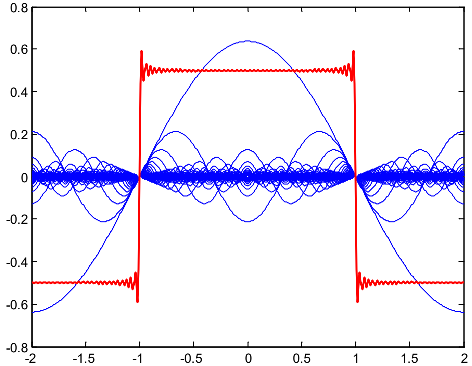
信号与系统

第15讲 DTFT与离散系统的频响

郭红星
华中科技大学计算机学院

June 2, 2020



上次课内容回顾

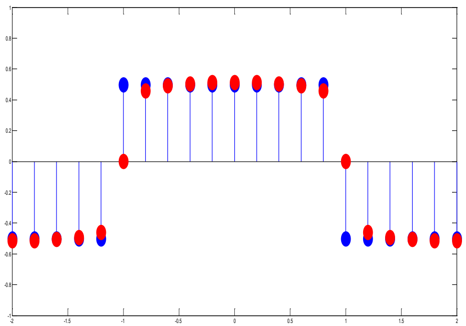
- 反z变换的求解
- 用z变换法求解差分方程，分析系统响应
- 系统函数与系统稳定性

本讲内容

- 离散时间傅里叶变换(DTFT)
- 离散时间系统的频率响应
- 学习目标
  - 从连续信号离散化的角度理解DTFT
  - 掌握通过系统函数勾画频响曲线的几何方法

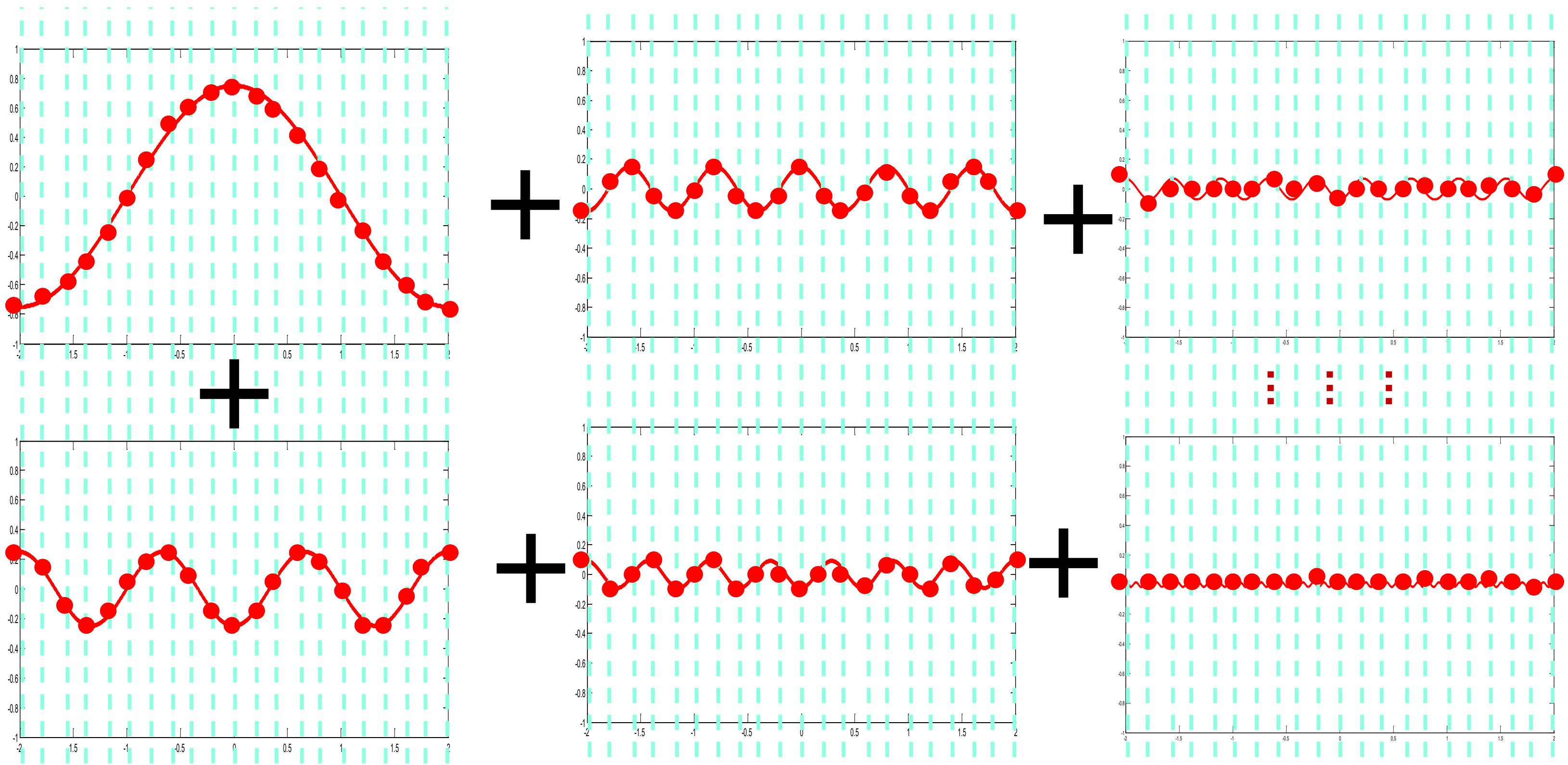
7.5　离散时间傅里叶变换

信号的频域分析:从连续到离散



连续时间信号$x(t)$ $\longrightarrow$ 离散时间信号$x(nT_s)$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega \xrightarrow[\text{采样}]{t=nT_s} x(nT_s)=?$$



信号的频域分析：从连续到离散

$$X(j\Omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\Omega t}dt \Longleftrightarrow x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} \downarrow \sum$

$t\rightarrow nT \quad dt\rightarrow T$

$x(t)\rightarrow x(nT)\rightarrow x(n)$

$e^{j\Omega t}\rightarrow e^{j\Omega nT}\rightarrow e^{j\omega n}$

$\int_{-\infty}^{\infty} \downarrow \int_{-\pi}^{\pi}$

$\because \omega=\Omega T,$

$\therefore d\Omega\rightarrow \frac{1}{T}d\omega$

$$X(j\Omega)\rightarrow T\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)e^{-j\omega n}\rightarrow T\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}=TX(e^{j\omega})$$

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n} \Longleftrightarrow x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

离散时间傅里叶正变换

两种变换中的Ω与ω的含义？

离散时间傅里叶反变换

例题1及解答

若$x(n)=u(n)-u(n-5)$,求此序列的傅里叶变换。

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{4}e^{-j\omega n}=\frac{1-e^{-j5\omega}}{1-e^{-j\omega}}=\frac{e^{-j\frac{5}{2}\omega}}{e^{-j\frac{1}{2}\omega}}\left(\frac{e^{j\frac{5}{2}\omega}-e^{-j\frac{5}{2}\omega}}{e^{j\frac{1}{2}\omega}-e^{-j\frac{1}{2}\omega}}\right)$$

$$=e^{-j2\omega}\left[\frac{\sin(\frac{5}{2}\omega)}{\sin(\frac{1}{2}\omega)}\right]=\left|X(e^{j\omega})\right|e^{j\varphi(\omega)}$$

其中，幅频特性为：

$$\left|X(e^{j\omega})\right|=\left|\frac{\sin(\frac{5}{2}\omega)}{\sin(\frac{1}{2}\omega)}\right|$$

而相频特性为：

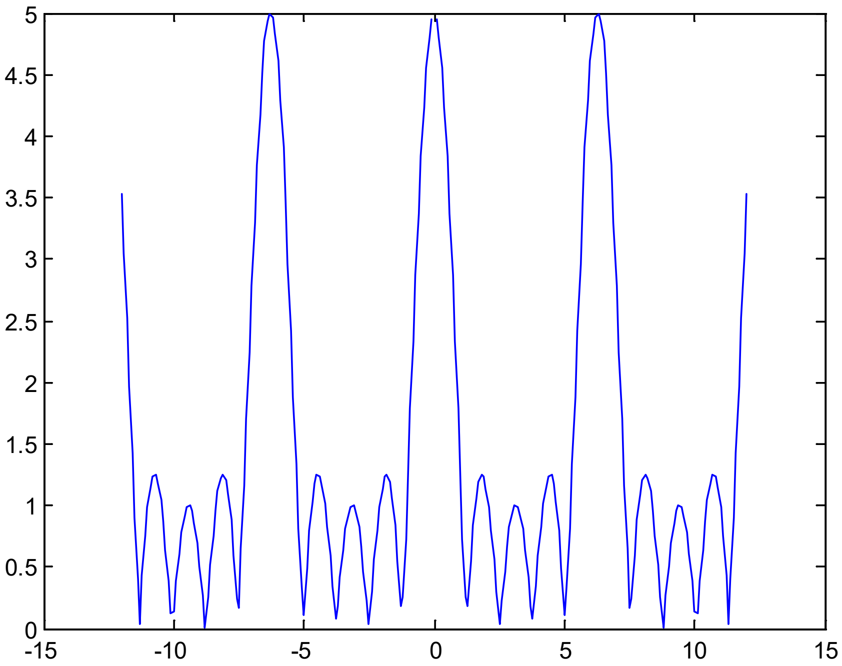
$$\varphi(\omega)=-2\omega+\arg\left[\frac{\sin(\frac{5}{2}\omega)}{\sin(\frac{1}{2}\omega)}\right]$$

$0<\omega\le\pi$

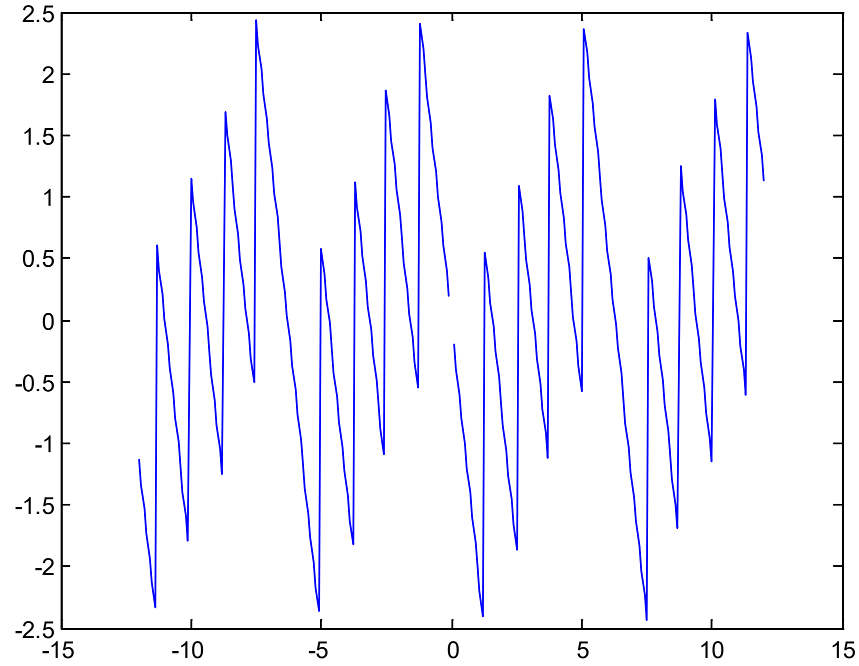
Matlab program

```
k=0;
for w=-12:0.1:12 %角频率
    k=k+1;
    wc(k)=w;%The value of the kth w
    X(k)=exp(-j*2*w)*sin(2.5*w)/sin(0.5*w);
end
%the complex modulus (magnitude)
XA=abs(X);
plot(wc,XA);
%phase angles, in radians
XP=angle(X);
figure,plot(wc,XP);
```

例题1及解答



图：信号$x(n)$的幅度谱图



图：信号$x(n)$的相位谱图

与矩形方波的谱的联系？

思考：为何周期为2π？

7.6　离散系统的频响特性

离散时间系统的频率响应

- 复正弦序列作用下系统的响应

$$x(n)=e^{j\omega_1 n} \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y_{zsr}(n)=h(n)*x(n) \quad ?$$

$$y_{zsr}(n)=\boxed{H(e^{j\omega_1})}e^{j\omega_1 n}$$

输入序列

系统功用

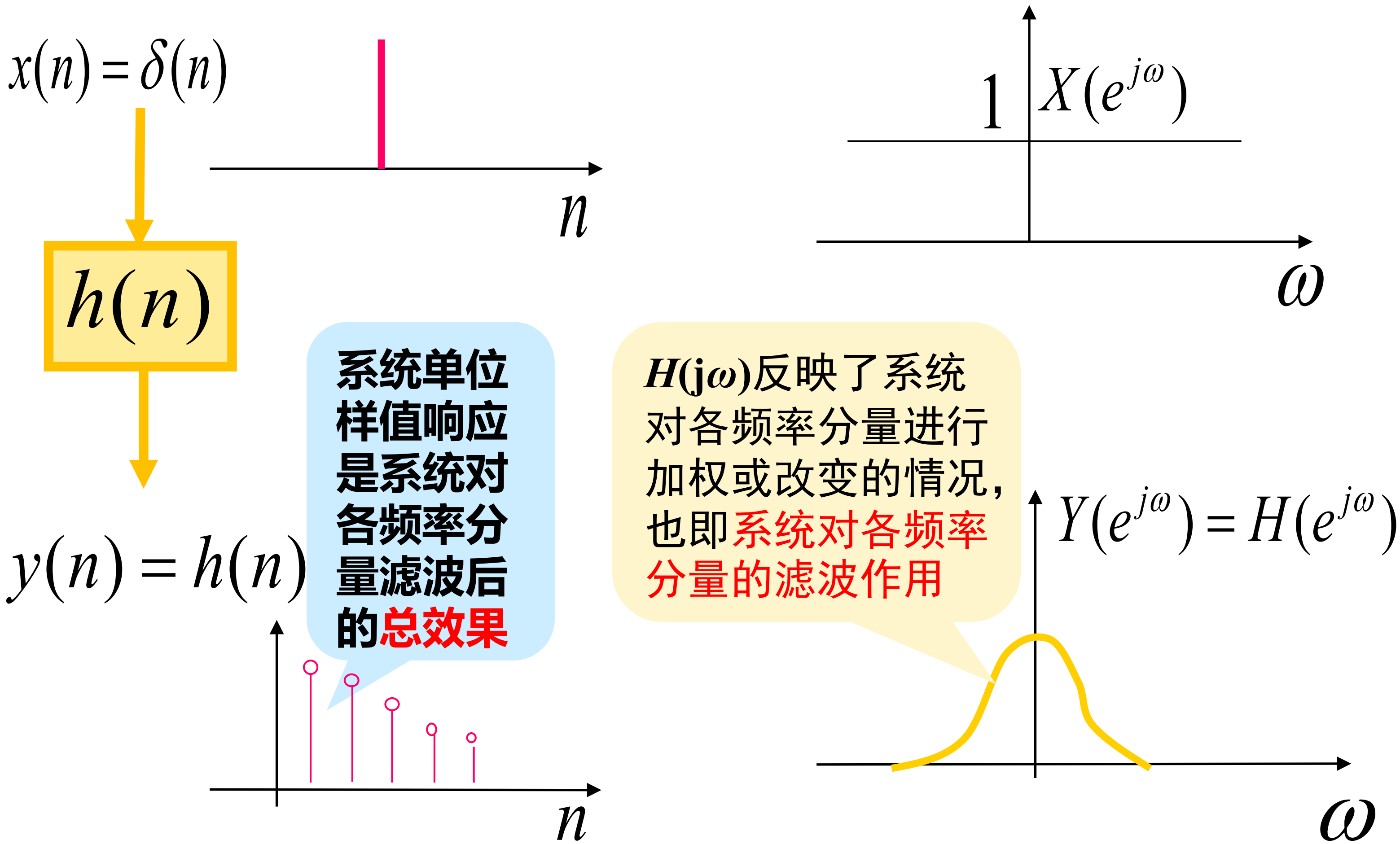
- 离散时间系统**频率响应函数**即系统单位样值响应的离散时间傅里叶变换

$$H(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)e^{-j\omega n}$$

思考：为什么$h(n)$的DTFT就反映了系统的频响特性呢？

频响函数作用的物理解释

- 系统激励为$\delta(n)$时，其频谱覆盖了$-\infty \le \omega \le \infty$的频率范围



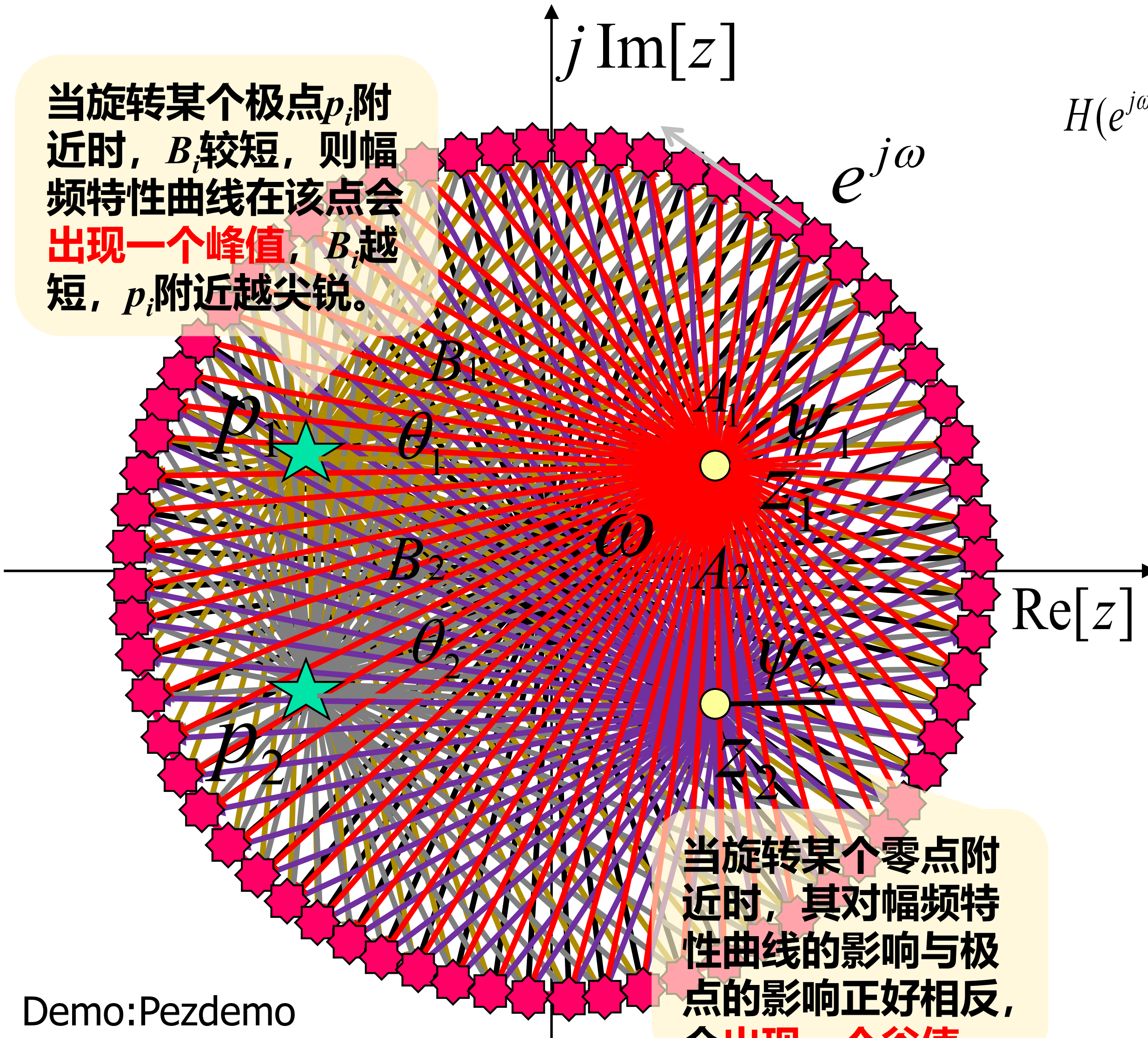
系统频率响应函数的作用分解

$$H(e^{j\omega}) = \left|H(e^{j\omega})\right| e^{j\varphi(\omega)}$$

- 滤波器的幅频特性是$|H(e^{j\omega})|$，且对信号有相移作用$\varphi(\omega)$
- 因为$e^{j\omega}$是周期的，所以$|H(e^{j\omega})|$也是周期的，其周期为重复频率2π

系统的频率响应的几何确定法

当旋转某个极点p_i附近时，B_i较短，则幅频特性曲线在该点会**出现一个峰值**，B_i越短，p_i附近越尖锐。



$$H(e^{j\omega}) = H(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = G\left.\frac{\prod_{r=1}^{M}(z-z_r)}{\prod_{k=1}^{N}(z-p_k)}\right|_{z=e^{j\omega}}$$

$$= G\frac{\prod_{r=1}^{M}(e^{j\omega}-z_r)}{\prod_{k=1}^{N}(e^{j\omega}-p_k)} = \left|H(e^{j\omega})\right|e^{j\varphi(\omega)}$$

$e^{j\omega}-z_r = A_r e^{j\psi_r}$　　$e^{j\omega}-p_k = B_k e^{j\theta_k}$

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \frac{\prod_{r=1}^{M}A_r}{\prod_{k=1}^{N}B_k}$$

$$\varphi(\omega) = \sum_{r=1}^{M}\psi_r - \sum_{k=1}^{N}\theta_k$$

当旋转某个零点附近时，其对幅频特性曲线的影响与极点的影响正好相反，会**出现一个谷值**

Demo:Pezdemo

例题2

- 已知因果系统的差分方程为：

$$y(n)=x(n)-\cos(\tfrac{2\pi}{N})x(n-1)$$
$$+2\cos(\tfrac{2\pi}{N})y(n-1)-y(n-2)$$

试求：

$$(1)h(n)=? \qquad (2)H(z)=?$$

$$(3)p_k=? \quad z_r=? \quad (4)H(e^{j\omega})=?$$

例题2解答

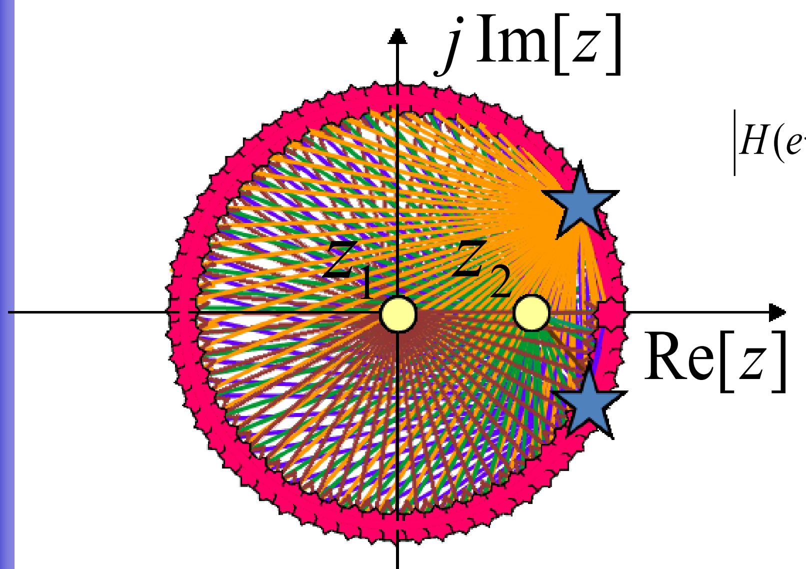
$$\text{解}: H(z)=\frac{1-\cos(\frac{2\pi}{N})z^{-1}}{1-2\cos(\frac{2\pi}{N})z^{-1}+z^{-2}}=\frac{z[z-\cos(\frac{2\pi}{N})]}{1-2\cos(\frac{2\pi}{N})z+z^{2}}$$

$$=\frac{z[z-\cos(\frac{2\pi}{N})]}{(z-e^{j\frac{2\pi}{N}})(z-e^{-j\frac{2\pi}{N}})}$$

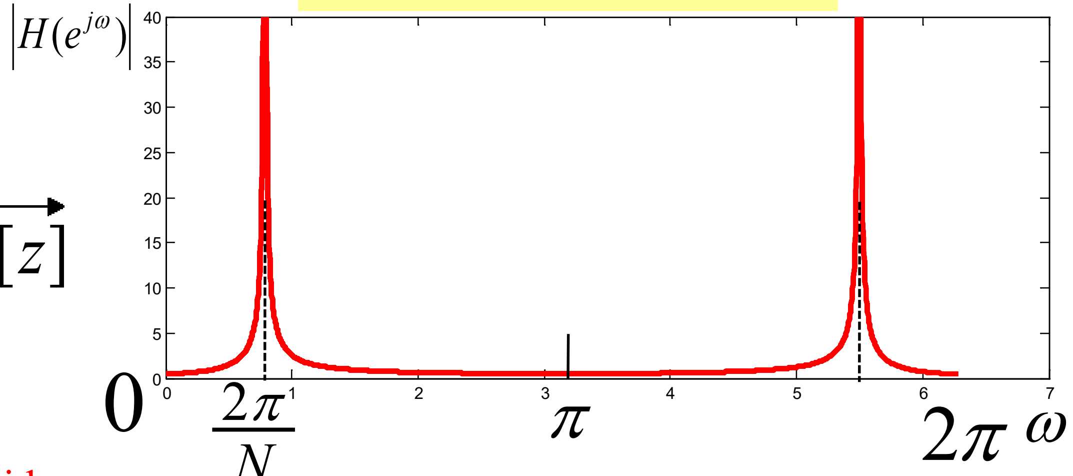
$z_1=0 \quad z_2=\cos(\frac{2\pi}{N})$

$p_1=e^{j\frac{2\pi}{N}} \quad p_2=e^{-j\frac{2\pi}{N}}$

$$h(n)=\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)u(n)$$



这是何种滤波器?



Demo:dltidemo

小结

①离散时间傅里叶变换是单位圆上的z变换

②根据离散时间傅里叶变换可研究系统的频率响应特性

课外作业

阅读：8.7—8.8节

作业：8.23(2)小题

- 每星期三晚23:59:59前交上星期布置的作业
  - 请按照新版教学指南要求按时上传提交

地点：南一楼中402室

附录：由z变换导出DTFT

根据$s\to z$的映射关系，当σ＝0时，$s=j\Omega$,

所以$z=e^{sT}=e^{j\Omega T}=e^{j\omega}$, 其中：

$\omega=\Omega T$

归一频率　实际频率　采样周期

- 即自变量沿着$|z|=1$单位圆周变化，则：

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}=X(e^{j\omega})}$$

离散时间傅里叶正变换

z变换的退化（特殊）情形，具有同样的性质

序列的离散时间傅里叶反变换

$$x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_{|z|=1}X(z)z^{n-1}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\oint_{|z|=1}X(e^{j\omega})e^{jn\omega}e^{-j\omega}d(e^{j\omega})$$

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

离散时间傅里叶反变换

思考:反变换的物理意义是什么?