编程基础 III
Lambda演算

刘 钦

Reference

- https://github.com/txyyss/Lambda-Calculus/releases

Outline

- Lambda演算定义
- 算术计算与逻辑谓词
- 递归与Y Combinator
- 有序对

Outline

- Lambda演算定义
- 算术计算与逻辑谓词
- 递归与Y Combinator
- 有序对

Lamdar 演算

- 形式化地，我们从一个标识符（identifier）的可数无穷集合开始，比如{a, b, c, ..., x, y, z, x1, x2, ...}，则所有的lambda表达式可以通过下述以BNF范式表达的上下文无关文法描述：
  - <表达式> ::= <标识符>
  - <表达式> ::=(λ<标识符> .<表达式>)
  - <表达式> ::=(<表达式> <表达式>)
- 头两条规则用来生成函数，而第三条描述了函数是如何作用在参数上的。
- 例：
  - (λ x. 2x)
  - (λ x y. x+y) a b   其实科里化（Currying）后变为$(((\lambda x.(\lambda y.(y+x)))\ a)\ b)$单参数的Larmdar演算

定义 1. (λ 项) 假设我们有一个无穷的字符串集合,里面的元素被称为变量(和程序语言中变量
同,这里就是指字符串本身)。那么 λ 项定义如下:

1. 所有的变量都是 λ 项(名为原子);
2. 若 M 和 N 是 λ 项,那么 (MN) 也是 λ 项(名为应用)
3. 若 M 是 λ 项而 ϕ 是一个变量,那么 $(\lambda\phi.M)$ 也是 λ 项(名为抽象)。

形式化定义

lambda 项

示例 1.（一些 λ 项） 下面这些都是 λ 项:

$$(\lambda x.(x\,y)) \qquad (x(\lambda x.(\lambda x.x))) \qquad ((((a\,b)\,c)\,d)\,e)$$

$$(((\lambda x.(\lambda y.(y\,x)))\,a)\,b) \qquad ((\lambda y.y)\,(\lambda x.(x\,y))) \qquad (\lambda x.(y\,z))$$

符号约定 1 - 省略

符号约定 1. 本文中我们用大写英文字母表示任意 λ 项，用除 λ 以外的小写希腊字母如 ϕ, ψ 等表示任意 λ 项中的变量。

对于括号，则有如下的省略规定：

1. λ 项中最外层的括号可以省略，如 $(\lambda x.x)$ 可以省略表示为 $\lambda x.x$；
2. 左结合的应用型的 λ 项，如 $(((M\,N)\,P)\,Q)$，括号可以省略，表示为 $M\,N\,P\,Q$；
3. 抽象型的 λ 项 $(\lambda\phi.M)$ 中，M 最外层的括号可以省略，如 $\lambda x.(y\,z)$ 可以省略为 $\lambda x.y\,z$。

也就是说，我们把省略形式视同定义 1 中的 λ 项。

示例 2.（省略表示） 下面给出了一些省略表示的 λ 项。

省略表示	完整的 λ 项
$\lambda x.\lambda y.\boxed{y\,x\,a\,b}$	$(\lambda x.(\lambda y.(((y\,x)\,a)\,b)))$
$(\lambda x.\lambda y.y\,x)\,a\,b$	$(((\lambda x.(\lambda y.(y\,x)))\,a)\,b)$
$\lambda g.(\lambda x.g\,(x\,x))\,\lambda x.g\,(x\,x)$	$(\lambda g.((\lambda x.(g\,(x\,x)))\,(\lambda x.(g\,(x\,x)))))$
$\lambda x.\lambda y.a\,b\,\lambda z.z$	$(\lambda x.(\lambda y.((a\,b)\,(\lambda z.z))))$

自由变量和组合子

定义 2.（语法全等） 我们用恒等号 “≡” 表示两个 λ 项完全相同。换句话说

$$M \equiv N$$

表示 M 和 N 有完全相同的结构，且对应位置上的变量也完全相同。这意味着若 $MN \equiv PQ$ 则 $M \equiv P$ 且 $N \equiv Q$，若 $\lambda\phi.M \equiv \lambda\psi.P$ 则 $\phi \equiv \psi$ 且 $M \equiv P$。

定义 3.（自由变量） 对一个 λ 项 P，我们可以定义 P 中*自由变量*的集合 $\mathrm{FV}(P)$ 如下：

1. $\mathrm{FV}(\phi) = \{\phi\}$
2. $\mathrm{FV}(\lambda\phi.M) = \mathrm{FV}(M) \setminus \{\phi\}$
3. $\mathrm{FV}(MN) = \mathrm{FV}(M) \cup \mathrm{FV}(N)$

phai被 控制了，
自由变量只剩下M

从第 2 可以看出抽象 $\lambda\phi.M$ 中的变量 ϕ 是要从 M 中被排除出自由变量这个集合的。若 M 中有 ϕ，我们可以说它是被*约束*的。据此可以进一步定义*约束变量*集合。值得注意的是，对同一个 λ 项来说，这两个集合的交集未必为空。

示例 4.（自由变量）

λ 项 P	自由变量集合 $\mathrm{FV}(P)$
$\lambda x.\lambda y.x\,y\,a\,b$	$\{a, b\}$
$a\,b\,c\,d$	$\{a, b, c, d\}$
$x\,y\,\lambda y.\lambda x.x$	$\{x, y\}$

上面最后一个例子里，最左边的 x, y 是自由变量，而最右侧的 x 则是约束变量。若对 λ 项 P 有 $\mathrm{FV}(P) = \varnothing$，则称 P 是*封闭*的，这样的 P 又称为**组合子**。

结果已经全部由参数定义了，
不会有自由变量来影响结果

演算公理系统

- 置换公理(alpha 变换)
  - λ xy.x+y => λab.a+b
  - lambda x y. x + y => lambda a b. a + b
- 代入公理（beta 规约）
  - (λ xy. x+y) a b=>a+b
  - λ y.(λ x. x+y a) b
- 例如：
  - (λx.λy.x - y) 7 2与(λy.7 - y) 2与7 - 2是等价的

定义 6. （α **变换和** α **等价**）设 $\lambda\phi.M$ 出现在一个 λ 项 P 中，且设 $\psi \notin \mathrm{FV}(M)$，那么把 $\lambda\phi.M$ 替换成

$$\lambda\psi.[\psi/\phi]M$$

如 f（x）=x +y， 可以把x替换为z，
结果等价。但是不能把x替换为y

的操作被称为 P 的 α 变换。当且仅当若 P 经过有限步(包括零步)α 变换后，得到新的 λ 项 Q，则我们可以称 P 与 Q 是 α 等价的，又写作

$$P \quad \equiv_\alpha \quad Q$$

alpha 变换

定义 7. (*β* **规约**)形如

$$(\lambda\phi.M)\,N$$

的 λ 项被称为 β 可约式,对应的项

$$[N/\phi]\,M$$

则称为 β 缩减项。当 P 中含有 $(\lambda\phi.M)\,N$ 时,我们可以把 P 中的 $(\lambda\phi.M)\,N$ 整体替换成 $[N/\phi]\,M$,用 R 指称替换后的得到的项,那么我们说 P 被 β 缩减为 R,写做:

$$P \ \triangleright_{1\beta}\ R$$

当 P 经过有限步(包括零步)的 β 缩减后得到 Q,则称 P 被 β 规约到 Q,写做:

$$P \ \triangleright_{\beta}\ Q$$

beta 规约

练习

- $(\lambda\ x.\ x\ (x\ y))\ m$
- $(\lambda\ x.\ y)\ n$
- $(\lambda\ x.\ (\lambda\ y.\ y\ x)\ z)\ v$
- $(\lambda\ x.\ x\ x)(\lambda\ x.\ x\ x)$
- $(\lambda\ x.\ x\ x\ y)(\lambda\ x.\ x\ x\ y)$

beta规约不一定越规越小，
也可以越规越长

定理

定理 1. 若 $M \equiv_\alpha M'$ 且 $N \equiv_\alpha N'$, 则 $[N/x]M \equiv_\alpha [N'/x]M'$

定理 2. (***Church–Rosser* 定理**) 若 $P \rhd_\beta M$ 且 $P \rhd_\beta N$, 则存在一个 λ 项 T 使得

$$M \rhd_\beta T \quad \text{且} \quad N \rhd_\beta T.$$

定理 3. 若 P 有 β 范式, 则该范式在模 $\equiv_\alpha$ 的意义下唯一;也就是说若 P 有 β 范式 M 和 N, 则 $M \equiv_\alpha N$。

定理 4. 对 P 的总是先 β 缩减最左侧最外侧的 β 可约式, 若这个过程能无限进行下去, 那么对 P 的所有任意顺序的规约都能无穷进行下去。

定理 5. λ 项是否有 β 范式是不可判定的。

符号约定 2

符号约定 2. 本文中，我们用粗体的大写字母及由它们组成的字符串代表具体的组合子，不同的粗体字母字符串如不做特殊说明，一般表示不同的组合子。当它们出现在 λ 项中时，视同对应的组合子整体出现在 λ 项中。

用粗体大写字母及其字符串代表组合子，可用等号 “=” 表示。比如想用 $\mathbf{M}$ 代表 $\lambda x.x$，可写作：$\mathbf{M} = \lambda x.x$。

简单例子

- 1. 定义$\mathbf{I}=\lambda x.x$,则$\mathbf{I}a\equiv(\lambda x.x)a \triangleright_\beta a$。
- 2. 定义$\mathbf{SWAP}=\lambda x.\lambda y.yx$,则$\mathbf{SWAP}ab\equiv(\lambda x.\lambda y.yx)ab \triangleright_\beta ba$
- 3. 定义 $\mathbf{S} = \lambda x.\lambda y.\lambda z.xz(yz)$,则 $\mathbf{S}\ a\ b\ c \equiv (\lambda x.\lambda y.\lambda z.xz(yz))\ a\ b\ c \triangleright_\beta a\ c\ (b\ c)$

示例

- Lambda> I = \x.x
- Lambda> I a
- a
- Lambda> SWAP = \x.\y.y x
- Lambda> SWAP a b
- b a
- Lambda> S = \x.\y.\z.x z(y z)
- Lambda> S a b c
  a c (b c)
- Lambda> I = S I
- Lambda> I m n
- n (m n)

L = S I； \X \Y \Z.X Z(Y Z) = X Z (Y Z)； 带入I m n ， 得 I n(m n)；
又因为I是单位元，所以得 n(m n)

至今

- 人们至今并没有找到更强的生成函数的操作，没有找到更强的计算模型，也没有找到直觉可计算的函数不属于递归函数集和图灵可计算函数集，那么自然就有理由假设
  - 递归函数集 = 图灵可计算函数集 = 直觉可计算的函数集合
- 从而有理由用递归函数集和图灵可计算函数集，来定义可计算函数的集合。因此大多数数学家和计算机科学家认同丘奇-图灵论题也就不足为奇了。
- 由于整数可以归结为自然数，有理数可以用“整数对”去表示，而实数又可以用有理数去逼近，因此，现代数字计算机可以计算的本质上都是递归函数（图灵可计算函数）；非递归函数则是计算机不可计算的。

Outline

- Lambda演算定义
- 算术计算与逻辑谓词
- 递归与Y Combinator
- 有序对

“模拟”自然数

2+3： PLUS TWO THREE =(\m.\n.m SUCC n) TWO THREE = (TWO换m，THREE换n) TWO SUCC THREE = \f.\x.f(f(x)) SUCC THREE = (SUCC换f，THREE换x) = SUCC(SUCC (THREE)) = SUCC(FOUR) = FIVE

- **ZERO** $= \lambda f.\lambda x.x$
- **SUCC** $= \lambda n.\lambda f.\lambda x.f\,(n\ f\ x)$
- **PLUS** $= \lambda m.\lambda n.m$ **SUCC** n
- **MULT** $= \lambda m.\lambda n.\lambda f.m\,(n\ f)$
- **POW** $= \lambda b.\lambda e.e\ b$
- **PRED** $= \lambda n.\lambda f.\lambda x.n\,(\lambda g.\lambda \mathrm{h}.\mathrm{h}\,(g\ f))\,(\lambda u.x)\,(\lambda u.u)$
- **SUB** $= \lambda m.\lambda n.n$ **PRED** m

ONE = SUCC ZERO = /n./f./x.f(n f x) \f.\x.x = (ZERO全替换n) \f.\x.f(\f.\x.x f x) = \f.\x.f(x)

TWO = SUCC(SUCC ZERO) = ... = \f.\x.f(f x)
可见有几个f就代表正整数几

结果

- 定义
  - Lambda> ZERO = \f.\x.x
  - Lambda> SUCC = \n.\f.\x.f (n f x)
- 示例
  - Lambda> SUCC ZERO
  - \n.\f.\x.f (n f x) \f.\x.x
  - \f.\x.f (\f.\x.x) f x
  - \f.\x.f x
  - Lambda> SUCC (SUCC ZERO)
  - \f.\x.f (f x)
  - Lambda> SUCC(SUCC (SUCC ZERO))
  - \f.\x.f (f (f x))
  - Lambda> SUCC(SUCC(SUCC (SUCC ZERO)))
  - \f.\x.f (f (f (f x)))
- 定义
  - Lambda> ONE = SUCC ZERO
  - Lambda> TWO = SUCC ONE
  - Lambda> THREE = SUCC TWO
  - Lambda> FOUR = SUCC THREE
- 示例
  - Lambda> PLUS TWO THREE
  - \f.\x.f (f (f (f (f x))))
  - Lambda> POW TWO FOUR
  - \x.\a.x (x (x (x (x (x (x (x (x (x (x (x (x (x (x (x a)))))))))))))))
  - Lambda> MULT THREE TWO
  - \f.\x.f (f (f (f (f (f x)))))
  - Lambda> SUB FOUR TWO
  - \f.\x.f (f x)
  - Lambda> PRED ONE
  - \f.\x.x

“模拟”逻辑

- 定义
    - Lambda> TRUE = \x.\y.x
    - Lambda> FALSE = \x.\y.y
- 逻辑
    - Lambda> AND = \p.\q.p q p
    - Lambda> OR = \p.\q.p p q
    - Lambda> NOT = \p.\a.\b.p b a
    - Lambda> IF = \p.\a.\b.p a b
- 示例
- Lambda> AND TRUE FALSE
- \x.\y.y
- Lambda> AND TRUE TRUE
- \x.\y.x
- Lambda> OR TRUE FALSE
- \x.\y.x
- Lambda> NOT TRUE
- \a.\b.b
- Lambda> NOT (NOT TRUE)
- \a.\b.a
- Lambda> IF TRUE a b
- a
- Lambda> IF FALSE a b
- b
- Lambda> IF (OR FALSE FALSE) a b
- b

“模拟”谓词

- 定义
  - Lambda> ISZERO = \n.n (\x.FALSE) TRUE
  - Lambda> LEQ = \m.\n.ISZERO (SUB m n)
  - Lambda> EQ = \m.\n. AND (LEQ m n) (LEQ n m)
- 示例
  - Lambda> ISZERO TWO
  - \x.\y.y
  - Lambda> ISZERO ZERO
  - \x.\y.x
  - Lambda> LEQ ONE ONE
  - \x.\y.x
  - Lambda> LEQ TWO ONE
  - \x.\y.y
  - Lambda> IF (EQ ONE TWO) a b
  - b

“模拟”函数

- Lambda> MAX = \m.\n.IF (LEQ m n) n m
- Lambda> MAX ONE TWO
- \f.\x.f (f x)
- Lambda> MAX FOUR TWO
- \f.\x.f (f (f (f x)))
- Lambda> MIN = \m.\n.IF (LEQ m n) m n
- Lambda> MIN TWO THREE
- \f.\x.f (f x)

Outline

- Lambda演算定义
- 算术计算与逻辑谓词
- 递归与Y Combinator
- 有序对

“模拟”递归

- 阶乘
  - $\mathbf{FACT} = \lambda n.\mathbf{IF}\ (\mathbf{ISZERO}\ n)\ \mathbf{ONE}\ (\mathbf{MULT}\ n\ (\mathbf{FACT}\ (\mathbf{PRED}\ n)))$
- 有一个问题
  - FACT在Lamdar运算中不能递归定义

多一个参数

- Lambda> FACT1 = \f.\n.IF (ISZERO n) ONE (MULT n (f f (PRED n)))
- Lambda> FACT = FACT1 FACT1
- Lambda> FACT THREE
- \f.\x.f (f (f (f (f (f x)))))
- Lambda> FACT FOUR
  \f.\x.f (f (f (f (f (f (f (f (f (f (f (f (f (f (f (f (f (f (f (f (f (f (f (f
  x)))))))))))))))))))))))

定义一个组合子

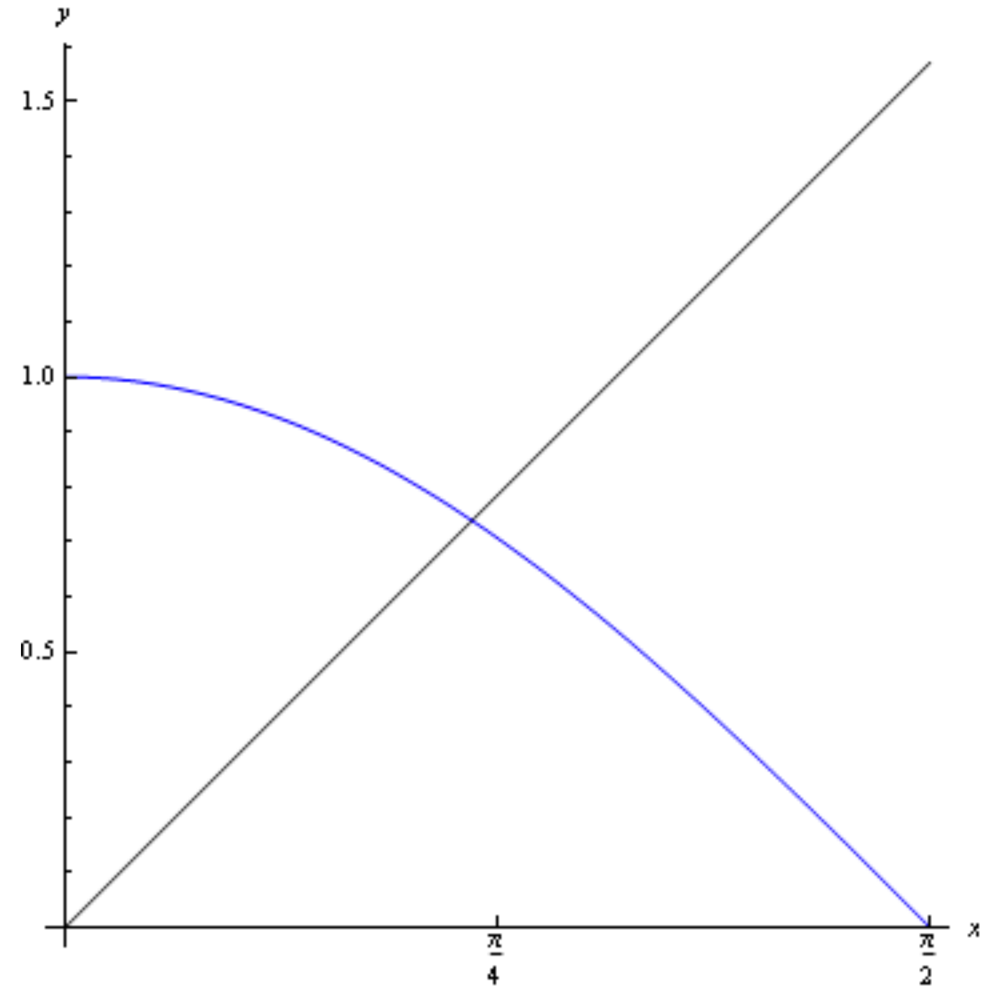
- Lambda> W = \x.x x
- Lambda> FACTD = W (\f.\n.IF (ISZERO n) ONE (MULT n (f f (PRED n))))
- Lambda> FACTD THREE
- \f.\x.f (f (f (f (f (f x)))))

双重应用

- Lambda> ADD = W (\f.\n.\m.IF (ISZERO m) n (f f (SUCC n) (PRED m)))
- Lambda> ADD TWO FOUR
- \f.\x.f (f (f (f (f (f x)))))
- Lambda> ADD FOUR FOUR
- \f.\x.f (f (f (f (f (f (f (f x)))))))

我们的目的是什么?

- 只用一重应用来定义递归函数。



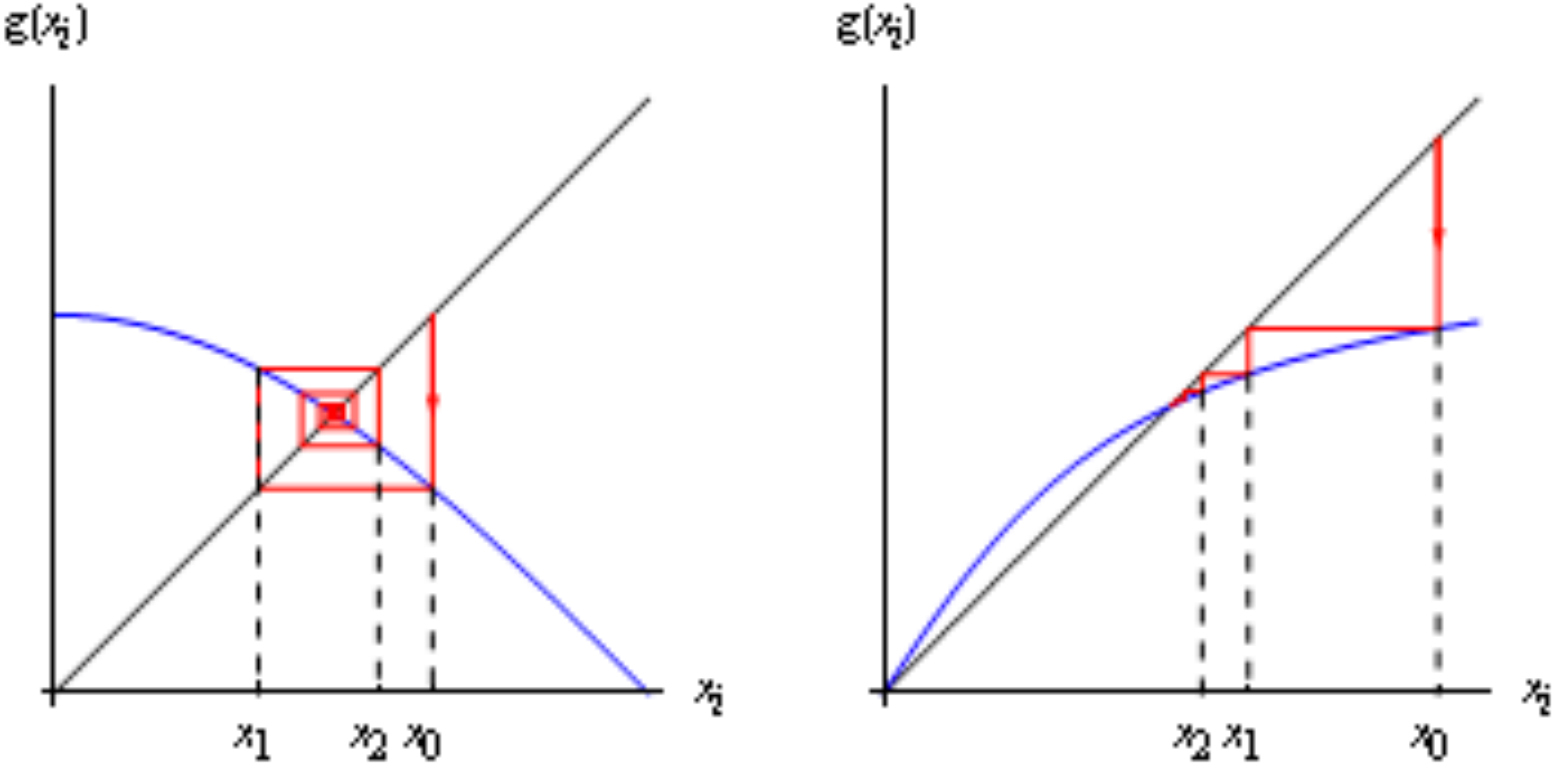
Algorithm - Fixed Point Iteration Scheme

Given an equation $f(x) = 0$
Convert $f(x) = 0$ into the form $x = g(x)$
Let the initial guess be x_0
Do

$$x_{i+1} = g(x_i)$$

while (none of the convergence criterion C1 or C2 is met)

不动点



不动点迭代收敛的过程

Y Combinator

- 不动点
  - f(x) = x
- Y Combinator
  - Lambda> :set +hold
  - Lambda> Y
  - \g.(\x.g (x x)) \x.g (x x)

YF就是F的不动点

- $\mathbf{Y} F$
- $\equiv \quad (\lambda g.(\lambda x.g\ (x\ x))\ \lambda x.g\ (x\ x))\ F$
- $=_\beta \ (\lambda x.F\ (x\ x))\ \lambda x.F\ (x\ x)$
- $=_\beta \ F\ ((\lambda x.F\ (x\ x))\ \lambda x.F\ (x\ x))$
- $=_\beta \ F(\mathbf{Y} F)$//Y的定义带入F

利用不动点消除两重应用

```
Lambda> FACT2 = \f.\n.IF (ISZERO n) ONE (MULT n (f (PRED n)))
Lambda> FACTY = Y FACT2
Lambda> FACTY THREE
\f.\x.f (f (f (f (f (f x)))))
Lambda> FACTY FOUR
\f.\x.f (f (f (f (f (f (f (f (f (f (f (f (f (f (f (f (f (f (f (f (f (f
(f (f x)))))))))))))))))))))))
```

利用不动点消除两重应用

- **FACT THREE**
- $=_\beta$ **Y FACT2 THREE** (由定义)
- $=_\beta$ **FACT2 (Y FACT2) THREE** (因为 **Y** $F =_\beta F$ (**Y** F))
- $=_\beta$ **IF (ISZERO THREE) ONE (MULT THREE (Y FACT2 TWO))**
- $=_\beta$ **MULT THREE (Y FACT2 TWO)**

练习

- $R \equiv (\lambda\, r\, n\, .\, Z\, n\, 0(n\, S(r(P\, n)))))$
  - This definition tells us that the number n is tested: if it is zero the result of the sum is zero. If n is not zero, then the successor function is applied n times to the recursive call (the argument r) of the function applied to the predecessor of n.
- 规约YR3

图灵不动点组合子

- Lambda> T = (\x.\y.y (x x y)) \x.\y.y (x x y)
- Lambda> FACTT = T FACT2
- Lambda> FACTT FOUR
  \f.\x.f (f (f (f (f (f (f (f (f (f (f (f (f (f (f (f (f (f (f (f (f (f (f (f
  x)))))))))))))))))))))))

Outline

- Lambda演算定义
- 算术计算与逻辑谓词
- 递归与Y Combinator
- 有序对

还记得对数据抽象的有序对

构建有序对

- 合并一个表 合并
  - Lambda> CONS = \x.\y.\f. f x y
- 取出表的第一个元素 取头
  - Lambda> CAR = \p.p TRUE
- 去除表的第一个元素 去头
  - Lambda> CDR = \p.p FALSE
- 空的有序对
  - Lambda> NIL = \x. TRUE
- 谓词用于判断一个有序对是否为空
  - Lambda> NULL = \p.p (\x.\y.FALSE)

验证这些基本定义

- Lambda> CONS a (CONS b (CONS c NIL))
- \f.f a \f.f b \f.f c \x.\x.\y.x
- Lambda> CAR (CONS a (CONS b (CONS c NIL)))
- a
- Lambda> CDR (CONS a (CONS b (CONS c NIL)))
- \f.f b \f.f c \x.\x.\y.x
- Lambda> CAR (CDR (CONS a (CONS b (CONS c NIL))))
- b
- Lambda> NULL (CDR (CONS a (CONS b (CONS c NIL))))
- \x.\y.y
- Lambda> NULL NIL
- \x.\y.x

验证第二个：\P.P T(...) =(...)换P: (CONS a (...)) T =展开这个CONSE: \x.\y.\f f x y a (...
) T = T a (...) = \x.\y.x a (...)
= ... = a

求NULL CONS C NIL:
= \p p(\x.\y.F) CONS C NIL =CONSE C NIL换P: CONS C NIL(\x.\y.F) =展开CONS: \x .
\y.\f
f x y c NIL (\x.\y.F) = \X.\Y.f c NIL =带入c和NIL,无论如何结果都是 F

定义长度函数

- Lambda> LENGTH = Y (\g.\c.\x. NULL x c (g (SUCC c) (CDR x))) ZERO
- Lambda> LENGTH NIL

=Y F ZERO NIL =不动点： F(Y F) ZERO NIL = F (Y F) ZERO NIL = (Y F)换g，ZERO换c，NIL换x： ZERO ??

- \f.\x.x

求LENGTH (CONSE C NIL) = Y F ZERO (CONS C NIL) = F (Y F) ZERO (CONSE C NIL) = (Y F) 换g，ZERO换C，（CONSE C NIL）换X： Y F ONE NIL = F(Y F) ONE NIL = ONE

- Lambda> LENGTH (CONS a (CONS b (CONS c NIL)))
- \f.\x.f (f (f x))
- Lambda> LENGTH (CONS a (CONS b (CONS c (CONS d NIL))))
- \f.\x.f (f (f (f x)))