**一分耕耘一分收获，**种瓜得瓜， 种豆得豆， 千古不变的道理。 在这门课的考试里，没有侥幸，没有那么多的运气。只有平时的认真学习和付出。

学数学最重要的是要用心去理解，认真听讲，努力思考，充分理解、消化、扩展所学的知识。依靠考前两天的突击背书是没有多大用处的。那些平时经常抄作业应付了事的，应该有不少教训！

这一次的考题，除了最后一道证明题的第 2 部分（等价类部分占 7 分），同学们可能不清楚怎么做外，其它基本都是基础要求的题目，没有难题目。你们在考试过程中也没有觉得很难，很多很多都提前交卷了。但很遗憾，结果却是出乎意料，不太好。 所有可能会有一些同学对自己的分数有疑虑，很正常。不过，请大家仔细看看我下面的分析，好好想想你自己是怎么做的，也就应该明白了。

先说一下一些同学的基本数学素养的问题：

（1）逻辑混乱，思维不清。作为数学科目，凡是逻辑混乱的，扣分会很多，或者说得分会很少。 因为数学就是要求最基本的逻辑正确。

（2）在解答过程中，随心所欲地冒出一些符号或者字母（想要什么就凭空冒出什么）， 比如说 R,N,M, P, B, C 什么的，但不对这些字母或者符号做任何说明，不说明这些字母符号代表什么意思，就埋头写下去。 这样就是典型的数学基本素养问题。 我可以假设你的这些字母和符号表示任意我想表示的东西， 你后面的所有解答都是错误的，都是跟题目没有任何关系的内容了。同学们不要以为，你作为老师你应该懂得我是什么意思，你懂的！告诉你，我不懂，其它人更不懂。我的懂与不懂不是基于我的知识，不是基于我的猜测，而是要基于你的叙述！!

作为数学，其实任何一个学科，任何一门课里面，或者是任何一个场合，如果不是全世界公认约定、一致认可的约定符号与字母，在它出现使用之前就必须说明其表示什么！!

（3）我多次强调过，重复过，只要不是选择填空题目，就不能只是给一个答案或者说一个结果。 如果只给一个答案，没有任何说明，没有任何过程，那么最多只能得到一个答案分！ 甚至是没有分. 因为有可能认为你是抄的一个答案！ 有不少同学，这方面习惯非常糟糕，总是觉得好像我给了一个答案或者结果，而且结果是对的，就能得到满分。 那么你们现在就应该知道这是不可能的！ 有可能一分都得不到！ 这就是往往很

多同学在成绩出来后，总觉得老师改卷搞错了， 给分给少了的原因。

结论正确但叙述不清，或者叙述混乱，或者没有叙述，是一定会扣分甚至不给分的。

(4) 还有不少同学在证明、说理等的叙述过程中，犯逻辑错误。 数学最忌讳范逻辑错误。 必然说，以点带面， 反证时结论的对立面搞错、先承认结论再在这基础上推导等等。

**答疑给我的信息**：6.20 号下午在西五楼进行了一次面对面答疑，参加的同学不多。说明大家还没准备好，问题不多。

考前的一天，我手机 QQ 信息不断，群里问的，私下问的，太多。从这众多的问题里面，得出如下一些结论：

1. **平时部分同学没有用心听课。**例如：逻辑形式证明后面一列的理由叙述部分，我上课时不止一次说明过，那一列虽然不是必须的，但是很有意义，很有帮助。 对于那些个等价式子和蕴含式子的应用，如果能知道它们的标号就写上，记不住也没关系。但答疑的时候还是不少人纠结于这个问题。
2. **平时听课后，没有问自己是否懂了，是否搞清楚了。**

   例如：同构与同胚。 花了不少篇幅讲同构，也解释清楚了同胚的概念及其作用，但还是有些同学说不知道，甚至不知道到哪里去查找。那上课的时候，能说听懂了吗？如果没有搞懂，当时为什么不看书、不问？
3. **平时听课后，即使没有搞清楚，明知有问题，但先不管它，放着不理。**从同学们提出的不少问题里可以看出，当时就没搞清楚，为什么非要考试前才问？比如说样板题，我上传了一个月，在一个月里没几个人问。 最后考前一天，心慌了，一大堆人来问，急着找答案。
4. **对课堂上老师提出的一些需要大家思考和课后去思考、去查资料分析解决的问题，很多同学没有去理会。** 这次考试的证明题中关于平面图的不等式的证明，就是教材上的结论，PPT 里也有，而且上课时我

提了一下大概思路。PPT 里要求同学们自己课后去证明，虽然没有布置作为上交的作业题。 然而，这次考试的情况这道题很不理想。如果平时去做了，思考了，不会做也问了。这次考试就完全没有问题。

**强烈建议：**在今后的学习中，及时问自己搞懂没有、搞清楚没有，各种问题是不是取查阅了、是不是课后去消化了等等，平时就搞懂，切不要等到最后一刻!!!

| 得分 | 评卷人 |
| --- | --- |
| | |

**一. 单项选择（每小题 3 分，共 15 分）**

(　　) (1) 设 P, Q 是命题变元，则 $\neg(P\leftrightarrow Q)\rightarrow(\neg(P\rightarrow Q)\wedge\neg(Q\rightarrow P))$ 的类型

(A) 不是命题公式　　(B) 是永真公式

(C) 是永假公式　　(D) 是可满足公式

(　　) (2) 设 $A=\{\phi\}$　$B=P(A)$，则下列选项错误的是

(A) $\phi\in B$　　(B) $\{\phi\}\in B$

(C) $\{\{\phi\}\}\subseteq B$　　(D) $\{\phi,\{\phi\}\}\in P(A)$

(　　) (3) 设 A，B 为可数集, 下列哪一个集合可能不是可数集

(A) A∩B　　(B) A∪B　　(C) A×B　　(D) A∪B 的幂集

(　　) (4) $R_1$，$R_2$ 为 A 上的两元关系，下列说法正确的是

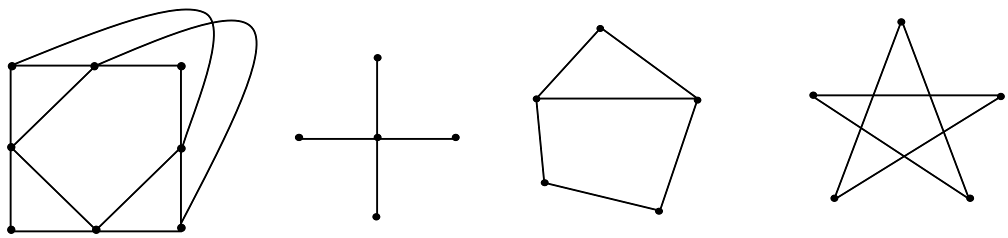
(A) $R_1$，$R_2$ 自反，则其复合关系 $R_1\cdot R_2$ 也自反；

(B) $R_1$，$R_2$ 对称，则其复合关系 $R_1\cdot R_2$ 也对称；

(C) $R_1$，$R_2$ 传递，则其复合关系 $R_1\cdot R_2$ 也传递；

(D) $R_1$，$R_2$ 反对称，则其复合关系 $R_1\cdot R_2$ 也反对称；

(　　) (5) 下图中不能够一笔画出的（具有欧拉路）



(A) (B) (C) (D)

| 得分 | 评卷人 |
| --- | --- |
| | |

## 二. 填空（每小题 3 分，共 15 分）

(6) 命题逻辑中可满足式的真值表具有特征：_至少有一行的真值为 1__；

(7) 论域为实数集，则逻辑表达式∀x∃y((x>y)→(y<x))的真值是__1___；

(8) 集合 A、B 满足：|A|=3, |B|=5，则 A 到 B 的内射函数有__60___个，双射函数有___0___个；

(9) 一棵树有 2 个度为 2 的结点，3 个度为 3 的结点，其他结点的度均为 1，则此树共有__10__个结点；

(10) 一个无向连通图有 n 个点 m 条边，其中 m > n > 1. 至少删除__m-n+2____条边后，此图一定不连通。

对于一个图，要是连通的，至少需要 n-1 条边， 如果边数少于 n-1 就一定不连通。这样，对于一个没有先验知识的任意的图，要保证是不连通的，在删除边时没有特点的选择，是做任意的删除，这样至少删除 m-n+2 条边。

| 得分 | 评卷人 |
| --- | --- |
| | |

## 三. 解答题（40 分）

(11) 求(P→Q) →¬R 的主合取范式。（6 分）

这道题可以有两种做法，一是先列出真值表，再给出相应的主范式；
第二种方法是直接转换成合取范式，再转换成主合取范式的格式；

只给出范式没有完成到主范式的，只做了一半； 如果只要主范式答案，没有转换求解过程，也没有真值表对应，就只要答案分数！

(12) 符号化下列命题：（6 分）

所有的老师都喜欢学习好的学生，也有些学习不好的学生不喜欢某些老师。

解答：这道题是谓词逻辑符号化的基础题
三个特性谓词，一个二元谓词，全总个体域.

S(x): x 是学生
T(x):x 是老师
G(x):x 是成绩好的
L(x,y): x 喜欢 y

$\forall x \forall y( (S(x) \wedge G(x) \wedge T(y)) \rightarrow L(x,y) ) \wedge$
$\exists x \exists y( S(x) \wedge \neg G(x) \wedge T(y) \wedge \neg L(x,y) )$

出现的问题：很多同学只得到了一半的分数。首先，在题目没有给定个体域的情况下，一般都要求用全总个体域。因为这里的个体都是人，一方是学生，一方是老师，分别指定个体域反而不合适。采用全总个体域，加上特性谓词的方法，才是最清楚合适的做法；
其次，有不少同学，对于存在量词里面该用的合取，全称量词里面该用的蕴含运算连接，搞错、搞反。

(13) 如果 g•f 是内射，那么 g, f 都是内射。这个结论是否正确？为什么？（6 分）

这道题是教材上的内容。如果 g•f 是内射，那么 f 一定是内射，但 g 不一定是内射。

对于 f 是内射的说明很简单，如果 f 不是内射，那么在定义域内必然存在两个不相同的元素，a 和 b, 满足 f(a)=f(b), 于是就有了 gf（a） = gf(b)，说明 gf 也不是内射；

G 不是内射只要举个反例即可。这种反例课堂上也讲过。但是，对于 f,g 是不是内射的理由叙述不清，说不到点子上。其实，举反例最简单的说

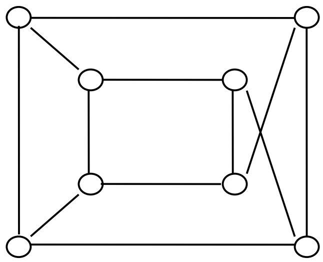
明方法就是画一个特殊的函数对应图形，一目了然。

(14) 集合 A = {a, b, c}上的关系：R = { (a, a), (a, b), (a, c), (b, b), (c, c) }；判断 R 是否为偏序，并说明理由；如果是偏序，请给出相应的次序图（HASSE 图）；并进一步判断是不是全序？（7 分）

解答：这个关系 R 里面元素很少，只要画出相应的关系图，对照关系图，说明 R 分别满足自反性、对称性与反对称性，就能说明 R 是偏序；
HASSE 图很简单，画出来就可以；
由于 b,c 两个元素不可比较，所有不是全序。

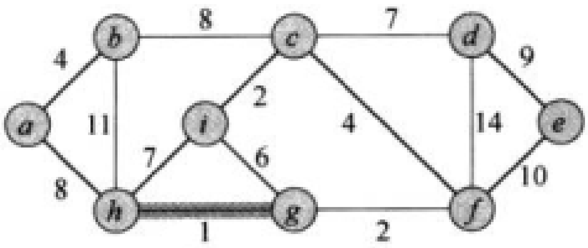
出现的问题：有些同学只讲结论不给理由。必如说，为什么偏序、不是全序，不给任何说明；还有同学画出的 HASSE 里面的点不是集合 A 中的元素，而是序对（如：(a,a),(ab)之类的）；再就是有些人的 HASSE 图没有体现序的关系（上下特征），是水平的。

(15) 下图是否是二分图、欧拉图、哈密顿图，并说明理由。（9 分）



解答：该图不是欧拉图，因为并非所有结点的度度数偶数；
也不是二分图，因为存在奇数长的回路，指出其中的一条奇数长的回路即可；
是哈密尔顿图；存在哈密尔顿回路，只要找出一条哈密尔顿回路即可；

(16) 求下图的最小生成树：（6分）




这道题无论是用普林算法还是 KRUSKAL 算法都可以，寻找出一棵最小生成树即可；　当然最后写出寻找出每一条边的过程序列；

这道题是基础题，没有任何难度和技巧，依然有人得 0 分，还不少。

| 得分 | 评卷人 |
|---|---|
| | |

**四.证明题（每小题 10 分，共 30 分）**

(18) 用“形式证明”的方法证明：

甲或乙是劳动模范。如果甲是劳动模范，则工会会贴出宣传海报。如果乙是劳动模范，则丙也是劳动模范。工会没有贴出宣传海报。试问谁是劳动模范，并写出推理过程。

先符号化这里的逻辑问题，然后再推导演算.

解：　P 表示甲是劳模；Q：乙是劳模；　R：丙是劳模；S:工会贴出海报。
已知：$P\vee Q$, $P\rightarrow S$, $Q\rightarrow R$, $\neg S$.
形式证明推导过程如下：

(1)　$\neg S$　已知
(2)　$P\rightarrow S$　已知
(3)　$\neg P$　由(1)(2)得出
(4)　$P\vee Q$　已知
(5)　$Q$　由(3)(4)得出
(6)　$Q\rightarrow R$
(7)　$R$　由(5)(6)得出

所有由(5)(7)知道，乙和丙都是劳模，甲不是劳模。

有极少同学没有符号化，完全是一种语言叙述逻辑过程。　这里是考数理

逻辑， 数理逻辑就是符号逻辑。 首先就必须符号化！

(19) 若连通的简单平面图有 e 条边，v 个结点，v>2, 并且没有长度为 3 的回路，证明：$e \le 2v - 4$.

这道题是教材上的一个推论，在 PPT 里也有介绍，虽然课堂里没有给出详细证明，但大概说了一下证明思路，而且 PPT 里建议大家课后自己做一下，其证明本身并不难，只要对 e<=3v-6 性质的证明稍加修改即可。非常遗憾，这道题的得分情况并不好。 估计课后去动手证明的同学很少， 不少同学也没有认真听我课堂讲的大概思路。

教材里，PPT 里及课堂上有讲另一个类似的推论 $e \le 3v - 6$ 的证明。 教材上也有此结论 $e \le 2v - 4$ 的证明提示。
当然，需要注意的是，这个结论的证明需要分两种情况讨论:
第一种情况：当图没有围城有限区域（有限面）时，
这种情况下，不能谈每个面的度（围成这个面的边的数目），尽管有一个无限面。 所以如果只有下面第二种情况的证明，有问题了。
由于没有有限面，又是连通的平面图，那么也应该没有简单回路。 否则简单回路就会围成一些有限面。 于是这种情况下，该图一定是树。
由于是树，那么 $e = v-1$. 当 v>=3 时， $e = v-1 = 2v - 4 + (3 - v)$, $3-v <= 0$, 于是有 $e \le 2v - 4$。

绝大多数同学都没有考虑到这第一种情况（这是要扣分的，证明有缺陷）。这一个问题是我在课堂讲另一个不等式 e<=3v-6 的证明时有提到的。

第二种情况：图有有限面的情况， 这种情况下，图就会有简单回路，不再是树。
由于没有长度为 3 的简单回路，所以任一简单回路（注意：是简单回路，不是回路）的长度至少是 4（不可能是 2，因为是简单图）。 一个有限面的边界就一定是一条简单回路，所以一个有限面的度>=4; 外围的无限面涉及到的边也不少于 4;

而每条边对面的总度数的贡献最多是 2， 因为一条边不可能同时是在超过两个面中出现；于是所有区域的总度数<=2e。 （注意：这里的总度数是所有区域的总度数，不同于所有结点的总度数）

假设有 r 个面，那所有面的总度数>= 4r; 而总度数<=2e; 于是又 4r<=2e;

再利用平面图的欧拉公式： $r= e - v + 2$, 消除 r 后， 就有 $e \leq 2v - 4$

出现最多的问题是：

1. 很多很多同学把简单回路跟回路混为一谈。很多人说因为没有长度为 3 的回路，所有该图的最短回路长度为 4， 这是一个错误的结论！在该结论下的推导就都有问题了。应该是这样：因为图是简单图，所有没有单边弧，也就不存在长度为 1 的简单回路；也没有多重边，所有也不存在长度为 2 的简单回路。 一个图只要有边，就一定有回路，也一定有长度为 2，4， 6， 8 等等的回路！长度为 3 的回路在简单图里，也只有类似于三角区域。 平面图里任何一个有限面， 其边界必然是一条简单回路！ 在这道题的条件下，简单回路如果存在的话，其长度至少是 4. 所以任意一个有限区域的度（区域边界的边的数目）至少是 4 （不是说就是等于 4）。 假设区域数为 r 后，r 个区域的总度数》=4r.
2. 有些同学把问题分成两种情况讨论，一是没有回路，二是有回路。 这种分法还是把回路于简单回路搞混了。
3. 有些同学把区域的总度数跟所有结点的总度数搞混了。于是直接用握手原理直接说总度数是 2e. 这样又是错误的！ 凡是用握手原理的都是错误的。
4. 在证明何叙述过程中，很多同学有比较差的习惯（这也是基本的数学素养问题）：随意冒出一个或几个字母何符号，不加任何说明字母何符号的意义。 只要不是全世界通用、所有人都约定俗成的字母何符号，必须要有对字母符号进行说明，说明其表示什么对象才能使用！！今后的学习和工作中务必注意！
5. 不少同学跳跃太大，把证明过程中的关键理由部分都跳跃掉了：比如说，“由于没有长度为 3 的回路，所有 2e<=4r”，诸如这种类型的叙述，大打折扣，刚好把关键的几个理由都省略了。 这个地方就必须说明 4r 什么意思，”<=4r”又是说明了什么，2e 说明了什么，代表了什么等等。必须说清楚的。

(20) R、T 是集合 A 上的等价关 zai 系，证明 R∩T 也是 A 上的等价关系；如果 R、T 分别有 m、n 个不同等价类；证明 R∩T 的不同等价类的个数 ≤

mn.

为方便起见， 记 S= R∩T

这道题的第一个部分证明 R∩T 也是 A 上的等价关系 很简单，只要安装等价关系的定义验证就是。

第二个部分， 证明 R∩T 的不同等价类的个数 ≤mn 内容要多些，要做的事情如下：

(1) 需要证明 S 的每一个等价类都必然是 R 的某个等价类与 T 的某个等价类的交集（很少有同学说明了这个点，把这点证明清楚的更是少之又少。而这恰恰是证明的关键所在）!!

(2) 也需要证明 R 的任一个等价类与 T 的任一个等价类的交集如果是非空的，那么这个交集一定是 S 的一个等价类。

(3) 再说清楚 R 的 m 个等价类与 T 的 n 个等价类形成的交集只有 mn 个，其中还有可能交集为空。而 S 的等价类就是这些个非空的交集。所以 S=R∩T 最多 mn 个等价类

这道题的情况：说明大家对于等价关系的理解不够，很多同学只是记住了等价关系是一个满足三条性质的特殊关系，但并没有理解清楚等价关系、等价累到底是什么。 尽管我一再反复强调了这个部分是重要的，而且是必考的。