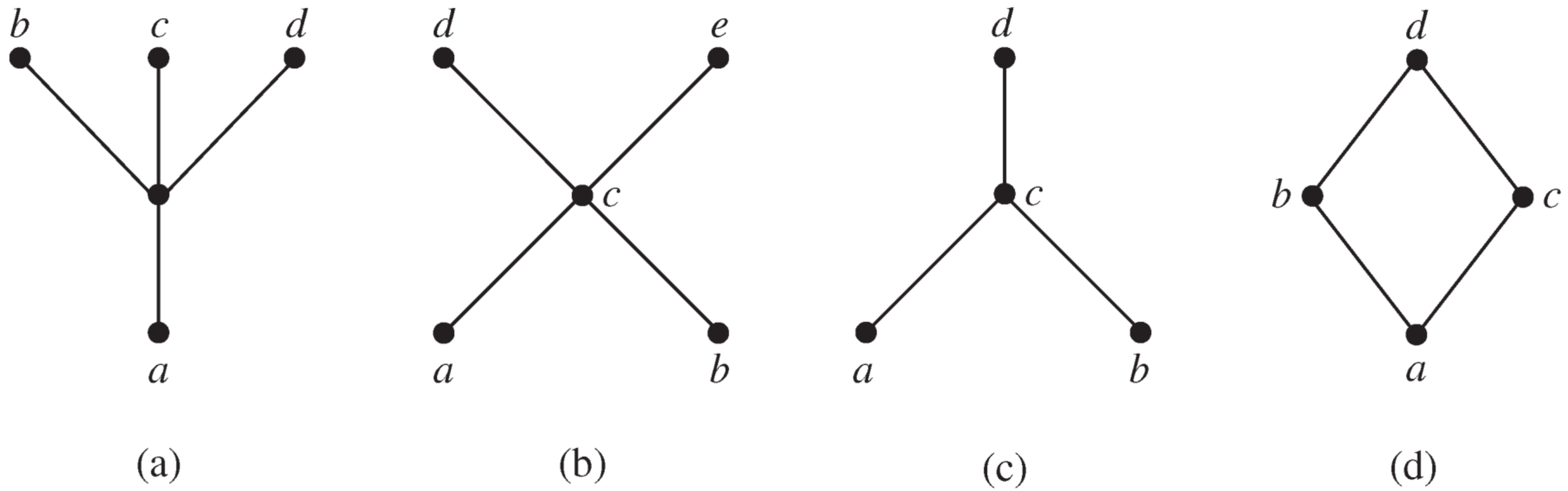


FIGURE 6 **Hasse Diagrams of Four Posets.**

良序归纳原理与强数学归纳法

良序归纳原理 The principle of Well-Ordered induction : Suppose That $(S, \prec)$ *is a well-ordered* set. Then *$P(x)$ is true for all $x \in S$, if*

Inductive step: For every $y \in S$, if $P(x)$ is true for all $x \in S$ with $x \prec y$, then $P(y)$ is true.

强数学归纳法 strong induction:

- To prove that $P(n)$ is true for all positive integers n, where $P(n)$ is a propositional function, complete two steps:
  - *Basis Step*: Verify that the proposition $P(1)$ is true.
  - *Inductive Step*: Show the conditional statement

  $[P(1) \wedge P(2) \wedge \cdots \wedge P(k)] \rightarrow P(k + 1)$ holds for all positive integers k.

•Note: strong Induction is sometimes called the *second principle of mathematical induction* or *complete induction somewhere*. 第二数学归纳法

作业

- 5.6节
- T4 (a)
- T6
- T13, T17

Introduction to Lattice格

格的应用背景

- 1 社会的组织管理架构
- 2当代网络环境下的办公MIS系统中的访问控制问题
- 3 软件工程的继承性问题
- 4 其它方面的应用

上界和下界

- **偏序集(P, ≤)的子集S的上界**：$a \in P$. 如果$\forall x \in S$都有$x \leq a$, 则成a为子集S的上界。
- 思考：上界的存在性和唯一性…
- 偏序集(P, ≤)的子集S的下界：自己定义…
- The bounds of a subset *S* of a partially ordered set *P* may or may not be elements of *S* itself.
- If *S* contains an upper bound then that upper bound is unique (why?) and is called the greatest element of *S*.
- 思考：最小元最大元与上界下界之间有何关系？

Least Upper Bound and Greatest Lower Bound
最小上界和最大下界

- Abbreviation: (lub, glb)
- **Definition**: L is a poset.
  - (1)最小上界for two elements a, b in L, if there is upper bound $c \in L$ satisfies: $a \le c$, $b \le c$, and for any possible upper bound c' in L of both a and b, $c \le c'$. c is called the least upper bound of a and b, denoted as lub (a, b) = $a \vee b$
  - (2)最大下界Similar definition for greatest lower bound, denoted as glb(a, b) = $a \wedge b$

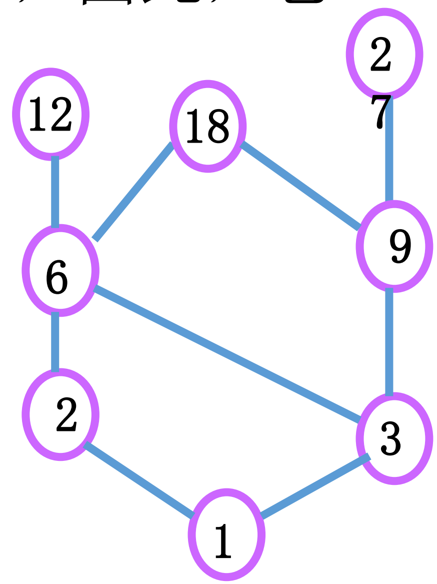
Questions: 两个元素的最小上界或者最大下界是否存在，如果存在是否唯一？ 举例说明。

子集的最小上界与最大下界

- Abbreviation: (lub, glb)
- **Definition**: L is a poset. $A \subseteq L$ is a subset of L，
- Least Upper Bound： if there is an element c satisfies: $\forall$ a$\in$A, a $\le$c, and for any possible upper bound c' in L of all elements in A, c $\le$ c', denoted as ($\vee$A)
- Greatest Lower Bound: Similar definition for greatest lower bound of a subset of L, denoted as ($\wedge$A)

Questions: 一个子集的最小上界或者最大下界是否存在，如果存在是否唯一？ 举例说明。

例 设A={1，2，3，6，9，12，18，27}“整除≤ ”关系是A上的偏序关系，其次序图如下，因此，它们构成一个偏序集<A；≤ >。



lub(2, 3)=? ，

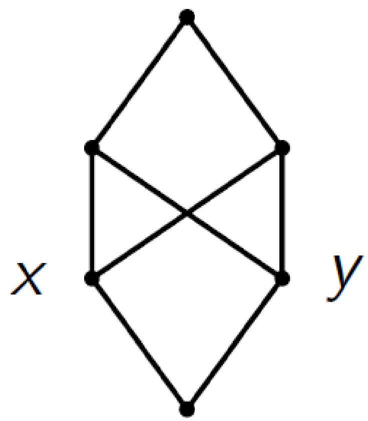
glb(12, 18)=?，

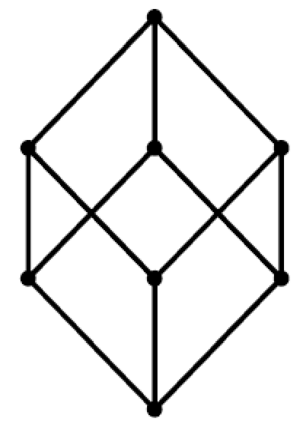
lub(18, 27)=?

Lattice 格

- **Definition （Lattice）**: A poset L is a lattice if every two elements a and b of ∈L has great lower bound and least upper bound.
- Two examples:
- **Example 1**: N is the set with all positive integers. “m|n” means that n can be divided by m. The poset <N, |>
- **Example 2**: A is a non-empty set. S=P(A) is the power set of A with all subset of A. <S, ⊆> is a poset.
- **Note**: for a lattice, we write $a \vee b$ and $a \wedge b$ as least upper bound and great lower bound. 问题：如果不是格，只是一个普通偏序，这样表示有问题吗？
- Think about the two examples above.
- 问题：If S is a total order, is S a lattice? Why?

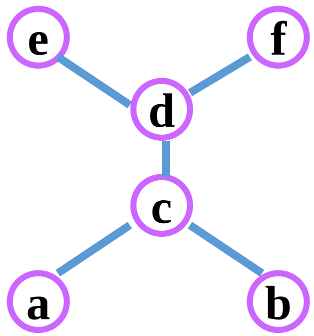
Examples：



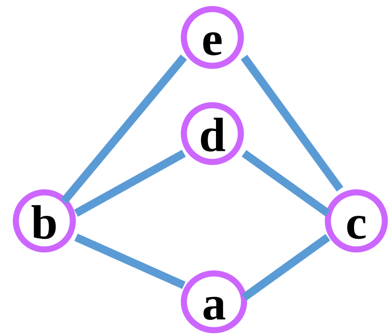


请同学们自己举一些格和非格的偏序集的例子

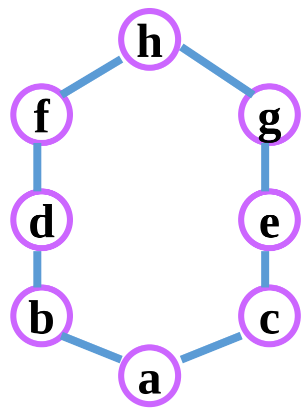
例　试判断下列次序图给出的偏序集哪些是格？



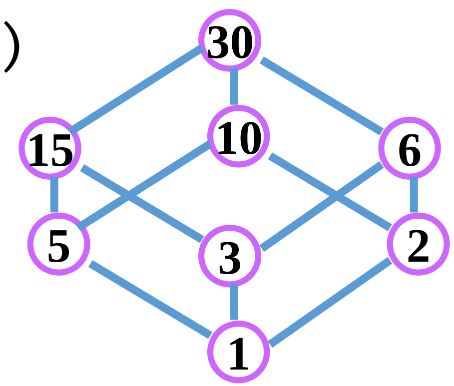
(a)



(b)



(c)



(d)

解　（a）不是格，　　(b)不是格，

(c)是一个格，　（d）是一个格

Lattices as algebra

- For a lattice L, the symbol $\wedge$ and $\vee$ are meaningful, both are operations on L.

- Lattice L correspond to the algebra $<L, \wedge, \vee>$.

Four Basic Properties of Lattices

- Propositions For any lattice L, the algebra $<L, \wedge, \vee>$ satisfies:
- (1) $x \wedge x=x$; $x \vee x=x$ (Idempotence 幂等律)
- (2) $x \wedge y=y \wedge x$; $x \vee y=y \vee x$ (Commutative 交换律)
- (3) $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$; $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$; (Associative law 结合律)
- (4) $x (x \vee y) = x = x \vee (x \wedge y)$ (吸收律 absorption law)

- Prove that these equations hold in any lattice.

格<L；≤>中保序性：

For all elements x，y，z in L，the following inequations hold:

(5) $x \wedge y \leq x$; $x \wedge y \leq y$

(6) $x \leq x \vee y$; $y \leq x \vee y$;

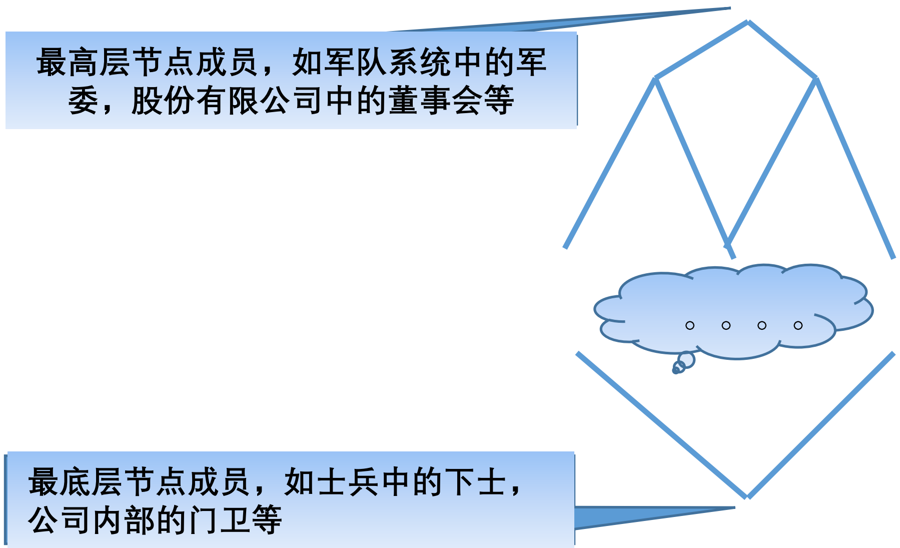
(7) If $y \leq z$, then $x \vee y \leq x \vee z$ (保序性)

(8) If $x \leq z$, $y \leq r$ then $x \vee y \leq z \vee r$

Prove:…

格应用1--社会的组织管理架构

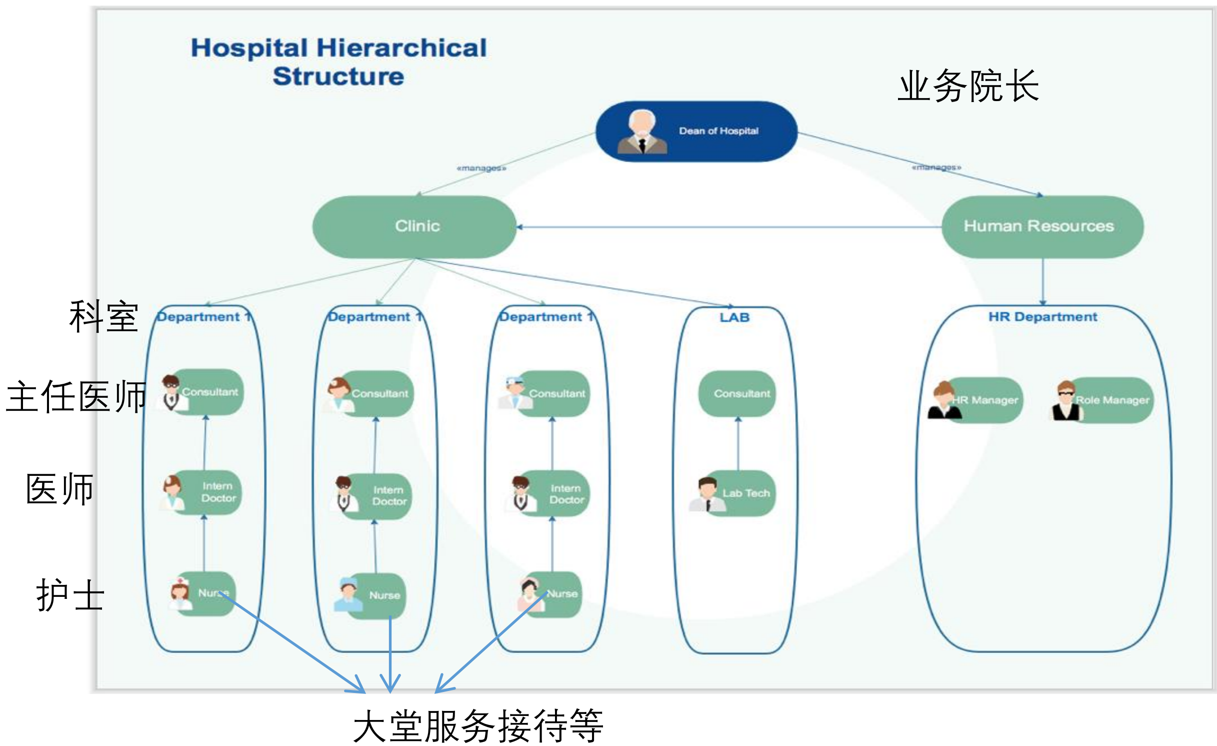
- 普通的社会组织、行业很多都是符合“格”的概念，也就是说每两个节点间都存在共同的下级和上级。



格应用2--当代网络环境下的MIS系统中的访问控制问题

- 从信息安全的角度来看，适应于社会组织的架构，信息的访问控制需要符合权限的设置，而权限的制约依据理论的模型---格
- 比如强制访问控制，基于角色的访问控制，以及现在新的基于安全流的控制，实际上就是依据节点的权限建立的**格架构**
- 下图是一个医院的信息管理系统，他们的数据既有共享性，又有分割，互斥性，需要格架构来管理。

格应用—3 医院信息管理系统

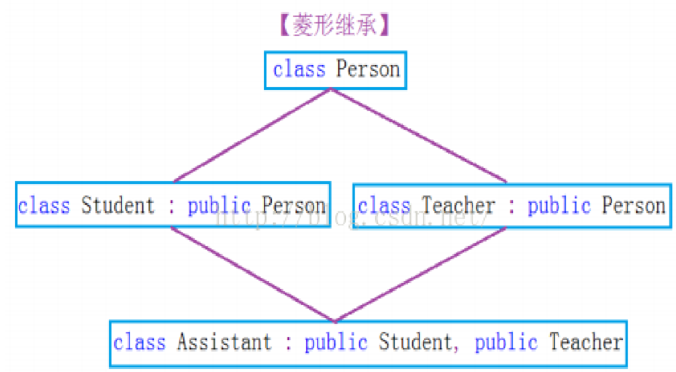


格应用4--软件工程中的继承问题的解决

- 当前面向对象的程序开发语言，为了充分利用软件的可继承性优势，一般把共性的数据和操作提炼，作为基类，在此基础上进一步开发深入的操作，实现操作的继承，尤其多重继承更是如此，也是以格的架构实现。

派生类的定义格式如下：

```
class <派生类名> : [继承方式]<基类名1>
                  [ , [继承方式]<基类名2> , ... , [继承方式]<基类名n>]
{
    <派生类新增的数据成员和成员函数定义>
};
```

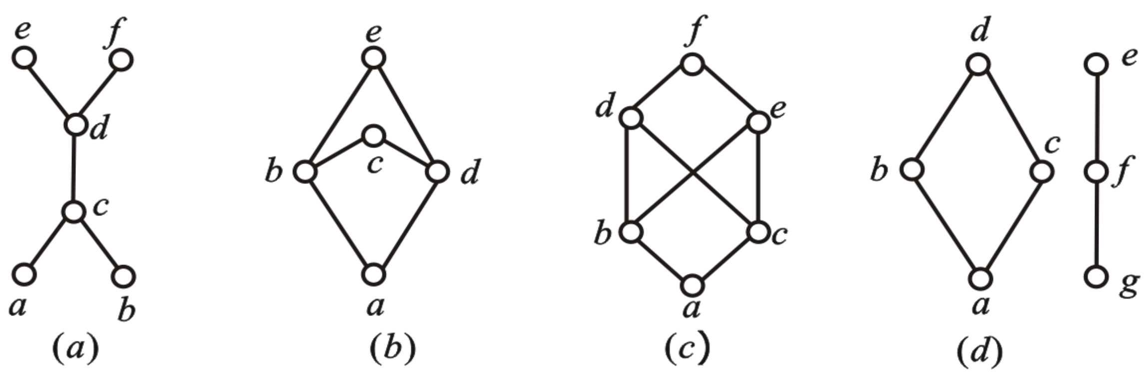


练习

1 判断下列偏序集是否构成格，并说明理由.

(1) <Z,≤ >，其中Z是整数集，≤为小于或等于关系.

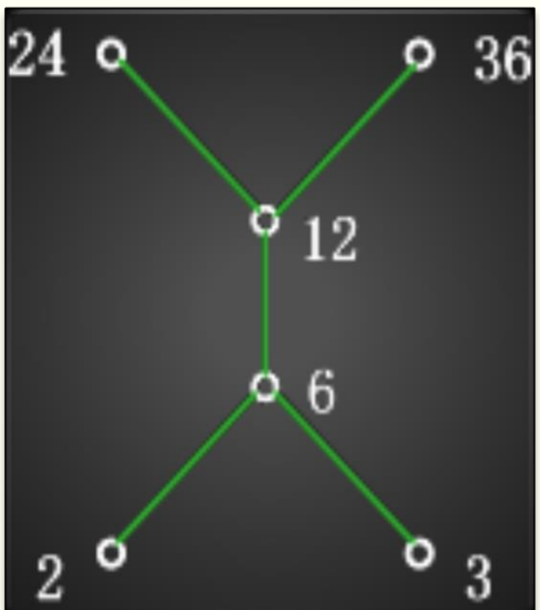
(2) 偏序集的哈斯图分别在下图给出.



- 以下是一些练习和例子, 同学们自己看看做做

偏序集练习

- 1. 对下述论断判断正确与否，在相应括号中键入“Y”或“N”。
- （1）设A={2,3,6,12,24,36}，A上的整除关系是一偏序关系，用“≤”表示。 •Y
- （a）该偏序关系的次序图是 （ ）

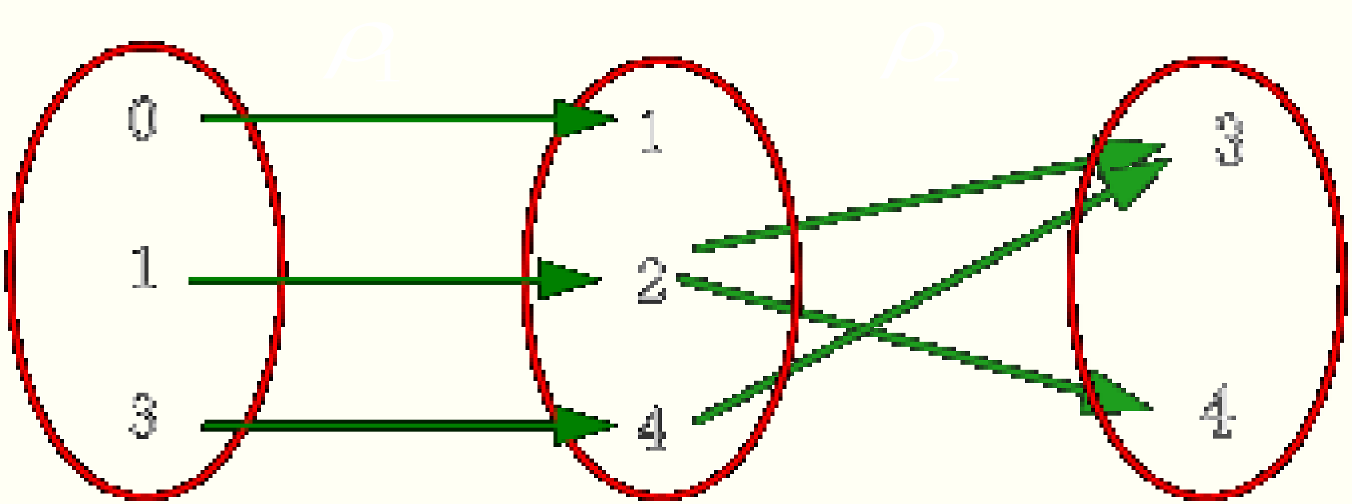


- (b)“≤”={(2,2),(2,6),(3,3),(3,6),(6,6),(6,12),(12,12),(12,24),(24,24),(36,36)} （ •N ）

- （2）集合A={3,9,27,54}上的整除关系是A上的全序
- （ •Y ）

•*例　题*

•1．给定R_1=｛(0,1),（1,2），（3,4），$R_1 \circ R_2$ =｛(1,3)，（1,4），（3,3）｝，求一个基数最小的关系，使满足R_2的条件. 一般地说,若给定R_1和$R_1 \circ R_2$，R_2 能被唯一地确定吗?基数最小的R_2能被唯一确定吗？



• **解**　　满足上述条件的最小基数的关系

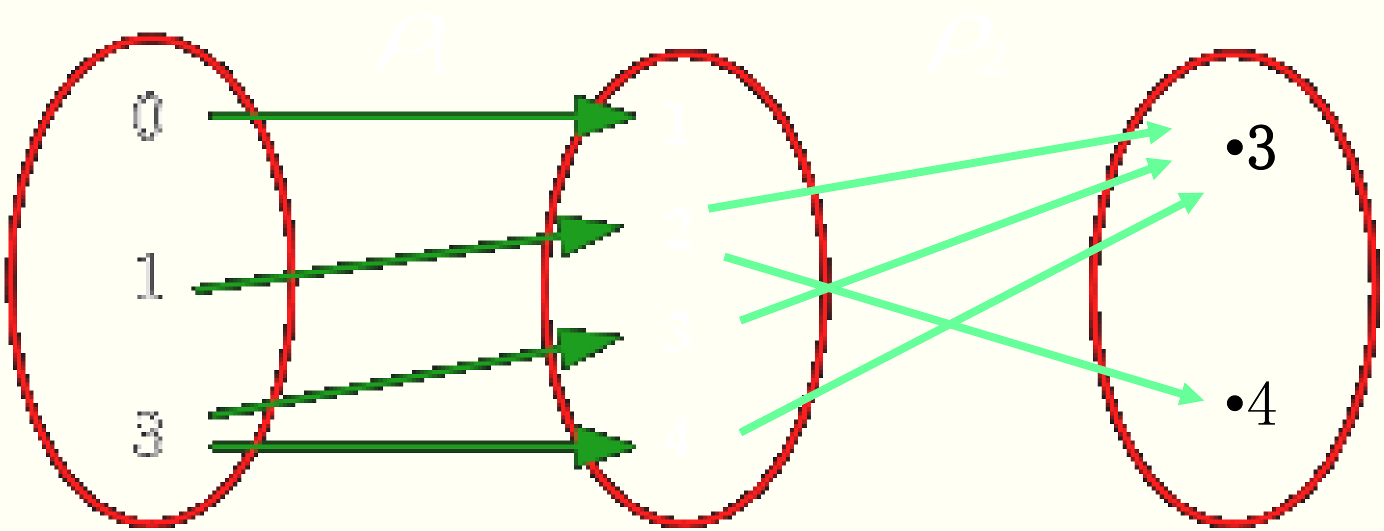
•　　R_2 =｛（2, 3），（2, 4），（4, 3）｝

•一般说，给定R_1和$R_1 \circ R_2$，不能唯一的确定R_2。 例如R_2=｛（2,3），(2,4)，(4,3)，(0,0)，(3,3)｝也可以.

• 给定R_1和$R_1 \circ R_2$，也不能唯一的确定出最小基数的R_2。

• 例如 $R_1 = \{(0,1), (1,2), (3,3), (3,4)\}$，

$R_1 \circ R_2 = \{(1,3), (1,4), (3,3)\}$，



• 则$R_2 = \{(2,3), (2,4), (4,3)\}$ 或

• $R_2 = \{(2,3), (2,4), (3,3)\}$ 都可以。

- 2．下列关系哪一个是自反的、对称的、反对称的或可传递的？
- （1）当且仅当$n_1n_2<8$ ($n_1, n_2 \in N$）时，有n_1Rn_2
- （2）当且仅当$r_1 \leqslant |r_2|$ ($r_1, r_2 \in R$)时，有r_1Rr_2

- 解（1）R不是自反的，如$4 \in N$，但$4 \cdot 4=16>8$。
- R是对称的，因为 对于任意的 $n_1, n_2 \in N$，

若有 $n_1n_2< 8$，则 $n_2n_1 = n_1n_2 < 8$。

- **R不是反对称的，例，$2 \cdot 3<8$，$3 \cdot 2<8$，但$3 \neq 2$.**
- R不是可传递的，例如，$3 \cdot 2<8$，$2 \cdot 3<8$，但$3 \cdot 3=9>8$。

- （2）R是自反的，因为对任意的$r \in R$，有$r \leqslant |r|$。
- R不是对称的，如$-1 \leqslant |3|$，但$3>|-1|$。
- R不是反对称的，如$-3 \leqslant |2|$，$2 \leqslant |-3|$，但$-3 \neq 2$。

- **R不是可传递的，$100 \leq |-101|$，$-101 \leq |2|$，但$100>|2|$**

3 设R_1和R_2是集合A上的任意两个关系,判断下列

- 命题是否正确,并说明理由.
- （1）若R_1和R_2是自反的，则$R_1 \circ R_2$也是自反的;
- （2）若R_1和R_2是非自反的，则$R_1 \circ R_2$也是非自反的;

- 解 （1）正确。

  - 因为对任意的$\mathbf{a} \in \mathbf{A}$，有$\mathbf{a R_1 a}$，
  - 又对任意的$\mathbf{a} \in \mathbf{A}$，有$\mathbf{a R_2 a}$.
  - 所以对任意的$\mathbf{a} \in \mathbf{A}$，有 $\mathbf{a(R_1 \circ R_2)a}$ ，
  - 因此$\mathbf{R_1 \circ R_2}$也是自反的。

- (2)否。例如，设集合A={a, b}.
  - $R_1=\{(a,b),(b,a)\}$，$R_2=\{(a,b),(b,a)\}$
  - 显然R_1和R_2都是非自反的，但$R_1 \circ R_2$自反。

- （3）若R_1和R_2是对称的，则$R_1 \cdot R_2$也是对称的；
- （4）若R_1和R_2是反对称的，则$R_1 \cdot R_2$也是反对称的；
- （5）若R_1和R_2是可传递的，则$R_1 \cdot R_2$也是可传递的；

- **解** （3）否．例如，设集合A=｛1,2,3｝，
- R_1=｛（1,2），（2, 1）｝ ,R_2=｛（1,3），(3,1)｝，
- 显然 R_1和R_2都是对称的，

- 但$R_1 \cdot R_2$=｛（2,3）｝不是对称的。

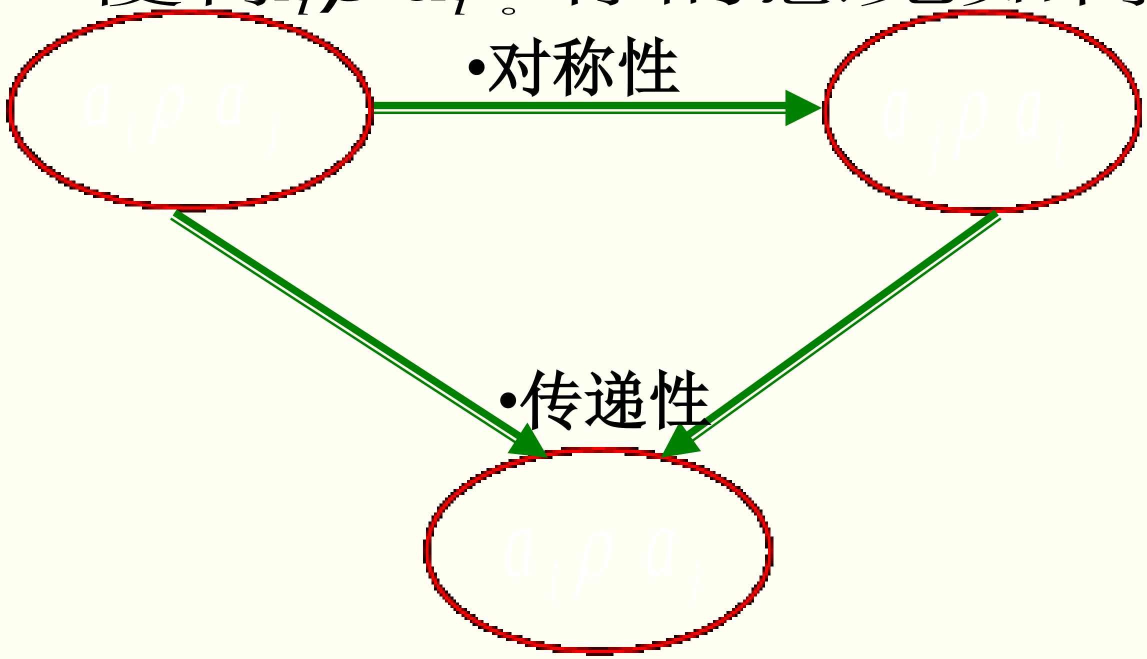
- (4) 否 ．例如设 A ={1, 2, 3}，R_1={(1, 2), (3， 3）}，
- R_2 ={(2, 3）, (3， 1）} 显然R_1和R_2都是反对称的，

- 但$R_1 \cdot R_2$ =｛（1， 3），(3, 1)｝不是反对称的。
- （5）否 ．例如设 A = {1, 2, 3}, R_1={(1, 2), (2, 3）, (1, 3）},
- R_2 =｛（2， 3），（3， 1），（2， 1）｝，
- 显然R_1和R_2都可传递的.

- 但$R_1 \cdot R_2$={(1, 3）, (2, 1）, (1, 1)} 不是可传递的。

- 4．有人说，集合A上的关系 ρ ，如果是对称的且可
- 传递，则它也是自反的。其理由是，从 $a_i \rho a_j$，

由对称性 $a_j \rho a_i$，再由可传递性便得 $a_i \rho a_i$。你的意见如何？



- **错!**

- 例　设 A＝{1,2，3}
- R＝{(1,2),(2,1),(1,1),(2,2)}

- 5. 设R_1是集合A上的一个关系，R_2= {（a, b）| 存在 c，使（a, c）$\in R_1$且（c, b）$\in R_1$}，试证明：
- 若 R_1是一个等价关系，则R_2也是一个等价关系。

- 证明 因为R_1是自反的，所以对于任意的 $a \in A$ ，有（a, a）$\in R_1$ ， 由（a, a）$\in R_1$,(a, a) $\in R_1$
- 因此有 (a, a)$\in R_2$, R_2 是自反的。

- 对于任意的a, b$\in$A, 若（a, b）$\in R_2$,
- 则必有元素c$\in$A，使得（a, c）$\in R_1$, 且（c, b）$\in R_1$,
- 由R_1的对称性, 又有（b, c）$\in R_1$, 且（c, a）$\in R_1$,
- 因而有（b, a）$\in R_2$, 故R_2 是对称的。

•对于任意的a, b, c∈A，若（a, b）∈R_2, (b, c) ∈R_2,

•则必有元素 d , e ∈ A ，使得

•（a, d）∈R_1 (d, b) ∈R_1 (b, e) ∈R_1 (e, c) ∈R_1

• 由R_1的可传递性，又有（a, b）∈R_1, (b, c) ∈R_1,

•于是有（a, c）∈R_2,故R_2是可传递的。

•由上证得R_2 是一个等价关系。

•证法二

•设（a, b）∈R_1,

•由R_1的自反性，又有（a, a）∈R_1,

• 由（a, a）∈R_1,(a, b) ∈R_1,

•于是有（a, b）∈R_2，因此R_1 R_2 。

•反之，设（a, b）∈R_2，

•则必存在c∈A, 使得（a, c）∈R_1,（c, b）∈R_1,

•而由R_1的可传递性，又有（a, b）∈R_1,因此R_2 R_1 .

•由上可知R_2=R_1，因此R_2是等价关系。