Wirtschaftsmathematik: Funktionen einer Variablen

Thilo Klein
thilo@klein.uk

Gliederung

Definition

- Eine Funktion ist eine eindeutige Zuordnung. Jedem Element einer Menge (der Definitionsmenge D) wird eindeutig ein Element einer anderen Menge (der Zielmenge Z) zugeordnet.
- Die zweite Variable $y \in Z$ hängt dabei von der ersten Variablen $x \in D$ ab. Man kann daher auch sagen, *y ist eine Funktion von x*.
- Hier werden nur reellwertige Funktionen betrachtet. Sowohl Definitionsbereich D als auch Zielbereich Z sind reelle Zahlen.
- Dann gilt mit $D \subset R$ (Symbol $\subset$ für *Teilmenge*): Eine reellwertige Funktion ist eine Abbildung, die jedem Element von D (Definitionsbereich) genau ein Element aus R (Zielbereich) zuordnet. Schreibweise:

$$\boxed{f:\ D \to R; \qquad y = f(x) \text{ als Zuordnungsvorschrift}}$$

Anwendungen

- Zahlreiche ökonomische Sachverhalte lassen sich als Funktionen darstellen:
  - Einkommensteuertarif: Durch den Einkommensteuertarif wird jedem (zu versteuernden) Einkommen eindeutig ein Steuerbetrag zugeordnet.
  - Nachfragefunktion: Die Nachfragefunktion nach z.B. Kaffee ordnet jedem Kaffeepreis p eine (eindeutige) Nachfragemenge $N(p)$ zu.
  - Kostenfunktion: Die Kostenfunktion $K(x)$ ordnet jeder Produktionsmenge x die minimalen Kosten zu.
  - Erlösfunktion: Die Erlös- oder Umsatzfunktion $E(x)$ ordnet jeder Absatzmenge x den Erlös zu.
  - Gewinnfunktion: $G(x) = E(x) - K(x)$.
  - ...

$\longrightarrow$ **Mikroökonomik, Kostenrechnung, Marketing**

Beispiele

- Lineare Funktion:

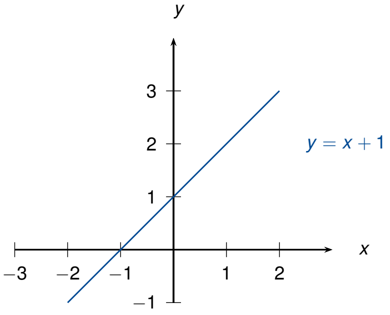
$$f(x) = x + 1 \qquad : D = R$$
$$(\text{oder: } y = x + 1)$$

- Hyperbel-Funktion:

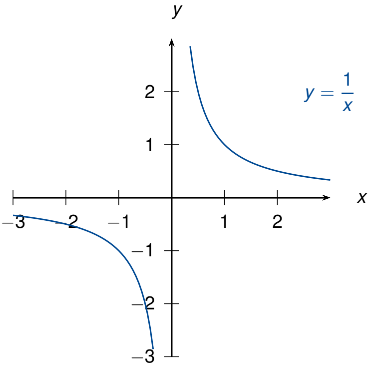
$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad : D = R \setminus \{0\}$$

- Die angegebenen Definitionsbereiche sind die maximal möglichen. In ökonomischen Anwendungen wird der Definitionsbereich häufig weiter eingeschränkt. Beispiel: Wenn $f(x) = x + 1$ eine Kostenfunktion in Abhängigkeit von der Menge x darstellt, muss $x \geqq 0$ gelten: $D = R_+$, wobei $R_+ = \{x \in R \mid x \geqq 0\}$ (in Worten: R_+ *ist die Menge aller Zahlen* x *aus* R*, für die gilt* $x \geqq 0$).

Beispiele



$D = R$



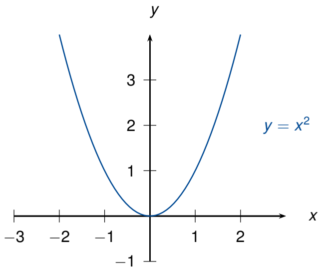
$D = R \setminus \{0\}$

Wertetabelle

Einen ersten Eindruck über den Verlauf von Funktionen kann man anhand von Wertetabellen erhalten.

Beispiel: $y = x^2$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9



Fragen: Wie lautet der Definitionsbereich von $y = x^2$! Erstellen Sie anhand von Wertetabellen auch Skizzen von $y = 2x$, $y = -2x$, $y = 2x^2$, $y = -2x^2$, $y = 2x^3$ und $y = -2x^3$ und geben Sie jeweils D an!

Ökonomische Bedeutung

- Funktionen stellen Beziehungen zwischen einer unabhängigen Variablen (hier: x) und einer abhängigen Variablen (hier: y) her.
- Die Analyse solcher Beziehungen gehört zu den Hauptaufgaben der Wirtschaftswissenschaften. Beispiele: Wie beeinflusst der Preis (unabhängige Variable) den Absatz (abhängige Variable) eines Produktes? Wie beeinflusst das Volkseinkommen den gesamtwirtschaftlichen Konsum?
- Als sinnvoll erweist sich eine abgeänderte Symbolik. Statt $y = f(x)$ kann es z.B. zweckmäßig sein, Ausdrücke zu verwenden wie

$$x = x(p) \qquad \text{(Nachfragemenge } x \text{ als Funktion des Preises } p\text{)}$$

oder

$$C = C(Y) \qquad \text{(Konsum } C \text{ als Funktion des Volkseinkommens } Y\text{).}$$

Ökonomische Bedeutung

- Es ist naheliegend, dass die Nachfrage x nach einem Gut, zum Beispiel einem bestimmten Automobil, nicht nur vom Preis p dieses Gutes, sondern auch vom Preis anderer Güter (Kraftstoff) und vom Einkommen der einzelnen Konsumenten abhängt.
- In den Wirtschaftswissenschaften spielen daher auch Funktionen eine wichtige Rolle, die nicht nur von einer, sondern von mehreren Variablen abhängen.
- Beispiel: Die Nachfragefunktion nach einem Gut 1 kann vom Preis p_1 dieses Gutes, vom Preis p_2 eines anderen Gutes und vom Einkommen y abhängen:

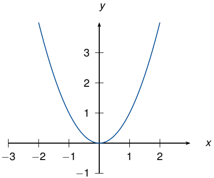
$$x_1 = x_1(p_1, p_2, y)$$

- Funktionen mehrerer Variablen werden später betrachtet.

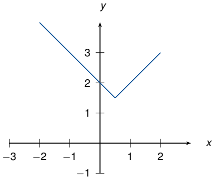
Gliederung

Stetigkeit

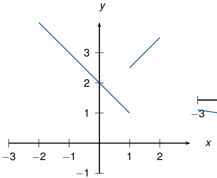
Eine Funktion $f : D \to R$ ist anschaulich gesprochen stetig an der Stelle $x_0 \in D$, wenn ihre graphische Darstellung dort keine Lücke aufweist. (Genauer, wenn für $\Delta x > 0$ gilt $\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 - \Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$.)



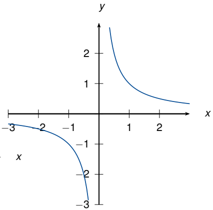
stetig



stetig



unstetig bei $x = 1$



n. def. bei $x = 0$

Übung: Ordnen Sie die folgenden Funktionen den Abbildungen zu:

$$y = 1/x, \quad y = x^2, \quad y = \begin{cases} -x+2 & : \; x < 0{,}5 \\ x+1 & : \; 0{,}5 \leqq x \end{cases}, \quad y = \begin{cases} -x+2 & : \; x < 1 \\ x+1{,}5 & : \; 1 \leqq x \end{cases}$$

Nullstellensatz: Eine stetige Funktion, die zwischen zwei Stellen a und b das Vorzeichen wechselt, hat zwischen a und b mindestens eine Nullstelle.

Monotonie und Beschränktheit

- Eine Funktion f verläuft monoton steigend (streng monoton steigend) auf einem Intervall $I \subset D$, wenn für alle $x_1, x_2 \in I$ gilt: Aus $x_1 > x_2$ folgt $f(x_1) \geqq f(x_2)$ (aus $x_1 > x_2$ folgt $f(x_1) > f(x_2)$).
- Anschaulich: Eine Funktion ist monoton steigend, wenn ihre Funktionswerte mit steigenden x-Werten nicht kleiner werden, und streng monoton steigend, wenn die Funktionswerte größer werden.
- Eine Funktion f verläuft monoton fallend (streng monoton fallend) auf einem Intervall $I \subset D$, wenn für alle $x_1, x_2 \in I$ gilt: Aus $x_1 > x_2$ folgt $f(x_1) \leqq f(x_2)$ (aus $x_1 > x_2$ folgt $f(x_1) < f(x_2)$).
- Anschaulich: Eine Funktion ist monoton fallend, wenn ihre Funktionswerte mit steigenden x-Werten nicht größer werden, und streng monoton fallend, wenn die Funktionswerte kleiner werden.
- Eine Funktion f ist nach oben (unten) beschränkt, wenn es eine Zahl c gibt mit $f(x) \leqq (\geqq) c$ für alle $x \in D$.

Extrem- und Wendestellen, Krümmung

Eine reelle Funktion $f: D \to R$ hat

- eine Nullstelle x_0, wenn $f(x_0) = 0$,
- ein globales Maximum $x_{\max}$, wenn $f(x_{\max}) \geqq f(x)$ für alle $x \in D$,
- eine globales Minimum $x_{\min}$, wenn $f(x_{\min}) \leqq f(x)$ für alle $x \in D$,
- ein lokales Maximum $x_{\max}$, wenn $f(x_{\max}) \geqq f(x)$ für alle x in einer Umgebung um $x_{\max}$,
- ein lokales Minimum $x_{\min}$, wenn $f(x_{\min}) \leqq f(x)$ für alle x einer Umgebung um $x_{\min}$.

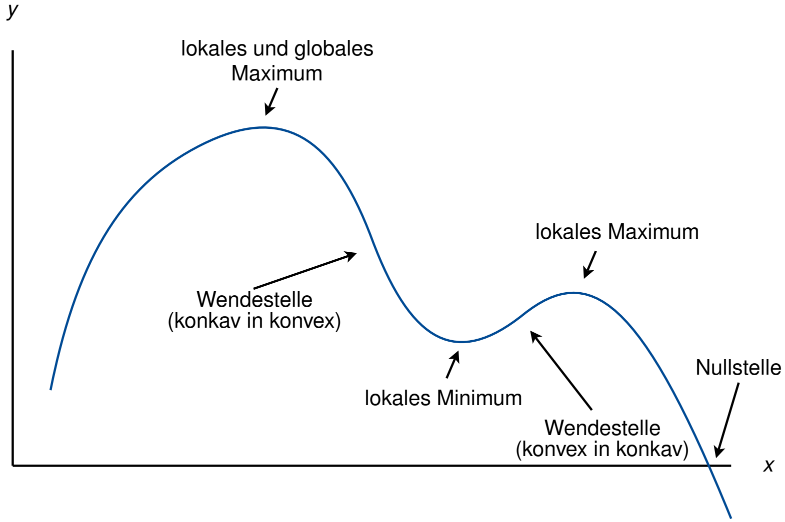
Oberbegriffe für Maxima und Minima: Extremstellen oder Optimalstellen; die Punkte heißen auch Hoch- und Tiefpunkte.

Die Funktion heißt

- streng konvex oder linksgekrümmt, wenn ihre Steigung zunimmt,
- streng konkav oder rechtsgekrümmt, wenn ihre Steigung abnimmt.

Sie hat eine Wendestelle, wenn sich ihre Krümmung von konkav in konvex oder umgekehrt ändert.

Extrem- und Wendestellen, Krümmung



Gliederung

Lineare Funktionen

- Die Funktion $f: \ R \to R$ mit

$$f(x) = mx + b$$

  heißt lineare Funktion oder genauer linear-affine Funktion.
- Lineare Funktionen sind stetig auf R. Ihr Bild ist eine Gerade.
- m ist die Steigung der Funktion und b der y-Achsenabschnitt.

Die Steigung der linearen Funktion

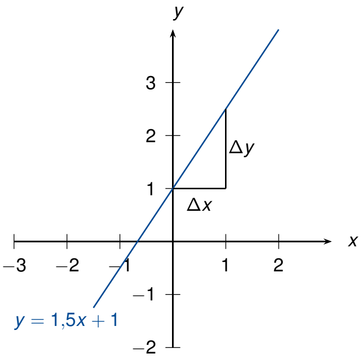
Die Steigung ist

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2{,}5 - 1}{1 - 0} = 1{,}5$$

Allgemeiner gilt:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Eine lineare Funktion kann daher stets aufgrund zweier Punkte ermittelt werden.



Die Steigung der linearen Funktion

- Beispiel: Gegeben sind die Punkte $P_1(-1,1)$ und $P_2(3,2)$. Gesucht ist die lineare Funktion durch diese Punkte.
- Lösung:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-1}{3-(-1)} = \frac{1}{4}.$$

- Einsetzen in $y = mx + b$ liefert

$$y = \frac{1}{4}x + b.$$

- Einsetzen des Punktes P_2 liefert

$$2 = \frac{1}{4} \cdot 3 + b \qquad \Rightarrow \qquad b = \frac{5}{4}.$$

- Also lautet die gesuchte Geradengleichung:

$$y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$$

Änderung des Funktionswertes

- Gegeben ist die Gerade $y = 1{,}5x + 1$. Frage: Wie ändert sich der Funktionswert, wenn x um eine Einheit steigt?
- Beispiel: $x_0 = 2$ steigt um $\Delta x = 1$ auf 3. Dann ändert sich der Funktionswert um

  $$\Delta y = f(3) - f(2) = 5{,}5 - 4 = 1{,}5,$$

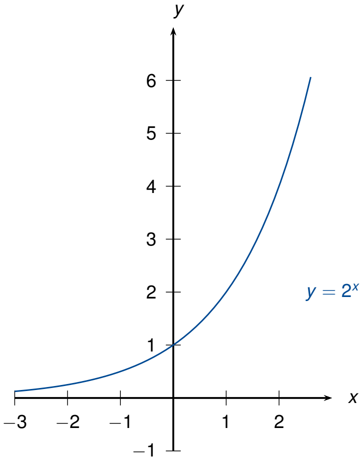
  also um die Steigung $m = 1{,}5$.
- Die Steigung der linearen Funktion gibt also an, um wieviel sich der y-Wert ändert, wenn der x-Wert um $\Delta x = 1$ erhöht wird.
- Für Änderungen $\Delta x \neq 1$ gilt allgemein (folgt direkt aus $m = \Delta y / \Delta x$):

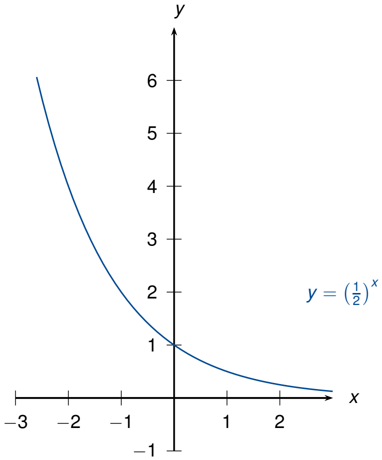
  $$\Delta y = m\Delta x$$

Exponentialfunktion

- Die Funktion $f: \; R \to R$ mit
$$f(x) = ab^x, \qquad a \in R, \; b \in R_{++}$$
heißt Exponentialfunktion.
- Wegen $f(0) = ab^0 = a$ gilt $f(x) = f(0)b^x$.
- Da mit Exponentialfunktionen häufig Wachstums- oder Zerfallsvorgänge in der Zeit modelliert werden, wird meist die Variable t (time) statt x verwendet:
$$f(t) = f(0)b^t$$
- Beispiel: Ersetzt man in der Leibnizschen Zinseszinsformel $K_n = K_0 \cdot (1+i)^n$ die Variablenbezeichnungen gemäß $K_n = y$, $K_0 = a$, $1 + i = b$ und $n = x$, so erkennt man, dass es sich um eine Exponentialfunktion $y = ab^x$ handelt.

Exponentialfunktion

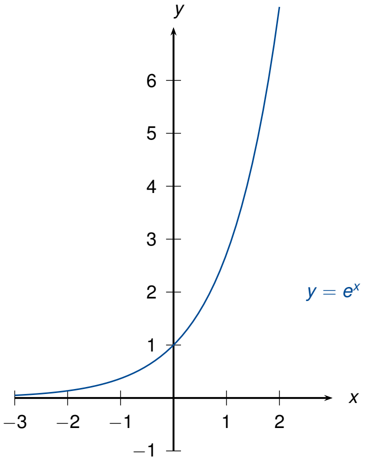


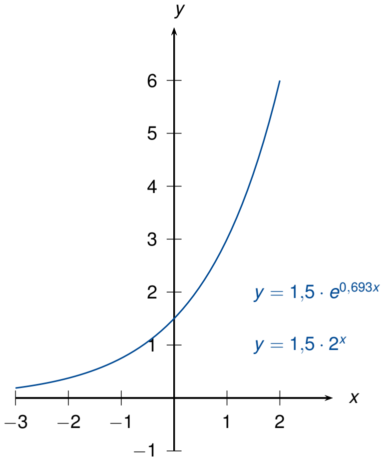


Exponentialfunktion

- Die wichtigste Basis ist die Eulersche Zahl $e = 2{,}71828182845\ldots$.
- Die Funktion
$$f(x) = e^x$$
wird auch als natürliche Exponentialfunktion bezeichnet.
- Man kann jede Exponentialfunktion in eine Exponentialfunktion mit der Basis e umformen.
- Beispiel: Gegeben ist $y = 1{,}5 \cdot 2^x$. Setzt man
$$2^x = e^{\rho x},$$
so muss lediglich $\rho = \ln 2 \approx 0{,}693$ gewählt werden, um zu erreichen, dass $y = 1{,}5 \cdot 2^x$ und $y = 1{,}5 \cdot e^{0{,}693x}$ dieselbe Funktion angeben.

Exponentialfunktion





Polynome

- Die Funktion $f: \ R \to R$ mit

$$f(x) = x^3 - 9x^2 - 16x + 60$$

  ist ein Beispiel für ein Polynom oder eine ganzrationale Funktion dritten Grades.
- Polynome sind stetig auf R. Summen, Differenzen und Produkte von Polynomen sind wieder Polynome.
- Ist x_1 eine Nullstelle eines Polynoms n-ten Grades (also $f(x_1) = 0$), so ist $f(x)/(x - x_1)$ ein Polynom $(n - 1)$-ten Grades.
- Ein Polynom vom Grade n hat höchstens n reelle Nullstellen.

Nullstellen und Polynomdivision

- Beispiel: Gesucht sind die Nullstellen von $f(x) = x^3 - 9x^2 - 16x + 60$.
- Da hier nicht auf numerische Verfahren eingegangen wird, muss für $n = 3$ in der Regel eine Nullstelle durch Ausprobieren gefunden werden.
- Eine ganzzahlige Nullstelle muss Teiler des absoluten Gliedes a_0 sein.
- Hier: $f(2) = 0$, also $x_1 = 2$ als erste Nullstelle.
- Nun wird eine Polynomdivision durchgeführt (Hinweis: in der Polynomdivision werden die Ergebnisse jeweils schon mit -1 multipliziert):

$$
\begin{array}{l}
\left(\quad x^3 - 9x^2 - 16x + 60\right) : \left(x - 2\right) = x^2 - 7x - 30 \\
\underline{-x^3 + 2x^2} \\
\qquad\quad -7x^2 - 16x \\
\qquad\quad \underline{7x^2 - 14x} \\
\qquad\qquad\qquad -30x + 60 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{30x - 60} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Nullstellen und Polynomdivision

- Multiplikation von

$$(x^3 - 9x^2 - 16x + 60) : (x - 2) = x^2 - 7x - 30$$

mit $(x - 2)$ liefert:

$$f(x) = x^3 - 9x^2 - 16x + 60 = (x - 2) \cdot (x^2 - 7x - 30)$$

- $f(x) = 0$, wenn entweder $x - 2 = 0$ (also $x = 2$) oder $x^2 - 7x - 30 = 0$.
- Die weiteren Nullstellen können also durch Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 - 7x - 30 = 0$ gefunden werden.
- Mit der p-q-Formel erhält man:

$$x_{1,2} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 + 30} = 3{,}5 \pm \sqrt{12{,}25 + 30},$$

also $x_2 = 10$ und $x_3 = -3$.

Wiederholung: Quadratische Gleichungen

- Eine quadratische Gleichung kann stets in diese Form gebracht werden (bei $ax^2 + bx + c = 0$ zuerst durch a dividieren):

$$\boxed{x^2 + px + q = 0}$$

- Lösung (p-q-Formel):

$$\boxed{x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

Zerlegung in Linearfaktoren

- Ebenso wie $f(x)$ gemäß

$$f(x) = x^3 - 9x^2 - 16x + 60 = (x-2) \cdot (x^2 - 7x - 30)$$

  in zwei Faktoren zerlegt werden konnte, kann mit den gefunden Nullstellen das quadratische Restpolynom zerlegt werden:

$$x^2 - 7x - 30 = (x-10)(x+3)$$

- Damit folgt für das gesamte Polynom die Zerlegung in Linearfaktoren:

$$f(x) = x^3 - 9x^2 - 16x + 60 = (x-2) \cdot (x-10) \cdot (x+3)$$

- Anhand dieser Darstellung sind die Nullstellen direkt ablesbar.

Graphische Darstellung

Die betrachtete Funktion dritten Grades wird hier in verzerrter Form dargestellt.