

SPECIALE CORONAVIRUS

# La matematica di un'epidemia

Claudio Romeni

SPECIALE CORONAVIRUS

28 Febbraio 2020

Secondo l'**Istituto Superiore di Sanità**, una malattia infettiva provoca un'epidemia quando: *«il numero dei casi di malattia aumenta rapidamente in breve tempo.»*

Per capire come si propaga la malattia, immaginiamo di essere a una festa.

## L'epidemia dei verniciati

Ci sono cento persone in un grande salone. Un buontempone si è cosperso la mano di una vernice fluorescente, visibile solo se è illuminata da una lampada particolare. Una ragazza stringe la mano al buontempone e la vernice passa nella sua mano. Senza saperlo, la ragazza passa la vernice a ogni persona a cui stringe la mano, e così via. La vernice si propaga tra le mani dei presenti per contatto diretto.

Col procedere della festa, diminuisce il numero di persone con le mani pulite, mentre aumenta il numero di quelle con la mano verniciata. Queste passano vicino alla lampada, si accorgono di avere la mano verniciata e vanno in bagno per togliersi la vernice. Escono così dal salone, così non possono verniciare più nessuno.

Un'epidemia di mani verniciate avviene se il numero dei verniciati aumenta nel tempo, cioè quando *il numero di nuovi verniciati in un'ora è maggiore del numero dei già verniciati che in quell'ora sono usciti dal salone.*

Se ogni ora si verniciano 3 persone e 2 già verniciate escono dal salone, il contagio si propaga e dopo un po' di tempo arriva infettare tutti.

Se invece ogni ora si verniciano 2 persone e 3 già verniciate escono dal salone, il contagio rallenta dopo un po' di tempo si spegne.

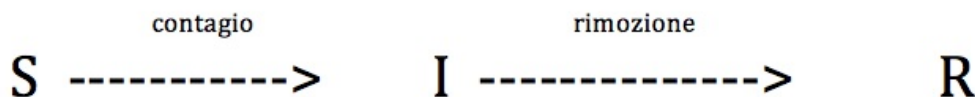
In altri termini, l'epidemia si propaga se la rapidità con cui nuove persone sono verniciate è maggiore della rapidità con cui escono di scena quelli che sono già stati verniciati e non possono quindi verniciare altre persone.

L'intuizione e il buon senso ci hanno guidato fin qui, ma per una comprensione più profonda dobbiamo schematizzare la situazione in modo più raffinato: abbiamo bisogno di un modello matematico.

## Dalla realtà alla matematica: il modello SIR

Un **modello matematico** è una descrizione quantitativa della dinamica semplificata di un processo, che consente di fare previsioni sull'evoluzione del processo. Un modello si basa su **ipotesi** che colgono gli **aspetti essenziali** del processo e approssimano la complessità della situazione reale.

Nel caso di un'epidemia, la dinamica è costituita da due processi: il **contagio** che crea infetti e la **rimozione** che li toglie dalla circolazione.



Il modello matematico più semplice per descrivere la dinamica di un'epidemia è il **modello SIR (Suscettibili, Infetti, Rimossi)**. Alla base di questo modello ci sono sei ipotesi:

1. La popolazione è composta da **N** individui ripartiti in tre sottoinsiemi:
  - **S**, i **suscettibili**, sono individui sani che possono contrarre il virus;
  - **I**, gli **infetti**, sono individui che hanno contratto il virus e possono diffonderlo;
  - **R**, i **rimossi**, sono individui che diventano immuni al virus, perché sono isolati dal contatto gli altri. Sono quelli in ospedale, in quarantena, quelli immuni che sono sopravvissuti al virus e quelli deceduti a causa del virus.
2. La **popolazione rimane costante** durante il periodo in esame: in ogni istante di tempo la somma del numero di suscettibili **S**, infetti **I** e rimossi **R** è uguale a **N**, cioè  **$S + I + R = N$**
3. La **probabilità** di contrarre il virus è **uguale per tutti** i suscettibili e rimane costante durante il periodo in esame.
4. Il **contagio** avviene mediante **contatto diretto** fra un suscettibile e un infetto.
5. Il numero di contagi è direttamente proporzionale al **numero di incontri tra suscettibili e infetti** secondo questa legge:

$$\text{contagi nell'intervallo di tempo } \Delta t = a \times S \times I \times \Delta t$$

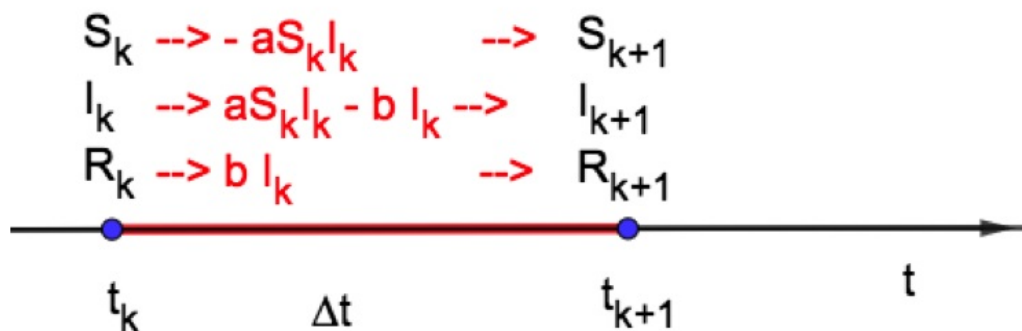
Il contagio è tanto più grande quanto più grande è il numero di persone esposte **S** e di infettati **I**. La costante di proporzionalità **a** **dipende dalla contagiosità del virus e dal numero di contatti che ha un infetto**. Quanto più spesso l'infetto entra in stretto contatto con individui sani, tanto più questi sono infettati.

6. Nell'intervallo di tempo  $\Delta t$  il numero di rimossi è direttamente proporzionale al numero di infetti:

$$\text{rimossi} = b \times I \times \Delta t$$

La costante di proporzionalità  **$b$**  dipende dall'efficienza del Sistema Sanitario nell'individuare gli infetti e nel toglierli dalla circolazione.

Con le ipotesi precedenti scriviamo le equazioni che regolano l'evoluzione dell'epidemia. Facciamo riferimento allo schema seguente, che "fotografa" in due istanti successivi  $t_k$  e  $t_{k+1}$  le grandezze coinvolte (in nero) ed evidenzia i flussi in ingresso e in uscita che le riguardano (in rosso).



In un intervallo di tempo  $\Delta t$  fra gli istanti  $t_k$  e  $t_{k+1}$ :

- il numero dei suscettibili diminuisce a causa dei contagi:  

$$S_{k+1} = S_k - a S_k I_k \Delta t \quad (1)$$
- il numero degli infetti aumenta per i contagi ma diminuisce per le rimozioni:  

$$I_{k+1} = I_k + a S_k I_k \Delta t - b I_k \Delta t \quad (2)$$
- il numero dei rimossi aumenta a causa delle rimozioni:  

$$R_{k+1} = R_k + b I_k \Delta t \quad (3)$$

L'epidemia si sviluppa solo se il numero degli infetti aumenta nel tempo, cioè se  $I_{k+1} > I_k$  per ogni  $k$ . Ciò avviene se:

$$a S_k I_k \Delta t - b I_k \Delta t > 0 \rightarrow (a S_k - b) I_k \Delta t > 0 \rightarrow a S_k / b > 1$$

Anche nel caso dei virus più contagiosi, durante un'epidemia gli infetti e i rimossi sono sempre una piccola frazione della popolazione complessiva. Quindi è un'ottima approssimazione supporre che sia  $S_k \approx N$  per ogni  $k$ .

Inseriamo questo valore nella relazione precedente e otteniamo:

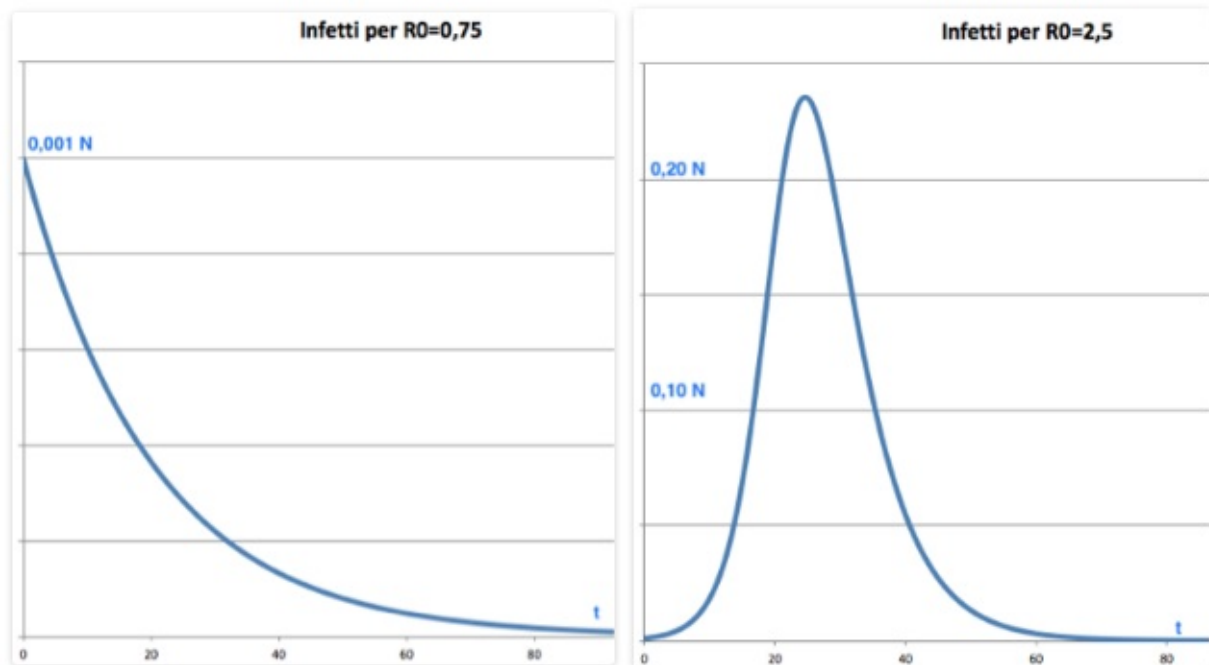
$$aN/b > 1$$

Concludiamo che la dinamica dell'epidemia dipende solo dal numero

$$R_0 = aN/b$$

che esprime il numero di contagi causato da un singolo infetto.

A questo punto distinguiamo due casi:



Nel primo caso  $R_0 < 1$ , il numero di infetti si annulla rapidamente e l'**epidemia non ha luogo**; nel secondo  $R_0 > 1$  e **si sviluppa l'epidemia**.

Per esempio, un Sistema Sanitario efficiente impedisce il diffondersi di un'epidemia agendo su due fronti: da un lato adotta **misure di igiene pubblica che riducono la probabilità di contagio** ( $a$  diminuisce), dall'altro **isola gli infetti in zone rosse o in ospedali**, aumentando così la frazione dei rimossi ( $b$  aumenta). L'effetto combinato è quello di diminuire  $R_0$ .

Prova ad applicare questo modello a un caso reale: usa il foglio di calcolo per risolvere l'esercizio che trovi [qui](#).

## Modelli che danno previsioni più accurate

A partire dal modello SIR sono stati sviluppati modelli sempre più sofisticati per descrivere le epidemie, che si basano su ipotesi più complesse e realistiche rispetto a quelle del SIR. Per esempio, tengono conto del fatto che:

- la popolazione è ripartita in classi di età, ciascuna delle quali ha probabilità specifiche di ammalarsi;
- la popolazione cambia nel tempo come effetto delle nascite e dei decessi.

Grazie a questi modelli in continua evoluzione, gli scienziati dell'Istituto Superiore di Sanità prevedono ogni anno il periodo in cui si ha il picco annuale dell'influenza e quante persone è probabile che si ammalino. Scienziati di tutto il mondo sono al lavoro in questi giorni per **creare un modello affidabile per prevedere la diffusione del Coronavirus** e dare così uno strumento alle autorità sanitarie per controllare il contagio.

Mettiti alla prova con gli [esercizi dello SPECIALE CORONAVIRUS](#) sulla piattaforma ZTE.

**Notizia del 28 febbraio 2020**

Un nuovo studio sulla capacità di trasmissione di SARS-CoV2 indica che il tasso di riproduzione (R) in Cina è già sceso sotto il valore critico di 1.

Come detto, R indica quante persone possono venire contagiate da un singolo paziente infetto.

$R > 1$  indica un'epidemia a rapida diffusione.

$R = 1$  indica una circolazione stabile ma continua (endemia),

$R < 1$  indica che la trasmissione si sta fermando.

Gli autori dello studio predicono che in Cina si stia raggiungendo il picco da cui poi inizierà a scemare se si manterranno le misure di contenimento. Il messaggio degli autori è chiaro: contenere il più possibile la trasmissione isolando i focolai è il modo più efficace di circoscrivere l'epidemia. Il lavoro è stato pubblicato l'11 febbraio su [\*Infectious Disease Modelling\*](#), quindi il picco è probabilmente già arrivato.

**TAG** contagio, epidemia, infetti, modello matematico, modello SIR, rimossi, suscettibili