Gliederung

- 3. Schließende Statistik
- 3.1 Grundbegriffe
- 3.2 Stichprobenverfahren
- 3.3. Schätzen und Testen einer relativen Häufigkeit
  - 3.3.1 Schätzen einer relativen Häufigkeit
  - 3.3.2 Testen von Hypothesen über eine relative Häufigkeit
- 3.4. Schätzen und Testen eines Mittelwerts
  - 3.4.1 Schätzen eines Mittelwerts
  - 3.4.2 Testen von Hypothesen über einen Mittelwert
- 3.5 Testen von Hypothesen über Regressionskoeffizienten

Grundbegriffe

Was ist was?

- Vollerhebung – Daten der Grundgesamtheit – beschreibende Statistik
- Stichprobenerhebung – Daten einer Stichprobe – schließende Statistik → Rückschluss auf Parameter der Grundgesamtheit

Aus: KRONEN-ZEITUNG 11. Dezember 2005, S. 3

Wien. – Die drastische Trendumkehr erschreckt. Vor zehn Jahren stimmten 66 % der Österreicher für den EU-Beitritt. Heute dagegen finden 70 %, laut neuester „market"-Umfrage, der Beitritt hätte nichts oder nur wenig gebracht ...

Grundbegriffe

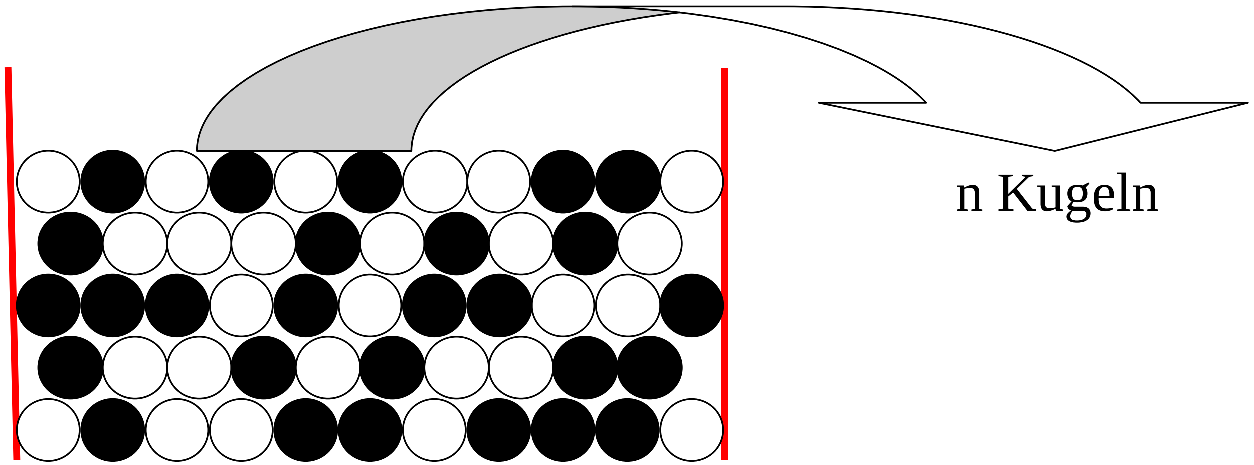
Was ist was?

- Voraussetzung für den Rückschluss von den Stichprobenergebnissen auf die Parameter der Grundgesamtheit: **Repräsentativität** der Stichprobe für die Grundgesamtheit hinsichtlich der interessierenden Merkmale
  - Repräsentativität der Stichprobe ≈ Ähnlichkeit zur Grundgesamtheit
  - Entscheidend für Repräsentativität der Stichprobe: Stichprobenverfahren und Stichprobenumfang
- Repräsentativität hat eine große Suggestivwirkung
  - Nicht jede Stichprobe muss repräsentativ sein: Informative Stichproben für Erhebungszweck (Bsp: Internetbefragung wo die Probleme beim eigenen Onlineportal sind)

Stichprobenverfahren

Uneingeschränkte Zufallsstichprobe

- Lösung der Repräsentativitätsaufgabe durch Ziehung nach dem Urnenmodell (n Kugeln von der jede die gleiche Wahrscheinlichkeit hat gezogen zu werden)



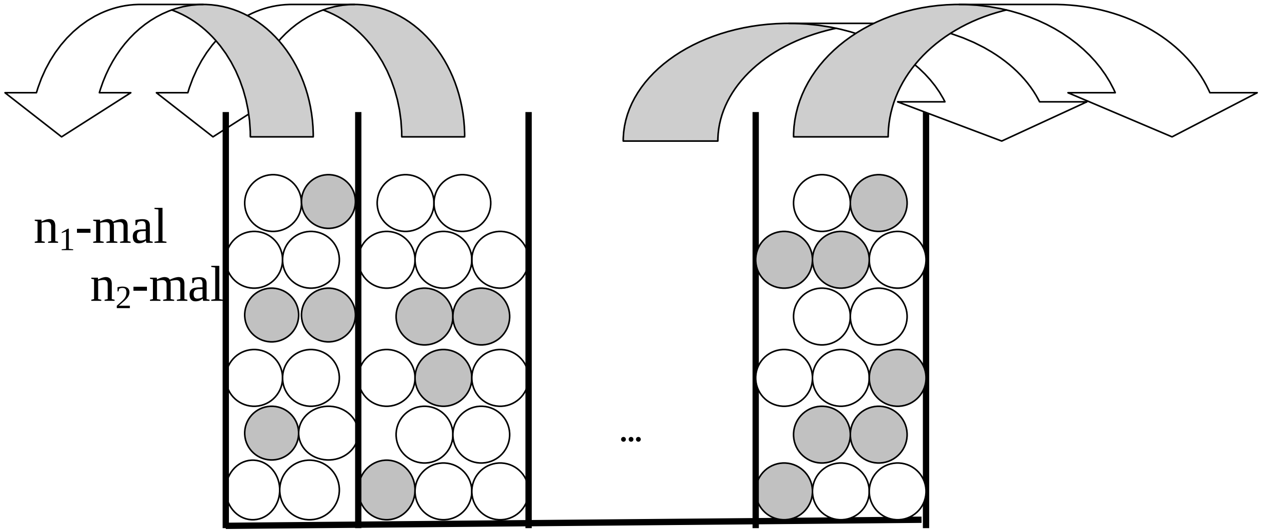
→Uneingeschränkte (einfache) Zufallsstichprobe

- Praktische Umsetzung in Excel: z.B. Funktion Zufallszahl (0 oder 1)

Stichprobenverfahren

Geschichtete uneingeschränkte Zufallsauswahl

- Zerlegung der Grundgesamtheit in h Schichten (z.B. Männer und Frauen) und uneingeschränkte Ziehung aus jeder Schicht

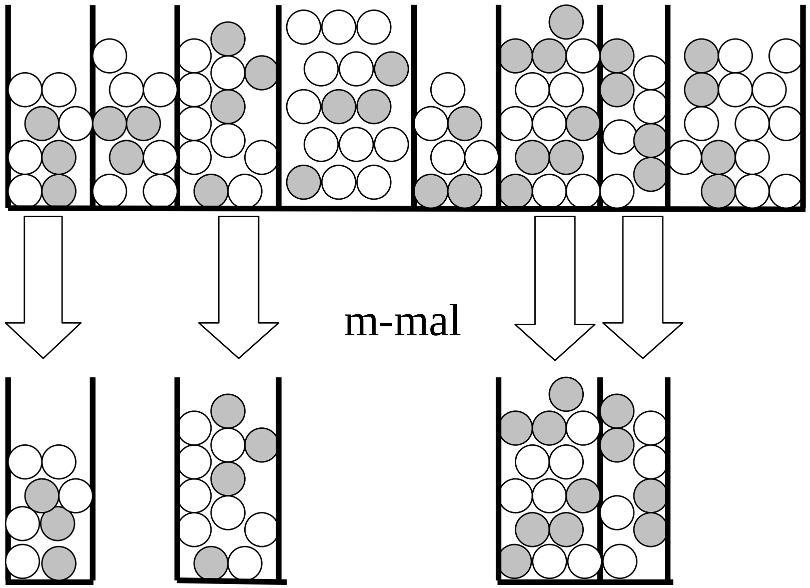


- Vorteil: Genauigkeitsgewinn gegenüber der ungeschichteten Auswahl

Stichprobenverfahren

Uneingeschränkte Klumpenauswahl

- Zerlegung der Grundgesamtheit in Klumpen, die dann zufällig gezogen werden



- Vorteil: Kostenersparnis bei der Befragung durch räumliche Nähe der Teilnehmer an der Befragung

Stichprobenverfahren

Verzerrung von Stichproben

- Nichtrepräsentativität der Stichprobe durch
  - Nichtzufällige Ziehung der Erhebungseinheiten

  z.B. Befragung von Passanten auf einem Platz (auch bei Einhaltung von Quoten bzgl. Geschlecht, etc. liefert keine repräsentativen Ergebnisse für die Wohnbevölkerung einer Stadt

  - Große Nonresponse Menge
    - Teilnehmer r unterscheiden sich von Nichtteilnehmern s-r beim interessierenden Merkmal

    z.B. Umfrage unter Pegida Demonstranten zur Einstellung gegenüber Migranten

Schätzen einer relativen Häufigkeit

Handlungslogik der schließenden Statistik

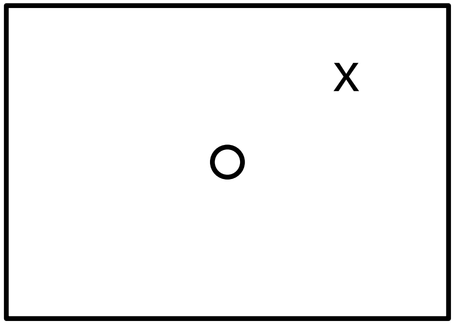
- In Zufallsstichproben: Stichprobenergebnisse sind Punktschätzer für die unbekannten Parameter der Grundgesamtheit

Punktschätzer (aus der Stichprobe)	Parameter (in der Grundgesamtheit)
Relative Häufigkeit p	Relative Häufigkeit π
Mittelwert $\bar{x}$	Mittelwert μ
Stichprobenvarianz s^2	Varianz σ^2
Differenz zweier relativer Häufigkeiten (oder Mittelwerte) d	Differenz zweier relativer Häufigkeiten (oder Mittelwerte) δ
Chiquadrat χ^2_{err}	Chiquadrat χ^2
Korrelationskoeffizient r	Korrelationskoeffizient ρ
Regressionskoeffizient b_1, b_2	Regressionskoeffizient β_1, β_2

Schätzen einer relativen Häufigkeit

Handlungslogik der schließenden Statistik

- Punktschätzer (o) ist häufig ungleich des tatsächlichen Parameters (x)
- Idee: Schätzung eines Intervall, das mit einer Wahrscheinlichkeit von 1-α den unbekannten Parameter überdeckt
- Überdeckungswahrscheinlichkeit 1-α, α = Wahrscheinlichkeit Nichtüberdeckung



Schätzen einer relativen Häufigkeit

Handlungslogik der schließenden Statistik

- Aufgabe: Schätzung einer unbekannten relativen Häufigkeit π in der Grundgesamtheit
- Punktschätzer für π: Die relative Häufigkeit p in einer uneingeschränkten Zufallsstichprobe
- Intervallschätzung: Konstruktion eines Konfidenzintervalls, das den Parameter π mit einer Wahrscheinlichkeit $1-\alpha$ (zumeist 95%) überdeckt.
- Vorgehen
  - 1. Wenn man den wahren Parameter π kennt, wie wahrscheinlich ist das Auftreten bestimmter Stichprobenergebnisse
  - 2. Auf Basis eines Stichprobenergebnisses p, Schätzung eines Konfidenzintervalls

Schätzen einer relativen Häufigkeit

Erwartung Stichprobenergebnisse

- Relative Häufigkeit in der Grundgesamtheit π = A/N (mit z.B. A=wie viele weiße Kugeln sind in der Urne und N = wie viele Kugeln sind insgesamt in der Urne) → Zufallsstichprobe (Ziehen ohne Zurücklegen) → Stichprobenwerte sind hypergeometrisch verteilt
- *Relative* Häufigkeiten in der Stichprobe p = a/n besitzen Erwartungswert und Varianz

$$\mu = \pi \qquad \text{und} \qquad \sigma^2 = \frac{\pi(1-\pi)}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

→bei großem N (große Grundgesamtheit): N → ∞

$$\sigma^2 = \frac{\pi(1-\pi)}{n} \cdot \underbrace{\frac{N-n}{N-1}}_{\approx 1} = \frac{\pi(1-\pi)}{n}$$

- Bsp. EU-Skeptiker: Annahme dass der tatsächliche Häufigkeit π=0,5 ist. Wenn man eine Stichprobe von 100 Personen ziehen würde, was für eine Häufigkeit würde man in einer Zufallsstichprobe erwarten?

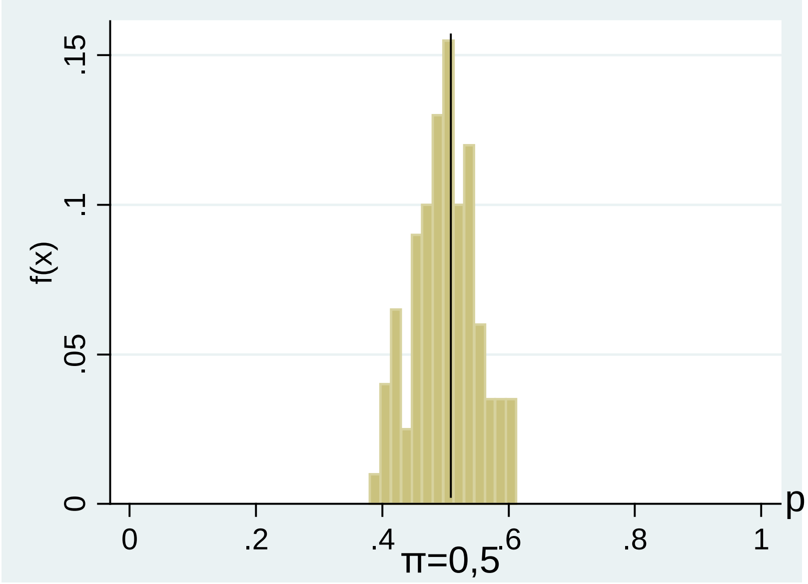
$$\mu = 0{,}5 \qquad \text{und} \qquad \sigma^2 = \frac{0{,}5 \cdot (1-0{,}5)}{100} = 0{,}0025 \ \rightarrow \sigma = 0{,}05$$

Schätzen einer relativen Häufigkeit

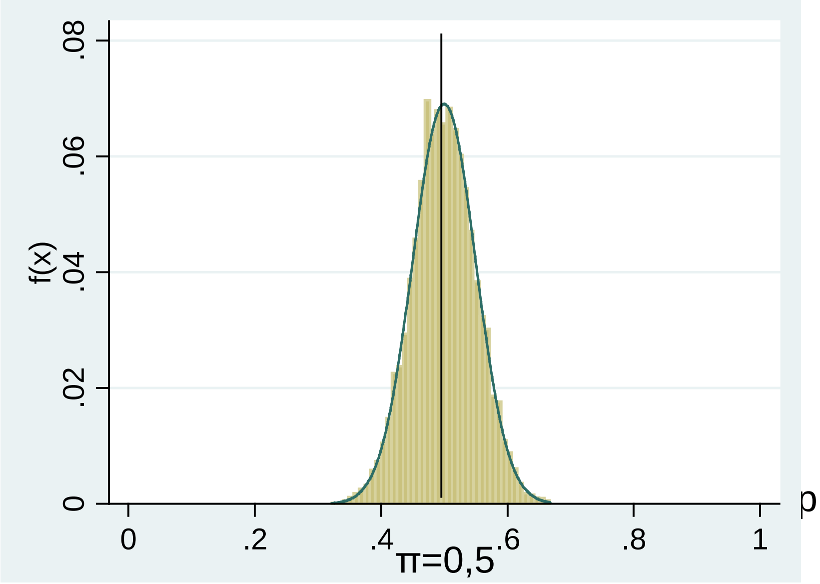
Erwartung Stichprobenergebnisse

- Zentraler Grenzwertsatz der Statistik: Bei großen Stichprobenumfängen (Faustregel n≥100) sind relative Häufigkeiten p annähernd normalverteilt

n=200 Stichproben



n=10.000 Stichproben

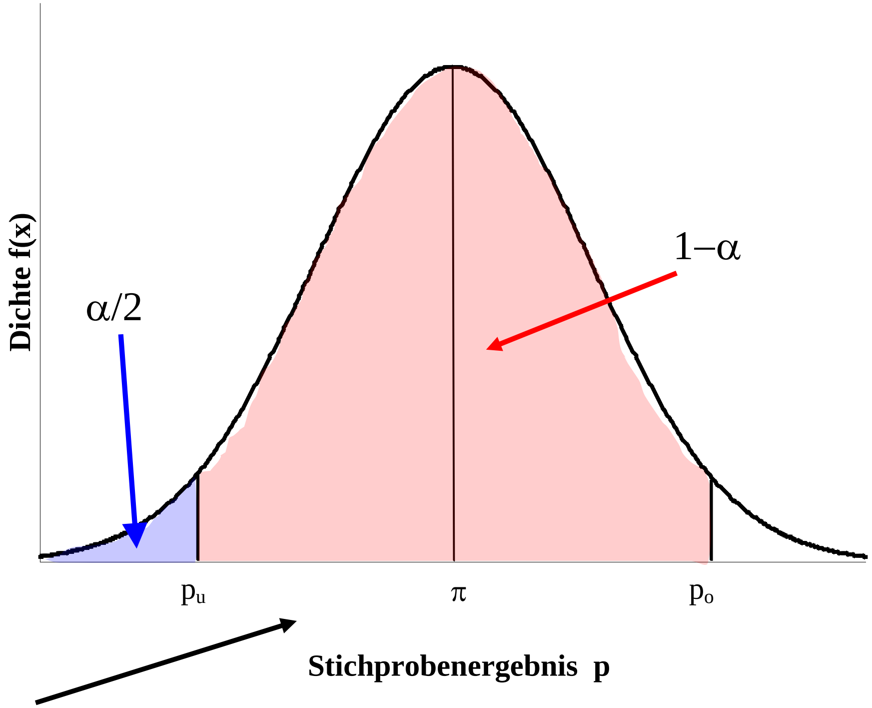


- Die meisten Stichprobenergebnisse kann man in einem bestimmten Intervall um π herum erwarten

Schätzen einer relativen Häufigkeit

Erwartung Stichprobenergebnisse

→Rechnen mit Normalverteilung
→Suche nach jenem symmetrischen Intervall [p_u; p_o], in dem die möglichen Stichprobenergebnisse p mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit 1-α liegen
$Pr(p_u \leq p \leq p_o) = 1-\alpha$



(annähernde Stichprobenverteilung relativer Häufigkeiten für große Stichproben und große Grundgesamtheiten

Schätzen einer relativen Häufigkeit

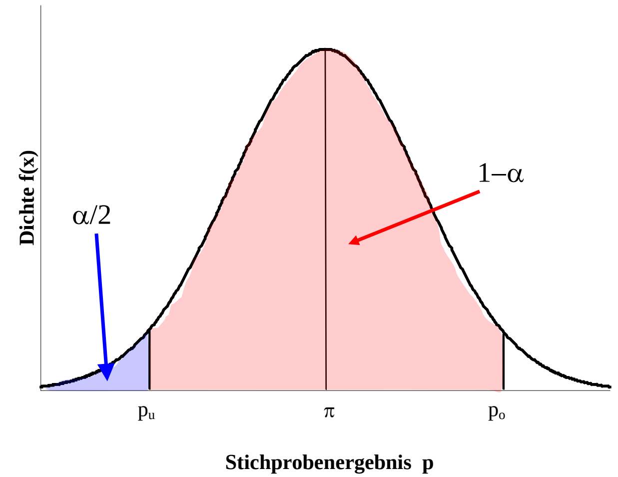
Erwartung Stichprobenergebnisse

Aussage über die Wahrscheinlichkeiten von *Stichprobenergebnissen*

- Standardisierung: $u_0 = \frac{x_0 - \mu}{\sigma}$

- Obere Schranke p_o: $u_{1-\alpha/2} = \frac{p_o - \pi}{\sqrt{\frac{\pi \cdot (1-\pi)}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}}}$

In großen Stichproben aus kleinen Grundgesamtheiten



- Große Grundgesamtheiten und große Stichproben (Faustregel: n≥100)

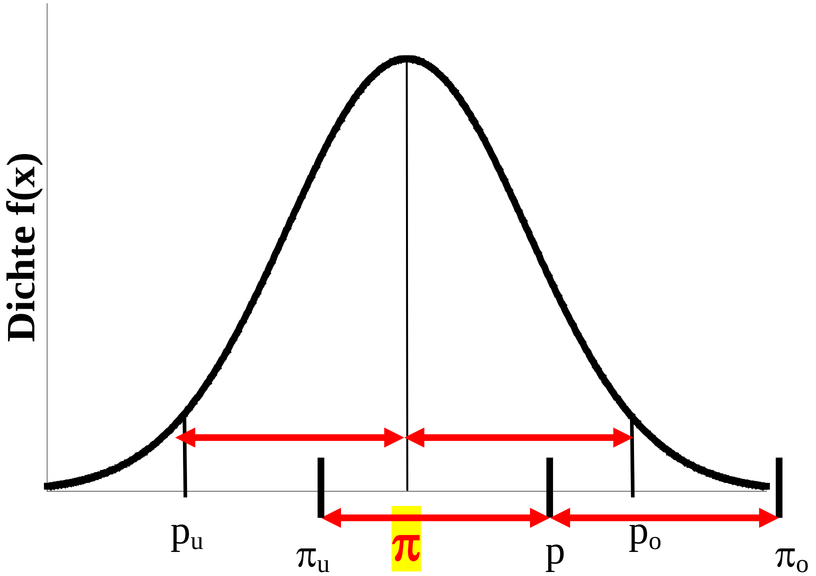
$$\boxed{p_o = \pi + u_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\pi \cdot (1-\pi)}{n}}} \qquad \boxed{p_u = \pi - u_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\pi \cdot (1-\pi)}{n}}}$$

→ Mit 1-α% Wahrscheinlichkeit ist das Stichprobenergebnis innerhalb des Intervalls, mit α% außerhalb des Intervalls

Schätzen einer relativen Häufigkeit

Schätzung Konfidenzintervall

Eigentliche Fragestellung: Aussage über den *Parameter* π der Grundgesamtheit → in welchem Intervall ist dieser mit hoher Sicherheit zu finden?

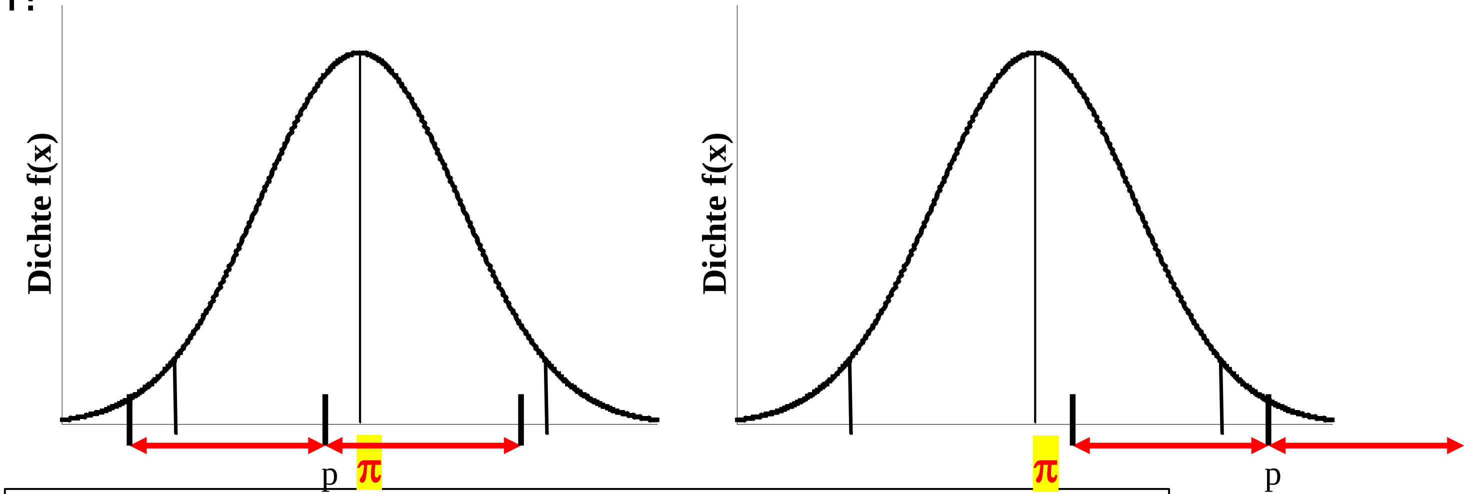


$$\begin{matrix} p_o \\ p_u \end{matrix} = \pi \pm u_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\pi \cdot (1-\pi)}{n}} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} \pi_o \\ \pi_u \end{matrix} = p \pm u_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}$$

Schätzen einer relativen Häufigkeit

Schätzung Konfidenzintervall

Eigentliche Fragestellung: Aussage über den *Parameter* π der Grundgesamtheit → in welchem Intervall ist dieser mit hoher Sicherheit zu finden?



1-α% Konfidenzintervall: $\begin{matrix}\pi_o \\ \pi_u\end{matrix} = p \pm u_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}$

→ Mit 1-α% Wahrscheinlichkeit wird der wahre Parameter π vom Konfidenzintervall überdeckt, mit α% Wahrscheinlichkeit nicht

Schätzen einer relativen Häufigkeit

Schätzung Konfidenzintervall

- Beispiel 27: Konfidenzintervall für die relative Häufigkeit
  - Zufallsstichprobe: 23% von 400 Befragten sehen mit Zuversicht der wirtschaftlichen Entwicklung entgegen
  - Punktschätzer für π: p=0,23
  - 1-a% Konfidenzintervall: 95%

$$\rightarrow \pi_o = p + u_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}} = 0{,}23 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}23\cdot(1-0{,}23)}{400}} = 0{,}271$$

$$\rightarrow \pi_u = p - u_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}} = 0{,}23 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}23\cdot(1-0{,}23)}{400}} = 0{,}189$$

→Die relative Häufigkeit an Zuversichtlichen in der Grundgesamtheit wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% von diesem Intervall überdeckt. Mit nur 5% Wahrscheinlichkeit liegt der wahre Parameter außerhalb dieses Intervalls

Schätzen einer relativen Häufigkeit

Schätzung Konfidenzintervall

- Beispiel 28: Konfidenzintervall für die relative Häufigkeit
  - Zufallsstichprobe: 23% von 10.000 Befragten sehen mit Zuversicht der wirtschaftlichen Entwicklung entgegen
  - Punktschätzer für π: p=0,23
  - 1-a% Konfidenzintervall: 95%

$$\rightarrow \pi_o = p + u_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}} = 0{,}23 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}23\cdot(1-0{,}23)}{10000}} = 0{,}238$$

$$\rightarrow \pi_o = p - u_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}} = 0{,}23 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}23\cdot(1-0{,}23)}{10000}} = 0{,}222$$

→Achtung: Je größer die Stichprobe desto kleiner wird das Konfidenzintervall, mit anderen Worten, desto „genauer" ist die Schätzung

Schätzen einer relativen Häufigkeit

Schätzung Konfidenzintervall

- Erforderlicher Stichprobenumfang in großen Grundgesamtheiten
  - Je größer die Stichprobe desto kleiner ist das Konfidenzintervall und desto genauer die Schätzung, aber große Stichproben verursachen höhere Kosten als kleine Stichproben

  →Wie groß muss der Stichprobenumfang sein um zu einem „angemessenen“ Konfidenzintervall zu kommen

$$\begin{matrix}\pi_o \\ \pi_u\end{matrix} = p \pm \underbrace{u_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}}$$

Schwankungsbreite ε um die relative Häufigkeit in der Stichprobe herum

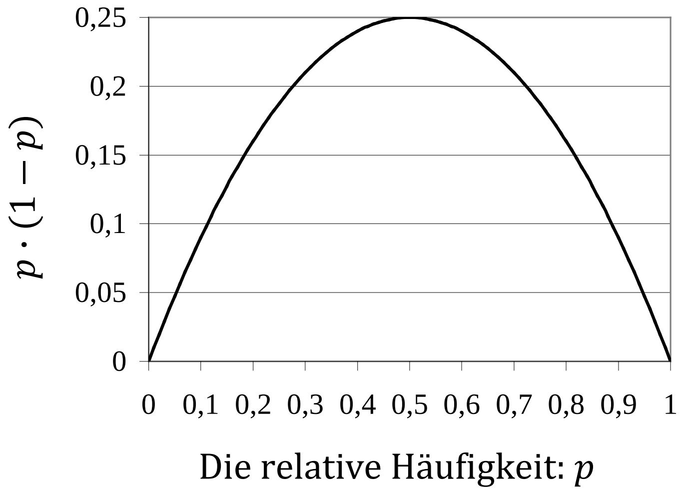
$$\varepsilon = u_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} \longrightarrow \boxed{n = \frac{u_{1-\alpha/2}^2}{\varepsilon^2} \cdot p \cdot (1-p)}$$

Schätzen einer relativen Häufigkeit

Schätzung Konfidenzintervall

- Erforderlicher Stichprobenumfang in großen Grundgesamtheiten → Festzulegen sind:
  - Überdeckungswahrscheinlichkeit 1-α
  - Tolerierte Schwankungsbreite ε
  - Parameter p

$$n = \frac{u_{1-\alpha/2}^2}{\varepsilon^2} \cdot p \cdot (1-p)$$



Achtung: Parameter p ist unbekannt:

- Rückgriff auf Erfahrungswerte oder
- Annahme des schlimmsten Fehlers den man machen kann

→ Wann wird der Faktor p(1- p) am höchsten: bei p=0,5

Schätzen einer relativen Häufigkeit

Schätzung Konfidenzintervall

- Beispiel 29: Berechnung des erforderlichen Stichprobenumfangs
  - Stichprobenumfang für 95% Konfidenzintervall mit Schwankungsbreite ε=0,02 und
  a) Partei etwa 15% der Stimmen erhält
  b) Partei zwischen 15% und 25% der Stimmen erhält
  c) Partei zwischen 40% und 55% der Stimmen erhält
  d) Keinerlei Abschätzung des Anteils vorher möglich ist

  - Zu a) $n = \frac{1{,}96^2}{0{,}02^2} \cdot 0{,}15 \cdot (1 - 0{,}15) = 1.225$
  - Zu b) $n = \frac{1{,}96^2}{0{,}02^2} \cdot 0{,}25 \cdot (1 - 0{,}25) = 1.801$
  - Zu c) $n = \frac{1{,}96^2}{0{,}02^2} \cdot 0{,}5 \cdot (1 - 0{,}5) = 2.401$
  - Zu d) wie c)

Testen von Hypothesen über eine relative Häufigkeit

Handlungslogik der schließenden Statistik

- Hypothese: Aussage deren Gültigkeit man für möglich hält, die aber nicht bewiesen oder überprüft wurde
- Schließende Statistik hilft beim Entscheiden zwischen konkurrierenden Hypothesen (z.B. ist eine Mehrheit EU-skeptisch oder nicht?)
- Handlungslogik eines Indizienprozesses (in dubio pro reo = Im Zweifel für den Angeklagten)

Testen von Hypothesen über eine relative Häufigkeit

Handlungslogik der schließenden Statistik

	Indizienprozess	Statistisches Testen von Hypothesen
Zu prüfende Hypothese (Einshypothese)	Schuld	Forschungshypothese
Ausgangshypothese (Nullhypothese)	Unschuld	Gegenteil der zu überprüfenden Hypothese
Sammlung von Indizien gegen die Nullhypothese	Zeugenaussagen	Stichprobenerhebung
Entscheidung	Bei starken Indizien: Verurteilung; ansonsten Freispruch	Bei starken Indizien: Akzeptieren der Einshypothese, sonst Beibehaltung der Nullhypothese
Fehlermöglichkeiten	Justizirrtum (Unschuldiger verurteilt), Irrtümlicher Freispruch (schuldig aber freigelassen)	α-Fehler (Signifikanzniveau), β-Fehler

Testen von Hypothesen über eine relative Häufigkeit

Handlungslogik der schließenden Statistik

H_1: Angeklagter schuldig eines Verbrechens, H_0: Angeklagter unschuldig,

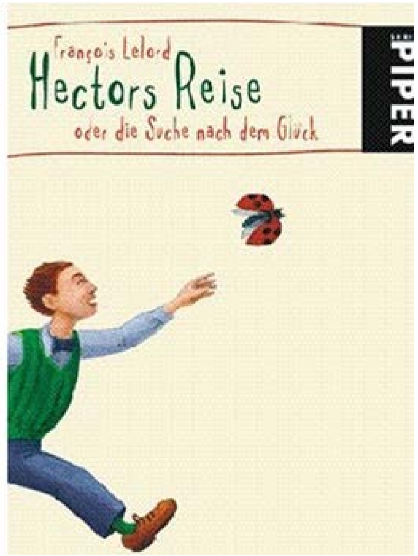
		Zustand der Welt	
		H_0 wahr (=unschuldig)	H_0 falsch (=schuldig)
Entscheidung nach Beweis-aufnahme	H_0 nicht verwerfen (=H_1 nicht annehmen)	Gerechtigkeit ist genüge getan	Schuldig aber freigelassen
	H_0 verwerfen (=H_1 annehmen)	Unschuldiger verurteilt	Gerechtigkeit ist genüge getan

H_1: EU-Skeptiker >50%, H_0: EU-Skeptiker ≤ 50%

		Zustand der Welt	
		H_0 wahr (=EU-Skeptiker ≤ 50%)	H_0 falsch (=EU-Skeptiker >50%)
Entscheidung nach Stichprobe	H_0 nicht verwerfen (=H_1 nicht annehmen)	Korrekte Entscheidung	β-Fehler
	H_0 verwerfen (=H_1 annehmen)	α-Fehler	Korrekte Entscheidung

Testen von Hypothesen über eine relative Häufigkeit

Handlungslogik der schließenden Statistik



- „ … so ist Wissenschaft eben: Es reicht nicht, wenn man irgendwas denkt, man muss versuchen nachzuprüfen, ob es auch stimmt. Wenn nicht, könnte ja alle Welt sonst was denken und behaupten, und wenn es Leute behaupteten, die gerade in Mode waren, würde man ihnen glauben.“ (Francois Lelord, *Hectors Reise oder die Suche nach dem Glück*, S.153)

Aufgabe der Statistik:
Rigoroses Testen und Verwerfen der Hypothesen und Festlegung jener Schranken, die die schwachen von den starken Indizien gegen die Nullhypothese trennen

Testen von Hypothesen über eine relative Häufigkeit

Handlungslogik der schließenden Statistik

- Aufgabe: Treffen einer fundierten Entscheidung zwischen zwei konkurrierenden Unterstellungen (=Hypothesen) über eine relative Häufigkeit einer Grundgesamtheit
- Allgemeine Handlungslogik für das statistische Testen von Hypothesen
  - Aufstellen von Eins- und Nullhypothese („Schuld“ und „Unschuld“)
  - Sammlung von Indizien gegen die Nullhypothese („Zeugen“)
  - Entscheidung: Entweder Beibehaltung der Nullhypothese oder Akzeptierung der Einshypothese
  - Entscheidung basiert auf Stichprobenergebnissen (siehe Erwartung Stichprobenergebnisse aus vorigen Folien)

Testen von Hypothesen über eine relative Häufigkeit

Zweiseitiger Hypothesentest

- Beispiel 30: Statistisches Testen von *zweiseitigen* Hypothesen
  - In der EU sehen 20% der Befragten der wirtschaftlichen Entwicklung zuversichtlich entgegen
  - Auf dem Signifikanzniveau α=0,05 Überprüfung, ob in einem Land die relative Häufigkeit der Zuversichtlichen **nicht** mit dem EU-Wert übereinstimmt → Einshypothese: H_1
  - Stichprobe in Land A: n=400, p=0,23
  - Hypothesenformulierung: H_0: π=0,2 und H_1: $\pi \neq$0,2

    … zweiseitige Fragestellung
  - Hat man mit p=0,23 ein starkes Indiz gegen H_0 gefunden?
  - Wäre p=0,9; 0,6; 0,3; 0,25; 0,23; 0,21 ein starkes Indiz gegen H_0 ?

Testen von Hypothesen über eine relative Häufigkeit

Zweiseitiger Hypothesentest

- Beispiel 30: Statistisches Testen von zweiseitigen Hypothesen
  - H_0: π=0,2 und H_1: π≠0,2
  - Wie groß müsste p sein damit man die Nullhypothese verwerfen kann (Akzeptanz H_1)? → Bereich der starken Indizien
  - Wie groß müsste p sein damit man die H_0 nicht verwerfen kann? → Bereich der schwachen Indizien

$$p_o = \pi + u_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\pi\cdot(1-\pi)}{n}} = 0{,}2 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}2\cdot(1-0{,}2)}{400}} = 0{,}239$$

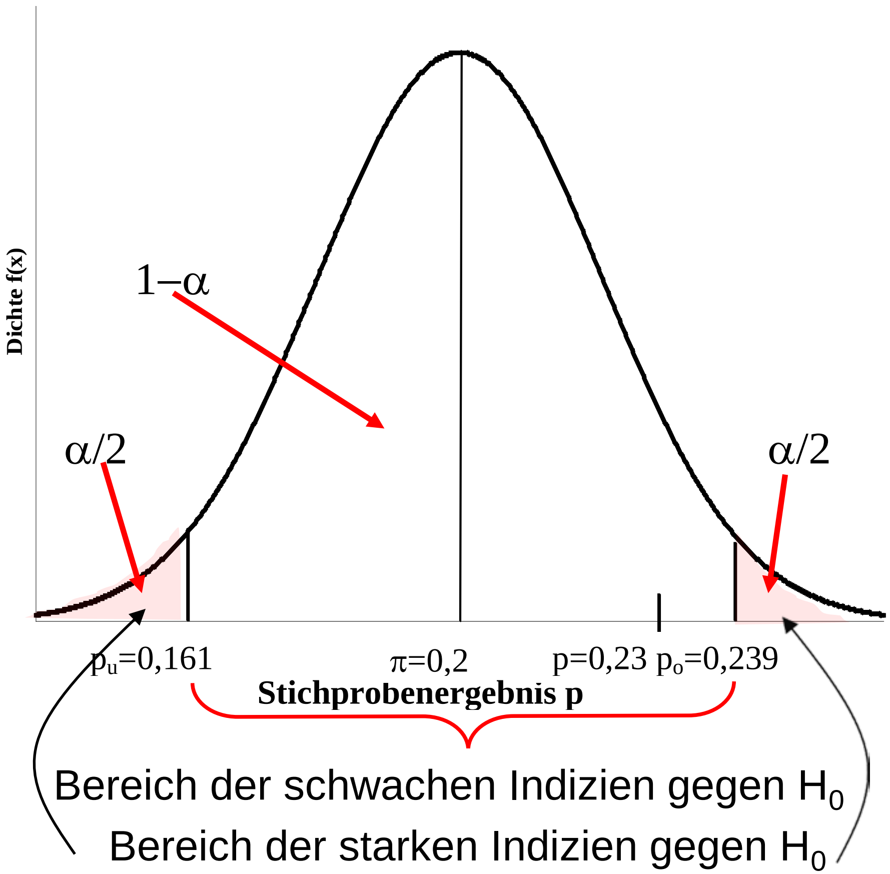
$$p_u = \pi - u_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\pi\cdot(1-\pi)}{n}} = 0{,}2 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}2\cdot(1-0{,}2)}{400}} = 0{,}161$$

  - $\mathrm{p} = 0{,}23 \in [0{,}161; 0{,}239]$ → Schwaches Indiz gegen H_0 → Beibehaltung der H_0 → relative Häufigkeit in der Stichprobe nicht signifikant anders als 0,2.

Testen von Hypothesen über eine relative Häufigkeit

Zweiseitiger Hypothesentest

- Beispiel 30: Statistisches Testen von zweiseitigen Hypothesen



Die zweiseitige Fragestellung in allgemeiner Darstellung:
H_0: $\pi=\pi_0$ und H_1: $\pi\neq\pi_0$

Entscheidungsregel:
Beibehaltung von H_0 wenn gilt $p \in [p_u; p_o]$,
Verwerfung wenn $p \notin [p_u; p_o]$

Verwerfen der H_0 = Akzeptanz der H_1:
wenn tatsächlich π=0,2 → Stichprobenergebnis von z.B. 0,4 unwahrscheinlich. Es wäre wahrscheinlicher dass der wahre Wert von π auch ca. 0,4 wäre

Testen von Hypothesen über eine relative Häufigkeit

Einseitiger Hypothesentest

- Beispiel 31: Statistisches Testen von *einseitigen* Hypothesen
  - In der EU sehen 20% der Befragten der wirtschaftlichen Entwicklung zuversichtlich entgegen
  - Auf dem Signifikanzniveau α=0,05 Überprüfung, ob in einem Land die relative Häufigkeit der Zuversichtlichen **höher** als der EU-Wert ist → Einshypothese: H_1
  - Stichprobe in Land A: n=400, p=0,23
  - Hypothesenformulierung: H_0: $\pi \leq 0{,}2$ und H_1: $\pi > 0{,}2$

    … einseitige Fragestellung
  - Hat man mit p=0,23 ein starkes Indiz gegen H_0 gefunden?

→ Suche nach oberer Schranke der schwachen Indizien gegen die H_0

Testen von Hypothesen über eine relative Häufigkeit

Einseitiger Hypothesentest

- Beispiel 31: Statistisches Testen von einseitigen Hypothesen
  - H_0: π≤0,2 und H_1: π>0,2
  - Wie groß müsste p sein damit man die Nullhypothese verwerfen kann (Akzeptanz H_1)? → Bereich der starken Indizien
  - Wie groß müsste p sein damit man die H_0 nicht verwerfen kann? → Bereich der schwachen Indizien

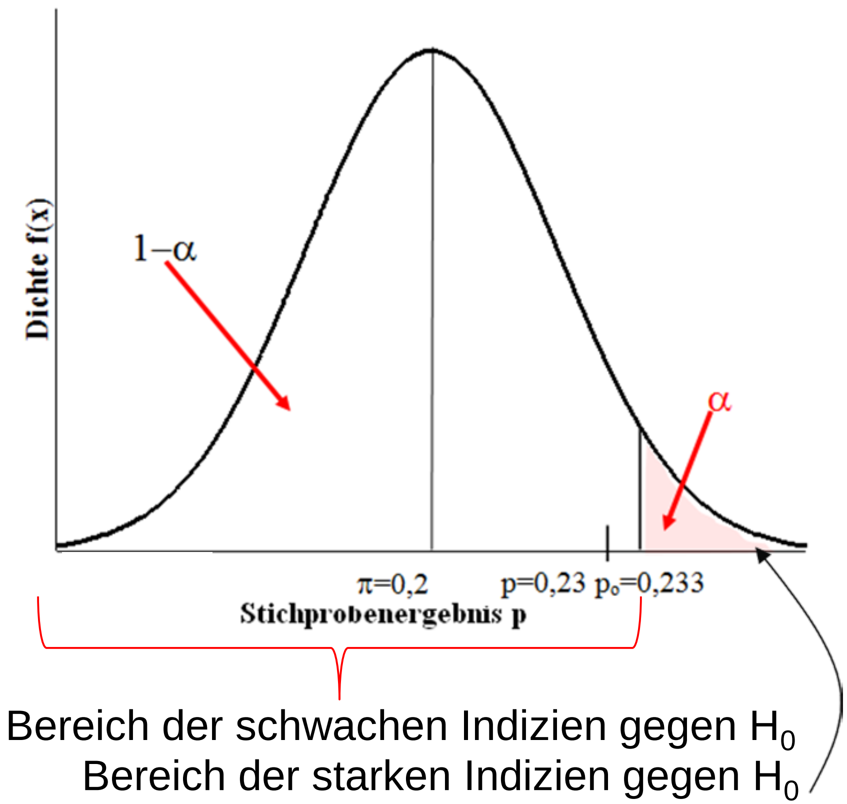
$$p_o = \pi + u_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{\pi \cdot (1-\pi)}{n}} = 0{,}2 + 1{,}65 \cdot \sqrt{\frac{0{,}2 \cdot (1-0{,}2)}{400}} = 0{,}233$$

  - p=0,23≤0,233 → Schwaches Indiz gegen H_0 → Beibehaltung der H_0, Testergebnis nicht signifikant

Testen von Hypothesen über eine relative Häufigkeit

Einseitiger Hypothesentest

- Beispiel 31: Statistisches Testen von einseitigen Hypothesen



Die *einseitige* Fragestellung in allgemeiner Darstellung: H_0: $\pi \leq \pi_0$ und H_1: $\pi > \pi_0$

Entscheidungsregel: Beibehaltung von H_0 wenn gilt $p \leq p_o$, Verwerfung wenn $p > p_o$

Oder

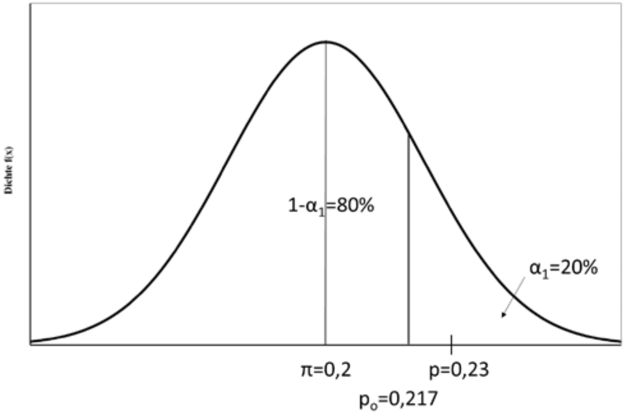
H_0: $\pi \geq \pi_0$ und H_1: $\pi < \pi_0$
Beibehaltung H_0 wenn gillt $p \geq p_u$,
Verwerfung wenn $p < p_u$

Verwerfen der H_0 = Akzeptanz der H_1: wenn tatsächlich $\pi \leq 0,2$ (z.B. 0,2) → Stichprobenergebnis von z.B. 0,4 unwahrscheinlich. Es wäre wahrscheinlicher dass der wahre Wert von π auch ca. 0,4 wäre und damit >0,2 wäre

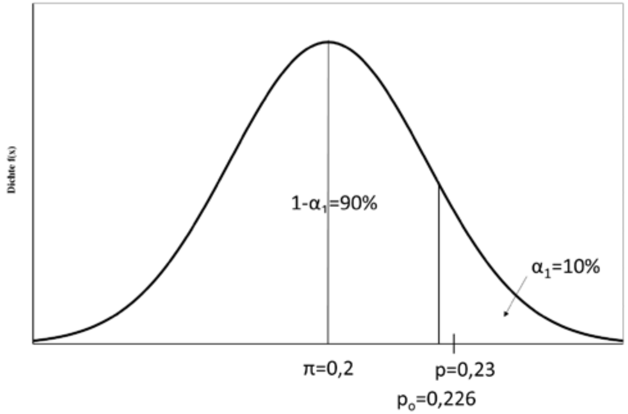
Testen von Hypothesen über eine relative Häufigkeit

Signifikanzniveau und p-Wert

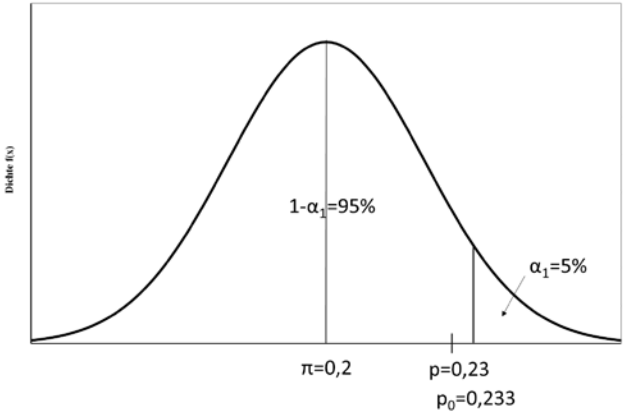
- Bisher wurde ein Signifikanzniveau α (Irrtumswahrscheinlichkeit) festgelegt bei dem man die H_0 verwirft und die H_1 akzeptiert. Konvention: 10%, 5%, 1% → arbiträre Werte
- Die Stichprobenergebnisse würden möglicherweise selbst zum Verwerfen der H_0 bei anderen Signifikanzniveaus führen



Signifikanzniveau α=0,2 → Verwerfen H_0



Signifikanzniveau α=0,1 → Verwerfen H_0

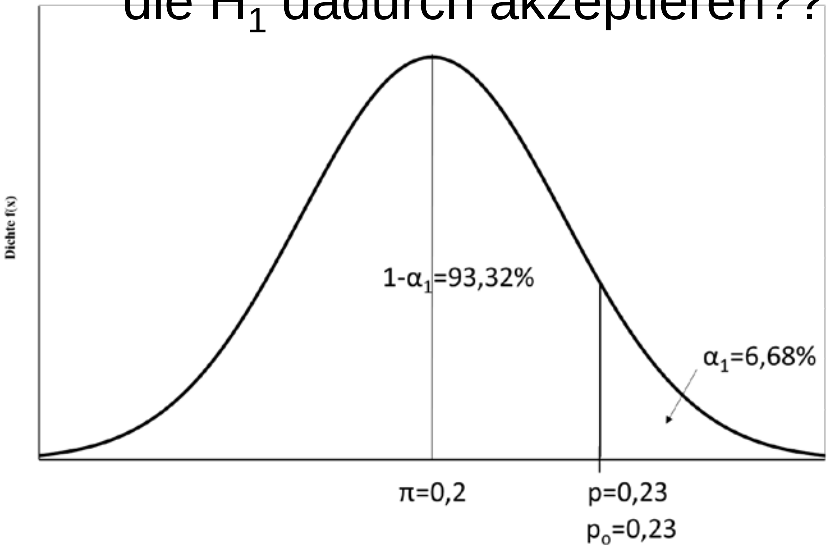


Signifikanzniveau α=0,05 → Kein Verwerfen H_0

Testen von Hypothesen über eine relative Häufigkeit

Signifikanzniveau und p-Wert

- Bei welchem Signifikanzniveau (Irrtumswahrscheinlichkeit) könnte man die H_0 auf Basis der Stichprobenergebnisse gerade noch verwerfen und die H_1 dadurch akzeptieren??



$$p_o = \pi + u_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{\pi \cdot (1-\pi)}{n}}$$

$$u_{1-\alpha} = \frac{p_o - \pi}{\sqrt{\frac{\pi \cdot (1-\pi)}{n}}}$$

$$u_{1-\alpha} = \frac{0{,}23 - 0{,}2}{\sqrt{\frac{0{,}2 \cdot (1-0{,}2)}{400}}} = 1{,}5$$

Verändern des Signifikanz-niveaus so lange, bis die untere Schranke = der relativen Häufigkeit in Stichprobe

Ablesen der Wahrscheinlichkeit aus Standardnormalverteilung → 1-α=0,9332 → α=0,0668

p-Wert = 0,0668

Testen von Hypothesen über eine relative Häufigkeit

Signifikanzniveau und p-Wert

- Wozu braucht man den p-Wert? → Analyseprogramme rechnen nicht die unteren/oberen Schranken für einzelne Hypothesen aus (zu aufwendig für Nutzer!), stattdessen geben sie den p-Wert aus.
- Vorgehen bei Nutzung
  1) Festlegung des Signifikanzniveaus (zugestandene Irrtums-wahrscheinlichkeit α) die man sich beim Akzeptieren der H_1 zugesteht
  2) Ermittlung des p-Wertes (tatsächliche Irrtumswahrscheinlichkeit) die man macht wenn man aufgrund der Daten aus der Stichprobe die H_1 akzeptiert obwohl die H_0 zutrifft.
  3) Vergleich Signifikanzniveau und p-Wert
     - Wenn p-Wert ≤ Signifikanzniveau → Akzeptanz der H_1
     - Wenn p-Wert > Signifikanzniveau → Beibehaltung der H_0
- p-Wert bei einseitigen Fragestellungen = α_1, p-Wert bei zweiseitigen Fragestellungen = α_2
- Beziehung zwischen beiden Werten: $\alpha_1 = \alpha_2 /2$

Testen von Hypothesen über eine relative Häufigkeit

Signifikanzniveau und p-Wert

- Beispiel mit Anteil der wirtschaftlich Zuversichtlichen → relative Häufigkeit in der Stichprobe ist p=0,23
- Test der H_0: $\pi \leq 0{,}2$ und H_1: $\pi > 0{,}2$, zugestandene Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0{,}01$

Beispiel für einen SPSS-Output:

p-Wert

Test auf Binomialverteilung

		Kategorie	N	Beobachteter Anteil	Testanteil	Exakte Signifikanz (1-seitig)
Zuversichtlich	Gruppe 1	ja	92	,230	,2	,067
	Gruppe 2	nein	308	,770		
	Gesamt		400	1,000		

- Das Signifikanzniveau (tatsächliche Irrtumswahrscheinlichkeit) bei dem man die H_0 gerade noch ablehnen könnte, wäre 0,067
- Vergleich zugestandene (α) und tatsächliche Irrtumswahrscheinlichkeit (p-Wert = α_1) → H_0 kann nicht verworfen werden

Schätzen eines Mittelwerts

Handlungslogik der schließenden Statistik

- Aufgabe: Schätzung einer unbekannten Mittelwerts μ in der Grundgesamtheit
- Punktschätzer für μ: Der Mittelwert $\bar{x}$ in einer uneingeschränkten Zufallsstichprobe
- Intervallschätzung: Konstruktion eines Konfidenzintervalls, das den Parameter μ mit einer Wahrscheinlichkeit 1-α (zumeist 95%) überdeckt.
- Vorgehen
  - 1. Wenn man den wahren Parameter π kennt, wie wahrscheinlich ist das Auftreten bestimmter Stichprobenergebnisse
  - 2. Auf Basis eines Stichprobenergebnisses p, Schätzung eines Konfidenzintervalls

Schätzen eines Mittelwerts

Erwartung Stichprobenergebnisse

- Mittelwerte μ einer Grundgesamtheit (zum Bsp. Körpergröße) → Zufallsstichprobe → Stichprobenwerte sind t-verteilt (konvergiert gegen Normalverteilung)
  - mit dem Erwartungswert $\mu = \bar{x}$
  - Und der theoretischen Varianz $\sigma_x^2 = \frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}$

Varianz GG

→ Bei großem N (große Grundgesamtheit): N → ∞

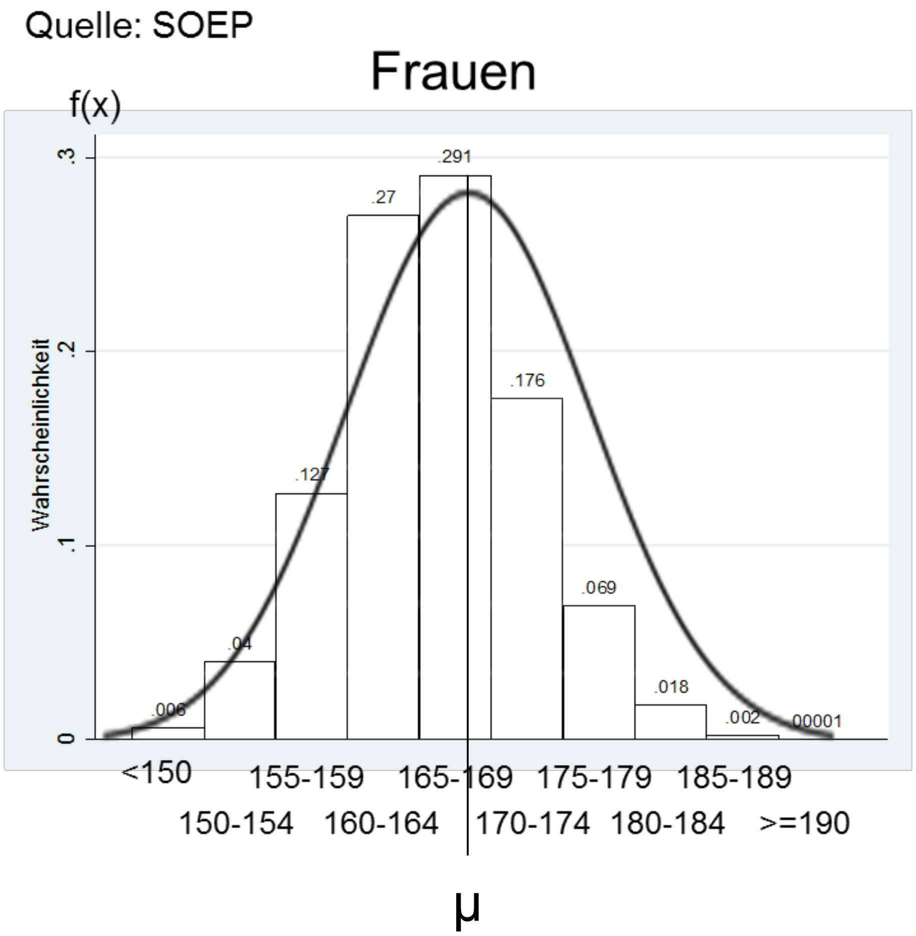
$$\sigma_x^2 = \frac{\sigma^2}{n} \cdot \underbrace{\frac{N-n}{N-1}}_{\approx 1} = \frac{\sigma^2}{n}$$

→Rechnen mit der Normalverteilung

Schätzen eines Mittelwerts

Erwartung Stichprobenergebnisse

- Zentraler Grenzwertsatz der Statistik: Bei großen Stichprobenumfängen (Faustregel $n \geq 100$) sind die Mittelwerte annähernd normalverteilt
- Die meisten Stichprobenergebnisse kann man in einem bestimmten Intervall um μ herum erwarten

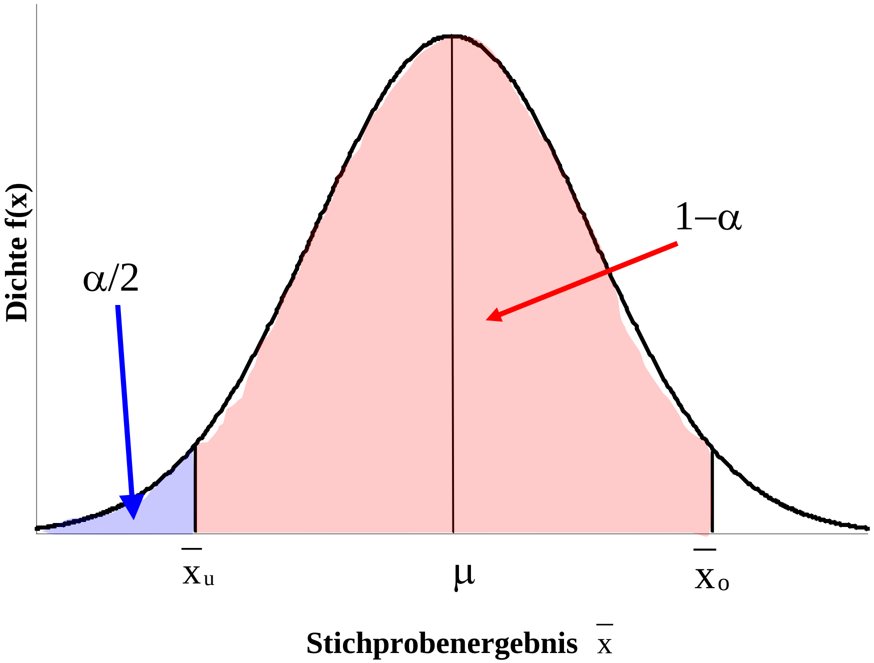


Schätzen eines Mittelwerts

Erwartung Stichprobenergebnisse

- Zentraler Grenzwertsatz der Statistik: Bei großen Stichprobenumfängen (Faustregel n≥100) sind Mittelwerte $\bar{x}$ annähernd normalverteilt

→Suche nach jenem symmetrischen Intervall $[\bar{x}_u; \bar{x}_o]$, in dem die möglichen Stichprobenergebnisse $\bar{x}$ mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit 1-α liegen $Pr(\bar{x}_u \leq \mu \leq \bar{x}_o)=1-\alpha$

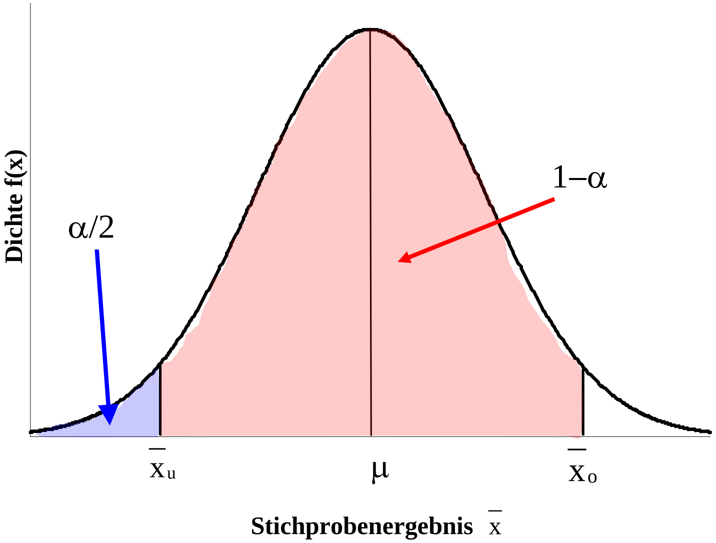


Schätzen eines Mittelwerts

Erwartung Stichprobenergebnisse

Aussage über die Wahrscheinlichkeiten von *Stichprobenergebnissen*

- Standardisierung: $u_0 = \frac{x_0 - \mu}{\sigma}$
- Obere Schranke: $\bar{x}_o$: $u_{1-\alpha/2} = \frac{\bar{x}_o - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$



- Große Grundgesamtheiten und große Stichproben (Faustregel: n≥100)

$$\boxed{\bar{x}_o = \mu + u_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$$

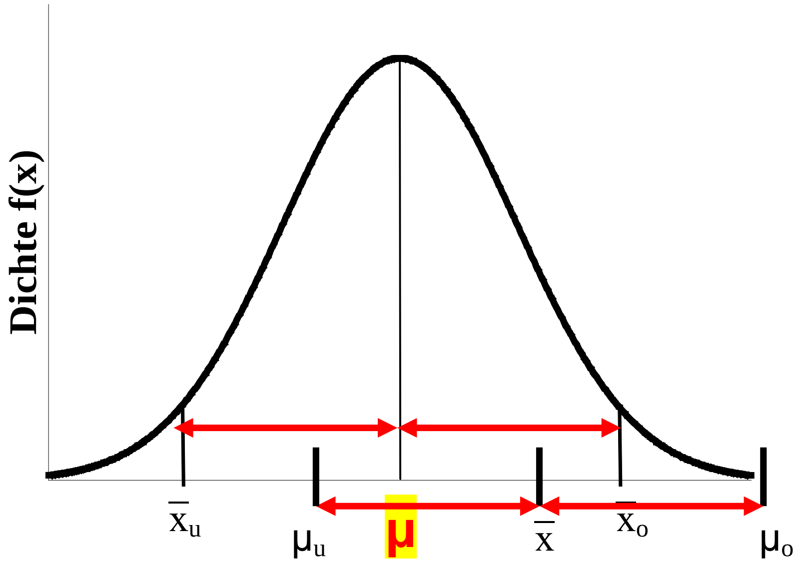
$$\boxed{\bar{x}_u = \mu - u_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$$

→ Mit 1-α% Wahrscheinlichkeit ist das Stichprobenergebnis innerhalb des Intervalls, mit α% außerhalb des Intervalls

Schätzen eines Mittelwerts

Schätzung Konfidenzintervall

Eigentliche Fragestellung: Aussage über den *Parameter* μ der Grundgesamtheit → in welchem Intervall ist dieser mit hoher Sicherheit zu finden?



$$\begin{matrix}\bar{x}_o\\ \bar{x}_u\end{matrix} = \mu \pm u_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$$

$$\begin{matrix}\mu_o\\ \mu_u\end{matrix} = \bar{x} \pm u_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{s^2}{n}}$$

Ersetzen mit Stichproben-varianz s² wenn σ² unbekannt ist

→ Mit 1-α% Wahrscheinlichkeit wird der wahre Parameter μ vom Konfidenzintervall überdeckt, mit α% Wahrscheinlichkeit nicht

Schätzen eines Mittelwerts

Schätzung Konfidenzintervall

- Beispiel 33: Konfidenzintervall für einen Mittelwert
  - Zufallsstichprobe: Gewicht von Zuckerpaketen nach Abfüllung n=100, $\bar{x}$ = 998g und s^2=2,56
  - Punktschätzer für μ: $\bar{x}$ = 998
  - 1-a% Konfidenzintervall: 95%

→ $\mu_o = \bar{x} + u_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{s^2}{n}} = 998 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{2{,}56}{100}} = 998{,}31$

→ $\mu_u = \bar{x} - u_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{s^2}{n}} = 998 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{2{,}56}{100}} = 997{,}69$

→ Der Mittelwert μ des Abfüllgewichts wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% von diesem Intervall überdeckt. Mit nur 5% Wahrscheinlichkeit liegt der wahre Parameter außerhalb dieses Intervalls

Testen von Hypothesen über einen Mittelwert

Allgemeines

- Aufgabe: Treffen einer fundierten Entscheidung zwischen zwei konkurrierenden Unterstellungen (=Hypothesen) über einen Mittelwert einer Grundgesamtheit
- Analoge Vorgehensweise zu den Überlegungen bei relativen Häufigkeiten
  - Hypothesenformulierung: H_0: $\mu = \mu_0$ und H_1: $\mu \neq \mu_0$

    … zweiseitige Fragestellung
  - Bereich der schwachen Indizien gegen die Nullhypothese (=Beibehaltung der Nullhypothese) wenn gilt: $\bar{x} \in [\bar{x}_u; \bar{x}_o]$
  - Bereich der starken Indizien gegen H_0 (=Verwerfen von H_0 und Akzeptanz der H_1) wenn gilt $\bar{x} \notin [\bar{x}_u; \bar{x}_o]$

Testen von Hypothesen über einen Mittelwert

Zweiseitiger Hypothesentest

- Beispiel 34: Testen von *zweiseitigen* Hypothesen
  - Weicht das Abfüllgewicht der Zuckerpakete vom Normgewicht 1.000g ab → Überprüfung auf Signifikanzniveau α=0,05
  - Stichprobe: n=100, $\bar{x}$ = 998g und s^2=2,56
  - H_0: μ=1.000 und H_1: μ≠1.000
  - Bereich der schwachen Indizien gegen H_0

Ersetzen mit Stichproben-varianz s²

$$\bar{x}_o = \mu + u_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = 1.000 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{2{,}56}{100}} = 1.000{,}31$$

$$\bar{x}_u = \mu - u_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = 1.000 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{2{,}56}{100}} = 999{,}69$$

  - $\bar{x} = 998 \notin [\bar{x}_u; \bar{x}_o]$→ Starkes Indiz gegen H_0 → Akzeptanz der H1. Zuckerpakete haben ein signifikant andere Abfüllmenge als 1.000g → Irrtumswahrscheinlichkeit liegt bei 5%

Testen von Hypothesen über einen Mittelwert

Einseitiger Hypothesentest

- Beispiel 35: Testen von *einseitigen* Hypothesen über einen Mittelwert
  - Ist das Abfüllgewicht der Zuckerpakete kleiner als das Normgewicht 1.000g → Überprüfung auf Signifikanzniveau α=0,05
  - Gleiche Stichprobe: n=100, $\bar{x}$ = 998g und s²=2,56
  - H_0: μ≥1.000 und H_1: μ<1.000
  - Bereich der schwachen Indizien gegen H_0

Ersetzen mit Stichproben-varianz s²

$$\bar{x}_u = \mu - u_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = 1.000 - 1{,}65 \cdot \sqrt{\frac{2{,}56}{100}} = 999{,}74$$

$\bar{x} = 999{,}62 < \bar{x}_u$ → Starkes Indiz gegen H_0 → Akzeptanz H_1. Zuckerpakete sind signifikant leichter als 1.000g → Irrtumswahrscheinlichkeit liegt bei 5%

Testen von Hypothesen über einen Mittelwert

Einseitiger Hypothesentest

- Allgemeines zu Hypothesentests über einen Mittelwert
  - Einseitige Hypothesen
    - H_0: μ≥1.000 und H_1: μ<1.000

$$\bar{x}_u = \mu - u_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$$

    - H_0: μ≤1.000 und H_1: μ>1.000

$$\bar{x}_o = \mu + u_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$$

Testen von Hypothesen über Regressionskoeffizienten

Allgemeines

- Korrelationsrechnung: statistischer Zusammenhang metrischer Merkmale
- Regressionsrechnung: erlaubt weitergehende Aussagen wie z.B. Prognosen

Regressor oder unabhängige Variable

- Regressionsgerade in der Grundgesamtheit $y=\beta_1 \cdot x+\beta_2$

Regressand oder abhängige Variable

- Aufgabe: Fundierte Entscheidung über die Steigung β_1 oder den Achsenabschnitt der Regressionsgeraden β_2
- Schätzen und Testen der beiden Regressionskoeffizienten: einfache Regressionsanalyse
- Schätzer b_1 und b_2 wie in Abschnitt 1.3.4. mit Daten aus einer uneingeschränkten Zufallsstichprobe

Testen von Hypothesen über Regressionskoeffizienten

Allgemeines

- Testen von Hypothesen über β_1
  - Überprüfung auf einem Signifikanzniveau α, ob die unabhängige Variable x auf die abhängige Variable y einen Einfluss ausübt
- Hypothesenformulierung:
  - Zweiseitige Fragestellungen: H_0: $\beta_1 = 0$ und H_1: $\beta_1 \neq 0$
  - Einseitige Fragestellungen: H_0: $\beta_1 \leq 0$ und H_1: $\beta_1 > 0$
  - Einseitige Fragestellungen: H_0: $\beta_1 \geq 0$ und H_1: $\beta_1 < 0$
- Voraussetzung:
  - Erwartung einer linearen Beziehung zwischen beiden Variablen
  - Normalverteilung der Variablen

Testen von Hypothesen über Regressionskoeffizienten

Zweiseitige Hypothesentests

- Für ausreichend große Stichproben (n≥100) sind b_{1o} und b_{1u} Schranken des Bereichs der schwachen Indizien gegen H_0

$$\boxed{b_{1o} = u_{1-\alpha/2} \cdot s_{b1} \quad \text{und} \quad b_{1u} = -u_{1-\alpha/2} \cdot s_{b1}}$$

- In kleinen Stichproben: t-Verteilung mit n-2 Freiheitsgraden, in großen Annäherung an Standardnormalverteilung

- Stichprobenstandardabweichung s_{b1} von b_1 aus $s_{b1}^2 = \frac{1-r^2}{n-2} \cdot \frac{s_y^2}{s_x^2}$
- Entscheidungsregel: Beibehaltung der H_0 wenn $b_1 \in [b_{1u}\,;\, b_{1o}]$

→Fragestellung identisch mit Test bei Korrelationsanalyse H_0: $\rho = 0$ und H_1: $\rho \neq 0$ oder entsprechende einseitige Hypothesen

Testen von Hypothesen über Regressionskoeffizienten

Einseitige Hypothesentests

- Für ausreichend große Stichproben (n≥100) sind b_{1o} und b_{1u} Schranken des Bereichs der schwachen Indizien gegen H_0

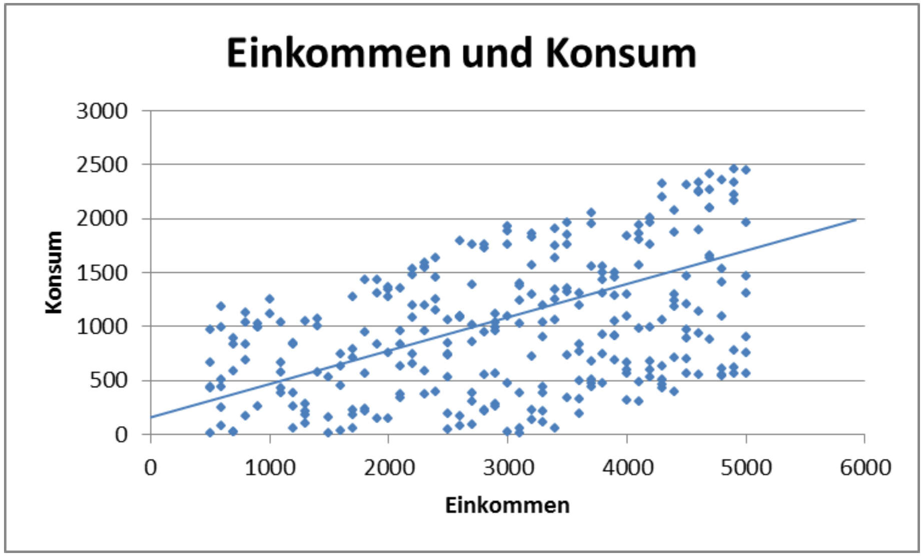
$$\boxed{b_{1o} = u_{1-\alpha} \cdot s_{b1} \quad \text{und} \quad b_{1u} = -u_{1-\alpha} \cdot s_{b1}}$$

- Entscheidungsregel:
  - H_0: $\beta_1 \leq 0$ und H_1: $\beta_1 > 0$ → Beibehaltung der H_0 wenn $b_1 \leq b_{1o}$
  - H_0: $\beta_1 \geq 0$ und H_1: $\beta_1 < 0$ → Beibehaltung der H_0 wenn $b_1 \geq b_{1u}$

Testen von Hypothesen über Regressionskoeffizienten

Einseitige Hypothesentests

- Beispiel 41: Bei einer Kundenbefragung werden zwei Merkmale x (Einkommen) und y (Konsum) erhoben.



- Besteht ein signifikant positiver Zusammenhang zwischen Einkommen und Konsum

Testen von Hypothesen über Regressionskoeffizienten

Einseitige Hypothesentests

- Beispiel 41: Bei einer Kundenbefragung werden zwei Merkmale x (Einkommen) und y (Konsum) erhoben.
  - Hypothesenformulierung: H_0: $\beta_1 \leq 0$ und H_1: $\beta_1 > 0$
  - Stichprobe: n=330, s_{xy} = 67,72, s_x^2 = 219,63, s_y^2 = 1.065,37
  - Korrelationskoeffizient r=0,14; b_1=67,72/219,63=0,31
  - Obere Schranke der schwachen Indizien

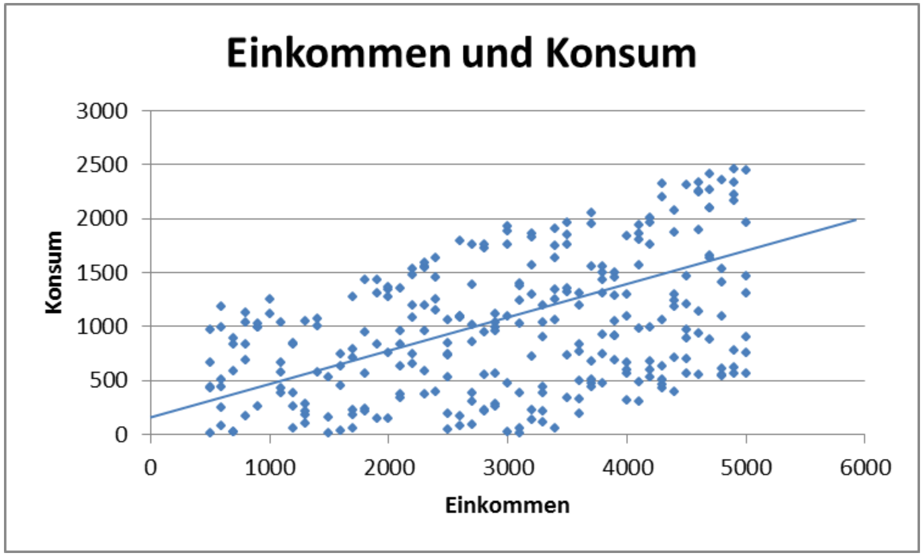
$$b_{1o} = u_{1-\alpha} \cdot s_{b1} = u_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{1-r^2}{n-2} \cdot \frac{s_y^2}{s_x^2}} = 1{,}65 \cdot \sqrt{\frac{1-0{,}14^2}{330-2} \cdot \frac{1065{,}37}{219{,}63}} = 0{,}20$$

- Entscheidung: Akzeptanz der H_1 da $b_1 > b_{1o}$
- Es besteht ein signifikant positiver Zusammenhang zwischen Einkommen und Konsum

Testen von Hypothesen über Regressionskoeffizienten

Prognosen

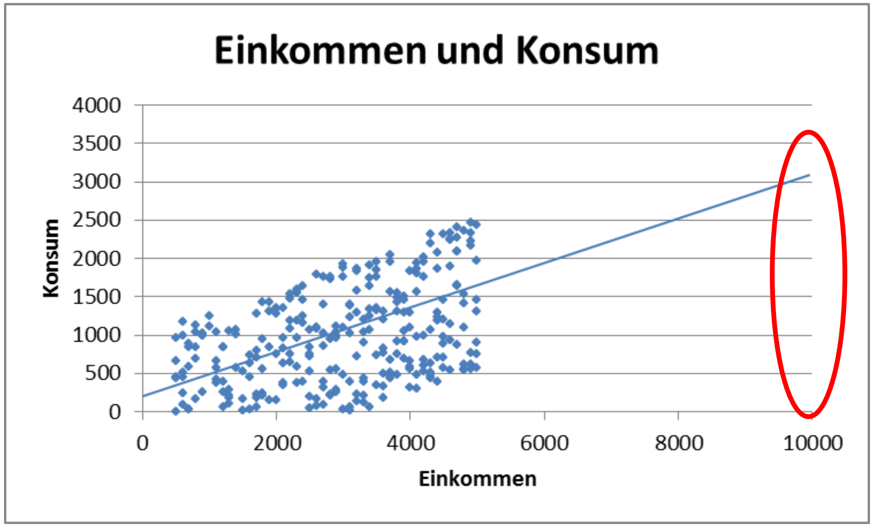
- Beispiel 42: Bei einer Kundenbefragung werden zwei Merkmale x (Einkommen) und y (Konsum) erhoben. Kunden haben Einkommen zwischen 500 und 5000 Euro
  - Aus Beispiel 41: b_1=0,31 und (Annahme) b_2=10 → b_1=marginale Konsumquote: wieviel Cent gibt ein Kunde im Geschäft aus wenn dessen Einkommen um 1 Euro steigt



Testen von Hypothesen über Regressionskoeffizienten

Prognosen

- Beispiel 42: Bei einer Kundenbefragung werden zwei Merkmale x (Einkommen) und y (Konsum) erhoben. Kunden haben Einkommen zwischen 500 und 5000 Euro
  - Welchen Umsatz erzielen Sie mit einem Konsumenten der 10.000 Euro verdient? → gedankliche Verlängerung der Regressionsgerade
  - $y=b_1 \cdot x+b_2=0{,}31 \cdot 10000+10=3110$



Testen von Hypothesen über Regressionskoeffizienten

Multivariate Regressionsanalyse

- Bisher 1 abhängige und 1 unabhängige Variable (Konsum und Einkommen)
- Aber die abhängige Variable hängt möglicherweise noch von weiteren Faktoren → Multiple Regressionsanalyse mit mehreren Variablen
- Hypothetisches Beispiel: Anzahl der gekauften Paar Schuhe abhängig vom Einkommen, Geschlecht, etc.
- y=Anzahl Paar Schuhe, x_1=Einkommen in Euro, x_2=Geschlecht (1=weiblich, 0=männlich)

$y=b_1 \cdot x_1+b_2 \cdot x_2+b_3=0{,}01 \cdot x_1+70 \cdot x_2+0$

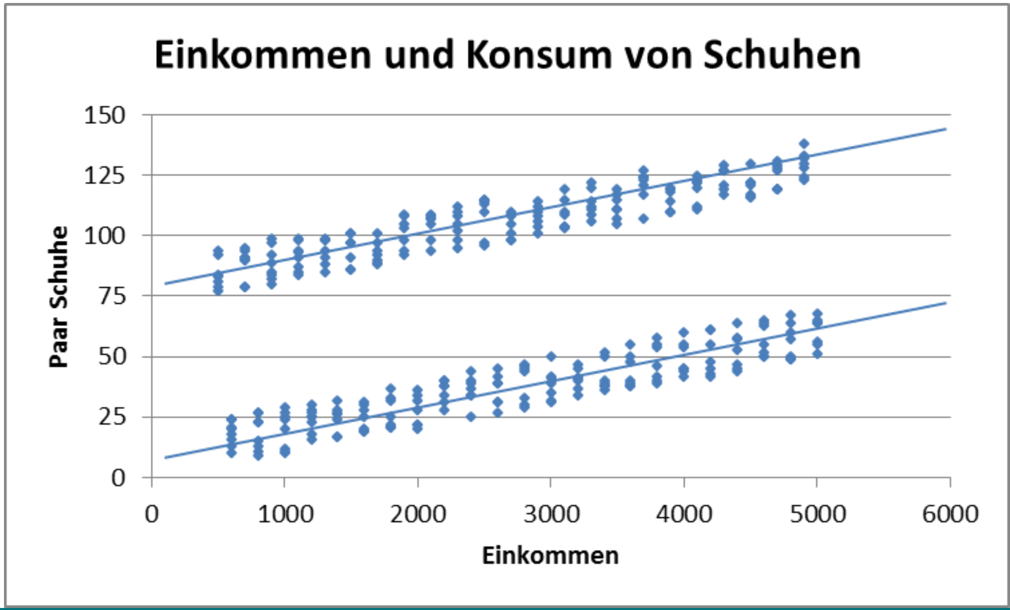
- Interpretation:
  - b_1=von jedem Euro wird 1 Cent für Schuhe ausgegeben,
  - b_2=Frauen kaufen 70 Paar Schuhe mehr als Männer,
  - b_3=0 Paar Schuhe werden immer gekauft (autonomer Konsum)

Testen von Hypothesen über Regressionskoeffizienten

Multivariate Regressionsanalyse

- Generierung von Daten zu verschiedenen Einkommen und Einsetzen in die Formel + „weißes Rauschen“ ergibt eine Datentabelle:

x1	x2	e	y
500	1	17.2547125	92
600	0	12.1178002	18
700	1	13.6921622	91
800	0	2.97156458	11
900	1	19.7089729	99
1000	0	10.0421406	20
1100	1	13.1905633	94



Testen von Hypothesen über Regressionskoeffizienten

Multivariate Regressionsanalyse

- Hypothesenformulierung nach korrektem Modell:
  - Einkommen H_0: $\beta_1 = 0{,}00$ und H_1: $\beta_1 \neq 0{,}00$
  - Geschlecht H_0: $\beta_2 = 0{,}00$ und H_1: $\beta_2 \neq 0{,}00$

UV	Regressions-koeffizient	p-Wert
Einkommen	0,013	0,000
Geschlecht	72,94	0,000

Interpretation:
b_1=0,013 → von jedem Euro werden 0,013 Cent für Schuhe ausgeben → p-Wert: H1 kann"mit großer Sicherheit angenommen werden
b_2=72,94 → Frauen (Geschlecht=1) kaufen ca. 73 Schuhe mehr als Männer (Geschlecht=0) → p-Wert: H_1 kann mit großer Sicherheit angenommen werden

Testen von Hypothesen über Regressionskoeffizienten

Multivariate Regressionsanalyse

- Hypothesenformulierung nach inkorrektem Modell (Vernachlässigung des Geschlechtseffekts):
  - Einkommen H_0: $\beta_1 = 0{,}00$ und H_1: $\beta_1 \neq 0{,}00$

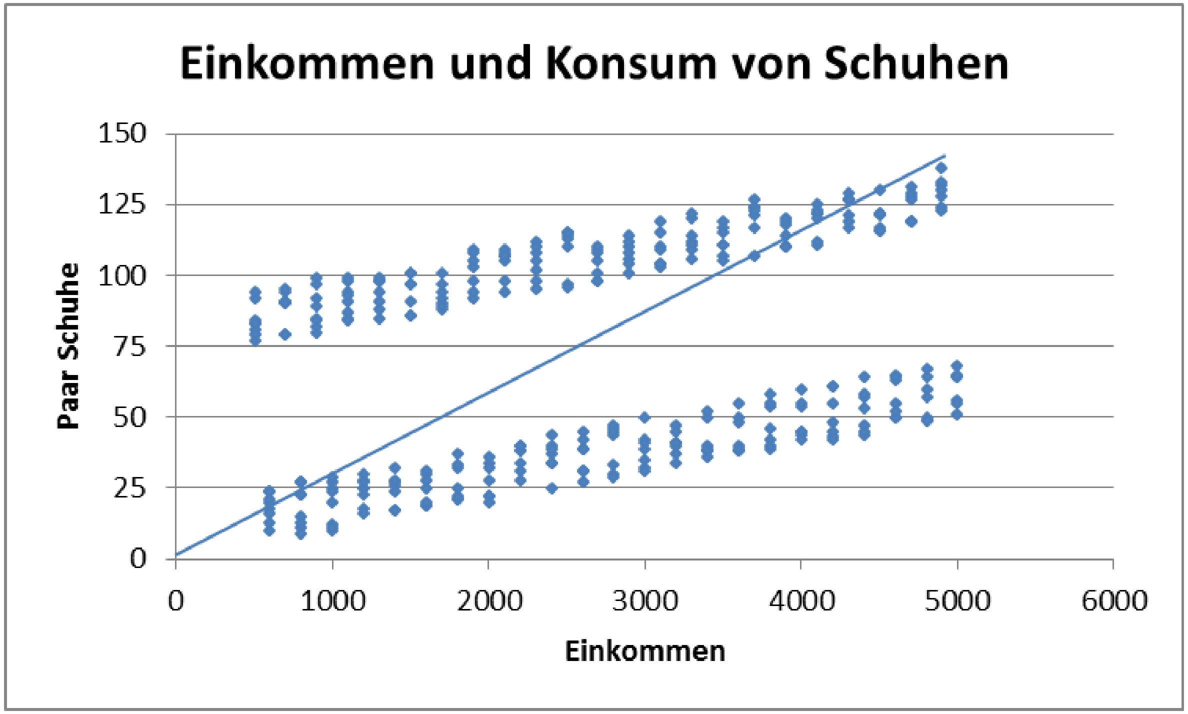
UV	Regressions-koeffizient	p-Wert
Einkommen	0,023	0,000

Interpretation:
b_1=0,023 → von jedem Euro werden 0,023 Cent für Schuhe ausgeben → p-Wert: H_1 kann mit großer Sicherheit angenommen werden → obwohl statistisch signifikant von 0 verschieden ist der geschätzte Regressionskoeffizient mehr also doppelt so groß wie tatsächlich (0,10)

Testen von Hypothesen über Regressionskoeffizienten

Multivariate Regressionsanalyse

- Hypothesenformulierung nach inkorrektem Modell (Vernachlässigung des Geschlechtseffekts):
  - Einkommen H_0: $\beta_1 = 0{,}00$ und H_1: $\beta_1 \neq 0{,}00$



Schlussfolgerung: über ein Schätzmodell muss intensiv nachgedacht werden. Alle relevanten Einflussfaktoren spezifizieren→ ansonsten Über- oder Unterschätzung der Koeffizienten