Wirtschaftsmathematik: Funktionen mehrerer Variablen

Thilo Klein
thilo@klein.uk

Gliederung

Gegenstand

- Hängt die Variable y von mehreren Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ab, so liegt eine Funktion $f : D \to R$ mehrerer Variablen mit $D \subset R^n$ vor:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

- Der wesentliche Schritt zum Verständnis ist der Übergang von einer Funktion einer Variablen zu einer Funktion zweier Variablen. Um die Darstellung möglichst einfach zu halten, werden ausschließlich Funktionen zweier Variablen betrachtet:

$$y = f(x_1, x_2)$$

  Als Beispiel zur Erklärung wird durchgehend das Konzept der Produktionsfunktion verwendet, die den mengenmäßigen Zusammenhang zwischen dem Faktoreinsatz (Input) und dem Faktorertrag (Output, Güterproduktion) eines Unternehmens in mathematischer Darstellung wieder gibt.
- Anders als bisher wird die Produktionsmenge nun mit y bezeichnet, die Inputs mit x_1 und x_2.

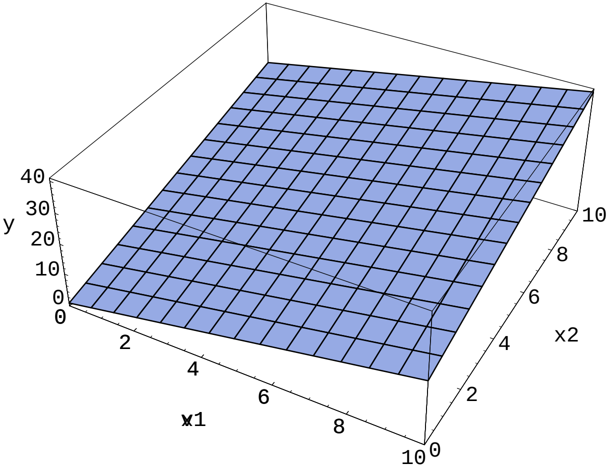
Lineare Produktionsfunktion

- Als einfachstes Beispiel dient die folgende lineare Produktionsfunktion $f: R_+^2 \to R$:

$$y = 2x_1 + 2x_2$$

- Aufgabe: Erstellen Sie eine Wertetabelle für $x_1 = 0, 1, 2$ und $x_2 = 0, 1, 2$.
- Die Abildung auf der nächsten Seite zeigt das Funktionsgebirge der betrachteten linearen Produktionsfunktion.

Lineare Produktionsfunktion



Vertikalschnitte: Ertragskurven

- Da die dreidimensionale Darstellung schwierig ist, werden alternativ Horizontal- und Vertikalschnitte betrachtet.
- Für einen Vertikalschnitt wird eine der unabhängigen Variablen konstant gesetzt.
- Beispiel: Setzt man $x_2 = 2$, so erhält man die Funktion

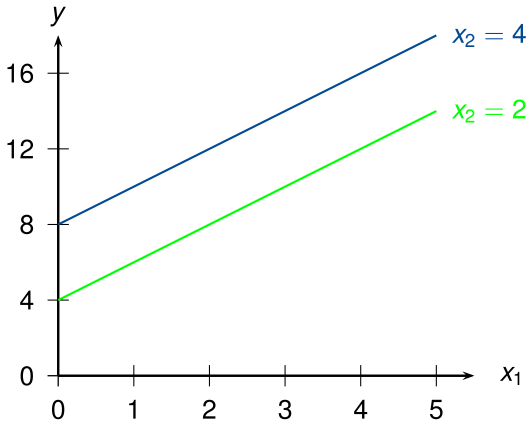
$$y = 2x_1 + 4.$$

- Graphisch entspricht das einem Schnitt durch das Funktionsgebirge parallel zur (x_1, y)-Ebene bei $x_2 = 2$.
- Für $x_2 = 4$ erhält man entsprechend die Funktion

$$y = 2x_1 + 8$$

  als Vertikalschnitt bei $x_2 = 4$. Die Vertikalschnitte heißen in der Produktionstheorie Ertragskurven.

Vertikalschnitte: Ertragskurven



Horizontalschnitte: Isoquanten

- Die Horizontalschnitte oder Höhenlinien entstehen durch Schnitte parallel zur (x_1, x_2)-Ebene bei einem festen Wert für y. Sie heißen in der Produktionstheorie Isoquanten.
- Beispiel: Für die Produktionsfunktion $y = 2x_1 + 2x_2$ wird das Outputniveau auf $y = 40$ festgelegt. Dann kann man

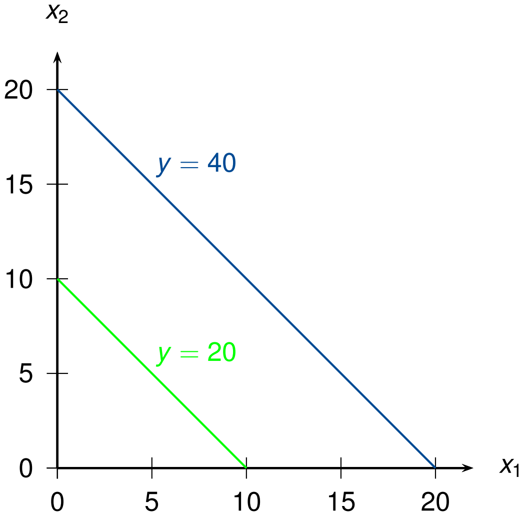
  $$40 = 2x_1 + 2x_2$$

  nach x_2 auflösen und erhält die Isoquante

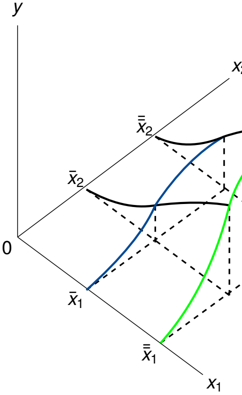
  $$x_2 = 20 - x_1.$$

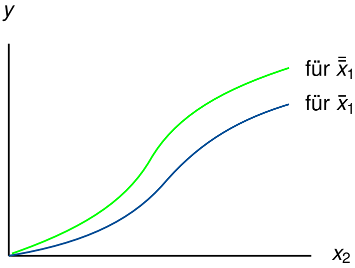
- Die 40 Einheiten können also mit $x_1 = x_2 = 10$ ebenso wie zum Beispiel mit $x_1 = 5$ und $x_2 = 15$ produziert werden. Ein Produktionsfaktor kann also durch den jeweils anderen ersetzt werden. Eine Produktionsfunktion mit dieser Eigenschaft heißt substitutionale Produktionsfunktion.

Horizontalschnitte: Isoquanten

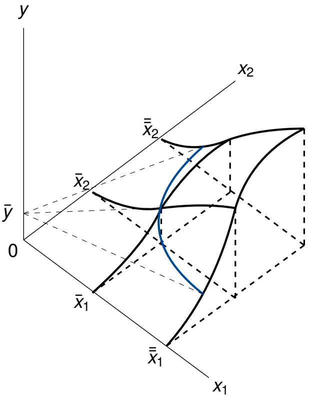


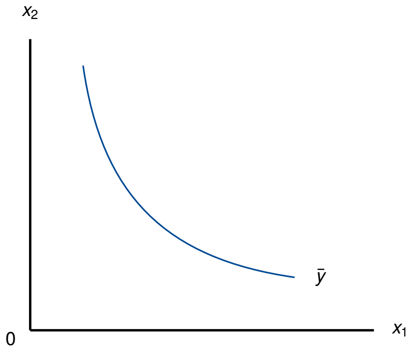
Algemeine Darstellung: Vertikalschnitte





Allgemeine Darstellung: Horizontalschnitte





Cobb-Douglas-Produktionsfunktion

- Das Standardbeispiel für eine substitutionale Produktionsfunktion ist die Cobb-Douglas-Funktion:

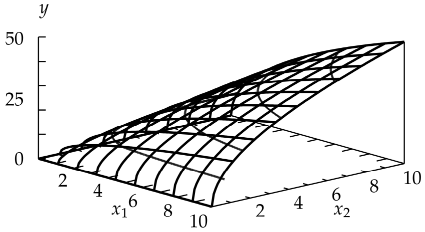
$$y = ax_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}, \quad \text{mit} \quad a > 0,\ 0 < \alpha_1, \alpha_2 < 1$$

- Beispiel: $\alpha_1 = \alpha_2 = 0{,}5$ und $a = 5$, also

$$y = 5x_1^{0,5} x_2^{0,5} = 5\sqrt{x_1}\sqrt{x_2} = 5\sqrt{x_1 x_2}$$

- Will man z.B. $y = 50$ Einheiten produzieren, so ist dies mit $x_1 = x_2 = 10$ ebenso möglich wie mit $x_1 = 5$ und $x_2 = 20$.
- Beispiel Ertragskurve: Für $y = 5\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}$ und $x_1 = 100$ ergibt sich die Ertragskurve $y = 50\sqrt{x_2}$. Ist dagegen $x_1 = 144$, so lautet die Ertragskurve $y = 60\sqrt{x_2}$.
- Beispiel Isoquante: Für eine Produktionsmenge von $y = 50$ folgt $50 = 5\sqrt{x_1 x_2}$, also $x_2 = 100/x_1$.

Cobb-Douglas-Produktionsfunktion



Gliederung

Partielle Ableitungen

- Eine differenzierbare Funktion zweier Variablen kann nach jeder dieser Variablen partiell abgeleitet werden.
- Wird für die Funktion $f(x_1, x_2)$ eine Variable (zum Beispiel x_2) als Konstante interpretiert (oder festgehalten), dann heißt die Ableitung von f nach x_1 die partielle Ableitung von f nach x_1:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = f_{x_1}(x_1, x_2)$$

- Analog wird die partielle Ableitung nach x_2 berechnet:

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = f_{x_2}(x_1, x_2)$$

- Partielle Ableitungen beschreiben den isolierten Einfluss einer Variablen auf den Funktionswert unter der Annahme, dass die andere Variable konstant bleibt.

Beispiele

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2) &= x_1^2 + x_2^3 && \Rightarrow \\
f(x_1, x_2) &= 2x_1^2 + 6x_2 && \Rightarrow \\
f(x_1, x_2) &= x_1^2 x_2^3 && \Rightarrow \\
f(x_1, x_2) &= \frac{x_1}{x_2} + x_1 x_2 && \Rightarrow \\
f(x_1, x_2) &= 3x_1^{-1} x_2^2 && \Rightarrow \\
f(x_1, x_2) &= e^{x_1^2 x_2} && \Rightarrow \\
f(x_1, x_2) &= x_1^{x_2} && \Rightarrow
\end{aligned}
$$

Grenzproduktivitäten

- Die Interpretation der partiellen Ableitungen bei Produktionsfunktionen ergibt sich daraus, dass sie die Steigungen der jeweiligen Ertragskurven angeben.
- Die partiellen Ableitungen werden als Grenzproduktivitäten bezeichnet:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial x_1} &= f_{x_1}(x_1, x_2) \quad &: \quad &\text{Grenzproduktivität des Faktors 1} \\ \frac{\partial y}{\partial x_2} &= f_{x_2}(x_1, x_2) \quad &: \quad &\text{Grenzproduktivität des Faktors 2} \end{aligned}$$

- Aus der Definition der Ableitungen ergibt sich, dass die Grenzproduktivitäten die Erhöhung des Output angeben, wenn der jeweilige Faktoreinsatz um eine Einheit steigt (siehe Differentiale).

Differentiale

- Steigt der Einsatz des Faktors 1 um eine Einheit, so gilt

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 \quad \text{bzw.} \quad \Delta y \approx \frac{\partial y}{\partial x_1} \Delta x_1,$$

  für $\Delta x_1 = 1$ gibt also $\partial y / \partial x_1$ näherungsweise die entsprechende Produktionssteigerung an.
- Gleichermaßen kann der Einfluss einer Erhöhung von x_2 berechnet werden:

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2 \quad \text{bzw.} \quad \Delta y \approx \frac{\partial y}{\partial x_2} \Delta x_2.$$

- Die hier berechneten Differentiale heißen partielle Differentiale.

Differentiale

- Frage: Wie kann die Änderung von y ermittelt werden, wenn x_1 und x_2 gleichzeitig variiert werden?
- Antwort: Die partiellen Differentiale werden addiert, man erhält ein totales Differential:

$$\boxed{dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2}$$

- Analog zum partiellen Differential erhält man eine für kleine Änderungen von x_1 und x_2 gute Näherung für die tatsächliche Funktionswertänderung gemäß

$$\Delta y \approx \frac{\partial y}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} \Delta x_2$$

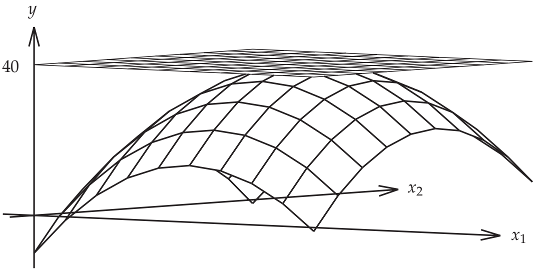
Gliederung

Optimierung ohne Nebenbedingungen

- Optimierungsprobleme nehmen in der Ökonomik eine zentrale Stellung ein (ökonomisches Prinzip).
- Bei Funktionen mehrerer Variablen ist zu unterscheiden, ob Nebenbedingungen vorliegen oder nicht. Zunächst wird der Fall ohne Nebenbedingungen betrachtet.
- Generell gilt: Beschränkung auf notwendige Bedingungen. Für entsprechende hinreichende Bedingungen wird auf die Literatur verwiesen.
- Die grundlegende notwendige Bedingung ist analog zum Fall einer Variablen. Wenn ein Punkt eine Extremwert ist, müssen beide partiellen Ableitungen gleich Null sein:

$$\boxed{f_{x_1}(x_1, x_2) = 0, \qquad f_{x_2}(x_1, x_2) = 0}$$

Optimierung ohne Nebenbedingungen



- Die Abbildung zeigt die Funktion $f(x_1, x_2) = 40 - (x_1 - 5)^2 - (x_2 - 5)^2$.
- Beim Maximum muss die Tangentialebene an die Funktion horizontal verlaufen.
- Dafür ist notwendig, dass beide partiellen Ableitungen gleich 0 sind: $f_{x_1} = -2x_1 + 10 = 0$, $f_{x_2} = -2x_2 + 10 = 0$. Das Maximum liegt bei $(x_1, x_2) = (5, 5)$ mit $f(5, 5) = 40$.

Optimierung mit Nebenbedingungen

- Gegeben sind nun eine Zielfunktion $f(x_1, x_2)$ und eine Nebenbedingung der Form $g(x_1, x_2) = 0$.
- Sofern möglich, wird die Nebenbedingung nach einer der Variablen aufgelöst und in die Zielfunktion eingesetzt.
- Die Zielfunktion ist so nur noch von einer Variablen abhängig. Die Extremwerte können dann mit den Methoden der eindimensionalen Extremwertbestimmung ermittelt werden.
- Eine allgemeinere Methode basiert auf der Verwendung einer Lagrangefunktion; dazu wird auf die Literatur verwiesen.

Optimierung mit Nebenbedingungen

- Beispiel: Gegeben sei die Produktionsfunktion $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 x_2}$. Angestrebt wird ein Produktionsniveau von $y = 10$. Die Faktorpreise betragen $q_1 = 2$ und $q_2 = 8$. Gesucht ist die Faktormengenkombination, die die Produktionskosten minimiert.
- Die Zielfunktion lautet damit:

$$K = 2x_1 + 8x_2$$

- Die Nebenbedingung ist:

$$\sqrt{x_1 x_2} = 10.$$

- Auflösen der Nebenbedingung nach x_2:

$$x_2 = 100/x_1$$

Optimierung mit Nebenbedingungen

- Einsetzen in die Zielfunktion:

$$K(x_1) = 2x_1 + 800/x_1$$

- Ableitung gleich Null setzen:

$$K'(x_1) = 2 - 800/x_1^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 20$$

- Bei der Lösung handelt es sich um ein Minimum, denn

$$K''(x_1) = 1600/x_1^3 > 0 \quad \text{für} \quad x_1 = 20.$$

- Einsetzen in die Nebenbedingung ergibt $x_2 = 5$. Die minimalen Kosten zur Produktion von $y = 10$ betragen demnach

$$K = 2 \cdot 20 + 8 \cdot 5 = 80.$$