



Proofs 证明理论

Arguments in Propositional Logic 命题逻辑论证

- A **argument 论证** in propositional logic is a **sequence of propositions 命题序列**. All but the final proposition are called **premises 前提**. The last statement is the **conclusion 结论**.
- **The argument is valid 有效论证** if the premises imply the conclusion.
- **An argument form 形式证明** is an argument that is valid no matter what propositions are substituted into its propositional variables.
- If the premises are p_1, p_2, \dots, p_n and the conclusion is q then $(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow q$ is a **tautology 永真式**.
- The following **inference rules 推理规则** are all simple argument forms that will be used to construct more complex argument forms.

Rules of Inference for Propositional Logic:

Modus Ponens (演绎推理)

$$\frac{p \rightarrow q \quad p}{\therefore q}$$

Corresponding Tautology:

$$(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$$

Example:

Let p be “It is snowing.”

Let q be “I will study discrete math.”

“If it is snowing, then I will study discrete math.”

“It is snowing.”

“Therefore, I will study discrete math.”

Modus Tollens(拒取式)

$$\frac{p \rightarrow q}{\neg q} \\ \hline \therefore \neg p$$

Corresponding Tautology:

$$(\neg p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg q$$

Example:

Let p be “it is snowing.”

Let q be “I will study discrete math.”

“If it is snowing, then I will study discrete math.”

“I will not study discrete math.”

“Therefore , it is not snowing.”

Hypothetical Syllogism(假言三段论)

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \hline \therefore p \rightarrow r \end{array}$$

Corresponding Tautology:
 $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$

Example:

Let p be “it snows.”

Let q be “I will study discrete math.”

Let r be “I will get an A.”

“If it snows, then I will study discrete math.”

“If I study discrete math, I will get an A.”

“Therefore , If it snows, I will get an A.”

Disjunctive Syllogism(析取三段论)

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ \neg p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

Corresponding Tautology:
 $(\neg p \wedge (p \vee q)) \rightarrow q$

Example:

Let p be “I will study discrete math.”

Let q be “I will study English literature.”

“I will study discrete math or I will study English literature.”

“I will not study discrete math.”

“Therefore , I will study English literature.”

Question: what about $p \vee q$, $\neg q$?

Addition

$$\frac{p}{\therefore p \vee q}$$

Corresponding Tautology:

$$p \rightarrow (p \vee q)$$

Example:

Let p be “I will study discrete math.”

Let q be “I will visit Las Vegas.”

“I will study discrete math.”

“Therefore, I will study discrete math or I
will visit
Las Vegas.”

Simplification

$$\frac{p \wedge q}{\therefore q}$$

Corresponding Tautology:

$$(p \wedge q) \rightarrow p$$

Example:

Let p be “I will study discrete math.”

Let q be “I will study English literature.”

“I will study discrete math and English literature”

“Therefore, I will study discrete math.”

Conjunction

$$\frac{p}{q} \quad \frac{q}{\therefore p \wedge q}$$

Corresponding Tautology:

$$((p) \wedge (q)) \rightarrow (p \wedge q)$$

Example:

Let p be “I will study discrete math.”

Let q be “I will study English literature.”

“I will study discrete math.”

“I will study English literature.”

“Therefore, I will study discrete math and I will study English literature.”

Resolution (消解)

$$\neg p \vee r$$

$$p \vee q$$

$$\hline \therefore q \vee r$$

Resolution plays an important role in AI and is used in Prolog.

Corresponding Tautology:

$$((\neg p \vee r) \wedge (p \vee q)) \rightarrow (q \vee r)$$

Example:

Let p be “I will study discrete math.”

Let r be “I will study English literature.”

Let q be “I will study databases.”

“I will not study discrete math or I will study English literature.”

“I will study discrete math or I will study databases.”

“Therefore, I will study databases or I will English literature.”

Using the Rules of Inference to Build Valid Arguments

构建有效论证

- 推理：推理是由已知的命题得到新命题的思维过程。
- A *valid argument* (有效论证) is a sequence of statements. Each statement is either a premise or follows from previous statements by rules of inference. The last statement is called conclusion.
- A valid argument takes the following form (形式) :

$$H_1, H_2, \dots, H_n \Rightarrow C \text{ 也即 } H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n \Rightarrow C$$

实际上就是证明所有的前提的合取公式与结论之间是否存在蕴含关系。前面学习过的证明蕴含关系的所有方法仍然适用。

如何判断由一个前提集合能否推出某个结论

1、真值表法（不再详述）

对于命题公式 $H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n \Rightarrow C$ 中所有命题变元的每一组真值指派作出该公式的真值表，看是否为永真。

例1 考察结论C是否是下列前提 H_1, H_2 的结论。

(1) $H_1: P \rightarrow Q, H_2: P, C: Q$

解 构造其真值表如下：

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \rightarrow Q$	$(P \rightarrow Q) \wedge P$ $(H_1 \wedge H_2)$	$((P \rightarrow Q) \wedge P) \rightarrow Q$ $(H_1 \wedge H_2 \rightarrow C)$
0	0	1	1	1	0	1
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1

(2) $H_1: P \rightarrow Q$, $H_2: \neg P$, $C: \neg Q$

解 构造其真值表如下:

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \rightarrow Q$	$(P \rightarrow Q) \wedge \neg P$ $(H_1 \wedge H_2)$	$((P \rightarrow Q) \wedge \neg P) \rightarrow \neg Q$ $(H_1 \wedge H_2 \rightarrow C)$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	0	1

***在这里, 我们不关心结论是对还是错, 而主要关心由给定的前提是否能推出这个结论来。

2、等值演算方法（不再详述）

例2 证明 $\neg(P \wedge \neg Q), (\neg Q \vee R), \neg R \Rightarrow \neg P$

分析：根据题意，需证明

$$\neg(P \wedge \neg Q) \wedge (\neg Q \vee R) \wedge \neg R \Rightarrow \neg P$$

$$\text{证明 } (\neg(P \wedge \neg Q) \wedge (\neg Q \vee R) \wedge \neg R) \rightarrow \neg P$$

$$\Leftrightarrow ((\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee R) \wedge \neg R) \rightarrow \neg P$$

$$\Leftrightarrow ((\neg P \vee Q) \wedge ((\neg Q \wedge \neg R) \vee (R \wedge \neg R))) \rightarrow \neg P$$

$$\Leftrightarrow ((\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \wedge \neg R)) \rightarrow \neg P$$

再用分配律等，最终推出一个什么式子能表示证明完成？

“形式证明”方法 Formal Proofs

(1) 基本术语

形式证明：一个描述推理过程的**命题序列**，其中每个命题或者是已知的命题，或者是由某些前提所推得的结论，序列中最后一个命题就是所要求的结论，这样的**命题序列**称为形式证明。

有效的证明：如果证明过程中的每一步所得到的结论都是根据推理规则得到的，则这样的证明称作是有效的。

有效的结论：通过有效的证明而得到结论，称作是有效的结论。

正确的结论与有效的结论

- **有效的结论**：是在一定前提下，由有效的证明或者说有效的推理过程得到的结论。（但这样的结论本身未必是正确的。）

因为其前提本身可能不正确。但这并不影响证明过程是有效的，也不影响结论的有效性。

重要的是构造有效的证明过程!!

- 例如：P：太阳从西边出来；Q：我当了美国总统；
 $P \rightarrow Q$ ：如果太阳从西边出来，我就当美国总统；
再例如：P: $3 > 5$, Q: $4 > 6$
 - 前提：P、 $P \rightarrow Q$ ，有效结论：Q。
 - 显然结论Q是不正确的，但它是一个有效的结论。
- **正确的结论**：是在正确的前提下，经过有效的证明或推理得到有效结论。

形式证明的形成

为了证明C是前提 H_1, H_2, \dots, H_n 的结论,

即需证明: 当前提 H_1, H_2, \dots, H_n 均为真时, C必为真。

通过构造一个命题序列, 来描述这一推理过程。

例如:

$H_1, Q_1, H_2, Q_2, H_i, Q_3, \dots, C$

其中的 Q_i 就是推理过程中的中间结论

(2) 推理规则（前面已经介绍过的规则）

前提引用规则：在证明的任何步骤上都可以引用前提。

结论引用规则：在证明的任何步骤上所得到的结论(中间结论)都可以在其后的证明中引用。

置换规则：在证明的任何步骤上，命题公式的子公式都可以用与它等值的其它命题公式置换。

代入规则：在证明的任何步骤上，重言式中的任一命题变元都可以用一逻辑公式代入，得到的仍是重言式。

重温一些常用的蕴涵关系及等值关系

I_9	$P, Q \Rightarrow P \wedge Q$
I_{10}	$\neg P, P \vee Q \Rightarrow Q$
I_{11}	$P, P \rightarrow Q \Rightarrow Q$
I_{12}	$\neg Q, P \rightarrow Q \Rightarrow \neg P$
I_{13}	$P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$
$E_1 E_1'$	$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P, P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$
$E_2 E_2'$	$(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R), (P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$
$E_6 E_6'$	$\neg(\neg P) \Leftrightarrow P$
E_{15}	$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$

例3 形式证明 $R \wedge (P \vee Q)$ 是前提 $P \vee Q, Q \rightarrow R, P \rightarrow S, \neg S$ 的结论。

编号	公 式	依 据
(1)	$P \rightarrow S$	前提 (前提引入规则)
(2)	$\neg S$	前提 (前提引入规则)
(3)	$\neg P$	(1), (2); I_{12}
(4)	$P \vee Q$	前提
(5)	Q	(3), (4); I_{10}
(6)	$Q \rightarrow R$	前提
(7)	R	(5), (6); I_{11}
(8)	$R \wedge (P \vee Q)$	(4), (7); I_9

所以 $P \vee Q, Q \rightarrow R, P \rightarrow S, \neg S \Rightarrow R \wedge (P \vee Q)$

例4 证明 $R \rightarrow S$ 是前提 $P \rightarrow (Q \rightarrow S)$ ， $\neg R \vee P$ 和 Q 的有效结论。

证明

编号	公 式	依 据
(1)	$\neg R \vee P$	前提
(2)	$R \rightarrow P$	(1) ; E_{11}
(3)	$P \rightarrow (Q \rightarrow S)$	前提
(4)	$R \rightarrow (Q \rightarrow S)$	(2) , (3) ; I_{13}
(5)	$\neg R \vee (\neg Q \vee S)$	(4) ; E_{11}
(6)	$\neg Q \vee (\neg R \vee S)$	(5) ; E_1, E_2
(7)	Q	前提
(8)	$\neg R \vee S$	(6) , (7) ; I_{10}
(9)	$R \rightarrow S$	(8) ; E_{11}

这个例题的证明更容易想到的方法是增加一个附加前提。同学们思考一下：假设什么较好？如何说明结论是正确的？

证明 $R \rightarrow S$ 是前提 $P \rightarrow (Q \rightarrow S)$ ， $\neg R \vee P$ 和 Q 的有效结论

也可将例3等价地改为证明由前提 $P \rightarrow (Q \rightarrow S)$ 、 $\neg R \vee P$ 、 Q 、 R 推出结论 S 。

编 号	公 式	依 据
(1)	R	附加前提
(2)	$\neg R \vee P$	前提
(3)	P	(1) , (2) ; I_{10}
(4)	$P \rightarrow (Q \rightarrow S)$	前提
(5)	$Q \rightarrow S$	(3) , (4) ; I_{11}
(6)	Q	前提
(7)	S	(5) , (6) ; I_{11}
(8)	$R \rightarrow S$	(1) , (7) ; CP 规则

例5 符号化下面语句的推理过程，并指出推理是否正确。“如果甲是冠军，则乙或丙将得亚军；如果乙得亚军，则甲不能得冠军；如果丁得亚军，丙不能得亚军；事实是甲已得冠军。可知丁不能得亚军”。

解 设 **A**: 甲得冠军；**B**: 乙得亚军；
C: 丙得亚军；**D**: 丁得亚军。

推理过程符号化为

$A \rightarrow (B \vee C)$, $B \rightarrow \neg A$, $D \rightarrow \neg C$, $A \Rightarrow \neg D$

编号	公 式	依 据
(1)	$A \rightarrow (B \vee C)$	前提
(2)	A	前提
(3)	$B \vee C$	(1) , (2) ; I_{11}
(4)	$\neg(\neg A)$	(2) ; E_6
(5)	$B \rightarrow \neg A$	前提
(6)	$\neg B$	(4) , (5) ; I_{12}
(7)	C	(3) , (6) ; I_{10}
(8)	$D \rightarrow \neg C$	前提
(9)	$\neg D$	(7) , (8) ; I_{12}

例6 在城市篮球赛中，如果北京队得第一，那么上海队就要受批评。如果上海队受批评，上海队将被解散。如果市体委给上海队补充新队员，那么上海队就不会解散。事实上，北京队得第一，并且市体委给上海队补充了新队员。

试用命题逻辑推理的办法，判断这些前提是否有矛盾。

解： P：北京队得第一； Q：上海队受批评；
R：上海队被解散； S：市体委给上海
队补充新队员。

前提： $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R, S \rightarrow \neg R, P \wedge S$

前提: $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R, S \rightarrow \neg R, P \wedge S$

- | | | |
|------|------------------------|-------------------|
| (1) | $P \rightarrow Q$ | 前提 |
| (2) | $Q \rightarrow R$ | 前提 |
| (3) | $P \rightarrow R$ | (1),(2); I_{13} |
| (4) | $S \rightarrow \neg R$ | 前提 |
| (5) | $R \rightarrow \neg S$ | (4); E_{15} |
| (6) | $P \rightarrow \neg S$ | (3),(5); I_{13} |
| (7) | $P \wedge S$ | 前提 |
| (8) | P | (7); I_1 |
| (9) | S | (7); I_2 |
| (10) | $\neg S$ | (6),(8); I_{11} |
| (11) | $S \wedge \neg S$ | (9),(10); I_9 |

由上可知,这些前提有矛盾。

例题7 如果马会飞或羊吃草,则母鸡就会是飞鸟;如果母鸡是飞鸟,那么烤熟的鸭子还会跑;烤熟的鸭子不会跑,所以羊不吃草。 试判断以上推理是否正确。

解 **P**: 马会飞; **Q**: 羊吃草; **R**: 母鸡是飞鸟; **H**: 烤熟的鸭子会跑

已知 $(P \vee Q) \rightarrow R$, $R \rightarrow H$, $\neg H$; 结论: $\neg Q$

形式证明如下:

$\neg H$;	已知
$R \rightarrow H$;	已知
$\neg R$;	结论
$(P \vee Q) \rightarrow R$;	已知
$\neg (P \vee Q)$;	推论
$\neg P \wedge \neg Q$;	推论
$\neg Q$	结论

4、间接证明(或反证法)

定义 如果对于出现在公式 H_1, H_2, \dots, H_n 中的命题变元的任何一组真值指派, 公式 H_1, H_2, \dots, H_n 中至少有一个为假, 即它们的合取式 $H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n$ 是矛盾式, 则称公式 H_1, H_2, \dots, H_n 是不相容的。否则称公式 H_1, H_2, \dots, H_n 是相容的。

例如 令 $H_1 = P, H_2 = \neg P$

$H_1 \wedge H_2 = P \wedge \neg P$ 是矛盾式, 所以 $P, \neg P$ 是不相容的。

又例如 令 $H_1 = P \vee Q, H_2 = \neg P, H_3 = \neg Q$

则 $H_1 \wedge H_2 \wedge H_3 = (P \vee Q) \wedge \neg P \wedge \neg Q$ 是矛盾式, 所以 $P \vee Q, \neg P, \neg Q$ 是不相容的。

为了证明 $H_1, H_2, \dots, H_n \Rightarrow C$ ，利用定理7-8，将 $\neg C$ 作为一个附加的前提（假设）添加到这一组前提中，转化为证明

$$H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n \wedge \neg C \Rightarrow R \wedge \neg R$$

由此得出 $H_1, H_2, \dots, H_n, \neg C$ 是不相容的。

即 $H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n \wedge \neg C$ 是永假公式。

这意味着当 $H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n$ 为真时， $\neg C$ 必为假，因而 C 必为真。

例8 证明： $R \rightarrow \neg Q, R \vee S, S \rightarrow \neg Q, P \rightarrow Q \Rightarrow \neg P$

用反证法，将 $\neg(\neg P)$ 作为附加前提，添加到前提集中，然后推出矛盾。

证明	编 号	公 式	依 据
	(1)	$\neg(\neg P)$	附加前提
	(2)	P	(1) ; E_6
	(3)	$P \rightarrow Q$	前提
	(4)	Q	(1) , (2) ; I_{11}
	(5)	$R \rightarrow \neg Q$	前提
	(6)	$\neg R$	(4) , (5) ; E_6, I_{12}
	(7)	$R \vee S$	前提
	(8)	S	(6) , (7) ; I_{10}
	(9)	$S \rightarrow \neg Q$	前提
	(10)	$\neg Q$	(8) , (9) ; I_{11}
	(11)	$Q \wedge \neg Q$	(4) , (10) ; I_9

因此 $(R \rightarrow \neg Q) \wedge (R \vee S) \wedge (S \rightarrow \neg Q) \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg P$

课堂内练习

1. 用形式证明方法证明：

(1) $\neg P \vee \neg Q$ 是前提 $(P \wedge Q) \rightarrow R$, $\neg R \vee S$, $\neg S$ 的结论。

编 号	公 式	依 据
(1)	$\neg R \vee S$	前提
(2)	$\neg S$	前提
(3)	$\neg R$	(1) , (2) ; I_{10}
(4)	$(P \wedge Q) \rightarrow R$	前提
(5)	$\neg (P \wedge Q) \vee R$	(4) ; E_{11}
(6)	$\neg (P \wedge Q)$	(4) , (5) ; I_{10}
(7)	$\neg P \vee \neg Q$	(6) ; E_{10}'

因此, $(P \wedge Q) \rightarrow R, \neg R \vee S, \neg S \Rightarrow \neg P \vee \neg Q$

(2) 如果这里有球赛，则通行是困难的；如果他们按指定的时间到达，则通行是不困难的；他们按指定时间到达了，所以这里没有球赛。

解 先将已知条件符号化，令 **P**：这里有球赛；
Q：通行是困难的；**R**：他们按指定的时间到达了。
则上述推理过程符号化为 $P \rightarrow Q, R \rightarrow \neg Q, R \Rightarrow \neg P$

编 号	公 式	依 据
(1)	$R \rightarrow \neg Q$	前提
(2)	R	前提
(3)	$\neg Q$	(1), (2) ; I_{11}
(4)	$P \rightarrow Q$	前提
(5)	$\neg P$	(3), (4) ; I_{12}

因此上述推理正确。

3. 张三说李四在说谎，李四说王五在说谎，王五说张三、李四都在说谎。问张三、李四、王五三人，到底谁说真话，谁说假话？

解 先将简单命题符号化。

令P：张三说真话； Q：李四说真话；

R：王五说真话，

由题意知推理的前提为：

$$P \rightarrow \neg Q, \neg P \rightarrow Q, Q \rightarrow \neg R, \neg Q \rightarrow R,$$

$$R \rightarrow (\neg P \wedge \neg Q), \neg R \rightarrow (P \vee Q)。$$

下面根据已知前提进行形式推理。

$P \rightarrow \neg Q, \neg P \rightarrow Q, Q \rightarrow \neg R, \neg Q \rightarrow R,$

$R \rightarrow (\neg P \wedge \neg Q), \neg R \rightarrow (P \vee Q)。$

编 号	公 式	依 据
(1)	$P \rightarrow \neg Q$	前 提
(2)	$\neg Q \rightarrow R$	前 提
(3)	$P \rightarrow R$	(1) , (2) ; I_{13}
(4)	$R \rightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$	前 提
(5)	$P \rightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$	(3) , (4) ; I_{13}
(6)	$\neg P \vee (\neg P \wedge \neg Q)$	(5) ; E_{11}
(7)	$\neg P$	(6) ; E_9
(8)	$\neg P \rightarrow Q$	前 提
(9)	Q	(7) , (8) ; I_{11}
(10)	$Q \rightarrow \neg R$	前 提
(11)	$\neg R$	(9) , (10) ; I_{11}
(12)	$\neg P \wedge Q \wedge \neg R$	(7) , (9) , (11) ; I_9

因此，由上述推理知张三说假话，王五说假话，只有李四说真话。

课外补充作业

1. 用形式证明方法证明

(1) $P \rightarrow S$ 是前提 $\neg P \vee Q$, $\neg Q \vee R$, $R \rightarrow S$ 的结论。

(2) $S \rightarrow \neg Q$, $S \vee R$, $\neg R$, $\neg P \rightarrow Q \Rightarrow P$

2 判断下列推理是否正确

在大城市球赛中，如果北京队第三，那么如果上海队第二，那么天津队第四。沈阳队不是第一或北京队第三。上海队第二。从而知，如果沈阳队第一，那么天津队第四。

提示：先符号化，再论证说明