**实验5 离散时间信号的频域分析(ZT和DTFT)**

一、实验目的   
　　(1) 掌握离散时间信号Z变换和逆Z变换的实现方法及编程思想;   
　　(2) 了解函数ztrans、iztrans、zplane、residuez的调用格式及作用;

1. 了解离散时间信号DTFT变换的求解；
2. 理解奈奎斯特采样定理；

# 二、 实验原理

## 2.1 Z变换

z变换是一种对离散信号和系统进行分析的重要数学工具。前面两章介绍的傅里叶变换和拉普拉斯变换可以将连续系统时域的微分方程变换到频域的代数方程，大大简化了分析计算过程。与之相似，z变换可以将离散系统的差分方程变换为z域上的代数方程，使其求解过程得以简化。

z正反变换如下：





其中，C为X(z) 的收敛域(ROC )中的一闭合曲线

MATLAB 符号数学工具箱提供了计算离散时间信号单边 z 变换的函数 ztrans 和 z

反变换函数 iztrans。

**（1）Z正变换**  
　　功能： ztrans可以实现信号f(k)的(单边)Z变换。  
　　调用格式：  
　　F=ztrans(f)： 实现函数f(n)的Z变换，默认返回函数F是关于z的函数。  
　　F=ztrans(f，w)：实现函数f(n)的Z变换，返回函数F是关于w的函数。  
　　F=ztrans(f，k，w)：实现函数f(k)的Z变换，返回函数F是关于w的函数。

**【例5.1】确定信号f1(n)=3n\*u(n)，f2(n)=cos(2n)\*u(n)的Z变换。**

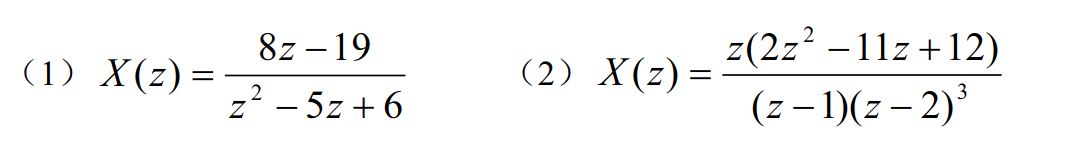
MATLAB程序：   
%确定信号的Z变换   
syms n z;%声明符号变量   
f1=3^n；   
f1\_z=ztrans(f1)；   
f2=cos(2\*n)；   
f2\_z=ztrans(f2)；

运行后在命令窗口显示：   
f1 =   
3^n   
f1\_z =   
1/3\*z/(1/3\*z-1)   
f2 =   
cos(2\*n)   
f2\_z =   
(z+1-2\*cos(1)^2)\*z/(1+2\*z+z^2-4\*z\*cos(1)^2)

**（2）单边逆Z变换**  
　　功能：iztrans可以实现信号F(z)的逆Z变换。  
　　调用格式：  
　　f=iztrans(F)：实现函数F(z)的逆Z变换，默认返回函数f是关于n的函数。  
　　f=iztrans(F，k)：实现函数F(z)的逆Z变换，返回函数f是关于k的函数。  
　　f=iztrans(F，w，k)：实现函数F(w)的逆Z变换，返回函数f是关于k的函数。

上式中的 x 和 Z 分别为时域表达式和 z 域表达式的符号表示，可通过 sym 函数来定义。

**【例5.2】试用 iztrans 函数求下列函数的 z 反变换**



解：（1）z 反变换 MATLAB 源程序为

>>Z=str2sym('(8\*z-19)/(z^2-5\*z+6)');

>>x=iztrans(Z);

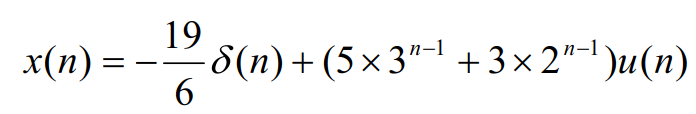
>>simplify(x)

ans =

(3\*2^n)/2 + (5\*3^n)/3 - (19\*kroneckerDelta(n, 0))/6

其中，kroneckerDelta(n, 0)是冲激函数δ(n)在 MATLAB符号工具箱中的表示，反变换后的函数形

式为



（2）z 反变换 MATLAB 源程序为

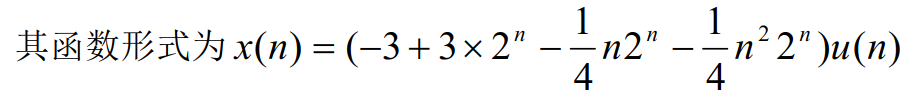
>>Z=str2sym('z\*(2\*z^2-11\*z+12)/(z-1)/(z-2)^3');

>>x=iztrans(Z);

>>simplify(x)

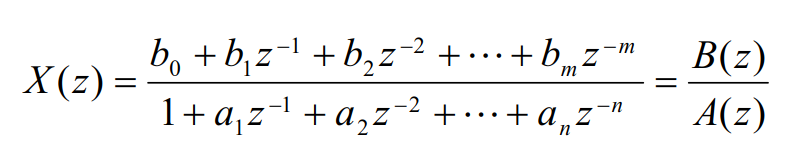
ans=

-3+3\*2^n-1/4\*2^n\*n-1/4\*2^n\*n^2



**如果信号的 z 域表示式 X (z) 是有理函数，进行 z 反变换的另一个方法是对 X (z)**

**进行部分分式展开，然后求各简单分式的 z 反变换。设 X (z) 的有理分式表示为**

****

**MATLAB 信号处理工具箱提供了一个对 X (z) 进行部分分式展开的函数 residuez，其**

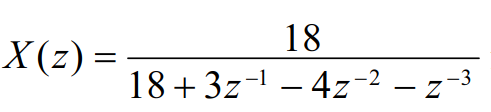
**语句格式为:**

**[R,P,K]=residuez(B,A)**

**其中，B，A 分别表示 X(z)的分子与分母多项式的系数向量；R 为部分分式的系数向**

**量；P 为极点向量；K 为多项式的系数。若 X(z)为有理真分式，则 K 为零。**

**【例5.3】试用 MATLAB 命令对函数**

****

**进行部分分式展开，并求出其 z 反变换。**

解：MATLAB 源程序为>>B=[18];

>>A=[18,3,-4,-1];

>>[R,P,K]=residuez(B,A)

R=

0.3600

0.2400

0.4000

P=

0.5000

-0.3333

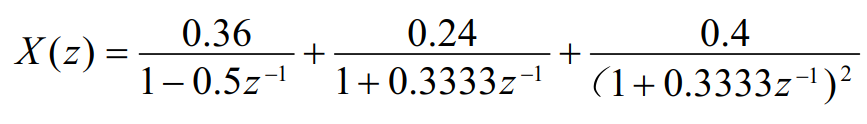
-0.3333

K=

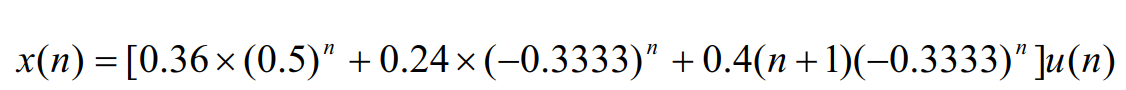
[ ]

从运行结果可知， p2  p3 ，表示系统有一个二重极点。所以，X(z)的部分分式

展开为

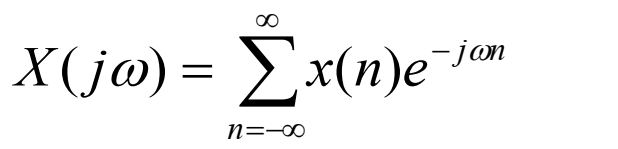


因此，其 z 反变换为



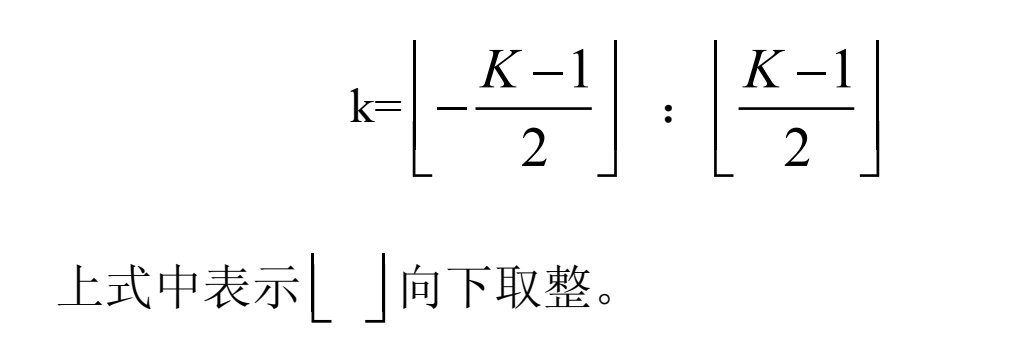
## 2.2 DTFT变换

对于满足绝对可和的序列x(n)，其离散时间傅立叶变换 （DTFT）定义为：



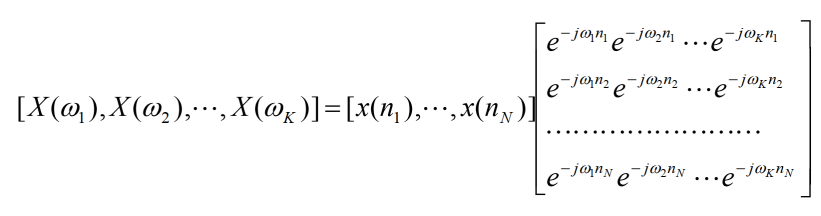
X(n)序列的傅立‎叶变换（DTFT）在频域是连‎续的，并且以 w=2π为周期‎。因此只需要‎知道的一个‎周期，即w=[0， 2π ]，或[-π, π ], 就可以分析‎序列的频谱。

用MATLAB计算DTFT，必须在-π≤w ≤π范围内，用间隔很密的‎、长度很长的‎向量来近似w，该向量中各‎个值可用下‎式表示：

 ，其中dw为频率分辨率，其中k可取

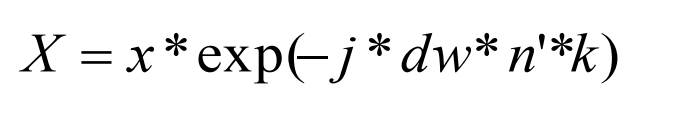
在MATL‎AB中的向‎下取整函数‎为floor，floor‎(x)的作用是把‎ x向下(向-无穷方向）取整。

上式表示把数‎字频率的范‎围2π均分‎成**K**份，k表示频‎序向量， [wk]为频率向量。给定了输入‎序列（包括序列x及其位置向‎量n），又设定了频‎率分辨率dw及频序向量k，则  
DTFT‎ 的计算式可以用一个‎向量与矩阵‎相乘的运算‎来实现。



如果频率向‎量表为w=[w1 ,w2 ,……wk]=k\*dw ,而序列x(n)的位置向量为nx=[n1：nN]，则

式中矩阵‎的指数部分可以写成-j\*n’\*w，则求DTF‎T的程序可‎以写成



**【例5.4】求有限序列‎ x=[2， -1， 1， 1]的 DTFT‎， 其位置向量为nx=[0： 3]。**

**假如取64个频点，画出它在[-π π]范围内的幅频和相‎频特性**。

程序如下：

## clear;close;

## x=[2,-1,1,1];nx=[0:3];K=64;dw=2\*pi/K;

## k=floor((-K/2+0.5):(K/2-0.5)); % 设定频序向量

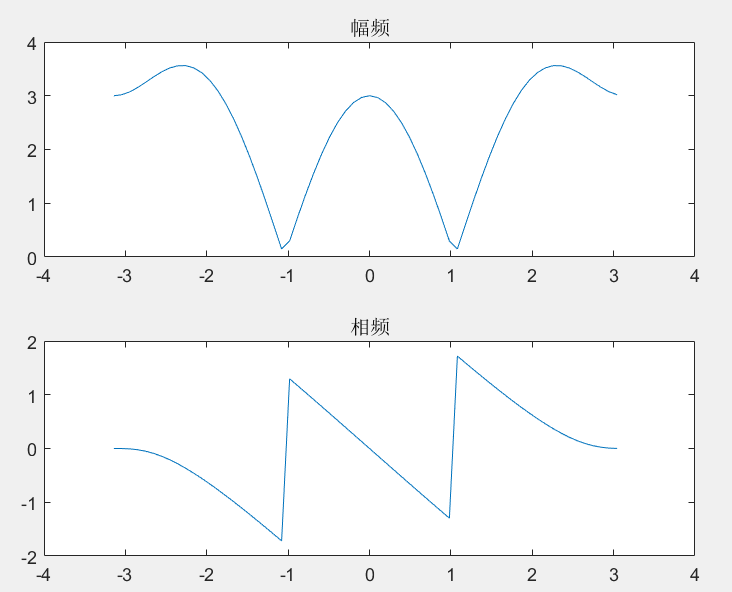
## %w=linsp‎ace(-8,8,1000);

## X=x\*exp(-j\*dw\*nx'\*k);% 计算DT‎FT

## subplot(211); plot(k\*dw,abs(X)), % 画幅频曲线‎

## subplot(212),plot(k\*dw,angle(X)); % 画相频曲线

**实验结果如图所示：**



## 2.3奈奎斯特采样定理

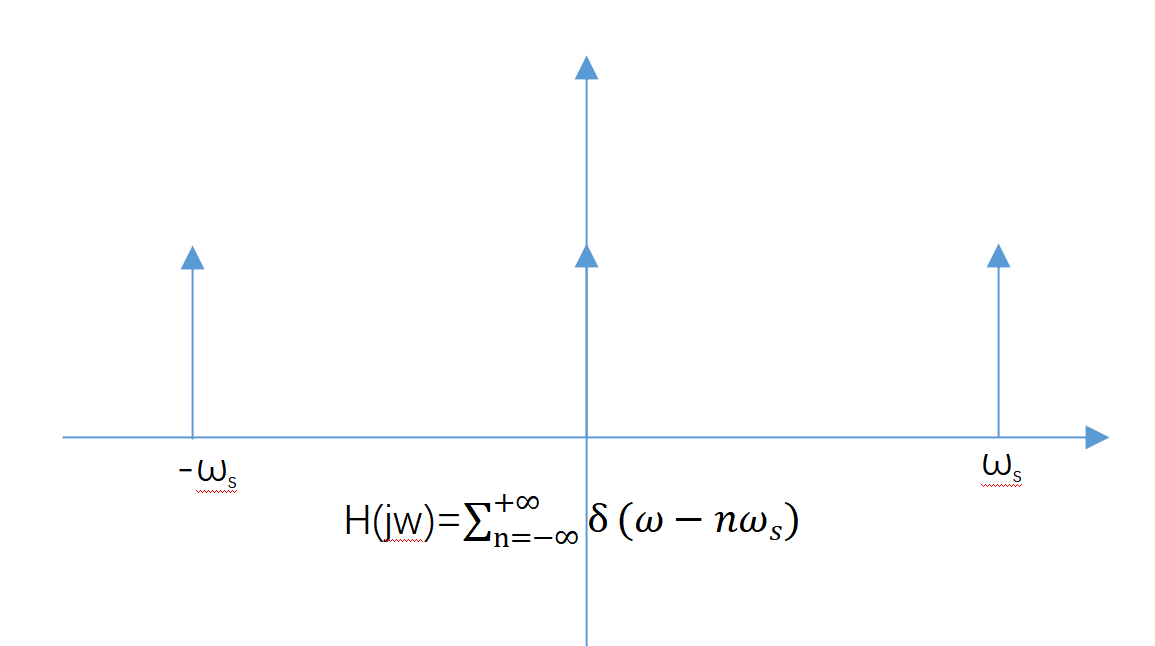
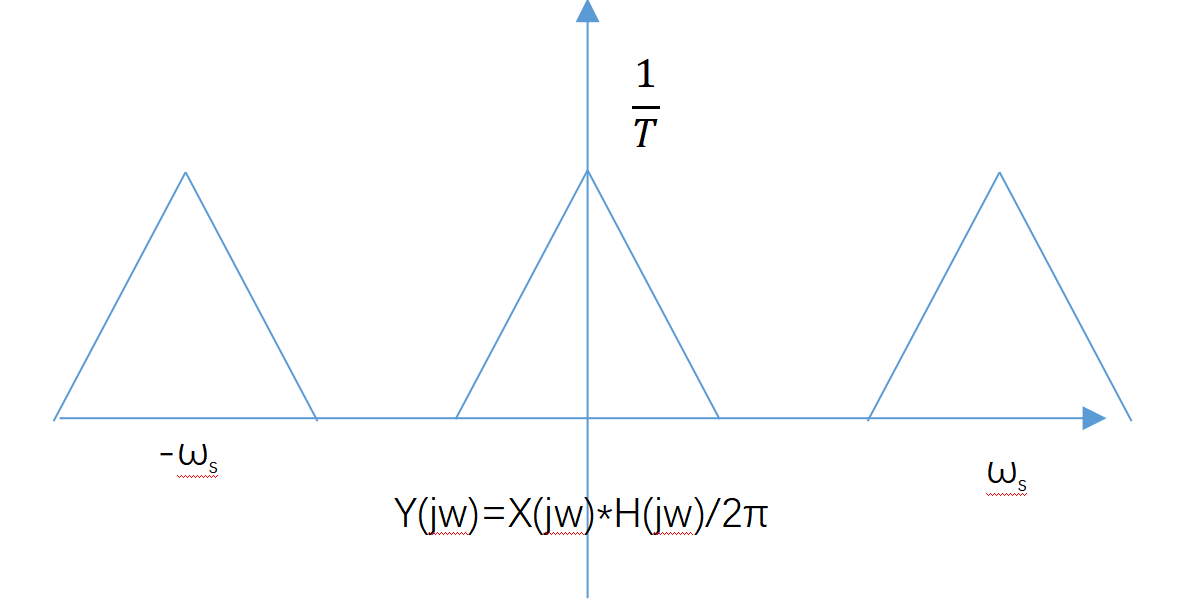
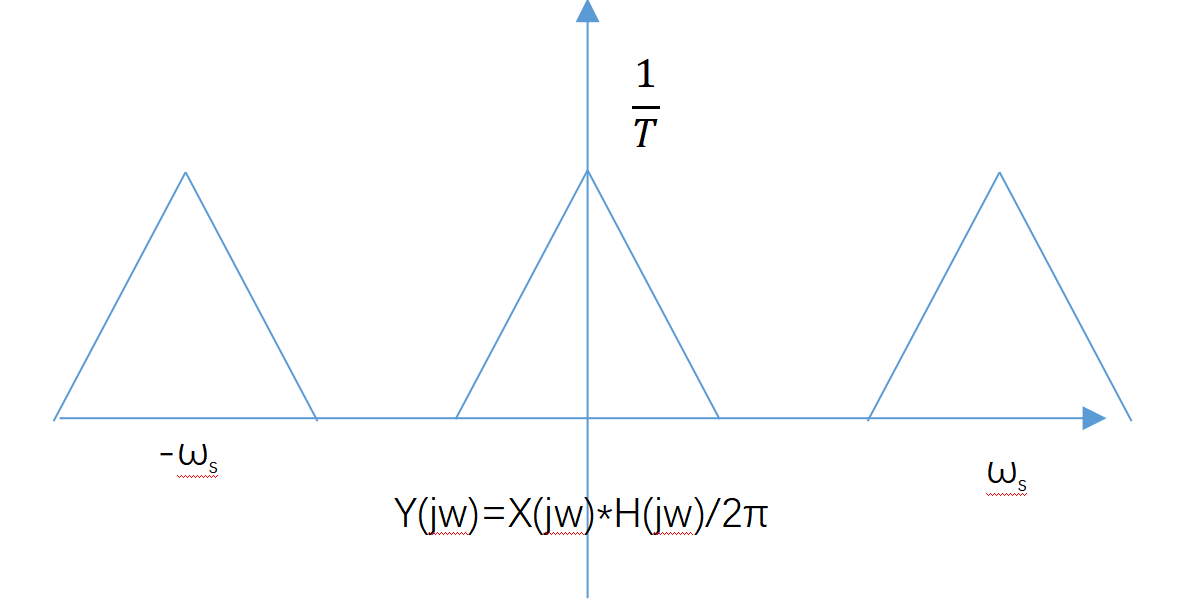
在信号与系统中，采样过程所遵循的规律称之为采样定理。它是贝尔实验室的瑞典裔美国电气工程师哈里·奈奎斯特首先提出的，因此又叫奈奎斯特定理。奈奎斯特定理描述了对一个时域信号进行采样时，采样的频率必须高于信号最大频率的两倍，这样在采样以后的信号可以比较完整的保留原始信号，失真较少。一般在实际应用过程中，采样频率保持在信号最高频率的2.56~4倍；例如，一段标准的MP3文件采样频率是44100HZ，因为人声音的频率范围是20-20KHZ，这样的采样频率就可以很好的保留原始信号。

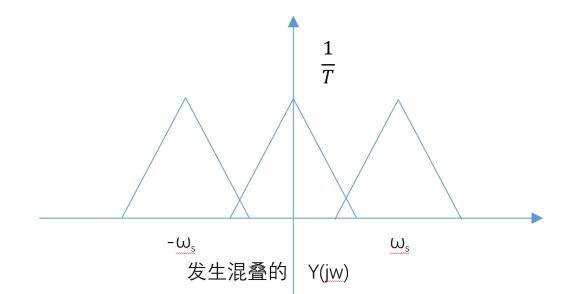
如果采样信号低于原始信号频率的2倍，就会发生混叠现象，即两段信号在某一个频率上叠加而发生混乱，这样还原出的信号是没有任何意义的。**采样频率的一半称为折叠频率**。

下面说明采样过程以及奈奎斯特定理(卷积表示采样):

假设原始信号是x(t)，这是一段时域上的模拟信号，如果对它进行间隔是T的等间隔理想采样，相当于将x(t)连入一个定时开关，它每隔T秒闭合一次，这样开关另一边输出的信号就是采样以后的信号。

设信号x(t)是带限信号(有最高频率)，而h(t)是抽样脉冲序列，且有FT[x(t)]=X(jw), FT[h(t)]=H(jw),采样前后频谱如图所示。

![BUQ3TM6](GSZ~U%~`41(WCU](data:image/png;base64,)上图所示的是在采样频率大于原始信号频率的二倍时的情况，显而易见的是，当采样频率小于原始信号频率的二倍，那么采样之后的信号将会发生混叠，类似以下，如图，发生混叠之后的信号很难再复原出来。



**【例5.5】给出一个模拟信号,**

**(1)对信号进行采样，得到采样序列，设置不同的采样频率fs(欠采样，临界采样和过采样),绘制图形。**

**(2)对不同采样频率下的采样序列进行分析，绘制其幅频曲线，进行对比分析。**

**【x(t)信号包含有2个信号，分别为50Hz,60Hz，最大频率为60Hz】**

程序如下：

**采样：**

function fz = caiyang( fy,fs )

%采样函数

fs0=10000;%用远大于信号频率的采样频率对信号采样，近似一个连续信号

t=-0.1:1/fs0:0.1;

k1=0:999;k2=-999:-1;

l1=length(k1);l2=length(k2);

f=[fs0\*k2/l2,fs0\*k1/l1];

w=[-2\*pi\*k2/l2,2\*pi\*k1/l1];

fx1=eval(fy);%将字符串自动识别并转化为matlab命令

FX1=fx1\*exp(-j\*[1:length(fx1)]'\*w)\*1/fs0;%其实是在求连续信号的傅里叶变换（数值计算）

figure %绘制图形

subplot(2,1,1),plot(t,fx1,'r-')

axis([min(t),max(t),min(fx1),max(fx1)]);

subplot(2,1,2),plot(f,abs(FX1))

axis([-100,100,0,max(abs(FX1))+100]);

Ts=1/fs;%采样频率为fs

t1=-0.1:Ts:0.1;

f1=[fs\*k2/l2,fs\*k1/l1];

t=t1;

fz=eval(fy);%将字符串自动识别并转化为matlab命令

FZ=fz\*exp(-j\*[1:length(fz)]'\*w);%求解采样之后离散信号的DTFT

figure

subplot(2,1,1),stem(t,fz,'.')

line([min(t),max(t)],[0,0])

subplot(2,1,2),plot(f1,abs(FZ),'m')

end

**采样重建：**

function fh = chongjian( fz,fs )

T=1/fs;dt=T/10;

t=-0.1:dt:0.1;

n=-0.1/T:0.1/T;

TMN=ones(length(n),1)\*t-n'\*T\*ones(1,length(t));

fh=fz\*sinc(fs\*TMN);

k1=0:999;k2=-999:-1;

l1=length(k1);l2=length(k2);

w=[-2\*pi\*k2/l2,2\*pi\*k1/l1];

FH=fh\*exp(-j\*[1:length(fh)]'\*w);

figure

subplot(2,1,1),plot(t,fh,'g')

axis([min(t),max(t),min(fh),max(fh)]);

line([min(t),max(t)],[0,0])

f=[10\*fs\*k2/l2,10\*fs\*k1/l1];

subplot(2,1,2),plot(f,abs(FH),'g'),

axis([-100,100,0,max(abs(FH))+2]);

**实际运行：**

x='sin(2\*pi\*50\*t)+cos(2\*pi\*60\*t)';

fs=caiyang(x,80);

fr=chongjian(fs,80);

fs=caiyang(x,120);

fr=chongjian(fs,120);

fs=caiyang(x,140);

fr=chongjian(fs,140);

采样结果图比较如下：

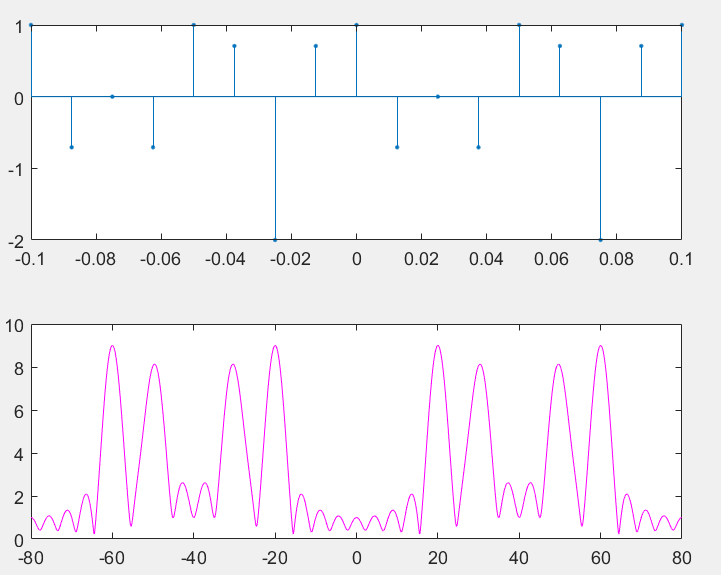
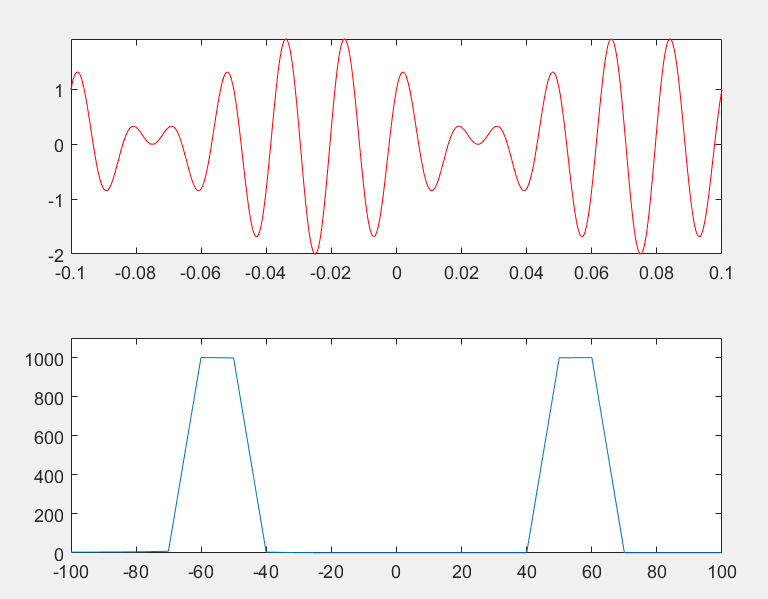


图 a原始连续信号及其频谱 图 b采样频率fs=80Hz离散信号及其频谱fs<2\*max(w)

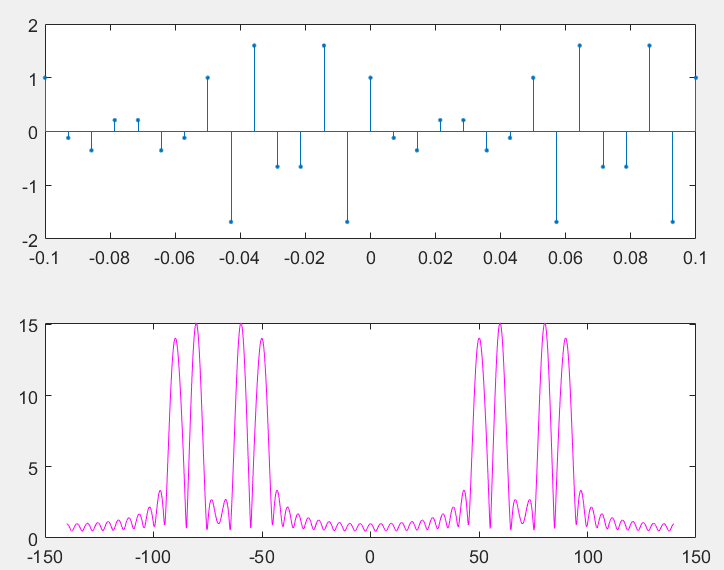
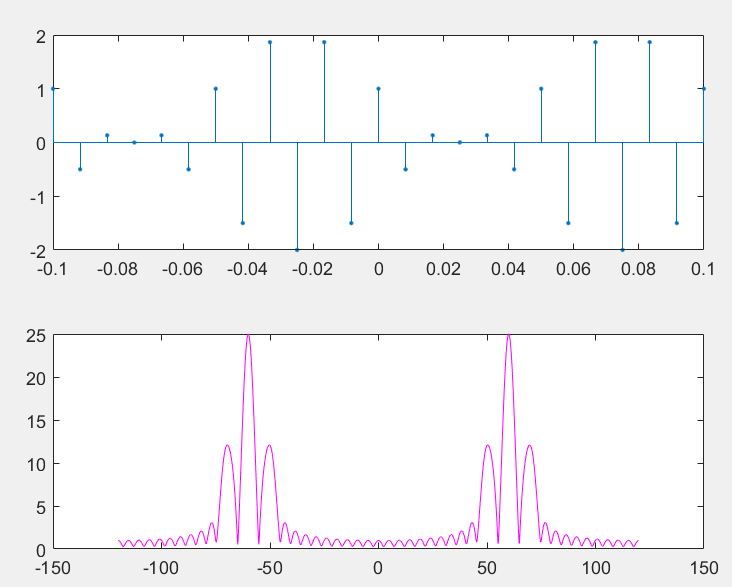
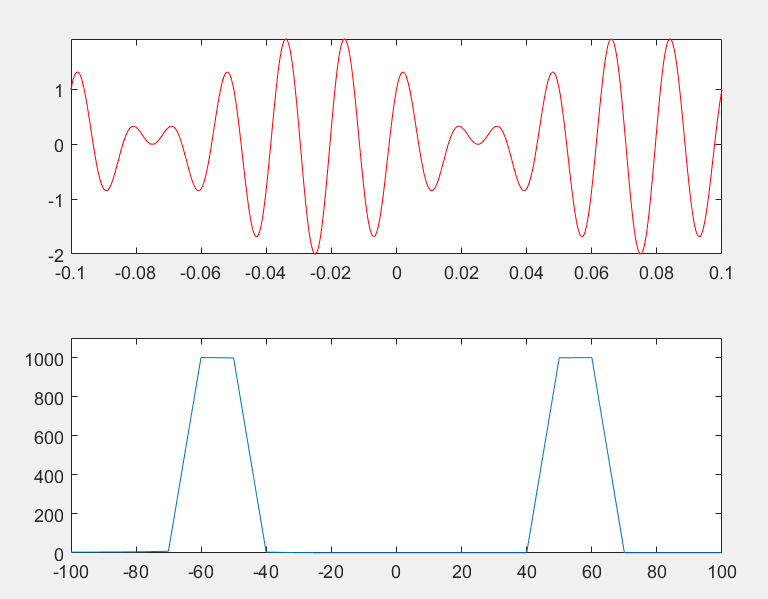
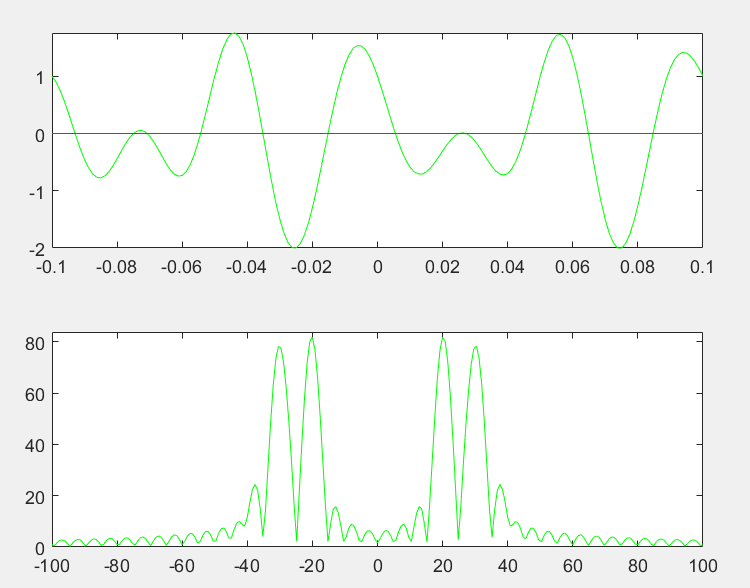


图 c采样频率fs=120Hz离散信号及其频谱fs=2\*max(w) 图d 采样频率fs=140Hz离散信号及其频谱fs>2\*max(w)

**本实验给出了采样的三种情况，欠采样，临界采样和过采样，看到过采样最合适，它可以很好的恢复原信号，说明了奈奎斯特定理的实用性。**

**重建信号的结果比较如下所示：**

图a 原始连续信号及其频谱 图 b采样频率fs=80Hz重建离散信号及其频谱fs<2\*max(w)

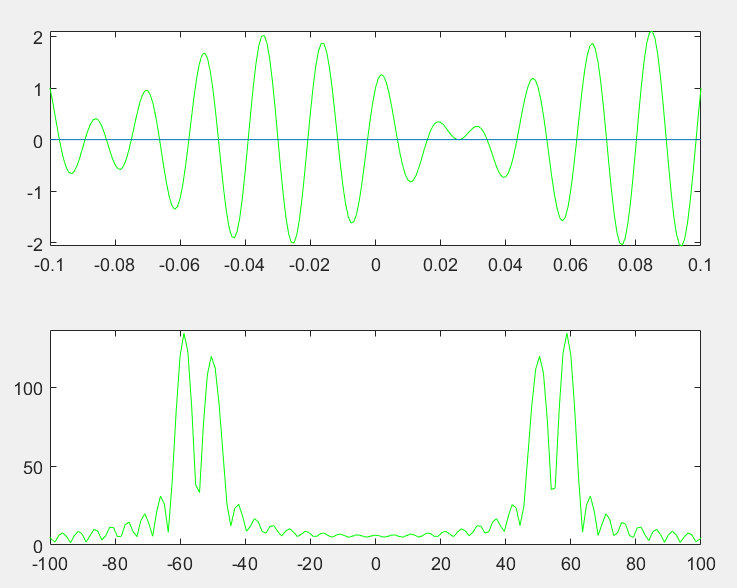
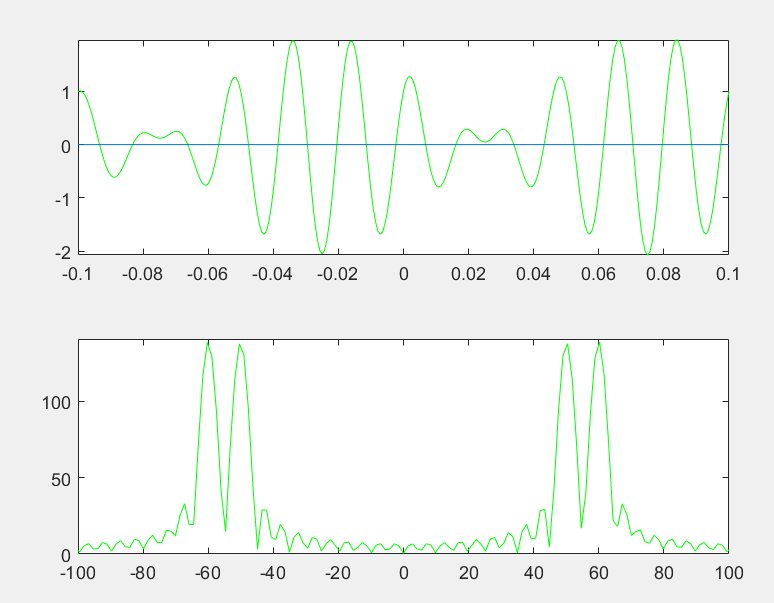
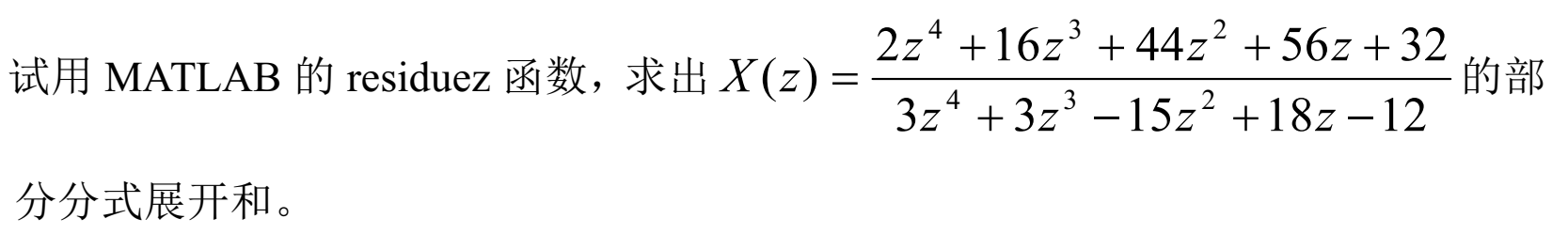


图 c采样频率fs=120Hz重建离散信号及其频谱fs=2\*max(w) 图d 采样频率fs=140Hz重建离散信号及其频谱fs>2\*max(w)

# 实验内容

1. **演示各例程，复现结果，并分析程序，掌握编程思路。**

**2、**

**3、计算X(z)=，|z|＞5的反变换，分析如下程序结果，写出x(n)的表达式：**MATLAB程序：   
%由部分分式展开求Z反变换

num=［0 1］;   
den=poly(［-5，1，1］);   
［r，p，k］= residuez(num，den)

**4、参照【例程5.5】完成以下内容:**

对信号X(t)=Ae-atsin(w0t)u(t)进行理想采样，可以得到一个理想的采样序列X(t)=Ae-a\*n\*Tsin(w0\*nT)（假设n取值范围为[0 50]），其中设A=1,a=-2,w0=600π

T为采样周期，请编程序对该理想采样信号进行分析。

1. 首先用采样频率为2000Hz，观察理想采样信号的幅频特性，在折叠频率以内分析频谱。
2. 改变采样频率为600Hz，观察所得幅频谱特性曲线
3. 进一步减小采样频率为400Hz，观察所得幅频特性曲线，是否会出现“混叠”，并分析原因。

# 思考题

1. 查询资料，了解在MATLAB中通过什么方法可以绘制零极点图。
2. Z变换的表达式X(z)确定时，其对应的x(n)是唯一的么？为什么？
3. 绝对可和的离散序列x(n)，其Z变换和DTFT变换之间有什么关系？

# 实验报告要求

完成以上内容，按需整理实验结果（图、程序、分析、结论等），总结实验心得，PDF格式