离散数学

Created By LYP

2026年 1 月 20 日

一、大题

0.1 命题逻辑

1. 用 CP 规则证明:

$$\neg P \vee (\neg Q \vee R),\ Q \to (R \to S),\ P\ \Rightarrow\ Q \to S$$

2. 用归谬法证明:

$$A \to \neg B,\ (\neg C \vee B),\ C \wedge \neg S\ \Rightarrow\ \neg A$$

3. 符号化下列论断，并验证其是否正确。

   若今天是星期二，那么我要考计算机科学或经济学； 若经济学教授病了，就不考经济学； 今天是星期二，并且经济学教授病了。 所以，我要考计算机科学。

   （设 P：今天是星期二；Q：我要考计算机科学； R：我要考经济学；S：经济学教授病了。）

4. 公安人员审理某珠宝商店的钻石项链失窃案，已知侦察结果如下：

   - 营业员 A 或 B 盗窃了钻石项链；
   - 若 B 作案，则作案时间不在营业时间；
   - 若 A 提供的证词正确，则货柜未上锁；
   - 若 A 提供的证词不正确，则作案发生在营业时间；
   - 货柜上了锁。

   试问：作案者是谁？要求写出推理过程。

0.2 谓词逻辑

1. 用谓词演算的推理规则证明：

$$\forall x\,(P(x) \to Q(x)),\ \forall x\,(Q(x) \wedge R(x) \to S(x)),\ P(a) \wedge R(a)\ \Rightarrow\ S(a)$$

2. 对下面推理进行符号化，并证明：

   不存在能表示成分数的无理数，所有有理数都能表示成分数。 因此，有理数都不是无理数。

   （设 $Q(x)$：x 是有理数； $G(x)$：x 能表示成分数； $F(x)$：x 是无理数。）

3. 符号化并证明:

   任何人如果他喜欢音乐，他就不喜欢体育。 每个人或者喜欢体育，或者喜欢美术。 有的人不喜欢美术。 因而有的人不喜欢音乐。

   （设 $M(x)$：x 喜欢音乐； $S(x)$：x 喜欢体育； $A(x)$：x 喜欢美术。）

4. 符号化并证明:

   会操作计算机的人都认识 26 个英文字母。 文盲都不认识 26 个英文字母。 有的文盲是很聪明的。 所以有的很聪明的人不会操作计算机。

   （个体域：所有人的集合。 设 $P(x)$：x 会操作计算机； $Q(x)$：x 认识 26 个英文字母； $R(x)$：x 是文盲； $W(x)$：x 很聪明。）

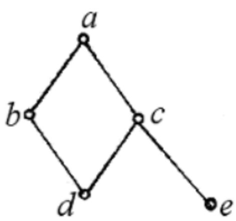
0.3 集合与关系、函数

1. 设

$$A = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\},$$

"/" 为集合 A 上的整除关系。问：$\langle A, / \rangle$ 是否为偏序集？若是，画出其哈斯图。

2. 对下图所给的偏序集 $(A, \leq)$，求下表所列集合的上界、下界、上确界和下确界，并将结果填入表中。



子集	上界	下界	上确界	下确界
$\{a, b, c\}$				
$\{c, d, e\}$				
A				

3. 设

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

集合 A 上的关系

$$R = \{\langle 1,3\rangle, \langle 1,5\rangle, \langle 2,5\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 4,5\rangle, \langle 5,4\rangle, \langle 6,3\rangle, \langle 6,6\rangle\}.$$

(1) 画出关系 R 的关系图，并求它的关系矩阵；

(2) 求 $r(R)$、$s(R)$ 及 $t(R)$。

4. 设 $a, b \in \mathbb{R}$，且 $a < b$，定义函数

$$f : [a, b] \to [0, 1], \qquad f(x) = \frac{b - x}{b - a}.$$

证明：f 是双射，并求出其逆映射。

0.4 代数结构

1. 设“$*$”是实数集 $\mathbb{R}$ 上的二元运算，其定义如下：

$$a * b = a + b + 2ab.$$

(1) 求 $2 * 3$、$3 * (-5)$ 和 $7 * \frac{1}{2}$；

(2) 判断 $\langle \mathbb{R}, * \rangle$ 是否为半群，$*$ 是否可交换；

(3) 求 $\mathbb{R}$ 中关于运算 $*$ 的单位元；

(4) 判断 $\mathbb{R}$ 中哪些元素有逆元素，并求其逆元素。

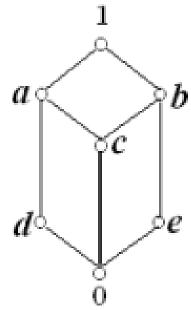
2. 设 $A = \{a, b, c, d\}$，$\langle A, * \rangle$ 是交换群，且 a 是 $\langle A, * \rangle$ 的单位元。运算 $*$ 的运算表如下（表中含未知项 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$）：

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	x_1	x_2
c	c	x_4	a	x_3
d	d	x_5	x_6	a

求 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$，并说明理由。

0.5 格与布尔代数

1. 求出下面哈斯图表示的格中元素的补元（如果存在的话），并将结果填入下表。



元素	0	1	a	b	c	d	e
补元							

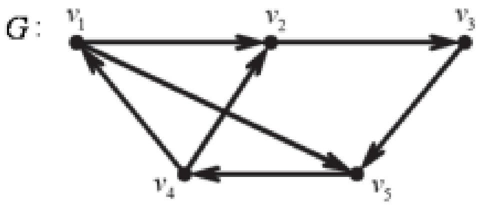
2. 设
$$A=\{1,2,3,5,6,10,15,30\},$$
"/" 为集合 A 上的整除关系。
   (1) $\langle A,/\rangle$ 是否为偏序集？若是，画出其哈斯图；
   (2) $\langle A,/\rangle$ 是否构成格？为什么？
   (3) $\langle A,/\rangle$ 是否构成布尔代数？为什么？

0.6 图论

1. 对有向图 $G=(V,E)$ 求解下列问题:

   (1) 写出有向图 G 的邻接矩阵 A;

   (2) 在 $G=(V,E)$ 中，长度为 3 的不同的路有多少条? 其中不同的回路有多少条?



2. 通讯中符号 a,b,c,d,e,f 出现的频率分别为： $a:30\%$，$b:25\%$，$c:20\%$，$d:12\%$，$e:8\%$，$f:5\%$。

   通过画出相应的最优二叉树，求传输这些符号的最佳前缀编码， 并计算传输 10000 个按上述频率出现的字母需要多少个二进制码。

二、选择题

1. 下列等价公式正确的是（　）。

    A. $P \to Q \Leftrightarrow Q \to P$

    B. $P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$

    C. $P \to Q \Leftrightarrow \neg Q \vee P$

    D. $P \to Q \Leftrightarrow \neg Q \vee \neg P$

2. 以下推理正确的是（　）。

    A. $P \vee Q \Rightarrow Q$

    B. $P \vee Q \Rightarrow P$

    C. $\neg Q,\ P \to Q \Rightarrow \neg P$

    D. $\neg Q,\ P \to Q \Rightarrow P$

3. 以下推理错误的是（　）。

    A. $P,\ \neg P \vee Q \Rightarrow Q$

    B. $P \vee Q \Rightarrow P$

    C. $\neg Q,\ P \to Q \Rightarrow \neg P$

    D. $P,\ P \to Q \Rightarrow Q$

4. 下列等价公式正确的是（　）。

    A. $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$

    B. $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee Q$

    C. $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$

    D. $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge Q$

5. 下列蕴含式成立的是（　）。

    A. $\exists x(F(x) \wedge G(x)) \Rightarrow \exists x F(x) \wedge G(x)$

    B. $\forall x(F(x) \vee G(x)) \Rightarrow \forall x F(x) \vee \forall x G(x)$

    C. $\forall x F(x) \Rightarrow \exists x F(x)$

    D. $\forall x F(x) \Rightarrow \exists x F(x)$

6. 设 $S(x)$ 表示“x 是运动员”，$T(x)$ 表示“x 是教练员”，$A(x,y)$ 表示“x 钦佩 y”，则命题“所有运动员都钦佩某些教练员”符号化为（ ）。

    A. $\forall x(S(x) \to A(x,y))$

    B. $\forall x(S(x) \to \exists y(T(y) \wedge A(x,y)))$

    C. $(\forall x)(\exists y)(S(x) \wedge T(y) \wedge A(x,y))$

    D. $(\forall x)(\exists y)(S(x) \wedge T(y) \to A(x,y))$

7. 谓词演算中，$P(a)$ 是 $\forall x P(x)$ 的有效结论，其理论依据是（ ）。

    A. 全称指定规则（US）

    B. 全称推广规则（UG）

    C. 存在指定规则（ES）

    D. 存在推广规则（EG）

8. 谓词演算中，$P(a)$ 是 $\exists x P(x)$ 的有效结论，其理论依据是（ ）。

    A. 全称指定规则（US）

    B. 全称推广规则（UG）

    C. 存在指定规则（ES）

    D. 存在推广规则（EG）

9. 设 R_1 和 R_2 是集合 A 上的任意两个关系，则下列命题为真的是（ ）。

    A. 若 R_1 和 R_2 是自反的，则 $R_1 \circ R_2$ 也是自反的

    B. 若 R_1 和 R_2 是非自反的，则 $R_1 \circ R_2$ 也是非自反的

    C. 若 R_1 和 R_2 是对称的，则 $R_1 \circ R_2$ 也是对称的

    D. 若 R_1 和 R_2 是传递的，则 $R_1 \circ R_2$ 也是传递的

10. 集合 A 上的关系 R 为一个偏序关系，当且仅当 R 具有（ ）。

    A. 自反性、对称性和传递性

    B. 自反性、反对称性和传递性

    C. 反自反性、对称性和传递性

    D. 反自反性、反对称性和传递性

11. 集合 A 上的关系 R 为一个等价关系，当且仅当 R 具有（ ）。

    A. 自反性、对称性和传递性

    B. 自反性、反对称性和传递性

    C. 反自反性、对称性和传递性

    D. 反自反性、反对称性和传递性

12. 集合 A 上的等价关系 R，其等价类的集合 $\{[a]_R \mid a \in A\}$ 称为（ ）。

    A. A 与 R 的并集，记为 $A \cup R$

    B. A 与 R 的交集，记为 $A \cap R$

    C. A 与 R 的商集，记为 A/R

    D. A 与 R 的差集，记为 $A - R$

13. 设 $P_n(\mathbb{R})$、$M_n(\mathbb{R})$ 分别表示全体 n 阶实可逆矩阵和全体 n 阶实矩阵的集合， 以下不是阿贝尔群的是（ ）。

    A. $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$

    B. $\langle \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \times \rangle$

    C. $\langle P_n(\mathbb{R}), \times \rangle$

    D. $\langle M_n(\mathbb{R}), + \rangle$

14. 设 $\mathbb{Q}$ 为有理数集，$\langle \mathbb{Q}, * \rangle$（其中 $*$ 为普通减法）不能构成（ ）。

    A. 群

    B. 独异点

    C. 半群

    D. 交换半群

15. 设 $*$ 是集合 A 上的二元运算，称元素 e 为关于运算“$*$”的幺元，如果（ ）。

    A. $e \in A$，且对任意 $x \in A$，有 $e * x = x * e = x$

    B. $e \in A$，且对任意 $x \in A$，有 $e * x = x * e = e$

    C. $e \in A$，且存在 $x \in A$，使 $e * x = x * e = x$

    D. $e \in A$，且存在 $x \in A$，使 $e * x = x * e = e$

16. 设 $*$ 是集合 A 上的二元运算，称元素 θ 为关于运算"$*$"的零元，如果（　）。

    A. $\theta \in A$，且对任意 $x \in A$，有 $\theta * x = x * \theta = x$

    B. $\theta \in A$，且对任意 $x \in A$，有 $\theta * x = x * \theta = \theta$

    C. $\theta \in A$，且存在 $x \in A$，使 $\theta * x = x * \theta = x$

    D. $\theta \in A$，且存在 $x \in A$，使 $\theta * x = x * \theta = \theta$

17. 设 $A(G)$ 是有向图 $G = \langle V, E\rangle$ 的邻接矩阵，其第 i 列中 "1" 的数目为（　）。

    A. 结点 v_i 的度数

    B. 结点 v_i 的出度

    C. 结点 v_i 的入度

    D. 结点 v_i 的度数

18. 无向图 G 中有 16 条边，且每个结点的度数均为 2，则结点数是（　）。

    A. 8

    B. 16

    C. 4

    D. 32

19. 无向图 G 是欧拉图，当且仅当（　）。

    A. G 连通且所有结点的度数为偶数

    B. G 的所有结点的度数为偶数

    C. G 连通且所有结点的度数为奇数

    D. G 的所有结点的度数为奇数

20. 下面哪一种图不一定是树（　）。

    A. 无圈连通图

    B. 有 n 个结点 $n-1$ 条边的连通图

    C. 每对结点间都有路的图

    D. 连通但删去一条边就不连通的图

三、填空题

1. 设 P 表示“我将去书店”，Q 表示“我有时间”， 则命题“我将去书店，仅当我有时间”符号化为 ______________。

   设 P 表示“天下雨”，Q 表示“我骑自行车上班”， 则命题“除非下雨，否则我骑自行车上班”符号化为 ______________（或等价形式 ______________）。

2. 命题公式 $P \to Q$ 的 逆换式是 ______________； 反换式是 ______________； 逆反式是 ______________。

3. 设 P 表示：上午下雨； Q 表示：我去看电影； R 表示：我在家里读书； S 表示：我在家里看报纸。

   则命题 “如果上午不下雨，我就去看电影，否则我就在家里读书或看报纸。” 符号化为 ____________________________（或等价形式 ____________________________）。

4. 设 $G(x)$ 表示“x 是金子”，$F(x)$ 表示“x 是闪光的”， 则命题“金子是闪光的，但闪光的不一定是金子”可符号化为

   ____

5. 令 $F(x)$ 表示“x 是金属”，$G(y)$ 表示“y 是液体”，$H(x, y)$ 表示“x 可以溶解在 y 中”，则命题“任何金属可以溶解在某种液体中”可符号化为

   ____

6. 设个体域 $A = \{a, b, c\}$， 消去下列公式中的量词:

   $$(\forall x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$$

   结果为

   ____

7. 设个体域 $A = \{a, b, c\}$， 消去下列公式中的量词:

   $$\forall x \neg P(x) \vee \forall x P(x)$$

   结果为

   ____

8. 写出下列谓词公式的等价形式:

   $\neg(\forall x)P(x) \;\Leftrightarrow$ ___________________，　$\neg(\exists x)P(x) \;\Leftrightarrow$ ___________________

9. 在下列谓词公式中， 量词 $\forall x$ 的辖域是 ____________________； 量词 $\exists y$ 的辖域是 ____________________。

$$\forall x\big(P(x) \vee \exists y R(x, y)\big) \rightarrow Q(x)$$

10. 若集合 A 的基数为 n，则

$$|A \times \mathcal{P}(A)| = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

11. 设 $A = \{\{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\}$，则

$$A \times \mathcal{P}(\varnothing) = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

其中 $\mathcal{P}(A)$ 表示集合 A 的幂集。

12. 设 $A = \{\{\{a, b, c\}\}\}$，则

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

13. 设 $A = \{1, 2, 3\}$，A 上的二元关系

$$R = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle\},$$

则关系 R 具有 ____________________ 性。

14. 设 R 是集合 A 上的二元关系，则

$$s(R) = \underline{\qquad\qquad\qquad} \qquad t(R) = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

15. 设 R 是集合 A 上的具有自反性、对称性、反对称性和传递性的二元关系，则

$$R = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

R 的关系矩阵是

$$\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

16. 在偏序集 $(A, \leq)$ 中，其中

$$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 14\},$$

$\leq$ 为 A 中的整除关系，则集合

$$B = \{2, 3, 4, 6\}$$

的极大元是 __________， 极小元是 __________， 最大元是 __________， 最小元是 __________， 上确界是 __________， 下确界是 __________。

17. 设 $A=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$，$B=\{0,1\}$， 所有从 A 到 B 的双射函数为

$$f_1=\underline{\qquad\qquad\qquad},\qquad f_2=\underline{\qquad\qquad\qquad}$$

18. 设 f 是 A 到 B 的函数， 若对任意 $x_1,x_2\in A$，$x_1=x_2$ 都有 $f(x_1)=f(x_2)$， 则称 f 为 ________； 若 $\operatorname{ran}(f)=$ ________， 则称 f 为 ________； 若 f ________， 则称 f 为双射。

   当 f 为双射时，f^{-1} 是 B 到 A 的函数，且

$$f\circ f^{-1}=\underline{\qquad\qquad},\qquad f^{-1}\circ f=\underline{\qquad\qquad}$$

19. 设 $\langle G,*\rangle$ 是一个群，则对任意的 $a,b\in G$，均有

$$(a*b)^{-1}=\underline{\qquad\qquad\qquad}$$

20. 设 $\langle G,*\rangle$ 是一个群，$a\in G$，则

$$(a^{-1})^{-1}=\underline{\qquad\qquad\qquad}$$

21. 设 S 为非空集合，$\mathcal{P}(S)$ 为集合 S 的幂集 代数系统 $\langle\mathcal{P}(S),\cup\rangle$ 中 $\mathcal{P}(S)$ 关于“$\cup$”的幺元为 ________， 零元为 ________ $\mathcal{P}(S)$ 关于“$\cap$”的幺元为 ________， 零元为 ________

22. 设 $S=\{a,b\}$，且 $\langle S,*\rangle$ 是以 1 为幺元的群，则

$$b*b=\underline{\qquad\qquad},\qquad a^{-1}=\underline{\qquad\qquad}$$

23. 设

$$S=\left\{\begin{pmatrix}a&0\\c&b\end{pmatrix}\middle|\,a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$$

   “+” 表示普通的矩阵加法运算 则 $\langle S,+\rangle$ 不构成半群，因为 ______________________________

24. 对于整数集 $\mathbb{Z}$ 上定义的运算

$$a*b=a+b-2$$

   则 $\langle\mathbb{Z},*\rangle$ 的幺元为 ________， 任意元素 a 的逆元为 ________

25. 设 $A=\{1,2\}$，A 上的运算 $*$ 定义为

$$x*y=\min\{x,y\},\quad\forall x,y\in A$$

则 $*$ 的运算表为

$*$	1	2
1	________	________
2	________	________

26. 设 $\langle G, *\rangle$ 是一个群，$B \subseteq G$，$B \neq \varnothing$， 且 $|B|$ 有限 则 $\langle B, *\rangle$ 是 $\langle G, *\rangle$ 的子群当且仅当 ________________________

27. 设 $\langle A, \leq\rangle$ 是一个偏序集，如果 A 中任意两个元素都有 ____________， 则称 $\langle A, \leq\rangle$ 是一个格。

    在格 $\langle A, \leq\rangle$ 中，对任意 $a, b \in A$， $a \leq b$ 当且仅当

$$a \wedge b = \underline{\qquad\qquad}, \qquad a \vee b = \underline{\qquad\qquad}$$

28. 设 $\langle A, \leq\rangle$ 是一个有界格，如果 A 中任意元素都 ________________， 则称 $\langle A, \leq\rangle$ 是一个有补格。

    在有补格中，一个元素的补元素 ________ 唯一。

29. 设 $\langle A, \vee, \wedge, \neg, 0, 1\rangle$ 是布尔代数， 则 A 关于“$\vee$”的幺元为 ________， 零元为 ________；

    A 关于“$\wedge$”的幺元为 ________， 零元为 ________

30. 设 $\langle A, \vee, \wedge, \neg, 0, 1\rangle$ 是布尔代数， 对任意 $a \in A$，有

$$a \vee a = \underline{\qquad\qquad}, \qquad a \wedge a = \underline{\qquad\qquad}$$

31. 设 $\langle A, \vee, \wedge, \neg, 0, 1\rangle$ 是布尔代数， 对任意 $a, b \in A$，有

$$\neg(a \vee b) = \underline{\qquad\qquad\qquad}, \qquad \neg(a \wedge b) = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

32. 设 $\langle A, \vee, \wedge, \neg, 0, 1\rangle$ 是布尔代数， 对任意 $a \in A$，有

$$a = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

33. 设 $\langle A, \vee, \wedge, \neg, 0, 1\rangle$ 是布尔代数， 则 A^A 共有 ________ 个不同的函数。

34. 设 $G_1 = (V_1, E_1)$，$G_2 = (V_2, E_2)$，且 $E_2 \subseteq E_1$，如果

$$\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

    则称 G_2 是 G_1 的子图；如果

$$\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

    则称 G_2 是 G_1 的生成子图。

35. 在任何图 $G=(V,E)$ 中，

$$\sum_{v\in V}\deg(v)=\underline{\hspace{6em}}$$

其奇数度结点的个数为

$$\underline{\hspace{6em}}$$

36. 一棵有 6 个叶结点的完全二叉树，有

$$\underline{\hspace{4em}}$$

个内点；而若一棵树有 2 个结点度数为 2，一个结点度数为 3，3 个结点度数为 4，其余是叶结点，则该树有

$$\underline{\hspace{4em}}$$

个叶结点。

37. 设图 $G=\langle V,E\rangle$，$V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ 的邻接矩阵

$$A(G)=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&0\\0&1&0&0\\1&1&0&0\end{pmatrix}$$

则

$$\deg^-(v_1)=\underline{\hspace{4em}},\qquad \deg^+(v_4)=\underline{\hspace{4em}}$$