真值函数 (逻辑函数）

定义1 称F:$\{0,1\}^n \to \{0,1\}$为n元真值函数

n元真值函数共有多少个?

每一个命题公式(n个命题变量）对应于一个n元真值函数

每一个真值函数对应无穷多个命题公式

1元真值函数

p	$F_0^{(1)}$	$F_1^{(1)}$	$F_2^{(1)}$	$F_3^{(1)}$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

2元真值函数（2^4个不同函数）

p q	$F_0^{(2)}$	$F_1^{(2)}$	$F_2^{(2)}$	$F_3^{(2)}$	$F_4^{(2)}$	$F_5^{(2)}$	$F_6^{(2)}$	$F_7^{(2)}$
0 0	0	0	0	0	0	0	0	0
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1
1 0	0	0	1	1	0	0	1	1
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1

p q	$F_8^{(2)}$	$F_9^{(2)}$	$F_{10}^{(2)}$	$F_{11}^{(2)}$	$F_{12}^{(2)}$	$F_{13}^{(2)}$	$F_{14}^{(2)}$	$F_{15}^{(2)}$
0 0	1	1	1	1	1	1	1	1
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1
1 0	0	0	1	1	0	0	1	1
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1

3元真值函数会有多少个？　（2^8）

思考

- n元真值函数会有多少个?
- n元真值函数的变量的赋值有2^n组不同的，每组赋值又有2种可能的函数值（真值）
- 所以一共有多少个可能的n元的真值函数?

联结词完备集

- **定义2 设S是一个联结词集合, 如果任何$n(n\geq 1)$ 元真值函数（命题公式）都可以由仅含S中的联结词构成的公式表示,则称S是联结词完备集**

- **定理2.1 下述联结词集合都是完备集:**
- **(1) $S1=\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$** $A\leftrightarrow B \Leftrightarrow (A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A)$
- **(2) $S2=\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$** $A\rightarrow B \Leftrightarrow \neg A\vee B$
- **(3) $S3=\{\neg, \wedge, \vee\}$** $A\vee B \Leftrightarrow \neg\neg(A\vee B) \Leftrightarrow \neg(\neg A\wedge\neg B)$
- **(4) $S4=\{\neg, \wedge\}$** $A\wedge B \Leftrightarrow \neg(\neg A\vee\neg B)$
- **(5) $S5=\{\neg, \vee\}$** $A\vee B \Leftrightarrow \neg(\neg A)\vee B \Leftrightarrow \neg A\rightarrow B$
- **(6) S6=$\{\neg, \rightarrow\}$ ？ ？ ？**

命题公式的对偶性及其对偶原理

- 限定性命题公式： 最多仅含有否定、析取、合取逻辑联结词的命题公式。
- 命题公式A的对偶公式（Dual）：将限定性命题A中的

析取联结词换成合取联结词，

合取联结词换成析取联结词，

1换成0，0换成1（如果存在的话）。

记为A^D,

举例说明…

命题公式的对偶性及其对偶原理

- 对偶原理（Duality Principle)
- 设P、Q是限定性命题公式。如果
- $P \Leftrightarrow Q$ 则 $P^D \Leftrightarrow Q^D$

例：A： （$P \wedge Q$） $\vee Q$

A^D： $(P \vee Q) \wedge Q$

对偶原理的意义：

例如如果证明了一个命题的等值式，那么根据对偶原理，该等值式的对偶式也是成立的，不用再证明。

有关对偶公式的一个定理

定理：假设命题公式A与A^D互为对偶式， 它们涉及的命题变量有$P_1, P_2, \ldots P_n$. 那么有：

$$\neg A(P_1, P_2, \ldots P_n) \Leftrightarrow A^D(\neg P_1, \neg P_2, \ldots \neg P_n)$$

想象一下De.Morgan定律？

思考问题

- 如果证明了一个公式是永真式，那么其对偶式如何？
- 如果一个命题公式里面有→ 及等值符号↔， 那么对偶式样怎么求得？
- 利用有关的等值式将含有这两个符号的公式换成只有否定，析取及合取得公式

范 式

命题公式表示的标准化------范式
构造新的逻辑等价式

注：教材中的范式讲得太简单，这里补充一些
（将来在逻辑设计中要用到）

范式内容

- 析取范式与合取范式
  - 简单析取式(质析取式）与简单合取式(合析取式）
  - 析取范式与合取范式

主析取范式与主合取范式
  - 极（最）小项与极（最）大项
  - 主析取范式与主合取范式
  - 主范式的用途、如何求主析取范式与主合取范式

范式

- 真值表可以用来判断命题公式的类型
- 真值表也可以判断两个命题公式是否等值 （和蕴含）
- 问题:随着命题公式中的命题变元增多,真值表会怎么样变化?
- 范式是命题公式的基于三个基本连接词{¬,∨,∧ }规范表达式 （限定性命题公式表达方法）
- 命题公式的范式的构造是另一种解决上述两个问题的方法—主析取范式和主合取范式, 这两种规范形式可以给出真值表所具有的一切信息.
- 命题公式的范式的构造也是逻辑电路设计所需的

需要学习解决的几个问题

- 1. 什么是范式
- 2. 范式的存在性
- 3. 如何从已知命题公式的求等价范式
- 4. 如何根据真值表构造一个等价的范式？

  （这个在逻辑设计里面非常重要）
- 5. 分析范式得到有关信息

简单析取式与简单合取式

文字:命题变元及其否定的统称

简单析取式:由有限个文字构成的析取式 （无重复文字）

如 $p, \neg q, p\vee\neg q, p\vee q\vee r, \ldots$

简单合取式 :有限个文字构成的合取式

如 $p, \neg q, p\wedge\neg q, p\wedge q\wedge r, \ldots$

定理1: (1) 一个简单析取式是重言式当且仅当它同时含某个命题变元和它的否定

(2) 一个简单合取式是矛盾式当且仅当它同时含某个命题变元和它的否定

为什么? 那么如果上面的条件不满足，那会是什么类型?

- 定理1的证明(1)
- 充分性简单
- 必要性：如果不包含定理中所说的命题变量及其否定项，那么可以将所有带否定词的项取1，而其它所有项取0，则得到的真值为0，不再是真，与重言式矛盾

- （2）怎么证明？

析取范式与合取范式

析取范式:由有限个简单合取式组成的析取式

$A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_r$, 其中$A_1, A_2, \ldots, A_r$是简单合取式

（注明：教材上的合取式实际上也就是主合取范式了）

合取范式:由有限个简单析取式组成的合取式

$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_r$, 其中$A_1, A_2, \ldots, A_r$是简单析取式

范式:析取范式与合取范式的统称

范式的性质:

定理2 (1) 一个析取范式是矛盾式当且仅当它的每一个简单合取式都是矛盾式

(2) 一个合取范式是重言式当且仅当它的每一个简单析取式都是重言式

为什么?? 结合定理1， 请重述定理2

范式存在定理

定理3 任何命题公式都存在着与之等值的析取范式与合取范式.

证 求公式A的范式的步骤:

(1) 消去A中的→, ↔ （将命题公式表示成等价的限定性命题公式）

$A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B$

$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$

(2) 否定联结词¬的内移或消去（利用De.Morgan定律）

$\neg\neg A \Leftrightarrow A$

$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

范式存在定理(续)

(3) 使用分配律

$A\vee(B\wedge C)\Leftrightarrow(A\vee B)\wedge(A\vee C)$ 变成合取范式

$A\wedge(B\vee C)\Leftrightarrow(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$ 变成析取范式

（**4**）利用双重否定将$\neg(\neg p)$ *换成* p

例1 求$\neg(p\to q)\vee\neg r$ 的析取范式与合取范式

解 $\neg(p\to q)\vee\neg r$

$\Leftrightarrow \neg(\neg p\vee q)\vee\neg r$

$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q)\vee\neg r$ 析取范式

$\Leftrightarrow (p\vee\neg r)\wedge(\neg q\vee\neg r)$ 合取范式

注意: 公式的析取范式与合取范式总是存在的，但不一定唯一, 为什么?

求公式的析取范式或合取范式，并判断其类型

- 例题1 求公式$P \leftrightarrow (P \wedge Q)$的析取范式
- $P \leftrightarrow (P \wedge Q) \Leftrightarrow \mathbf{(P \wedge (P \wedge Q)) \vee (\neg P \wedge \neg (P \wedge Q))}$
- **done**？
  - $\Leftrightarrow \mathbf{(P \wedge P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg P) \vee (\neg P \wedge \neg Q)}$
  - **Done?**
  - $\Leftrightarrow \mathbf{(P \wedge Q) \vee (\neg P) \vee (\neg P \wedge \neg Q)}$

  - Done! 由此也可以看出范式不唯一。 类型？
  - 不是矛盾式，是重言式吗？怎么判断？

- 求公式的$P \leftrightarrow (P \wedge Q)$合取范式
- 解： $P \leftrightarrow (P \wedge Q) \Leftrightarrow$（$\neg \mathbf{P} \vee (P \wedge Q)$）
  - $\wedge$（ $\mathbf{P} \vee \neg (P \wedge Q)$）

  再将（$\neg \mathbf{P} \vee (P \wedge Q)$），（ $\mathbf{P} \vee \neg (P \wedge Q)$）

  都换成合取范式,
  - **进一步判断是否是重言式**

虽然不唯一，公式的类型还是可以判断的。然而，不容易判断两个公式是否存在等值或者蕴含关系。为了解决这个问题，设计了下面的主范式。

析取范式在电路设计中非常重要

- Disjunctive Normal Form is important for the circuit design methods

极（最）小项与极（最）大项

（在逻辑设计中也要用）

定义 在含有n个命题变元$P_1, P_2, \cdots P_n$, 的简单合取式(简单析取式)中, 若每个命题变元与其否定式必出现一个只出现一个, 且只出现一次, 而且第i($1 \le i \le n$)个文字(按下标或字母顺序排列, 一个约定的顺序)出现在左起第i位上, 称这样的简单合取式$\wedge_{i=1}^{n} P_i^*$（简单析取式$\vee_{i=1}^{n} P_i^*$）为极小项(极大项)

思考:

- 极小项与普通简单合取式的区别?
- 极大项与普通简单析取式的区别?

续

说明:

(1) n个命题变元产生2^n个不相同的极小项和2^n个不相同的极大项 （为什么？）

(2) 2^n个极小项(极大项)均互不等值（为什么?）

(3) 用m_i表示第i个极小项, 其中i是该极小项成真的n个变量的真值赋值（2进制串）的十进制表示.

用M_i表示第i个极大项, 其中i是该极大项成假赋值的十进制表示, m_i(M_i)称为极小项(极大项)的名称.

极小项与极大项(续)

两个变量p,q形成的极小项与极大项

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p\wedge\neg q$	0 0	m_0	$p\vee q$	0 0	M_0
$\neg p\wedge q$	0 1	m_1	$p\vee\neg q$	0 1	M_1
$p\wedge\neg q$	1 0	m_2	$\neg p\vee q$	1 0	M_2
$p\wedge q$	1 1	m_3	$\neg p\vee\neg q$	1 1	M_3

定理 设m_i与M_i是由同一组命题变元形成的极小项和极大项, 则 $\neg m_i \Leftrightarrow M_i$, $\neg M_i \Leftrightarrow m_i$

主析取范式与主合取范式

主析取范式:由不同的极小项构成的析取范式

主合取范式:由不同的极大项构成的合取范式

例如，n=3, 命题变元为p, q, r时，

$(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r) \Leftrightarrow m_1\vee m_3$ 是主析取范式

$(p\vee q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r) \Leftrightarrow M_1\wedge M_5$ 是主合取范式

主范式的存在性定理:

定理 任何命题公式都存在着与之等值的主析取范式（非矛盾式）和 主合取范式（非重言式）, 并且是惟一的（如果不考虑排列顺序的话）.

（只要求知道这个结果， 用真值表可以证明这点。）

注意：主范式并非是命题公式最简单的表达形式。

说明

- 矛盾式的主析取范式是一个空公式，它不包含任何最小项

- 那么永真公式的主合取范式如何？

求主析取范式的步骤

设公式A含命题变项$p_1,p_2,\ldots,p_n$

(1) 求A的析取范式$A'=B_1\vee B_2\vee \ldots \vee B_s$, 其中$B_j$是简单合取式 $j=1,2, \ldots ,s$

(2) 若某个B_j既不含p_i, 又不含$\neg p_i$, 则将B_j展开成

$$B_j \Leftrightarrow B_j\wedge(p_i\vee\neg p_i) \Leftrightarrow (B_j\wedge p_i)\vee(B_j\wedge\neg p_i)$$

重复这个过程, 直到所有简单合取式都是长度为n的极小项为止

(3) 消去重复出现的极小项, 即用m_i代替$m_i\vee m_i$

(4) 将极小项按下标从小到大排列

求主合取范式的步骤

设公式A含命题变项$p_1,p_2,\dots,p_n$

(1) 求A的合取范式$A'=B_1\wedge B_2\wedge \dots \wedge B_s$, 其中$B_j$是简单析取式 $j=1,2, \dots ,s$

(2) 若某个B_j既不含p_i, 又不含$\neg p_i$, 则将B_j展开成

$$B_j \Leftrightarrow B_j\vee(p_i\wedge\neg p_i) \Leftrightarrow (B_j\vee p_i)\wedge(B_j\vee\neg p_i)$$

重复这个过程, 直到所有简单析取式都是长度为n的极大项为止

(3) 消去重复出现的极大项, 即用M_i代替$M_i\wedge M_i$

(4) 将极大项按下标从小到大排列

求主范式实例

例1（续） 求$\neg(p\to q)\vee\neg r$ 的主析取范式与主合取范式

解（1） $\neg(p\to q)\vee\neg r \Leftrightarrow (p\wedge\neg q)\vee\neg r$

$p\wedge\neg q \Leftrightarrow (p\wedge\neg q)\wedge 1$ 同一律

$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q)\wedge(\neg r\vee r)$

$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)$ 分配律

$\Leftrightarrow m_4\vee m_5$

$\neg r \Leftrightarrow (\neg p\vee p)\wedge(\neg q\vee q)\wedge\neg r$ 同一律

$\Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)$

$\Leftrightarrow m_0\vee m_2\vee m_4\vee m_6$ 分配律

得 $\neg(p\to q)\vee\neg r \Leftrightarrow m_0\vee m_2\vee m_4\vee m_5\vee m_6$

由真值表构造等价的范式

- 要构造出一个命题公式，使得它的真值表是给定的真值表
- 1. 对真值表中真值为1的每一行，先找到相应的合取式（极小项），再将这些极小项进行析取，形成一个析取范式（**主析取范式**）。

或者：

- 2.对真值表中真值为0的每一行，先找到相应的析取式（极大项），再将这些极大项进行合取，形成一个**主合取范式。**

- 思考问题：这样得到的**主析取范式 与主合取范式**是否等价？

由真值表构造等价的范式举例（析取范式）

- 两个变量p,q， 真值为真的行对应的合取式：

p	q	(公式F)
1	1	1
1	0	1
0	1	0
0	0	1

- Row 1: $p \wedge q$
- Row 2: $p \wedge \neg q$
- Row 4: $\neg p \wedge \neg q$
- 再将这3个合取式析取， 就得到与F等值的析取范式

由真值表构造等价的范式举例（合取范式）

- 两个变量p,q， 真值为假的行对应的析取式：

p	q	(公式F）
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

- Row 2: $\neg p \vee q$
- Row 3: $p \vee \neg q$
- 再将这2个合取式合取， 就得到与F等值的合取范式

思考：想想上面的道理， 为什么这样做是正确的？

在逻辑设计中的应用

- 注意：由实际需求穷举列出真值表，再利用真值表求主范式
- 或者是由实际需求转换成逻辑函数（命题公式），求取范式
- 再设计逻辑电路。

- 真值表是实际需求的反映（已知所有的输入，和真值输出），再由其转换成主范式，得到相应的命题公式（逻辑函数），再化简，设计出满足实际功能需求的逻辑电路。

主析取范式的用途

(1) 求公式的成真赋值和成假赋值

设公式A含n个命题变元, A的主析取范式有s个极小项, 则A有s个成真赋值, 它们是极小项下标的二进制表示, 其余2^n-s个赋值都是成假赋值　为什么??

（思考：主合取范式结论如何？　）

例如 $\neg(p\rightarrow q)\vee\neg r \Leftrightarrow m_0\vee m_2\vee m_4\vee m_5\vee m_6$

成真赋值: 000,010,100,101,110;　成假赋值: 001,011,111

思考

- 根据刚刚的结论，如何判断公式的类型？
- 一个公式A的主析取范式有s个极小项，那么它的主合取范式有多少个极大项？
- 假如A的主析取范式已知，如何得到其主合取范式？

主析取范式的用途(续)

(2) 判断公式的类型

设A含n个命题变项，则

A为重言式当且仅当A的主析取范式含2^n个极小项

A为矛盾式当且仅当A的主析取范式不含任何极小项, 记作0 ，或者叫空公式

A为可满足式当且仅当A的主析取范式中至少含一个极小项

判断类型实例

例3 用主析取范式判断公式的类型:

(1) $A \Leftrightarrow \neg(p\to q)\wedge q$　(2) $B \Leftrightarrow p\to(p\vee q)$　(3) $C \Leftrightarrow (p\vee q)\to r$

解 (1) $A \Leftrightarrow \neg(\neg p\vee q)\wedge q \Leftrightarrow (p\wedge\neg q)\wedge q \Leftrightarrow 0$　　矛盾式

(2) $B \Leftrightarrow \neg p\vee(p\vee q) \Leftrightarrow 1 \Leftrightarrow m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3$　　重言式

(3) $C \Leftrightarrow \neg(p\vee q)\vee r \Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q)\vee r$

$\Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)$

$\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

$\Leftrightarrow m_0\vee m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_7$　　非重言式的可满足式

主析取范式的用途(续)

(3) 判断两个公式是否等值 （想想怎么做？）

例4 用主析取范式判断下面2组公式是否等值:

(1) p与$(\neg p\vee q)\to(p\wedge q)$

解 $p \Leftrightarrow p\wedge(\neg q\vee q) \Leftrightarrow (p\wedge\neg q)\vee(p\wedge q) \Leftrightarrow m_2\vee m_3$

$(\neg p\vee q)\to(p\wedge q) \Leftrightarrow \neg(\neg p\vee q)\vee(p\wedge q)$

$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q)\vee(p\wedge q) \Leftrightarrow m_2\vee m_3$

故 $p \Leftrightarrow (\neg p\vee q)\to(p\wedge q)$

总结方法…

判断等值实例(续)

(2) $(p\wedge q)\vee r$ 与 $p\wedge(q\vee r)$

解 $(p\wedge q)\vee r \Leftrightarrow (p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

$\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

$\Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_6\vee m_7$

$p\wedge(q\vee r) \Leftrightarrow (p\wedge q)\vee(p\wedge r)$

$\Leftrightarrow(p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

$\Leftrightarrow m_5\vee m_6\vee m_7$

故 $(p\wedge q)\vee r \not\Leftrightarrow p\wedge(q\vee r)$

思考

- 能否从两个公式的主析取范式或者主合取范式判断或者推断出这两个公式是否存在蕴含关系？ 如果可能的话，怎么做？

主合取范式应用

例6 求$A=(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)$的主合取范式

解 $A \Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_7$

$\Leftrightarrow M_0\wedge M_2\wedge M_4\wedge M_5\wedge M_6$

矛盾式的主合取范式含全部2^n个极大项 为什么??

重言式的主合取范式不含任何极大项, 记作1

应用实例

例5 某单位要从A,B,C三人中选派若干人出国考察, 需满足下述条件:

(1) 若A去, 则C必须去;

(2) 若B去, 则C不能去;

(3) A和B必须去一人且只能去一人.

问有几种可能的选派方案?

解 记p:派A去, q:派B去, r:派C去

(1) $p\rightarrow r$, (2) $q\rightarrow \neg r$, (3) $(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)$

求下式的成真赋值

$$A=(p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow\neg r)\wedge((p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q))$$

实例(续)

求A的主析取范式

$$A=(p\to r)\wedge(q\to\neg r)\wedge((p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q))$$

$$\Leftrightarrow (\neg p\vee r)\wedge(\neg q\vee\neg r)\wedge((p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q))$$

$$\Leftrightarrow ((\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge\neg r)\vee(r\wedge\neg q)\vee(r\wedge\neg r))$$

$$\wedge((p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q))$$

$$\Leftrightarrow ((\neg p\wedge\neg q)\wedge(p\wedge\neg q))\vee((\neg p\wedge\neg r)\wedge(p\wedge\neg q))$$

$$\vee((r\wedge\neg q)\wedge(p\wedge\neg q))\vee((\neg p\wedge\neg q)\wedge(\neg p\wedge q))$$

$$\vee((\neg p\wedge\neg r)\wedge(\neg p\wedge q))\vee((r\wedge\neg q)\wedge(\neg p\wedge q))$$

$$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)$$

成真赋值:101,010

结论: 方案1 派A与C去，方案2 派B去

作业

- P19(中文本科教学版第6版)：T18(b) T21，T29，T31

补充作业：利用下面的真值表，写出相应公式F的主合取范式和主析取范式。并且描述主合取范式跟主析取范式之间的关系和特征。

p	q	r			公式F
0	0	0			1
0	0	1			1
0	1	0			1
0	1	1			1
1	0	0			1
1	0	1			0
1	1	0			0
1	1	1			1