Wirtschaftsmathematik: Grundlagen

Thilo Klein
thilo@klein.uk

Gliederung

Gliederung

Literatur

Christiaans, T. und Ross, M. 2016: Wirtschaftsmathematik für das Bachelor-Studium: Lehr- und Arbeitsbuch, 2. Auflage, Wiesbaden: Springer Gabler.

Gliederung

Elementare Rechenregeln

- Elementare Rechenregeln sind die Voraussetzung für die Korrektheit bei finanz- und wirtschaftsmathematischen Anwendungen.
- Zahlen, Rechenregeln, Rechengesetze, Bruchrechnung, Potenzen, Wurzeln und Logarithmus werden an vielen Stellen im Studium und Beruf benötigt.
- Zahlenmengen:
  - Natürliche Zahlen: $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$,
  - ganze Zahlen: $Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$,
  - rationale Zahlen: Q, alle ganzen Zahlen und alle Brüche,
  - reelle Zahlen: R, alle rationalen Zahlen und alle irrationalen Zahlen (zum Beispiel $\sqrt{2}$, e, π, $\ldots$).

Elementare Rechenregeln

- Von links nach rechts rechnen
- Klammern als Erstes ausrechnen (von innen nach außen)
- Potenz- vor Punktrechnung (multiplizieren, dividieren)
- Punkt- vor Strichrechnung (addieren, subtrahieren)
- Das Multiplikationszeichen (Punkt) kann weggelassen werden
- Negative Zahlen: $a + (-b) = a - b$
- Kommutativgesetz
  - $a + b = b + a$
  - $a \cdot b = b \cdot a$
- Assoziativgesetz
  - $(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$
  - $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$
- Distributivgesetz
  - $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
  - $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Bruchrechnung

Definition und Schreibweise:

- Zähler a geteilt durch Nenner ($b \neq 0$): $a : b = \dfrac{a}{b} = a/b$

Rechenregeln für Brüche:

- Kürzen oder erweitern: $\dfrac{a \cdot c}{b \cdot c} = \dfrac{a}{b}, \quad \dfrac{a + c}{b + c} \neq \dfrac{a}{b}$
- Addition: $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$
- Subtraktion: $\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d}$
- Multiplikation: $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \cdot c}{b \cdot d}$
- Division: $\dfrac{a}{b} : \dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{d}{c} = \dfrac{ad}{bc}$

Binomische Formeln

Die binomischen Formeln ergeben sich durch einfaches Ausmultiplizieren. Es ist trotzdem häufig sinnvoll, sie zu kennen, zum Beispiel, weil man sie manchmal rückwärts anwenden muss:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \tag{I.}$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \tag{II.}$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \tag{III.}$$

Als Beispiel der Beweis der zweiten Formel:

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a \cdot a - a \cdot b - b \cdot a + b \cdot b = a^2 - 2ab + b^2$$

Potenzen und Wurzeln

Regel	Beispiel
$a^0 = 1$	$5^0 = 1$
$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$	$2^3 \cdot 2^4 = 2^7$
$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$	$3^5 \cdot 4^5 = 12^5$
$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$	$\left(2^3\right)^4 = 2^{12}$
$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$	$2^{-3} = \frac{1}{2^3}$
$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$	$\frac{6^4}{6^2} = 6^2$
$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$	$\frac{10^5}{5^5} = 2^5$
$\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$	$\sqrt[5]{32} = 32^{1/5} = 32^{0,2} = 2$

Gleichungen

Rechenregeln für (lineare) Gleichungen:

- Alle Rechenoperationen, die Äquivalenzumformungen sind, sind erlaubt, solange sie für beide Seiten der Gleichung gleich durchgeführt werden.
- Dabei wird so umgeformt, dass am Ende derjenige Wert für x gefunden wird, der die Gleichung löst.
- Äquivalenzumformungen sind Umformungen, die die Lösungsmenge der Gleichung nicht ändern.
- Bei nichtlinearen Gleichungen müssen manchmal Umformungen gemacht werden, die keine Äquivalenzumformungen sind (zum Beispiel Quadrieren); eine Probe ist dann unbedingt erforderlich.

Beispiele:

- $$4+x=7 \quad \vert -4$$
  $$x=7-4=3$$
- $$4x=-12 \quad \vert \div 4$$
  $$x=-12/4=-3$$
- $$\begin{aligned} \frac{8-x}{2} &= 3 && \vert \cdot 2 \\ 8-x &= 3\cdot 2 && \vert -8 \\ -x &= 6-8 && \vert \div(-1) \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Gleichungen

Grundlegende Rechenregel für Gleichungen mit Exponenten: Die Gegenoperation, um auf einer Seite einer Gleichung den Exponenten *b* aufzulösen, ist:

Beide Seiten mit $1/b$ potenzieren.

Beispiele:

- $x^5 = 32 \quad \left|\sqrt[5]{} \; oder \; (\;)^{\frac{1}{5}}\right.$

  $x = \sqrt[5]{32} = 2$

- $x^{-7} = 128 \quad \left|\left(\sqrt[7]{}\right)^{-1} \; oder \; (\;)^{-\frac{1}{7}}\right.$

  $x = \left(\sqrt[7]{128}\right)^{-1} = (128)^{-\frac{1}{7}} = 0{,}5$

- $(2-3x)^{-3,3} = 2 \quad \left|(\;)^{\frac{1}{-3,3}}\right.$

  $(2-3x) = 2^{\frac{1}{-3,3}} \quad \left|-2 \quad \left|\div(-3)\right.\right.$

  $x = \dfrac{2^{\frac{1}{-3,3}} - 2}{-3} \approx 0{,}40$

Logarithmen

Logarithmus von a zur Basis b (mit $a > 0$, $b > 0$):

$$\boxed{\log_b a = x \quad \Longleftrightarrow \quad b^x = a}$$

Also: b hoch wieviel ergibt a?

Rechenregeln:

$$\begin{aligned}
\log_b(x \cdot y) &= \log_b x + \log_b y \\
\log_b(x/y) &= \log_b x - \log_b y \\
\log_b(x^y) &= y \cdot \log_b x
\end{aligned}$$

Wichtigste Basen: $b = 10$ (Zehnerlogarithmus $\lg = \log_{10}$) und $b = e$ (natürlicher Logarithmus $\ln = \log_e$) mit $e = 2,71828\ldots$ (Eulersche Zahl).

Logarithmen

Steht in Gleichungen die gesuchte Variable im Exponenten, so kann mit Hilfe des Logarithmus aufgelöst werden. Beispiel:

$$4^x = 10$$

Entweder:

$$x = \log_4 10 \approx 1{,}66$$

oder:

$$\begin{aligned} 4^x &= 10 && \big| \ln \\ \Leftrightarrow \quad \ln(4^x) &= \ln 10 && \big| \\ \Leftrightarrow \quad x \cdot \ln 4 &= \ln 10 && \big| \div \ln 4 \\ \Leftrightarrow \quad x &= \frac{\ln 10}{\ln 4} \approx 1{,}66 \end{aligned}$$

Quadratische Gleichungen

Allgemeine Form:

$$\boxed{x^2 + px + q = 0}$$

Lösung mit der p-q-Formel:

$$\boxed{x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

Mit $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ gilt für das Lösungsverhalten:

- $D > 0$: zwei Lösungen
- $D = 0$: eine Lösung
- $D < 0$: keine (reelle) Lösung

Quadratische Gleichungen

Beispiel: $4x^2 + 12x + 8 = 0$ wird zunächst durch 4 dividiert, um die p-q-Formel anwenden zu können:

$$x^2 \underbrace{+3}_{p=+3} x + \underbrace{2}_{q=+2} = 0$$

$$x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2}$$

also

$$x_1 = -1, \quad x_2 = -2.$$

Quadratische Gleichungen

Beispiel Wurzelgleichung. Aus

$$\sqrt{x+2} = x$$

erhält man durch Quadrieren

$$x^2 - x - 2 = 0$$

Die Lösungen $x_1 = 2$ und $x_2 = -1$ dieser quadratischen Gleichung sind jedoch nicht beide Lösungen der Wurzelgleichung. Grund: Quadrieren ist keine Äquivalenzumformung.

Durch die Probe folgt $L = \{2\}$.

Lineare Ungleichungen

- Eine lineare Ungleichung setzt zwei lineare Ausdrücke derart miteinander in Beziehung, dass der Ausdruck auf der linken Seite kleiner ($<$), kleiner oder gleich ($\leqq$), größer ($>$) oder größer oder gleich ($\geqq$) dem Ausdruck auf der rechten Seite sein soll.
- Meistens ist eine unbekannte Variable x in der Gleichung enthalten, und die interessierende Fragestellung ist, welche Werte x annehmen darf, damit die Ungleichung erfüllt ist.
- Die Lösung von linearen Ungleichungen erfolgt auf dem gleichen Weg wie bei linearen Gleichungen, das heißt, durch Äquivalenzumformungen wird die unbekannte Variable x auf die eine Seite der Ungleichung gebracht, so dass dann das Lösungsintervall direkt abgelesen werden kann.
- Wenn die Ungleichung im Rahmen der Umformung mit einer negativen Zahl multipliziert oder dividiert wird, kehrt das Ungleichheitszeichen seine Richtung um.
- Wird mit der unbekannten Variablen (x) multipliziert oder dividiert, muss eine Fallunterscheidung vorgenommen werden, um die Richtung des Ungleichheitszeichens zu bestimmen.
- Für weitere Erklärungen und Übungsaufgaben wird auf die angegebene Literatur verwiesen.

Prozentrechnung

Die grundlegende Formel zur Berechnung des Prozentwertes (W) aus dem Grundwert (G) und dem Prozentsatz (p) lautet:

$$W = \frac{p}{100} \cdot G$$

Aus dieser Formel lassen sich alle anderen Formeln durch Umformung ableiten.

Beachte: Prozent bedeutet pro Hundert, also z.B.:

$$5\% = \frac{5}{100} = 0{,}05.$$

Prozentrechnung

Prozentwert gesucht: Wieviel Euro sind 5% von 200 €?

	%	€	
	100	200	
: 100			: 100
	1	$\frac{200}{100}$	
·5			·5
	5	$\frac{2\cancel{00}}{1\cancel{00}} \cdot 5 = 10$	

$$W = \frac{p}{100} \cdot G$$

also:

$$W = \frac{5}{1\cancel{00}} \cdot 2\cancel{00} = 10$$

Antwort: 10 €

Prozentrechnung

Prozentsatz gesucht: Wieviel Prozent sind 10 € von 200 €?

$$\begin{array}{cc|cc}
 & \text{€} & \% & \\
\hline
 & 200 & 100 & \\
:200 & & & :200 \\
 & 1 & \frac{100}{200} & \\
\cdot 10 & & & \cdot 10 \\
 & 10 & \frac{\cancel{100}\cdot 10}{\cancel{200}} = 5 &
\end{array}$$

$$p = \frac{W}{G} \cdot 100$$

also:

$$p = \frac{10}{\cancel{200}} \cdot \cancel{100} = 5$$

Antwort: 5 %

Prozentrechnung

Grundwert gesucht: Wie hoch ist der Grundwert, wenn 5% gleich 10 € sind?

	%	€	
	5	10	
$:5$			$:5$
	1	$\frac{10}{5}$	
$\cdot 100$			$\cdot 100$
	100	$\frac{\cancel{10}^{2}}{\cancel{5}_{1}} \cdot 100 = 200$	

$$G = \frac{W}{p} \cdot 100$$

also:

$$G = \frac{\cancel{10}^{2}}{\cancel{5}_{1}} \cdot 100 = 200$$

Antwort: 200 €

Prozentrechnung

Vermehrter Grundwert gesucht: Wie hoch ist der vermehrte Grundwert G_+, wenn 5% von 200 € hinzugerechnet werden?

	%	€	
	100	200	
: 100			: 100
	1	$\frac{200}{100}$	
·105			·105
	105	$\frac{\cancel{200}}{\cancel{100}} \cdot 105 = 210$	

$$G_+ = G + W = \frac{100 + p}{100} \cdot G,$$

also:

$$G_+ = \frac{100 + 5}{1\cancel{00}} \cdot 2\cancel{00}$$

$$= 210$$

Antwort: 210 €

Prozentrechnung

Zur Prozentrechnung gibt es hier keine Aufgaben; stattdessen an dieser Stelle noch einige Anmerkungen:

- Die einfache Zinsrechnung (ohne Zinseszinsen) ist eine direkte Anwendung der Prozentrechnung. Wir werden sie mit Übungsaufgaben in der Vorlesung behandeln.
- In den Wirtschaftswissenschaften werden prozentuale Änderungen häufig als Wachstumsraten bezeichnet. Steigt zum Beispiel das reale Bruttoinlandsprodukt (BIP) um 2%, so spricht man von einem Wirtschaftswachstum um 2%.
- Bei Prozentsätzen ist immer wichtig, auf welchen Grundwert sie bezogen werden. Steigt zum Beispiel das BIP von 100 Milliarden auf 101 Milliarden, so wächst es um 1%. Fällt es anschließend um 1%, also um $1 \cdot 101/100 = 1{,}01$ Milliarden, so beträgt es nur noch 99,99 Milliarden. Der Grundwert vor dem Rückgang um 1% ist nämlich 101 Milliarden, ncht 100 Milliarden.

Summenzeichen

$$\sum_{i=1}^{5} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$$

Die Laufvariable i durchläuft alle ganzen Zahlen von 1 bis 5

Jede dieser Zahlen der Laufvariable wird einmal in den Term hinter dem Summenzeichen (Summenglied) eingesetzt, und dann wird über alle i aufsummiert.

Beispiele:

$$\sum_{i=6}^{12} i^2 = 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 + 11^2 + 12^2$$

$$\sum_{i=2}^{6} 2(i+1) = 6 + 8 + 10 + 12 + 14 = 2\sum_{i=2}^{6}(i+1)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{\ln i} = \frac{1}{\ln 1} + \frac{2}{\ln 2} + \frac{3}{\ln 3} + \frac{4}{\ln 4} + \cdots$$

$$\sum_{i=0}^{4} \frac{20}{1{,}1^i} = 20\left(1 + \frac{1}{1{,}1^1} + \frac{1}{1{,}1^2} + \frac{1}{1{,}1^3} + \frac{1}{1{,}1^4}\right)$$

Hinweis: Es gilt $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$ (Gaußsche Summenformel).