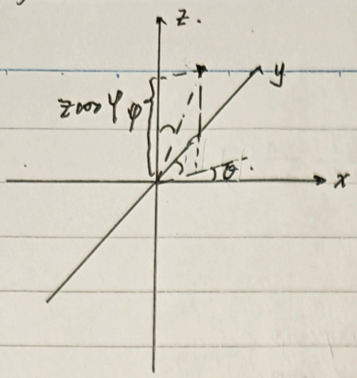
李奕铭 Hw_6.



(a) 由题: 若ρ=常数则会有:

$$\begin{cases} x=\rho\sin\varphi\cos\theta \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z=\rho\cos\varphi \end{cases}$$

则会有: $x^2+y^2+z^2=\rho^2$ ⇒ 则曲面的切面为:

$$2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)+2z_0(z-z_0)=0$$

则有: $x_0(x-x_0)+y_0(y-y_0)+z_0(z-z_0)=0$

⇒ 切面的法向向量为 (x_0, y_0, z_0)

$(x_0^2+y_0^2+z_0^2=\rho^2)$

①

同理有φ=常数 则有:

$$\begin{cases} x^2+y^2=\rho^2\sin^2\varphi \\ z^2=\rho^2\cos^2\varphi \end{cases} \Rightarrow \text{则有: } \boxed{\frac{x^2+y^2}{\sin^2\varphi}=\frac{z^2}{\cos^2\varphi}}$$

则有: $\boxed{\frac{x^2}{\sin^2\varphi}+\frac{y^2}{\sin^2\varphi}=\frac{z^2}{\cos^2\varphi}}$ ⇒ 为锥面.

②

切面方程为: $\frac{2x_0}{\sin^2\varphi}(x-x_0)+\frac{2y_0}{\sin^2\varphi}(y-y_0)=\frac{2z}{\cos^2\varphi}(z-z_0)$

⇒ 切面法向量: $\left(\frac{2x_0}{\sin^2\varphi}, \frac{2y_0}{\sin^2\varphi}, \frac{-2z_0}{\cos^2\varphi}\right)$

若θ为常数时:

$$\begin{cases} x=\rho\sin\varphi\cos\theta \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z=\rho\cos\varphi \end{cases}$$

则会有: $\boxed{z^2+\frac{y^2}{\sin^2\theta}=\frac{x^2}{\cos^2\theta}}$ ⇒ 为锥面.

③

切面方程: $2z_0(z-z_0)+\frac{2y_0}{\sin^2\theta}(y-y_0)=\frac{2x}{\cos^2\theta}(x-x_0)$

则法向量为: $\boxed{\left(2z_0, \frac{2y_0}{\sin^2\theta}, -\frac{2x_0}{\cos^2\theta}\right)}$

同理: 当①与②相交时:
$$\begin{cases} x_0^2+y_0^2+z_0^2=\rho^2 \\ \frac{x_0^2}{\sin^2\varphi}+\frac{y_0^2}{\sin^2\varphi}=\frac{z^2}{\cos^2\varphi} \end{cases} \Rightarrow x_0\cdot\left(\frac{2x_0}{\sin^2\varphi}\right)+y_0\left(\frac{2y_0}{\sin^2\varphi}\right)-\frac{z_0\cdot 2z_0}{\cos^2\varphi}=0$$

No.

Date

同理 ② 与 ③ 相交：$\begin{cases} \frac{x_0^2}{\sin^2\varphi}+\frac{y_0^2}{\sin^2\varphi}=\frac{z_0^2}{\cos^2\varphi} \\ z^2+\frac{y^2}{\sin^2\theta}=\frac{z^2}{\cos^2\theta} \end{cases}$

同样有：$\left(\frac{x_0}{\sin^2\varphi}, \frac{y_0}{\sin^2\varphi}, \frac{-z_0}{\cos^2\varphi}\right)\cdot\left(z_0, \frac{y_0}{\sin^2\theta}, \frac{-x_0}{\cos^2\theta}\right)=0$.

(b). $\begin{cases} x^2+y^2+z^2\le R^2 \\ x^2+y^2+z^2\le 2Rz \end{cases}$ 由于球坐标系 $\begin{cases} x=\rho\sin\varphi\cos\theta \\ y=\rho\sin\varphi\cos\theta \\ z=\rho\cos\varphi \end{cases}$

① 则会有：$\rho^2\sin^2\varphi\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\varphi\sin^2\theta+\rho^2\cos^2\varphi=\rho^2$.

则有：$\boxed{\rho\le R}$

②：则会有：$\rho^2\le 2R\rho\cos\varphi$ 则有：$\boxed{\rho\le 2R\cos\varphi}$

则会有：两者相交部分为：$\begin{cases} \rho\le R \\ \rho\le 2R\cos\varphi \end{cases}$.

则会有：当：$2\cos\varphi\ge 1$ 时 即：$\boxed{\cos\varphi\ge\frac{1}{2}}$ 则有：$\boxed{\varphi<\frac{\pi}{3}}$

则有此时的图像为：$\boxed{\rho\le R}$

当 $\cos\varphi>\frac{1}{2}$ 时：$\varphi>\frac{\pi}{3}$ 时. 图像为：$\rho\le 2R\cos\varphi$.

则会有：投影到 xoy 平面时候：

球面方程：$\begin{cases} \rho\le R\ (\varphi<\frac{\pi}{3}) \\ \rho\le 2R\cos\varphi\ (\varphi>\frac{\pi}{3}) \end{cases}$.

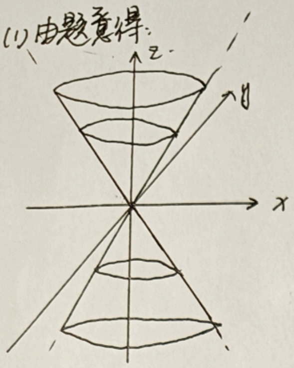
$\begin{cases} \sqrt{x_0^2+y_0^2}\le R\sin\varphi.\ (\varphi<\frac{\pi}{3}) \\ \sqrt{x_0^2+y_0^2}\le 2R\cos\varphi\sin\varphi.\ (\varphi>\frac{\pi}{3}) \end{cases}$

又：$\varphi>\frac{\pi}{3}$ 时：$2\cos\varphi<1$ $\Rightarrow$ 投影在：xoy 上为：$\sqrt{x_0^2+y_0^2}\le R\sin\varphi$.

Campus

T2.

(1) 由题意得:



① 过z作截面为: $x^2+y^2=c$ 为圆.

② 过x作截面为: $y=\pm z$.

(2) 由题: 曲面方程为: $x^2+y^2=z^2$ 则同时求偏微分:

$$\boxed{2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)=2z_0(z-z_0)}.$$

即: $2x_0x-\cancel{2x_0^2}+2y_0y-\cancel{2y_0^2}=2z_0z-\cancel{2z_0^2}$.

$\Rightarrow$ $x_0x+y_0y-z_0z=0$. 则会有: 法向量场为 $(x_0,y_0,-z_0)$ (x_0,y_0,z_0) ∈Σ

(3) 由题: 先将z固定: 考虑其法向量场为: $(x,y,-z)$ 则会有: 在z相同的时候:

$(x,y,-z)$ 称对称的图景 ⇒ 应此图像关于z轴轴对称.

同样地: 考虑 $y=0$ 时. x, z 而变化. 发现 $(x,y,-z)$ 而方向不变 ⇒ 为锥体.

(4). 由题意得: $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 则会有:

①先求 $(0,0)$ 处的 $\frac{\partial z}{\partial x}$. 将 $y=0$ 代入: $z=\pm x=|x|$.

则有: $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\Big|_{x=0}=\lim\limits_{x_0\to 0}\frac{|x_0|-0}{\Delta x_0}$ 不存在

⇒ 不存在偏导: 不可微.

(5) $z(tx,ty)=tz(x,y)$. $u=(x,y)$ 而变化率与z 构成正比.

由题意得：投影到 xOz 上：

列有：$\begin{cases} x^2+z^2=R^2 & (z>\frac{R}{2}) \\ x^2+z^2\le 2Rz & (z\le\frac{R}{2}) \end{cases}$

由于对称性：投影到 yOz 面结果也相同

(c)：$\underline{(x^2-2x+1)}+(2y^2+4y+2)+(3z^2-6z+3)\le 1$.

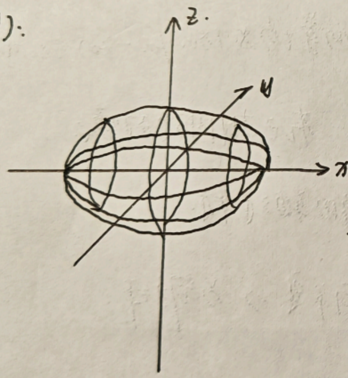
$(x-1)^2+2(y+1)^2+3(z-1)^2\le 1$ 则会有：$(x-1)^2+2(y+1)^2+3(z-1)^2\le 1$

则令：$(x-1)$ 为 x_0. $\Rightarrow x=x_0+1 \Rightarrow x=\sin\varphi\cos\theta+1$

$\frac{(y+1)}{\sqrt{2}}$ 为 $y_0 \Rightarrow y=\sqrt{2}y_0-1 \Rightarrow y=\sqrt{2}\sin\varphi\cos\theta-1$

$\frac{(z-1)}{\sqrt{3}}$ 为 $z_0 \Rightarrow z=\sqrt{3}z_0+1 \Rightarrow z=\sqrt{3}\cos\varphi+1$

(d)：



由题：任取椭球内部一点均满足：

取同周边邻域的一点均会存在 $\delta>0$.

s.t. $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=\delta$ 且有：(x,y) 在椭球内部.

当取球面上某点时：

$\forall\delta>0$，$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=\delta$ 时 均存在某点 s.t.

$x^2+2y^2+3z^2-2x+4y-6z+5>0$.

$\Rightarrow$ 使用参数来描绘椭球面：

$x^2+2y^2+3z^2-2x+4y-6z+5=0$.

$(x^2-2x+1)^2+2(y+1)^2+3(z-1)^2=1$

则会存在有：令：$x=\sin\varphi\cos\theta+1$

$y=\sqrt{2}\sin\varphi\cos\theta-1$

$z=\sqrt{3}\cos\varphi+1$.

(e):

由题：设 $\vec{u}=(x,y)$ 则会有：

$$z=\sqrt{x^2+y^2} \qquad z'_x=(\tfrac{1}{2})\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\cdot(2x)$$

$$=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

由对称性

$$z'_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

由题：$u(x,y)$

则会有：$\nabla_u x=\frac{\partial z}{\partial \vec{u}}=\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)+\left(\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\sqrt{x^2+y^2}=z$

$$=x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=\sqrt{x^2+y^2}$$

(f)：由题：$w=x^2+y^2-z^2$ 若 $w=0$ 时有：

$x^2+y^2-z^2=0$ 则会存在有：当 $z=c$ 时：$x^2+y^2=c$ 则为圆 $\Rightarrow$ 截面为圆.

当：$x=0$ 或 $y=0$ 时存在有：$y=\pm z$ 则由此可得：该二次曲面为锥面.

由题：1. 充分性：若 $(x,y,z)\in\Sigma$，则对任意 $t>0$，$(tx,ty,tz)\in\Sigma$.

$F(tx,ty,tz)=t^{k}F(x,y,z)=0$. 由于 $t>0$. 则有：$F(x,y,z)=0$.

2. 必然性：

若 $F(x,y,z)=0$ 则对任意 $t>0$. $F(tx,ty,tz)=t^{k}F(x,y,z)=0$.

说明：(tx,ty,tz) 也满足相关方程.

(g). 设 $f(x_1\cdots x_n)$ 满足

$$f(tx_1,tx_2\cdots tx_n)=t^{k}f(x_1\cdots x_n)$$

左：$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(tx_1\cdots tx_n)}{\partial(tx_i)}=\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{(tx_1,\cdots tx_n)}$

右：$\frac{d}{dt}(t^{k}f(x_1\cdots x_n))=kt^{k-1}f(x_1\cdots x_n)$

令 $t=1$ 时：$\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}=kf$ □.

T3

(a) 马鞍面方程：$z=x^2-y^2$

⇒ 同时求偏导：

$(z-z_0)=2x_0(x-x_0)-2y_0(y-y_0)$

⇒ 法向量为 $(2x,-2y,-1)$

(b) 由题

取 $\lambda=x_0+y_0$ 则 l_λ 的方程为：$x+y=x_0+y_0$

且 $(x_0+y_0)(x-y)=z_0$ 代入 (x_0,y_0,z_0) ⇒ $(x_0+y_0)(x_0-y_0)=x_0^2-y_0^2=z_0$ □

同理：

取 $\mu=x_0-y_0$ 则有：$(x_0-y_0)(x+y)=z_0$. ⇒ $(x_0-y_0)(x_0+y_0)=x_0^2-y_0^2=z_0$ □

由题：参数化 l_λ 为：$x=t,\ y=\lambda-t,\ z=2\lambda t-\lambda^2$ ⇒ 方向向量为 $(1,-1,2\lambda)$

在点 (x_0,y_0,z_0) 处 $\lambda=x_0+y_0$ ⇒ $\vec{n}=(2x_0,-2y_0,-1)$

⇒ 点积：$1\cdot 2x_0+(-1)\cdot(-2y_0)+2\lambda(-1)=2x_0+2y_0-2(x_0+y_0)=0$.

同理：参数化 l_μ 为：$x=t,\ y=t-\mu,\ z=2\mu t-\mu^2$ ⇒ 方向向量为 $(1,1,2\mu)$

$\vec{n}=(2x_0,-2y_0,-1)$ ⇒ 代入算点积：

$1\cdot 2x_0+1\cdot(-2y_0)+2\mu(-1)=2x_0-2y_0-2(x_0-y_0)=0$.

⇒ 均于切平面上.

(c) 由题意得:

$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,1)} = 2$. 同理: $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\Big|_{(1,1)} = -2$.

在方向(2,1)处有: $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{5}\sqrt{5}$ $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{5}\sqrt{5}$

则有: $\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) = \frac{2}{5}\sqrt{5}\cdot 2 - 2\cdot\frac{1}{5}\sqrt{5} = \frac{2}{5}\sqrt{5}$

(d): 由题 考虑: $x=y^2$ 在(1,1)处方向:

求导得: $(x-x_0) = 2y_0(y-y_0)$ 将$(x_0,y_0)=(1,1)$代入:

$(x-1) = 2(y-y_0)$ $\Rightarrow$ 则有: 方向为(2,1) 则会有:

$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2}{5}\sqrt{5}\cdot 2 - 2\cdot\frac{1}{5}\sqrt{5} = \frac{2}{5}\sqrt{5}$.

(e): 两者在(1,1)处方向一致.

$\frac{\partial z}{\partial u} = \underline{\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta} = \frac{2}{5}\sqrt{5}$.

(f): 由题意得: 方向向量为(x,x) $\Rightarrow$ $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

则会有: $z = x^2 - y^2$ 有: $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\Big|_{(0,0)} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} = \left(\frac{(\Delta x)^2}{\Delta x}\right) = \Delta x = 0$.

同理有: $\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,0)} = 0$.

则会有: $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot\cos\alpha + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\cos\beta = 0$

(g): 同理: $\because \nabla z = 0$ 则会有: 在原点处的变化率为0.

(h): 沿着x轴: 函数在(0,0)处向上开口. $\Rightarrow$ 类似于抛物面极小值点

沿着y轴: 函数在(0,0)处向下开口 $\Rightarrow$ 类似于抛物面极大值点.

极大值/极小值同时存在 $\Rightarrow$ 无法判断极值.

T4. 由题 $x'(t)=e^t\cos t+e^t\cdot(-\sin t)$

$=e^t(\cos t-\sin t)$

$y'(t)=e^t\sin t+e^t\cos t$

$=e^t(\sin t+\cos t)$

$z'(t)=e^t$

⇒ 则会有：切线方向向量为

$((x-y),(x+y),z)$

⇒ 母线方向量为：(x,y,z) 则会有：

$$\cos\theta=\frac{(x,y,z)\cdot((x-y),(x+y),z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{(x-y)^2+(x+y)^2+z^2}}$$

$$=\frac{x^2-\cancel{xy}+\cancel{xy}+y^2+z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{x^2+y^2-2xy+x^2+y^2+2xy+z^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{2x^2+2y^2+z^2}}$$ 又∵ $z^2=x^2+y^2$ ⇒ $\frac{\sqrt{2x^2+2y^2}}{\sqrt{3x^2+3y^2}}=\frac{\sqrt2}{\sqrt3}$

$$\Rightarrow \theta=\arccos\frac{\sqrt2}{\sqrt3}$$

T5. 由题：切向量为：$(x'(t), y'(t), z'(t))$.

$$\begin{cases} x=a\sin^2 t \\ y=b\sin t\cos t \\ z=c\cos^2 t \end{cases}$$

⇒ $x'(t)=a\cdot(2\sin t)\cdot\cos t$ $=2a\sin t\cos t$

⇒ $y'(t)=b(\cos t\cos t+\sin t\cdot(-\sin t))$ $=b(\cos^2 t-\sin^2 t)$.

⇒ $z'(t)=c\cdot 2\cos t\,(-\sin t)$ $=-2c\cos t\sin t$

将 $t=\frac{\pi}{4}$ 代入得：$x'(t)=2a\cdot\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)=a$.

$y'(t)=b\left(\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^2\right)=0$. ⇒ 切向量为 $(a,0,-c)$

$z'(t)=-2c\cdot\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)=-c$.

将 $\frac{\pi}{4}=t$ 代入后得：

$$\begin{cases} x=a\cdot\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^2=\frac{1}{2}a \\ y=b\cdot\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)=\frac{1}{2}b \\ z=c\cdot\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^2=\frac{1}{2}c \end{cases}$$

⇒ 切线方程为：$\frac{x-\frac{1}{2}a}{a}=\frac{2(z+c)}{c}$

法平面：由题，在切点 $(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}b, \frac{1}{2}c)$ 则会有：

切向量为：$(a, 0, -c)$ ⇒ 则有法平面为：

$$a(x-\frac{1}{2}a)+(-c)(z-\frac{1}{2}c)=0.$$

T6. $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right), & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

由题意得：在 $(0,0)$ 处 $f_x(x,y)=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{x^2\sin\frac{1}{x^2}-0}{\Delta x}\right]=\left[\Delta x\sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right)^2\right]_{\Delta x\to 0}=0.$

则会有：同理：$f_y(x,y)\big|_{(x=0,y=0)}=0.$

① $f_x(x,y)\big|_{(0,0)}$ 与 $f_y(x,y)\big|_{(0,0)}$ 均存在.

$$f_x(x,y)=\left[(x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right]'$$

$$=(2x)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)+(x^2+y^2)\cdot\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\cdot(-1)\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)^2(2x)$$

$$=(2x)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)+\cancel{(x^2+y^2)}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)(-1)\cdot\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)^{\cancel{2}}\cdot(2x).$$

$$=2x\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)+\frac{-2x}{x^2+y^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$ 且有：$f_x(x,y)\big|_{(0,0)}=0.$

当：$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f_x(x,y)\neq f_x(x_0,y_0)$ ⇒ $f_x(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不连续 ⇒ 同理，$f_y(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不 - -

② : $\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\left(\frac{[f(x_0,y_0)-f(x,y)]-(A\Delta x+B\Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y}}\right)=\frac{(\Delta x^2+\Delta y^2)\sin\left(\frac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}\right)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$

$$=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\,\sin\left(\frac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}\right)=0.$$

⇒ 则会有 $f(x,y)$ 可微.

T7.

$\boxed{\begin{array}{l}\text{极值点：}6\\ \text{鞍点：}10\end{array}}$

T8. (a). $u(x,y,z) = \boxed{x^2-2yz+y^2}$

由题意得：$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=2x$ ；$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-2z+2y$ ；$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)=(-2y)$

$\Rightarrow$： $\nabla u(p_0)=(-2,2,-4)$

(b). 由题：法向量为：$\nabla u(p_0)=(-2,2,-4)$

$\Rightarrow$ 切平面为：$(-2)(x+1)+2(y-2)+(-4)(z-1)=0$.

(c). 沿 $(-2,2,-4)$ 或 $(2,-2,4)$ 方向改变最快.

在 $(-1,2,1)$ 处沿 $(-2,2,-4)$ 方向的导数

(d):

i: 由题意得: $x+2y+xy+2=0 \Rightarrow (x+2)(y+1)=0$ 解得: $\underline{\underline{x=-2 \text{ 或 } y=-1}}$

(e): i: 由题意得:

设 (x,y) 为 $(1,0)$ 则会有: $(x,y) \to (u,v) \Rightarrow (1,0) \longrightarrow (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

设 (x,y) 为 $(0,1)$ 则会有: $(x,y) \to (u,v) \Rightarrow (0,1) \longrightarrow (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

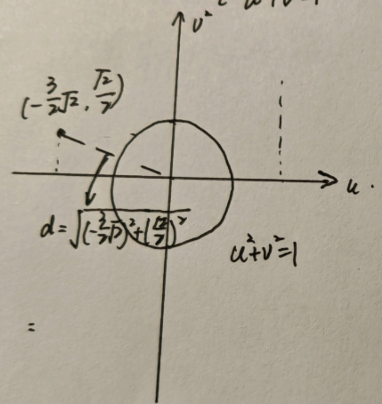
则会存在有: $(x,y) = x(1,0)+y(0,1)$ 则可得. 其相当于坐标系逆时针旋转$\frac{\pi}{4}$.

ii. 在 uov 坐标系中: 会有:

$$f(x,y)= \frac{u^2}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{2}\,u - \frac{v^2}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}v.$$

$$c: x^2+y^2=1 \longrightarrow u^2+v^2=1.$$

则会存在有: $\begin{cases} \frac{1}{2}(u+\frac{3}{2}\sqrt{2})^2 - \frac{1}{2}(v-\frac{\sqrt{2}}{2})^2 - 2 = c \\ u^2+v^2=1 \end{cases}$ 两相交情况



则有: $\begin{cases} \text{当 } c=2.7 \text{ 时存在唯一极值} \\ \text{当 } c>2.7 \text{ 时无极值} \\ \text{当 } c=-2 \text{ 时存在唯一极值} \\ \text{当 } c<-2 \text{ 时无极值} \end{cases}$ $-2 \le c \le 2.7$ 时存在唯一极值

T9.

(1). 由题：$f(x,y)$ 变为了关于 t 的函数：

则会有：$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\cdot\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)$

则可得：当：$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)$ 最大时为改变 $f(x,y)$ 最快的方法

(2). i 由题：$f(x,y)=x+2y+xy$.

则会有：$\nabla f=(f_x(x,y),f_y(x,y))$ $\Rightarrow$ $f_x(x,y)=1+y$.

$f_y(x,y)=2+x$.

$\Rightarrow \nabla f=(1+y,2+x)$

$C: x^2+y^2=1$ $\Rightarrow$ 求出单位切向量：$\begin{cases}x=\sin t\\ y=\cos t\end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases}x'=\cos t\\ y'=-\sin t\end{cases}$.

$\Rightarrow$ 在 (x_0,y_0) 处的单位切向量为：$(y,-x)$ 或 $(-y,x)$

ii 由题：当曲线被限制在 C 上时：

在 (x,y) 处的梯度为：$\nabla f=(f_x(x,y),f_y(x,y))$

则在 (x,y) 处的导数 $\Rightarrow$ 在沿 C 的切线方向的方向导数

由i可知单位方向向量为：$(-y,x)$ ∴ 则会有：导数为：$D_u f=\nabla f\cdot u$.

(3)：

(i). ∵ 在 C 上的极值点 (x_0,y_0) 其代表沿 C 方向的导数均为 0.

则会有：使其方向改变最快的点一定与 C 的切线方向相垂直

$\Rightarrow$ 则有：$\nabla f\cdot u^\circ=0$ $\Rightarrow$ $D_u f(x,y)=0$.

(ii). $G(x,y)=0$. 由题：$\nabla G=(G_x,G_y)$ 为其梯度场.

表示的即为法向量场

$G(x,y)=0\Rightarrow x^2+y^2-1=0$ $\Rightarrow$ $\begin{cases}1+y=2\lambda x\\ 2+x=2\lambda y\\ x^2+y^2=1\end{cases}$

联立求解：个数为2. $\Rightarrow$ 有2个极值点

T10.

$z = x^y$ 在 $(10,2)$

由题: $\frac{\partial z}{\partial x} = y x^{y-1} \Big|_{(10,2)} = 2 \cdot 10^1 = 20$.

$\frac{\partial z}{\partial y} = \ln x \cdot x^y \Big|_{(10,2)} = \ln 10 \cdot 10^2 = 100 \ln 10$.

由题: $(10.1)^{2.03} = 10^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \cdot \Delta x + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \cdot \Delta y$.

$= 100 + 20 \cdot (0.1) + 100 \ln 10 \cdot 0.03$

$= 100 + 2 + 3\ln 10 = 102 + 3\ln 10$.