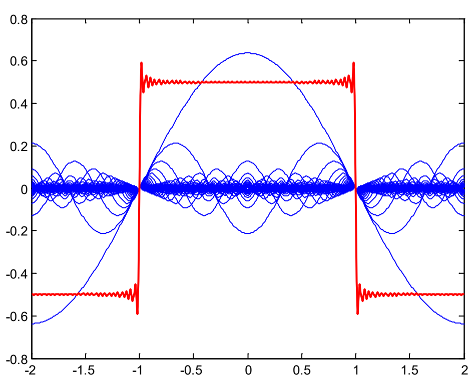
信号与系统

第11讲 离散时间信号基础与抽样定理

郭红星

华中科技大学计算机学院

May 19, 2020



本讲内容

- **离散时间信号的描述及有关概念**
  - 离散时间信号的定义与表示
  - 常见的离散时间信号
  - 序列的分类
  - 移序与差分
  - 离散信号的简单运算
- **抽样定理**
  - 信号的时域抽样
  - 抽样定理
  - 连续信号的恢复(内插公式)

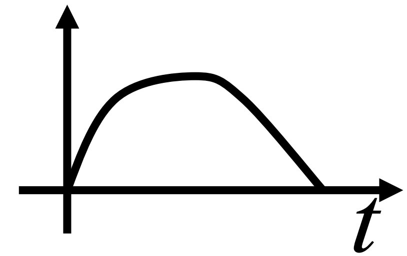
学习方法：联系连续时间信号与系统进行类比

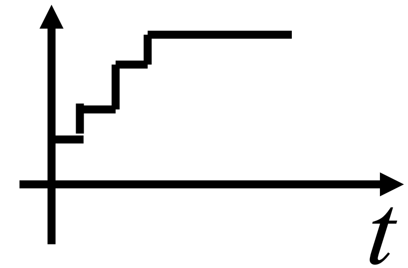
- 学习目标
  - 掌握离散时间信号的基本概念和基础知识
  - 通过抽样定理，理解从连续到离散的转换过程
  - 运用所学知识，解释“车轮反转”现象，并初步认识其应用价值

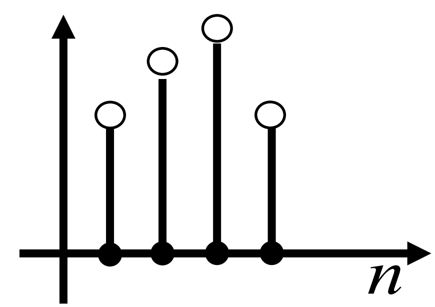
6.1 离散时间信号基础

信号的分类

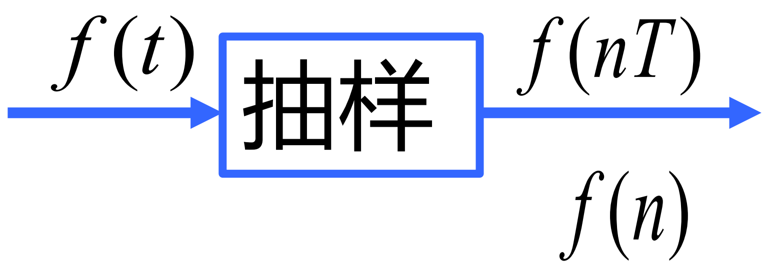
- 信号
  - 连续 t
    - 模拟：幅值、时间都连续
    - 量化：幅值离散、时间连续
  - 离散 n
    - 抽样：时间离散、幅值连续
    - 数字：幅值、时间都离散

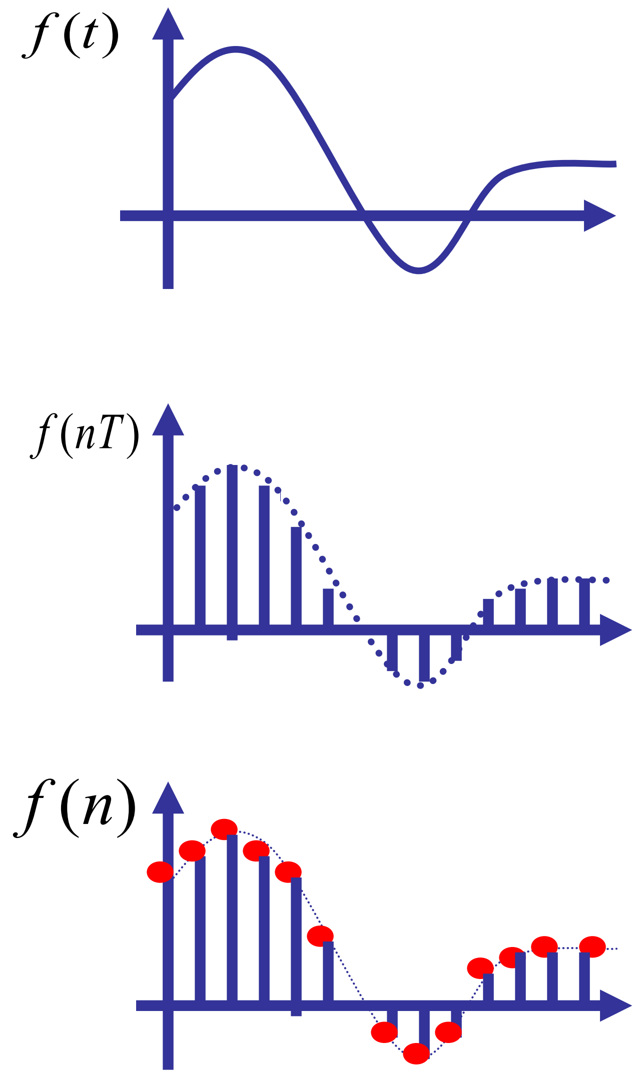






信号：从连续到离散



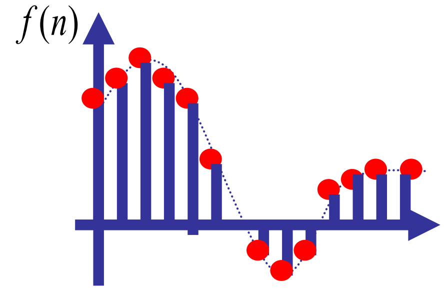


从$f(t)$到$f(n)$

离散时间信号的表示

表示方法

- 序列形式 $\left\{f(n)\right\}$
- 表格形式
- 图形方式



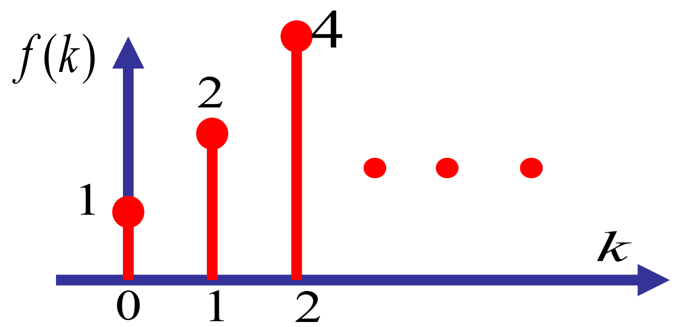
- 闭合表达式
- 单位序列的组合形式

例题1

- 已知序列$f(k)=\{1,2,4,8,\ldots\}$,试用上述几种方法表示之。

解：1.闭合形式 $f(k)=2^k, k=0,1,2,\cdots)$

2.图形形式



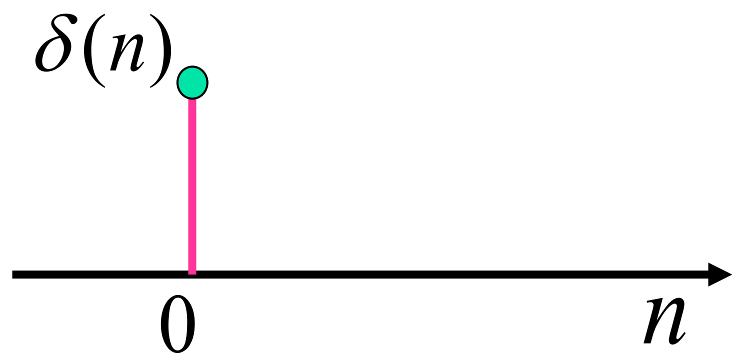
3.表格形式

k	0	1	2	3	.	.
$f(k)$	1	2	4	8		

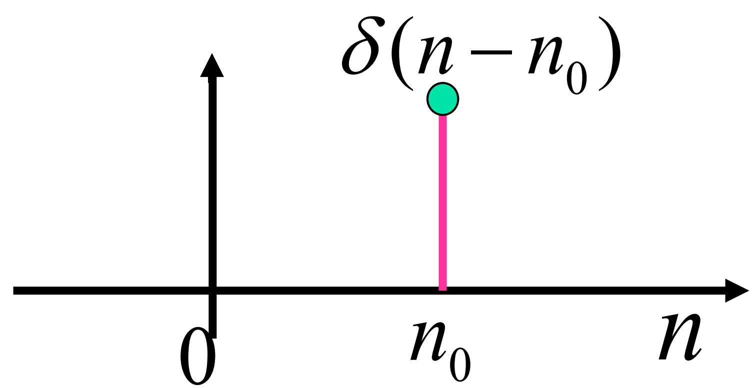
几种常见的离散信号

- **单位样值信号(Unit Sample)**

$$\delta(n)=\begin{cases}1 & (n=0)\\ 0 & (n\neq 0)\end{cases}$$



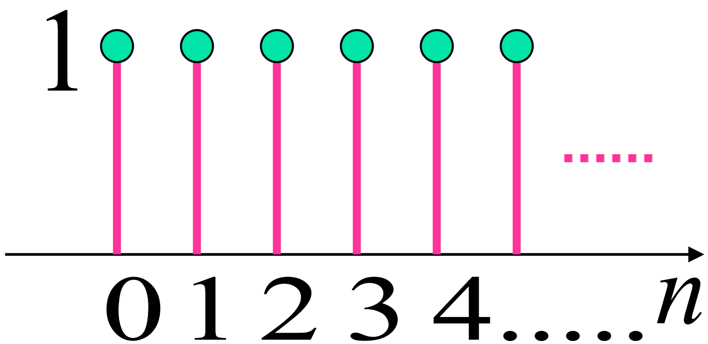
$$\delta(n-n_0)=\begin{cases}1 & (n=n_0)\\ 0 & (n\neq n_0)\end{cases}$$



几种常见的离散信号

- **离散单位阶跃序列**

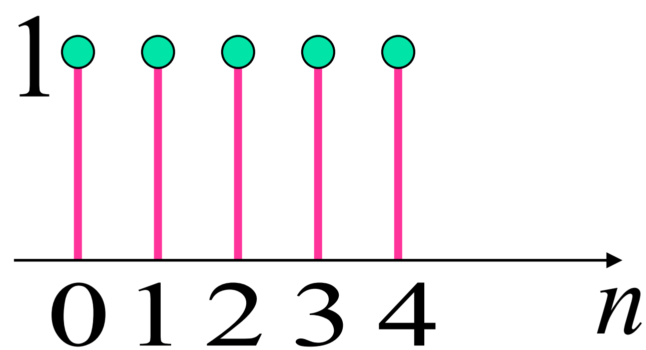
$$u(n)=\begin{cases}1 & (n\geq 0)\\ 0 & (n<0)\end{cases}$$



- **离散矩形序列**

$$G_N(n)=\begin{cases}1 & (0\leq n\leq N-1)\\ 0 & (n<0\ or\ n\geq N)\end{cases}$$

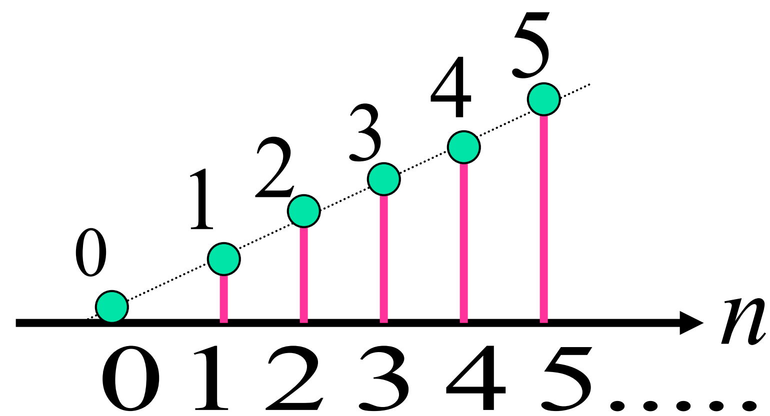
$$=u(n)-u(n-N)$$



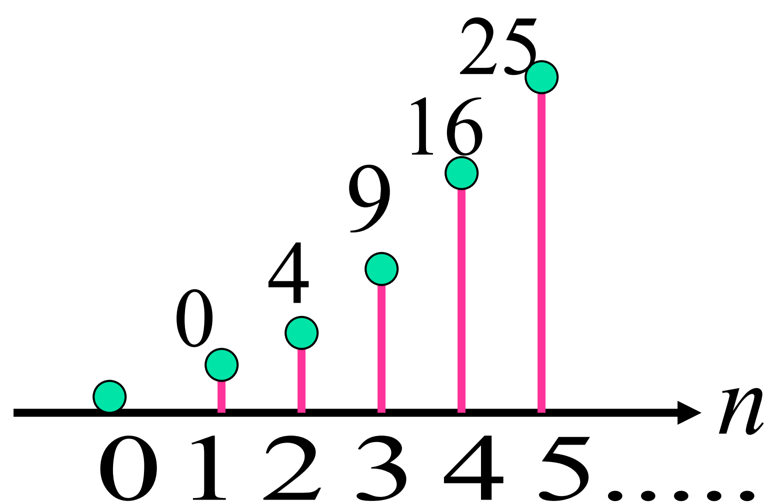
几种常见的离散信号

- **斜变序列**

$$R(n) = nu(n)$$

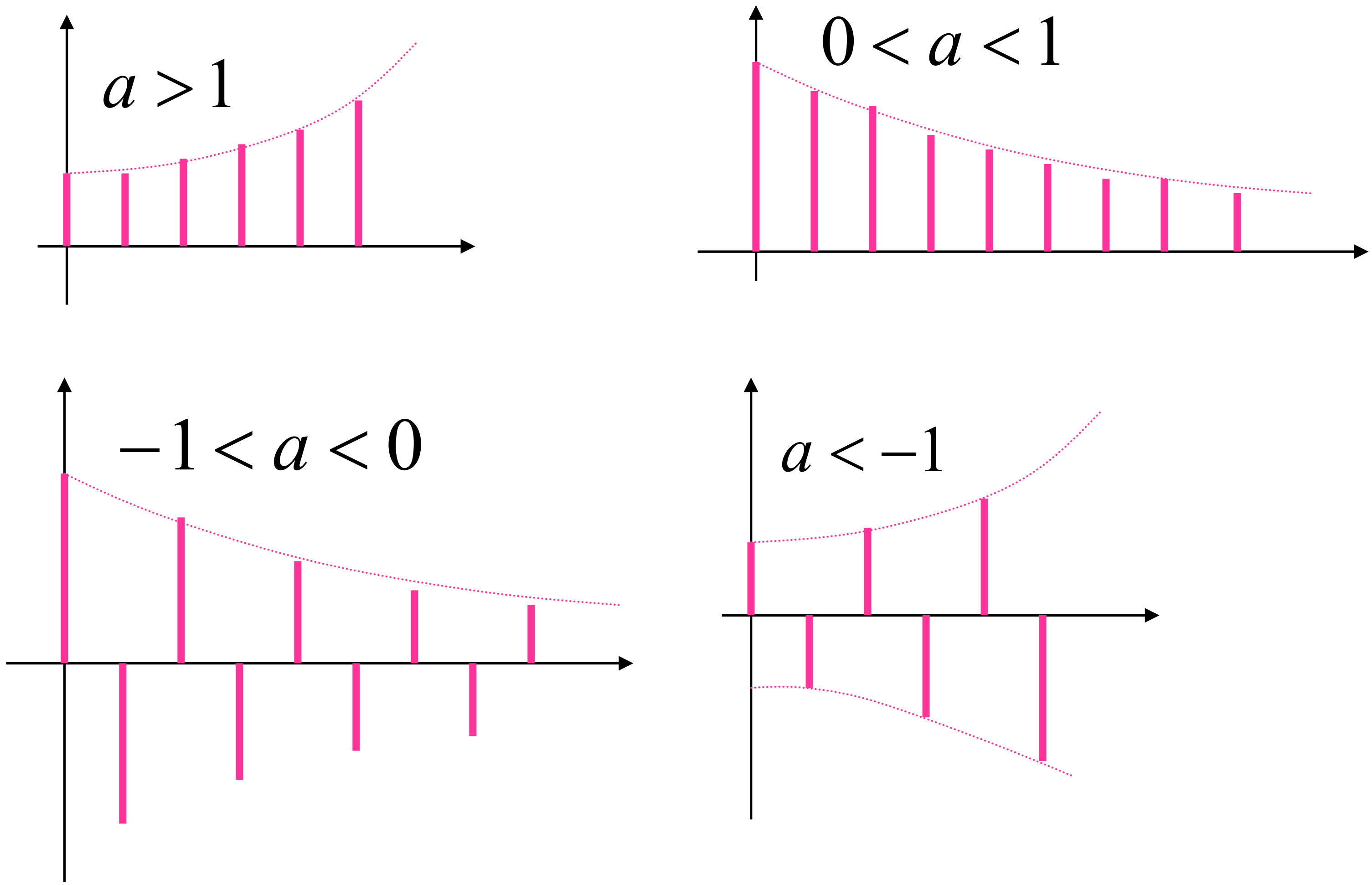


$$r(n) = n^2u(n)$$



几种常见的离散信号

- **指数序列** $x(n)=a^n u(n)$

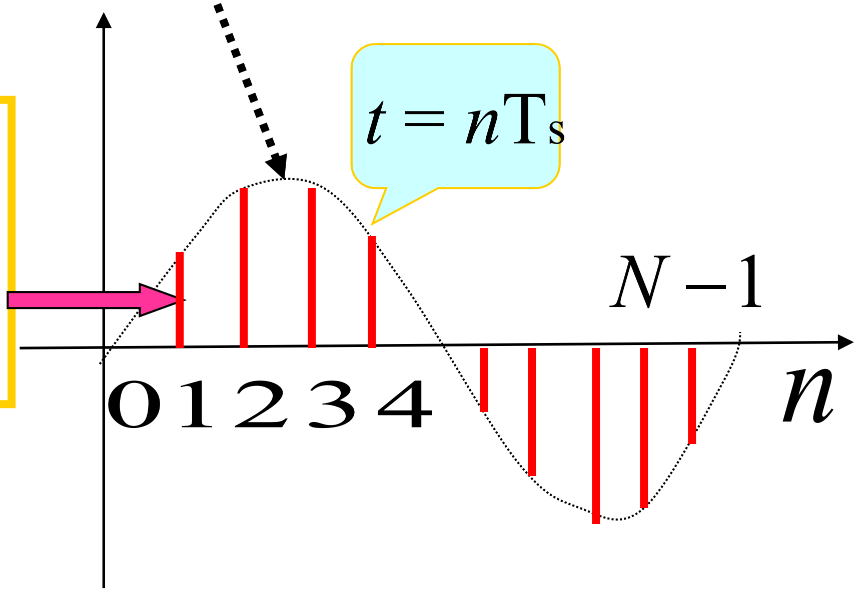


几种常见的离散信号

- 正弦序列

$$f(t) = A\sin\Omega_0 t$$

$$x(n) = A\sin(\Omega_0 n T_s)$$
$$= A\sin(\omega_0 n)$$



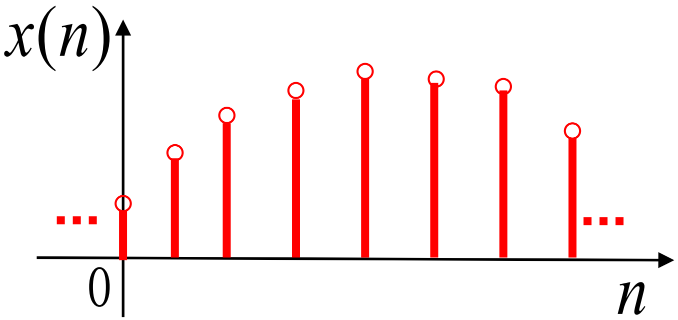
$$\omega_0 = \Omega_0 T_s = \frac{\Omega_0}{f_s}$$

$$x(n) = A\cos n\omega_0$$

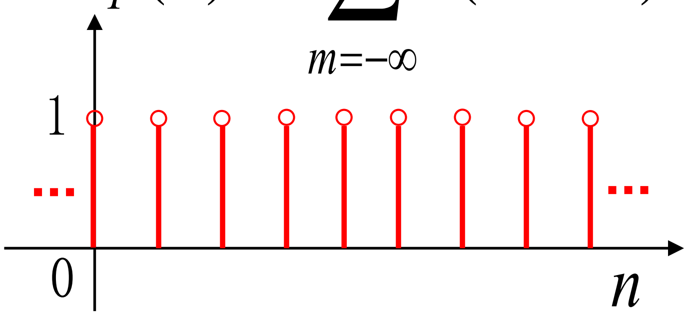
注意：这里的ω_0已经不是真正的频率

几种常见的离散信号

■ 任意离散序列



$$\delta_T(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(n-m)$$



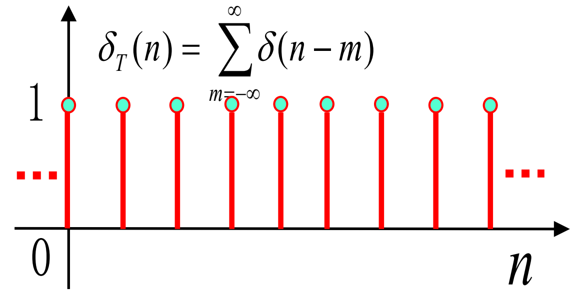
任意序列可以表示(分解)为单位样值信号移序的**线性组合**

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m)$$

序列的分类

① **双边序列**：$f(k)$对所有的k都有取值

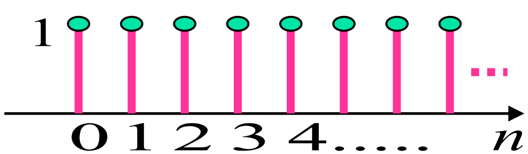
- $f(k)=f(-k)$ —偶对称
- $f(k)=-f(-k)$ —奇对称
- $f(k)=f(k+N)$ —周期序列



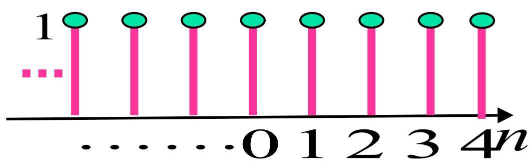
② **单边序列**：$f(k)$对部分k（无穷个）有取值

- 若 $k\geqslant N_1$，为右边序列，

  其中当$N_1 \geqslant 0$时，为因果序列

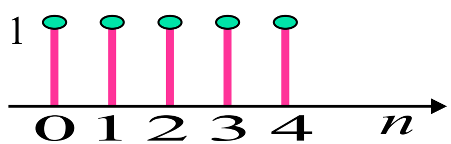


- 若 $k\leqslant N_2$，为左边序列



③ **时限（有限长）序列**：$f(k)$仅在$N_1\leqslant k\leqslant N_2$内取值

- 例如单位矩形序列



例题2

判断以下两序列是否周期序列，并确定周期序列的周期。

$$1.x(n)=A\cos(\frac{3\pi}{7}n-\frac{\pi}{8})$$

$$2.x(n)=e^{j(n/8-\pi)}$$

若存在正整数N，有$x(n+N)=x(n)$，则$x(n)$为周期序列。

解： $1.\because x(n+N)=A\cos[\frac{3\pi}{7}(n+N)-\frac{\pi}{8}]=A\cos(\frac{3\pi}{7}n+\frac{3\pi}{7}N-\frac{\pi}{8})$

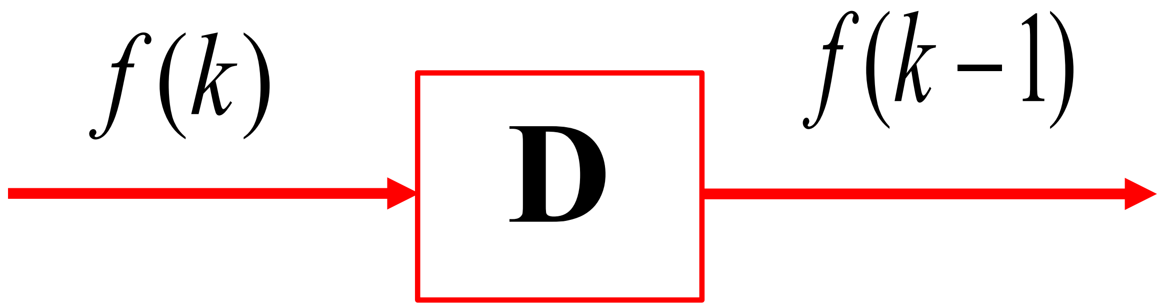
当$\frac{3\pi}{7}N$判是2π的整数倍时，$x(n+N)=x(n)$，可知周期为$N=14$.

$$2.x(n+N)=e^{j(\frac{n}{8}+\frac{N}{8}-\pi)}=e^{j(\frac{n}{8}-\pi)}e^{j\frac{N}{8}}=x(n)e^{j\frac{N}{8}}$$

若$x(n+N)=x(n)$,则$e^{j\frac{N}{8}}=1,\frac{N}{8}=2k\pi$ $\therefore$**不是周期序列**

序列的移位(序)

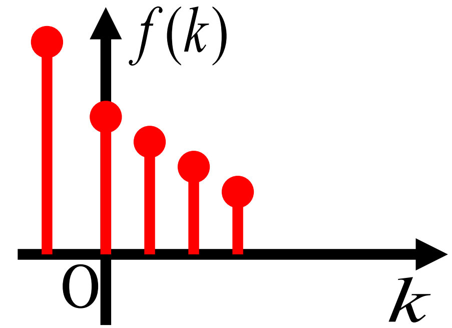
- **右移：** $Df(k) = f(k-1) \therefore f(k-m) = D^m f(k)$
- **左移：** $Ef(k) = f(k+1) \therefore f(k+m) = E^m f(k)$



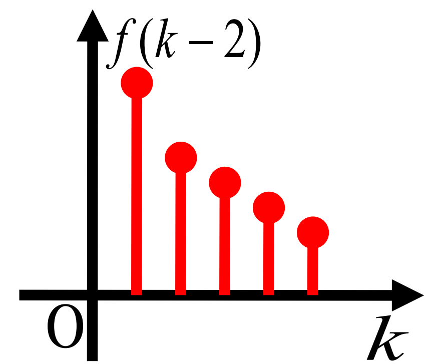
D：滞后算子；E(1/D)：超前算子

序列的移位(序)

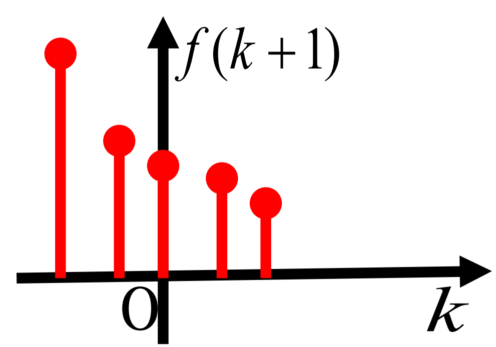
k	-1	0	1	2	3
$f(k)$	3	2	1.5	1.25	1.125



k	-1	0	1	2	3	4	5
$f(k-2)$	0	0	3	2	1.5	1.25	1.125



k	-2	-1	0	1	2
$f(k+1)$	3	2	1.5	1.25	1.125



序列的差分

- **前向差分** $y(n)=\Delta x(n)=x(n+1)-x(n)$
- **后向差分** $y(n)=\nabla x(n)=x(n)-x(n-1)$

$$\nabla u(n)=u(n)-u(n-1)=\delta(n)\rightarrow\frac{du(t)}{dt}$$

$$\nabla n=n-(n-1)=1\rightarrow\frac{dt}{dt}=1$$

$$\nabla n^2=n^2-(n-1)^2=2n-1\rightarrow\frac{dt^2}{dt}=2t$$

$$\nabla\sin n\pi=\sin n\pi-\sin(n-1)\pi=2\cos\frac{(2n-1)\pi}{2}$$

典型序列的差分

离散信号的高阶差分

- **序列*x*(*n*)的一阶后向差分**

$$\nabla x(n) = x(n) - x(n-1)$$

- **序列*x*(*n*)的二阶后向差分**

$$\nabla^2 x(n) = \nabla x(n) - \nabla x(n-1) =$$

$$x(n) - 2x(n-1) + x(n-2)$$

- **序列*x*(*n*)的三阶后向差分**

$$\nabla^3 x(n) = \nabla^2 x(n) - \nabla^2 x(n-1) =$$

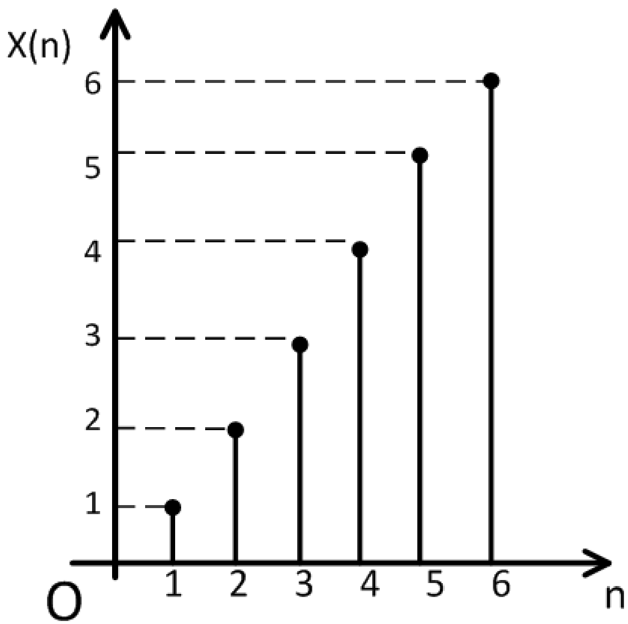
$$x(n) - 3x(n-1) - 3x(n-2) - x(n-3)$$

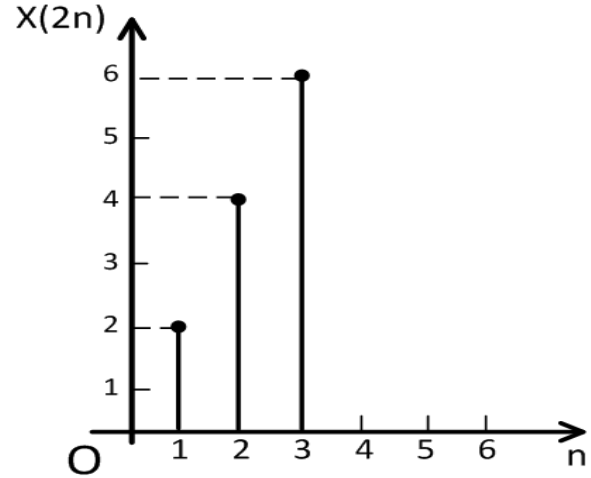
离散信号简单运算

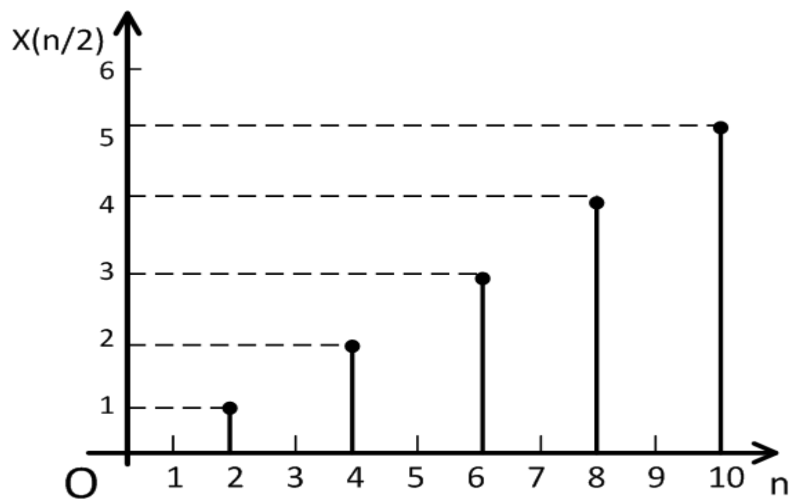
- 信号相加 $$y(k)=f_1(k)+f_2(k)$$
- 信号累加 $$y(k)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}f(i)$$
- 信号相乘 $$y(k)=f_1(k)f_2(k)$$
- 信号反转 $$y(k)=f(-k)$$

序列的压扩

判断以下两序列是否周期序列，并确定周期序列的周期若将自变量n乘以正整数a，则$x(an)$为序列压缩，而$x(n/a)$为扩展。



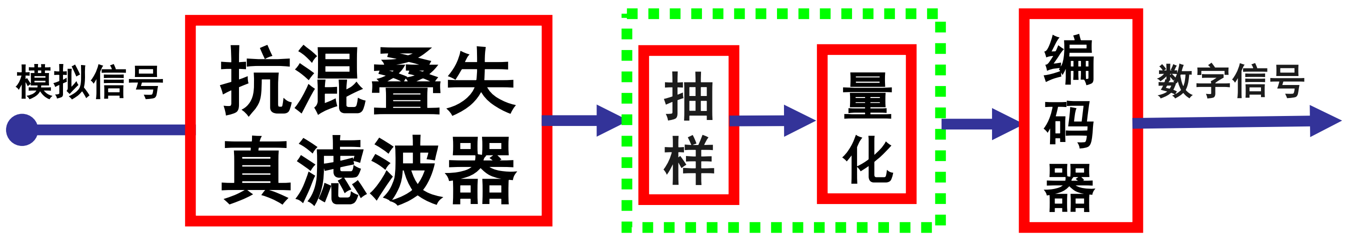




6.2 连续时间信号的离散化

信号抽样：从连续到离散

pulse code modulation(PCM)



计算机声卡的功能

连续信号被抽样后，是否保留了原信号的所有信息？即能否从抽样的信号还原成原始信号？

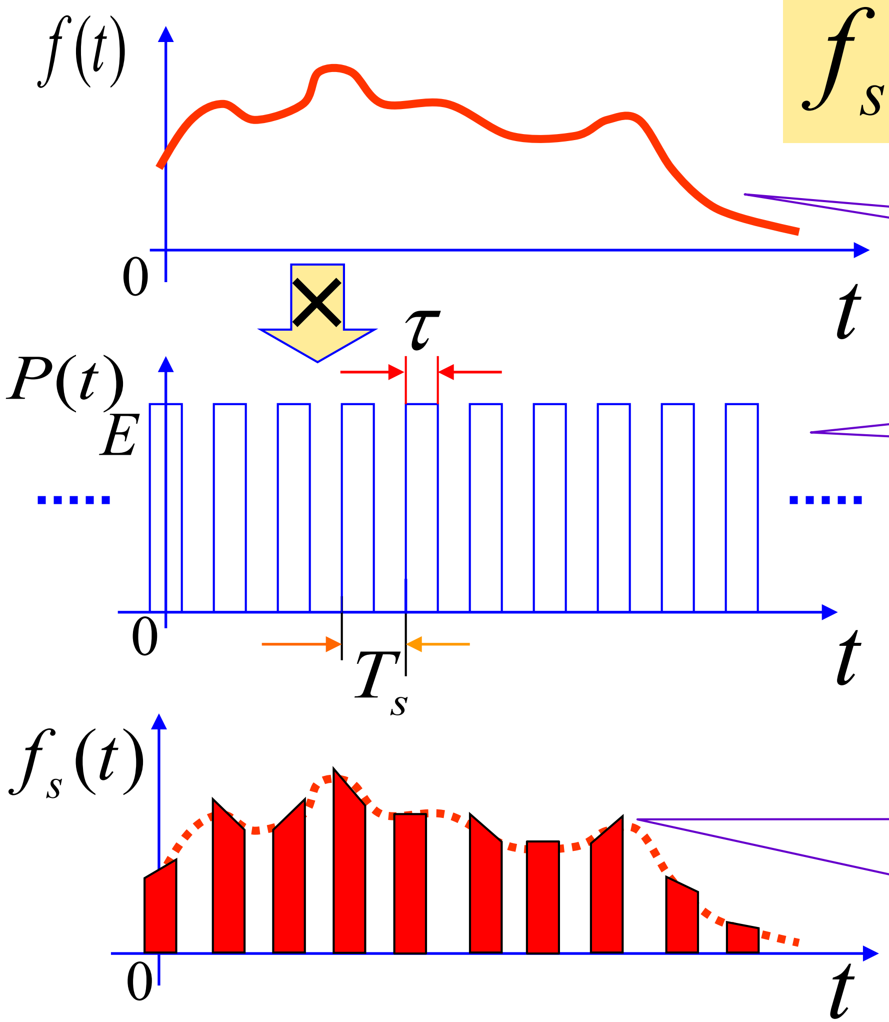
① 单从时域看，看起来是不可能的！

② 抽样后离散信号的频谱是什么样的？
它与抽样前的连续信号频谱的关系？

矩形脉冲时域抽样（自然抽样）

- 抽样信号$f_s(t)$是原连续信号$f(t)$和一个抽样脉冲$p(t)$的乘积

$$f_s(t)=f(t)p(t)$$



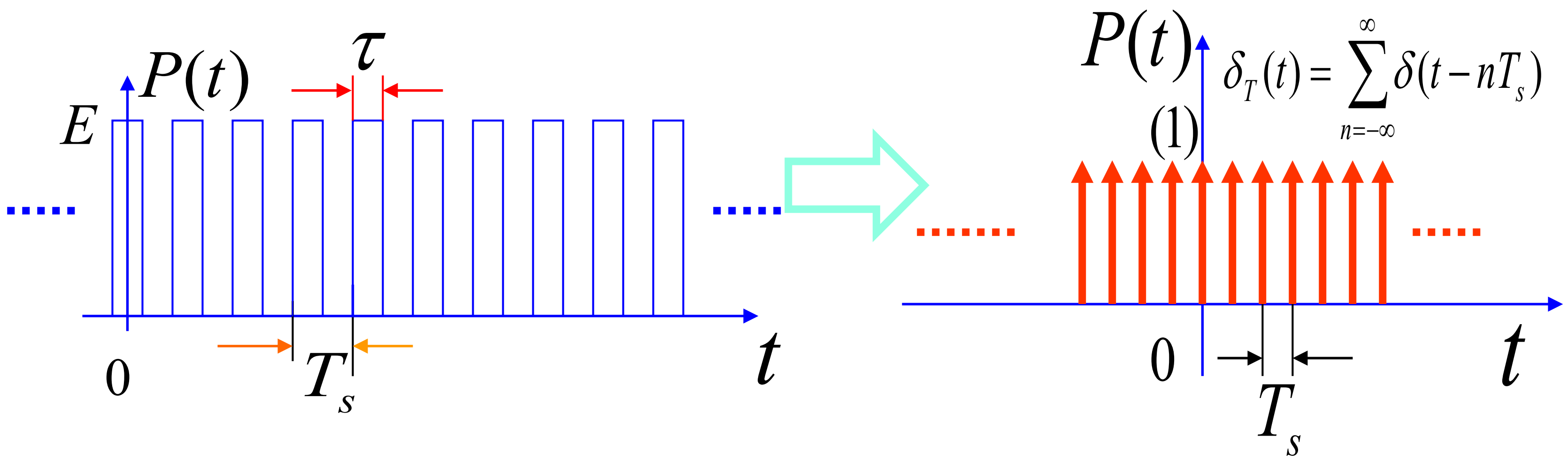
$f(t)$模拟带限信号

$p(t)$周期矩形抽样脉冲序列

抽样信号在抽样期间脉冲顶部随$f(t)$变化，故这种采样称为“自然抽样”

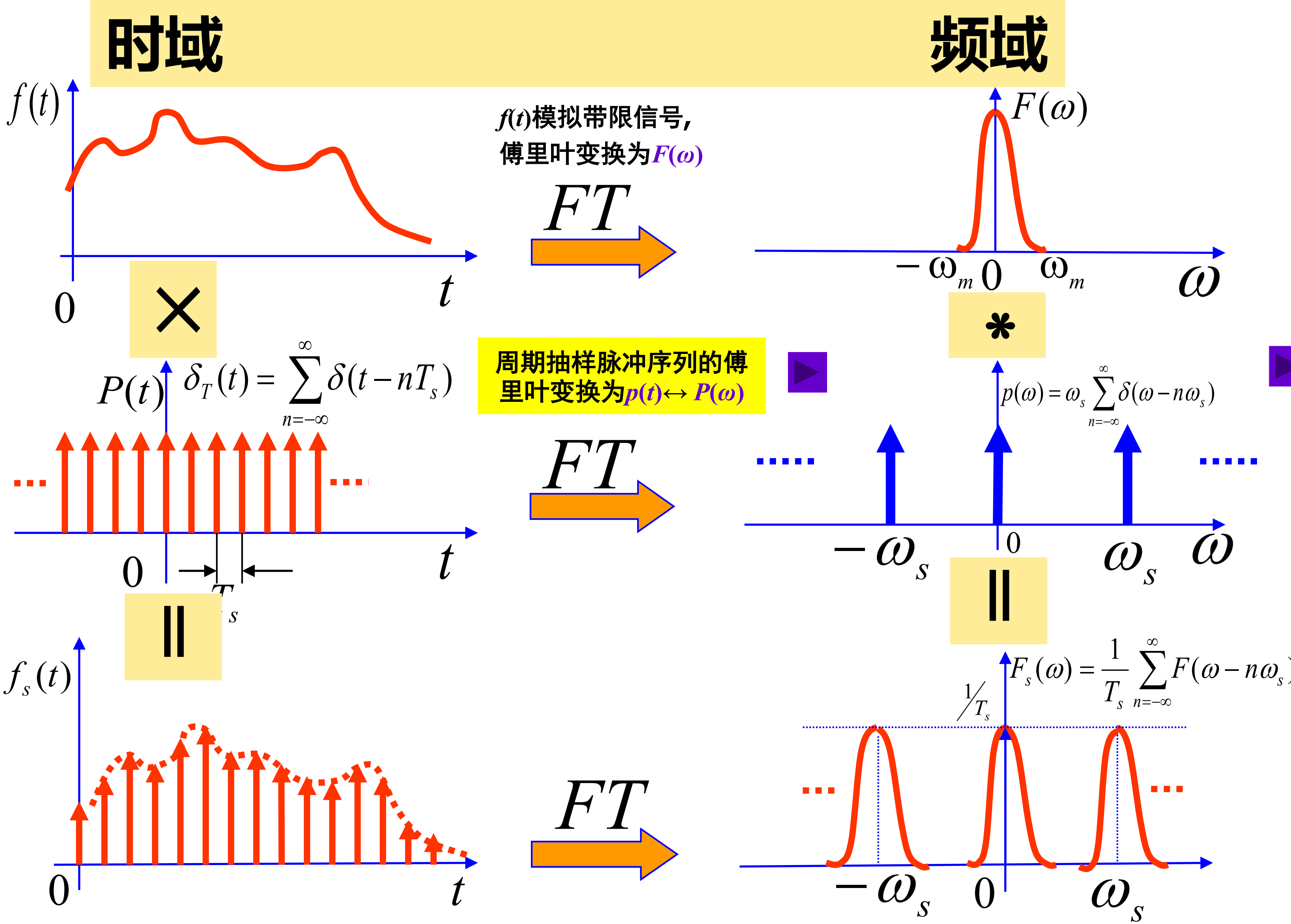
从自然抽样到冲激抽样

- 当$\tau \to 0$时，矩形脉冲→冲激信号



抽样脉冲 → 冲激序列

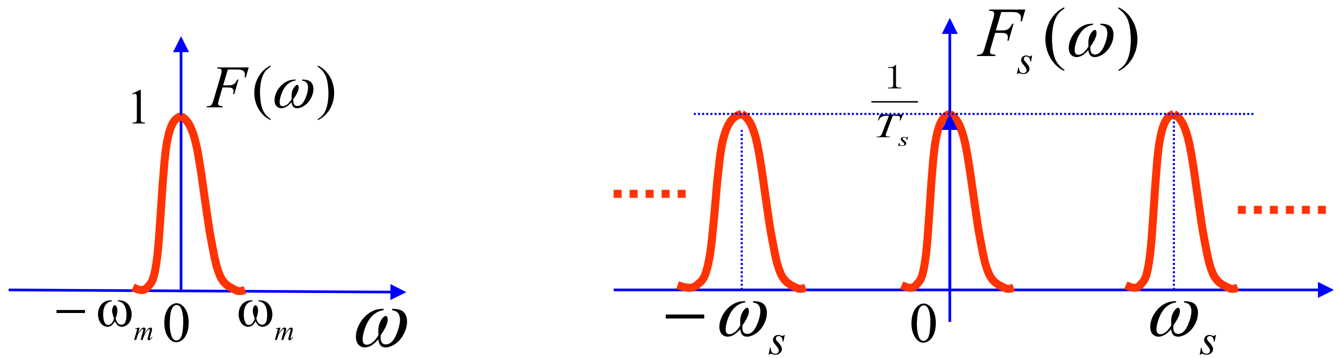
冲激脉冲抽样(理想抽样)



时域
频域
$f(t)$
0
t
$f(t)$模拟带限信号，
傅里叶变换为$F(\omega)$
FT
$F(\omega)$
$-\omega_m$ 0 ω_m
ω
×
*
$P(t)$
$\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)$
周期抽样脉冲序列的傅里叶变换为$p(t)\leftrightarrow P(\omega)$
FT
$p(\omega)=\omega_s\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_s)$
T_s
$-\omega_s$ 0 ω_s ω
||
$f_s(t)$
FT
$F_s(\omega)=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(\omega-n\omega_s)$
$1/T_s$
$-\omega_s$ 0 ω_s

冲激抽样的频谱分析

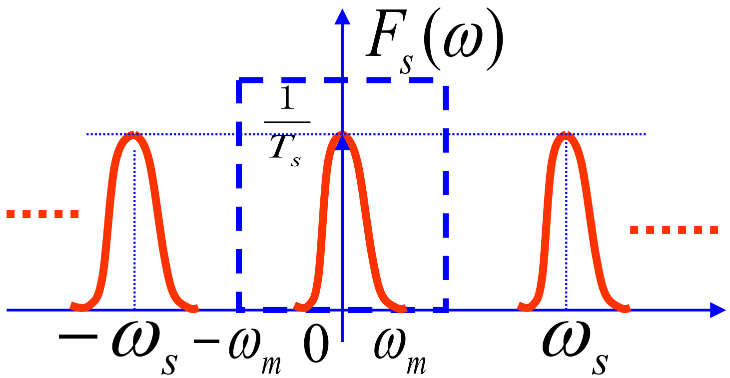
- 上面的分析表明：由于冲激序列的傅里叶系数P_n为常数，所以$F_s(\omega)$ 是以ω_s为周期等幅地重复，如下图所示：



抽样前信号频谱　　抽样后信号频谱

连续信号被抽样后，是否保留了原信号的所有信息？能否从抽样信号恢复抽样前的原始连续时间信号？

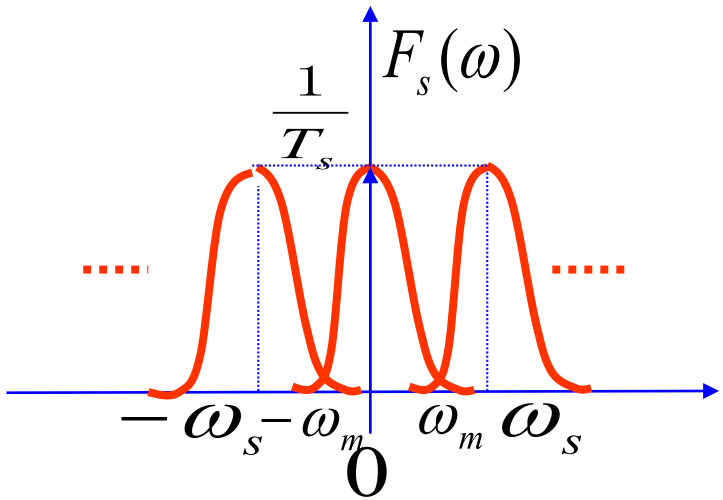
时域抽样定理

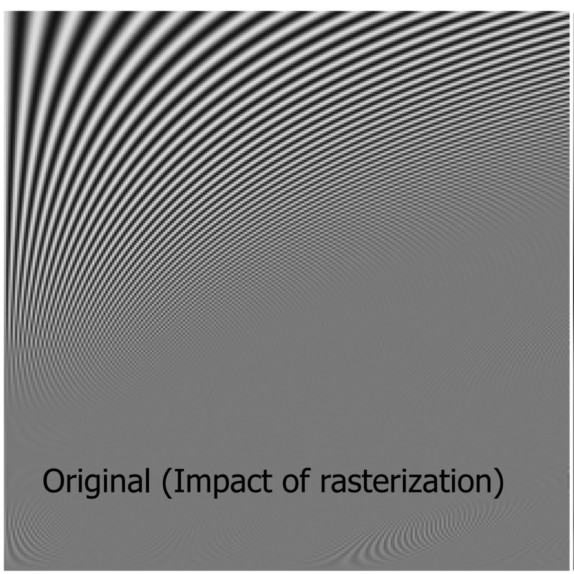


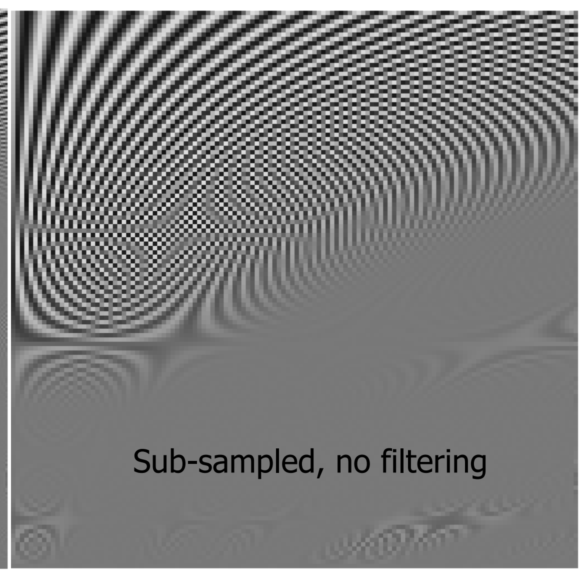
① f_m是信号本身所固有的最高频率，采样周期T_s是根据模数转换需要选择的
② $2f_m$为Nyquist sampling rate；$1/2f_m$为Nyquist space
③ 为了保留信号最高频率分量的全部信息，一个周期间隔内，至少抽样两次，即$f_s \geq 2f_m$

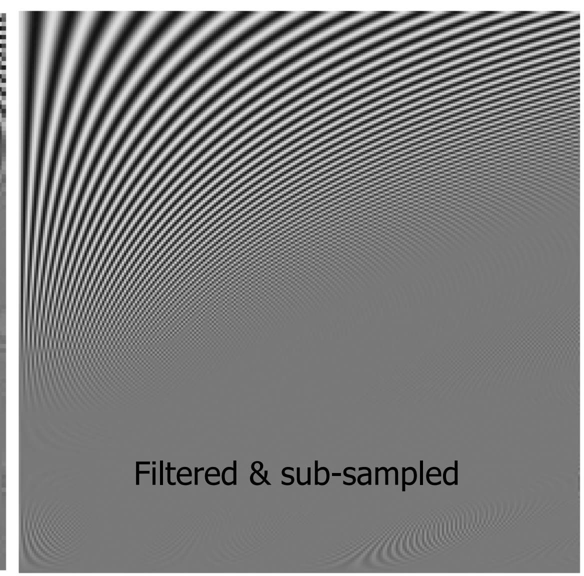
- 由于$f(t)$的频带有限,而时域抽样必导致频域周期。在周期重复时，为保证｜ω_m｜内为$F(\omega)$，则重复周期应满足$\omega_s > 2\omega_m$，即抽样间隔满足$T_s < \frac{\pi}{\omega_m}$
- 在此条件下，将抽样信号通过截止频率为$\omega_s-\omega_m>\omega_c>\omega_m$ 的理想低通滤波器，便能从$F_s(\omega)$中恢复$F(\omega)$,也就是说，能从抽样信号$f_s(t)$中恢复$f(t)$—奈奎斯特抽样定理

不满足抽样定理时产生频率混叠效应

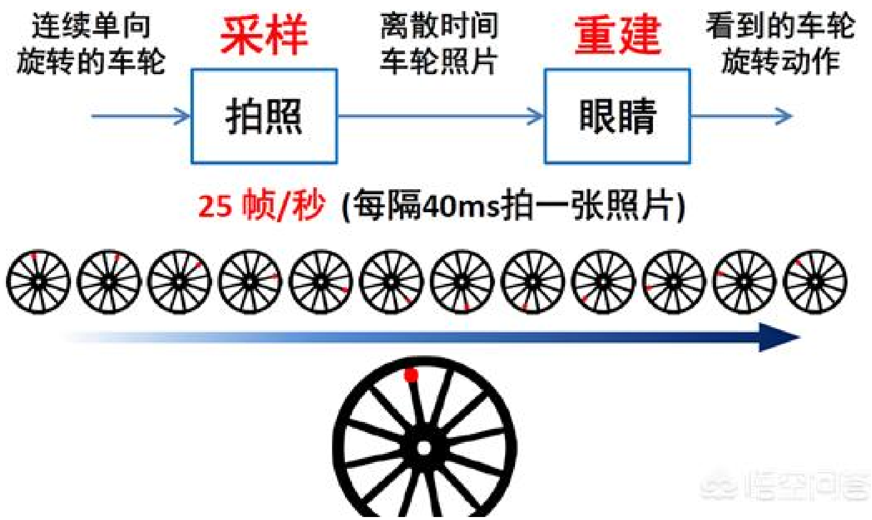


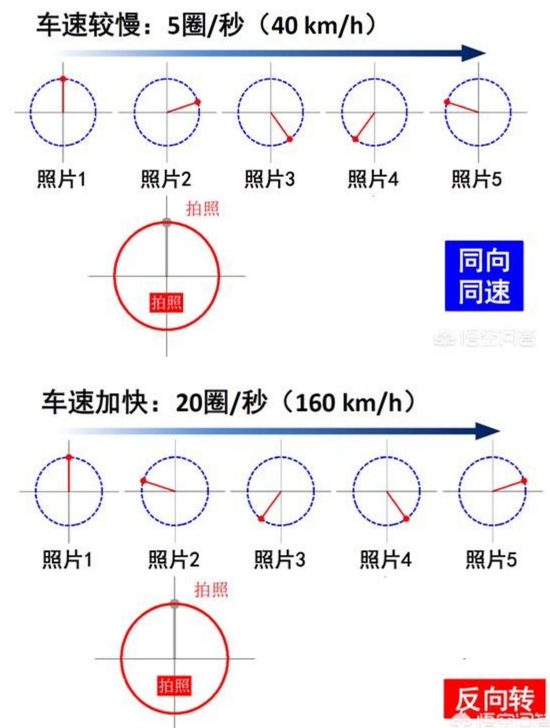


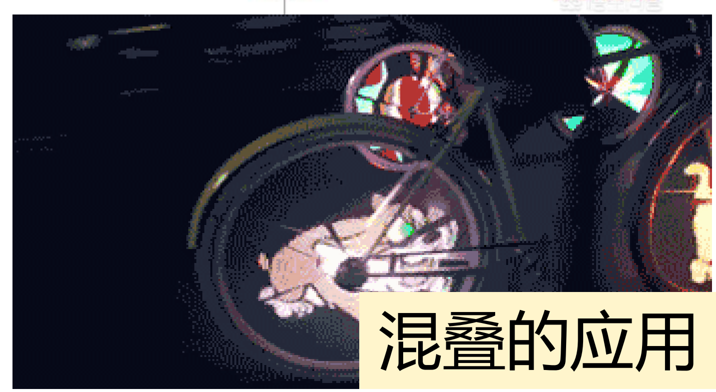




不满足抽样定理时产生频率混叠现象







由抽样信号恢复原连续信号

- **恢复原始信号$f(t)$。** 设$f(t)\leftrightarrow F(\omega)$，$f_s(t)\leftrightarrow F_s(\omega)$，则当$F_s(\omega)$通过截止频率为$\omega_c$ 的理想低通滤波器时，滤波器的响应频谱为$F(\omega)$ ，显然滤波器的作用等效于一个开关函数$H(\omega)=G_{2\omega_c}$ 同$F_s(\omega)$ 的相乘。

$$H(\omega)=\begin{cases} T_s & for \quad |\omega|\le\omega_c \\ 0 & for \quad |\omega|>\omega_c \end{cases}$$

$$F(\omega)=F_s(\omega)H(\omega)$$

- **由时域卷积定理知：** $f(t)=f_s(t)*h(t)$

由抽样信号恢复原连续信号

- 由傅里叶变换的对称性可知：$H(\omega)\leftrightarrow h(t)=\dfrac{\mathrm{T_s}\omega_c}{\pi}Sa(\omega_c t)$

而 $$\boxed{f_s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(nT_s)\delta(t-nT_s)}$$

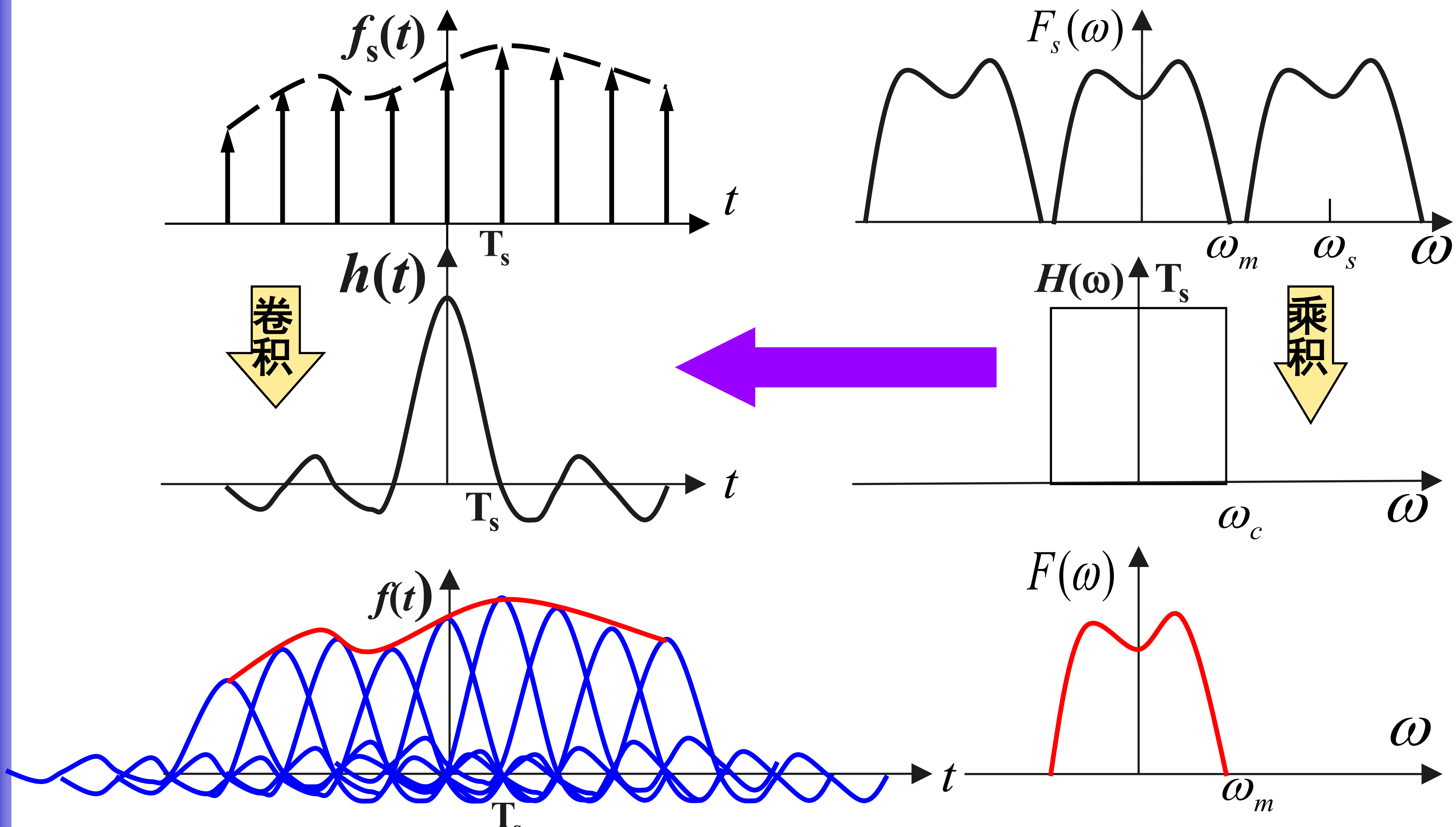
$$f(t)=f_s(t)*h(t)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{T_s}\omega_c}{\pi}f(nT_s)Sa[\omega_c(t-nT_s)]$$

内插公式

- 上式表明$f(t)$可以展开为正交的抽样函数的无穷级数，且级数的系数等于抽样值$f(n\mathrm{T_s})$。这样，若在抽样信号$f_s(t)$的每个抽样值上画一个峰值为$f(n\mathrm{T_s})$的Sa函数的波形，合成的波形就是$f(t)$

由抽样信号恢复原连续信号



■**系统的观点：**理想低通滤波器的冲激响应$h(t)$是Sa函数。$f_s(t)$由一系列的冲激组成，其通过理想低通滤波器，则每一个抽样值在**对应的时刻**产生一个冲激响应$h(t)$，这些响应进行叠加便得到$f(t)$，从而达到恢复信号

值得进一步思考的问题

① 奈奎斯特是如何想到抽样定理的？

② 用到的理想低通滤波器能实现吗？

③ 理想抽样在实际中能做到吗？

④ 实际应用中如何实现模数转换？

小结

- 离散时间信号的定义和基本运算
- 抽样在连续(时间)信号与离散(时间)信号之间架起了一座沟通之桥
- 时域的抽样(离散化)对应频域的周期
- 根据抽样信号可以无失真重构原来的连续时间信号。抽样定理为连续时间信号离散化奠定了理论基础

课外作业

- 阅读:7.1，7.2节; 预习:7.3节
- 作业:7.1，7.7两题

- 每星期三晚23:59:59前交上星期布置的作业
  - 请按照新版教学指南要求按时上传提交

- 地点:在南一楼中402室

均匀冲激序列频谱推导

- 设抽样为均匀抽样，周期为T_s，则抽样角频率为

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} = 2\pi f_s$$

- 由于$p(t)$是周期信号，可知$p(t)$的傅里叶变换为：

$$p(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n \delta(\omega - n\omega_s)$$

参见课本p123

其中，p_n为周期信号$\delta_T(t)$的傅里叶级数展开系数：

$$P_n = \frac{1}{T_s}\int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} p(t) e^{-jn\omega_s t} dt = \frac{1}{T_s}$$

抽样信号频谱推导

- 由频域卷积定理得，时域相乘的傅里叶变换等于它们的频谱在频域里相卷积。

$$F_s(\omega)=\frac{1}{2\pi}F(\omega)*P(\omega)$$

- 把计算出的$p(\omega)$代入上式得：

$$F_s(\omega)=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(\omega-n\omega_s)$$