高数

Created By LYP

2026年 1 月 20 日

大题

0.1 导数与微分

1. 设 $y = x\sin x$，求 y'。

2. 已知函数 $y = y(x)$ 由方程
$$e^y + 6xy + x^2 - 1 = 0$$
确定，求 $y'(0)$。

3. 设函数 $y = y(x)$ 由方程
$$xy + \ln(x + e^2) + \ln y = 3$$
确定，求 $y'(0)$。

4. 设 $y = y(x)$ 是由方程
$$e^y + x\sin y = 1$$
所确定的隐函数，求曲线 $y = y(x)$ 在点 $M(1, 0)$ 处的切线方程。

5. 求参数方程

$$\begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos 2t \end{cases}$$

在 $t = \dfrac{\pi}{4}$ 处的切线方程。

6. 已知 $y = y(x)$ 由方程

$$\int_0^x e^{t^2}\,dt + \int_0^y \cos t^2\,dt = 0$$

确定，求 $\dfrac{dx}{dy}$。

7. 设函数 $y = y(x)$ 由方程

$$\sin y + xe^y = 1$$

确定，求曲线 $y = y(x)$ 在点 $M(1,0)$ 处的切线方程。

0.2 微分中值定理与导数的应用

1. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(1)=0$，证明： 存在一点 $\xi \in (0,1)$，使

$$f(\xi)+(1-e^{-\xi})f'(\xi)=0$$

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且满足

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right)-4\int_0^{1/2} xf(x)\,dx=0\text{fi}$$

证明在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使

$$f'(\xi)=-\xi f(\xi)$$

3. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(x)$ 不恒为零。证明：在 $(0,1)$ 内存在一点 ξ，使

$$f(\xi)f'(\xi)>0$$

4. 设 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{3},3\right]$ 上可微，且满足

$$\int_2^3 x^2 f(x)\,dx = 9f\left(\tfrac{1}{3}\right)\text{fi}$$

证明：存在 $\xi\in\left(\frac{1}{3},3\right)$，使

$$\xi f'(\xi)-2f(\xi)=0$$

0.3 不定积分

1. 求不定积分

$$\int e^x \, dx$$

2. 已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $x \ln x$，求

$$\int x f'(x) \, dx$$

3. 已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $e^x \cos x$，求

$$\int x f'(x) \, dx$$

4. 求不定积分

$$\int \cos x \, dx$$

5. 设

$$\int x f(x) \, dx = \arcsin x + C\text{fi}$$

求

$$\int f(x) \, dx$$

6. 已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $e^x \sin x$，求

$$\int x f''(x) \, dx$$

0.4 定积分

1. 设

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1+e^{-x}}{1+x}, & x < 0, \\ 1+x, & x \geq 0 \end{cases}$$

求

$$\int_0^2 f(t-1)\,dt$$

2. 设

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x}{1+x^2}, & -1 \leq x < 0, \\ x, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

求

$$\int_0^2 f(t-1)\,dt$$

3. 设

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1+x}{1+e^x}, & x \geq 0, \\ 1+x, & x < 0 \end{cases}$$

求

$$\int_0^2 f(x-1)\,dx$$

0.5 定积分应用

1. 求由曲线 $y = \sqrt{x}$、直线 $y = 4x$、$x = 2$ 及 $y = 0$ 所围图形绕 x 轴旋转所得旋转体的体积。

2. 求由曲线 $y = 2 - x^2$、$y = x^2$ 及 y 轴围成的右侧图形绕 x 轴旋转一周所得体积。

3. 求曲线 $y = x^2$ 及其过点 $(2, 4)$ 的切线与 x 轴所围图形绕 x 轴旋转一周所得体积。

4. 求由曲线 $y=\sqrt{x}$、直线 $y=x$、$x=2$ 及 $y=0$ 所围图形绕 x 轴旋转所得体积。

5. 求由曲线 $y=x^4$ 与直线 $x+y=5$ 所围图形绕 x 轴旋转所得体积。

6. 求由曲线 $y=x^3$ 与直线 $x+y=4$ 所围图形绕 x 轴旋转所得体积。

0.6 空间解析几何与向量代数

1. 求过平面 $x+5y+z=0$ 与 $x-z+4=0$ 的交线，且与平面 $2x-y+5z-5=0$ 垂直的平面方程。

2. 一直线过点 $(-3,2,5)$，且与平面 $x-4z=3$ 和 $2x-y-5z=1$ 的交线平行，求该直线方程。

3. 已知平面 $\pi_1: x-y+z-1=0$，直线

$$L: \frac{x}{1}=\frac{2y-1}{1}=\frac{-z+1}{-1}\text{ﬁ}$$

若平面 π 通过直线 L 且垂直于 π_1，求平面 π 的方程。

4. 过点 $M(1,1,1)$ 作平面，使其与平面 $\pi_1: x+y+z-1=0$ 和 $\pi_2: 3x+4y-2z+5=0$ 都垂直，求该平面方程。

5. 过点 $M(1,2,3)$ 作直线，使其与平面 $\pi_1 : x+y-z-3=0$ 和 $\pi_2 : 2x+y+z-1=0$ 都平行，求该直线方程。

6. 求过点 $M(1,2,-1)$ 且与直线

$$\begin{cases} 2x+y+z=1 \\ x-y=-2 \end{cases}$$

垂直的平面方程。

7. 过点 $M(1,-2,3)$ 作平面，使其与直线

$$\begin{cases} x+y-z-3=0 \\ 2x+y+z-1=0 \end{cases}$$

垂直，求该平面方程。

0.7 微分方程

1. 求微分方程
$$y'' + y' = xe^x$$
的通解。

2. 求方程
$$y'' - y' - 2y = 0$$
的积分曲线，使该曲线与直线
$$y = x$$
相切于原点 $O(0,0)$。

0.8 多元函数微分法及其应用

1. 求曲线
$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-3x=0, \\ 2x-3y+5z-4=0 \end{cases}$$
在点 $M(1,1,1)$ 处的切线及法平面方程。

2. 设
$$z=f(x+2y,\, ye^x),$$
其中 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，求
$$\frac{\partial z}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}.$$

0.9 重积分

1. 已知二次积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} dy \int_y^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{x}\, dx,$$

   交换二次积分的次序并计算积分的值。

2. 计算二重积分

$$\iint_D e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy,$$

   其中区域 D 为

$$x^2 + y^2 \leq a^2 \quad (a > 0)$$

3. 计算三重积分
$$\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2)\, dv,$$
其中 Ω 是由曲面
$$z = x^2 + y^2$$
及平面
$$z = 1$$
所围成的闭区域。

4. 求由抛物面
$$z = x^2 + y^2,$$
柱面
$$x^2 + y^2 = a^2 \quad (a > 0),$$
以及平面
$$z = 0$$
所围成的立体的体积。

0.10 曲线积分和曲面积分

1. 计算曲面积分

$$\iint_{\Sigma} \sqrt{1+4z}\, ds\text{fi}$$

其中曲面 Σ 为

$$z = x^2 + y^2$$

在

$$z \leq 1$$

2. 计算曲线积分

$$\oint_L \frac{x\, dy - y\, dx}{x^2 + y^2},$$

其中 L 沿曲线

$$x^2 + y^2 = 1$$

按逆时针方向绕行一周。

0.11 无穷级数

1. 求幂级数
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{7^n}$$
的收敛域，并求其和函数。

2. 求幂级数
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{4^n}$$
的收敛半径、收敛域，并求其和函数。

3. 求级数
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!} x^n$$
的和函数 $S(x)$ 及收敛域。

4. 设函数 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数，且

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<1, \\ x^2, & 1\le x<2, \end{cases}$$

其傅里叶级数的和函数为 $S(x)$，求

$$S(8.5)=\underline{\hspace{3cm}}$$

5. 设函数 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数，且

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<1, \\ 1, & 1\le x<2, \end{cases}$$

其傅里叶级数的和函数为 $S(x)$，则

$$S(6)=\underline{\hspace{3cm}}$$