Wirtschaftsmathematik: Lineare Algebra

Thilo Klein
thilo@klein.uk

Gliederung

Gegenstand

Fragestellungen der Linearen Algebra:

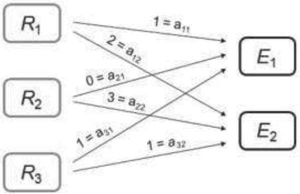
- Wie kann ich größere Datenmengen in strukturierter Form darstellen?
- Tabellarische Daten (Excel) sind wichtiger Bestandteil vieler betriebs- und volkswirtschaftlicher Fragestellungen.
- Wie kann ich lineare Beziehungen zwischen Produktionsprozessen oder Bilanzbeziehungen beschreiben?
- Wie kann ich Teilbedarfsmengen oder interne Leistungen verrechnen?

$\longrightarrow$ **Beschaffung / Fertigung, Unternehmenssteuerung**

Einführungsbeispiel

- Eine Unternehmung stellt mit Hilfe der Produktionsfaktoren R_1, R_2, R_3 zwei Produkte E_1 und E_2 her.
- Zur Produktion für jede Mengeneinheit e_j von E_j ($j = 1, 2$) werden a_{ij} Mengeneinheiten r_i von R_i ($i = 1, 2, 3$) verbraucht (die a_{ij} heißen Inputkoeffizienten). Die graphische Darstellung heißt Gozintograph.

		Verbrauch für 1 ME von E1	E2
von ME der Produktions-faktoren	R1	1 (a_{11})	2 (a_{12})
	R2	0 (a_{21})	3 (a_{22})
	R3	1 (a_{31})	1 (a_{32})



- Welche Mengen r_i von den Produktionsfaktoren R_i werden zur Herstellung der Mengen $e_1 = 10$ und $e_2 = 5$ der Endprodukte E_j benötigt?

Einführungsbeispiel

Lösung:

- In Gleichungsform:

$$\begin{aligned} r_1 &= a_{11} \cdot e_1 + a_{12} \cdot e_2 = 1 \cdot 10 + 2 \cdot 5 = 20 \\ r_2 &= a_{21} \cdot e_1 + a_{22} \cdot e_2 = 0 \cdot 10 + 3 \cdot 5 = 15 \\ r_3 &= a_{31} \cdot e_1 + a_{32} \cdot e_2 = 1 \cdot 10 + 1 \cdot 5 = 15 \end{aligned}$$

- In Matrixform:

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Matrizen

Eine $m \times n$-Matrix A mit m Zeilen und n Spalten (kurz: $A_{m,n}$) ist ein geordnetes, rechteckiges Schema von $m \cdot n$ Symbolen oder Zahlen.

$$A_{m,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & a_{ij} & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- $i =$ Zeilenindex, $j =$ Spaltenindex, a_{ij} Element oder Komponente der Matrix A in der i-ten Zeile und j-ten Spalte.
- Zwei Matrizen sind gleich, wenn sie gleiche Größe haben und alle Ihre Elemente übereinstimmen.
- Die grundlegenden Operationen mit Matrizen werden anhand von Beispielen erläutert.

Addition und Subtraktion

- Zwei Matrizen A und B können addiert bzw. subtrahiert werden, wenn sie bzgl. der Anzahl der Zeilen und Spalten jeweils übereinstimmen, indem jeweils die Einträge an den gleichen Stellen (i, j) addiert bzw. subtrahiert werden.
- Beispiele:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Multiplikation mit einem Skalar

- Als Skalar bezeichnet man in der linearen Algebra zur Unterscheidung von Matrizen (und Vektoren, siehe unten) eine reelle Zahl.
- Eine Matrix A wird mit einem Skalar $\lambda \in R$ multipliziert, indem jedes Element a_{ij} mit λ multipliziert wird.
- Beispiel:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Transposition und Vektoren

- Die Transponierte einer Matrix A ist die Matrix A', die aus A durch die Vertauschung von Zeilen und Spalten entsteht.
- Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$$

- Ein Vektor (oder (Spaltenvektor) $\mathbf{x}$ ist eine Matrix mit nur einer Spalte. Transponiert man ihn, so erhält man einen Zeilenvektor. Umgekehrt wird ein Zeilenvektor durch Transposition zum Spaltenvektor.
- Beispiel:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{zum Platzsparen: } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}',$$

oder auch komma- oder semikolongetrennt $\mathbf{x} = (2, 1)'$.

Multiplikation zweier Matrizen

- Zwei Matrizen A und B können miteinander multipliziert werden, wenn die Anzahl der Spalten der ersten Matrix gleich der Anzahl der Zeilen der zweiten Matrix ist.
- Zunächst wird der einfachste Fall der Multiplikation zweier Vektoren $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)'$ und $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)'$ betrachtet.
- Das Skalarprodukt dieser Vektoren ist definiert als

$$\mathbf{x}'\mathbf{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

- Andere übliche Schreibweisen: $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$, $\mathbf{x}^T\mathbf{y}$.

Multiplikation zweier Matrizen

- Das Skalarprodukt ist nur definiert, wenn beide Vektoren die gleiche Dimension haben, wobei der Zeilenvektor (eine $(1 \times n)$-Matrix) vorne und der Spaltenvektor (eine $(n \times 1)$-Matrix) hinten steht.
- Das Ergebnis ist eine (1×1)-Matrix, also ein Skalar.
- Beispiel: $\mathbf{x} = (2, 1, 3)'$ und $\mathbf{y} = (10, 12, 11)'$:

$$\mathbf{x}'\mathbf{y} = 2 \cdot 10 + 1 \cdot 12 + 3 \cdot 11 = 65$$

- Matrizenmultiplikation: Bilde sämtliche Skalarprodukte der Zeilenvektoren der vorderen Matrix mit den Spaltenvektoren der hinteren Matrix; in der Ergebnismatrix steht an der Stelle (i, k) das Skalarprodukt des i-ten Zeilenvektors der vorderen Matrix mit der k-ten Spalte der hinteren Matrix.
- Das Einführungsbeispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 10 + 2 \cdot 5 \\ 0 \cdot 10 + 3 \cdot 5 \\ 1 \cdot 10 + 1 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Multiplikation zweier Matrizen

- Für allgemeine Matrizen ist also der Ausdruck $A_{m,n} \cdot B_{n,r}$ definiert, der Ausdruck $B_{n,r} \cdot A_{m,n}$ dagegen nicht. Für das Ergebnis gilt:

$$A_{m,n} \cdot B_{n,r} = C_{m,r}$$

- Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}_{3,2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}_{2,2} = \begin{pmatrix} 1+2 & 4+1 \\ 3+0 & 12+0 \\ 4+4 & 16+2 \end{pmatrix}_{3,2} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 12 \\ 8 & 18 \end{pmatrix}_{3,2}$$

- Die folgende Matrizenmultiplikation ist dagegen nicht definiert:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}_{2,2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}_{3,2}$$

Falksches Schema

- Das folgende Multiplikationsschema kann am Anfang helfen. Links unten steht die erste Matrix A, die mit der Matrix B rechts oben zeilen- mal spaltenweise multipliziert wird.
- Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4,2} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}_{2,3}$$

$$\begin{array}{cc|ccc} & & 1 & 2 & 4 \\ & & -1 & 2 & -2 \\ \hline 2 & 1 & 1 & 6 & 6 \\ 1 & -2 & 3 & -2 & 8 \\ -1 & 2 & -3 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 \end{array}$$

Rechenregeln

Assoziativgesetze:

$$(A+B)+C = A+(B+C)$$
$$(AB)C = A(BC)$$

Kommutativgesetz:
(nur für Addition)

$$A+B = B+A$$

Distributivgesetze:

$$A(B+C) = AB+AC$$
$$(A+B)C = AC+BC$$

Transposition:

$$(A+B)' = A'+B'$$
$$(A-B)' = A'-B'$$
$$(A')' = A$$
$$(rA)' = rA'$$
$$(AB)' = B'A'$$

Spezielle Matrizen

Quadratische Matrix:	$n = m$
Diagonalmatrix:	$n = m$, $a_{ij} = 0$ für $i \neq j$
symmetrische Matrix:	$A = A'$
obere Dreiecksmatrix:	$a_{ij} = 0$ für alle $i > j$
untere Dreiecksmatrix:	$a_{ij} = 0$ für alle $i < j$
Einsmatrix:	$a_{ij} = 1$ für alle i, j
Nullmatrix O:	$a_{ij} = 0$ für alle i, j
Einheitsmatrix $I_{n,n}$:	$a_{ij} = 1$ für $i = j$, $a_{ij} = 0$ für $i \neq j$

Spezielle Matrizen

- Die Nullmatrix ist das neutrale Element der Addition:

$$O_{n,n} + A_{n,n} = A_{n,n} + O_{n,n} = A_{n,n}$$

- Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Die Einheitsmatrix ist das neutrale Element der Multiplikation:

$$I_{n,n}A_{n,n} = A_{n,n}I_{n,n} = A_{n,n}$$

- Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Gliederung

Einführungsbeispiel

- Einführungsbeispiel aus dem vorangehenden Abschnitt:

		Verbrauch für 1 ME von E1	E2
von ME der	R1	1 (a_{11})	2 (a_{12})
Produktions-	R2	0 (a_{21})	3 (a_{22})
faktoren	R3	1 (a_{31})	1 (a_{32})

- Um $e_1 = 10$ und $e_2 = 5$ Einheiten zu produzieren, sind folgende Rohstoffmengen erforderlich: $(r_1, r_2, r_3)' = (20, 15, 15)'$.
- Wie hoch ist der Gewinn G, wenn die Rohstoffpreise $\mathbf{p}_r = (0{,}5; 1; 2)'$ und die Verkaufspreise der Endprodukte $\mathbf{p} = (10; 20)'$ betragen?

$$
\begin{aligned}
G &= \text{Erlös} - \text{Kosten} = \mathbf{p}'\mathbf{e} - \mathbf{p}_r'\mathbf{r} \\
&= \begin{pmatrix} 10 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 15 \end{pmatrix} \\
&= 10 \cdot 10 + 20 \cdot 5 - 0{,}5 \cdot 20 - 1 \cdot 15 - 2 \cdot 15 = 145
\end{aligned}
$$

Bedarfsermittlung von Rohstoffen

- Der folgende Abschnitt wird anhand eines weiteren Beispiels behandelt. Die Tabelle gibt wieder die Inputkoeffizienten des linearen Produktionsprozesses an:

	E_1	E_2
R_1	3	7
R_2	2	4
R_3	5	2

- Die Zeilen der Tabelle geben die Verwendungsnachweise an, die Spalten die Stücklisten.
- Die Tabelle wird als Matrix A geschrieben:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Bedarfsermittlung von Rohstoffen

- Gesamtbedarf an Rohstoffen r_1, r_2 und r_3 für die Produktionsmengen e_1 und e_2:

$$\begin{aligned} r_1 &= 3e_1 + 7e_2 \\ r_2 &= 2e_1 + 4e_2 \\ r_3 &= 5e_1 + 2e_2 \end{aligned}$$

- In Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

- Für $e_1 = 40$ und $e_2 = 70$ ergibt sich folgender Rohstoffbedarf:

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40 \\ 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 610 \\ 360 \\ 340 \end{pmatrix}$$

Bedarfsermittlung von Rohstoffen

- Wenn die Preise für Endprodukte und Rohstoffe gegeben sind, kann auch der Gewinn berechnet werden.
- Für das Beispiel gelte: $p_1 = 200$, $p_2 = 300$, $p_{r_1} = 10$, $p_{r_2} = 20$, $p_{r_3} = 10$. Zusätzlich fallen Fixkosten in Höhe von 10.000 Euro an.
- Damit folgt für den Gewinn, wenn $e_1 = 40$ und $e_2 = 70$ Einheiten abgesetzt werden können:

$$G = \underbrace{200 \cdot 40 + 300 \cdot 70}_{\text{Erlös (Umsatz)}} - \underbrace{(10 \cdot 610 + 20 \cdot 360 + 10 \cdot 340 + 10.000)}_{\text{Kosten}}$$

$$= 29.000 - 26.700 = 2.300$$

Mehrstufige lineare Produktionsprozesse

- Nun werden aus den drei Rohstoffen zunächst drei Zwischenprodukte (Z_i) und aus diesen Zwischenprodukten die beiden Endprodukte erzeugt.

	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	2	1	1
R_2	3	3	4
R_3	4	5	2

	E_1	E_2
Z_1	6	2
Z_2	4	1
Z_3	3	7

- Multipliziert man den Vektor der Endprodukterzeugung mit der zweiten Matrix von links, so erhält man den Bedarf an Zwischenprodukten $(z_1, z_2, z_3)'$. Multipliziert man den Bedarf an Zwischenprodukten von links mit der ersten Matrix, folgt daraus der Bedarf an Rohstoffen.

Mehrstufige lineare Produktionsprozesse

- Damit gilt:

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}}_{(z_1, z_2, z_3)'}$$

- Multipliziert man die beiden Matrizen rechts aus, so ergibt sich die Bedarfsmatrix für Rohstoffe des Gesamtprozesses. Will man etwa $e_1 = 30$ und $e_2 = 40$ Einheiten produzieren, so folgt für den Rohstoffbedarf:

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 12 \\ 42 & 37 \\ 50 & 27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.050 \\ 2.740 \\ 2.580 \end{pmatrix}$$

- Ergänzungsfrage: Wieviel wird von den einzelnen Zwischenprodukten jeweils produziert?

Mehrstufige lineare Produktionsprozesse

- Falls die Rohstoffe nicht nur bei der Erstellung der Zwischenprodukte, sondern auch direkt bei der Endprodukterzeugung benötigt werden, muss dies zusätzlich berücksichtigt werden.

	E_1	E_2
R_1	2	0
R_2	0	3
R_3	0	0

- $$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 120 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Der Gesamtbedarf ist also $(1.050, 2.740, 2.580)' + (60, 120, 0)' = (1.110, 2.860, 2.580)'$.

Gliederung

Wiederholung Schulmathematik: Lösungsmethoden

Beispiel:

$$2x_1 + 3x_2 = 7 \qquad \text{(I)}$$
$$x_1 - x_2 = 1 \qquad \text{(II)}$$

- Einsetzungsverfahren: Aus (II): $x_1 = 1 + x_2$, einsetzen in (I): $2(1 + x_2) + 3x_2 = 7$, also $x_2 = 1$, einsetzen in (II): $x_1 = 2$.
- Gleichsetzungsverfahren: (I) und (II) nach x_1 auflösen:

$$x_1 = 3{,}5 - 1{,}5x_2$$
$$x_1 = 1 + x_2$$

Gleichsetzen: $3{,}5 - 1{,}5x_2 = 1 + x_2$, also $x_2 = 1$, einsetzen in (II): $x_1 = 2$.

Wiederholung Schulmathematik: Lösungsmethoden

- Additionsverfahren: Multiplikation von (II) mit -2 und anschließende Addition beider Gleichungen:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 7 && \text{(I)} \\ -2x_1 + 2x_2 &= -2 && \text{(II')} \\ 5x_2 &= 5, && \text{(I)+(II')} \end{aligned}$$

also $x_2 = 1$. Einsetzen in (II) liefert wieder $x_1 = 2$.

Fazit: Das Gleichungssystem (I), (II) hat die Lösungsmenge $L = \{(2; 1)\}$.

Lösungsverhalten

- (I) und (II) stellen für sich genommen Geradengleichungen dar:

$$2x_1 + 3x_2 = 7 \Rightarrow x_2 = -\frac{2}{3}x_1 + \frac{7}{3}$$
$$x_1 - x_2 = 1 \Rightarrow x_2 = x_1 - 1$$

- Im Beispiel schneiden sich beide Geraden genau einmal: eindeutige Lösung $L = \{(2; 1)\}$.
- Durch $x_1 - x_2 = 1$ und $2x_1 - 2x_2 = 2$ sind zwei identische Geraden gegeben: unendlich viele Lösungen $L = \{(x_1, x_2) \in R^2 \mid x_2 = x_1 - 1\}$.
- Durch $x_1 - x_2 = 1$ und $2x_1 - 2x_2 = 4$ sind zwei parallele Geraden gegeben: keine Lösung $L = \emptyset$.

Lösungsverhalten

- Lineare Gleichungssysteme, auch mit mehr als zwei Variablen und Gleichungen, haben generell entweder eine eindeutige, keine oder unendlich viele Lösungen.
  - Wenn mehr Gleichungen als Variablen vorhanden sind, wird es in der Regel keine Lösung geben.
  - Wenn mehr Variablen als Gleichungen vorhanden sind, wird es in der Regel unendlich viele Lösungen geben.
  - Wenn die Anzahl der Variablen und Gleichungen übereinstimmt, wird es in der Regel eine eindeutige Lösung geben.
- Genauere Bedingungen finden Sie in der Literatur. Später wird kurz das Rangkriterium dargestellt.

Matrix-Darstellung

- Aus den Koeffizienten des Gleichungssystems (I), (II) kann eine Matrix geformt werden:
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
- Die beiden Variablen und die rechte Seite des Gleichungssystems lassen sich als Vektoren darstellen:
$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$
- Damit kann das Gleichungssystem (I), (II) matriziell folgendermaßen dargestellt werden:
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{oder kurz:} \qquad A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Gaußscher Algorithmus

- Das Additionsverfahren wird nun zum Gaußschen Algorithmus erweitert.
- Erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$\hat{A} = (A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

- Folgende elementaren Zeilenoperationen lassen die Lösungsmenge des Gleichungssystems unverändert:
  - Vertauschen zweier Zeilen,
  - Multiplikation einer Zeile mit einer reellen Zahl außer Null,
  - Addition einer Zeile zu einer anderen Zeile.
  - Sie dürfen keine Zahl zu einer Gleichung addieren!

Gaußscher Algorithmus

- Ziel der Umformungen: Aus A wird eine Einheitsmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Aus **b** wird dann der Lösungsvektor.
-

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{I:2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1{,}5 & 3{,}5 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[II-I]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1{,}5 & 3{,}5 \\ 0 & -2{,}5 & -2{,}5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[II:(-2{,}5)]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1{,}5 & 3{,}5 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{I-1{,}5II} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

- Ergebnis in Gleichungsform:

$$1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 2$$
$$0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 = 1$$

  also $x_1 = 2$ und $x_2 = 1$.
- Hinweis: Als Zwischenlösung ergibt sich die obere Dreiecksform der Matrix A.

Gaußscher Algorithmus mit drei Gleichungen

Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 10 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 10 \\ -x_1 + 2x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \hat{A} = (A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 10 \\ 1 & -1 & 1 & 10 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Division I. durch 2, anschließend Subtraktion II.$-$I.:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0{,}5 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 10 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0{,}5 & 0 & 5 \\ 0 & -0{,}5 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Addition III.$+$I.:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0{,}5 & 0 & 5 \\ 0 & -0{,}5 & 1 & 5 \\ 0 & -0{,}5 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

Gaußscher Algorithmus mit drei Gleichungen

Subtraktion III.$-$II.:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0{,}5 & 0 & 5 \\ 0 & -0{,}5 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Division II. durch $-0{,}5$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0{,}5 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Addition II.$+$ 2$\cdot$ III.:

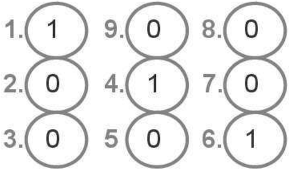
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0{,}5 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Addition I.$+$ 0,5$\cdot$ II.:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right), \quad \text{also} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gaußscher Algorithmus mit drei Gleichungen

Der systematische, *algorithmische* Weg besteht darin, nebenstehende Reihenfolge der Produktion von Nullen und Einsen zu verfolgen.



- In der Regel ist es sinnvoll, sich an diese Reihenfolge zu halten.
- Allerdings kann man manchmal einige Schritte in anderer Reihenfolge machen, um sich Rechenarbeit zu ersparen (siehe vorangehendes Beispiel).
- Der Gaußsche Algorithmus funktioniert auch bei mehr als drei Gleichungen; allerdings wird die Berechnung per Hand schnell sehr aufwendig. Er wird aber auch in Software-Lösungen verwendet.

Das Rangkriterium

- Der Rang einer Matrix ist die Anzahl der Zeilen in einer oberen Dreiecksform, in der jede Zeile mehr führende Nullen hat als die vorausgehende, die nicht ausschließlich aus Nullen bestehen.
- Mit dem Rang kann ein wichtiges Kriterium für die Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme angegeben werden.
- Das Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ hat genau dann für beliebige Werte von $\mathbf{b}$ eine eindeutige Lösung für $\mathbf{x}$, wenn die Anzahl m der Zeilen von A gleich der Anzahl n der Spalten von A gleich dem Rang $\mathrm{Rg}(A)$ von A ist. In diesem Fall heißt A regulär, andernfalls singulär.

Das Rangkriterium

- Beispiel:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2, \\ 2x_1 - x_2 &= 4. \end{aligned}$$

  Mit dem Gaußschen Algorithmus erhält man

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right),$$

  also die eindeutige Lösung $x_1 = 2$, $x_2 = 0$.
- Gemäß dem Rangkriterium muss das so sein, denn $\mathrm{Rg}(A) = 2$.
- Für das Beispiel

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2, \\ 2x_1 + 2x_2 &= 5 \end{aligned}$$

  ist dagegen $\mathrm{Rg}(A) = 1$ und das System hat keine Lösung. Ersetzt man $\mathbf{b} = (2;5)'$ durch $\mathbf{b} = (2;4)'$ oder $\mathbf{b} = (0;0)'$ so erhält man dagegen unendlich viele Lösungen.
- Frage: Wie lässt sich die letzte Aussage nachweisen?

Innerbetriebliche Verrechnungspreise

- Ein wichtiges Anwendungsbeispiel für lineare Gleichungssysteme ist die innerbetriebliche Leistungsverrechnung in der Kostenrechnung.
- Gegeben seien zwei Abteilungen (Kostenstellen), die Leistungen für den Hauptbetrieb und für die jeweils andere Abteilung erbringen (zum Beispiel Kommunikation, Instandhaltung, Verwaltung).
- In jeder Abteilung fallen Primärkosten an (etwa Löhne und Rohstoffe), die gedeckt werden müssen. Zusätzlich sind die Sekundärkosten zu berücksichtigen, die durch Lieferungen anderer Abteilungen entstehen.
- Die innerbetrieblichen Leistungen werden zunächst mengenmäßig erfasst. Um sie verrechnen zu können, müssen sie in Geldeinheiten ausgedrückt werden.
- Da es keine Marktpreise gibt, spricht man von innerbetrieblichen Verrechnungspreisen.

Innerbetriebliche Verrechnungspreise

- Die Abteilung 1 liefere 10 Einheiten an die Abteilung 2 und 20 Einheiten an den Hauptbetrieb (Gesamtproduktion 30). Die primären Kosten der Abteilung 1 betragen 400 Euro.
- Die Abteilung 2 liefere 20 Einheiten an die Abteilung 1 und 30 Einheiten an den Hauptbetrieb (Gesamtproduktion 50). Die primären Kosten der Abteilung 2 betragen 300 Euro.

	A_1	A_2	Hauptbetrieb	Gesamtproduktion
A_1	0	10	20	30
A_2	20	0	30	50
Primärkosten	400	300		

Innerbetriebliche Verrechnungspreise

Zur Ermittlung von Verrechnungspreisen p_1 und p_2 wird gefordert, dass die in einer Abteilung anfallenden Gesamtkosten (Primär- und Sekundärkosten) durch ihre gesamte Produktionsleistung gedeckt werden:

$$\boxed{\text{Primärkosten} + \text{Sekundärkosten} = \text{Wert der Leistung}}$$

- Für das Beispiel bedeutet das:

$$\begin{aligned} 0p_1 + 20p_2 + 400 &= 30p_1 \\ 10p_1 + 0p_2 + 300 &= 50p_2 \end{aligned}$$

- In der Standardform für lineare Gleichungssysteme also:

$$\begin{aligned} 30p_1 - 20p_2 &= 400 \\ -10p_1 + 50p_2 &= 300 \end{aligned}$$

- Lösung: Verrechnungspreise $p_1 = 20$, $p_2 = 10$

Innerbetriebliche Verrechnungspreise

- Die Gesamtkosten der Abteilung 1 sind mit diesen Preisen gleich dem Wert der Gesamtproduktion (der Leistung) der Abteilung 1:

$$20 \cdot 10 + 400 = 30 \cdot 20$$

- Entsprechend für Abteilung 2:

$$10 \cdot 20 + 300 = 50 \cdot 10$$

- Ebenso gilt, dass die Summe der Leistungen der beiden Abteilungen für den Hauptbetrieb genau die gesamten primären Kosten deckt:

$$20 \cdot 20 + 30 \cdot 10 = 400 + 300$$

Quadratische Matrizen und Inverse

- B ist die Inverse der quadratischen Matrix $A_{n,n}$, wenn $AB = BA = I$.
- Eine quadratische Matrix A kann höchstens eine Inverse haben.
- Bezeichnung: Die Inverse einer Matrix A wird mit A^{-1} bezeichnet.
- Beispiel: $A = (a)$, $a \neq 0$, dann ist $A^{-1} = 1/a$, denn $a \cdot 1/a = 1 = I_{1,1}$.
- A ist genau dann invertierbar, wenn A regulär ist, wenn also

$$\mathrm{Rg}(A) = n.$$

- Wenn A regulär ist, hat $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ die eindeutige Lösung $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.
- Die Berechnung der Inversen kann mittels eines dem Gaußschen Algorithmus verwandten Verfahrens erfolgen.

Berechnung der Inversen

- Die zu invertierende Matrix A wird gemeinsam mit einer Einheitsmatrix in ein Schema $(A|I)$ gestellt.
- Durch elementare Zeilentransformationen wird dieses Schema in $(I|A^{-1})$ überführt.
- Beispiel:

$$(A|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0{,}5 & -0{,}25 \end{array}\right) \rightarrow (I|A^{-1}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -0{,}5 & 0{,}75 \\ 0 & 1 & 0{,}5 & -0{,}25 \end{array}\right)$$

- Probe:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0{,}5 & 0{,}75 \\ 0{,}5 & -0{,}25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel Gleichungssystem

Gegeben ist das bereits beim Gaußschen Algorithmus als Beispiel verwendete lineare Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, diesmal mit $(A|I)$:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 10 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 10 \\ -x_1 + 2x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad (A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Division I. durch 2, anschließend Subtraktion II.$-$I.:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}5 & 1 & -0{,}5 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Addition III.$+$I.:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}5 & 1 & -0{,}5 & 1 & 0 \\ 0 & -0{,}5 & 2 & 0{,}5 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Beispiel Gleichungssystem

Subtraktion III.$-$II.:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}5 & 1 & -0{,}5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Division II. durch $-0{,}5$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Addition II.$+$ 2$\cdot$ III.:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Beispiel Gleichungssystem

Addition I.$+$ 0,5$\cdot$ II.:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right), \quad \text{also} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Damit erhält man wiederum die Lösung des Gleichungssystems:

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gliederung

Direktbedarfs- und Gesamtbedarfsmatrix

- Betrachten Sie das im Abschnitt 3.2 verwendete Beispiel der Bedarfsermittlung von Rohstoffen erneut:

	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	2	1	1
R_2	3	3	4
R_3	4	5	2

	E_1	E_2
Z_1	6	2
Z_2	4	1
Z_3	3	7

	E_1	E_2
R_1	2	0
R_2	0	3
R_3	0	0

- Für $e_1 = 30$ und $e_2 = 40$ Einheiten der Endprodukte sind der Bedarf $(260, 160, 370)'$ an Zwischenprodukten und folgender Gesamtrohstoffbedarf in mehreren Schritten berechnet worden: $(1.110, 2.860, 2.580)'$.

Direktbedarfs- und Gesamtbedarfsmatrix

- Ausgangspunkt der Bedarfsermittlung ist häufig der Gozintograph.
- Die Standardmethode in der Produktionsplanung besteht darin, aus dem Gozintographen eine Direktbedarfsmatrix zu ermitteln, die für das vorliegende Beispiel wie folgt aussieht:

	E_1	E_2	Z_1	Z_2	Z_3	R_1	R_2	R_3
E_1	0	0	0	0	0	0	0	0
E_2	0	0	0	0	0	0	0	0
Z_1	6	2	0	0	0	0	0	0
Z_2	4	1	0	0	0	0	0	0
Z_3	3	7	0	0	0	0	0	0
R_1	2	0	2	1	1	0	0	0
R_2	0	3	3	3	4	0	0	0
R_3	0	0	4	5	2	0	0	0

Direktbedarfs- und Gesamtbedarfsmatrix

- In der folgenden Gleichung bezeichnet D die Direktbedarfsmatrix, $\mathbf{x}$ den Gesamtbedarfsvektor an End- und Zwischenprodukten und Rohstoffen, und $\mathbf{p}$ den Primärbedarfsvektor, hier also die gewünschten Mengen der Endprodukte für den Verkauf:

$$\underbrace{D\mathbf{x}}_{\text{Sekundärbedarf}} + \underbrace{\mathbf{p}}_{\text{Primärbedarf}} = \underbrace{\mathbf{x}}_{\text{Gesamtbedarf}}$$

- Durch Anwendung der Matrixalgebra lässt sich diese Gleichung nach $\mathbf{p}$ oder $\mathbf{x}$ auflösen:

$$\mathbf{p} = \mathbf{x} - D\mathbf{x} = I\mathbf{x} - D\mathbf{x} = (I - D)\mathbf{x}, \text{ kurz: } \mathbf{p} = (I - D)\mathbf{x}$$

  Multipliziert man $(I - D)$ von links mit der Inversen $(I - D)^{-1}$, so ergibt das die Einheitsmatrix I. Also gilt

$$(I - D)^{-1}\mathbf{p} = (I - D)^{-1}(I - D)\mathbf{x} = I\mathbf{x} = \mathbf{x}, \text{ kurz: } \mathbf{x} = (I - D)^{-1}\mathbf{p}$$

Direktbedarfs- und Gesamtbedarfsmatrix

- $(I - D)^{-1}$ heißt Gesamtbedarfsmatrix.
- Multipliziert man den Vektor des Primärbedarfs $(30, 40, 0, 0, 0, 0, 0, 0)'$ von links mit der Gesamtbedarfsmatrix, so erhält man den bereits zuvor anders berechneten Vektor des Gesamtbedarfs

$$(30, 40, 260, 160, 370, 1.110, 2.860, 2.580)'$$

- Da hier eine große Matrix (die allerdings dünn besetzt ist) invertiert werden muss, eignet sich dieses Verfahren nicht für eine Berechnung von Hand. Wegen der algorithmischen Vorgehensweise ist es jedoch gut für praktische EDV-Lösungen geeignet.

Direktbedarfs- und Gesamtbedarfsmatrix

- Zusammenfassung:

$$\underbrace{D\mathbf{x}}_{\text{Sekundärbedarf}} + \underbrace{\mathbf{p}}_{\text{Primärbedarf}} = \underbrace{\mathbf{x}}_{\text{Gesamtbedarf}}$$

- Möglicher Konsum bei Produktion von **x**:

$$\boxed{\mathbf{p} = (I - D)\mathbf{x}}$$

- Erforderliche Produktion zum Konsum von **p**:

$$\boxed{\mathbf{x} = (I - D)^{-1}\mathbf{p}}$$

Das Leontief-Modell

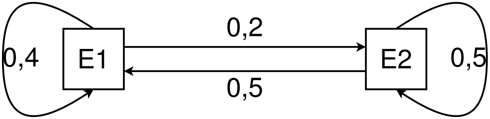
- Das Verfahren mittels der Direktbedarfsmatrix kann auch für das Leontief-Modell verwendet werden, das interindustrielle Verflechtungen berücksichtigt. End- und Zwischenprodukte werden nicht nur mit Rohstoffen und Zwischenprodukten erzeugt, sondern auch mit anderen End- und Zwischenprodukten.
- Um das Leontieff-Modell ohne EDV lösbar zu halten, wird ein sehr einfaches Beispiel betrachtet, bei dem es nur zwei Endprodukte und keine Zwischenprodukte und Rohstoffe gibt.
- Die zuvor hergeleiteten Formeln für Primärbedarf und Gesamtbedarf können direkt verwendet werden.

Beispiel: Bergwerksproblem

- Ein Kohlebergwerk (Sektor 1) produziert sowohl für ein Kohlekraftwerk (Sektor 2) und für den Verbraucher (Konsum) als auch für eigene Zwecke.Analog produziert das Kohlekraftwerk seinerseits sowohl für das Bergwerk und den Verbraucher als auch für sich selbst.
- Der Primärbedarf ist nun durch die Nachfrage der Endkonsumenten (Verbraucher) gegeben:

$$\mathbf{p} = (p_1, p_2)'$$

- Frage: Wieviele ME von Gut 1 und Gut 2 werden zur Deckung beliebiger Konsummengen p_1 und p_2 benötigt?
- Gozintograph und Direktbedarfsmatrix:



	E_1	E_2
E_1	0,4	0,2
E_2	0,5	0,5

Beispiel: Bergwerksproblem

- Für das Bergwerksproblem erhält man:

$$D = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}, \quad (I - D) = \begin{pmatrix} 0{,}6 & -0{,}2 \\ -0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

- Wie viele Einheiten stehen jeweils für den Konsum zur Verfügung, wenn insgesamt $\mathbf{x} = (300, 400)'$ Einheiten produziert werden?

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & -0{,}2 \\ -0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 300 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix}$$

- Wie viele Einheiten müssen produziert werden, um $\mathbf{p} = (100, 50)'$ Einheiten für den Konsum zu haben?

$$(I - D)^{-1} = \begin{pmatrix} 2{,}5 & 1 \\ 2{,}5 & 3 \end{pmatrix}$$

Also ist

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}5 & 1 \\ 2{,}5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 400 \end{pmatrix}$$