优化理论与最优控制

讲授内容

最优控制问题的提出

最优控制问题的求解

最优控制问题的提出：飞船软着陆问题

在月球表面着陆时速度必须为零，由发动机的推力变化来完成。

问题：寻求发动机推力的最优控制规律，以便使燃料的消耗为最少。

$h(t)$ —— 高度　　$v(t)$ —— 垂直速度

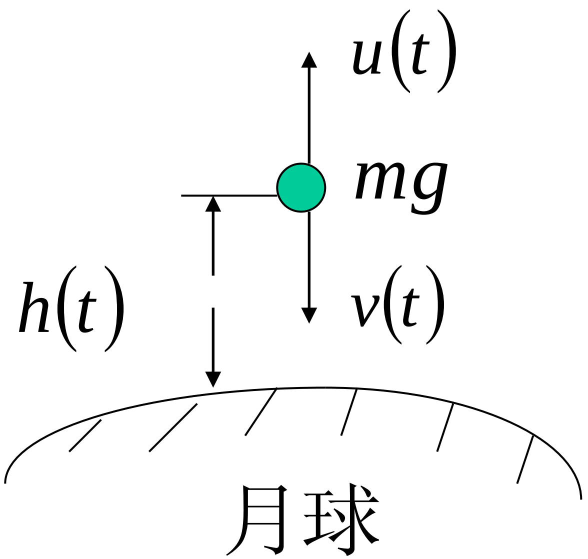
$u(t)$ —— 发动机推力

g —— 月球表面重力加速度

$m(t)$ —— 登月舱质量

M —— 登月舱的自重（不含燃料）

F —— 登月舱所载燃料质量



最优控制问题的提出：飞船软着陆问题

运动方程：

高度与速度

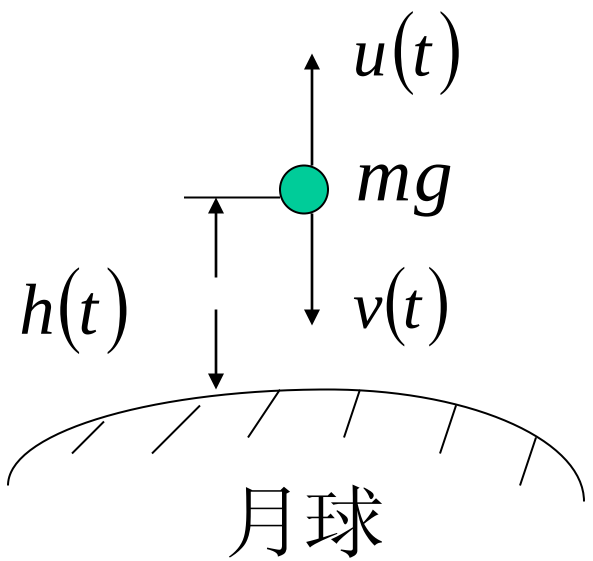
$$\dot{h}(t)=v(t)$$

力与加速度

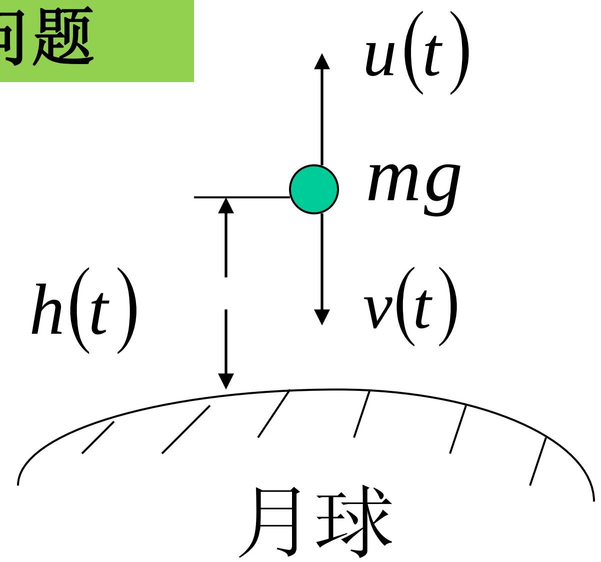
$$\dot{v}(t)=\frac{u(t)}{m(t)}-g$$

力与燃料消耗

$$\dot{m}(t)=-ku(t)$$



最优控制问题的提出：飞船软着陆问题



初始条件：

初始时间 $t_0 = 0$

末端时间 t_f

$$m(0) = M + F = m_0 \Longrightarrow$$ 登月舱初始质量

$$h(0) = h_0 \Longrightarrow$$ 初始高度

$$v(0) = v_0 \Longrightarrow$$ 初始速度

最优控制问题的提出：飞船软着陆问题

终端条件

$$h(t_f) = 0$$

$$v(t_f) = 0$$

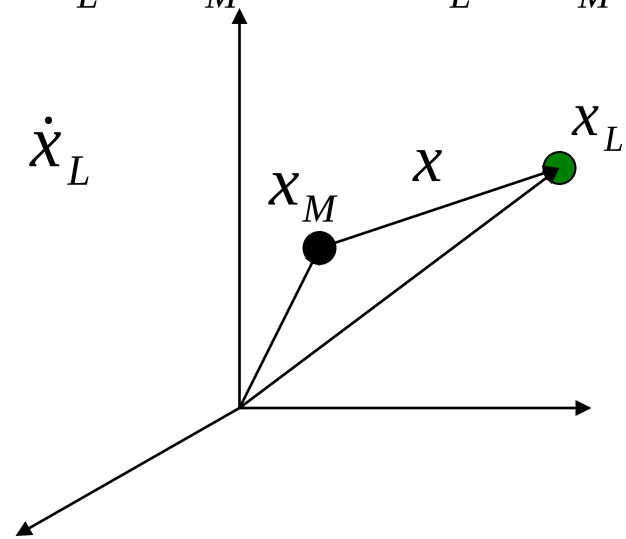
约束条件　（发动机最大推力）　$0 \le u(t) \le \alpha$

性能指标是使燃料消耗为最小　$J = m(t_f)$

我们的任务是寻求发动机推力的最优控制规律$u(t)$,它应满足约束条件，使飞船由初始状态转移到终端状态，并且使性能指标为极值。

最优控制问题的提出：防御拦截问题

$$x = x_L - x_M \qquad v = \dot{x}_L - \dot{x}_M$$



在惯性坐标系内，拦截器质心的位置矢量和速度矢量为： x_L $\dot{x}_L$

目标质心的位置矢量和速度矢量为： x_M $\dot{x}_M$

$U(t)$为拦截器的推力

则拦截器与目标的相对运动方程为：

$$\dot{x} = v$$

$$\dot{v} = a(t) + \frac{U(t)}{m(t)}$$

$$\dot{m} = -\frac{U(t)}{c}$$

最优控制问题的提出：防御拦截问题

初始条件：　$x(t_0)=x_0 \quad v(t_0)=v_0 \quad m(t_0)=m_0$

终端条件：　$x(t_f)=0 \quad v(t_f)$任意　$m(t_f)\le m_0$

约束条件：　$0\le U(t)\le \max U(t)$

如果要求拦截过程的时间尽量短，又要求燃料消耗尽量少，则性能指标：

$$J=\int_{t_0}^{t_f}[c_1+F(t)]dt=c_1\underline{(t_f-t_0)}+c_2\underline{[m_0-m(t_f)]}$$ 为最小

最优防御拦截问题，就是选择满足约束条件的控制$U(t)$，驱使系统从初始状态出发，在某个时刻满足终端条件，且使性能指标为极值。

最优控制问题的求解

受控系统的数学模型

一阶微分方程来描述，即状态方程来描述：

$$\dot{X}(t) = f(X(t), u(t), t)$$

$X = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T$ 是**n**维状态向量　　$f(X(t), u(t), t)$为**n**维函数向量

$u = [u_1, u_2, \cdots, u_m]^T$ 为**m**维控制向量　　t为独立的时间变量

$$\dot{X}(t) = f(X(t), u(t), t) = \begin{bmatrix} f_1(X(t), u(t), t) \\ f_2(X(t), u(t), t) \\ \vdots \\ f_n(X(t), u(t), t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1(t), x_2(t) \cdots x_n(t), u_1(t), u_2(t) \cdots u_p(t), t) \\ f_2(x_1(t), x_2(t) \cdots x_n(t), u_1(t), u_2(t) \cdots u_p(t), t) \\ \vdots \\ f_n(x_1(t), x_2(t) \cdots x_n(t), u_1(t), u_2(t) \cdots u_p(t), t) \end{bmatrix}$$

线性时不变系统：$\dot{X}(\mathbf{t}) = AX(\mathbf{t}) + B\mathbf{u}(\mathbf{t})$

最优控制问题的求解

目标集

如果把状态视为n维欧氏空间中的一个点，在最优控制问题中，起始状态（初态）通常是已知的，即 $X(t_0)=X(0)$

而所达到的状态（末态）可以是状态空间中的一个点，或事先规定的范围内，对末态的要求可以用末态约束条件来表示。至于末态时刻，可以事先规定，也可以是未知的，因具体问题而异。

$$\psi[x(t_f),t_f]=0$$

最优控制问题的求解

容许控制

在实际控制问题中，大多数控制量受客观条件的限制，只能在一定范围内取值，这种限制通常可以用如下不等式约束来表示：

$$0 \le u(t) \le u_{\max} \quad 或 \left| u_i \right| \le \alpha \quad i = 1, 2 \cdots m$$

上述由控制约束所规定的点集称为控制域**U**，凡在t_0-t_f上有定义，且在控制域**U**内取值的每一个控制函数$u(t)$均称为容许控制。

最优控制问题的求解

性能指标

通常情况下，最优控制问题的性能指标形如：

$$J=\underline{\theta\left(x(t_f),t_f\right)}+\underline{\int_{t_0}^{t_f}F\left(x(t),u(t),t\right)dt}$$

其中第一项是接近目标集程度，即末态控制精度的度量，称为末值型性能指标。

第二项称为积分型性能指标，它能反映控制过程偏差在某种意义下的平均或控制过程的快速性，同时能反映燃料或能量的消耗。

最优控制问题的求解

最优控制的综合数学描述

已知受控系统的状态方程及给定的初始状态

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \qquad (1)$$

$$x(t_0) = x_0 \qquad (2)$$

规定的目标集为 $M = \{x(t_f): x(t_f) \in R^n,\ g_1(x(t_f), t_f) = 0,$

$$g_2(x(t_f), t_f) \le 0\} \qquad (3)$$

求一容许控制 $u(t) \in U, t \in [t_0, t_f]$

使系统（1）由给定初态（2）出发，在$t_f > t_0$时刻转移到目标集（3）

并使性能指标为最小

最优控制问题的求解

最优控制的综合数学描述

$$J[u(*)] = S(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t)dt \qquad (4)$$

如果问题有解，记为$u^*(t)$, $t \in [t_0, t_f]$, 则$u^*(t)$叫做最优控制或极值控制。相应的轨线$x^*(t)$叫做最优轨线，而性能指标$J^*=J[u^*(t)]$称为最优性能指标。

末值型性能指标，

反应末态控制精度

积分型性能指标，

反应控制过程偏差在某种意义上的平均或控制过程的快速性

最优控制问题的求解

最优控制是系统设计的一种方法。它所研究的中心问题是如何选择控制信号才能保证控制系统的性能在某种意义下最优(性能指标达到极值)。

从数学方面看，最优控制问题就是求解一类带有约束条件的泛函极值问题，因此这是一个变分学的问题。

最优控制问题的求解

- 最优控制问题的本质是变分学问题

$$J[u(*)] = S(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t)dt$$

- 经典变分理论　　无约束或者是开集性约束

- 极大值原理　　闭集性约束

- 动态规划　　逆向递推

最优控制问题的求解

变分法：三个基本问题

- **Lagrange问题**

$$J=\int_{t_0}^{t_f}F(x(t),\dot{x}(t),t)dt$$

- **Bolza问题**

$$J=\phi(x(t_f),t_f)+\int_{t_0}^{t_f}L(x(t),\dot{x}(t),t)dt$$

- **Mayer问题**

$$J=\theta(x(t_f),t_f)$$

最优控制问题的求解　　变分法

寻找一容许控制 $u(t)\in U, t\in[t_0,t_f]$ 使受控系统 $\dot{x}(t)=f(x(t),u(t),t)$

由初始状态 $x(t_0)=x_0$ 出发，在$t_f > t_0$ 时刻转移到目标集

$M: g_1(x(t_f),t_f)=0, g_2(x(t_f),t_f)\le 0\}$　并使性能指标 $J=\varphi(x(t_f),t_f)+\int_{t_0}^{t_f}L(x,u,t)dt$

为最小

Lagrange乘子函数

$f(x(t),u(t),t)-\dot{x}(t)=0$

$$J=\varphi(x(t_f),t_f)+\int_{t_0}^{t_f}\{L(x,u,t)+\lambda^T(f(x,u,t)-\dot{x})\}dt$$

Hamilton 函数（*H*）： 在求解过程中需要首先确定

无终端约束的变分问题

$x(t_f)$ 可以取任何值　t_f 固定

$$J=\varphi(x(t_f),t_f)+\int_{t_0}^{t_f}\{L(x,u,t)+\lambda^T(f(x,u,t)-\dot{x})\}dt$$

已知 $$H(x,u,\lambda,t)=L(x,u,t)+\lambda^T f(x,u,t)$$

$$J=\varphi(x(t_f),t_f)+\int_{t_0}^{t_f}\{H\left(x,u,\lambda,t\right)-\lambda^T\dot{x}\}dt$$

$$\int_{t_0}^{t_f}-\lambda^T\dot{x}(t)dt=\int_{t_0}^{t_f}\dot{\lambda}^T x(t)dt-\lambda^T x(t)\Big|_{t_0}^{t_f}$$

$$\therefore J=\varphi(x(t_f),t_f)+\int_{t_0}^{t_f}\left\{H(x,u,\lambda,t)+\dot{\lambda}^T x(t)\right\}dt-\lambda^T x(t)\Big|_{t_0}^{t_f}$$

无终端约束的变分问题

$x(t_f)$ 可以取任何值　t_f 固定

$$\therefore J=\varphi(x(t_f),t_f)+\int_{t_0}^{t_f}\left\{H(x,u,\lambda,t)+\dot{\lambda}^T x(t)\right\}dt-\lambda^T x(t)\Big|_{t_0}^{t_f}$$

$$J=\varphi(x(t_f),t_f)+\lambda^T(t_0)x(t_0)-\lambda^T(t_f)x(t_f)+\int_{t_0}^{t_f}\left\{H[x,u,\lambda,t]+\dot{\lambda}^T x(t)\right\}dt$$

$$\delta J=\underline{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x(t_f)}\right)^T\delta x(t_f)-\lambda^T(t_f)\delta x(t_f)}+\lambda^T(t_0)\delta x(t_0)$$

$$+\int_{t_0}^{t_f}[\underline{(\frac{\partial H}{\partial x})^T}\delta x+\underline{(\frac{\partial H}{\partial u})^T}\delta u+\dot{\lambda}\delta x]dt \quad = 0$$

必要条件为：

$$\underline{\dot{\lambda}=-\frac{\partial H}{\partial x}} \qquad \underline{\frac{\partial H}{\partial u}=0} \qquad \underline{\lambda(t_f)=\frac{\partial\varphi(x(t_f))}{\partial x(t_f)}}$$

无终端约束的变分问题　　最优控制 $u^*(t)$ 的确定过程

➢$x(t)$和$\lambda(t)$ 满足规范方程（正则方程）

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = f(x,u,t)$$

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\partial f^T}{\partial x}\lambda$$

➢边值条件和横截条件

$$x(t_0) = x_0$$

$$\lambda(t_f) = \frac{\partial \varphi(x(t_f),t_f)}{\partial x(t_f)}$$

➢极值条件

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

有终端约束的变分问题

已知 t_0 和 $x(t_0)=x_0$ 给定，t_f 给定，$x(t_f)$ 两个约束条件：

$$
\begin{cases}
\text{终端状态约束：} \quad g(x(t_f),t_f)=0 \qquad g\in R^q \\[2ex]
\text{状态方程约束：} \quad \dot{x}(t)=f(x,u,t)
\end{cases}
$$

性能指标为：$J=\varphi(x(t_f),t_f)+\int_{t_0}^{t_f} L(x(t),u(t),t)dt$

引入两个拉格朗日乘子向量构造辅助泛函：

$$
\begin{aligned}
J &= \varphi(x(t_f),t_f)+\gamma^T g(x(t_f),t_f) \\
&\quad +\int_{t_0}^{t_f}\{L(x,u,t)+\lambda^T[f(x,u,t)-\dot{x}]\}dt
\end{aligned}
$$

有终端约束的变分问题

$$J = \varphi(x(t_f), t_f) + \gamma^T g(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \{L(x,u,t) + \lambda^T [f(x,u,t) - \dot{x}]\} dt$$

Hamilton函数: $H(x,u,\lambda,t) = L(x,u,t) + \lambda^T f(x,u,t)$

$$J = \varphi(x(t_f), t_f) + \gamma^T g(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \{H(x,u,\lambda,t) - \lambda^T \dot{x}\} dt$$

$$\delta J = 0$$

$$J=\varphi(x(t_f),t_f)+\gamma^T g(x(t_f),t_f)+\int_{t_0}^{t_f}\{H(x,u,\lambda,t)-\lambda^T\dot{x}]\}dt$$

最优控制 *u*(t)* 的确定过程

- $x(t)$和$\lambda(t)$满足下列规范方程（正则方程）

$$\dot{\lambda}=-\frac{\partial H}{\partial x} \qquad \dot{x}=\frac{\partial H}{\partial \lambda}$$

- 边值条件和横截条件

$$x(t_0)=x_0 \qquad g(x(t_f),t_f)=0$$

$$\lambda(t_f)=[\frac{\partial \varphi}{\partial x}+(\frac{\partial g}{\partial x})^T\gamma]\Big|_{t=t_f}$$

- 极值条件

$$\frac{\partial H}{\partial u}=0$$

有终端约束的变分问题

t_f 固定		t_f 自由
$x(t_f)=x_f$ 固定	$g(x(t_f),t_f)=0$	$x(t_f)$ 自由
$\dot{x}(t)=\dfrac{\partial H}{\partial \lambda}=f(x,u,t)$	$\dot{x}(t)=\dfrac{\partial H}{\partial \lambda}=f(x,u,t)$	$\dot{x}(t)=\dfrac{\partial H}{\partial \lambda}=f(x,u,t)$
$\dot{\lambda}(t)=-\dfrac{\partial H}{\partial x}=-\dfrac{\partial L}{\partial x}-\dfrac{\partial f^T}{\partial x}\lambda$	$\dot{\lambda}(t)=-\dfrac{\partial H}{\partial x}=-\dfrac{\partial L}{\partial x}-\dfrac{\partial f^T}{\partial x}\lambda$	$\dot{\lambda}(t)=-\dfrac{\partial H}{\partial x}=-\dfrac{\partial L}{\partial x}-\dfrac{\partial f^T}{\partial x}\lambda$
$x(t_0)=x_0$	$x(t_0)=x_0$	$x(t_0)=x_0$
$x(t_f)=x_f$	$\lambda(t_f)=\dfrac{\partial \varphi}{\partial x(t_f)}+\dfrac{\partial g^T}{\partial x(t_f)}\mu$	$\lambda(t_f)=\dfrac{\partial \varphi(x(t_f),t_f)}{\partial x(t_f)}$
	$g(x(t_f),t_f)=0$	
$\dfrac{\partial H}{\partial u}=0$	$\dfrac{\partial H}{\partial u}=0$	$\dfrac{\partial H}{\partial u}=0$

$$H(x^*(t_f^*),u^*(t_f^*),\lambda(t_f^*),t_f^*)=-\frac{\partial \varphi(x^*(t_f^*),t_f^*)}{\partial t_f}$$

有终端约束的变分问题

例：已知控制系统的状态方程为：
$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = u(t)$$

目标 $J = \frac{1}{2}\int_0^1 u(t)^2 dt$ 初始条件 $x_1(0) = x_2(0) = 0$

终端约束方程 $x_1(1) + x_2(1) = 1$ 求 $x^*(t)$ 和 $u^*(t)$

解：本例属于始端固定，终端时刻固定但终端状态受约束问题，

其中：$L = \frac{1}{2}u^2$ 属于积分型性能指标，$\theta[x(t_f), t_f] = 0$

有终端约束的变分问题

终端时刻固定但终端状态受约束问题

$$g(x(t_f),t_f)=0$$

$$\dot{x}(t)=\frac{\partial H}{\partial \lambda}=f(x,u,t)$$

$$\dot{\lambda}(t)=-\frac{\partial H}{\partial x}=-\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{\partial f^T}{\partial x}\lambda$$

$$x(t_0)=x_0$$

$$\lambda(t_f)=\frac{\partial \varphi}{\partial x(t_f)}+\frac{\partial g^T}{\partial x(t_f)}\mu$$

$$g(x(t_f),t_f)=0$$

$$\frac{\partial H}{\partial u}=0$$

有终端约束的变分问题

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = u(t)$$

引入 $\lambda(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix}$

Hamilton函数:

$$H = L + \lambda^T f = \frac{1}{2}u^2 + [\lambda_1 \quad \lambda_2]\begin{bmatrix} x_2 \\ u \end{bmatrix}$$

$$H = \frac{1}{2}u^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u$$

$$H=\frac{1}{2}u^2+\lambda_1 x_2+\lambda_2 u$$

正则方程

$$\dot{\lambda}_1=-\frac{\partial H}{\partial x_1}=0 \qquad \lambda_1=c_1$$

$$\dot{\lambda}_2=-\frac{\partial H}{\partial x_2}=-\lambda_1 \qquad \lambda_2=-c_1 t+c_2$$

极值条件

$$\frac{\partial H}{\partial u}=0 \Rightarrow u+\lambda_2=0 \Rightarrow u=-\lambda_2=c_1 t-c_2$$

状态方程

$$\dot{x}_1(t)=x_2(t)\,,\quad \dot{x}_2(t)=u(t)$$

$$x_2(t)=\frac{1}{2}c_1 t^2-c_2 t+c_3 \qquad x_1(t)=\frac{1}{6}c_1 t^3-\frac{1}{2}c_2 t^2+c_3 t+c_4$$

$$\lambda_1 = c_1 \qquad \lambda_2 = -c_1 t + c_2$$

$$u = -\lambda_2 = c_1 t - c_2$$

$$x_2(t) = \frac{1}{2}c_1 t^2 - c_2 t + c_3 \qquad x_1(t) = \frac{1}{6}c_1 t^3 - \frac{1}{2}c_2 t^2 + c_3 t + c_4$$

边界条件和横截条件：

$$x_1(0) = x_2(0) = 0$$

$$x_1(1) + x_2(1) = 1$$

$$\Rightarrow \quad c_3 = c_4 = 0$$

$$4c_1 - 9c_2 = 6$$

$$\lambda(t_f) = [\frac{\partial \theta}{\partial x} + (\frac{\partial g}{\partial x})^T \gamma]\Big|_{t=t_f}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1(1) = \frac{\partial g}{\partial x_1(1)}\gamma = \gamma \quad \lambda_2(1) = \frac{\partial g}{\partial x_2(1)}\gamma = \gamma$$

$$\lambda_1(1) = \lambda_2(1)$$

$$c_1 = \frac{1}{2}c_2$$

$$c_1 = -\frac{1}{7}, \quad c_2 = -\frac{6}{7}$$

有终端约束的变分问题

最优解:

$$u^*(t) = -\frac{3}{7}(t-2)$$

$$x^*{}_1(t) = -\frac{1}{14}t^2(t-6)$$

$$x^*{}_2(t) = -\frac{3}{14}t(t-4)$$

最优控制问题的求解

极大值原理（自由末端）

古典变分法的缺陷

- 控制域无界 $\dfrac{\partial H}{\partial u}=0$
- 相关函数要有充分的可微性

设 $u(t)\in U, t\in[t_0,t_f]$ 是一容许控制。末值型性能指标函数为

$J[u(*)]=S(x(t_f))$ $x(t)$是定常系统 $\dot{x}(t)=f(x(t),u(t),t)$ $x(t_0)=x_0$

相应于$u(t)$的状态轨线，t_f为末态时刻，$x(t_f)$ 自由

则对于最优解 $u^*(t)$，$x^*(t)$必存在非零的向量函数 $\lambda(t)$满足下列

必要条件:

最优控制问题的求解

极大值原理（自由末端）

最优控制 *u**(*t*) 的确定过程

- λ(t) 满足

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H(x,\lambda,u)}{\partial x} \qquad H(x,\lambda,u) = \lambda^T(t) f(x,u)$$

- 边界条件

$$\lambda(t_f) = \frac{\partial S(x(t_f),t_f)}{\partial x(t_f)}$$

- 极值条件为

$$\boxed{\begin{aligned} &H(x^*,\lambda,u^*) = \min_{u(t)\in U} H(x^*,\lambda,u) \\ &or \quad H(x^*,\lambda,u^*) \le \underset{u(t)\in U}{} H(x^*,\lambda,u) \end{aligned}}$$

- 补充条件为

t_f自由时

$$H(x^*(t),\lambda(t),u^*(t)) = H(x^*(t_f^*),\lambda(t_f^*),u^*(t_f^*)) = 0$$

$$H(x^*(t),\lambda(t),u^*(t)) = H(x^*(t_f),\lambda(t_f),u^*(t_f)) = c$$

最优控制问题的求解

例： 设系统状态方程和初始条件为：

$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t) + u(t) \qquad x_1(0) = 1$$

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t) \qquad x_2(0) = 0$$

其中：$|u(t)| \leq \mathbf{1}$， $x(t_f)$ 自由， $t_f = 1$固定， 试求 $u^*(t)$

使性能指标 $J = x_2(t_f) = \min$

解： 本例属于末值型性能指标，末端状态自由，末端时刻固定，控制受约束的最优控制问题。

$$S[x(t_f)] = x_2(1)$$

$$H[x, u, \lambda] = \lambda_1(-x_1 + u) + \lambda_2 x_1 = -\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_1 + \lambda_1 u$$

$$H\left[x,u,\lambda\right]=\lambda_1\left(-x_1+u\right)+\lambda_2 x_1=-\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_1+\lambda_1 u$$

(1) $\lambda(t)$ 满足:

$$\dot{\lambda}=-\frac{\partial H}{\partial x} \qquad \dot{x}\left(t\right)=\frac{\partial H}{\partial \lambda}=f\left(x,u\right)$$

$$\dot{\lambda}_1=-\frac{\partial H}{\partial x_1}=\lambda_1-\lambda_2 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1\left(t\right)=c_1 e^{t}+c_2$$

$$\dot{\lambda}_2=-\frac{\partial H}{\partial x_2}=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_2\left(t\right)=c_2$$

(2) 边界与横截条件:

$$\lambda\left(t_f\right)=\frac{\partial S}{\partial x(t_f)} \qquad S[x(t_f)]=x_2\left(1\right)$$

$$\lambda_1\left(1\right)=\frac{\partial S}{\partial x_1\left(1\right)}=0 \qquad \lambda_2\left(1\right)=\frac{\partial S}{\partial x_2\left(1\right)}=1$$

$$c_1=-e^{-1} \qquad c_2=1$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1\left(t\right)=1-e^{t-1}, \quad \lambda_2\left(t\right)=1$$

(3) 极值条件：

$$\lambda_1(t)=1-e^{t-1} \qquad \lambda_2(t)=1$$

|u(t)|≤1

$$H\left(x^*,u^*,\lambda\right)=\min_{u\in\Omega} H\left(x^*,u,\lambda\right)$$

$$H[x,u,\lambda]=\lambda_1(-x_1+u)+\lambda_2 x_1=-\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_1+\lambda_1 u$$

$$H[x,u,\lambda]=(1-\lambda_1)x_1+\lambda_1 u$$

$$u^*(t)=-\mathrm{sgn}(\lambda_1)=\begin{cases}-1 & \lambda_1>0\\ 1 & \lambda_1<0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\lambda_1(t)=1-e^{t-1}>0 & \forall t\in[0,1)\\ \lambda_1(t)=0 & t=1\end{cases}$$

最优控制律：

$$u^*(t)=\begin{cases}-1 & \forall t\in[0,1) \\ 0 & t=1\end{cases}$$

动态规划

- **多级决策过程**

所谓多级决策过程，是指将一个过程按时间或空间顺序分为若干步，然后给每一步作出“决策”（在控制过程中每走一步要决定的控制步骤称为决策），以使整个过程取得最优的效果，即多次的决策最终要构成一个总的最优控制策略（最优控制方案）。

- **最优性原理**

一个多级决策过程的最优策略具有这样的性质：不管其初始状态和初始决策如何，当把其中的任何一级和状态再作为初始级和初始状态时，其余的决策对此必定也是一个最优策略。

动态规划

已知系统的状态方程：$\dot{x}(t) = f(x,u,t), x(t_0) = x_0$

性能指标：$J = S[x(t_f),t_f] + \int_{t_0}^{t_f} L(x,u,t)dt$

末端约束：$g[x(t_f)] = 0$　　控制约束：$u(t) \in \Omega$

求：在容许控制域Ω中确定最优控制*u(*t*)使系统从初始状态移到要求的终端状态，并使性能泛函达到极小值。**

解：

$$J\left[x(t_0)\right] = \min_{u \in \Omega}\left\{S\left[x(t_f),t_f\right] + \int_{t_0}^{t_f} L\left[x(t),u(t),t\right]dt\right\}$$

设 $t_0+\triangle t \in [t_0, t_f]$

$$J\left[x(t_0)\right]=\min_{u\in\Omega}\left\{S\left[x(t_f),t_f\right]+\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}L\left[x(t),u(t),t\right]dt+\int_{t_0+\Delta t}^{t_f}L\left[x(t),u(t),t\right]dt\right\}$$

根据最优性原理，从 $t_0+\Delta t$ 到 t_f 这一过程也是最优过程

$$J\left[x(t_0+\Delta t)\right]=\min_{u\in\Omega}\left\{S\left[x(t_f),t_f\right]+\int_{t_0+\Delta t}^{t_f}L\left[x(t),u(t),t\right]dt\right\}$$

$$\Downarrow$$

$$J\left[x(t_0)\right]=\min_{u\in\Omega}\left\{\int_{t_0}^{t_0+\Delta T}L\left[x(t),u(t),t\right]dt+J\left[x(t_0+\Delta t)\right]\right\}$$

$$J\left[x(t_0)\right]=\min_{u\in\Omega}\left\{\int_{t_0}^{t_0+\Delta T} L\left[x(t),u(t),t\right]dt+\boxed{J\left[x(t_0+\Delta t)\right]}\right\}$$

上式$J\left[x(t_0+\Delta t)\right]$既是$x$的函数，也与$t$有关，所以

$$\boxed{J\left[x(t_0+\Delta t)\right]\approx J\left[x(t_0)\right]+\left[\frac{\partial J\left[x(t_0)\right]}{\partial x}\right]^T\Delta x+\frac{\partial J\left[x(t_0)\right]}{\partial t}\Delta t}$$

$$\frac{\partial J\left[x(t_0)\right]}{\partial t}=-\min_{u\in\Omega}\left\{L\left[x(t),u(t),t\right]+\left(\frac{\partial J\left[x(t_0)\right]}{\partial x(t_0)}\right)^T f(x,u,t)\right\}$$

即：$$\frac{\partial J\left[x(t)\right]}{\partial t}=-\min_{u\in\Omega}\left\{L\left[x(t),u(t),t\right]+\left(\frac{\partial J\left[x(t)\right]}{\partial x(t)}\right)^T f(x,u,t)\right\}$$

$$J\left[x(t_0)\right]=\min_{u\in\Omega}\left\{\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}L\left[x(t),u(t),t\right]dt+J\left[x(t_0+\Delta t)\right]\right\}$$

即：$$\frac{\partial J\left[x(t)\right]}{\partial t}=-\min_{u\in\Omega}\left\{L\left[x(t),u(t),t\right]+\left(\frac{\partial J\left[x(t)\right]}{\partial x(t)}\right)^T f(x,u,t)\right\}$$

引入Hamilton函数:

$$H\left(x,u,\lambda\right)=L(x,u)+\lambda^T\left(t\right)f\left(x,u\right) \Rightarrow \lambda(t)=\frac{\partial J\left[x(t)\right]}{\partial x(t)}$$

$$\frac{\partial J\left[x(t)\right]}{\partial t}=-\min_{u\in\Omega}H[x,u,\lambda,t]$$

动态规划（离散系统）

已知性能指标函数和系统的动态方程为：

$$J = x^2(3) + \sum_{k=0}^{2}(x^2(k) + u^2(k))$$
$$x(k+1) = x(k) + u(k)$$

其中状态 x 和控制 u 均不受约束，求最优决策序列

首先写出递推方程

$$J^*[x(k)] = \min\{x^2(k) + u^2(k) + J^*[x(k+1)]\} \quad k = 0,1,2$$
$$J^*[x(3)] = x^2(3)$$

$$J^*[x(2)] = \min_{u(2)}\{x^2(2) + u^2(2) + J^*[x(3)]\}$$

$$= \min_{u(2)}\{x^2(2) + u^2(2) + (x(2) + u(2))^2\}$$

$$u(2) = -\tfrac{1}{2}x(2) \qquad J^*[x(2)] = \tfrac{3}{2}x^2(2)$$

$$J^*[x(1)] = \min_{u(1)}\{x^2(1) + u^2(1) + \tfrac{3}{2}(x(1) + u(1))^2\}$$

$$u(1) = -\tfrac{3}{5}x(1) \qquad J^*[x(1)] = \tfrac{8}{5}x^2(1)$$

$$u(0) = -\tfrac{8}{13}x(0) \qquad J^*[x(0)] = \tfrac{21}{13}x^2(1)$$

对于给定的$x(0)$　　可以按照以上递推结论和系统动态方程

求得最优决策序列和最优轨线

动态规划的性质

1. 递推关系

2. 两次搜索（以离散系统为例）

（1）． 逆向搜索

$$J^*[x(k),k]=\min\{L(x(k),u(k),k)+J^*[x(k+1),k+1]) \quad k=1,2\cdots,N-1$$

（2）． 正向搜索

$$u^*[x^*(k),k] \quad x(k+1)=f(x(k),u(k),k)$$

3. 离散和连续