



数值计算方法



第一章

重点掌握：

1. 绝对误差和相对误差的计算
2. 四舍五入的误差限和有效数字的计算
3. 确定有效数字的位数时需要注意的问题有哪些？具体例子
4. 减少运算误差的原则有哪些？具体例子。
5. 秦九韶算法

1. 已知圆周率 $\pi = 3.14159265\ 4\dots$ ，问

(1) 若其近似值取 5 位有效数字，则该近似值是多少？其绝对误差限是多少？

(2) 若其近似值精确到小数点后面 4 位，则该近似值是什么？其绝对误差限是什么？

(3) 若其近似值的绝对误差限为 0.5×10^{-5} ，则该近似值是什么？

2. 确定圆周率 π 如下近似值的绝对误差限、相对误差限、并求其有效数字的位

3. 设 $a=1000$, 取 4 位有效数字用如下两个等价的式子

$$x = \sqrt{a+1} - \sqrt{a} \text{ 和 } x = \frac{1}{\sqrt{a+1} + \sqrt{a}}$$

进行计算, 求 x 的近似值 x^* , 并将结果与精确值 $x=0.015807437\dots$ 进行比较, 各有多少位有效数字。

4. 利用下列各式计算 $(\sqrt{2}-1)^6$, 分析哪一个得到的结果最好?

$$\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^6}, \quad (3-2\sqrt{2})^3, \quad \frac{1}{(3+2\sqrt{2})^3}, \quad 99-70\sqrt{2}$$

5. 用秦九韶算法计算

$$p(x) = x^3 - 3x - 1$$

在 $x=2$ 处的值。

第二章

重点掌握：

1. 逐步扫描法搜索有根区间（隔根区间）的方法
2. 迭代法求方程根的方法（构造迭代格式，使用全局收敛定理和局部收敛判断迭代格式的收敛性，计算）
3. 牛顿迭代法求方程根的应用

2. 方程 $x^3 - x^2 - 1 = 0$ 在区间 $[1.3, 1.6]$ 上有一根，把方程写成下列 4 种不同的形式：

(1) $x = 1 + \frac{1}{x^2}$ ，对应迭代格式 $x_{k+1} = 1 + \frac{1}{x_k^2}$ ；

(2) $x^3 = 1 + x^2$ ，对应迭代格式 $x_{k+1} = \sqrt[3]{1 + x_k^2}$ ；

(3) $x^2 = \frac{1}{x-1}$ ，对应迭代格式 $x_{k+1} = \sqrt{\frac{1}{x_k - 1}}$ ；

(4) $x = \sqrt{x^3 - 1}$ ，对应迭代格式 $x_{k+1} = \sqrt{x_k^3 - 1}$

判断迭代格式的收敛性，选一种迭代格式求 $x=1.5$ 附近的根到 4 位有效数字。

3.利用适当的迭代格式证明

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{2 + \underbrace{\sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}_{k \uparrow 2}} = 2$$

4.导出计算 $\frac{1}{\sqrt{a}}$ (其中 $a>0$) 的牛顿迭代公式, 要求该迭代公式既无开方又无除法运算。

重点掌握：

1. 插值多项式的定理和推论的应用
2. 拉格朗日插值法的计算
3. 牛顿插值法计算函数值（差商表计算、插值多项式构造、函数值计算）
4. 反插值法（使用拉格朗日和牛顿插值法）

1. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 有连续的二阶导数，且 $f(a)=f(b)=0$ ，求证

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x)| \leq \frac{1}{8}(b-a)^2 \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$$

2. 已知 $\sin x$ 在 $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ 的值分别为 $\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，分别用线性插值和抛物线插值

法求 $\sin 50^\circ$ 的近似值并估计其截断误差。

3.给出如下的数据表

x	0.46	0.47	0.48	0.49
$f(x)$	0.4846555	0.4937452	0.5027498	0.5116683

用二次插值计算：

(1) 当 $x=0.472$ 时，函数值等于多少？

(2) 当 x 为何值时函数值为 0.5？

4. 已知 $f(x)=\operatorname{sh}x$ 的函数表

x	0	0.20	0.30	0.50
$f(x)$	0	0.20134	0.30452	0.52110

求二次和三次牛顿插值多项式，计算 $f(0.23)$ 的近似值并用牛顿插值余项估计误差。

第四章

重点掌握：

1. 牛顿-柯特斯公式中的梯形公式、辛普森公式计算积分
2. 梯形公式、左矩形求积公式、中矩形求解公式的余项推导
3. 复化梯形、复化辛普森计算积分

1. 导出右矩形公式 $\int_a^b f(x) \approx (b-a)f(b)$ 的余项。

3. 分别用复化梯形法和复化辛普森法计算下列积分（使用 9 个节点上的函数值计算）

$$\int_0^1 \frac{x}{4+x^2} dx$$

第五章

重点掌握：

1. 欧拉法和改进欧拉法（预报校正公式和斜率计算公式）求一阶常微分方程的解
2. 四阶龙格-库塔法求解一阶常微分方程的解
3. 龙格-库塔法公式小节

1. 用经典龙格-库塔公式求解初值问题

$$\begin{cases} y' = 2xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

重点掌握：

1. 列主元高斯消元法求方程的根和系数矩阵 A 的行列式值
2. 高斯-约当消元法求线性方程组的解，求矩阵 A 的逆矩阵
3. 矩阵的三角分解法求线性方程组的解
4. 雅可比迭代法和高斯-塞德尔迭代法的收敛的迭代格式构造
5. 松弛法迭代格式的构造

1. 用列主元消元法解下列线性方程组并求系数矩阵的行列式

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix}$$