关于单转动自由度
柔性机器人的控制分析

[redacted]

[redacted]

目录

一、 数学模型

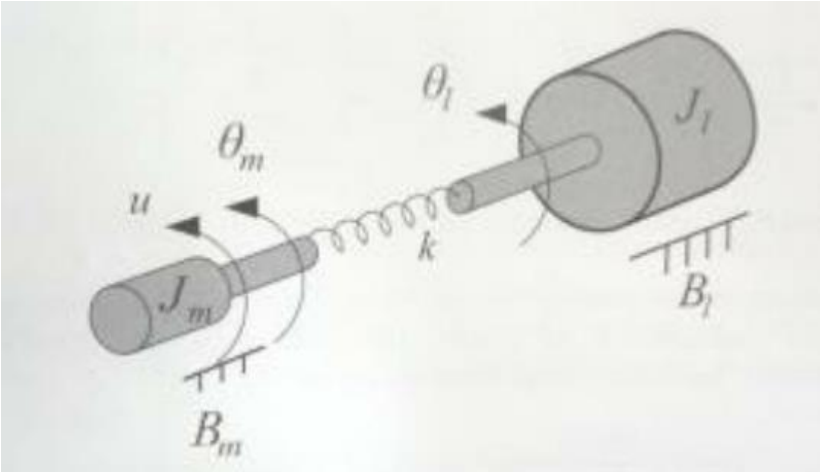


图 1 模型图

$$\begin{cases} J_\ell \ddot{\theta}_\ell + B_\ell \dot{\theta}_\ell + k(\theta_\ell - \theta_m) = 0 \\ J_m \ddot{\theta}_m + B_m \dot{\theta}_m - k(\theta_\ell - \theta_m) = 0 \end{cases} \tag{1-1}$$

其中

θ_l 为负载杆转角；
θ_m 为电机转角；
J_l 为负载惯量；
B_l 为负载阻尼 ；
u 为输入扭矩；
J_m 为电机惯量；
B_m 为电机阻尼；
k 为转动弹性系数；

二、 经典控制理论分析

1、传递函数推导

将式(1-1)拉氏变换，得

$$\begin{cases} p_\ell(s)\theta_\ell(s) = k\theta_m(s) \\ p_m(s)\theta_m(s) = k\theta_\ell(s) + U(s) \end{cases} \tag{2-1}$$

化得传递函数为

$$\frac{\theta_\ell(s)}{U(s)} = \frac{k}{p_\ell(s)p_m(s) - k^2} \tag{2-2}$$

其中

$$p_\ell(s) = J_\ell s^2 + B_\ell s + k$$
$$p_m(s) = J_m s^2 + B_m s + k$$

2、根轨迹分析

（1）主要内容

根轨迹指当系统的某些参数从-∞变到+∞时，闭环特征根在根平面上描绘的一些曲线。闭环极点的分布决定了动态响应的类型；闭环零点的分布决定了瞬态响应曲线的形态和指标；闭环实数零点会减小系统的阻尼比，使系统运动速度加快，超调量增大，峰值时间提前；

（2）设计 PD 控制器，反馈电机转角 θ_m

A、系统框图

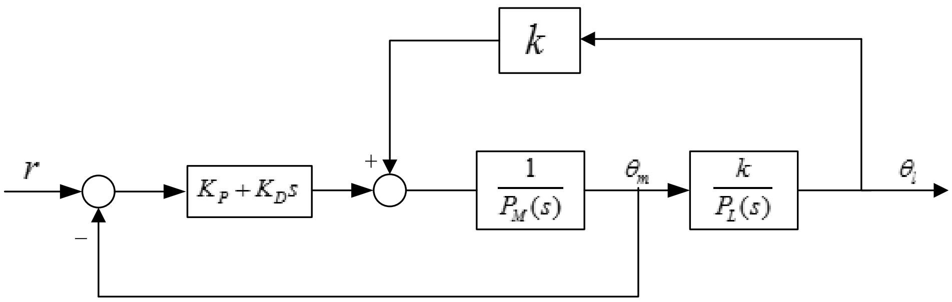


图 2 反馈电机转角框图

B、根轨迹分析

将系统框图化简，得到系统开环传函

$$G(s) = \frac{\theta_m(s)}{R(s)} = \frac{P_l(K_P + K_D s)}{P_m P_l - k^2}$$

令

$$K_P + K_D s = K_D(s + a), a = \frac{K_P}{K_D} = 2$$

$$J_m = J_l = 1$$

$$B_m = B_l = 0.1$$

$$k = 60$$

采用 MATLAB 画出根轨迹图如下

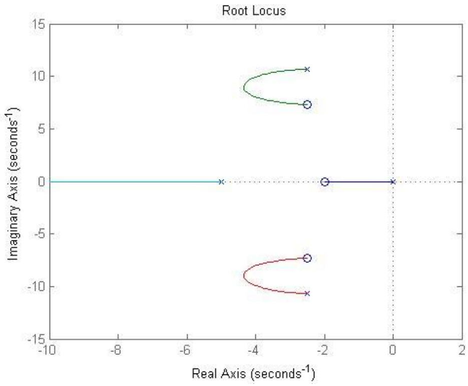


图 3 反馈电机转角根轨迹图

结论：对于 KD ,任何值都能令系统稳定，较大的值相对稳定性更好

C、SIMULINK 仿真验证

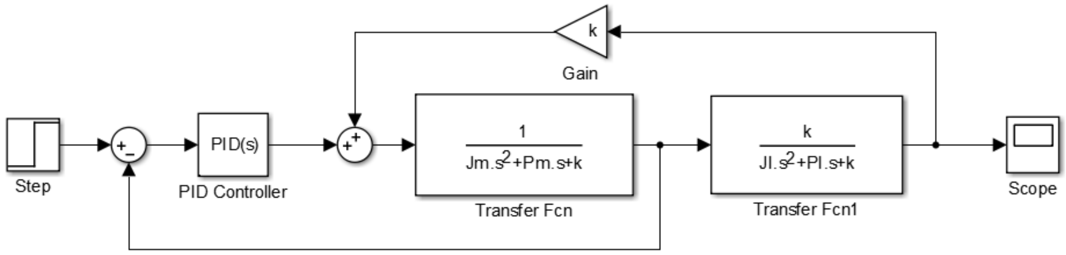
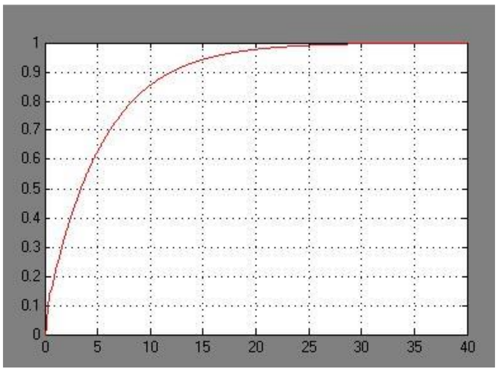
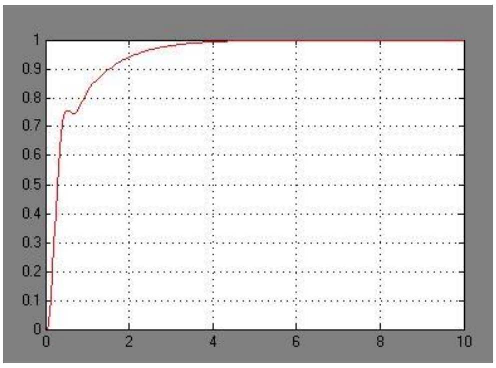


图 4 反馈电机转角 SIMULINK 仿真原理图

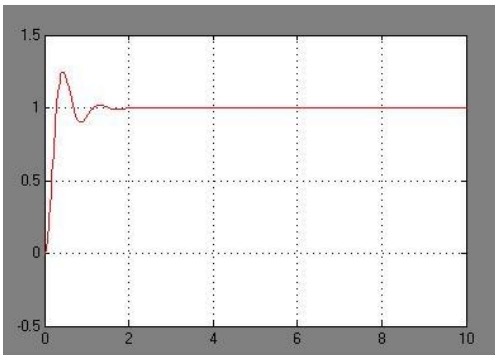
对控制器选取若干组典型参数进行仿真，取 KP/KD=2，KD 分别取 1、10、100 得到的系统阶跃响应如下



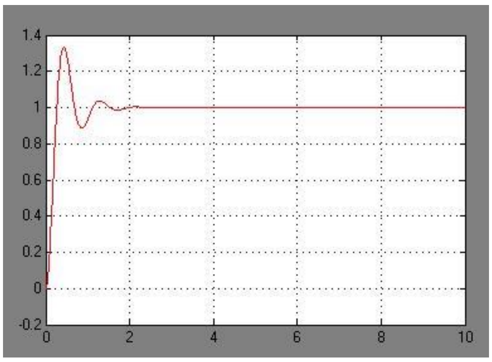
KD=1



kD=10



KD=100



kD=1000

图 5 KD 取不同值下的系统阶跃响应图

结论：对于 KD ,任何值都能令系统稳定，较大的值相对稳定性更好，与根轨迹图分析结论一致。

（3）设计 PD 控制器，反馈负载转角θl

A、系统框图

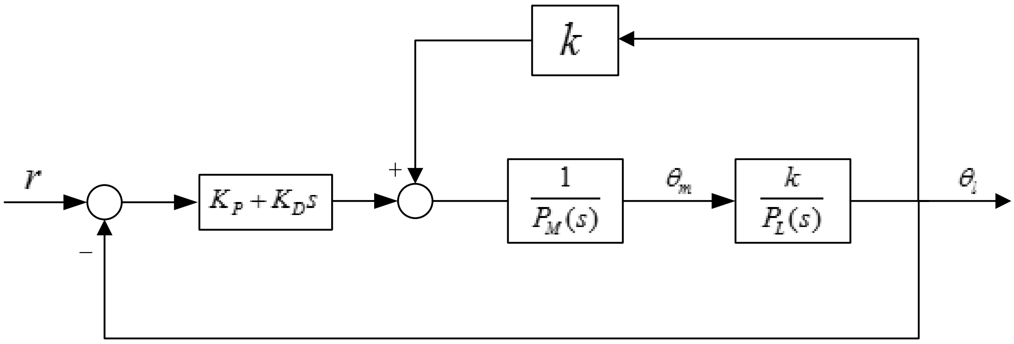


图 6 反馈负载转角的系统框图

B、根轨迹分析

将系统框图化简，得到系统开环传函

$$G(s)=\frac{\theta_l(s)}{R(s)}=\frac{k(K_P+K_Ds)}{P_mP_l-k^2}$$

令

$$K_P+K_Ds=K_D(s+a),a=\frac{K_P}{K_D}=2$$

$$J_m=J_l=1$$

$$B_m=B_l=0.1$$

$$k=60$$

采用 MATLAB 画出根轨迹图如下

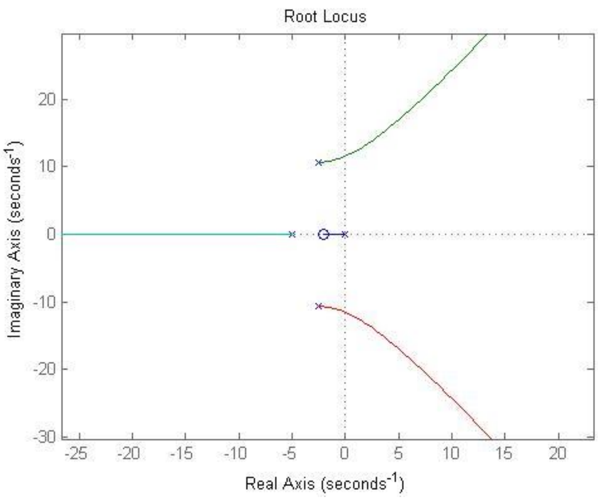


图 7 反馈负载转角的根轨迹图

结论：对于 KD ，存在一个有限值域，在此范围外系统理论上不稳定

C、SIMULINK 仿真验证

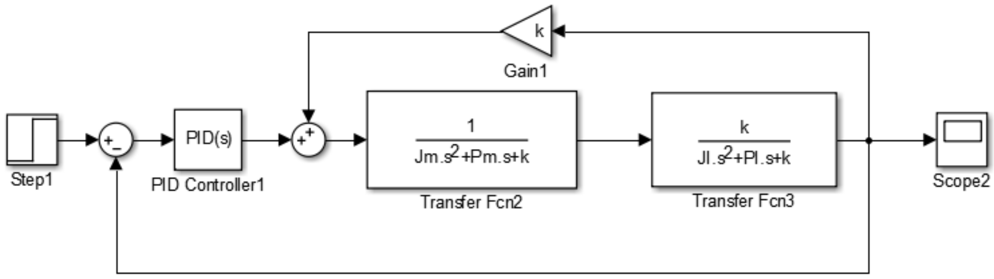
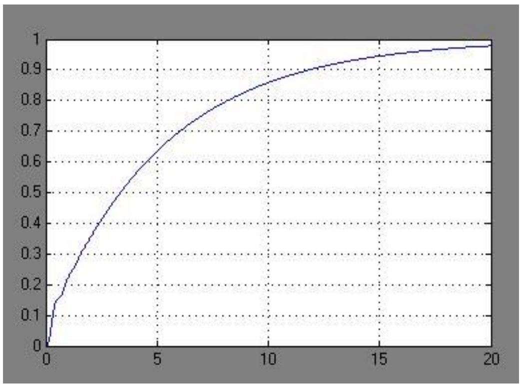
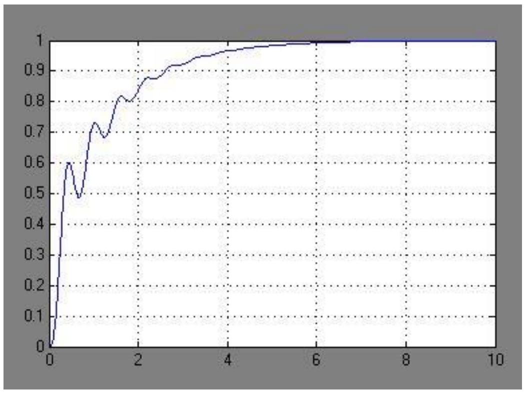


图 8 反馈负载转角 SIMULINK 仿真原理图

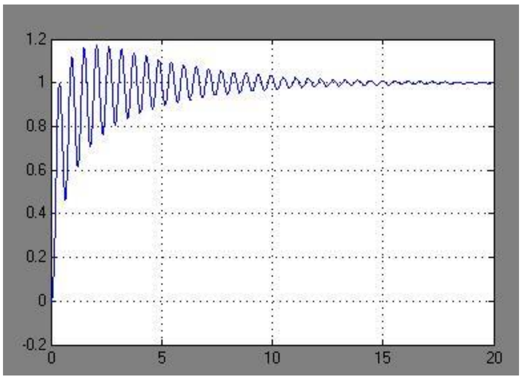
对控制器选取若干组典型参数进行仿真，取 KP/KD=2，KD 分别取 1、5、10、15 得到的系统阶跃响应如下



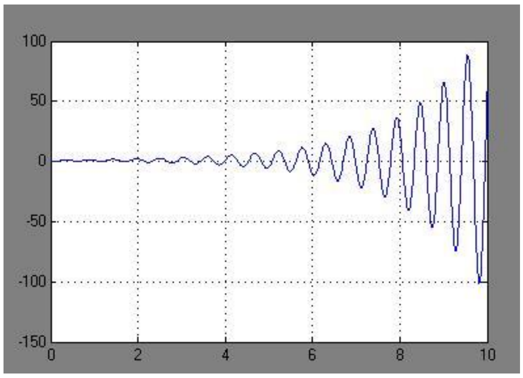
KD=1



KD=5



KD=10



KD=15

图 9 KD 取不同值下的反馈负载转角的系统阶跃响应图

结论：对于 KD ，存在一个有限值域，在此范围外系统理论上不稳定

三、 现代控制理论部分

（1）、建立状态空间方程，分析其能控性、能观性

根据(1-1)，选取状态变量

$$x_1 = \theta_l \qquad x_2 = \dot{\theta}_l \qquad x_3 = \theta_m \qquad x_4 = \dot{\theta}_m$$

列写状态方程

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= -\frac{k}{J_l}x_1 - \frac{B_l}{J_l}x_2 + \frac{k}{J_l}x_3 \\
\dot{x}_3 &= x_4 \\
\dot{x}_4 &= \frac{k}{J_m}x_1 - \frac{B_l}{J_m}x_4 - \frac{k}{J_m}x_3 + \frac{1}{J_m}u
\end{aligned}
$$

矩阵形式下的状态方程

$$
\begin{cases}
\dot{x} = Ax + bu \\
y = cx
\end{cases}
$$

$$
A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{J_l} & -\frac{B_l}{J_l} & \frac{k}{J_l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{J_m} & 0 & -\frac{k}{J_m} & \frac{B_m}{J_m} \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J_m} \end{bmatrix} \quad c = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]
$$

A、 能控性分析

$$
\begin{aligned}
&Q_c = [b, Ab, A^2b, A^3b] \\
&RankQ_c = 4(\text{满秩})
\end{aligned}
$$

结论：系统完全能控。

B、 能观性分析

$$
\begin{aligned}
&Q_o = [c, cA, cA^2, cA^3]^T \\
&Rank\,Q_o = 4(\text{满秩})
\end{aligned}
$$

结论：系统完全能观测。

（2）采用用极点配置法设计状态反馈控制器，使负载转角稳定在给定角度；

设置希望配置的闭环极点 $P = [-1 \quad -2 \quad -3 \quad -4]$ ，设反馈矩阵为 $K = [K_1 \quad K_2 \quad K_3 \quad K_4]$ ，由 $\det(sI - A + bK) = (s+1)(s+2)(s+3)(s+4)$ 求得相应的 $K = [84.39 \quad 9.0267 \quad 83.99 \quad -10]$

（3）采用极点配置法设计全维状态观测器

设置希望将其极点配置在 $P=[-1\quad -2\quad -3\quad -4]$ 上，系统具有能观测性，但不是规范型。

A、确定变换矩阵

$$T_1=\begin{bmatrix} c \\ cA \\ cA^2 \\ cA^3 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.0167 \end{bmatrix}$$

$$T=[T_1\quad AT_1\quad A^2T_1\quad A^3T_1]$$

B、能观测规范型

$$\dot{\hat{X}}=\hat{A}\hat{X}+\hat{B}u$$

$$y=\hat{c}\hat{X}$$

其中

$$\hat{X}=T^{-1}X\qquad \hat{A}=T^{-1}AT\qquad \hat{B}=T^{-1}B\qquad \hat{C}=cT$$

C、确定规范型所对应的反馈矩阵

设反馈矩阵

$$\hat{G}=\begin{bmatrix} \hat{g}_4 \\ \hat{g}_3 \\ \hat{g}_2 \\ \hat{g}_1 \end{bmatrix}$$

由 $\det(sI-\hat{A}+\hat{G}\hat{C})=(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)$ ，所以求得反馈矩阵的值

D、确定给定系统状态方程的反馈矩阵

$$G=T\hat{G}$$