

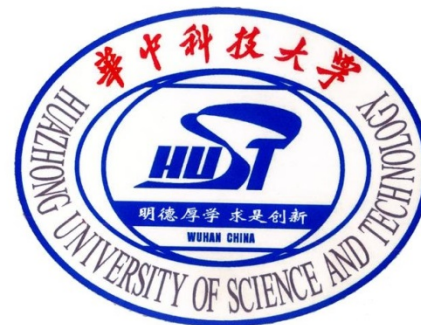
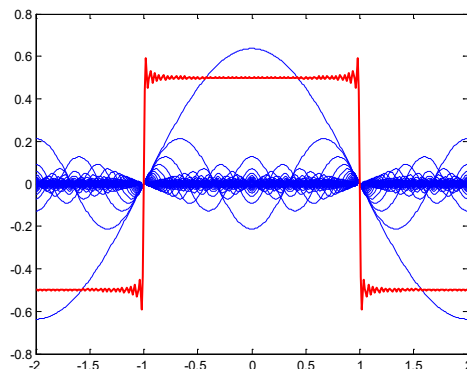
信号与系统

第7讲 傅里叶变换的性质及其应用

郭红星

华中科技大学计算机学院

May 7, 2020



上一讲内容回顾

- 频谱的概念
- 典型周期信号的频谱分析
- 非周期信号的傅里叶变换
- 典型非周期信号的频谱分析
- 傅里叶变换尺度性质的科学及工程意义

本讲内容

- 傅里叶变换的**基本性质**
 - 线性性
 - 对称性
 - 时移特性和频移特性
 - 微分和积分特性
 - 卷积定理
 - Parseval定理
 - 奇偶虚实性—结合课本自学



● 学习目标

- ✓ 熟悉基本性质所揭示的时频对应关系，初步探讨部分性质的**应用**
- ✓ 体验傅里叶正反变换的对称美

3.5 傅里叶变换的几个基本性质及其应用

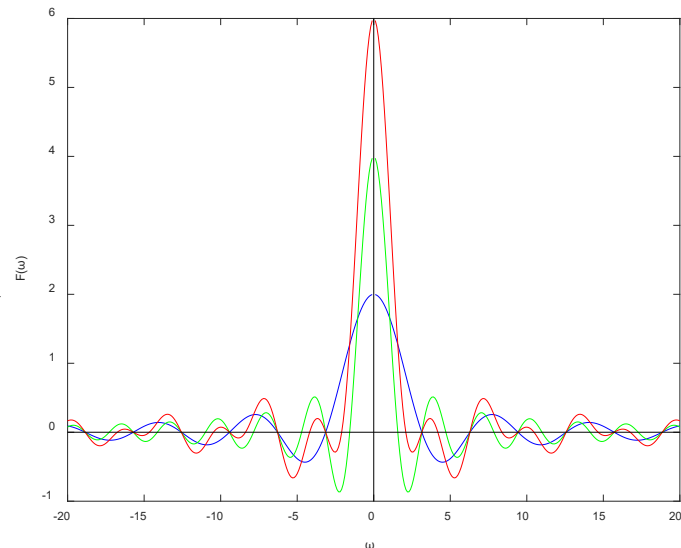
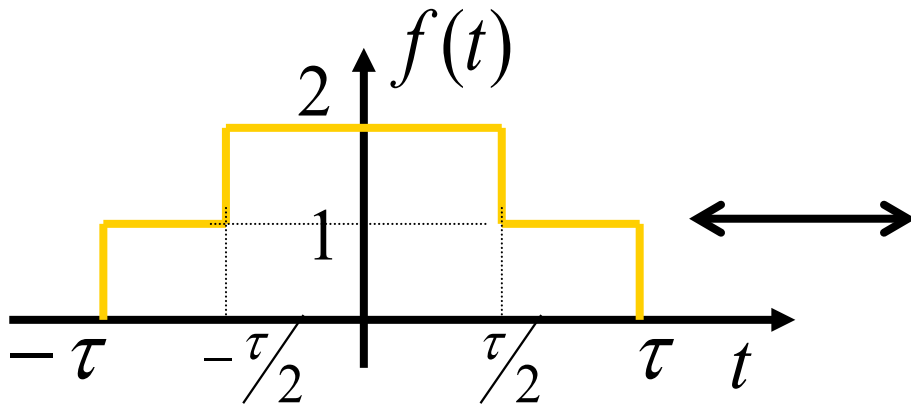
线性性及应用

若: $f_i(t) \leftrightarrow Fi(\omega)$

则: $\sum_{i=1}^n a_i f_i(t) \leftrightarrow \sum_{i=1}^n a_i F_i(\omega)$

例题1: 求 $f(t)$ 的傅里叶变换。

$$f(t) = [u(t + \frac{\tau}{2}) - u(t - \frac{\tau}{2})] + [u(t + \tau) - u(t - \tau)] \longleftrightarrow F(\omega) = \tau[Sa(\omega\tau/2) + 2Sa(\omega\tau)]$$



对称性

若: $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$

则: $F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$

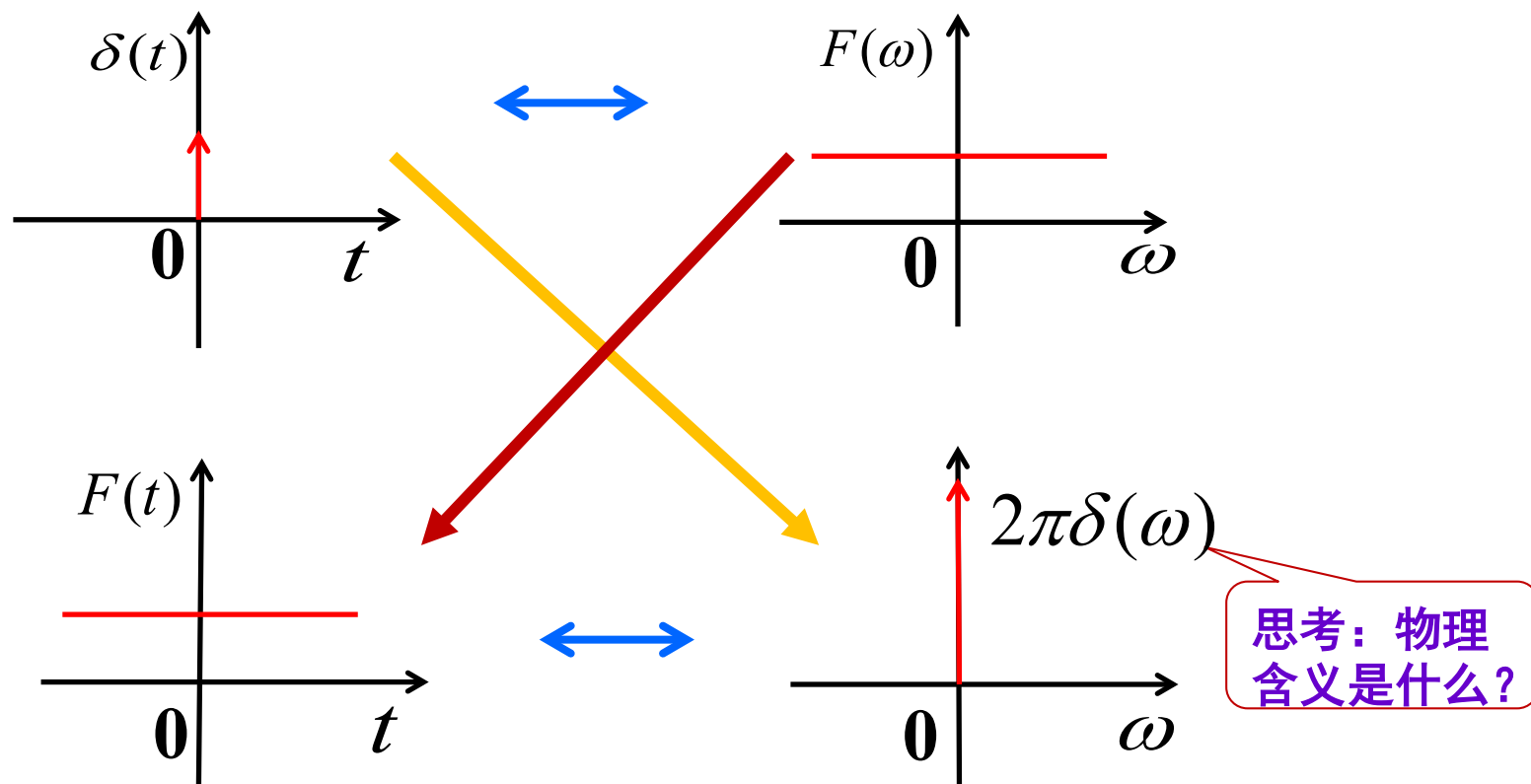
若 $f(t)$ 为偶函数, 则:

$$F(t) \leftrightarrow 2\pi f(\omega)$$

■证明见p131 – 132

对称性 — $f(t)$ 为偶函数

- 若 $f(t)$ 为偶函数，则时域和频域完全对称



- 直流和冲激信号的频谱的对称性是一例子

利用对称性求傅里叶变换

例题2：求 $\frac{1}{t^2+1}$ 的傅里叶变换。

解：P113有 $e^{-a|t|} \leftrightarrow \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$

$$\therefore \frac{1}{2} e^{-|t|} \leftrightarrow \frac{1}{1 + \omega^2}$$

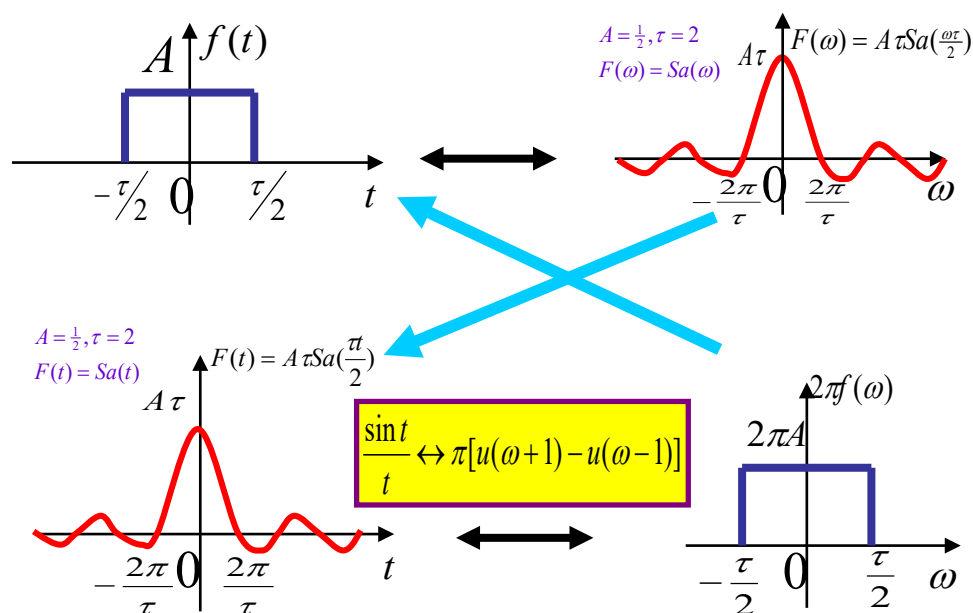
$$\therefore \frac{1}{t^2 + 1} \leftrightarrow 2\pi \frac{1}{2} e^{-|\omega|} = \pi e^{-|\omega|}$$

利用对称性求傅里叶变换及应用

例题3：试求信号 $\frac{\sin t}{t}$ 的傅里叶变换

解：若直接用 $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-j\omega t} dt$ 是不容易的！

■这里可考虑用对称性来求解。



■我们也可以用此来求 $S_a = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin at}{t} dt$

$$S_a = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin at}{at} d(at) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} d(x)$$

■上式是 $\frac{\sin t}{t}$ 的傅里叶变换

$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-j\omega t} dt$ 在 $\omega=0$ 处的值

$$\therefore S_a = F(j\omega)|_{\omega=0} = \pi$$

时移特性

若: $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$

则: $f(t - t_0) \leftrightarrow F(\omega)e^{-j\omega t_0}$

证明: $FT[f(t - t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0)e^{-j\omega t} dt$

令 $x = t - t_0$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\omega(x+t_0)} d(x + t_0) \\ &= e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\omega x} dx = e^{-j\omega t_0} F(\omega) \end{aligned}$$

$$f(at - t_0) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) e^{-j\frac{\omega t_0}{a}}$$

带尺度变换
的时移特性

频移特性(p125-126)

若: $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$

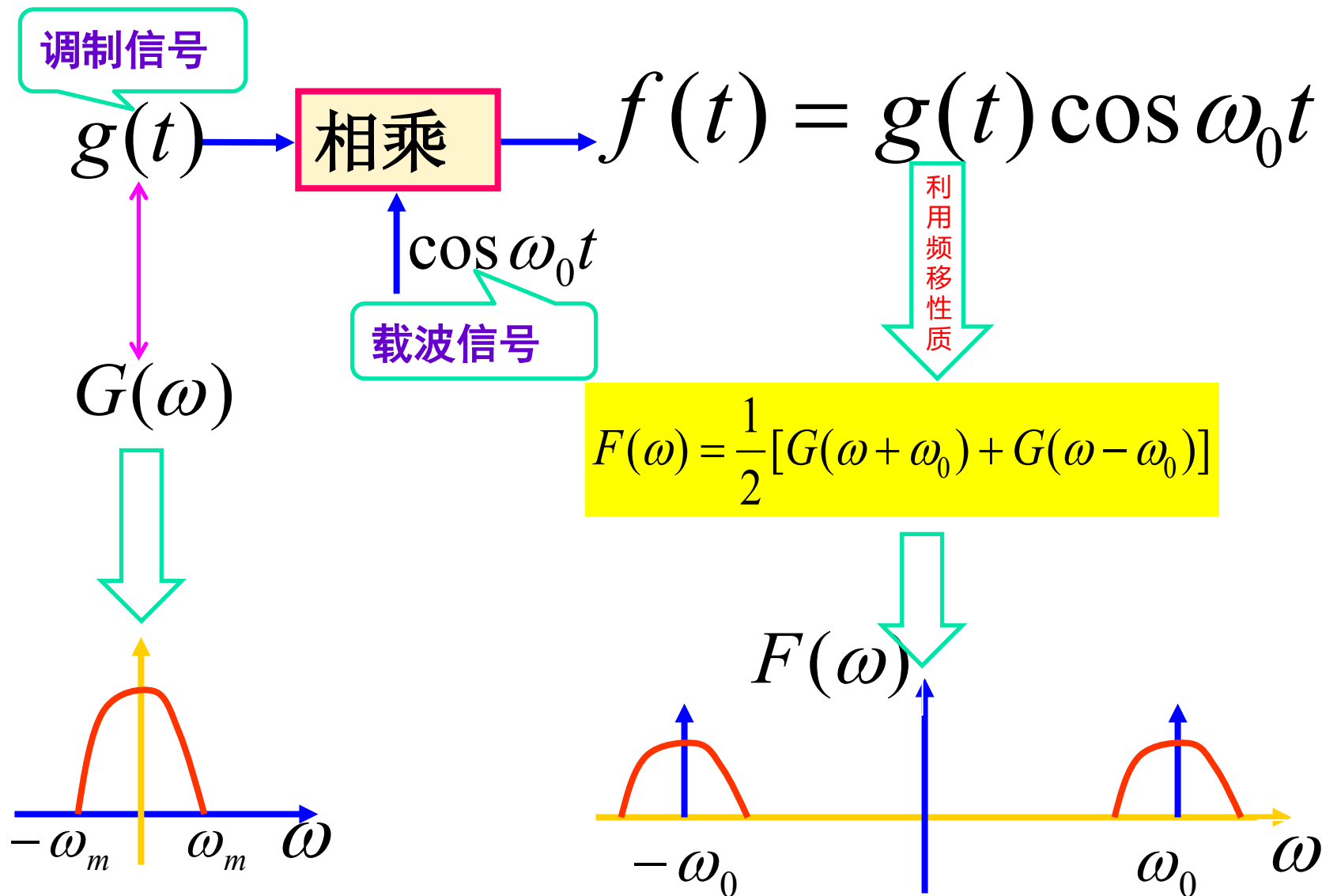
则: $f(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow F(\omega - \omega_0)$

频移性质在网络通信系统中有非常重要的应用，从下面的讨论出发，帮助大家初步认识这一点。

- 声音信号能直接发送吗？
- 直接发送引起的问题
 - 功率太大
 - 速度太慢
 - 相互干扰太厉害
 -



频移特性的应用：调制(幅)



卷积定理

1. 时域卷积定理

若: $f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega)$; $f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$

则: $f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(\omega) \bullet F_2(\omega)$

证明:见P144

2. 频域卷积定理

若: $f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega)$; $f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$

则: $f_1(t) \cdot f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$

- 时域中两信号卷积的傅里叶变换, 为频域中它们频谱的乘积
- 时域中两信号乘积的傅里叶变换, 为频域中它们频谱的卷积

频域卷积性质的证明

$$\because FT[f_1(t) \bullet f_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) \bullet f_2(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$f_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(u) e^{jut} du$$

■代入上式得：

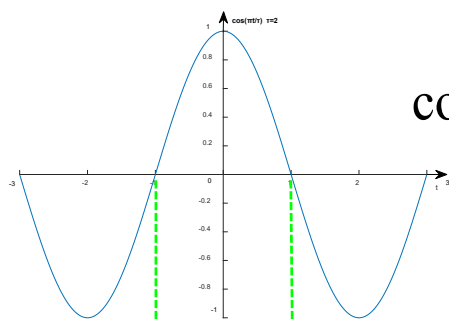
$$FT[f_1(t) f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(u) du [f_2(t) e^{jut}] e^{-j\omega t} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(u) du \int_{-\infty}^{\infty} [f_2(t) e^{jut}] e^{-j\omega t} dt$$

利用频移性质

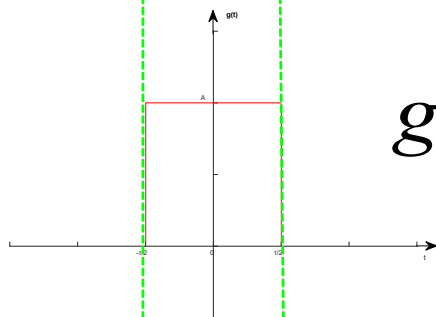
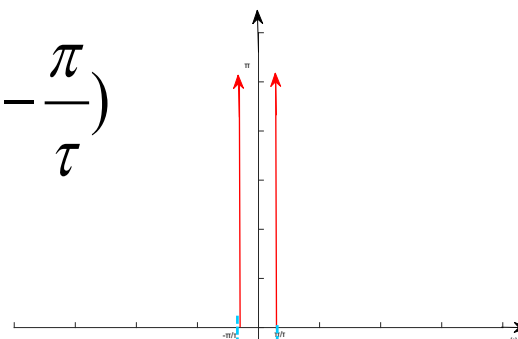
$$\therefore FT[f_1(t) f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(u) F_2(\omega - u) du$$

例4：求单个余弦脉冲的频谱

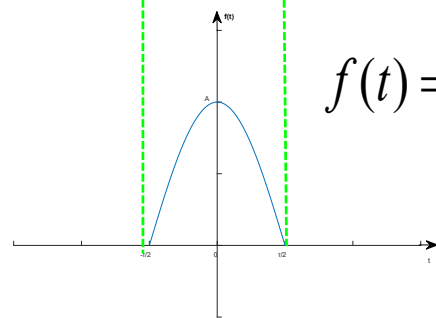
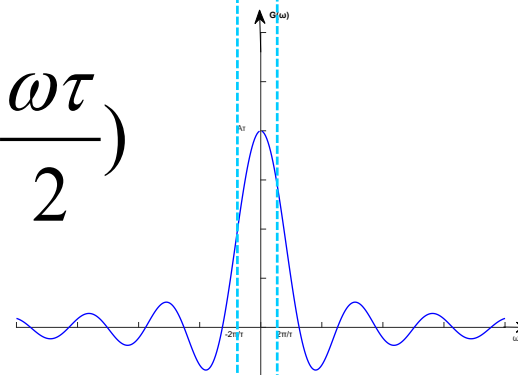


$$\cos \frac{\pi t}{\tau} \longleftrightarrow \pi \delta\left(\omega + \frac{\pi}{\tau}\right) + \pi \delta\left(\omega - \frac{\pi}{\tau}\right)$$

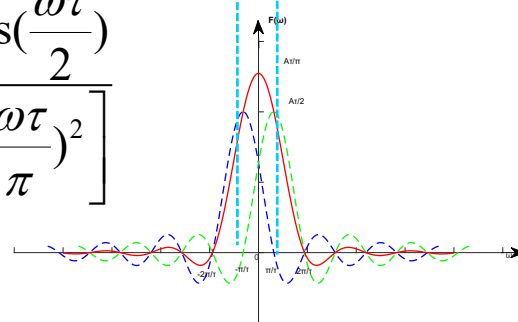
周期信号的
傅里叶变换



$$g(t) \longleftrightarrow G(\omega) = A \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega \tau}{2}\right)$$



$$f(t) = g(t) \cdot \cos \frac{\pi t}{\tau} \longleftrightarrow F(\omega) = \frac{2 A \tau \cos\left(\frac{\omega \tau}{2}\right)}{\pi \left[1 - \left(\frac{\omega \tau}{\pi}\right)^2\right]}$$



(题3-16b)

3.6 傅里叶变换的微积分性质及其应用

傅里叶变换的微分特性

A. 时间微分特性

若 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$

则 $\frac{df(t)}{dt} \leftrightarrow ? j\omega F(\omega)$

及 $\frac{d^n f(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j\omega)^n F(\omega)$

B. 频率微分特性

若 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$

则 $(-jt)f(t) \leftrightarrow \frac{dF(\omega)}{d\omega}$

及 $(-jt)^n f(t) \leftrightarrow \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}$

■证明见p133

频率微分特性的应用

例题5：求 t 的傅里叶变换。

解： $1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$

注：此例再次说明，绝对可积是傅里叶变换存在的充分而非必要条件

$$(-jt) \cdot 1 \leftrightarrow \frac{d}{d\omega}[2\pi\delta(\omega)]$$

$$\therefore t \leftrightarrow 2\pi j\delta'(\omega)$$

$$f(t) = 1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

时域积分特性

若: $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, 则 $\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow ?F(\omega)$

■ **推导:** 令 $g(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$ 或 $\frac{dg(t)}{dt} = f(t)$

思考: 此积分的常数项值?

两个公式互推的条件, 即公式A成立的前提条件是 $g(t)$ 不含常数项

若 $g(t)$ 满足狄氏条件, 即: $g(t) \leftrightarrow G(j\omega)$

则 $f(t) \leftrightarrow j\omega G(j\omega)$, 即: $F(j\omega) = j\omega G(j\omega)$

公式A

$$\therefore \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} F(j\omega)$$

公式B

$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} F(j\omega) + \pi F(0) \delta(\omega)$$

正确吗? 用 $\delta(t)$ 和 $u(t)$ 验证

联系: 卷积的微分和积分性质也存在类似的问题!

借助卷积定理导出时域积分特性

$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau = f(t) * u(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) u(t - \tau) d\tau$$

$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow F(j\omega) \left[\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \right]$$

公式B

$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} F(j\omega) + \pi F(0) \delta(\omega)$$

对应 $f(t)$ 的
直流分量

例题6: P152 3.17(a)

解: $f(t) = t[u(t) - u(t-1)] + u(t-1)$

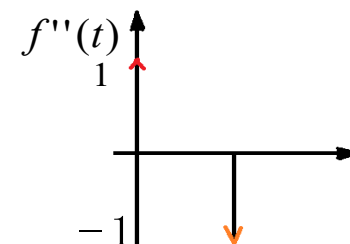
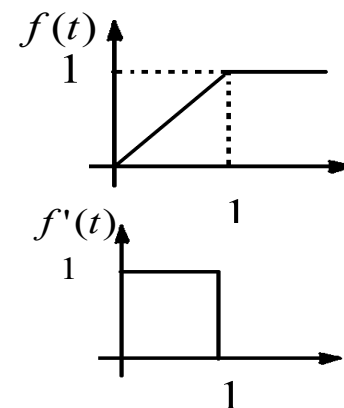
$$f'(t) = u(t) - u(t-1)$$

$$f''(t) = \delta(t) - \delta(t-1)$$

$$FT\{f''(t)\} = 1 - e^{-j\omega} \Big|_{\omega=0} = 0$$

$$FT[f'(t)] = \frac{1 - e^{-j\omega}}{j\omega} \Big|_{\omega=0} = 1$$

$$\begin{aligned} \therefore F(j\omega) &= \frac{1 - e^{-j\omega}}{(j\omega)^2} + \pi \cdot 1 \cdot \delta(\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1 - e^{-j\omega}}{(j\omega)^2} \\ &= \pi\delta(\omega) + e^{-j\frac{\omega}{2}} \left(\frac{e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}}}{(j\omega)^2} \right) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \text{sa}\left(\frac{\omega}{2}\right) e^{-j\frac{\omega}{2}} \end{aligned}$$



思路: 要求某信号的FT, 先求其若干阶导数的FT, 然后再利用公式B反推

频域积分性质及应用

若: $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ 根据**对称法则**, 不难得到:

$$\frac{f(t)}{-jt} + \pi f(0)\delta(t) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\omega} F(\nu) d\nu$$

类似时域积分性质, 借助频域卷积定理证明

例题7: 求 $\frac{1}{t}$ 的傅里叶变换。

$$\because f(t) = 1, f(0) = 1, f(t) \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

$$\therefore \pi f(0)\delta(t) + \frac{f(t)}{-jt} \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\omega} 2\pi\delta(\nu) d\nu = 2\pi u(\omega)$$

$$\pi\delta(t) + \frac{1}{-jt} \leftrightarrow 2\pi u(\omega) \Rightarrow \frac{1}{t} \leftrightarrow -j\pi \operatorname{sgn}(\omega)$$

Paseval定理或Paseval恒等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \quad ? \quad \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

你能根据
对称法则
猜出吗？

由卷积定理得： $FT[f_1(t) \bullet f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$

不妨令上式中 $f_1(t) = f(t); f_2(t) = f^*(t)$

由奇偶虚实性知 $f^*(t) \leftrightarrow F^*(-\omega)$



Paseval定理或Paseval恒等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) f^*(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) F^*(-(\omega - u)) du$$

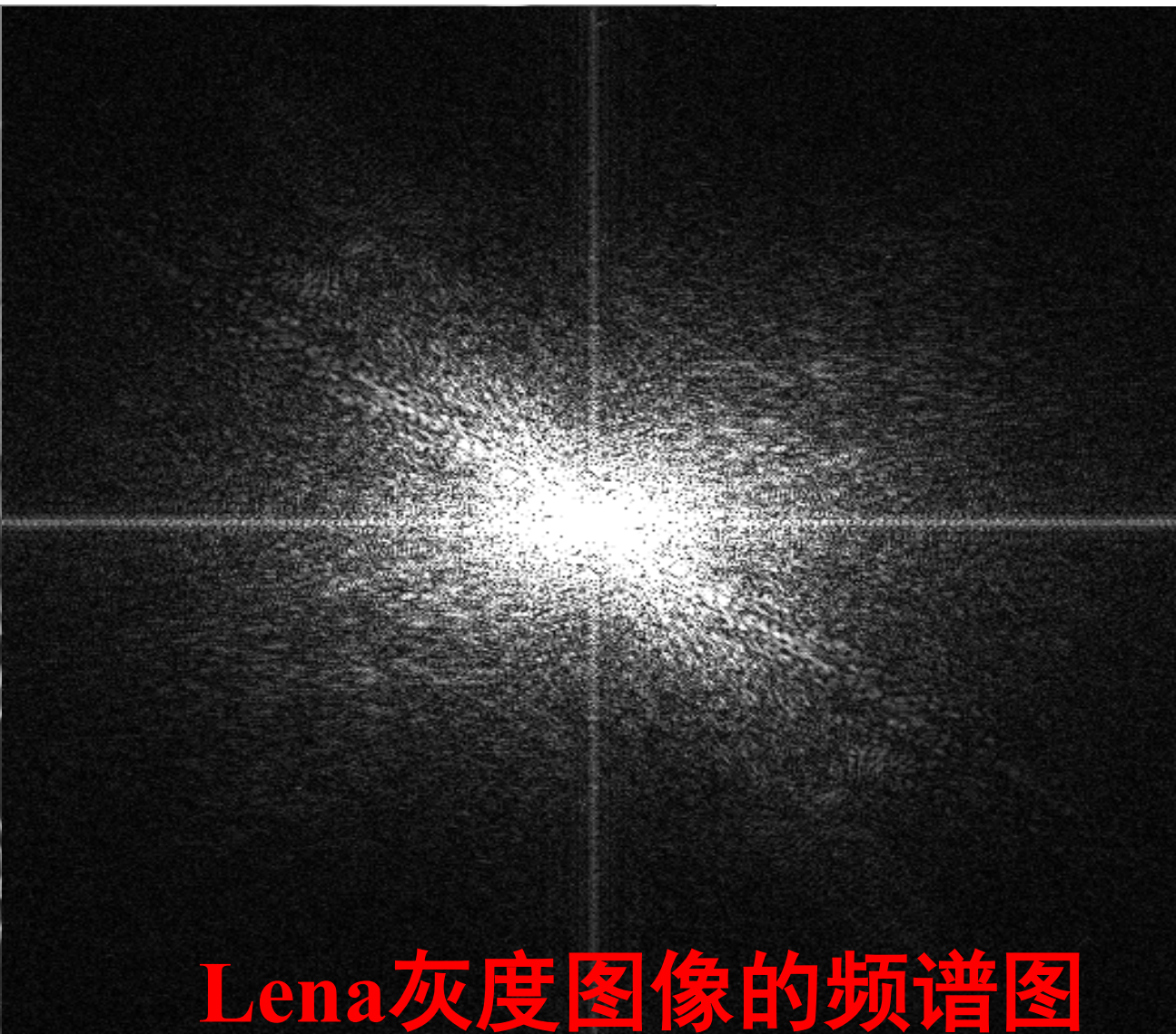
■ 上式对任意的 ω 都成立，不妨取 $\omega=0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) f^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) F^*(u) du$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

再次体现
对称之美！

能量守恒定理的应用意义



Lena灰度图像的频谱图

小结

- 傅里叶变换的**线性性、对称性、时移和频移特性**为信号与系统分析提供了重要工具
- 傅里叶变换的**卷积定理、微积分性质**将时/频域的复杂运算转化为对应的频/时域的简单乘法运算，极大简化信号与系统分析的求解过程
- 傅里叶变换性质**深刻揭示了时域和频域的对应关系**，具有重要的理论意义和应用价值，从帕萨瓦尔定理可见一斑
- 初步体验了自然法则的**对称之美**

课外作业

- 阅读3.8,3.9; 选学3.10;预习:4.1,4.2
- 作业: 3.14, 3.16(a)图信号, 3.24
- 每星期三晚23:59:59前交上星期布置的作业
 - 请按照新版教学指南要求按时上传提交
- 地点:在南一楼中402室
- 课外实践-用Matlab画信号的频谱图

第二周作业情况

- **值得表扬：**有43位学生获得通报表扬，其中15位取得满分成绩
- **存在问题：**
 - ① 2.7：不少同学直接得出结果完全没有过程，仍然有部分同学存在计算错误
 - ② 2.17：发现有同学做题时，**已知条件与书上给出的不一样**。可能存在抄袭网上习题集答案的现象（由于书本版本不同，题目内容有改变都不知道，因此错的太明显）
 - ③ 补充题：部分同学没有通过图解，讨论卷积计算过程的所有情况，导致遗漏

附录：奇偶虚实性的证明

- 考虑 $f(t)$ 为复函数的一般情形, 令 $r_f(t)$ 和 $x_f(t)$ 分别代表其实部和虚部, 即:

$$f(t) = r_f(t) + jx_f(t)$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [r_f(t) + jx_f(t)]e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} [r_f(t) + jx_f(t)](\cos \omega t - j \sin \omega t) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [r_f(t) \cos \omega t + x_f(t) \sin \omega t] dt + j \int_{-\infty}^{\infty} [x_f(t) \cos \omega t - r_f(t) \sin \omega t] dt$$

$$F^*(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [r_f(t) \cos(-\omega t) + x_f(t) \sin(-\omega t)] dt - j \int_{-\infty}^{\infty} [x_f(t) \cos(-\omega t) - r_f(t) \sin(-\omega t)] dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [r_f(t) \cos \omega t - x_f(t) \sin \omega t] dt - j \int_{-\infty}^{\infty} [x_f(t) \cos \omega t + r_f(t) \sin \omega t] dt$$

$$FT[f^*(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} [r_f(t) - jx_f(t)]e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} [r_f(t) - jx_f(t)](\cos \omega t - j \sin \omega t) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [r_f(t) \cos \omega t - x_f(t) \sin \omega t] dt - j \int_{-\infty}^{\infty} [x_f(t) \cos \omega t + r_f(t) \sin \omega t] dt$$

$$= F^*(-\omega)$$

$$FT[f^*(t)] = F^*(-\omega)$$

时域共轭
频域反褶并共轭