概率论与数理统计

Created By LYP

2026年 1 月 20 日

大题

一、全概率公式与贝叶斯公式

1. 市场上出售的某种商品由三个厂家同时供应。其供应量第一厂家为第二厂家的两倍，第二、第三厂家相等，且第一、第二、第三厂家的次品率依次为 2%、2%、4%。若在市场上随机购买一件商品为次品，求该件商品是第一厂家生产的概率。

2. 某人外出可以乘坐飞机、火车、轮船、汽车四种交通工具，其概率分别为 5%、15%、30%、50%，乘坐这几种交通工具能如期到达的概率依次为 100%、70%、60%、90%。已知该人误期到达，求他是乘坐火车的概率。

二、中心极限定理

1. 已知生男婴的概率为 0.515，求在 10000 个婴儿中男孩个数多于女孩的概率。

2. 报童沿街向行人兜售报纸，设每位行人买报的概率是 0.2，且是否买报相互独立，求报童在向 100 位行人兜售后，卖掉报纸 $15 \sim 30$ 份的概率。

三、离散型随机变量

1. 某药的临床有效率为 0.95，今有 10 人服用，求至少有 8 人治愈的概率。

2. 某芯片的次品率为 0.1%，各芯片是否为次品相互独立。设 X 为 1000 只产品中的次品数，且
$$X \sim B(1000, 0.001),$$
求至少有 2 只次品的概率。

3. 某地区一个人患某种病的概率为 0.01，随机抽取 200 人，求至少 4 人患病的概率。

4. 某电话机每分钟收到呼唤的次数服从参数为 4 的泊松分布，求：
   (a) 某一分钟恰有 8 次呼唤的概率；
   (b) 某一分钟呼唤次数大于 3 的概率。

5. 已知随机变量 $X \sim P(2)$，令 $Z = 3X - 2$，求 $E(Z)$。

6. 设随机变量 $X \sim P(\lambda)$，且 $P(X = 1) = P(X = 2)$，求 $E(X)$。

四、连续型随机变量

1. 设随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2y, & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\\ 0, & v.\end{cases}$$

求:

(a) X,Y 的边缘密度;

(b) 判断 X,Y 是否独立。

2. 设随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}4xy, & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\\ 0, & v.\end{cases}$$

求:

(a) 边缘密度;

(b) 判断 X,Y 是否独立。

3. 已知 X, Y 相互独立，其概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0, \\ 0, & v, \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & v. \end{cases}$$

求：

(a) (X, Y) 的联合概率密度；

(b) $P(Y \geq 2X)$。

五、切比雪夫不等式

1. 已知 $X \sim P(1)$，$Y \sim U(0,1)$，且 $E(XY) = 0.25$，利用切比雪夫不等式估计

$$P(-2 < X + 2Y < 4).$$

六、参数估计

1. 设总体概率密度为

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\theta, & 0<x<1,\\ 1-\theta, & 1\le x<2,\end{cases}$$

其中 $0<\theta<1$，样本容量为 n，N 为样本中小于 1 的个数，求：

(a) 参数 θ 的矩估计；

(b) 参数 θ 的最大似然估计。

2. 设总体 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中 $0<\theta<\dfrac{1}{2}$ 为未知参数。

已知来自该总体的样本值为

$$3,\ 1,\ 3,\ 0,\ 3,\ 1,\ 2,\ 3.$$

(a) 求参数 θ 的矩估计；

(b) 求参数 θ 的极大似然估计。

七、假设检验

1. 某厂生产钢丝，生产一向稳定。现从其产品中随机抽取 10 段检查其折断力，测得

$$\bar{x} = 287.5, \qquad \sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x})^2 = 160.5.$$

假定钢丝的折断力服从正态分布，在显著水平 $\alpha = 0.1$ 下，检验该厂生产的钢丝折断力的方差是否为 16。

（已知： $\chi^2_{0.05}(10) = 18.31$， $\chi^2_{0.95}(10) = 3.94$； $\chi^2_{0.05}(9) = 16.9$， $\chi^2_{0.95}(9) = 3.33$）

2. 正常人的脉搏平均为 72 次/分。现对某种疾病患者 9 人，测得其脉搏为（次/分）：

$$68,\ 65,\ 77,\ 70,\ 64,\ 69,\ 72,\ 62,\ 71.$$

设患者的脉搏次数 X 服从正态分布，经计算得其样本标准差为 4.583。

在显著水平 $\alpha = 0.05$ 下，检验患者的脉搏与正常人的脉搏是否存在显著差异。

（已知： $t_{0.025}(8) = 2.306$， $t_{0.025}(9) = 2.262$， $U_{0.025} = 1.960$）