实验 7 离散信号的 DFT&FFT 频谱 MATLAB 仿真

计算机 20-1 刘宇诺

【实验目的】

1、掌握序列傅氏变换的计算机实验方法，利用序列的傅氏变换对离散信号、系统及系统响应进行频域分析。

2、加深对离散信号的 DTFT、DFT 及其相互关系的理解。

3、在理论学习的基础上，加深对快速傅里叶变换 FFT 的理解，熟悉 FFT 算法

4、熟悉应用 FFT 对典型信号进行频谱分析的方法。

5、加深对离散信号 FFT 算法的运用，以便在实际中正确应用 FFT。

【实验内容】

1、验证所有例程，理解原理，观察分析结果，总结实验所得结论。

【例 7-1】

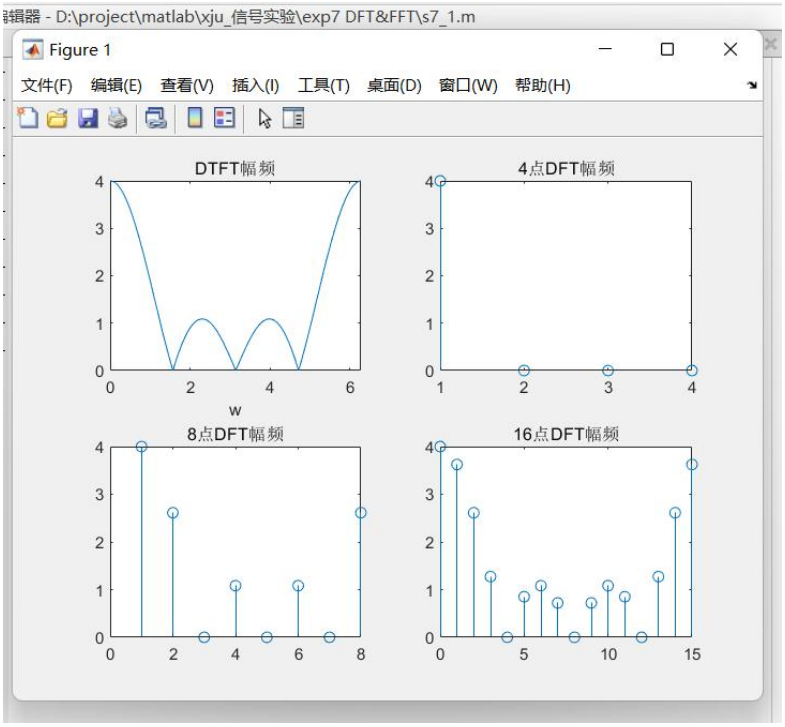
设 x(n)是 4 点序列{1 1 1 1 },调用 dft、idft、dft 函数实现以下要求：

1)求解序列 DTFT，并画出幅频曲线，

2)分别求解序列 4 点、8 点、16 点 DFT，并绘制幅频曲线，

代码：

```
clear;
xn=[1 1 1 1];
k=0:511;   %由 wk=2πk/512 可求得模拟频率 f
Xw=dtft(xn,2*pi*k/512);   % 近似模拟信号频谱
subplot(221),plot(2*pi*k/512,abs(Xw));title('DTFT 幅 频
'),xlabel('w')
Xk4=dft(xn,4);
subplot(222),stem(abs(Xk4));title('4 点 DFT 幅频')
Xk8=dft(xn,8);
subplot(223),stem(abs(Xk8));title('8 点 DFT 幅频')
Xk16=dft(xn,16);
subplot(224),stem(0:15,abs(Xk16));title('16 点 DFT 幅频')
```



分析：随着 DFT 点数的增加（4 点到 16 点），DFT 的结果越来越接近 DTFT 的结果。因为随着 DFT 点数的增加，在频域中采样得越密，更接近连续的 DTFT。

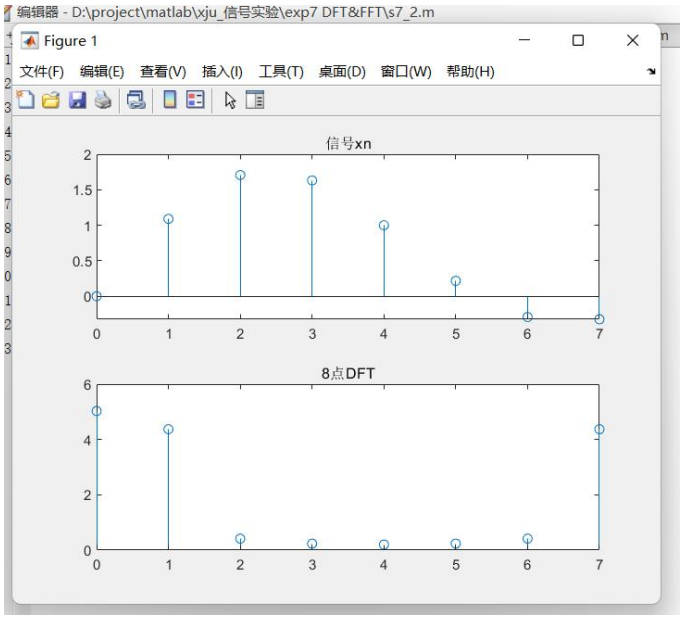
【例 7-2】

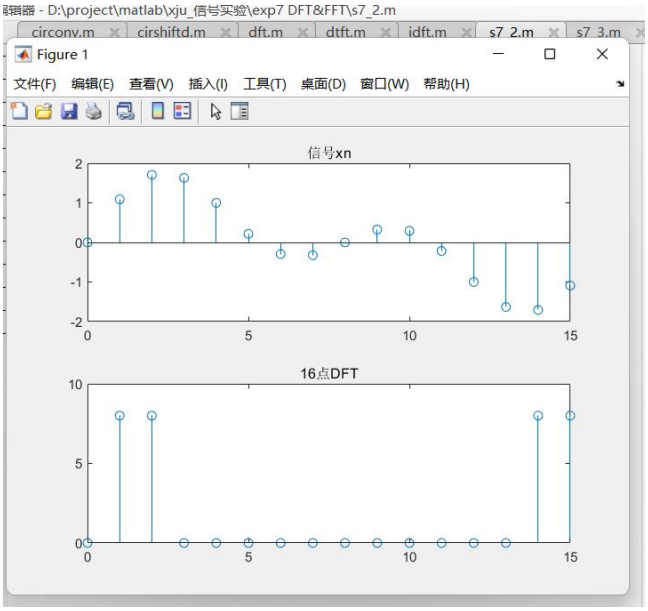
已知 x(n)sin(n/8)sin(n/4)，用 MATLAB 求解 N=8,16,32 时 DFT 的结果，并绘制幅频曲线，比较结果。

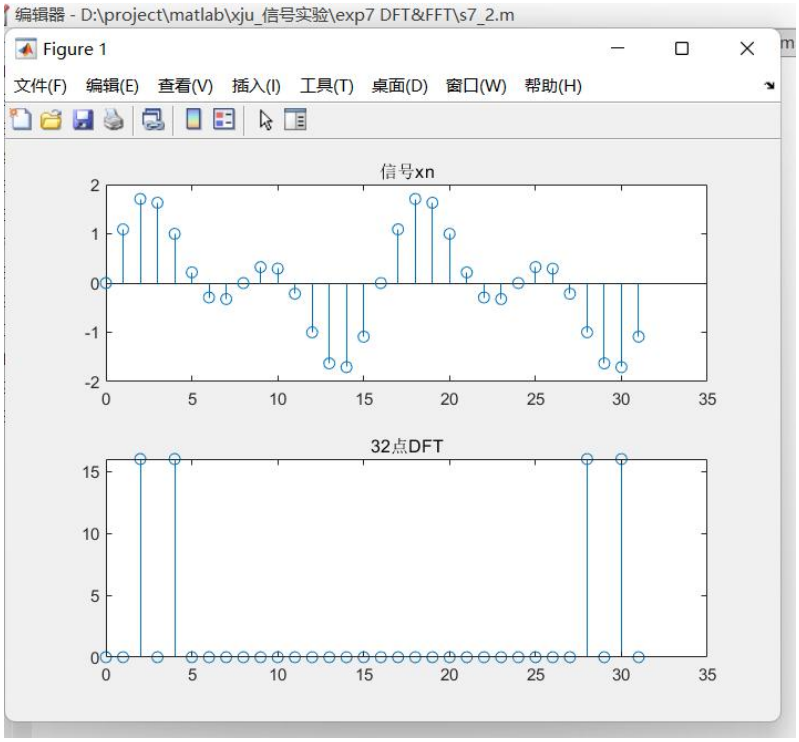
代码：

```
clear;
N=16;
n=0:1:N-1; %时域采样
xn=sin(n*pi/8)+sin(n*pi/4); %以下 DFT 求解也可以调用自编函数 dft 实现
k=0:1:N-1; %频域采样
WN=exp(-j*2*pi/N);
nk=n'*k;
WNnk=WN.^nk;41
Xk=xn*WNnk;
subplot(2,1,1)
stem(n,xn); title('信号 xn')
subplot(2,1,2)
```

```
stem(k,abs(Xk)); title('16 点 DFT')
```







分析：第一个子图显示时域信号，第二个子图显示频域信号的幅度。

N 取不同的值(8,16,32），程序会对信号进行不同数量的采样，然后计算不同大小的 DFT。

N=8 时，采样点较少，无法准确表示原始信号，特别是对于较高频率的正弦波分量。

当 N=16 时，采样点增多，对原始信号的表示更准确，同时，DFT 的频率分辨率提高，能够更好地区分接近的频率成分。

当 N=32 时，采样点进一步增多，对原始信号的表示将更准确。DFT 的频率

分辨率进一步提高。计算复杂度也会增加。

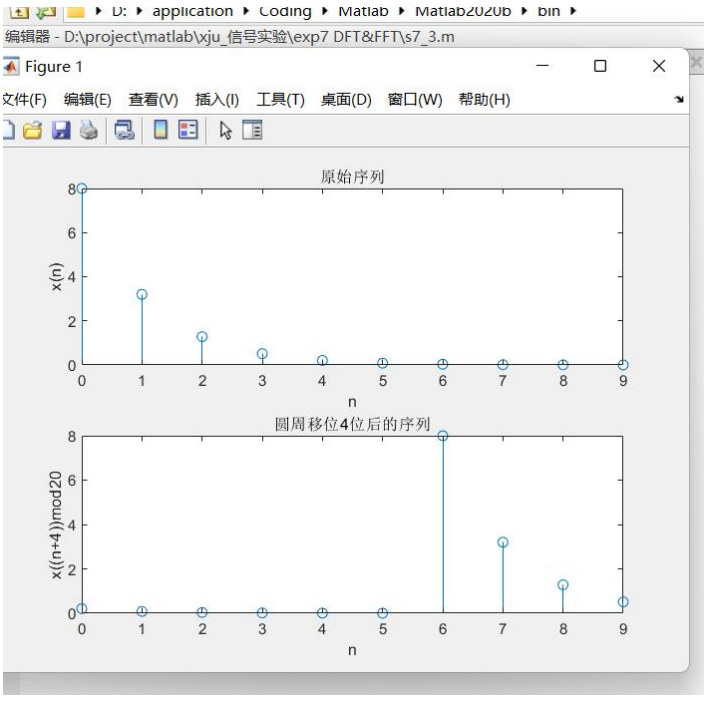
随着 N 的增加，对信号的表示越来越精确，DFT 的频率分辨率也越来越高，计算复杂度也会随之增加。

[例 7-3]

求有限长序列 $x(n)=8(0.4)^n, 0 \le n \le 10$ 的圆周移位 $x_m(n)=x[(n+4)]_{20}R_{20}(n)$，并画出其结果图。

代码：

```
clear;
N=10;
m=4;
n=0:1:N-1;
x=8*(0.4).^n;
n1=mod((n+m),N);
xm=x(n1+1);
subplot(2,1,1)
stem(n,x);
title('原始序列');
xlabel('n');
ylabel('x(n)');
subplot(2,1,2)
stem(n,xm);
title('圆周移位 4 位后的序列');
xlabel('n');
ylabel('x((n+4))mod20');
```



分析：

观察图像可以看到整个序列进行圆周移位了 4 个单位。由于这是一个圆周移位，所以最初的 4 个元素现在出现在序列的末尾。从整体上看就像是整个序列向左“滚动”了 4 个单位。

[例 7-4]

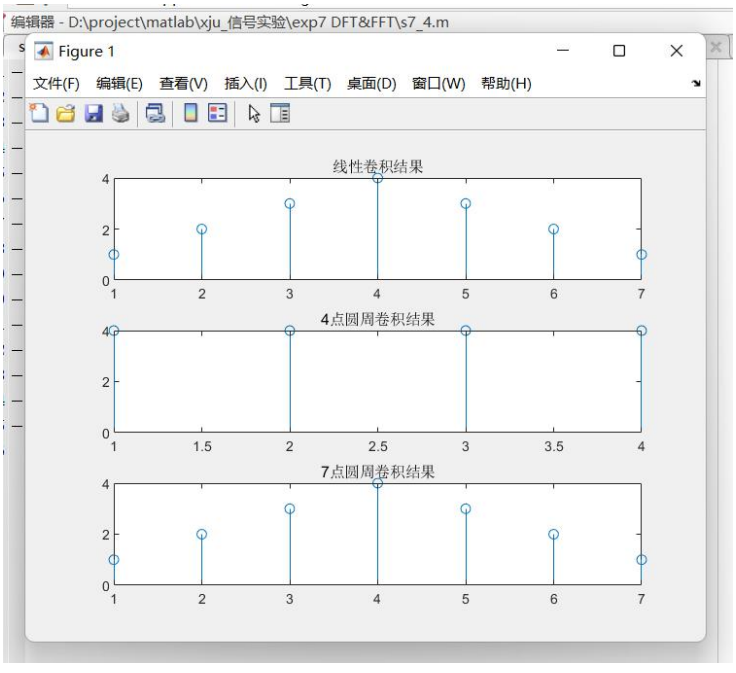
已知 4 点矩形脉冲 R4(N)

1）求解其和自己的线卷积与 4 点圆卷积。

2）在 R4(N)后面添加 3 个零点，将它扩展成长度为 7 的序列后再计算它和自己的 7 点圆周卷积。

代码：

```
clear all;
xn=[1 1 1 1];
y1=conv(xn,xn);      %矩形序列与其自身的线卷积
N=length(xn);
XK=dft(xn,N);        %圆周卷积定理
YK=XK.*XK;
yc4=idft(YK,N);       %用圆周卷积定理实现的 4 点圆周卷积
xn1=[1 1 1 1 0 0 0];
N1=length(xn1);
XK1=dft(xn1,N1);
YK1=XK1.*XK1;
yc7=idft(YK1,N1);    %用圆周卷积定理实现的 7 点圆周卷积
subplot(311),stem(y1),title('线性卷积结果');
subplot(312),stem(yc4),title('4 点圆周卷积结果');
subplot(313),stem(yc7),title('7 点圆周卷积结果');
```



分析：

在线性卷积结果中，该序列自身的卷积结果是一个形状为三角形的序列，其峰值为 4。

在 4 点圆周卷积结果中，观察到结果与线性卷积不一样，这是因为在计算圆周卷积时，序列的长度被限制为 4，导致卷积的尾部重叠到了头部，形成了“环绕”的效果。

在 7 点圆周卷积结果中，看到结果与线性卷积结果相同。因为在序列的尾部填充了足够的零，使得卷积结果不会环绕到序列的头部。在这种情况下，圆周卷积等价于线性卷积。

[实例 7-5]

已知序列

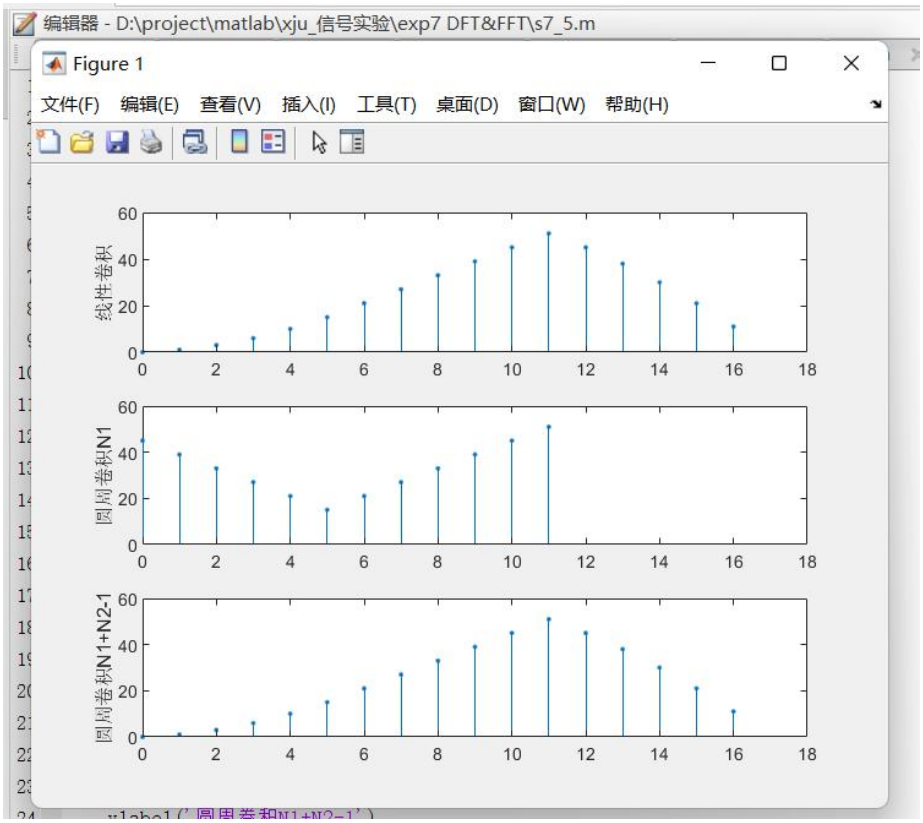
$$x(n)=\begin{cases} n & 0\leqslant n\leqslant 11 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad h(n)=\begin{cases} 1 & 0\leqslant n\leqslant 5 \\ 0 & \text{其他} \end{cases},$$

求它们的线卷积 yl(n)=h(n)*x(n)和不同 N 点的圆周卷积 yN(n)=h(n)*x(n)。

代码：

```
clear all
n=[0:1:11];
m=[0:1:5];
N1=length(n);
N2=length(m);
xn=n;                          %生成 x(n)
hn=ones(1,N2);                 %生成 h(n)
yln=conv(xn,hn);               %直接用函数 conv 计算线性卷积
ycN1=circonv(xn,hn,N1);        %用函数 circonv 计算 N1 点圆周卷积
ycn=circonv(xn,hn,N1+N2-1);    %用函数 circonv 计算 N1+N2-1 点圆周卷积
ny1=[0:1:length(yln)-1];
ny1=[0:1:length(ycN1)-1];
ny2=[0:1:length(ycn)-1];
subplot(3,1,1);                %画图
stem(ny1,yln,'.');
ylabel('线性卷积');
axis([0,18,0,60]);
subplot(3,1,2);
stem(ny1,ycN1,'.');
ylabel('圆周卷积 N1')
```

```
axis([0,18,0,60]);
subplot(3,1,3);
stem(ny2,ycn,'.');
ylabel('圆周卷积 N1+N2-1')
axis([0,18,0,60]);
```



分析：

线性卷积结果中，绘出了序列 xn 和 hn 的线性卷积结果。因为序列 hn 是一个常数序列，所以它的卷积等于在序列 xn 上应用了一个滑动窗口，窗口内的元素被加起来。结果是一个逐渐上升然后下降的序列，峰值出现在窗口完全包含序列 xn 的时候。

在 N1 点圆周卷积结果中，得到序列 xn 和 hn 的 N1（12）点圆周卷积结果。在这种情况下，由于圆周卷积的环绕效应，观察到到结果在峰值后突然下降。是因为卷积操作在序列的尾部和头部“环绕”导致的。

在 N1+N2-1 点圆周卷积结果中，得到到序列 xn 和 hn 的 N1+N2-1（17）点圆周卷积结果。由于圆周长度足够大，没有发生环绕效应，因此圆周卷积的结果与线性卷积的结果相同。

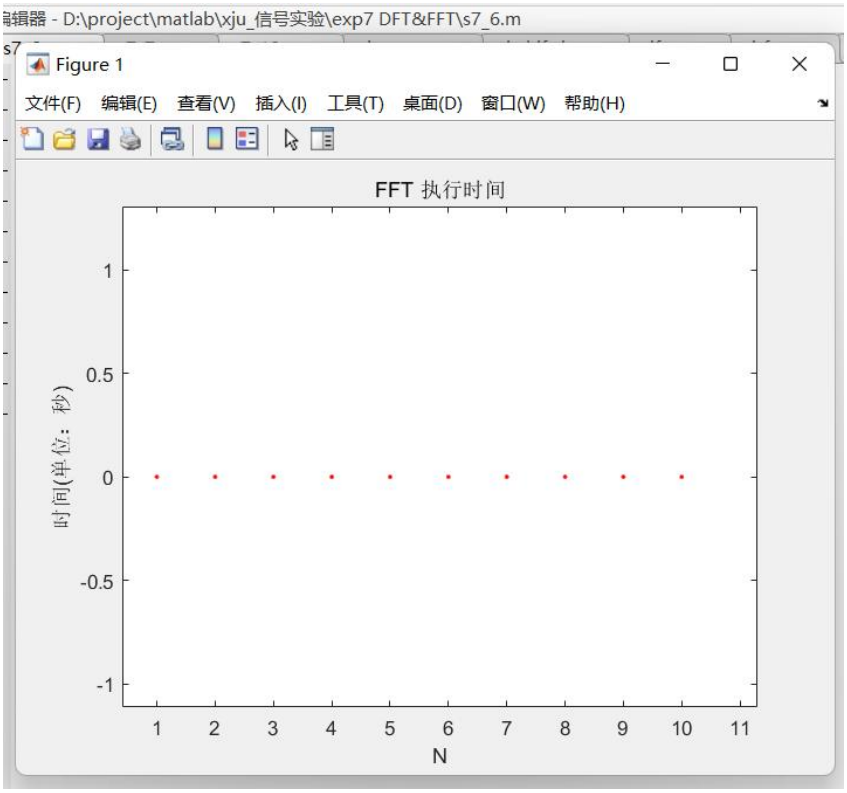
【例 7-6】

研究当 1≤N≤64 时，FFT 函数的执行时间。最后画出执行时间相对于 N 的图。

代码：

```
clear;
Nmax=10;
Fft_time=zeros(1,Nmax);
```

```
for  n=1:1:Nmax;
x=rand(1:n);
t=clock;
fft(x);
fft_time(n)=etime(clock,t);
end
n=[1:1:Nmax];
plot(n,Fft_time,'r.');
xlabel('N');ylabel('时间(单位：秒)');title('FFT 执行时间')
```



分析：

每次迭代生成一个长度为 n 的随机序列，然后对这个序列执行 FFT，最后记录这个操作花费的时间。生成的图形应该展示 FFT 执行时间随着输入序列长度 N 的增加而变化的趋势。

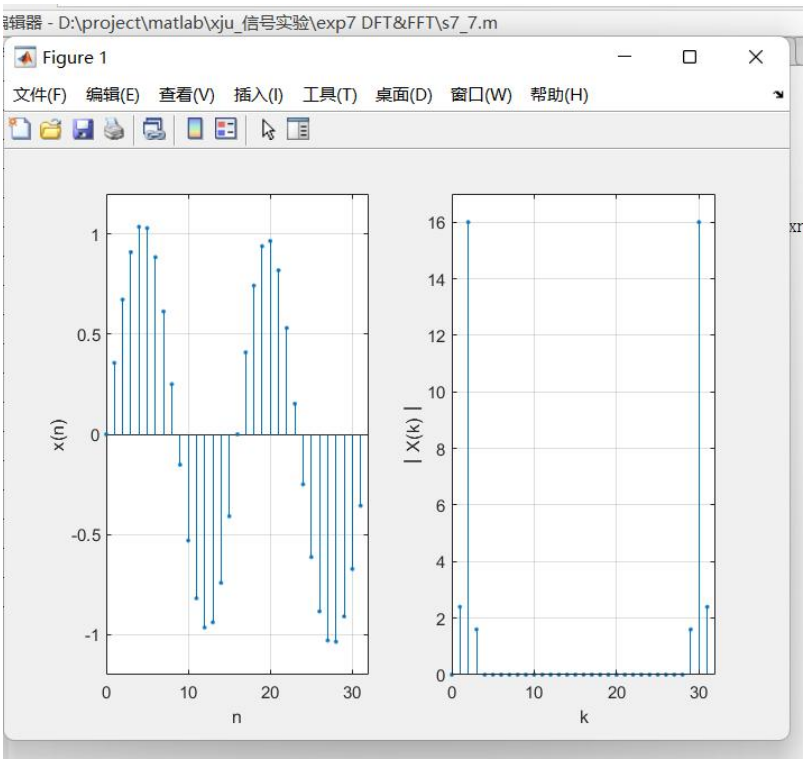
观察图像时间趋势是一条近似直线，可能是这个大小范围的输入，FFT 操作的执行时间主要由常数时间的开销决定，而这个开销与输入的大小无关。

【例 7-7】 已知信号 x(t)=0.15sin(2πf1t)+sin(2πf2t)-0.1sin(2πf3t)，f1=1Hz，f2=2Hz，f3=3Hz。取 fs=32Hz 作频谱分析。

代码：

```
clear all
fs=32;
```

```
N=fs;
n=0:N-1;
f1=1;f2=2;f3=3;
xn=0.15*sin(2*pi*f1*n/fs)+sin(2*pi*f2*n/fs)-0.1*sin(2*pi*f3*n/fs);
XK=fft(xn,N);
magXK=abs(XK);
phaXK=angle(XK);
subplot(1,2,1)
stem(n,xn,'.');
xlabel('n');ylabel('x(n)');
axis([0,32,-1.2,1.2]);
grid;
subplot(1,2,2)
k=0:length(magXK)-1;
stem(k,magXK,'.');
xlabel('k');ylabel('|X(k)|');
axis([0,32,0,17]);
grid
```



分析：生成了一个由三个不同频率（1Hz、2Hz 和 3Hz）正弦波相加形成的信号的时间序列，并使用 FFT 将这个时间序列信号转换为频域。

在第一个子图中观察到时间序列的波形。这个波形是由三个不同频率（1Hz，2Hz 和 3Hz）和不同幅度（0.15，1 和-0.1）的正弦波叠加而成。

在第二个子图中，观察到到的是信号的频谱。频谱图显示了各种频率成分的强度。在频率为 1Hz、2Hz 和 3Hz 处有显著的峰值，对应于在时间序列信号中加入的三个正弦波。同时，由于给这三个正弦波赋予了不同的振幅，所以这三个峰

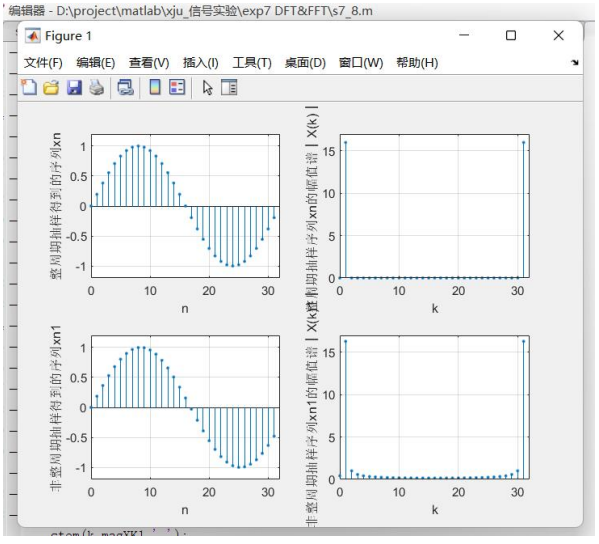
值的高度也不同。

【例 7-8】

构造一个信号频率 f = 1Hz，抽样频率 fs = 32Hz 的正弦序列，分别在整周期抽样间隔和非整周期抽样间隔两种情况下作谱分析。

代码：

```
clear all;fs=32;N=32;n=0:N-1;f=1;
d=(1/fs)*0.05;                          %抽样间隔误差
Ts=1/fs;                                %整周期抽样间隔，Ts*N=T
Ts1=1/fs-d;                             %非整周期抽样间隔，Ts*N≠T
xn=sin(2*pi*f*n*Ts);                    %整周期抽样得到的序列 xn
xn1=sin(2*pi*f*n*Ts1);                  %非整周期抽样得到的序列 xn1
XK=fft(xn,N);                           %由整周期抽样序列 xn 的 DFT 得到的谱
magXK=abs(XK);phaXK=angle(XK);
XK1=fft(xn1,N);                         %由非整周期抽样序列 xn1 的 DFT 得到的谱
magXK1=abs(XK1);phaXK1=angle(XK1);
subplot(2,2,1);stem(n,xn,'.');
xlabel('n');ylabel('整周期抽样得到的序列 xn');
axis([0,N,-1.2,1.2]);grid;
subplot(2,2,2)
k=0:length(magXK)-1;
stem(k,magXK,'.');
xlabel('k');ylabel('整周期抽样序列 xn 的幅值谱 | X(k) |');
axis([0,N,0,(fs/2)+1]);grid
subplot(2,2,3);stem(n,xn1,'.');
xlabel('n');ylabel('非整周期抽样得到的序列 xn1');
axis([0,N,-1.2,1.2]);grid;
subplot(2,2,4)
k=0:length(magXK1)-1;
stem(k,magXK1,'.');
xlabel('k');ylabel('非整周期抽样序列 xn1 的幅值谱 | X(k)1 |');
axis([0,N,0,(fs/2)+1]);grid
```



分析：

一组是基于整周期抽样的信号，另一组是基于非整周期抽样的信号。然后，利用快速傅里叶变换将这两组信号转换到频域，并生成了这两组信号的时间序列和频谱图。

通过对比体现了抽样过程中周期选择的重要性。如果采样周期不是信号周期的整数倍，即使误差微小，也可能导致频谱分析的结果出现明显的偏差。

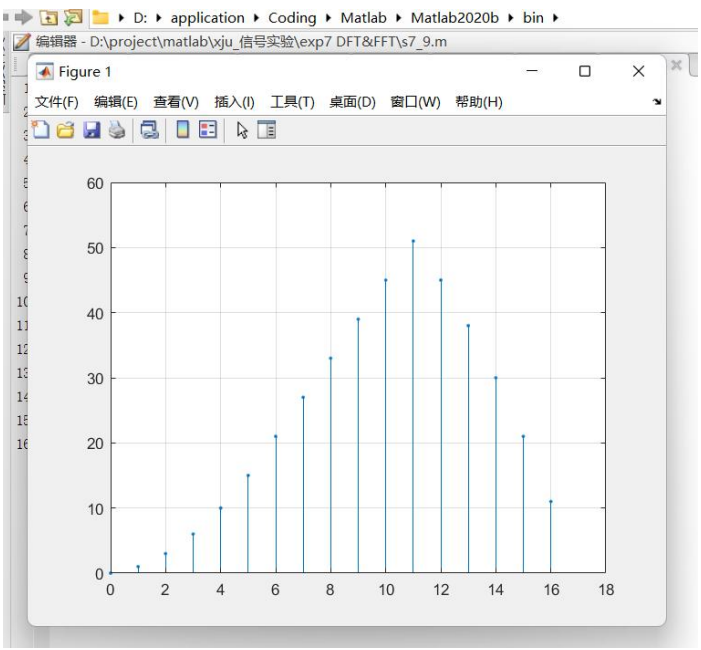
【例 7-9】

用 FFT（即快速卷积法）实现

$x(n)=\begin{cases} n & 0\le n\le 11 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$，$h(n)=\begin{cases} 1 & 0\le n\le 5 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$ 两序列的线卷积。

代码：

```
clear all;
n=[0:11];m=[0:5];
N1=length(n);N2=length(m);
xn=n;hn=ones(1,N2);
N=N1+N2-1;
XK=fft(xn,N);
HK=fft(hn,N);
YK=XK.*HK;
yn=ifft(YK,N);
if all (imag(xn)==0)&(all(imag(hn)==0))
    yn=real(yn);
end
x=0:N-1;
stem(x,yn,'.');
axis([0,18,0,60]);
grid on;
```



分析：使用快速傅里叶变换和逆快速傅里叶变换来高效地计算两个信号的卷积。先对输入信号 xn 和 hn 进行了傅里叶变换，并将结果相乘，然后对乘积进行逆傅里叶变换以得到最终的卷积结果 yn

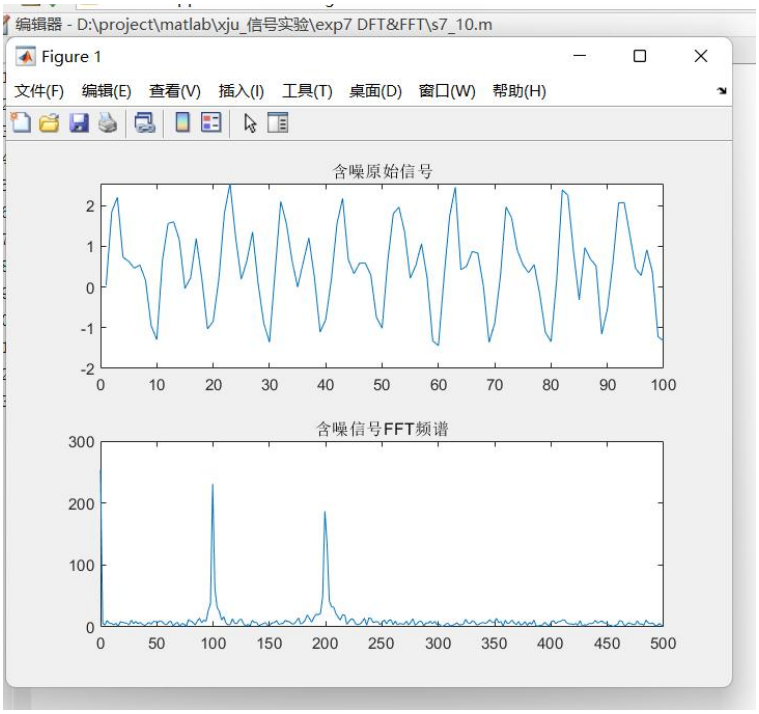
[例 7-10]

fft 在信号分析中的应用

使用频域分析方法从受噪声污染的信号 x(t)中鉴别出有用的信号。

代码：

```
t=0:0.001:1;
%采样周期为 0.001s,即采样频率为 1000Hz;
%产生受噪声污染的正正弦波信号;
x=sin(2*pi*100*t)+sin(2*pi*200*t)+rand(size(t));
subplot(2,1,1)
plot(x(1:100)); title('含噪原始信号')
%画出时域内的信号;
Y=fft(x,512);
%对 X 进行 512 点的傅立叶变换;
f=1000*(0:256)/512;
%设置频率轴（横轴）坐标，1000 为采样频率;
subplot(2,1,2)
plot(f,abs(Y(1:257))); title('含噪信号 FFT 频谱')
```



分析：在第一个子图中，观察原始信号在时域中的图形，可以看到信号波形由于噪声的存在而显得复杂且不规则。

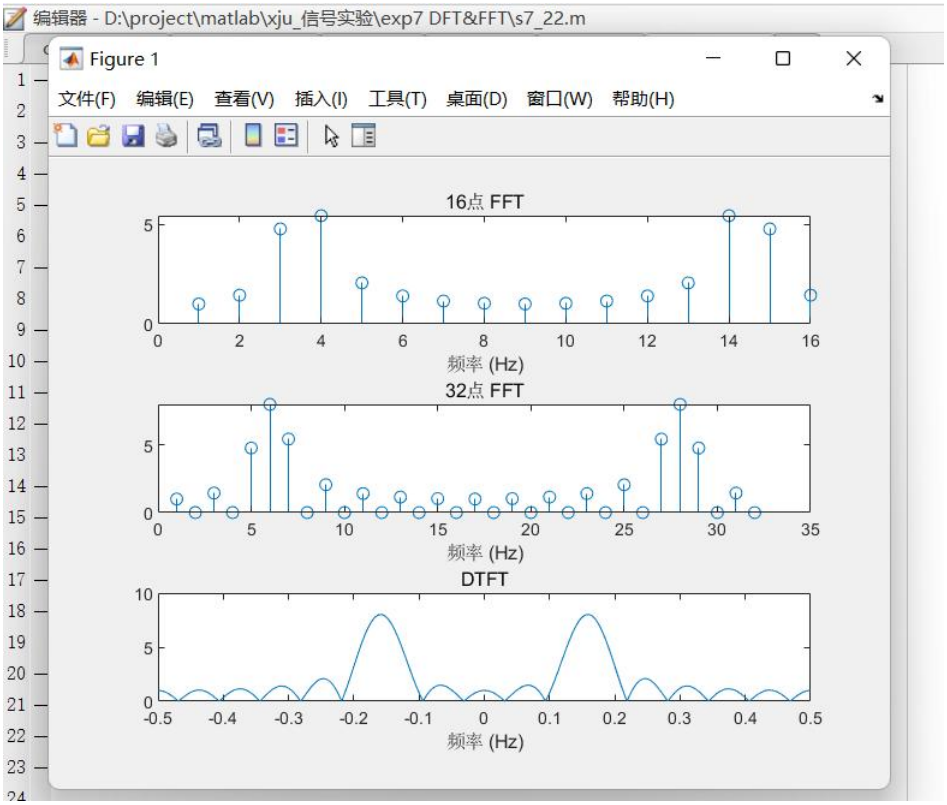
然后，该代码对复合信号进行了 512 点的快速傅里叶变换（FFT）。这将信号从时域转换到频域，能够查看该信号的频率分量。

在第二个子图中，绘制的是 FFT 结果的幅度谱。可以看到在 100Hz 和 200Hz 处有两个显著的峰值，这正是原始信号中的两个正弦波成分。也可以看到在其他频率下存在一些较小的幅度，这是由随机噪声导致的。

2、分别计算 16 点序列 $\mathrm{x(n)}=\cos\frac{5\pi}{16}n, 0\le n\le 15$ 的 16 点和 32 点 fft,绘出幅度谱图形，并绘出该序列的 DTFT 幅频，观察分析结果。

代码：

```
clear;
% 计算 16 点序列
n1 = 0:15;
x1 = cos(5*pi*n1/16);
X1 = fft(x1, 16);
% 计算 32 点 FFT
X2 = fft(x1, 32);
% DTFT
f = -0.5:0.001:0.5;
w = 2*pi*f;
n2 = 0:15;
X3 = x1 * exp(-1j * n2.' * w);

figure;
subplot(3, 1, 1);
stem(abs(X1));
title('16 点 FFT');
xlabel('频率 (Hz)');

subplot(3, 1, 2);
stem(abs(X2));
title('32 点 FFT');
xlabel('频率 (Hz)');

subplot(3, 1, 3);
plot(f, abs(X3));
title('DTFT');
xlabel('频率 (Hz)');
```



第二个子图显示的是 32 点 FFT 的幅度谱。相比于 16 点 FFT，32 点 FFT 提供了更高的频率分辨率，可以在频率域中看到更多的细节。但是，原始信号的长度仍然是 16 点，所以多出来的点实际上是由零填充产生的，并没有增加原始信号的信息。

第三个子图显示的是 DTFT 的幅度谱。DTFT 提供了连续的频率分辨率，可以看到更多的频谱信息。DTFT 是对所有频率进行计算，所以可以看到整个频谱范围内的细节。

3、已知某序列在单位圆上的 N=64 等分样点的 Z 变换为

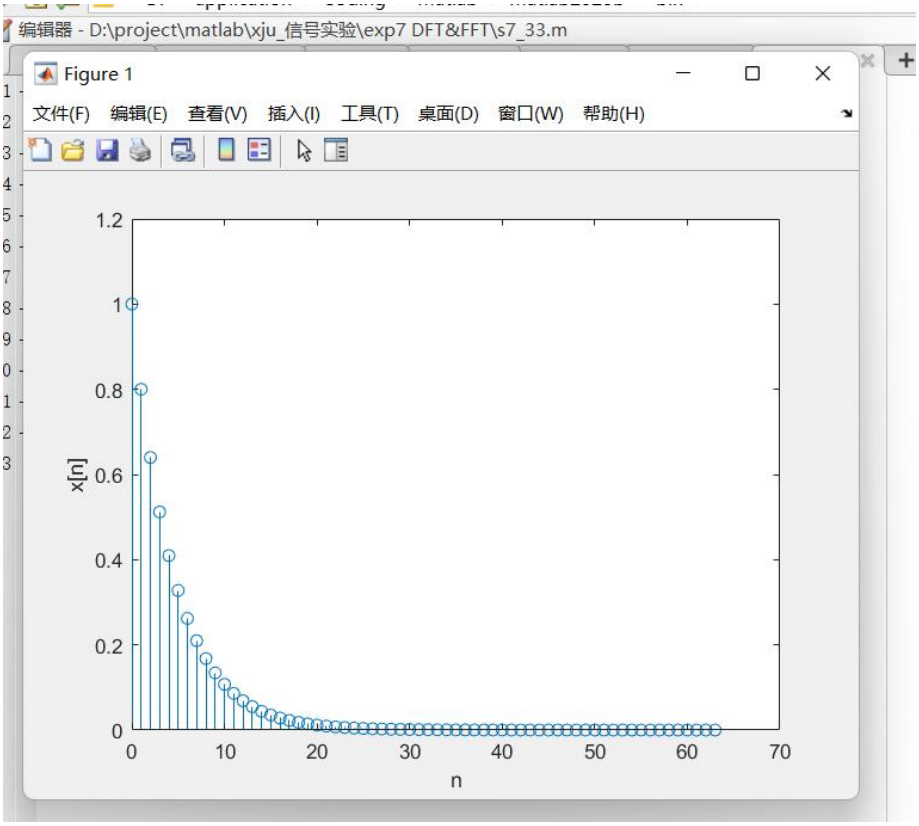
$$X(Z_k) = X(k) = \frac{1}{1 - 0.8e^{-j2\pi k/N}} \quad ,k = 0,1,2,\ldots,63$$

用 N 点 IFFT 程序计算，绘出。

代码：

```
clear;

N = 64;
k = 0:N-1;
Zk = exp(-1j*2*pi*k/N);
Xk = 1 ./ (1 - 0.8 * Zk);

xn = ifft(Xk, N);
```

```
figure;
stem(0:N-1, real(xn));
xlabel('n');
ylabel('x[n]');
```



4、在实验四基础上继续完善（选做）

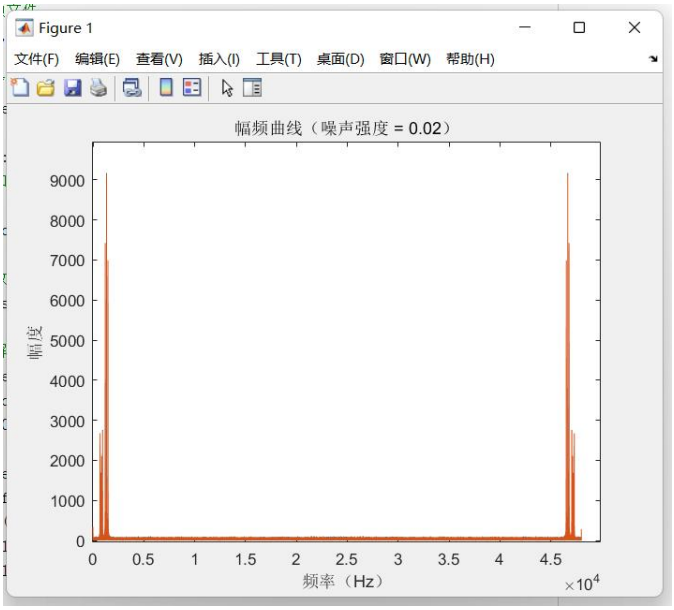
1）请查询资料，MATLAB 实现：采集一段 10 秒电话拨号音(长按 1 或其他数字)，选择合适的采样频率抽样，转换为离散时间信号，存储在 MATLAB 中，并对其添加强度不同的随机噪声后播放出来，描述一下听见的效果如何？

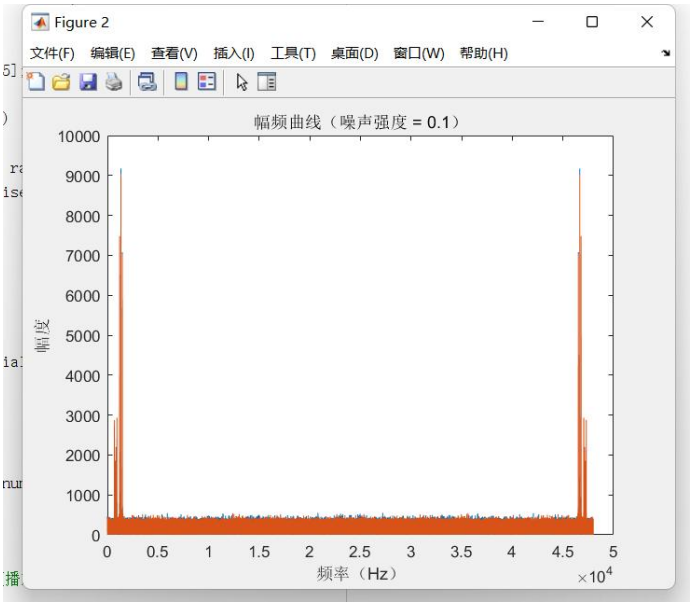
2）选择合适的点数，对采样后的纯净信号和含噪信号分别求解 FFT，绘制其幅频曲线，观察结果。

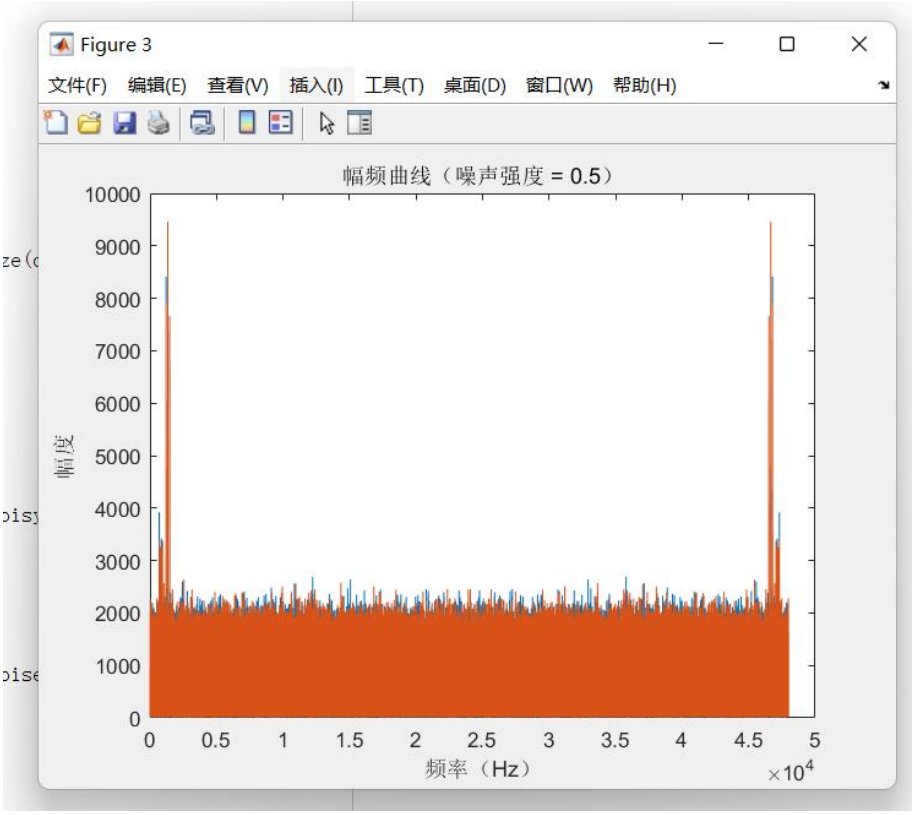
代码：

```
% 读取音频文件
[dialtone, fs] = audioread('bohaoyin.wav');

% 定义噪声强度
noise_intensities = [0.02, 0.1, 0.5];

for i = 1:length(noise_intensities)
    % 添加噪声
    noise = noise_intensities(i) * randn(size(dialtone));
```

```
        dialtone_noisy = dialtone + noise;

        % 播放音频
        soundsc(dialtone_noisy, fs);

        % 求解 FFT 并绘制幅频曲线
        N = length(dialtone);
        dialtone_noisy_fft = abs(fft(dialtone_noisy, N));
        f = (0:N-1)*(fs/N); % 频率轴

        figure;
        plot(f, dialtone_noisy_fft);
        title(['幅频曲线（噪声强度 = '
num2str(noise_intensities(i)) '）']);
        xlabel('频率（Hz）');
        ylabel('幅度');

        % 暂停，以便于我们听到每次的音频播放
        pause(10);
    end
```







噪声强度为 0.02 时可以听清拨号的声音，噪声的声音较小。到了 0.1 的强度时就可以明显听出噪声的声音，因为拨号声的频率较高还可以清晰听出拨号音。强度为 0.5 时，噪声过大，拨号声已经有部分已经被覆盖。

【思考题】

1、分析 ZT、DTFT 和 DFT 之间的相互关系。

ZT 是一种可对离散时间信号进行分析的方法，提供了在复平面的全局视图，可以用于分析离散时间系统的稳定性和频率响应等。

DTFT 是将离散时间信号转换到频域的方法。与 ZT 不同，DTFT 的频域是连续的，并且只在单位圆上定义。当 ZT 的 Z 在单位圆上时，ZT 就退化为 DTFT。

DFT 则是 DTFT 的离散版本，它在时间和频率上都是离散的，只能提供信号在有限区间的频域信息。DFT 可以看作是在 DTFT 的单位圆上采样的结果。

2、分析比较 N 点 DFT 和 FFT 的复乘、复加运算量。

N 点 DFT 的复杂度是 O(N^2)，因为它需要进行 N^2 次复数乘法和复数加法。

FFT 是一种高效的 DFT 算法，其复杂度是 O(N logN)。FFT 通过分治法将 DFT 分解为更小的 DFT，大大减少了运算量。

3、在什么条件下，两序列的圆周卷积和线性卷积相等？

当两个序列 x(n)和 h(n)的长度之和小于等于 DFT 的点数 N 时，它们的圆周卷积和线性卷积结果相等。

4、利用 FFT 求解连续信号频谱需经过哪些环节/会遇到哪些问题？如何解决？

首先需要将连续信号离散化，涉及到抽样定理和抽样频率的选择。如果抽样频率不足，就可能导致混叠现象。

然后，由于 FFT 假设输入信号是周期的，如果输入信号不是完整的周期，可能会导致频谱泄漏。可以通过窗函数来减少泄漏。

最后，因为 FFT 的输入长度 N 必须是 2 的整数次幂，需要通过零填充来达到这个长度。

【实验总结】

在这次的实验中，研究了离散信号的傅立叶变换及其在信号处理中的重要应用。实验绍了 ZT、DTFT 和 DFT 之间的相互关系，这些理论知识是理解离散信号和系统的频域分析的基础。

深入学习了 DTFT 和 DFT 的概念及其计算方法，对离散时间信号和系统的频域分析有了更深入的理解。

了解了 FFT 是一种高效计算 DFT 的算法，其复杂度为 O(N logN)，比直接计算 DFT 的 O(N^2)复杂度要低得多。。

通过对合成信号和真实电话拨号音信号的 FFT 分析，我们实践了如何使用 FFT 对信号进行频域分析，并观察了不同强度噪声对信号频谱的影响。

这次实验提高了我对离散信号傅立叶变换理论的理解，提高了使用 FFT 进行信号处理的能力，为以后在实际工程问题中应用 FFT 打下了坚实的基础。