

时间序列分析

知识点：

核心主线：

随机过程基础 → 平稳性理论 → 模型 (AR, MA, ARMA, ARIMA) → 参数估计 → 模型检验与选择 → 预测

一、随机过程与时间序列基础

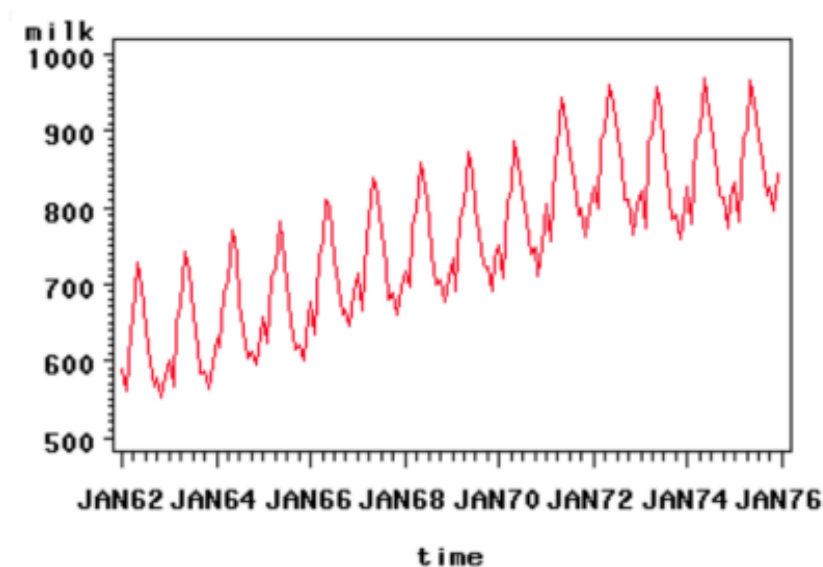
知识点 1: 平稳序列的定义与判别

熟背平稳与非平稳区别;

看图判断趋势或方差变化;

理解“差分平稳 vs 趋势平稳”的区别。

2. 下图为一个时间序列的时序图，则该序列_____（是/不是）平稳序列。



5. 平稳序列通常具有_____（短期/长期）相关性。

3. 某一非平稳时间序列，做 1 阶差分后已经平稳，且 1 阶、2 阶、3 阶、4 阶差分后序列的方差分别为 1、4、9、16，则应该对该序列做（ ）阶差分。

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

4. 下列关于 ARMA 模型的描述中, 正确的是 ()。

A. 模型的平稳性与自回归系数和移动平均系数都有关

B. 模型的可逆性与自回归系数和移动平均系数都有关

C. 平稳可逆的条件是模型的特征根都在单位圆内

D. 平稳可逆的条件是模型的特征根都在单位圆外

1. 平稳非白噪声序列可以用 ARMA 模型建模。 ()

3. 平稳时间序列的自相关系数具有对称性。 ()

8. 非平稳序列可以用 ARIMA 模型进行建模。 ()

三、ACF 与 PACF 分析

知识点 4：自相关函数（ACF）

熟悉 MA(1) 的公式

$$\text{Var}(X_t) = (1 + \theta^2)\sigma^2, \quad \rho_1 = \theta/(1 + \theta^2)$$

区分截尾与拖尾。

5. 若零均值平稳序列 $\{\nabla^2 X_t\}$ ，其样本 PACF 呈现 2 阶截尾，其样本 ACF 呈现拖尾，则可初步认为对 $\{X_t\}$ 应该建立（ ）模型。

A. MA（2） B. IMA（2，2） C. ARI（2，2） D. ARIMA（2，1，2）

6. MA（1）模型 $x_t = \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1}$ ，其中 ε_t 为零均值方差为 4 的白噪声，模型方差为_____，一阶自相关函数为_____。

8. AR（p）模型偏自相关系数_____阶截尾，可逆的 MA（q）模型偏自相关系数_____阶截尾。

知识点 5：偏自相关函数（PACF）

记忆判别规律表：

AR(p): PACF 截尾

MA(q): ACF 截尾

ARMA(p,q): 均拖尾

5. 若零均值平稳序列 $\{\nabla^2 X_t\}$ ，其样本 PACF 呈现 2 阶截尾，其样本 ACF 呈现拖尾，则可初步认为对 $\{X_t\}$ 应该建立（ ）模型。
- A. MA（2） B. IMA（2，2） C. ARI（2，2） D. ARIMA（2，1，2）

2. 简述自相关系数和偏自相关系数的区别和联系。

四、时间序列模型体系

知识点 6：AR 模型

会解 Yule-Walker 方程

熟记 AR(1) 的方差、相关系数公式

7. 时间序列 $x_t = 0.2x_{t-1} + \varepsilon_t$ ， ε_t 为零均值方差为 σ_ε^2 的白噪声，则 $\text{Var}(x_t) =$ _____。

8. AR (p) 模型偏自相关系数_____阶截尾，可逆的 MA (q) 模型偏自相关系数_____阶截尾。

1. 平稳非白噪声序列可以用 ARMA 模型建模。 ()

5. 常用的时间序列模型可视为线性差分方程。 ()

知识点 7: MA 模型

熟悉 MA(1)、MA(2) 自相关公式
能判断可逆性

3. 写出 MA (q) 模型的逆转形式: _____。

2. 用特征根判别法判断下列模型的平稳性和可逆性。

(1) $x_t = 0.8x_{t-1} + \varepsilon_t - 1.2\varepsilon_{t-1}$

(2) $x_t = -1.1x_{t-1} - 0.18x_{t-2} + \varepsilon_t - 1.5\varepsilon_{t-1} + 0.36\varepsilon_{t-2}$

1. (1) 已知某 AR (2) 模型为 $x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \varepsilon_t$ ，且 $\rho_1=0.5$ ， $\rho_2=0.8$ ，求 ϕ_1 ， ϕ_2 ；

(2) 计算 MA (2) 模型 $x_t = \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1} + 0.2\varepsilon_{t-2}$ 的逆函数 $I_j, j=0,1,2$ 。

知识点 8：ARMA 模型

熟悉 $\varphi(B)$ 、 $\theta(B)$ 算子写法

记住 AR、MA、ARMA 的对应 ACF/PACF 特征

4. 下列关于 ARMA 模型的描述中，正确的是（ ）。
- A. 模型的平稳性与自回归系数和移动平均系数都有关
 - B. 模型的可逆性与自回归系数和移动平均系数都有关
 - C. 平稳可逆的条件是模型的特征根都在单位圆内
 - D. 平稳可逆的条件是模型的特征根都在单位圆外

1. 写出 ARMA (p, q) 模型，并说明需要估计的参数。

3. 已知某地区每年常住人口数量近似服从 MA (3) 模型（单位：万人）：

$$x_t = 100 + \varepsilon_t - 0.8\varepsilon_{t-1} + 0.6\varepsilon_{t-2} - 0.2\varepsilon_{t-3}, \text{ 若 } \sigma_\varepsilon^2 = 25$$

最近 3 年的常住人口数量及一步测量数据如下表所示：

| 年份 | 统计人数 | 预测人数 |
|------|------|------|
| 2002 | 104 | 110 |
| 2003 | 108 | 100 |
| 2004 | 105 | 109 |

预测未来 5 年该地区常住人口的 95%置信区间。

知识点 9: ARIMA 模型

会从模型形式看出 d、p、q 的取值
理解“差分是去除单位根”的手段

6. 已知时间序列 $\{X_t\}$ 满足模型 $\phi_1 x_t - (1 + \phi_1)x_{t-1} + x_{t-2} = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$ ，其中 $|\phi_1| < 1$ ，则对它可建立模型（ ）。
- A. ARIMA(1,1,1) B. ARIMA(0,2,0) C. ARIMA(1,1,0) D. ARIMA(0,2,1)

1. 时间序列满足模型 $x_t = \varepsilon_t - a\varepsilon_{t-1} + 0.6\varepsilon_{t-2}$ ，则当 a 满足_____时，模型可逆。

五、模型估计与选择

知识点 10：参数估计方法

区分矩估计、最小二乘、极大似然的假设与计算复杂度

1. 关于时间序列模型参数估计的说法中，不正确的是（ ）。
 - A. 矩估计在低阶 ARMA 模型场合下计算量小
 - B. 最小二乘估计需要迭代求解
 - C. 矩估计通常用做极大似然估计的初始值
 - D. 极大似然估计不需要假设总体分布

7. 单位根检验可以检验序列的平稳性。

知识点 11：模型选择准则

- $AIC = -2\ln L + 2k$
- $BIC = -2\ln L + k\ln n$
- 样本量大时，BIC 惩罚项更强

- AIC 倾向选复杂模型，BIC 倾向选简单模型
- 两者都越小越好

10. 关于模型选择准则的描述中，错误的是（ ）。
 - A. AIC 准则惩罚模型的复杂度
 - B. AIC 准则值受样本容量影响
 - C. SBC 准则是最优模型的真实阶数的相合估计
 - D. SBC 准则值受样本容量影响

6. 有效模型指能够充分提取序列中相关信息的模型。

六、模型诊断与检验

知识点 12：白噪声检验（Ljung-Box）

- P 值小 \rightarrow 拒绝白噪声
- 通常 m 取 20 或 $n/4$

4. 在纯随机性检验中，如果 P 值显著小于显著性水平 α ，则应该_____（接受/拒绝）原假设。

10. 自相关系数与时间序列是一一对应的。

七、模型预测与区间估计

知识点 13：时间序列预测

4. 已知某超市月销售额近似服从 AR（2）模型（单位：万元/月）

$$x_t = 10 + 0.6x_{t-1} + 0.3x_{t-2} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, 25)$$

某年 1、2、3 月销售额分别为：100 万元、92 万元、98 万元。

- (1) 确定该超市 4、5 月销售额及 95%置信区间；
- (2) 如果 4 月的真实销售额为 100 万元，求 5 月的销售额及 95%置信区间。

- 会写预测递推公式
- 会用 σ^2 求置信区间

八、模型性质与特征根

知识点 14：特征根判别（平稳性与可逆性）

- 手算二次根或用判别式
- 记住“在单位圆外”这句话

3. 已知某地区每年常住人口数量近似服从 MA（3）模型（单位：万人）：

$$x_t = 100 + \varepsilon_t - 0.8\varepsilon_{t-1} + 0.6\varepsilon_{t-2} - 0.2\varepsilon_{t-3}, \text{ 若 } \sigma_\varepsilon^2 = 25$$

最近 3 年的常住人口数量及一步测量数据如下表所示：

| 年份 | 统计人数 | 预测人数 |
|------|------|------|
| 2002 | 104 | 110 |
| 2003 | 108 | 100 |
| 2004 | 105 | 109 |

平稳： $\varphi(z)=0$ 的根 $|z|>1$

可逆： $\theta(z)=0$ 的根 $|z|>1$

预测未来 5 年该地区常住人口的 95%置信区间。|

9. 序列中心化影响信息提取。

九、其他辅助性概念

知识点 15：趋势项与中心化

- 中心化不会改变自相关系数
- 趋势项影响平稳性

说明中心化只影响均值，不改变相关结构