作业7:

1. (1) $z=(\arccos x-y)$ 其中: $x=3t$, $y=4t^2$.

全导数: $\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$.

$$=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot 3+(-1)\cdot(8t)$$

将 $x=3t$ 代入:

$$=-\frac{1}{\sqrt{1-9t^2}}\cdot 3-8t$$

代入后求导:

$z=\arccos 3t-4t^2$

$\frac{dz}{dt}=\frac{-3}{\sqrt{1-9t^2}}-8t$

相同

(2) $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处沿等值线:

$f(x,y)=z_0$. (其中: $z_0=f(x_0,y_0)$)

由题: 对于在等值线: $f(x,y)=z_0$ 上的点而言:

$f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\cdot\Delta y=0$.

则会有: 该约束曲线的切向量为:

$(f_y(x_0,y_0), -f_x(x_0,y_0))$.

同样: 对: $f(x,y)$ 求梯度、

$(f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0))$

⇒ 则由此发现: 沿梯度的函数值改变量最大. ⇒ 切线方向的向量与梯度相垂直

⇒ 数量积为0

(3).

$C: \begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ 由题: 是过 (x_0,y_0) 且使函数改变量最大/小的曲线

$\exists\, k(t)\neq 0$, s.t. $(x'(t), y'(t))=k(t)\nabla f=k(t)(f_x, f_y)$

i: 由题有: $\begin{cases} x'(t)=\frac{dx}{dt} \\ y'(t)=\frac{dy}{dt} \end{cases}$ ⇒ $\frac{dy}{dx}=\left(\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{dt}{dx}\right)$

⇒ $\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{f_y}{f_x}$ □.

由题: 等高线 ⇒ $\Delta f(x,y)=0$ 处的点 故会有: 其方向向量 · $\nabla f=0$ 则有:

$\lambda\cdot(f_x, f_y)=0$ 则有: 等高线的斜率 $\left(-\frac{f_x}{f_y}\right)$

则有: $\left(-\frac{f_x}{f_y}\right)\cdot\left(\frac{f_y}{f_x}\right)=-1$ ∴ 与C的直线正交.

ii: 由题: 令: $x_0^2+y_0^2=c$ 则会有: $x_0=\sqrt{c}\cos t$, $y_0=\sqrt{c}\sin t$ $t\in[0,2\pi]$

则由i得: $\frac{dy}{dx}=\tan\theta=\frac{f_y}{f_x}$

则有: $f'=\tan\theta$ ⇒ 可得: $f=\tan\theta x+t$.

则有: 将: (x_0,y_0) 代入得: $t=0$ 故: $f=\tan\theta x$ 为其解.