

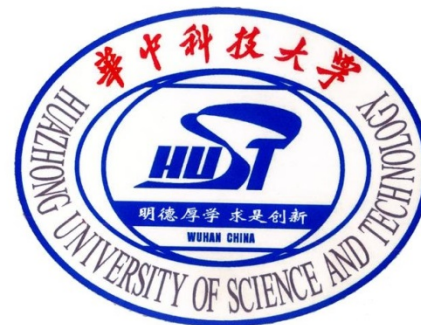
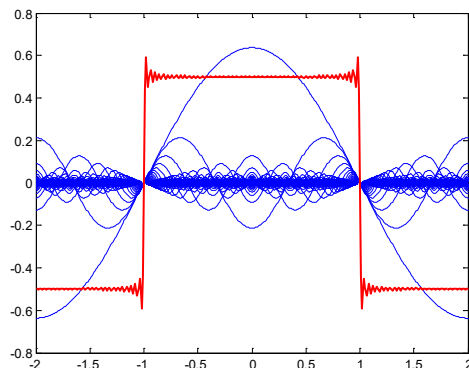
信号与系统

第9讲 用拉普拉斯变换分析系统响应

郭红星

华中科技大学计算机学院

May 12, 2020



本讲内容

- 复频域分析的数学基础
 - 拉普拉斯变换的引出及其收敛域
 - 常用信号的拉普拉斯变换
 - 拉普拉斯变换的性质
 - 拉普拉斯反变换求解
- 线性系统响应的拉普拉斯变换分析法
 - 作为数学工具的拉普拉斯变换
 - S域的元器件模型
- 学习目标
 - 理解拉氏变换与傅氏变换的内在联系
 - 掌握用拉氏变换法求系统全响应的方法

5.1 从傅氏变换到拉氏变换

傅氏变换不能解决的问题

如何解决 此问题？

■ 有几种情况不满足狄里赫利条件：

- $u(t)$
- 增长信号 $e^{\alpha t} (\alpha > 0)$
- 周期信号 $\cos \omega t$

- 若乘一衰减因子 $e^{-\sigma t}$ ， σ 为任意实数，使得 $f(t) e^{-\sigma t}$ 收敛，可以满足狄里赫利条件

$$u(t) e^{-\sigma t}$$

$$e^{\alpha t} \cdot e^{-\sigma t} \quad (\sigma > \alpha)$$

$$e^{-\sigma t} \cos \omega_1 t \quad (\sigma > 0)$$

从傅氏变换到拉氏变换

$$FT[e^{-\sigma t} f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-(\sigma + j\omega)t} dt$$

ω — 实频率, ω 是振荡频率

s — 复频率, 通过 σ 控制衰减

$$F(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-(\sigma + j\omega)t} dt$$

令 $s = \sigma + j\omega$

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

正变换

$$e^{-\sigma t} f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma + j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

象函数

思考：拉氏变换的物理含义？

双边拉氏变换

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma + j\omega) e^{(\sigma + j\omega)t} d\omega$$

$s = \sigma + j\omega$,
then, $d\omega = \frac{ds}{j}$

原函数

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(s) e^{st} ds$$

反变换

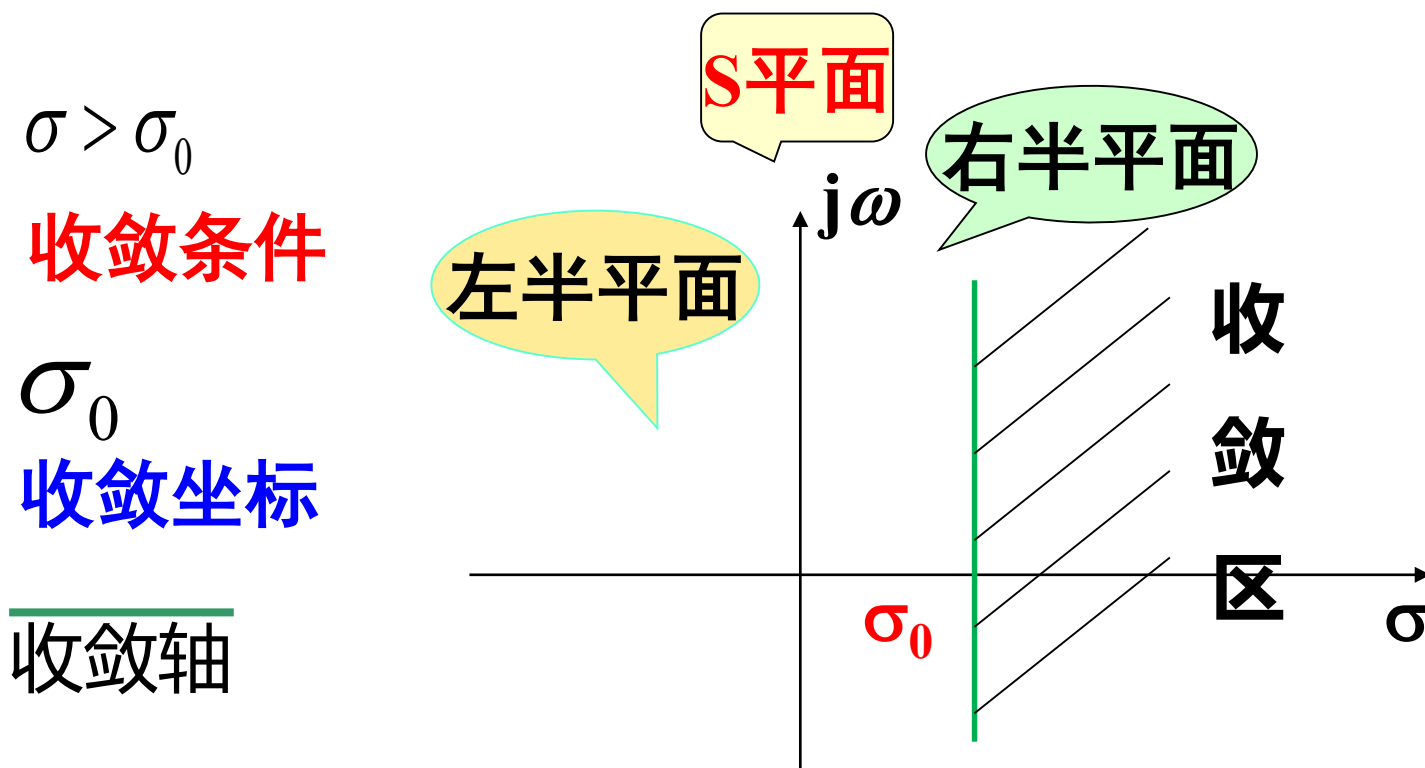
常用信号的(双边)拉氏变换

| | |
|---------------------|------------------------|
| $\delta(t)$ | 1 |
| $e^{\alpha t} u(t)$ | $\frac{1}{s - \alpha}$ |
| $u(t)$ | $\frac{1}{s}$ |

思考：上述信号的双边拉氏变换
总是存在吗？

双边拉氏变换的收敛域

- 给定信号 $f(t)$ ，对应的拉氏变换为 $F(s)$ 。在 s 平面上，凡是能使得 $F(s)$ 存在的 σ 区域（或者说所有 σ 的集合），称为 $F(s)$ 的收敛域。

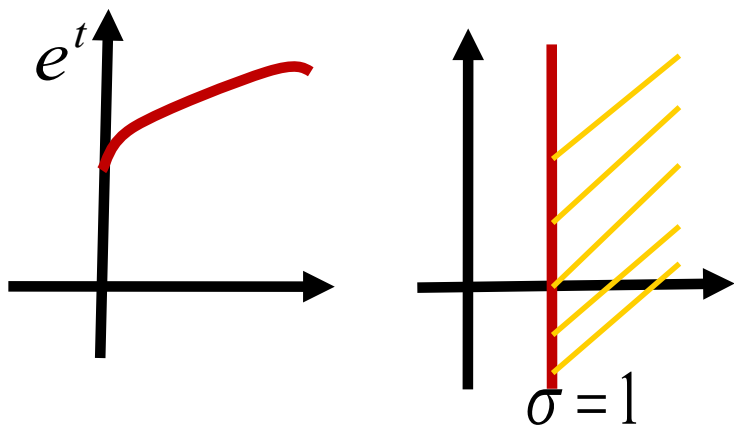


各种信号拉氏变换的收敛域

a. 对于 $t < t_0$ 为零的右边信号

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^t e^{-\sigma t} = 0 \dots \sigma > 1$$

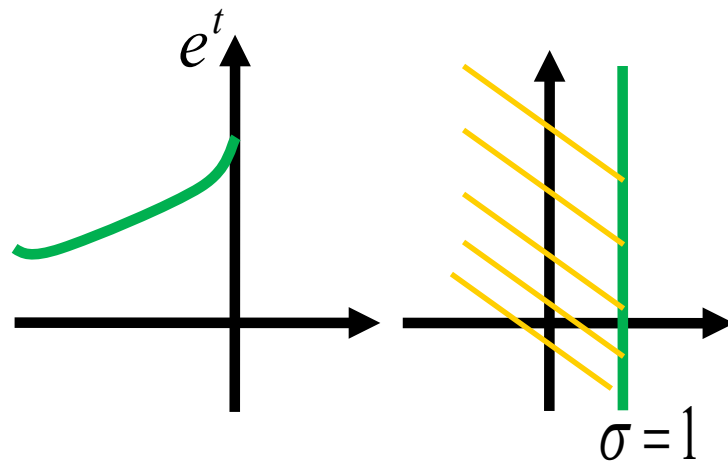
收敛域在收敛轴的右边



b. 对于 $t > t_0$ 为零的左边信号

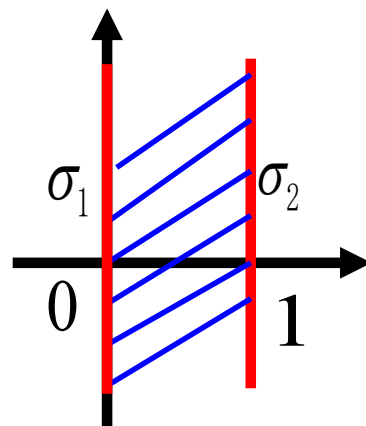
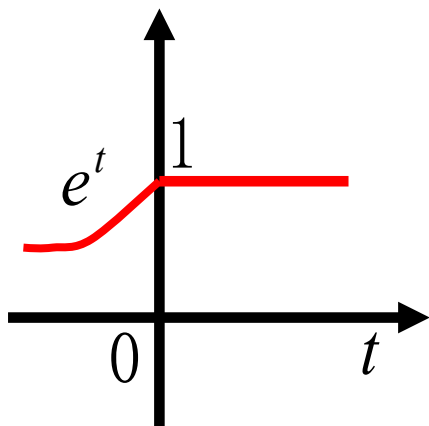
$$\lim_{t \rightarrow -\infty} e^t e^{-\sigma t} = 0 \dots \sigma < 1$$

收敛域在收敛轴的左边

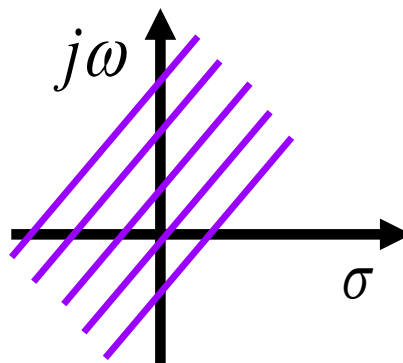
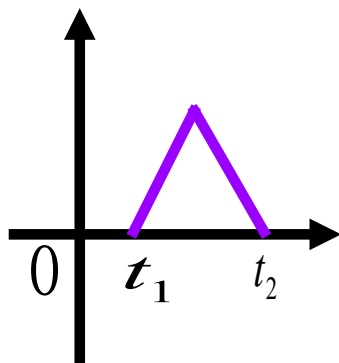


各种信号拉氏变换的收敛域

c. 对于**双边信号**, 其收敛域在 $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$ 内(可能为空)



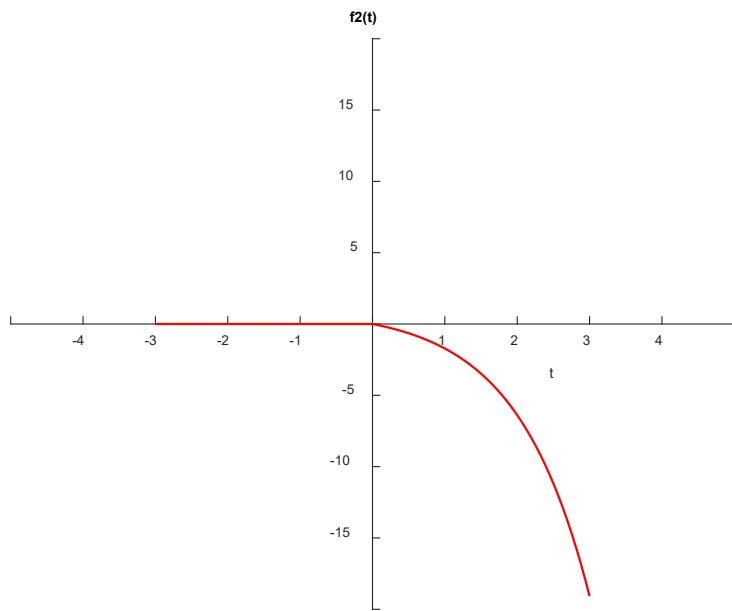
d. 凡是**有始有终**能量信号, 对于整个s平面都收敛。



只有 $t_1 > 0$ 时, 收敛域才包括 ∞ ;
只有 $t_2 < 0$ 时, 收敛域才包括 $-\infty$

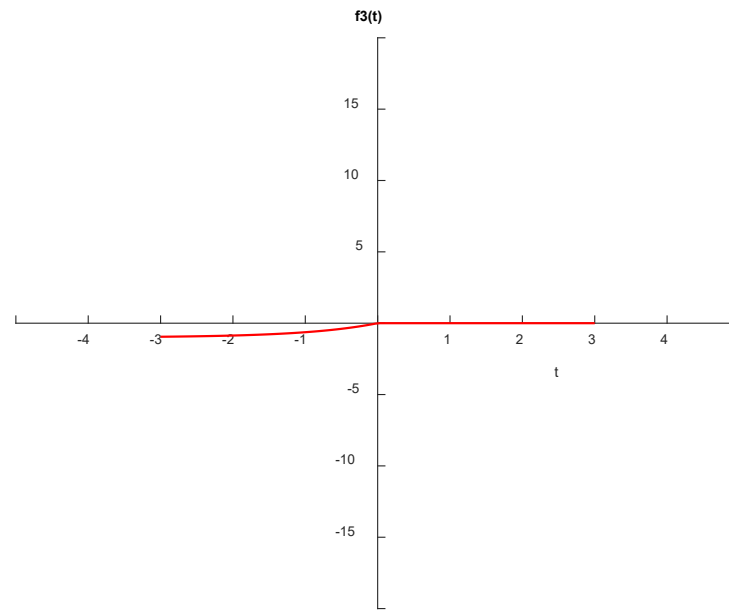
拉氏变换收敛域的重要性

$$f_2(t) = u(t) - e^t u(t) \quad \sigma > 1$$



$$f_2(t) \xLeftrightarrow{LT} \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1} = \frac{1}{s} + \frac{1}{1-s}$$

$$f_3(t) = -u(-t) + e^t u(-t) \quad \sigma < 0$$



$$f_3(t) \xLeftrightarrow{LT} \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1} = \frac{1}{s} + \frac{1}{1-s}$$

不同原函数，收敛域不同，对应相同的象函数

拉氏变换与傅氏变换的关系

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

变换下限
从0开始

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds$$

单边拉氏变换

$$F(s) \leftrightarrow f(t)$$
$$-\infty < \omega < \infty \leftrightarrow 0 \leq t < \infty$$

$$\sigma = 0;$$
$$f(t) = 0 \text{ for } t < 0$$

$$t \geq 0$$

傅氏变换

$$F(j\omega) \leftrightarrow f(t)$$
$$-\infty < \omega < \infty \leftrightarrow -\infty < t < \infty$$

$$\sigma = 0$$

思考：能否直接由信号的
拉氏变换导出傅氏变换？

双边拉氏变换

$$F(s) \leftrightarrow f(t)$$
$$-\infty < \omega < \infty \leftrightarrow -\infty < t < \infty$$

$$f(t)e^{-\sigma t}$$

傅氏变换

$$F(\sigma + j\omega) \leftrightarrow f(t)e^{-\sigma t}$$
$$-\infty < \omega < \infty \leftrightarrow -\infty < t < \infty$$

$$s = \sigma + j\omega$$

本课程中拉氏变换缺省指的是单边拉氏变换！

拉氏变换的基本性质

| | | |
|------|---------------------------|---|
| 线性 | $\sum_{i=1}^n k_i f_i(t)$ | $\sum_{i=1}^n k_i \cdot L[f_i(t)]$ |
| 时移 | $f(t - t_0)u(t - t_0)$ | $? F(s)$ |
| 频移 | $f(t)e^{-\alpha t}$ | $F(s + \alpha)$ |
| 尺度变换 | $f(at), a > 0$ | $\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$ |
| 卷积定理 | $f_1(t) * f_2(t)$ | $F_1(s) \cdot F_2(s)$ |
| | $f_1(t) \cdot f_2(t)$ | $\frac{1}{2\pi j} F_1(s) * F_2(s)$ |

例题1：正弦/余弦信号的拉氏变换

$$\cos \omega_0 t$$

$$e^{-\alpha} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s + \alpha}$$

$$\sin \omega_0 t$$

$$f(t) = u(t) \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}$$

$$f(t) = u(t) \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}$$

$$F(s) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s + j\omega_0} + \frac{1}{s - j\omega_0} \right)$$
$$= \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$$

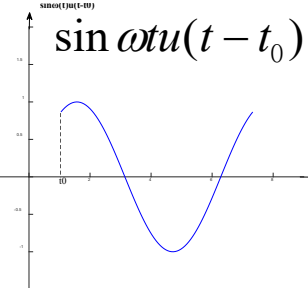
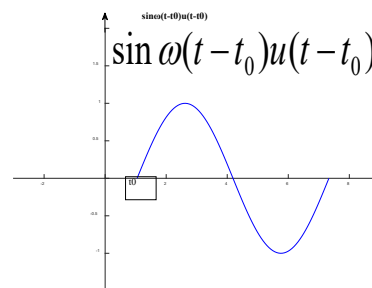
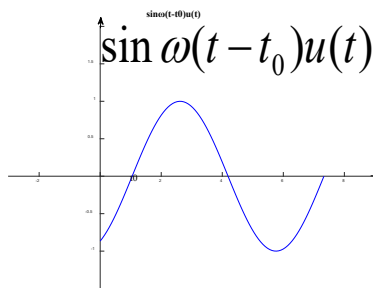
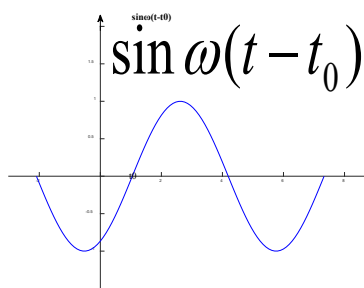
**第4版错误：
P213**

$$F(s) = \left(\frac{-1}{s + j\omega_0} + \frac{1}{s - j\omega_0} \right) \frac{1}{2j}$$
$$= \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

时域平移特性

1. 信号 $f(t)$ 时移的四种情形：以 $f(t)=\sin\omega t$ 为例，波形如下：

a. $f(t-t_0)$ b. $f(t-t_0)u(t)$ c. $f(t-t_0)u(t-t_0)$ d. $f(t)u(t-t_0)$



2. 拉氏变换的时移性质

思考：为何拉氏变换的时移特性会是这种形式？

设 $f(t) \leftrightarrow F(s)$ ，则： $f(t-t_0)u(t-t_0) \leftrightarrow e^{-st_0}F(s) \quad t_0 > 0$

3. 傅氏变换的时移性质

设 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$ ，则： $f(t-t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0}F(j\omega)$

时域微分性质及其推导

■ 若象函数为有理真分式 $f(t) \leftrightarrow F(s)$, 则 $\frac{df(t)}{dt} \leftrightarrow$

?

推导:

$$\because L[f'(t)] = \int_{0^-}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} df(t)$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

分部积分性质

$$\text{令: } u = e^{-st} \quad v = f(t) \quad du = -se^{-st} dt$$

$$= e^{-st} f(t) \Big|_{0^-}^{\infty} + \int_{0^-}^{\infty} f(t) se^{-st} dt = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} f(t) - f(0^-) + sF(s)$$

$$= sF(s) - f(0^-)$$

$\because f(t)$ 的拉氏变换存在,
 $\therefore \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} f(t) = 0$

注意: 第6/5版p226/243最上面的公式有误

$$\frac{d^n f}{dt^n} \leftrightarrow s^n F(s) - s^{n-1} f(0^-) - s^{n-2} f'(0^-) \cdots f^{n-1}(0^-) = s^n F(s) - \sum_{r=0}^{n-1} s^{n-r-1} f^{(r)}(0^-)$$

时域积分特性

■ 若 $f(t) \leftrightarrow F(s)$, 则:

思考：为什么拉氏变换具有这样的微积分性质？

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{F(s)}{s} \quad \text{或:}$$

$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{F(s)}{s} + \frac{\int_{-\infty}^0 f(\tau) d\tau}{s}$$

0^-

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega) \Rightarrow \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} F(j\omega) + \pi F(0) \delta(\omega)$$

拉氏变换的基本性质

| | | |
|----------|---------------------------------|--|
| 线性 | $\sum_{i=1}^n k_i f_i(t)$ | $\sum_{i=1}^n k_i \cdot L[f_i(t)]$ |
| 时移 | $f(t - t_0)u(t - t_0)$ | $e^{-st_0} F(s)$ |
| 频移 | $f(t)e^{-\alpha t}$ | $F(s + \alpha)$ |
| 尺度变换 | $f(at)$ | $\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$ |
| 微分 积分 | $\frac{df(t)}{dt}$ | $sF(s) - f(0^-)$ |
| | $\int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau$ | $\frac{F(s)}{s} + \frac{\int_{-\infty}^0 f(\tau)d\tau}{s}$ |

Laplace反变换的求取

- ① 围线积分法--留数法(p216-p219)
- ② 查表法 (p209.表5-1)
- ③ 部分分式分解法(p210-p216)
- ④ 利用拉氏变换的性质求反变换(p221-232)
- ⑤ 借助数字计算机求反变换

例题2及解答

- 求象函数为有理真分式 $F(s) = \frac{s}{s^2+6s+8}$ 的原函数 $f(t)$

解： $\because F(s) = \frac{s}{s^2+6s+8} = \frac{a}{s+2} + \frac{b}{s+4}$

其中： $a = \frac{s}{(s+4)} \Big|_{s=-2} = -1$

$$b = \frac{s}{(s+2)} \Big|_{s=-4} = 2$$

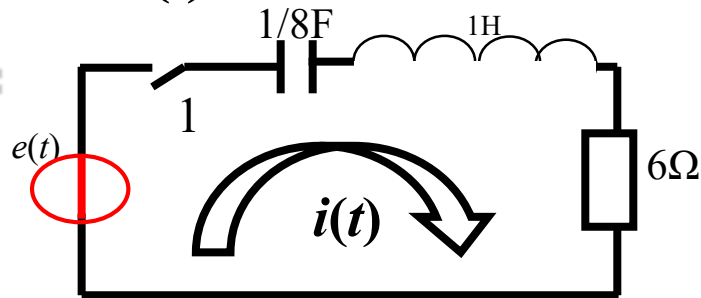
$$\therefore f(t) = L^{-1}\left(\frac{-1}{s+2} + \frac{2}{s+4}\right) = (-e^{-2t} + 2e^{-4t})u(t)$$

5.2 LTI系统响应的拉氏变换法

例题3的传统时域解法

求下电路图中开关1合上时回路电流 $i(t)$ 的单位冲激响应 $h(t)=?$

原来的解法(见第2章例题3③):
用冲激函数匹配法求 $h(t)$



$$\frac{1}{c} \int i(\tau) d\tau + l \frac{di}{dt} + Ri(t) = e(t)$$

$$l \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{c} i(t) = \frac{de(t)}{dt}$$

$$\begin{aligned} i_{zsr}(0^+) &= 1 \\ i'_{zsr}(0^+) &= -6 \end{aligned}$$

$$h(t) = i_h(t) = Ae^{-2t} + Be^{-4t}$$

代入初始条件: $i(0^+) = 1; i'(0^+) = -6$

$$\left. \begin{aligned} A &= -1 \\ B &= 2 \end{aligned} \right\} \longrightarrow h(t) = [-e^{-2t} + 2e^{-4t}]u(t)$$

$e(t) = \delta(t)$

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + 6 \frac{di(t)}{dt} + 8i(t) = \delta'(t)$$

$$\delta'(t) \Rightarrow \delta(t) \Rightarrow \underline{\underline{u(t)}}$$

$$-6\delta(t) \Leftarrow \underline{\underline{6\delta(t)}}$$

$$\underline{\underline{-6u(t)}}$$

拉普拉斯变换法的提出

鸟儿虽不懂空气动力学，却会任意飞翔！



因为我不能理解消化过程就拒绝晚餐吗？不，只要我满意这个结果。

法国数学家拉普拉斯（1749—1827）与 英国工程师赫维赛德（1850—1925）

例题3的拉氏变换解法

新的解法： $\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + 6\frac{di(t)}{dt} + 8i(t) = \delta'(t)$

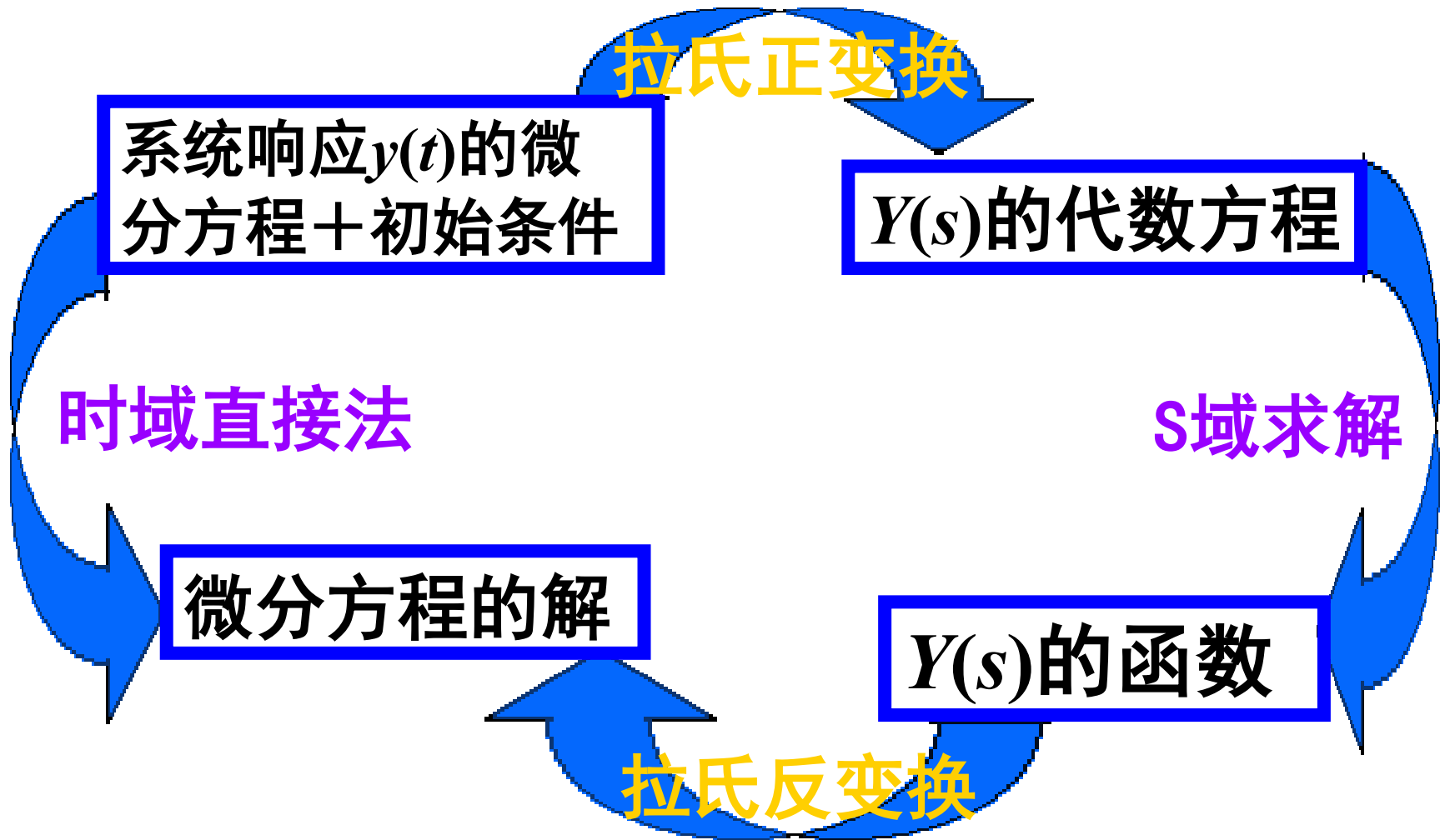
对上述系统方程(激励为单位冲激信号)，两边同时进行拉氏变换**先求出 $I(s)$** ，**然后进行反变换得 $i(t)$**

$$s^2 I(s) + 6sI(s) + I(s) = s$$

$$I(s) = \frac{s}{s^2 + 6s + 8}$$

$$\begin{aligned}\therefore h(t) &= L^{-1}[I(s)] = L^{-1}\left[\frac{-1}{s+2} + \frac{2}{s+4}\right] \\ &= (2e^{-4t} - e^{-2t})u(t)\end{aligned}$$

用拉氏变换法求系统响应的步骤



关于拉氏变换法的讨论

- 这是一种**变换的观点**: 作为数学工具
- **优点:**
 - 将时域的微积分方程转换为复频域的**代数方程**
- **不足:**
 - 仍然需要列出时域的微积分方程, **在时域思考**

■ 另外一种思路是S域元件模型法: **直接在S域思考**

RLC的s域的元件模型 (p238)

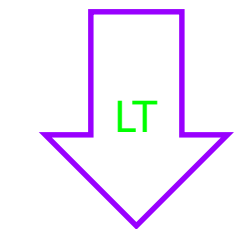
时域

$$u_R(t) = R \cdot i_R(t)$$

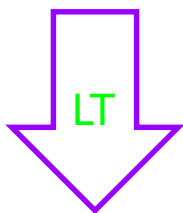
$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \quad L = \frac{\varphi}{i}$$

$$u_c(t) = \frac{1}{c} \int_0^t i_c(\tau) d\tau + u_c(0^-) \quad c = \frac{q}{u}$$

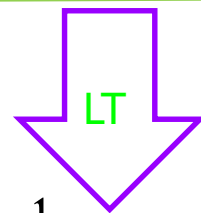
s域



$$U_R(s) = RI_R(s)$$

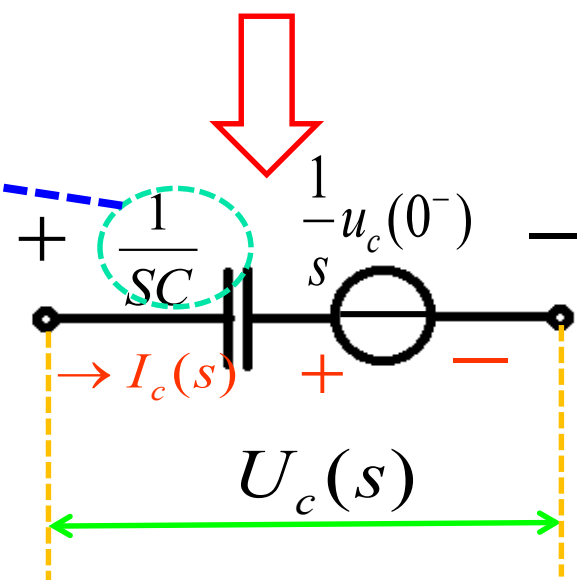
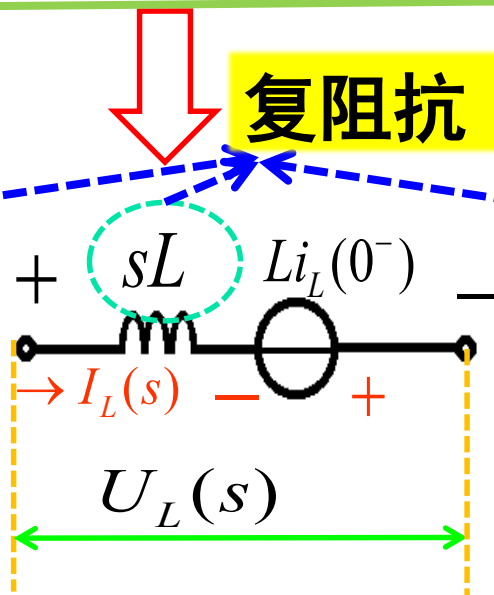
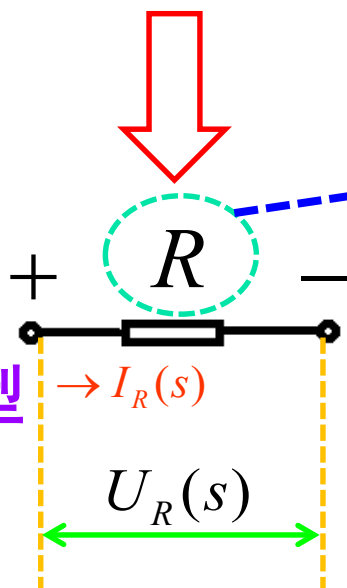


$$U_L(s) = sLI_L(s) - Li_L(0^-)$$




$$U_c(s) = \frac{1}{sC} I_c(s) + \frac{1}{s} u_c(0^-)$$

s域
模型



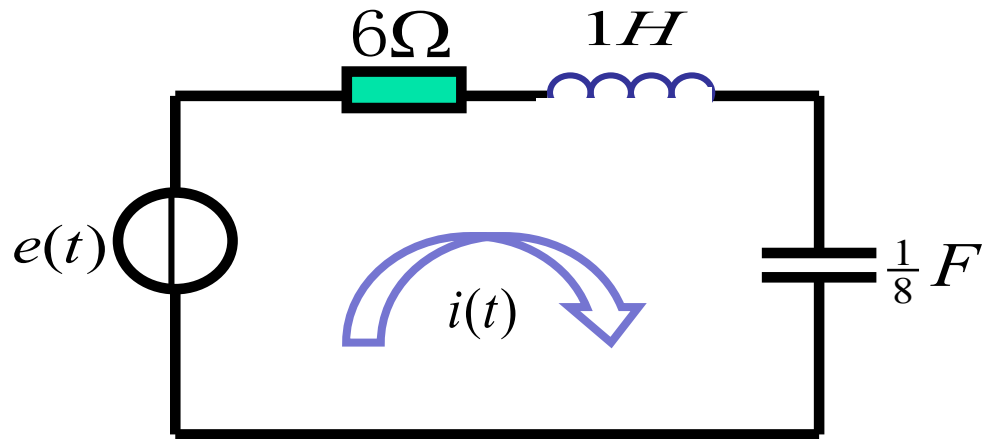
复阻抗

基于s域元件模型的电路系统分析方法的步骤

- ① 将已知电动势、恒定电流进行拉氏变换
- ② 根据原电路图画出s域等效电路图
- ③ 根据电路基本定律求解s域运算电路，求出待求量的象函数 
- ④ 将求得的象函数反变换得原函数

例题4

电路如下图所示，求：



1. 用 s 域模型法求回路电流的单位冲激响应 $h(t)=?$
2. 当起始状态为 $i(0)=0, i'(0) = 1A/s$, 求输入信号 $e(t)=e^{-t}u(t)$, 系统的完全响应 $i(t)$ 。

例题4解答

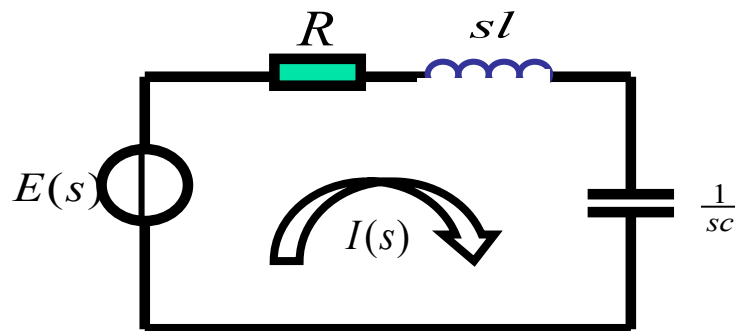
(1) 用s域模型求解:

因求单位冲激响应, 电路状态为零,
s域等效电路如图所示, 先求出 $H(s)$

$$\because H(s) \leftrightarrow h(t)$$

$$H(s) = \frac{I(s)}{E(s)} = \frac{1}{r + sl + \frac{1}{sc}} = \frac{s}{s^2 + 6s + 8}$$

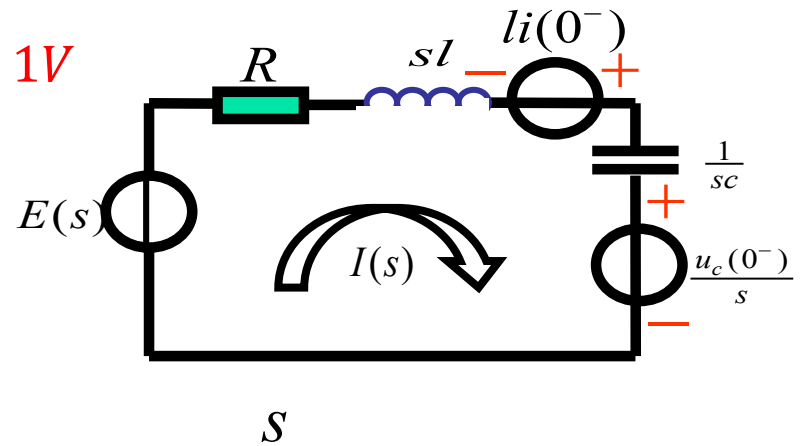
$$\begin{aligned} \therefore h(t) &= L^{-1}[H(s)] = L^{-1}\left[\frac{-1}{s+2} + \frac{2}{s+4}\right] \\ &= (2e^{-4t} - e^{-2t})u(t) \end{aligned}$$



例题4解答

(2) 已知 $i(0)=0, i'(0) = 1A/s$, 故 $u_c(0^-) = 1V$

含非零状态的s域电路如右图所示:



$$I(s) = \frac{E(s) - \frac{1}{s}u_c(0^-) + i(0^-)}{6 + s + \frac{8}{s}}$$

$$= \underbrace{\frac{sE(s)}{s^2 + 6s + 8}}_{\text{Z.S.R}} + \underbrace{\frac{-u_c(0^-) + si(0^-)}{s^2 + 6s + 8}}_{\text{Z.I.R}} = \frac{s+1}{s^2 + 6s + 8} + \frac{1}{s^2 + 6s + 8}$$

$$= \frac{-\frac{1}{3}}{s+1} + \frac{1}{s+2} + \frac{-\frac{2}{3}}{s+4} + \frac{\frac{1}{2}}{s+2} + \frac{-\frac{1}{2}}{s+4}$$

$$\therefore i(t) = L^{-1}[I(s)] = L^{-1}\left[\frac{-\frac{1}{3}}{s+1} + \frac{1}{s+2} + \frac{-\frac{2}{3}}{s+4} + \frac{\frac{1}{2}}{s+2} + \frac{-\frac{1}{2}}{s+4}\right]$$

$$H(s) = \frac{s}{s^2 + 6s + 8}$$

$$= -\frac{1}{3}e^{-t} + e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-4t} + \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-4t} = -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2t} - \frac{7}{6}e^{-4t} \quad t \geq 0$$

小结

- 拉普拉斯变换是对傅氏变换的**推广**
- 理解拉氏变换存在**收敛域**的**机理**及其重要性
- 利用拉普拉斯变换分析线性系统响应有明显**优势**
 - **函数简化**：指数、超越函数—初等函数
 - **运算简化**：将元件在时域的**微积分**关系转换为复频域的**代数**关系
 - **系统响应求解过程简化**：可**自动计入系统初始条件**，一次得到系统的全响应
 - **因果关系明确**：系统状态和激励对响应的**贡献很明确**
 - **直观**：利用系统函数的零极点分布，可以直观地研究系统的时频特性

课外作业

- 阅读**5.1-5.8**，预习**5.9**
- 作业：**5.3**的**奇数**小题， **5.17**题
- 每**星期三晚23:59:59前**交上星期布置的作业
 - 请按照新版教学指南要求按时上传提交
- 地点：**在南一楼中402室**

电路基本定理的运算形式

kirchhoftis定律

■K.I.L

- 对于任意的节点，在同一时刻流入该节点的电流代数和恒等于零即：

$$\sum i(t) = 0 \rightarrow \sum I(s) = 0$$

■K.V.L

- 沿任意闭合回路，各段电压的代数和恒等于零，即：

$$\sum u(t) = 0 \rightarrow \sum V(s) = 0$$

