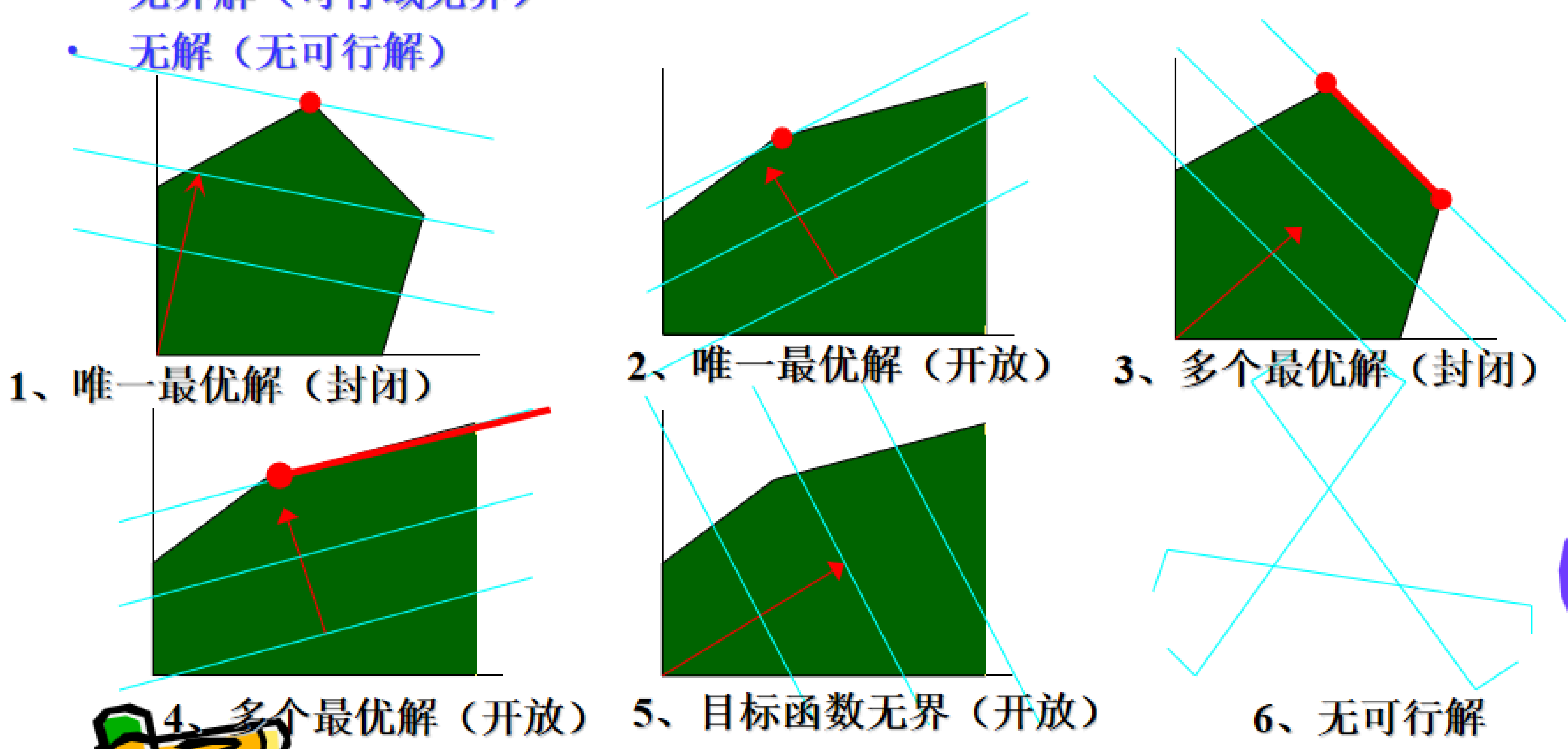
基础知识

线性规划问题图解法求解的几种结果

- 唯一最优解
- 无穷多最优解
- 无界解（可行域无界）
- 无解（无可行解）



结论

1. 线性规划问题解的形式:唯一最优解，无穷多最优解，无界解，无可行解；
2. 若LP的可行域存在，即有可行解，则可行域是一个凸集；
3. 若LP的最优解存在，则一定可以在可行域的某个顶点达到，如果在某两个顶点上达到最优，则该LP有无穷多最优解；
4. 用图解法求解LP时，如果可行域封闭，可比较可行域的顶点的目标函数值，得到最优解；

- **注意**
- ✓ 用图解法如果可以得到封闭的可行域，则一定有最优解存在；
- ✓ 如果可行域不封闭，则解的三种形式都可能出现，必须用目标函数等值线的平移来判断。

1.3 线性规划问题的几何意义

凸集

- 如果集合C中任意两点x_1，x_2，其连线上的所有点也都是集合C中的点，则称C为*凸集*，其中x_1，x_2的连线可以表示为：$\alpha x_1 +(1-\alpha)x_2$ $(0<\alpha<1)$
- 数学解析式为：$x_1 \in C$，$x_2 \in C$，有$\alpha x_1 +(1-\alpha)x_2 \in C$ $(0<\alpha<1)$，则C为*凸集*。

顶点

- 如果集合C中不存在任何两个不同的点x_1，x_2，使x为这两点连线上的一个点，称x为*顶点*。
- 对任何$x_1 \in C$，$x_2 \in C$，不存在$x=\alpha x_1 +(1-\alpha)x_2 (0<\alpha<1)$，则称$x$为凸集的*顶点*。

2. 基，基变量，非基变量；基解，基可行解，可行基

定义1：从n个变量中任取m个变量$x_{i1},x_{i2},\ldots,x_{im}$，若这m个变量对应的系数列向量$P_{i1},P_{i2},\ldots,P_{im}$线性无关，即对应系数列向量行列式≠0，则称$B=(P_{i1},P_{i2},\ldots,P_{im})$为基矩阵，简称***基***，$x_{i1},x_{i2},\ldots,x_{im}$为***基变量***，其余n-m变量为***非基变量***。

定义2：在约束方程(1.7)中，令所有非基变量为0，根据克莱姆法则，则(1.7)有唯一解。令$x_{i1}=\alpha_1, x_{i2}=\alpha_2,\ldots,x_{im}=\alpha_m$，称

$$\begin{cases} x_{i1}=\alpha_1,\cdots,x_{im}=\alpha_m \\ x_j=0, j=1,\cdots,n, j\neq i_1,\cdots,i_m \end{cases}$$ 为一组***基解***。

基可行解： 满足（1.8）中的基解为基可行解，即基解中每一分量均非负。

可行基： 基可行解对应的基。

退化解： 基变量中有分量为0的解。

线性规划的基可行解就是可行域的顶点。

三个基本定理

- ***定理1***：若线性规划问题存在可行解，则问题的可行域是凸集；
- ***定理2***：线性规划问题的基可行解X对应线性规划问题可行域的顶点；
- ***定理3***：若线性规划问题有最优解，一定存在一个基可行解是最优解。

1.3 单纯形法

单纯形法的基本思想：

从可行域的一个基可行解（顶点）出发，判断是否为最优解，如果不是最优解就转移到另一个较好的基可行解（相邻），如果目标函数达到最优，则已经得到最优解，否则继续转移到其他较好的基可行解（顶点）。

由于基可行解的数目有限，所以在有限次迭代内，可以找到最优解。

（**2**）人工变量法（大**M**法）

若给定问题标准化后，系数矩阵中不存在m个线性无关的单位列向量，则在某些约束的左端加一个非负变量x_{n+i}（人工变量），使得变化后的系数矩阵中恰有m个线性无关的单位列向量，并且在目标函数中减去这些人工变量与一个足够大的正数M的乘积，对于变化后的问题，取m个单位列向量构成的单位子矩阵为初始基，则该基对应的可行解一定是基可行解。

- *原问题的任意基可行解都是变化后问题的基可行解*
- *若变化后的问题最优解中不含有非零的人工变量，则该解就是原问题的最优解*
- *若变化后的问题中含有非零的人工变量则元问题无可行解*

由检验数可以判断解的最优性情况

（1）因为所有$X_j \geq 0$，当所有$\sigma_j<0$时，则$Z \leq Z^0$，则该基可行解对应最优解；

（2）因为所有$X_j \geq 0$，当$\sigma_j \leq 0$ 且存在$\sigma_j=0$（$j=m+1,\cdots,n$）时，则该线性规划问题有无穷多最优解；

（3）对基可行解X^0，若存在某个$\sigma_k>0$，且所有$a_{ik} \leq 0$（$P_j \leq 0$），$i=1,2,\cdots,m$，则该问题无界（无界解）；

（4）因为所有$X_j \geq 0$，当存在$\sigma_j>0$时，则该基可行解不是最优解，需要寻找另一个基可行解；

单纯形法原理—单纯形法总结

STEP 0 找到一个初始的基础可行解，确定基变量和非基变量。转STEP 1。

STEP 1 将目标函数和基变量分别用非基变量表示。转STEP 2。

STEP 2 如果目标函数中所有非基变量的检验数全部为非正数，则已经获得最优解，如果全为负数，则为唯一最优解，运算终止。；如果有为0的非基变量检验数，则有无穷多最优解。运算终止。如果有某非基变量检验数为正，且工艺系数全非正，则无界，运算终止。

否则，选取检验数为正数最大的非基变量进基。转STEP 3。

STEP 3 选择最小比值对应的基变量离基，进行系数初等行变换，得新的基可行解，转STEP 1。

二、两阶段法

- 第一阶段求初始基可行解。给原问题加入人工变量，并构建一个仅含人工变量的目标函数（对人工变量和的相反数求最大），约束条件和原问题的一样。
  - 当第一阶段中目标函数的最优值＝0，既人工变量＝0，则转入第二阶段；若第一阶段中目标函数的最优值不等于0，既人工变量不等于0，则判断原问题为无解。
- 第二阶段求原问题最优解。将第一阶段计算所得的单纯形表划去人工变量所在的列，并将目标函数换为原问题的目标函数，作为第二阶段的初始单纯形表，以第一阶段的最优解作为初始基可行解，进行进一步的求解。