问题求解第二学期第二次OJ讲义

博弈论基本介绍

首先我们来介绍一些两个比较经典的游戏

Game1.“凑30”

游戏介绍

一开始有30个石头，A,B轮流取石头，每次可以取一颗或者两颗石头，取走最后一块石头的玩家获胜。

一局可能的游戏推演

当前回合	当前玩家	取石头数目	剩余石头
1	A	1	29
2	B	2	27
3	A	2	25
4	B	1	24
5	A	1	23
6	B	2	21
7	A	2	19
8	B	1	18
9	A	2	16
10	B	1	15
11	A	1	14
12	B	2	12

当前回合	当前玩家	取石头数目	剩余石头
13	A	2	10
14	B	1	9
15	A	2	7
16	B	1	6
17	A	1	5
18	B	2	3
19	A	2	1
20	B	1	0

简要推演

最后取走一块石头的人会获胜，也就是说，取石头到1个或2个的情况会输，而如果剩下3颗石头，那么不管怎么样，一定会取到剩下1个或2个，也就是说取到剩下3颗石头的人一定会赢（换句话说，当石头剩下3个时，当前回合取石头的玩家会输），那么取石头到剩下4个或5个的人会输，因为这样做会使得下一个玩家取石头到剩下3个，以此类推，剩下$3k$个石头时，当前回合取石头的玩家会输，否则将会获胜

简要总结

我们把每一回合的状态分成2种

- **状态1：**剩下的石头为3的倍数
- **状态2：**剩下的石头不为3的倍数

我们会发现，最终胜利的状态为状态2（轮到你时，剩下一颗或两颗石头)，也就是说，**获胜的必要条件是处于状态2**。而当位于状态1时，不管怎么取，都只能达到状态2，位于状态2时，**有取到状态1的方法**，也有取到状态2的方法**（就算没有取到状态2的方法也没有关系）**。也就是说，当玩家位于状态1时，其本质上无法做出决定，不管做出什么决定，都是由状态1达到状态2，而玩家位于状态2时，他**可以**让对手处在状态1，这样反复推演，初始位于状态1的玩家一定会输，位于状态2的玩家一定会赢，因为状态2的玩家可以让对方一直处于状态1中，而状态1是不能赢游戏的，而游戏一定会结束。

Game2."Nim游戏"

游戏介绍

一共有n堆石子，每一堆初始分别有$a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n$颗石子，两人轮流取石子，每个玩家每次只能取**同一堆**里**任意数目**的石子，但不能不取，取走最后一颗石子的人获胜。

一局可能的游戏推演

假设初始情况为，8堆石子，每堆分别为8,7,6,5,4,3,2,1个

当前回合	当前玩家	取石头堆号	取石头数目	剩余石头
1	A	1	8	0,7,6,5,4,3,2,1
2	B	2	5	0,2,6,5,4,3,2,1
3	A	3	3	0,2,3,5,4,3,2,1
4	B	8	1	0,2,3,5,4,3,2,0
5	A	3	1	0,2,2,5,4,3,2,0
6	B	4	3	0,2,2,2,4,3,2,0
7	A	5	1	0,2,2,2,3,3,2,0
8	B	2	1	0,1,2,2,3,3,2,0
9	A	5	3	0,1,2,2,0,3,2,0
10	B	2	1	0,0,2,2,0,3,2,0
11	A	6	1	0,0,2,2,0,2,2,0
12	B	3	2	0,0,0,2,0,2,2,0
13	A	4	2	0,0,0,0,0,2,2,0
14	B	6	2	0,0,0,0,0,0,2,0
15	A	7	2	0,0,0,0,0,0,0,0

简要推演

我们发现，当只剩下一堆时，当前回合玩家获胜，也就是说，当不得不取到只剩一堆时，才会失败，即当剩下两堆(1,1)时，当前玩家一定失败，由此可以推出，$(1, x), x > 1$或$(1, 1, x)$时，当前回合玩家获胜，从第一种状态推导，$(2, 2)$时玩家一定会输，由此推出$(2, x), x > 2$时，玩家获胜，从这条线可以推出(x, x)状态下当前玩家失败，(y, x, x)以及$(x, y), x \neq y$时，当前玩家获胜。从(y, x, x)状态继续推导将会有些麻烦，因此直接上一个“匪夷所思”的结论

简要总结

记剩下的石子个数分别为$a_1, a_2, ..., a_n$，记$k = a_1 \bigoplus a_2 \bigoplus a_3 \bigoplus, ..., \bigoplus a_n$

我们把每一回合的状态分成2种

- **状态1：** $a_1 \bigoplus a_2 \bigoplus a_3 \bigoplus, ..., \bigoplus a_n = 0$
- **状态2：** $a_1 \bigoplus a_2 \bigoplus a_3 \bigoplus, ..., \bigoplus a_n \neq 0$

我们发现，想要单步获得胜利，一定是剩下一堆，也就是说，**处于状态2是最终胜利的必要条件**，当处在状态1时，不管怎么取，假设取走的一堆中原来有a个，取走后有b个，那么异或值会变成$a \bigoplus b \neq 0$，一定会处在状态2，接下来说明当处于状态2时，有一种取法，使得结果为状态1。

我们记k二进制下的最高位为d，即$2^d \leq k < 2^{d+1}$，由于$k = a_1 \bigoplus a_2 \bigoplus a_3 \bigoplus, ..., \bigoplus a_n$，因此一定有某一堆的第$d$位为1，假设它为$a_i$，则从第i堆中取到$a_i \bigoplus k$个石子，因为$a_i \bigoplus k$的第$d$位之前和$a_i$相同，而第$d$位由1变成0，因此$a_i \bigoplus k \leq a_i$成立，这是一个合法的取法，且取完之后,$k' = k \bigoplus (a_i \bigoplus k) \bigoplus a_i = 0$

，处于状态1，因此如Game1的结论，当前处于状态2，是**最优决策下**获得胜利的充分条件。

两个Game带来的启发

我们可以试着找到一个当前游戏局势的函数f，且满足以下条件，最终胜利的必要条件为$f(\text{状态}) = 1$，且$f(\text{状态}) = 1$时，存在某一种操作，使得$f(\text{下一状态}) \neq 1$，$f(\text{状态}) \neq 1$时，不管进行什么操作,都有$f(\text{下一状态}) = 1$，聪明的同学可以试着寻找一种这样的函数，如果找不到，可以使用类似动态规划的方式，判断当前状态是必胜状态还是必败状态，一个状态是必胜状态的充要条件是任意一个它能单步到达的其他状态是必败状态，反之则为必败状态。

进一步探索

https://www.cnblogs.com/candy99/p/6548836.html

https://zhuanlan.zhihu.com/p/437746506

后面两题是较为典型的模板题，大家可以先想想怎么处理（需要进行预处理，暴力做法目前是不合时宜的)