

等价关系 Equivalence relations

- 思考： when we say something **equivalent**等价, what does it mean?
- Introduction to equivalence relation...
- 等价关系通常用来将某种程度或者某些方面很相似(相同)的对象联系到一起 Equivalence relations are used to relate objects that are similar in some way.
- Or we can say a kind of “**similar**相似”, a very special type of binary relation.

等价关系 Equivalence relations

- 定义 集合A上的二元关系R，如果它是自反的，对称的，且可传递的，则称R是A上的等价关系。
 - 如果两个元素a、b具有这个等价关系，我们称a与b等价
 - 例如 数的相等关系是任何数集上的等价关系。
 - 又例如 一群人的集合中姓氏相同的关系也是等价关系。
 - 但朋友关系不是等价关系，因为它不可传递。
- 聚类分析（应用）：文本分类、细胞分类、人的群体分类等。

2. 元素 a 与 b 等价

设 R 是集合 A 上的等价关系，若元素 aRb ，则称 a 与 b 等价，或称 b 与 a 等价，常记作： $a \sim b$ 。

Equivalence Relations 等价关系的特征

Since R is **symmetric** 对称, a is equivalent to b whenever b is equivalent to a .

Since R is **reflexive** 自反, every element is equivalent to itself.

Since R is **transitive** 可传递, if a and b are equivalent and b and c are equivalent, then a and c are equivalent.

Obviously, these three properties are **necessary for a reasonable definition of equivalence**.

Think about why the definition needs these three properties?

Answer: it is the abstraction and induction.

Examples

- The following are all equivalence relations:
- "Has the same first name as" on the set of all people.
- "Is similar to" or "congruent to 全等" on the set of all triangles.
- "Is congruent to modulo n " on the integers.
- "Has the same image under a function" on the elements of the domain of the function.
- 更多例子:

例 设 A 是任意集合，则 A 上的恒等关系和普遍关系 U_A 均是 A 上的等价关系。

例 设 $A=\{a, b, c, d\}$, A 上的关系 $\{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c), (c, d), (d, c), (d, d)\}$, R 是 A 上的等价关系。

Negative Examples

- The relation " \geq " between real numbers is reflexive and transitive, but not symmetric. For example, $7 \geq 5$ does not imply that $5 \geq 7$. It is, however, a partial order.
- The relation "**has a common factor greater than 1**" between natural numbers greater than 1, is reflexive and symmetric, but not transitive. (Example: The natural numbers 2 and 6 have a common factor greater than 1, and 6 and 3 have a common factor greater than 1, but 2 and 3 do not have a common factor greater than 1).
- The empty relation R on a non-empty set X (i.e. aRb is never true) is vacuously symmetric and transitive, but not reflexive.

Negative Examples

- The relation “is approximately equal to 约等于” between real numbers, even if more precisely defined, is not an equivalence relation, because although reflexive and symmetric, it is not transitive, since multiple small changes can accumulate to become a big change.

Equivalence Relations 等价关系

- It is a very special binary relation
- It is a kind of “similar” 某种意义上的相似
- It is abstracted from the relations of real applications/world, very common in the real world.
- It is very useful concept, and math model.

思考问题

- 如何利用关系矩阵判断一个有限集合上的二元关系是否是等价关系？
- 如果说给定一个二元关系，需要编程序判断是否是等价关系，怎么做？不需要伪代码，只叙述思路。

Introduction of Equivalence Classes

物以类聚, 人以群分

怎么聚, 怎么分?

- Analysis of Clustering: Text Clustering、 cell clustering in Medical、 Grouping of People...

3. 等价类 equivalence classes

定义 设 R 是集合 A 上的等价关系，则 A 中等价于元素 a 的所有元素组成的集合称为 a 生成的等价类，用 $[a]_R$ 表示，即 $[a]_R = \{b \mid b \in A \wedge bRa\}$

而 a 称为这个类的代表元。

例如：对于 $A = \{a, b, c, d\}$ 上的等价关系 R 设 $\{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c), (c, d), (d, c), (d, d)\}$ 来说

$$[a]_R = \{a, b\}, \quad [b]_R = \{a, b\}$$

等价类的三个基本性质

性质1. 对任意 $a \in A$, $[a]_R$ 一定非空

因为对于任意的 $a \in A$, 有 aRa , 所以 $a \in [a]_R$

性质2. 对任意的 $R, b \in A$ 若 aRb , 则 $[a]_R = [b]_R$

为什么?

性质3. 对任意 $a, b \in A$, 若 $(a, b) \notin R$, 则 $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$
为空集合

Why?

例3 设 $A = \{a, b, c, d\}$, A 上的关系 $R = \{(a, a), (a, b), (b, c), (a, c), (c, c), (b, b), (b, a), (c, b), (c, a), (d, d)\}$

则 R 是 A 上的等价关系 $[a]_R = [b]_R = [c]_R = \{a, b, c\}$

$[d]_R = ? ?$

Note: 同一个等价类中元素均相互等价。不同等价类中的元素互不等价！

等价关系及等价类举例

例:自然数集合 \mathbf{N} 上的模同余关系。 n 是一个已知的自然数, R 是 \mathbf{N} 上的一个这样的二元关系, aRb 当且仅当 a 与 b 关于 n 同模, 即用 n 去除 a 和 b 的到的余数相同, 记做 $a=b(\text{mod } n)$ 。

问: R 是 \mathbf{N} 上的一个等价关系吗, 为什么? 如果是, 求出所有的等价类。

求模同余的所有等价类举例说明...

以模5同余为例求所有等价类

等价关系equivalence classes与分划partitions

集合A上的等价关系与集合A上的分划具有一一对应关系。

定理 设R是集合A上的一个等价关系，则集合A中所有元素产生的等价类的集合 $\{[a]_R \mid a \in A\}$ 是A的一个分划。

证明 (1) 对每一元素 $a \in A$, $[a]_R$ 是A的非空子集。

(2) 对任意 $a, b \in A$, 或者 $[a]_R$ 与 $[b]_R$ 是A的同一子集或者不相交

(3) 对所有的元素的等价类求并集，看并集是否等于A

$$\bigcup_{a \in A} [a]_R \subseteq A$$

这种由等价关系 R 的等价类所形成的 A 的分划称为 A 上由关系 R 导出的等价分划，记作 Π_R^A

- 举例说明：整数集合，其上的等价关系”模5同余”将整数集合分为5个子集合，就是一个分划。

定理 设 $\Pi = \{A_1, A_2, \dots, A_r\}$ 是集合 A 的一个分划, 则存在 A 上的一个等价关系 R , 使得 Π 是 A 上由 R 导出的等价分划。

证明: 在集合 A 上定义一个关系 R , 对于任意的 $a, b \in A$, 当且仅当 a 与 b 在同一分划块中时, 有 aRb 。

对任意 $a \in A$, a 与 a 在同一分划块中, 所以有 aRa , 即 R 自反。

又对任意的 $a, b \in A$, 若 a 与 b 在同一分划块中, 则 b 与 a 在同一分划块中. 即, 若 aRb , 则 bRa , 因此 R 是对称的。

对于任意 $a, b, c \in A$, 若 a 与 b 在同一分划块中, b 与 c 在同一分划块中, 因为 $A_i \cap A_j = \emptyset (i \neq j)$ 所以 a 与 c 也在同一分划块中, 此即, 若 aRb , bRc , 则必有 aRc , 因此 R 是可传递的。所以 R 是等价关系。

•当然还需要说明 R 的等价类就是已知的分划

例 设 $A=\{a, b, c, d\}$ ， A 上的分划 $\pi_1= \{\{a\}, \{b, c\}, \{d\}\}$
与 $\pi_2= \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}$

试求出对应的等价关系，使得它们的等价类分别恰好是
 π_1 和 π_2 的分划块。

解...

总结

集合 A 上的任意一个等价关系 R 都导出一个 A 上的分划，也即所有互不相同的等价类；

反之， A 上的任一分划，也唯一地对应于一个等价关系 R ，使得该等价关系的等价分类跟已知的分划是一致的。

这也说明任何事物的分类、聚类、分块（分划）
其实就是某个等价关系的等价分类！

Think About思考问题

Let's back to the question: if $|A| = n$,

已知集合A上的一个等价关系R， 那么R的等价类的个数有哪些可能？

- *例5* 设 $A = \{a, b, c\}$ ，求出 A 上所有的等价关系。

思考：从哪入手考虑这个问题？

- *解* 先求出 A 上有多少个不同的分划。

- 分成一个分划块的分划
- 分成两个分划块的分划
- 分成三个分划块的分划

5. 商集 Quotient set

- **Quotient set**
- Equivalence relation: \sim
- The set of all possible equivalence classes of X by \sim , denoted X/\sim , is the **quotient set** of X by \sim . 所有等价类的集合
- This operation can be thought of (very informally) as the act of “dividing” the input set by the equivalence relation, hence both the name “quotient”, and the notation, which are both reminiscent of division. （想象从集合到等价类集—商集的运算好比“除法”）
- **Projection** （投影）
- The **projection** of \sim is the function defined by $\pi(x) = [x]$ which maps elements of X into their respective equivalence classes by \sim .

作业

- 5.5节 T2 (b), (d)
- T5, T6, T15 (c)
- T18
- 关注一下 T22前的概念“加细”

附加题--不要求做到作业本上

A、B是两个非空集合， f 是A到B的函数。 R 为定义在A上的二元关系，对任意的 $a, b \in A$, aRb 当且仅当 $f(a)=f(b)$. 证明 R 是A上的等价关系。并且，

(1) $a \in A$, 求出等价类 $[a]_R$

(2) 求出 R 的所有等价类。