Wirtschaftsmathematik: Integralrechnung

Thilo Klein
thilo@klein.uk

Gliederung

Grundlagen

- Die Integralrechnung stellt in gewisser Hinsicht die Umkehrung der Differentialrechnung dar.
- Ist $F(x)$ eine differenzierbare Funktion mit $F'(x) = f(x)$, so heißt $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$. Da additive Konstanten bei der Ableitung verschwinden, ist die Stammfunktion nur bis auf eine additive Konstante C bestimmt.
- Das unbestimmte Integral einer Funktion $f(x)$ ist die Menge ihrer Stammfunktionen:

$$\boxed{\int f(x)\, dx = F(x)} \quad \text{mit } F'(x) = f(x)$$

- Beispiel: $f(x) = x^2$, dann ist

$$F(x) = \int x^2\, dx = \frac{1}{3}x^3 + C,$$

wobei C eine beliebige Konstante ist.

Grundlagen

- Das bestimmte Integral erhält man aus der Stammfunktion, indem die festen Integrationsgrenzen a und b (oder die variable obere Grenze x) eingeführt werden:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

- oder

$$\boxed{F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\,dt \quad [\Rightarrow F'(x) = f(x)]}$$

- Dieser Zusammenhang gilt, wenn f stetig auf $[a, b]$ ist (und $x \in (a, b)$ für die zweite Schreibweise) und wird als Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung bezeichnet.

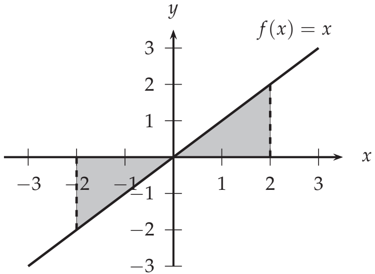
Flächenberechnung

- Ist die Funktion $f(x) \geqq 0$ auf dem Intervall $[a, b]$, so ist

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

  der Flächeninhalt der von $f(x)$, der x-Achse und den Geraden $x = a$ und $x = b$ begrenzten Fläche.
- Ist $f(x) \leqq 0$, so wird der Betrag verwendet.
- Hat $f(x)$ Nullstellen in $[a, b]$, so werden die Beträge der Integrale über die durch die Integrationsgrenzen und Nullstellen gebildeten Teilintervalle verwendet.

Flächenberechnung



- Beispiel: Gesucht ist die Fläche zwischen $f(x) = x$ und der x-Achse zwischen -2 und 2.
- Da $f(x) < 0$ für $x < 0$, werden die Beträge der Teilintegrale berechnet:

$$\left|\int_{-2}^{0} x\ dx\right| + \left|\int_{0}^{2} x\ dx\right|$$
$$= \left|\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^{0}\right| + \left|\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{2}\right|$$
$$= |[0-2]| + |[2-0]|$$
$$= |-2| + |2| = 4.$$

Flächenberechnung

- Beispiel: Soll die zwischen den beiden Funktionen $f(x) = x + 2$ und $g(x) = x^2$ eingeschlossene Fläche berechnet werden, so berechnet man zunächst die Schnittpunkte (Nullstellen von $f(x) - g(x)$): $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.
- Die gesuchte Fläche ergibt sich aus

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} [f(x) - g(x)]\, dx &= \int_{-1}^{2} [x + 2 - x^2]\, dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{2} \\ &= \left(2 + 4 - \frac{8}{3}\right) - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3}\right) = 4{,}5\end{aligned}$$

- Verwendet man $g(x) - f(x)$, so lautet das Ergebnis $-4{,}5$, so dass der Betrag zu bilden ist.

Wichtige Grundintegrale und Rechenregeln

$f(x)$	a	$x^k,\, k \neq -1$	$\frac{1}{x}$	e^x	$\ln x$
$F(x)$	ax	$\frac{1}{k+1}x^{k+1}$	$\ln\lvert x\rvert$	e^x	$x\ln x - x$

$$\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx,$$

$$\int cf(x)\, dx = c\int f(x)\, dx$$

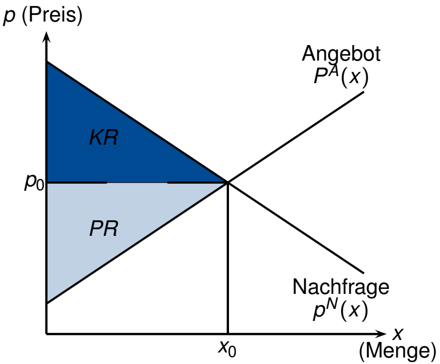
$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^{x_0} f(x)\, dx + \int_{x_0}^b f(x)\, dx,$$

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$$

Konsumenten- und Produzentenrente

- Die Konsumentenrente misst den Nutzengewinn der Konsumenten der dadurch entsteht, dass sie nur den Marktpreis p_0 zahlen und nicht den Preis ihrer maximalen Zahlungsbereitschaft (entsprechend ihrer Nachfragekurve).
- x_0 sei die Gleichgewichtsmenge. Die Konsumentenrente entspricht der Fläche unter der Nachfragefunktion bis zum Gleichgewichtspreis p_0.
- Die Produzentenrente entspricht der Fläche über der Angebotsfunktion bis zum Gleichgewichtspreis p_0.
- Konsumenten- und Produzentenrente gemeinsam können als Maß für den auf einem Markt erzeugten Wohlstand dienen.
- $p^N(x)$ und $p^A(x)$ seien die inverse Nachfrage- und die inverse Angebotsfunktion.

Konsumenten- und Produzentenrente



$$KR = \int_0^{x_0} p^N(x)\,dx - x_0 \cdot p_0$$

$$PR = x_0 \cdot p_0 - \int_0^{x_0} p^A(x)\,dx$$

daraus folgt:

$$KR + PR = \int_0^{x_0} p^N(x) - p^A(x)\,dx$$

Konsumenten- und Produzentenrente

- Beispiel: Wie hoch sind Gleichgewichtspreis und -menge sowie Konsumenten- und Produzentenrente für die folgenden inversen Nachfrage- und Angebotsfunktionen?

$$p^N(x) = 10 - 3x, \quad p^A(x) = 2x$$

- Gleichgewicht: Aus $p^N(x) = p^A(x)$ folgt $x_0 = 2$, einsetzen liefert $p_0 = 4$.
- Konsumenten- und Produzentenrente:

$$\begin{aligned} KR &= \int_0^{x_0} p^N(x)\,dx - x_0 p_0 = \int_0^2 10 - 3x\,dx - 4 \cdot 2 = [10x - 1{,}5x^2]_0^2 - 8 \\ &= [14 - 0] - 8 = 6 \\ PR &= x_0 p_0 - \int_0^{x_0} p^A(x)\,dx = 4 \cdot 2 - \int_0^2 2x\,dx = 8 - [x^2]_0^2 \\ &= 8 - [4 - 0] = 4 \end{aligned}$$

Konsumenten- und Produzentenrente

- Weitere Interpretation der Produzentenrente: Wegen der Grenzkosten-Preis-Regel ($K'(x) = p$) entspricht die Angebotsfunktion jedes einzelnen Unternehmens seiner Grenzkostenfunktion.
- Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt:

$$\int_0^{x_0} K'(x)\,dx = K(x_0) - K(0), \quad \text{also } K(x_0) = K(0) + \int_0^{x_0} K'(x)\,dx$$

- Wegen $K(0) = K_f$ (Fixkosten) und $K(x_0) = K_f + K_v(x_0)$ muss das bestimmte Integral von 0 bis x_0 der Grenzkostenfunktion (also die Fläche unter der Angebotsfunktion) gleich den variablen Kosten $K_v(x_0)$ sein.
- Die Produzentenrente ist also gleich dem Umsatz $p_0 x_0$ minus den variablen Kosten und unterscheidet sich von den Gewinnen (= Umsatz minus gesamte Kosten) lediglich durch die nicht abgezogenen Fixkosten.
- Es gilt also: Gewinn = Produzentenrente − Fixkosten