Gliederung

Grundbegriffe

Was ist was?

- Verbindung von beschreibender und schließender Statistik
- Wahrscheinlichkeitsrechnung: Zuordnung von Zahlen zu bestimmten Ereignissen (Auskunft über die Wahrscheinlichkeit ihres Eintreffens)

- Zufallsexperiment (z.B. das Werfen eines Würfels)
- Merkmal (*Zufallsvariable*, z.B. die Augenzahl)
- Merkmalsausprägungen (*Elementarereignisse*, z.B. die ganzen Zahlen von 1 bis 6)
- Ereignis (Teilmenge des Wertebereichs, z.B. die geraden Zahlen)

Grundbegriffe

Was ist was?

- Jedem Ereignis E wird die Wahrscheinlichkeit seines Eintreffens Pr(E) zugeordnet

Es gilt:

- $0 \leq Pr(E) \leq 1$
- Pr(unmögliches Ereignis) $= 0$
- Pr(sicheres Ereignis) $= 1$

Grundbegriffe

Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten

- Beispiel 17: Schatztruhenlotto (10 Mio. Lose)

Anzahl pro Serie	„Gewinn“ in Euro
10 x	Eine Schatztruhe voller Gold
13 x	30.000
20 x	3.000
60 x	1.000
130 x	300
3.000 x	100
7.000 x	60
20.000 x	30
70.000 x	9
290.000 x	6
642.000 x	3
1.140.000 x	1,50
7.827.767 x	(Niete) 0

Alle Fälle sind gleich wahrscheinlich

Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mit der Abzählregel: „günstige“ durch „mögliche“ Ereignisse

Grundbegriffe

Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten

- Beispiel 17: Schatztruhenlotto (10 Mio. Lose)
  - Pr(x = „Schatztruhe“) = $\frac{10}{10\ Mio} = 0.000001$ → in durchschnittlich nur einem von 1 Millionen Fällen wird das Ereignis eintreffen
  - Pr(x = 1,50) = $\frac{1.140.000}{10\ Mio} = 0{,}114$ → in durchschnittlich 11 von 100 Fällen…
  - Pr(x ≥ 3) = $\frac{642.000+290.000+\cdots+10}{10\ Mio} = \frac{1.032.233}{10\ Mio} = 0{,}103$
  - Pr(x ≥ 3) = 1- Pr(x<3) = 1-0.897=0.103 (Gegenwahrscheinlichkeit)

x …Auszahlungsbetrag

Anzahl pro Serie	„Gewinn“ in Euro
10 x	Eine Schatztruhe voller Gold
13 x	30.000
20 x	3.000
60 x	1.000
130 x	300
3.000 x	100
7.000 x	60
20.000 x	30
70.000 x	9
290.000 x	6
642.000 x	3
1.140.000 x	1,50
7.827.767 x	(Niete) 0

Grundbegriffe

Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten

- Beispiel 17: Schatztruhenlotto (10 Mio. Lose)

Bedingte Wahrscheinlichkeit:

- unter der Bedingung das man keine Niete hat, wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass man mindestens 3 Euro gewinnt?
- $\Pr(x \geq 3 \mid x \neq 0) = \frac{1.032.233}{2.172.233} = 0{,}475$

x …Auszahlungsbetrag

Anzahl pro Serie	„Gewinn“ in Euro
10 x	Eine Schatztruhe voller Gold
13 x	30.000
20 x	3.000
60 x	1.000
130 x	300
3.000 x	100
7.000 x	60
20.000 x	30
70.000 x	9
290.000 x	6
642.000 x	3
1.140.000 x	1,50
7.827.767 x	(Niete) 0

Grundbegriffe

Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten

- Lotto 6 aus 49: Alle möglichen Zahlenkombinationen sind gleich wahrscheinlich → Abzählregel: „günstige“ durch „mögliche“
- Mögliche: Anzahl verschiedener 6er Gruppen bei 49 Kugeln

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{6!(49-6)!} = 13.983.816 \text{ Möglichkeiten}$$

Sprich: „49 über 6“; 49! = „49 Fakultät“

- Günstige: Anzahl der abgegebenen Tipps

x… Anzahl der „Richtigen“ bei *einem* ausgefüllten Tipp

Pr(x = „richtige Sechserreihe“) $= \frac{1}{13.983.816} = 0{,}000000072$

Grundbegriffe

Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten

- Fakultät
  - Jede natürliche Zahl n hat eine Fakultät. Sie ist das Produkt der natürlichen Zahlen, die kleiner oder gleich der Zahl n sind.
  - Man schreibt sie als $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n$ und liest sie n Fakultät.
  - Es ist zweckmäßig, $1! = 1$ und auch $0! = 1$zu definieren.

0!=1	**5!=120**	**10!=3.628.800**
1!=1	**6!=720**	**11!=39.916.800**
2!=2	**7!=5.040**	**12!=479.001.600**
3!=6	**8!=40.320**	**13!=6.227.020.800**
4!=24	**9!=362.880**	**14!=8,717829120*10^{10}**

Grundbegriffe

Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten

- Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten von unabhängigen Ereignissen
- Bsp. 2 Würfel: Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit 2 Sechsen zu würfeln?
- Beide Würfel unabhängig voneinander; bei jedem Würfel Abzählregel
  - 1. Würfel: Pr(x=6)= $\frac{\text{günstige Ereignisse}}{\text{mögliche Ereignisse}} = \frac{1}{6}$
  - 2. Würfel: Pr(x=6) = $\frac{\text{günstige Ereignisse}}{\text{mögliche Ereignisse}} = \frac{1}{6}$
  - Gesamtwahrscheinlichkeit: $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

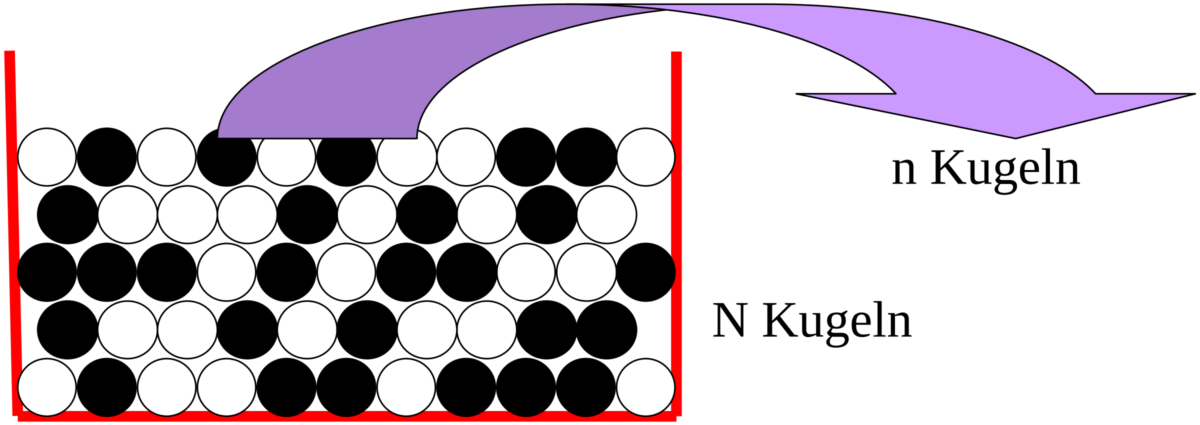
Allgemeines

- Große Ähnlichkeit mit deskriptiver Statistik
  - Diskrete und stetige Merkmale
  - Tabellarisch und graphisch darstellbar
  - Wahrscheinlichkeitsverteilung – Häufigkeitsverteilung
  - Kennzahlen: Erwartungswert – Mittelwert, etc.

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

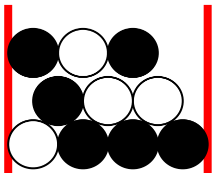
Hypergeometrische Verteilung

- Urnenmodell
  - Zufälliges Ziehen **ohne** Zurücklegen (Bsp: Lotto) einer Stichprobe von n Kugeln aus einer Grundgesamtheit von N Kugeln
  - = Art der Stichprobenziehung, die Rückschlüsse von der Stichprobe auf die Grundgesamtheit ermöglicht
  - Anwendung: z.B. in der Qualitätskontrolle

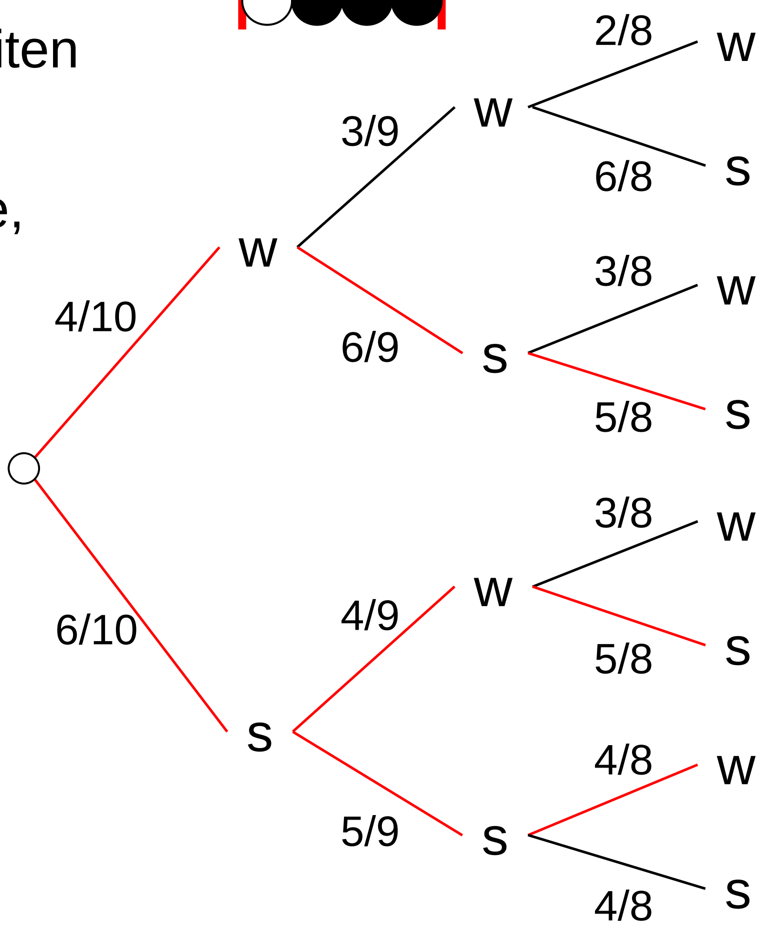


Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Hypergeometrische Verteilung



- Beispiel 18: Wahrscheinlichkeiten im Urnenmodell 1
  - N = 10 Kugeln, A = 4 weiße, N – A = 6 schwarze Kugeln
  - n = 3 werden gezogen
- Wie wahrscheinlich ist es, dass unter den 3 gezogenen Kugeln genau eine weiße Kugel ist? → x = Anzahl der gezogenen weißen Kugeln



$$\frac{4}{10}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8}=\frac{1}{6}$$

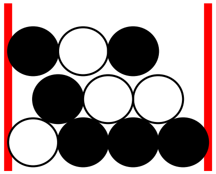
$$\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{8}=\frac{1}{6}$$

$$\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}=\frac{1}{6}$$

$$\Pr(x=1)=0{,}5$$

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Hypergeometrische Verteilung

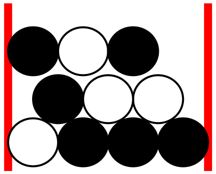


- Beispiel 18: Wahrscheinlichkeiten im Urnenmodell 1
  - N = 10 Kugeln, A = 4 weiße, N – A = 6 schwarze Kugeln
  - n = 3 werden gezogen

- Wie wahrscheinlich ist es, dass unter den 3 gezogenen Kugeln genau eine weiße Kugel ist? → x = Anzahl der gezogenen weißen Kugeln → alternativer Rechenweg über Abzählregel:
  - Alle Kombinationen der 10 Kugeln gleich wahrscheinlich (Kugeln mit den Nummern 1,2,3; 1,2,4; 1,2,5…) → Abzählregel
  - Mögliche Kombinationen (Binomialkoeffizient): $\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = 120$

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Hypergeometrische Verteilung



- Beispiel 18: Wahrscheinlichkeiten im Urnenmodell 1
  - Günstige Kombinationen: Eine weiße Kugel mit zwei schwarzen kombinieren → gedankliche Zerlegung in 2 Urnen mit nur weißen, bzw. schwarzen Kugeln

  → Für eine weiße unter den drei gezogenen Kugeln muss eine der 4 weißen Kugeln gezogen werden

  → Für zwei schwarze unter den drei gezogenen Kugeln müssen 2 der 6 schwarzen Kugeln gezogen werden

  weiß

  → Gesamtzahl der Möglichkeiten $\binom{4}{1} \cdot \binom{6}{2}$ ← schwarz

  - Pr(x=1) = $\frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{6}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{4\cdot 15}{120} = 0{,}5$
  - Pr(x=0), Pr(x=2) und Pr(x=3)?

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Hypergeometrische Verteilung

- Verallgemeinerung: N Kugeln, A weiße, N-A schwarze, n werden zufällig gezogen, x … gezogene weiße Kugeln, n-a gezogene schwarze Kugeln

$$\Pr(x = a) = \frac{\binom{A}{a} \cdot \binom{N-A}{n-a}}{\binom{N}{n}}$$

- Theoretischer Mittelwert μ der gezogenen weißen Kugeln:

$$\mu = n \cdot \frac{A}{N}$$

In Bsp. 18: $\mu = 3 \cdot \frac{4}{10} = 1{,}2$

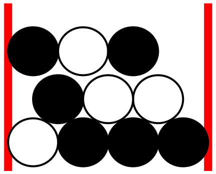
- Theoretische Varianz σ^2:

$$\sigma^2 = n \cdot \frac{A}{N} \cdot \left(1 - \frac{A}{N}\right) \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

In Bsp. 18: $\sigma^2 = 3 \cdot \frac{4}{10} \cdot \left(1 - \frac{4}{10}\right) \cdot \frac{10-3}{10-1} = 0{,}56$

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Hypergeometrische Verteilung

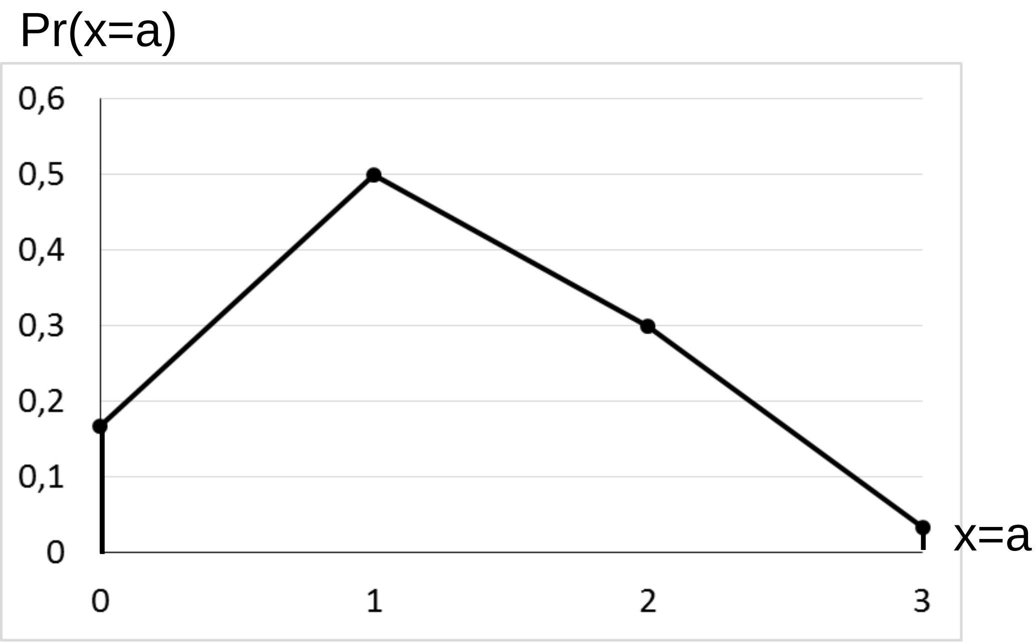


- Beispiel 18: Wahrscheinlichkeiten im Urnenmodell 1

x = a	Pr(x = a)
0	0,167
1	0,5
2	0,3
3	0,033
	1

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot p_i = 1{,}2$$

$$s^2 = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x})^2 \cdot p_i = 0{,}56$$



Achtung: Fläche unter der Kurve = 1 = Gesamtsumme der Wahrscheinlichkeiten aller Ereignisse

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

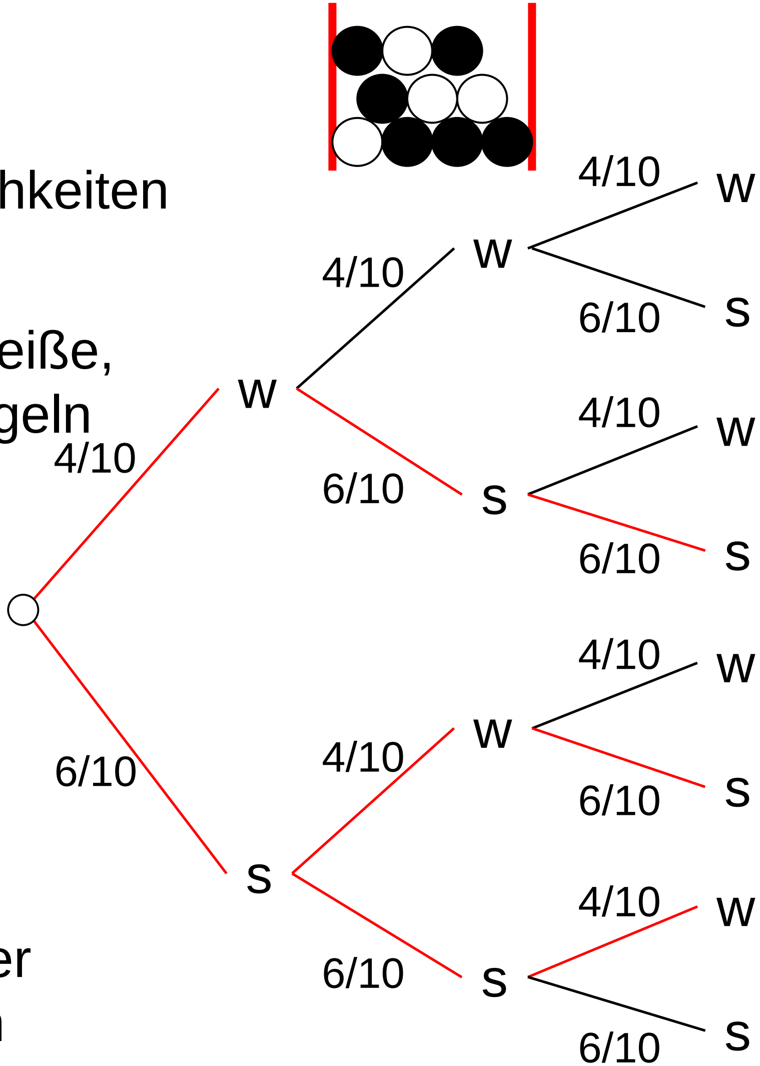
Binomialverteilung

- Urnenmodell
  - Zufälliges Ziehen **mit** Zurücklegen: Vor der Ziehung einer neuen Kugel wieder derselbe Urneninhalt
  - = Art der Stichprobenziehung, die Rückschlüsse von der Stichprobe auf die Grundgesamtheit ermöglicht
  - Anwendung bei unabhängigen Wiederholungen ein und desselben Versuchs

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Binomialverteilung

- Beispiel 19: Wahrscheinlichkeiten im Urnenmodell 2
  - N = 10 Kugeln, A = 4 weiße, N – A = 6 schwarze Kugeln
  - n = 3 werden gezogen
- Wie wahrscheinlich ist es, dass unter den 3 gezogenen Kugeln genau eine weiße Kugel ist? → x = Anzahl der gezogenen weißen Kugeln



$$\frac{4}{10}\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{6}{10}=\frac{18}{125}$$

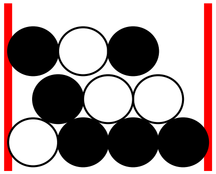
$$\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{6}{10}=\frac{18}{125}$$

$$\frac{6}{10}\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{10}=\frac{18}{125}$$

$$\Pr(x=1)=0{,}432$$

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Binomialverteilung



- Beispiel 19: Wahrscheinlichkeiten im Urnenmodell 2
  - N = 10 Kugeln, A = 4 weiße, N – A = 6 schwarze Kugeln
  - n = 3 werden gezogen
- Die Gesamtwahrscheinlichkeit für eine gezogene weiße Kugel ist daher

  $3 \cdot 0{,}144 = 0{,}432$

- Allgemein: Pr(x=1) = $\binom{3}{1} \cdot\ 0{,}4^1 \cdot 0{,}6^2 = 0{,}432$

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Binomialverteilung

- Verallgemeinerung: N Kugeln, A weiße, n werden zufällig gezogen, $\pi = A/N$ und $1 - \pi = 1 - A/N$
- x = Anzahl der gezogenen weißen Kugeln

$$\boxed{\Pr(x = a) = \binom{n}{a} \cdot \pi^a \cdot (1 - \pi)^{n-a}}$$

- Theoretischer Mittelwert μ der gezogenen weißen Kugeln:

$$\boxed{\mu = n \cdot \pi}$$

In Bsp. 19: $\mu = 3 \cdot \frac{4}{10} = 1{,}2$

- Theoretische Varianz σ^2:

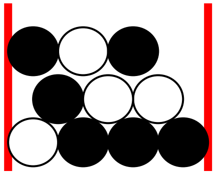
$$\boxed{\sigma^2 = n \cdot \pi \cdot (1 - \pi)}$$

In Bsp. 19: $\sigma^2 = 3 \cdot \frac{4}{10} \cdot \left(1 - \frac{4}{10}\right) = 0{,}72$

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Hypergeometrische Verteilung

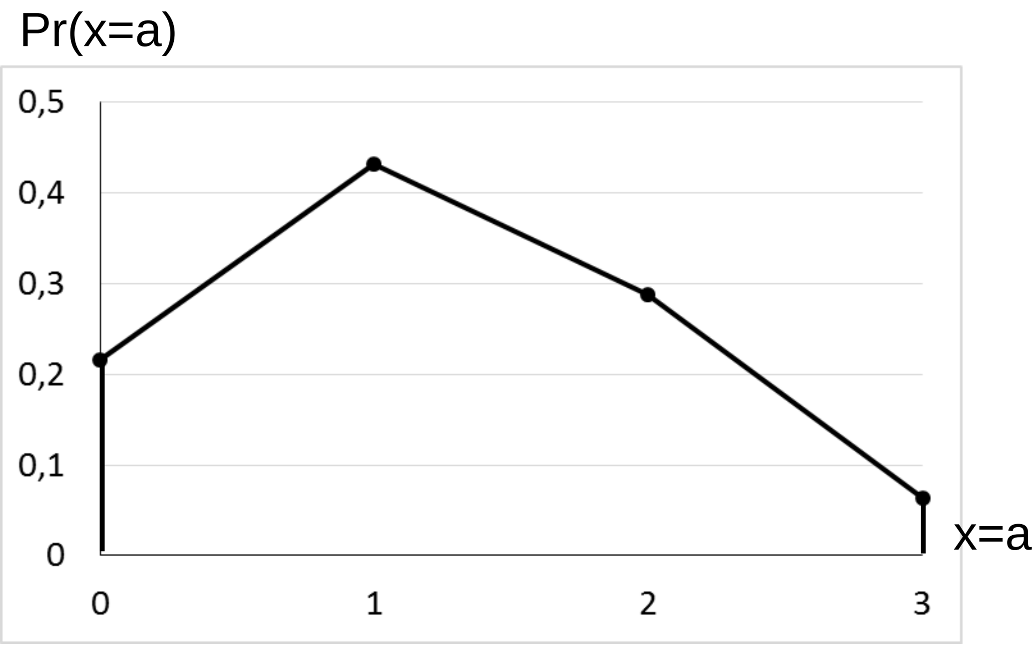
- Beispiel 18: Wahrscheinlichkeiten im Urnenmodell 2



x = a	Pr(x = a)
0	0,216
1	0,432
2	0,288
3	0,064
	1

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot p_i = 1{,}2$$

$$s^2 = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x})^2 \cdot p_i = 072,$$



Achtung: Fläche unter der Kurve = 1 = Gesamtsumme der Wahrscheinlichkeiten aller Ereignisse

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Binomialverteilung

- Vergleich Hypergeometrische Verteilung und Binomialverteilung

x = a	Pr(x = a) (Hypergeometrisch)	Pr(x = a) (Binomialverteilung)
0	0,167	0,216
1	0,5	0,432
2	0,3	0,288
3	0,033	0,064

→Binomialverteilung mit höherer Wahrscheinlichkeit keine weiße Kugel zu ziehen, aber eine höhere Wahrscheinlichkeit 3 weiße Kugeln zu ziehen

→WICHTIG: Binomialverteilung als Näherungslösung für Hypergeometrische Verteilung bei großen Grundgesamtheiten und kleinen Stichproben (Verhältnisse in Urne ändern sich kaum wenn statt 1.000 schwarzer Kugeln, 999 schwarze Kugeln sind)

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Normalverteilung

- Bisherige Verteilungen waren für diskrete Merkmale (Lotto, farbige Kugeln) → viele andere Merkmale sind aber stetig (Messgrößen, Alter, Gewicht)
- Graphische Darstellung als Dichte f(x)

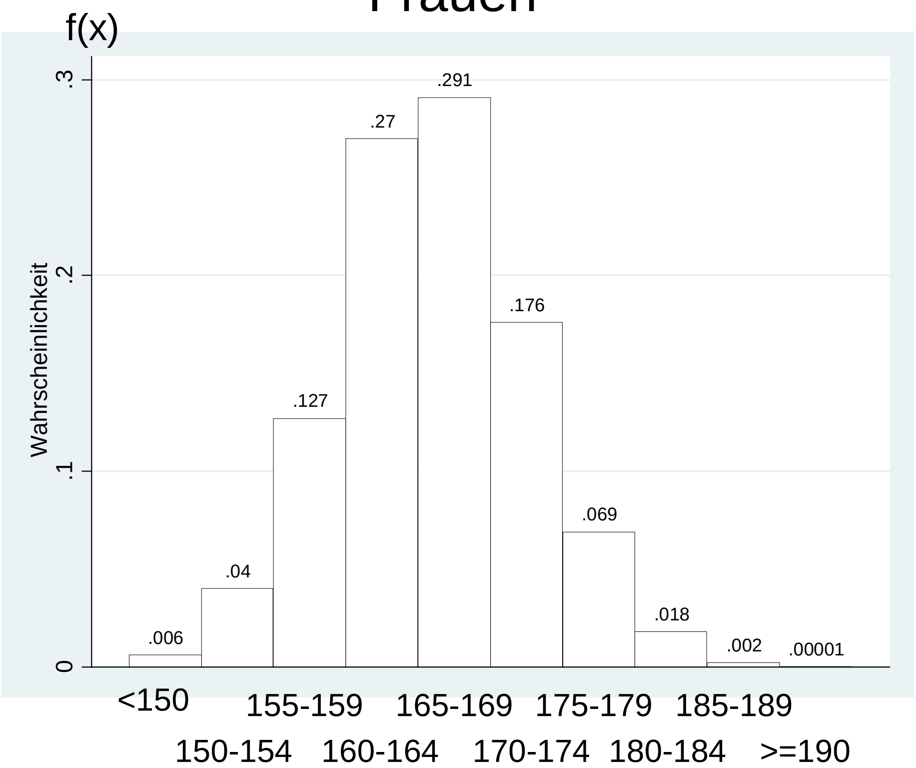
Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Normalverteilung

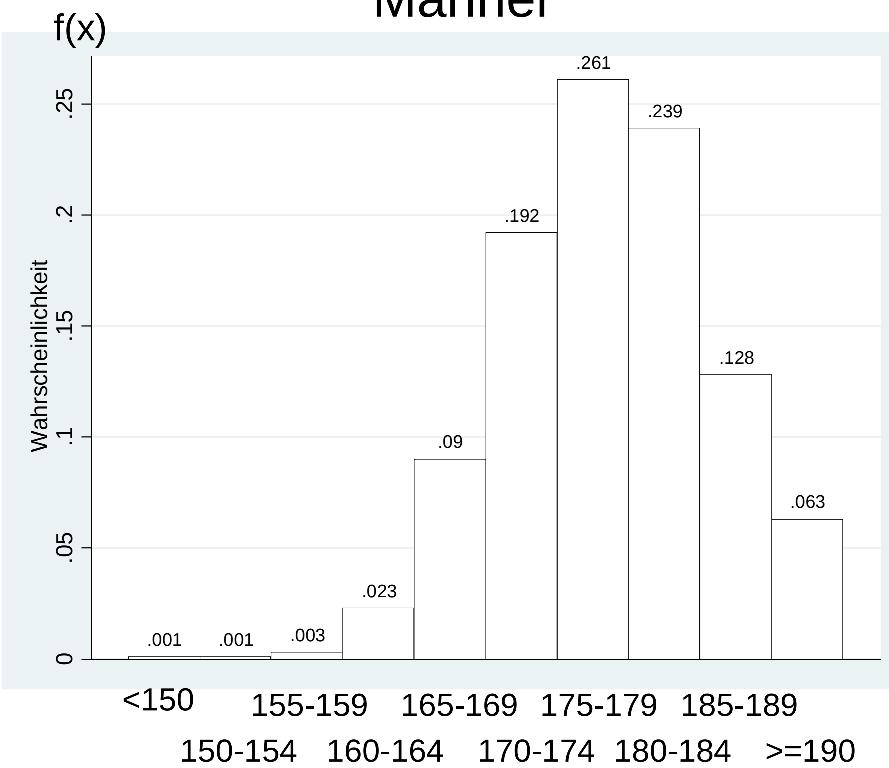
Quelle: SOEP

Größe von Männer und Frauen in cm

Frauen



Männer

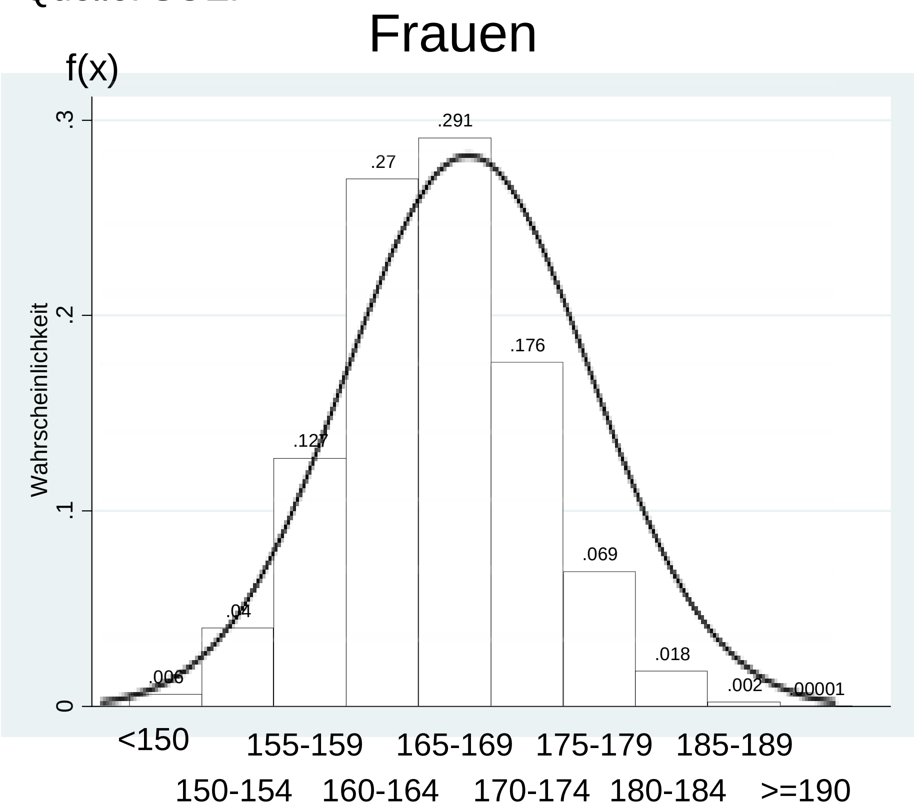


Angabe der Wahrscheinlichkeiten für Intervalle, da bei stetigen Merkmalen die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Wertes (z.B. 175.26546cm) nahe 0 ist

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Normalverteilung

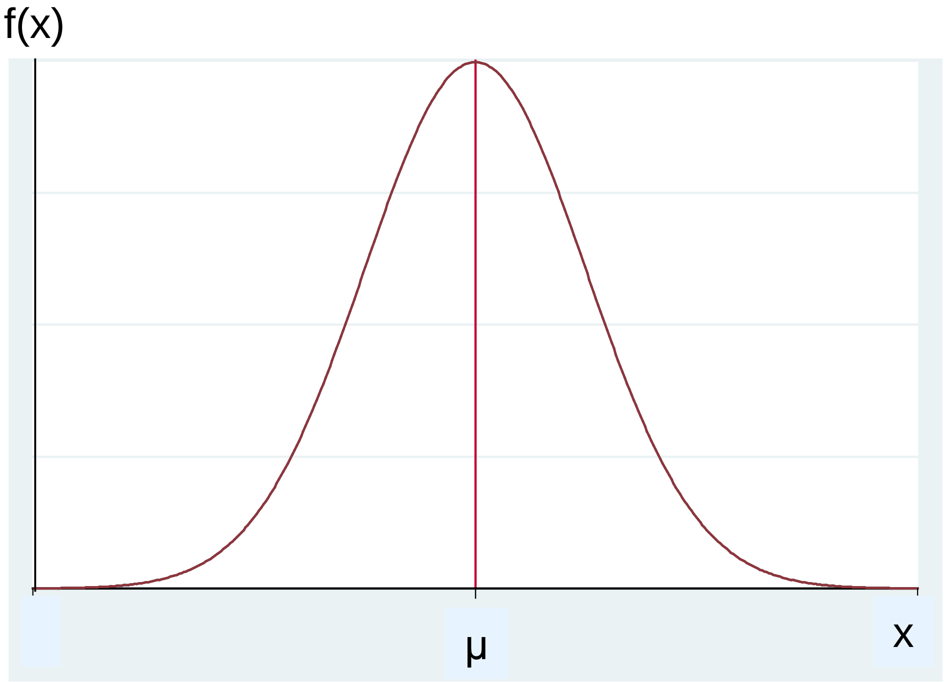
Quelle: SOEP



- Anschaulichere Darstellung durch Glockenkurve
- Eigenschaften der Dichte
  - Dichte ist eine Verteilung eines Merkmals → Kennzahlen wie z.B. Mittelwert und Varianz
  - Fläche zwischen Dichte und Achse muss in jedem Intervall der Wahrscheinlichkeit dieses Intervalls entsprechen
  - Fläche unter der Dichtekurve = 1 → Summe der Wahrscheinlichkeit *aller* Ereignisse
  - Berechnung von Wahrscheinlichkeiten = Berechnen von Flächen

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Normalverteilung



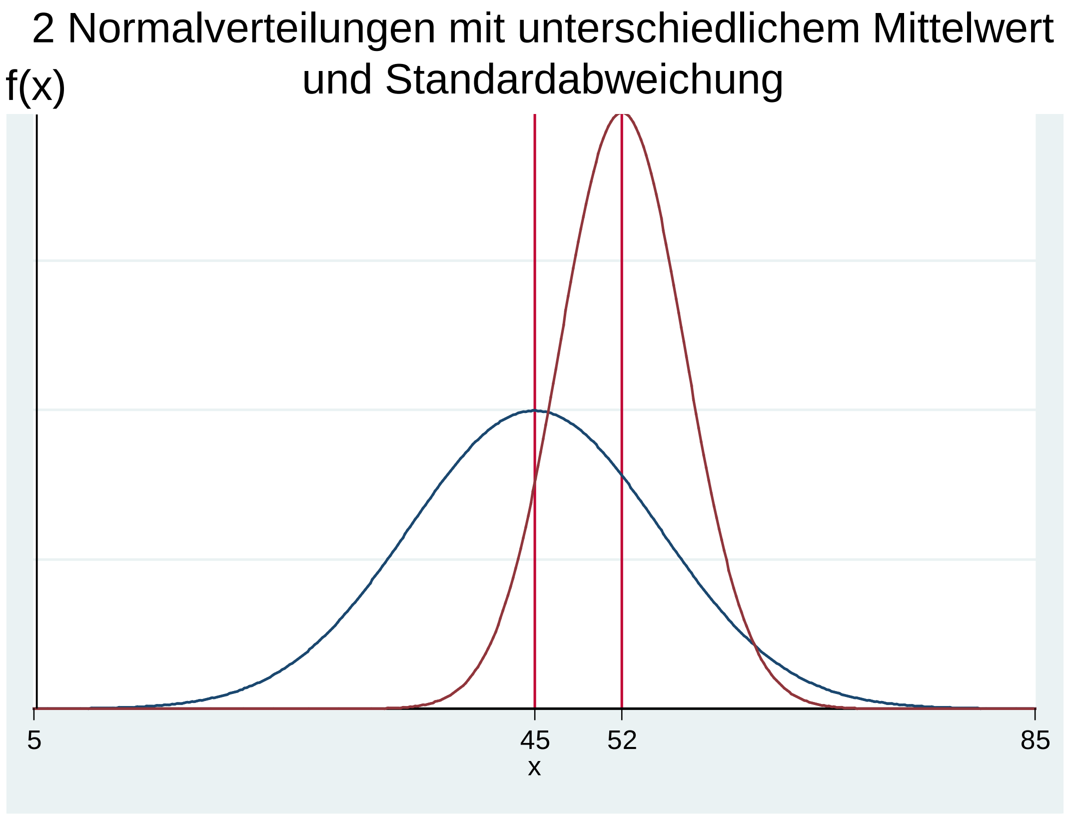
- Eigenschaften der Dichte der Normalverteilung
  - Erwartungswert (Mittelwert) μ ist der häufigste Wert
  - Abweichungen vom Mittelwert werden unwahrscheinlich(er)
  - Symmetrie der Dichte um den Mittelwert herum
  - Mathematisch vollständig beschreibbar mit Mittelwert und Standardabweichung

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Normalverteilung

- Verteilungen mit unterschiedlichem Mittelwert und Standardabweichung



Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Normalverteilung

- Beispiel 21: Funktionsdauer von Taschenrechnern
  - Funktionsdauer x ist normalverteilt mit Erwartungswert $\mu = 120$ h und Varianz $\sigma^2 = 100$. Wie wahrscheinlich ist es, dass die Funktionsdauer eines Rechners

a. Höchstens 135 h

b. Mehr als 135 h

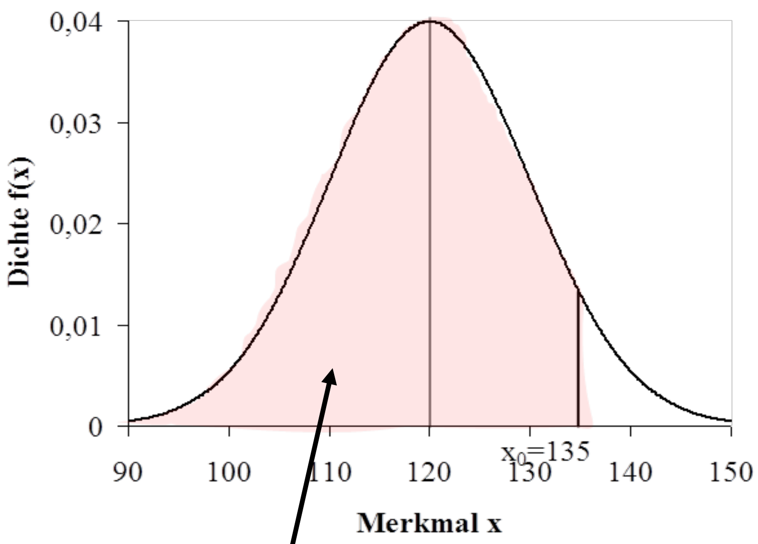
c. Mehr als 105 h

d. Höchstens 105 h beträgt?

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Normalverteilung

- Beispiel 21: Funktionsdauer von Taschenrechnern



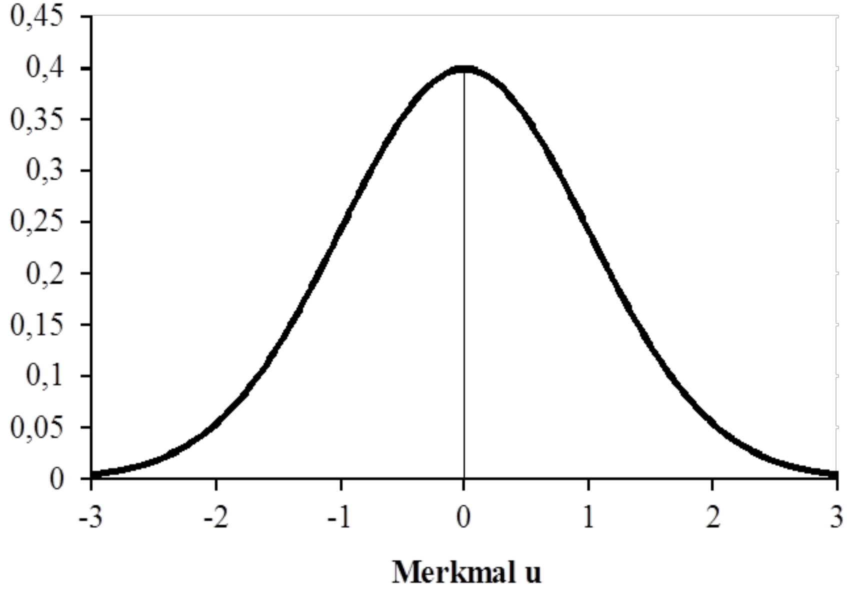
Idee: Berechnung der Fläche unter der Dichte bis zum Punkt x_0=135
→ Entspricht der Wahrscheinlichkeit das die Lebensdauer ≤ 135h ist

$$Pr(x \leq x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 10} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{(x_0-120)^2}{100}} dx = \int_{-\infty}^{135} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 10} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{(135-120)^2}{100}} dx$$

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Standardnormalverteilung

- Problem bei Aufgaben wie Bsp. 21 ist, dass diese bestimmte aber verschiedene Erwartungswerte und Varianzen haben → allgemeines Integral was sich kompliziert berechnen lässt
- Idee: Entwicklung einer einfachen Variante der Normalverteilung – Standardnormalverteilung mit μ = 0 und σ² = 1.



$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 1} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{(u-0)^2}{1}}$$

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot u^2}$$

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Standardnormalverteilung

- Beispiel 22: Berechnung Standardnormalverteilung
  - Ein stetiges Merkmal u ist normalverteilt mit Erwartungswert $\mu = 0$ und Varianz $\sigma^2 = 1$. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Messwert

a. Höchstens 1

b. Größer als 1

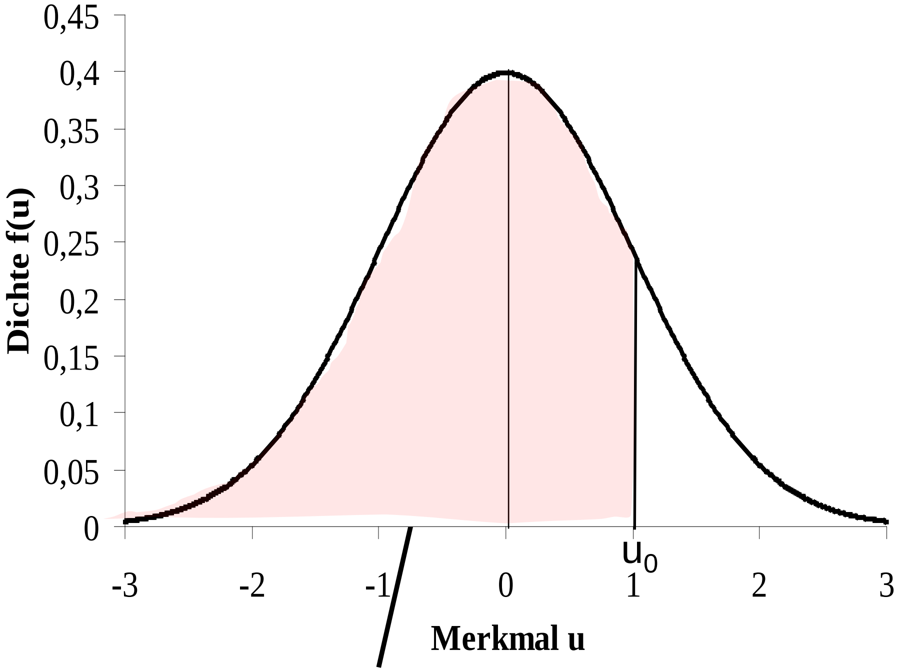
c. Größer als -1

d. Höchstens -1 ist?

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Standardnormalverteilung

- Beispiel 22: Berechnung Standardnormalverteilung



Idee: Berechnung der Fläche unter der Dichte bis zum Punkt $u_0=1$ Entspricht der Wahrscheinlichkeit das der Messwert ≤ 1 ist

→ Die Lösung dieses Integrals ist tabelliert

$$Pr(u \leq u_0) = \int_{-\infty}^{u_0} f(u)du = \int_{-\infty}^{u_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot {u_0}^2} du = \int_{-\infty}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot 1^2} du$$

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Standardnormalverteilung

Bis 1. Nachkommastelle von u

2. Nachkommastelle von u

u	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5754
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7258	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7518	0,7549
0,7	0,7580	0,7612	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7996	0,8023	0,8051	0,8079	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177

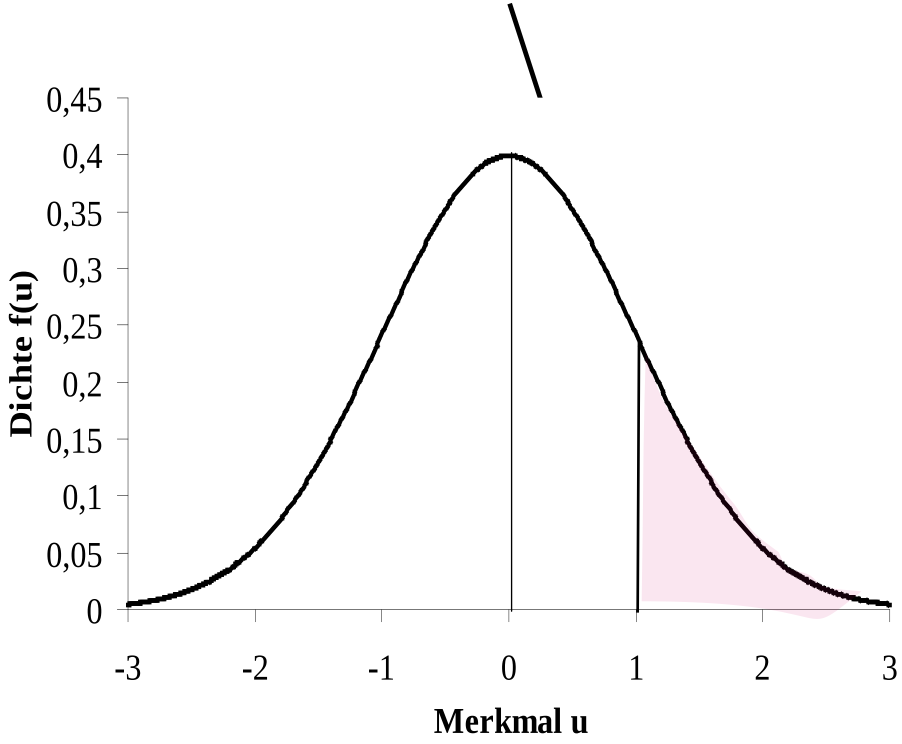
$Pr(u \leq 1{,}00) = 0{,}841$

[Anmerkung: Bei stetigen Merkmalen gilt:
$Pr(u \leq 1) = Pr(u < 1)$]
da $Pr(u = 1) = 0$

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Standardnormalverteilung

Beispiel 22b: Pr(u>1) → Gegenwahrscheinlichkeit zu Pr(u≤1)

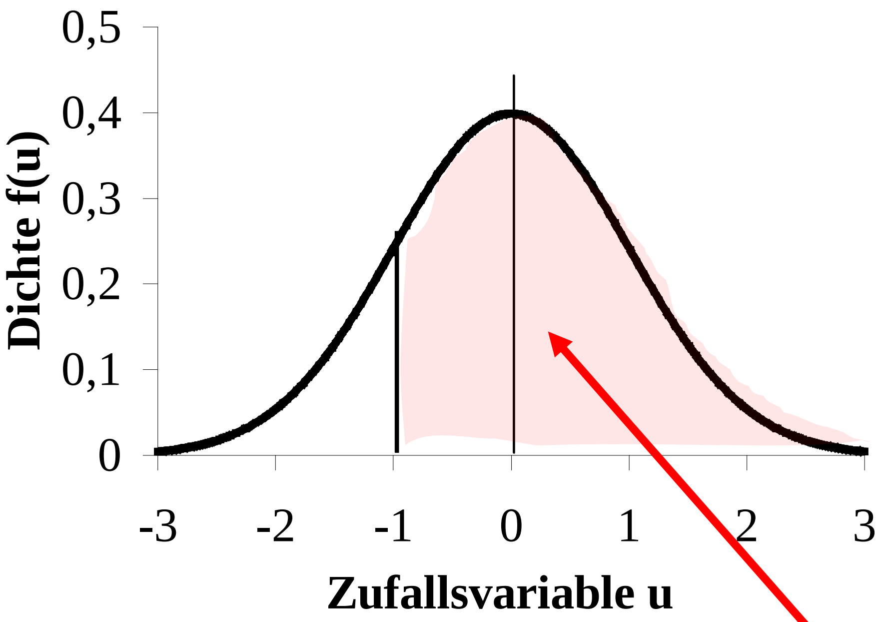


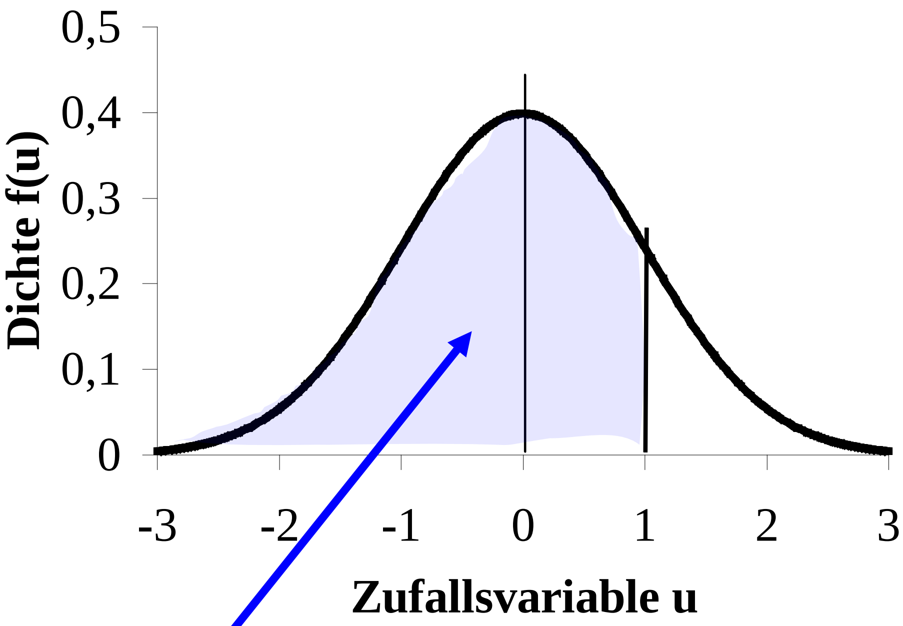
Pr(u>1) = 1 - Pr(u ≤1)
= 1 - 0,841 = 0,159

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Standardnormalverteilung

Beispiel 22c: Pr(u≥-1)



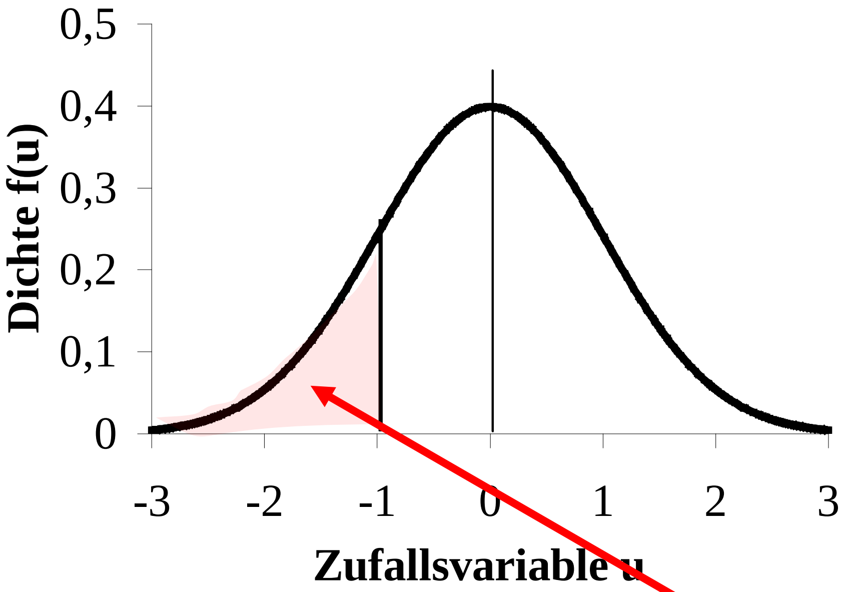


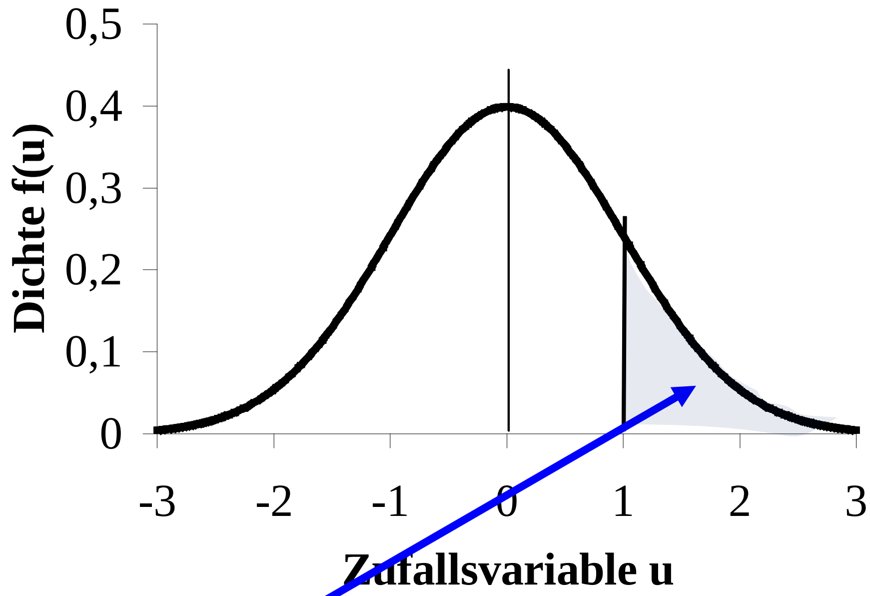
Pr(u≥-1) = Pr(u≤+1)
= 0,841

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Standardnormalverteilung

Beispiel 22d: Pr(u≤-1)





Pr(u≤-1) = Pr(u≥+1)

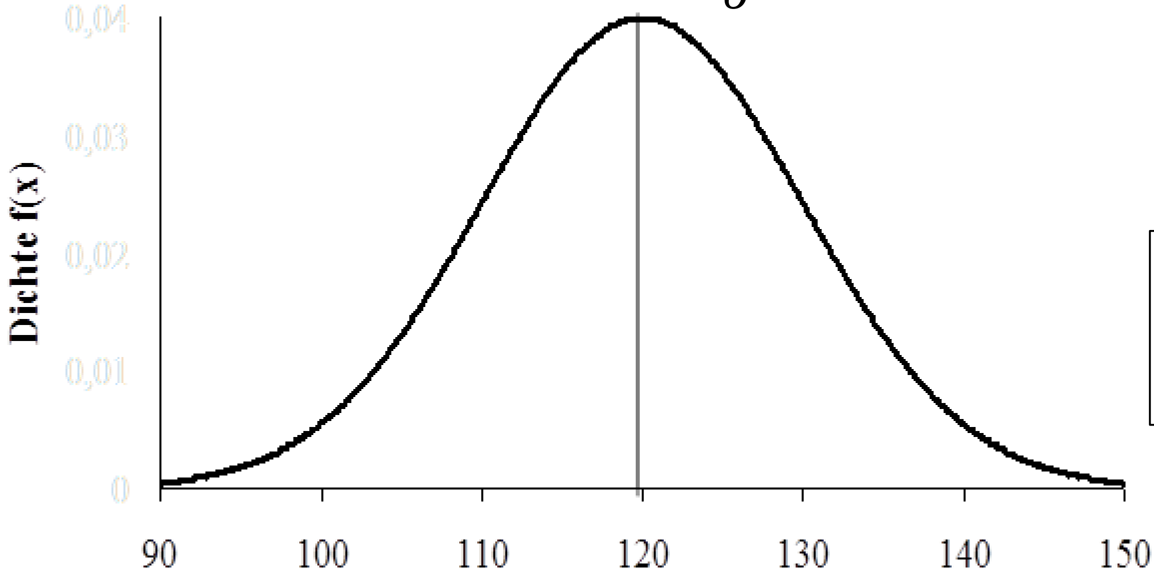
= 1 - Pr(u≤+1)

= 0,159

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Standardnormalverteilung

- Standardisierung $u_0 = \dfrac{x_0 - \mu}{\sigma}$



Merkmal x_0

-30	-20	-10	0	10	20	30	Merkmal x_0 - μ
-3	-2	-1	0	1	2	3	Merkmal $u_0=(x_0 - \mu)/\sigma$

x ist normalverteilt mit Erwartungswert μ = 120 und Varianz σ² = 100

u ist standardnormalverteilt mit Erwartungswert μ = 0 und Varianz σ² = 1

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Standardnormalverteilung

- Beispiel 21: Funktionsdauer von Taschenrechnern
  - Funktionsdauer x ist normalverteilt mit Erwartungswert $\mu = 120$ h und Varianz $\sigma^2 = 100$. Wie wahrscheinlich ist es, dass die Funktionsdauer eines Rechners

a. Höchstens 135 h

b. Mehr als 135 h

c. Mehr als 105 h

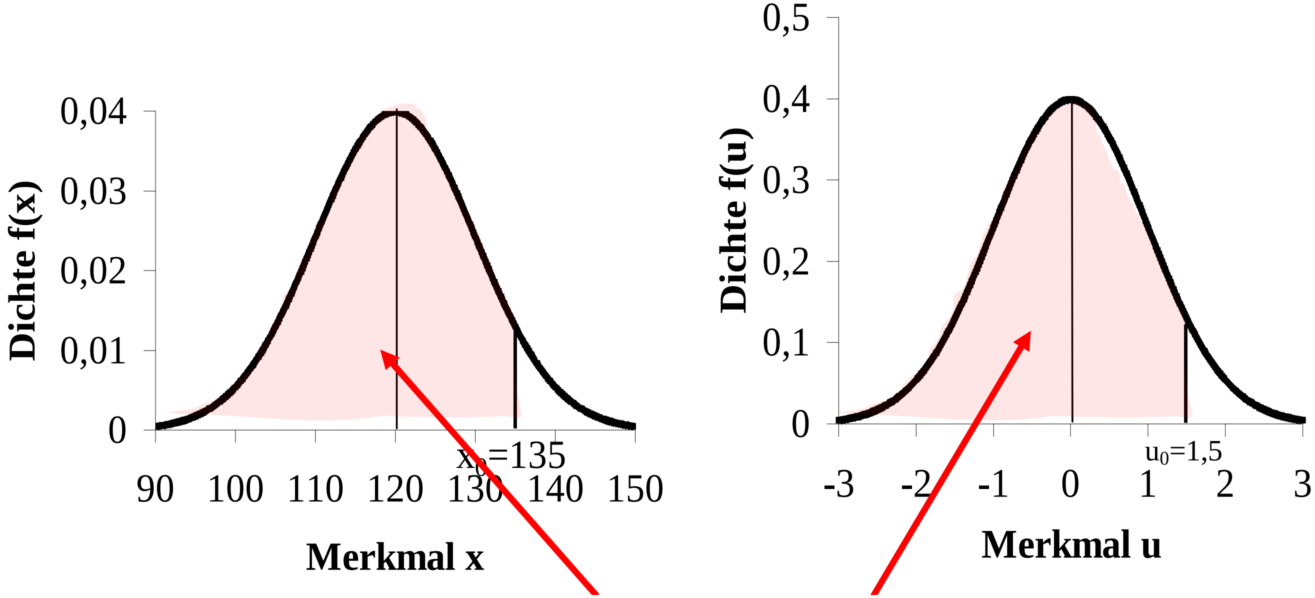
d. Höchstens 105 h beträgt?

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Standardnormalverteilung

Beispiel 21a: Pr(x≤135)

Standardisierung: $u_0 = \frac{x_0 - \mu}{\sigma} = \frac{135 - 120}{10} = 1{,}5$



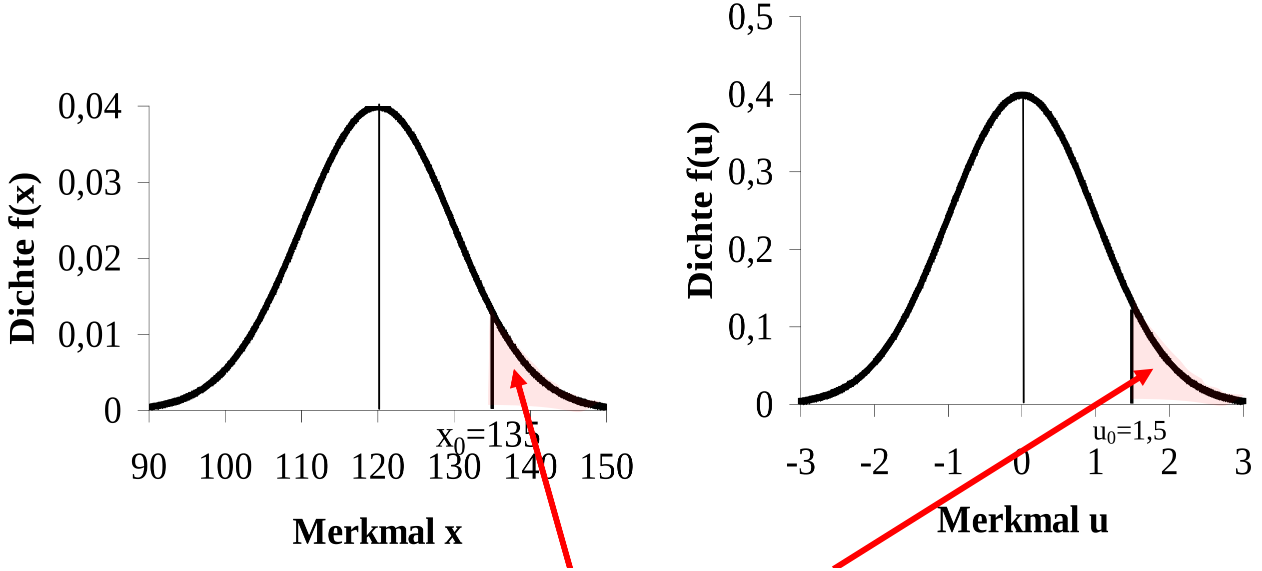
Pr(x≤135) = Pr(u≤1,5) = 0,933

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Standardnormalverteilung

Beispiel 21b: Pr(x>135)

Standardisierung: $u_0 = \frac{x_0 - \mu}{\sigma} = \frac{135-120}{10} = 1{,}5$



Pr(x>135) = Pr(u>1,5)

Pr(u>1,5)=1-Pr(u≤1,5)=0,067

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Standardnormalverteilung

Beispiel 21c: Pr(x>105)

Standardisierung: $u_0 = \frac{x_0 - \mu}{\sigma} = \frac{105-120}{10} = -1{,}5$

Pr(x>105) = Pr(u>-1,5) = Pr(u<+1,5) = 0,933

Beispiel 21d: Pr(x≤105)

Standardisierung: $u_0 = \frac{x_0 - \mu}{\sigma} = \frac{105-120}{10} = -1{,}5$

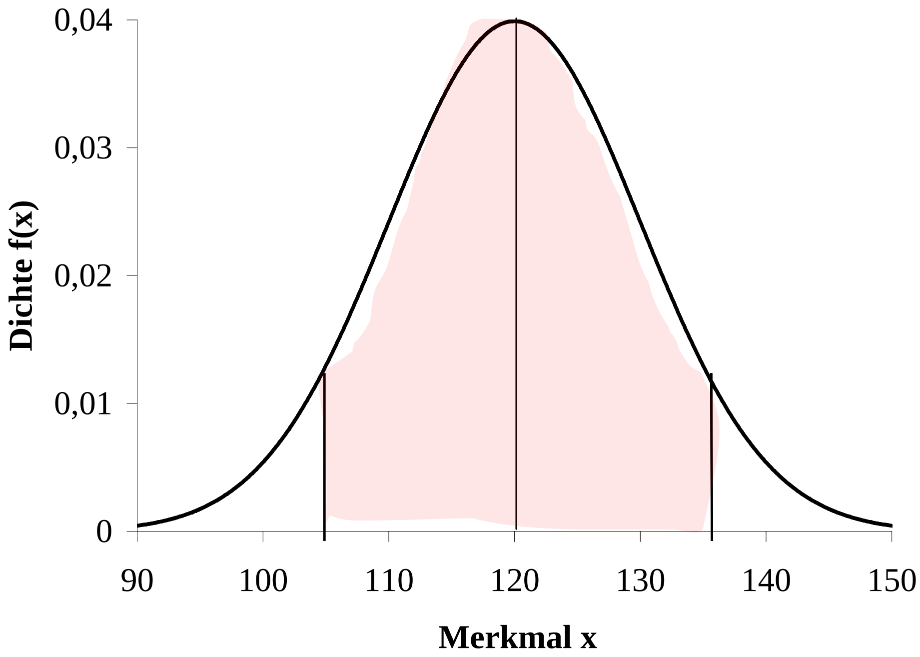
Pr(x≤105) = Pr(u≤-1,5) = Pr(u≥+1,5) =1-Pr(u≤1,5)=1- 0,933 = 0,067

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Anwendung Standardnormalverteilung

- Beispiel 23: Wahrscheinlichkeit in Intervallen

Wahrscheinlichkeit dass die Funktionsdauer der Taschenrechner zwischen 105 und 135 Stunden liegt

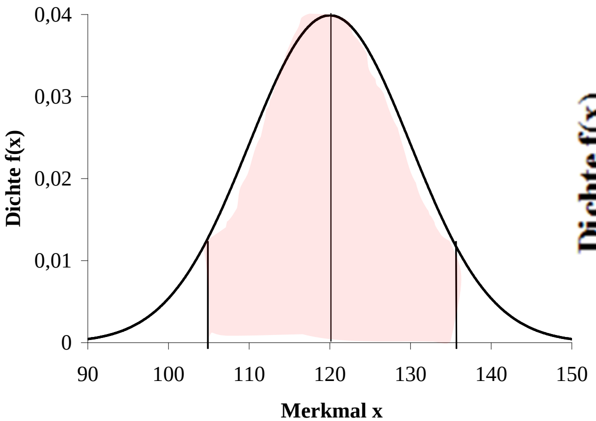


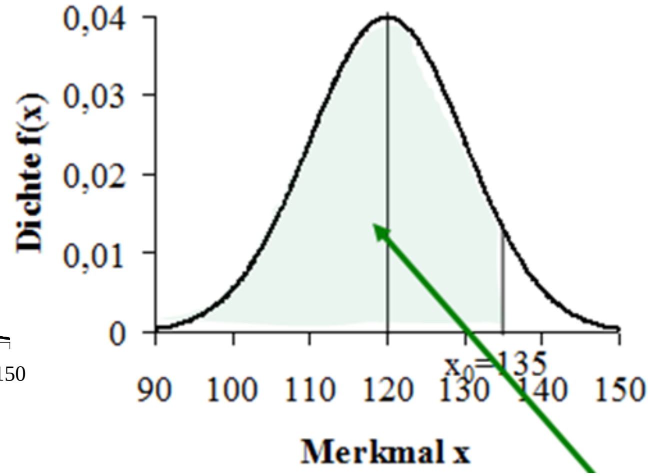
= Pr(105≤x≤135)

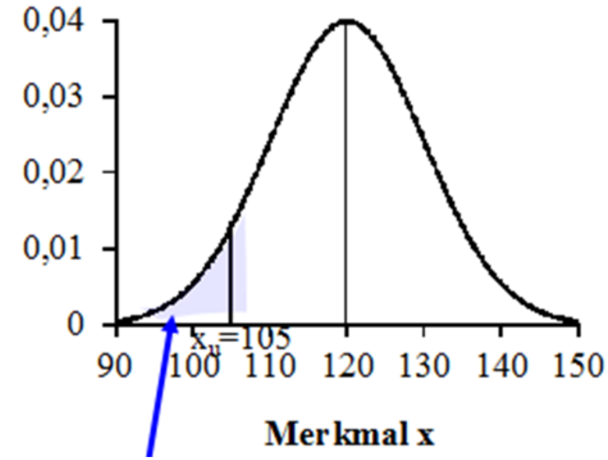
Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Anwendung Standardnormalverteilung

- Beispiel 23: Wahrscheinlichkeit in Intervallen







Pr(105 ≤ x ≤ 135) = Pr(x ≤ 135) - Pr(x ≤ 105)

Standardisierungen $u_0 = \frac{135-120}{10} = 1{,}5$ und $u_u = \frac{105-120}{10} = -1{,}5$

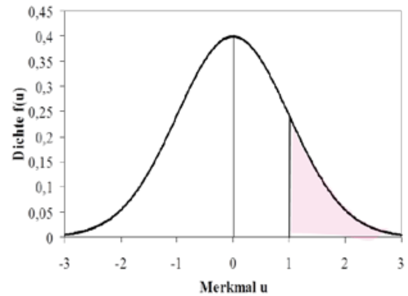
Pr(u≤1,5)-Pr(u≤-1,5) = Pr(u≤1,5)-(1-Pr(u≤1,5)) = 0,933-(1-0,933) = 0,866

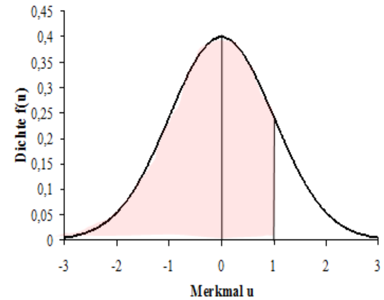
Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Anwendung Standardnormalverteilung

- Übersicht Rechenregeln
  - Gegenwahrscheinlichkeit

    $Pr(u>u_0) = 1\text{-}Pr(u \leq u_0)$

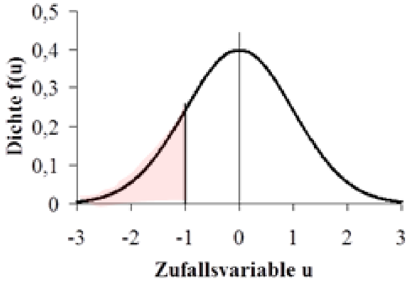


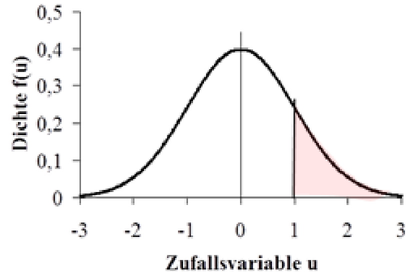


  - Negative Werte

    $Pr(u \leq -u_0) = Pr(u>u_0)$

    $= 1\text{-}Pr(u \leq u_0)$

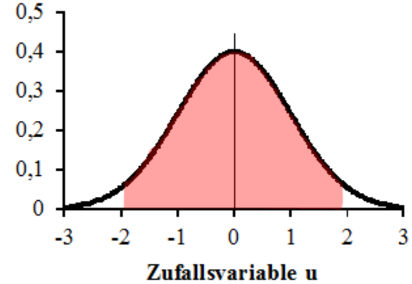


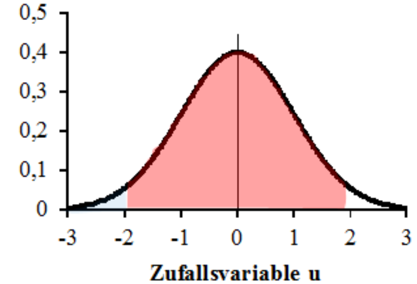


  - Intervalle

    $Pr(u_1 \leq u \leq u_2)=$

    $Pr(u \leq u_2)\text{-}Pr(u \leq u_1)$



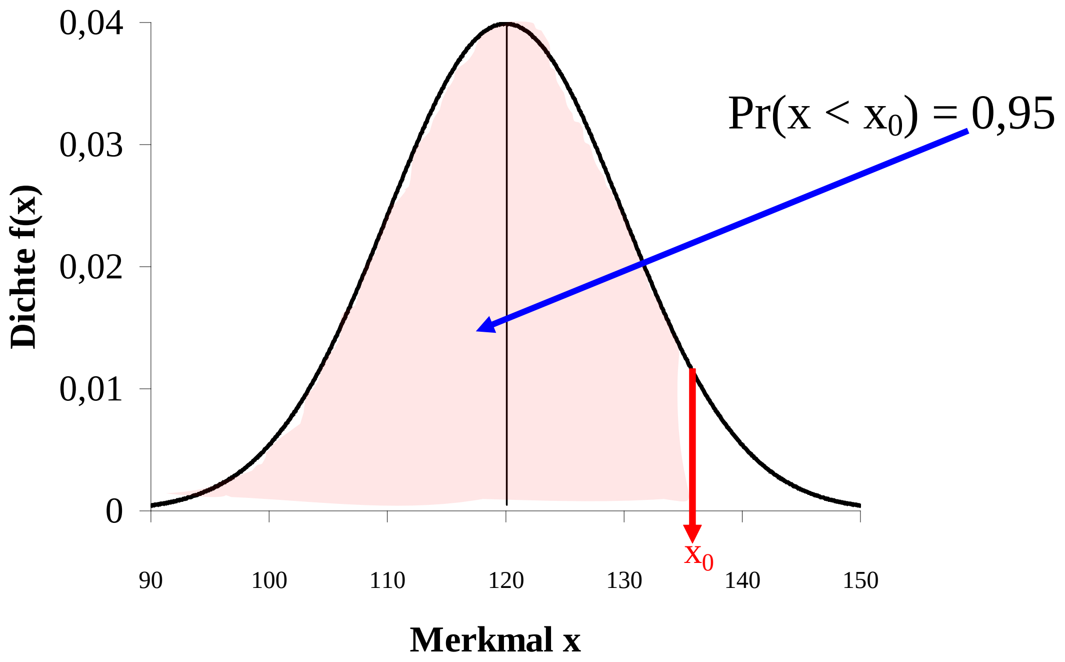


Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Anwendung Standardnormalverteilung

- Beispiel 24: Berechnen von Intervallen mit bestimmter Wahrscheinlichkeit

Funktionsdauer x_0 die mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,95 *unterschritten* wird

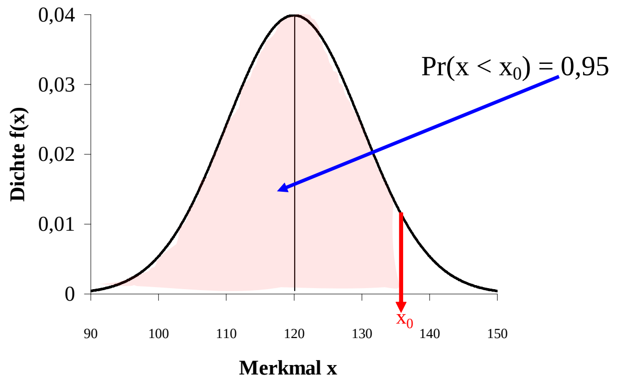


Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Anwendung Standardnormalverteilung

- Beispiel 24: Berechnen von Intervallen mit bestimmter Wahrscheinlichkeit

Funktionsdauer x_0 die mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,95 *unterschritten* wird



$Pr(x \leq x_0) = Pr(u \leq u_0) = 0{,}95 \rightarrow u_0 = ? \rightarrow x_0 = ?$

1. Ablesen von u_0 aus Standardnormalverteilung

u	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9485	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545

2. „Destandardisieren“ durch Umstellung der Standardisierungsformel nach x_0

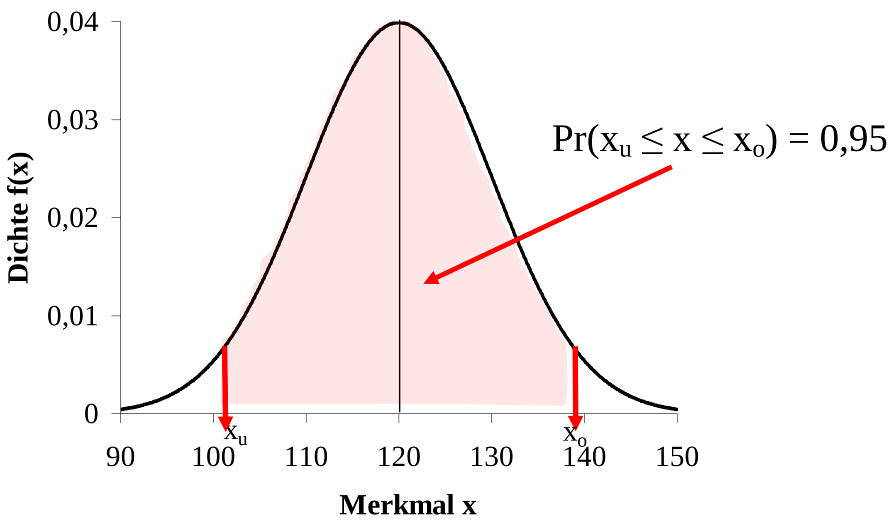
$$1{,}65 = \frac{x_0 - 120}{10} \quad \rightarrow \quad x_0 = 1{,}65 \cdot 10 + 120 = 136{,}5$$

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Anwendung Standardnormalverteilung

- Beispiel 25: Berechnen von symmetrischen Intervallen mit bestimmter Wahrscheinlichkeit

  Was ist die Obergrenze und Untergrenze der Funktionsdauer die von 95% der Taschenrechner erreicht werden?

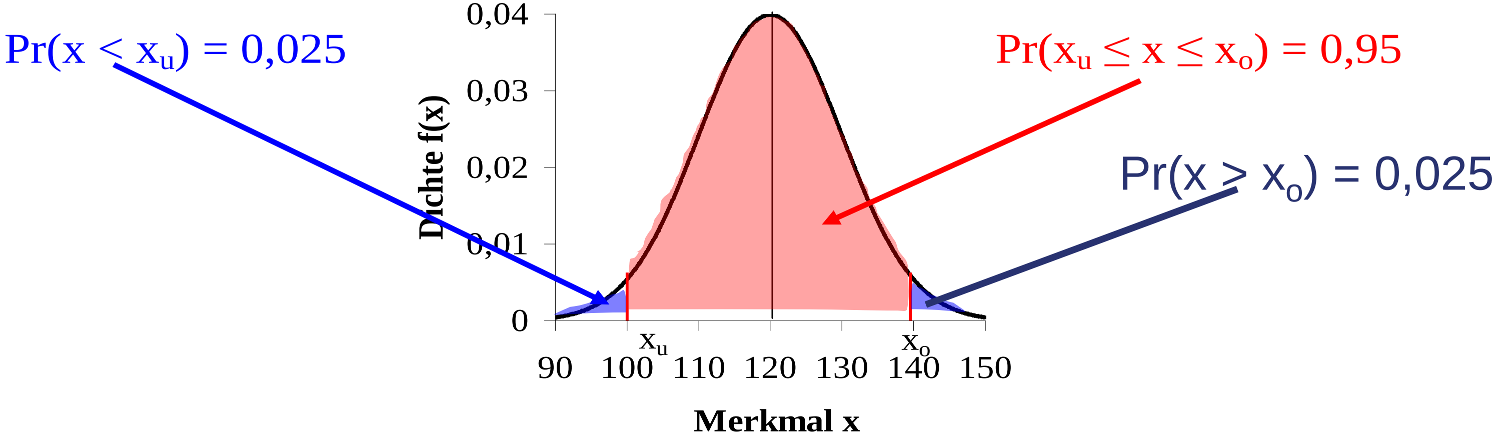


Um den Erwartungswert symmetrisches Intervall → Untergrenze x_u und Obergrenze x_o, in dem die Wahrscheinlichkeit 0,95 beträgt

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Anwendung Standardnormalverteilung

Was ist die Obergrenze und Untergrenze der Funktionsdauer die von 95% der Taschenrechner erreicht werden?



1. Ablesen von u_0 aus Standardnormalverteilung
   $Pr(x \leq x_o) = 0{,}975 \rightarrow Pr(u \leq u_o) = 0{,}975 \rightarrow u_o = 1{,}96$
2. Destandardisieren → x_0
   $$1{,}96 = \frac{x_o - 120}{10} \rightarrow x_o = 1{,}96 \cdot 10 + 120 = 139{,}6$$
3. Verteilung symmetrisch um den Mittelwert → x_u
   $$x_u = 120 - (139{,}6 - 120) = 100{,}4$$

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

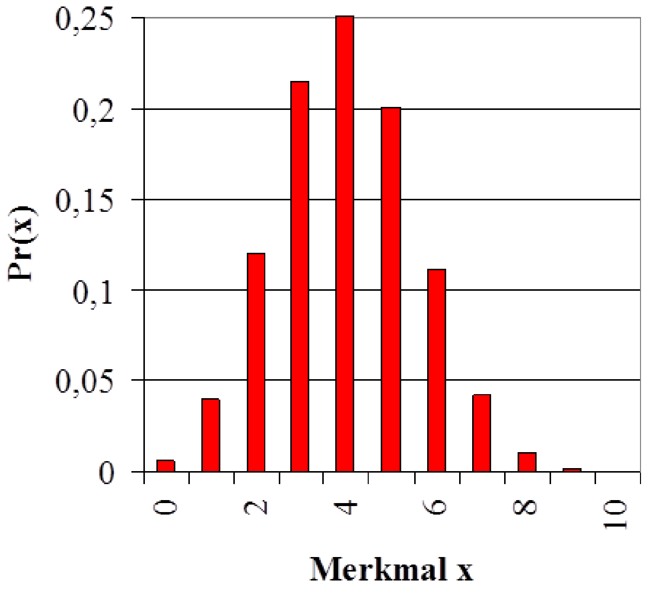
Anwendung Standardnormalverteilung

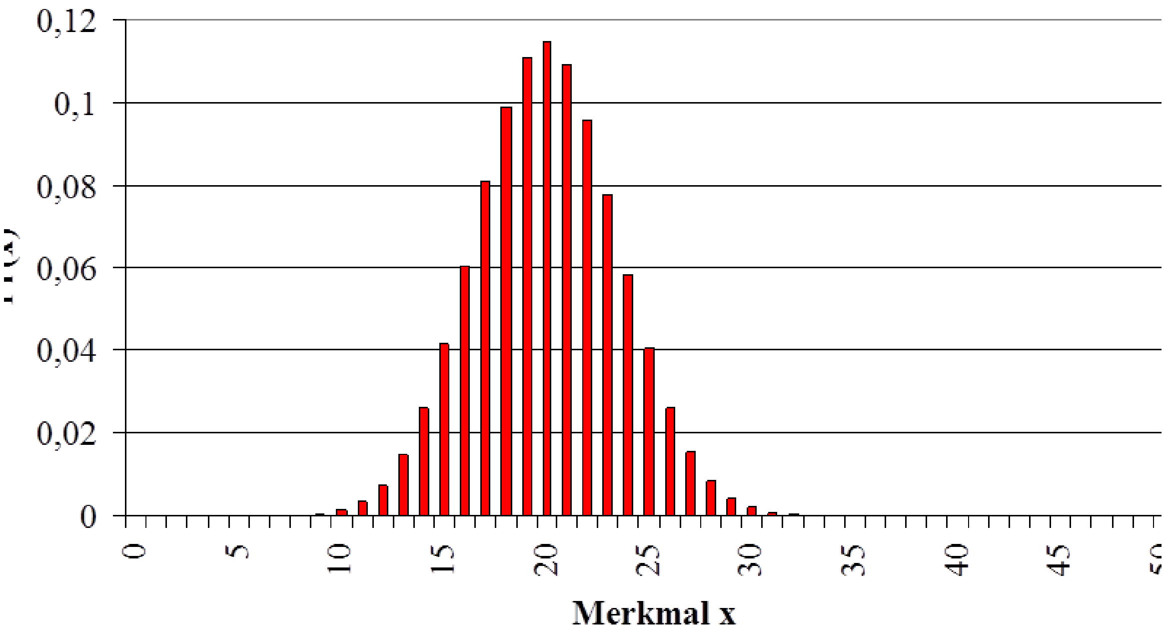
- Große Bedeutung der Normalverteilung
  - Viele natürliche Merkmale sind normalverteilt
  - Andere Verteilungen konvergieren bei großen Stichproben gegen die Normalverteilung
  - Summen von Zufallsvariablen sind normalverteilt

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Anwendung Standardnormalverteilung

- Beispiel 26: Annäherung der Hypergeometrischen Verteilung an die Normalverteilung
- x=Anzahl defekte Schrauben in einer Stichprobe, π=0,4 defekte Schraube
- n = 10 n = 50

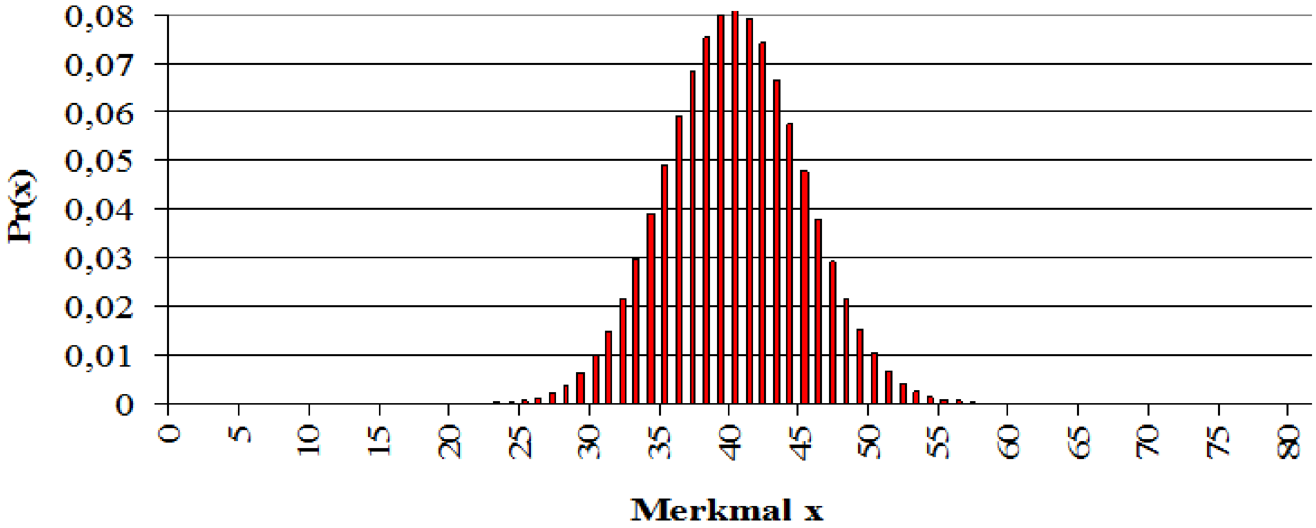




Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Anwendung Standardnormalverteilung

- Beispiel 26: Annäherung der Hypergeometrischen Verteilung an die Normalverteilung
- n = 100



- Zentraler Grenzwertsatz der Statistik: Erwartungswert und theoretische Varianz dieser hypergeometrischen Verteilung entsprechen jenen einer Normalverteilung

→Diese Info kann genutzt werden um von der Stichprobe auf die Grundgesamtheit zurückzuschließen (Kapitel 3)

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Anwendung Standardnormalverteilung

- Summe von unabhängigen Zufallsvariablen sind normalverteilt
- Bsp. Würfelsumme zweier Würfel

Würfelsumme	Kombinationen	Pr
2	1+1	1/36
3	1+2; 2+1	2/36
4	1+3; 2+2; 3+1	3/36
5	1+4; 2+3; 3+2; 4+1	4/36
6	1+5; 2+4; 3+3; 4+2; 5+1	5/36
7	1+6; 2+5; 3+4; 4+3; 5+2; 6+1	6/36
8	2+6; 3+5; 4+4; 5+3; 6+2	5/36
9	3+6; 4+5; 5+4; 6+3	4/36
10	4+6; 5+5; 6+4	3/36
11	5+6; 6+5	2/36
12	6+6	1/36

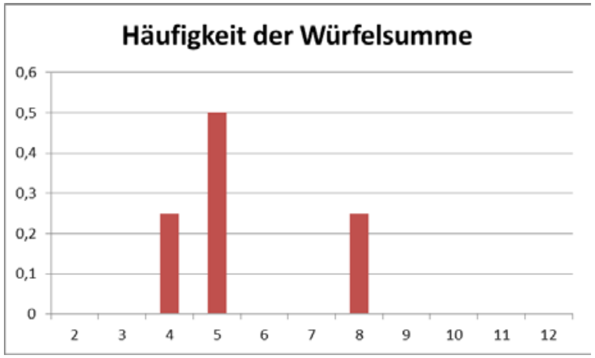
→ Symmetrische Verteilung um den Mittelwert 7 zu erwarten

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

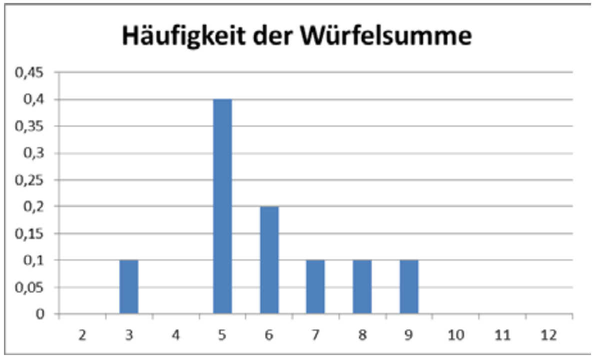
Anwendung Standardnormalverteilung

- Bsp. Würfelsumme zweier Würfel

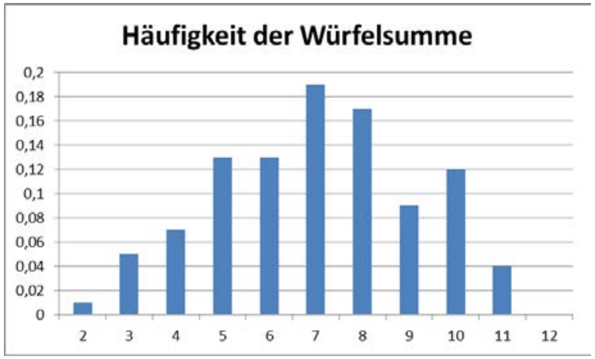
n=4



n=10



n=100



n=1000