Wirtschaftsmathematik: Differentialrechnung

Thilo Klein
thilo@klein.uk

Gliederung

Gegenstand

- Die Differentialrechnung ist das wichtigste Hilfsmittel zur Analyse des Verlaufs von Funktionen.
- Der Verlauf einer Funktion wird natürlich durch ihre Steigung in jedem Punkt beschrieben. Entsprechend ist die zentrale Aufgabe der Differentialrechnung die Bestimmung der jeweiligen Steigungen von Funktionen.
- Da die Steigung einer nichtlinearen Funktion selbst nicht konstant ist, ist die Steigung selbst abhängig von der Variablen x. Man erhält also eine Steigungsfunktion, die als Ableitung bezeichnet wird.
- Die Differentialrechnung gehört aufgrund des Marginalprinzips (Beschreibung optimaler Lösungen durch Grenzbetrachtungen) zu den wichtigsten mathematischen Hilfsmitteln in den Wirtschaftswissenschaften.

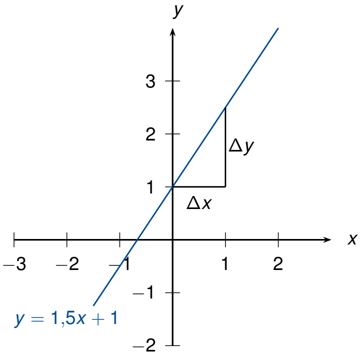
Die Steigung einer linearen Funktion

Wiederholung: Die Steigung der linearen Funktion $y = mx + b$ ist

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Die Änderung des Funktionswertes ist

$$\Delta y = m \Delta x$$



Im folgenden werden analoge Beziehungen für nichtlineare Funktionen gesucht.

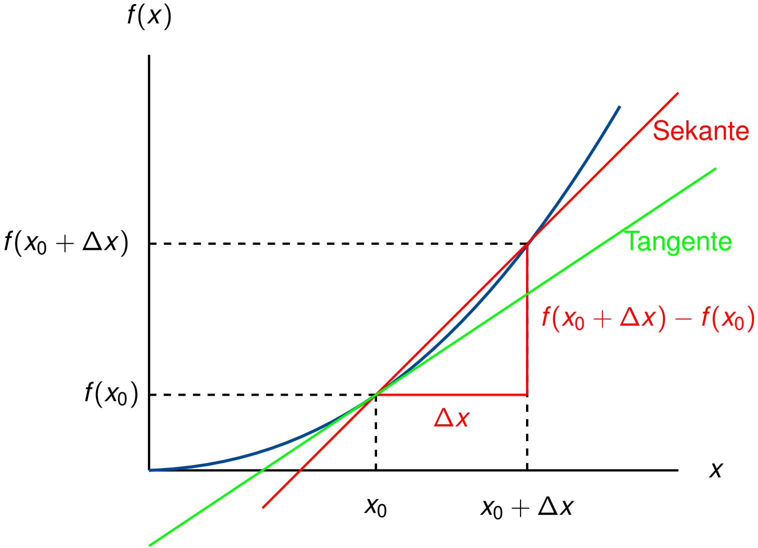
Der Differenzenquotient

- Die durchschnittliche Steigung einer Funktion $f(x)$ zwischen zwei Stellen x_0 und $x_0 + \Delta x$ kann durch den Differenzenquotienten

$$\boxed{\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

  dargestellt werden (vgl. folgende Abbildung).
- Der Differenzenquotient gibt die Steigung der Sekante durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ an.
- Je kleiner Δx ist, desto besser wird die Steigung der Funktion an einer bestimmten Stelle x_0 erfasst. Die Steigung bei x_0 entspricht der Steigung der Tangente an $(x_0, f(x_0))$.

Der Differenzenquotient



Der Differentialquotient

- Die exakte Steigung in einem Punkt kann ermittelt werden, indem der Grenzwert für $\Delta x \to 0$ bestimmt wird. Existiert dieser Grenzwert, so heißt die Funktion $f(x)$ differenzierbar an der Stelle x_0.
- Der Grenzwert heißt Differentialquotient oder Ableitung der Funktion $f(x)$ und wird mit $f'(x)$ oder dy/dx bezeichnet:

$$f'(x_0) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

- Geometrisch gesehen ist die Ableitung $f'(x_0)$ einer Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 gleich der Steigung ihrer Tangente an $f(x_0)$.
- Existiert $f'(x)$ für alle x des Definitionsbereichs D, so heißt $f(x)$ differenzierbar auf D.

Der Differentialquotient

- Beispiel: Die Ableitung von $f(x) = x^2$ an der Stelle x_0 errechnet sich aus

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_0 \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0. \end{aligned}$$

- Die Stelle x_0 steht dabei für eine beliebige Stelle (also eine bliebige Zahl, für die der Funktionswert berechnet wird).
- Allgemein lautet die Ableitungsfunktion von $f(x) = x^2$ demnach $f'(x) = 2x$.

Differentiale

- Die Ableitung von $f(x)$ an der Stelle x_0 gibt die Steigung der Tangente an $f(x)$ bei x_0 an.
- Man Änderungen des Funktionswertes durch Bewegungen entlang der Tangente abschätzen.
- Verwendet man $\Delta y := f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ in der Definition der Ableitung, so folgt aus

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

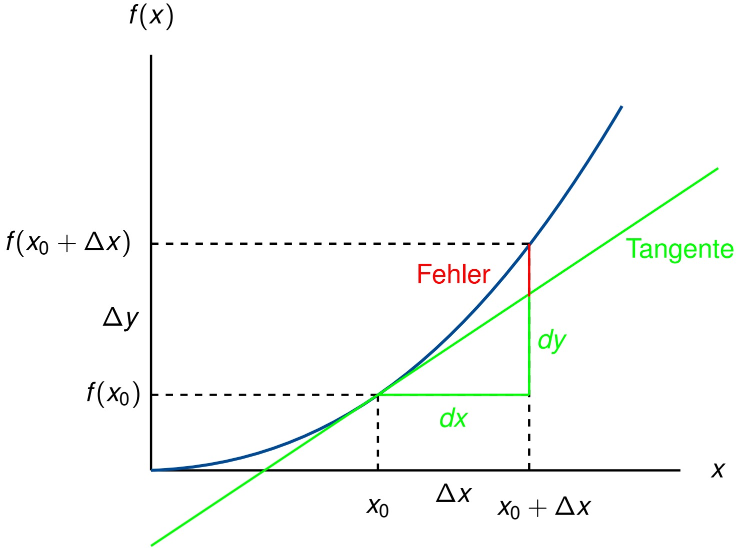
die folgende für kleine Δx gute Näherungsformel für Änderungen von y (also Δy) ind Abhängigkeit von Änderungen von x (also Δx):

$$\boxed{\Delta y \approx f'(x_0) \cdot \Delta x}$$

- Mit den Differentialen $dy \approx \Delta y$ und $dx = \Delta x$ gilt die exakte Beziehung

$$\boxed{dy = f'(x_0) \cdot dx}$$

Differentiale



Differentiale

- Zahlenbeispiel: Für $f(x) = x^2$ gilt $f'(x) = 2x$. Ändert man den x-Wert von $x_0 = 1$ auf 1,1, so dass $\Delta x = 0{,}1$, so folgt:

$$\Delta y \approx dy = f'(1)dx = 2 \cdot 0{,}1 = 0{,}2$$

- Für die exakte Änderung gilt:

$$\Delta y = f(1{,}1) - f(1) = 1{,}1^2 - 1^2 = 0{,}21$$

- $dy = 0{,}2$ ist hier also eine gute Näherung für $\Delta y = 0{,}21$.
- Beispiel Kostenfunktion: Stellt $K = K(x)$ eine Kostenfunktion dar, so folgt aus $dK = K'(x)dx$, dass $K'(x)$ näherungsweise die Kostensteigerung dK angibt, wenn eine Einheit mehr produziert wird ($dx = 1$), also die Grenzkosten:

$$dK = K'(x)dx \quad \Rightarrow K'(x) = dK \quad \text{für } dx = 1$$

Wichtige Ableitungen

In der Anwendung ist die Durchführung der Grenzwertberechnung für den Differentialquotienten nicht erforderlich, weil die Ableitungsfunktionen aller hier interessierenden Funktionen nach allgemeingültigen Regeln bekannt sind:

$f(x)$	a	x^k	e^x	$\ln x$	a^x	$\log_a x$
$f'(x)$	0	kx^{k-1}	e^x	$\frac{1}{x}$	$\ln a \cdot a^x$	$\frac{1}{\ln a}\frac{1}{x}$

Für zusammengesetzte Funktionen gelten folgende Rechenregeln:

$$(af(x))' = af'(x),$$
$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

Beispiele

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 2x^8 && \Rightarrow \\
f(x) &= 3x^7 + x^2 && \Rightarrow \\
f(x) &= 3x^7 - 4x^2 + 3x && \Rightarrow \\
f(x) &= \ln x && \Rightarrow \\
f(x) &= 10 \ln x + 2x && \Rightarrow \\
f(x) &= 4e^x && \Rightarrow \\
f(x) &= x^2 - 4e^x && \Rightarrow \\
f(x) &= 10^x && \Rightarrow \\
f(x) &= x - 10^x && \Rightarrow \\
f(x) &= \log_{10} x && \Rightarrow \\
f(x) &= 10x^{-2} + x^{-1} - x && \Rightarrow \\
f(x) &= 1/x^3 && \Rightarrow
\end{aligned}
$$

Produktregel

- Bei komplizierteren Verknüpfungen von Funktionen sind zusätzliche Regeln zur Bestimmung der Ableitungen erforderlich.
- Produktregel: Wenn $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ das Produkt von zwei Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ ist, so gilt:

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

- Beispiel:

$$f(x) = x^2 \cdot (1 + \sqrt{x}) \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = 2x \cdot (1 + \sqrt{x}) + x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Quotientenregel

- Quotientenregel: Wenn $f(x) = u(x)/v(x)$ der Quotient von zwei Funktion $u(x)$ und $v(x)$ ist, so gilt:

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2}$$

- Beispiel:

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x^3} \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = \frac{2x \cdot (1+x^3) - x^2 \cdot 3x^2}{(1+x^3)^2}$$

Kettenregel

- Kettenregel: Wenn $f(x) = h(g(x))$ eine verkettete Funktion h von g von x ist, so gilt:
$$f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x)$$

- In der Leibnizschen Schreibweise nimmt sich die Kettenregel wie eine Trivialität aus. Wenn $y = h(z)$ und $z = g(x)$, dann gilt:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}$$

- Beispiel:
$$f(x) = \ln(1 + x^2) \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = \frac{1}{1 + x^2} \cdot 2x$$

Höhere Ableitungen

- Die Ableitung $f'(x)$ von $f(x)$ ist selbst eine Funktion, die in der Regel wieder abgeleitet werden kann.
- Die Ableitung von $f'(x)$ heißt zweite Ableitung von $f(x)$ und wird mit $f''(x)$ bezeichnet. Entsprechend ist $f'''(x)$ die dritte Ableitung und $f^{(n)}(x)$ die n-te Ableitung von $f(x)$.
- Beispiel:

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^4 - x^3 + 5x \\
f'(x) &= 4x^3 - 3x^2 + 5 \\
f''(x) &= 12x^2 - 6x \\
f'''(x) &= 24x - 6 \\
f^{(4)}(x) &= 24 \\
f^{(5)}(x) &= 0 \\
f^{(6)}(x) &= 0
\end{aligned}$$

Elastizitäten

- Elastizitäten stellen wichtige Kennzahlen zur Reaktion von Nachfragefunktionen auf Preis- oder Einkommensänderungen dar.
- Hier wird nur die Preiselastizität der Nachfrage betrachtet:

$$\text{Preiselastizität der Nachfrage} := \frac{\text{prozentuale Nachfrageänderung}}{\text{prozentuale Preisänderung}}$$

- Symbol: $\eta =$ Preiselastizität
- Beispiel: Steigt der Preis einer Eiskugel von 2 Euro auf 2,20 Euro und geht die nachgefragte Menge von 10 auf 8 Kugeln zurück, bewirkt eine Preissteigerung um 10% einen Mengenrückgang um 20%. Also:

$$\eta = \frac{-20\%}{10\%} = -2$$

- Interpretation: Eine einprozentige Preiserhöhung bewirkt einen zweiprozentigen Nachfragerückgang.

Elastizitäten

- Frage: Wie kann man die Elastizität für eine Nachfragefunktion $x = N(p)$ einfach bestimmen?
- In Symbolen gilt:

$$\eta = \frac{\Delta x / x \cdot 100}{\Delta p / p \cdot 100} = \frac{\Delta x}{\Delta p} \frac{p}{x}$$

- Da ein Differenzenquotient durch den Differentialquotienten, also die Ableitung angenähert werden kann, gilt ungefähr:

$$\eta = \frac{dx}{dp} \frac{p}{x} \qquad (= N'(p) \frac{p}{x})$$

- Zur Unterscheidung bezeichnet man die ursprüngliche Elastizität als Bogenelastizität, die mittels des Differentialquotienten berechnete als Punktelastizität.

Elastizitäten

- Beispiel: $x(p) = 100 - 2p$. Für die Preiselastizität der Nachfrage folgt

$$\frac{dx}{dp}\frac{p}{x} = \frac{-2p}{100-2p}.$$

- Da $100 - 2p > 0$ für $x > 0$, ist die Elastizität negativ. Daher wird häufig der Betrag verwendet (der Betrag $|x|$ macht aus einer negativen Zahl x eine positive Zahl):

$$\left|\frac{dx}{dp}\frac{p}{x}\right| = \frac{2p}{100-2p}.$$

- Setzt man $\left|\frac{dx}{dp}\frac{p}{x}\right| \gtreqless 1$, so folgt

$$\left|\frac{dx}{dp}\frac{p}{x}\right| \begin{cases} > 1 & p > 25 \quad (|\eta| > 1 \text{heißt elastische Nachfrage}) \\ = 1 & p = 25 \\ < 1 & p < 25 \quad (|\eta| < 1 \text{heißt unelastische Nachfrage}) \end{cases}$$

Elastizitäten

- Die Umkehrfunktion des Beispiels $x(p) = 100 - 2p$ lautet $p(x) = 50 - 0{,}5x$. Daraus lässt sich die Nachfrageelastizität des Preises bestimmen:

$$\frac{dp}{dx}\frac{x}{p} = \frac{-0{,}5x}{50 - 0{,}5x}$$

- Ersetzt man x durch $x = 100 - 2p$ so folgt:

$$\frac{dp}{dx}\frac{x}{p} = \frac{-50 + p}{p} = \frac{-100 + 2p}{2p} = \frac{1}{\frac{dx}{dp}\frac{p}{x}} = \frac{1}{\eta}$$

- Die Nachfrageelastizität de Preises ist also gleich dem Kehrwert der Preiselastizität der Nachfrage (nicht nur in diesem Beispiel).

Gliederung

Wiederholung: Extrem- und Wendestellen, Krümmung

Eine reelle Funktion $f: \ D \to R$ hat

- eine Nullstelle x_0, wenn $f(x_0) = 0$,
- ein globales Maximum $x_{\max}$, wenn $f(x_{\max}) \geqq f(x)$ für alle $x \in D$,
- eine globales Minimum $x_{\min}$, wenn $f(x_{\min}) \leqq f(x)$ für alle $x \in D$,
- ein lokales Maximum $x_{\max}$, wenn $f(x_{\max}) \geqq f(x)$ für alle x in einer Umgebung um $x_{\max}$,
- ein lokales Minimum $x_{\min}$, wenn $f(x_{\min}) \leqq f(x)$ für alle x einer Umgebung um $x_{\min}$.

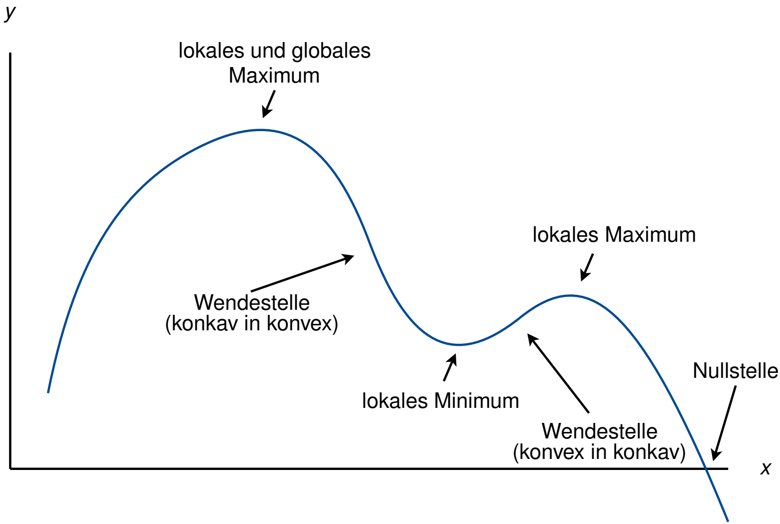
Oberbegriffe für Maxima und Minima: Extremstellen oder Optimalstellen; die Punkte heißen auch Hoch- und Tiefpunkte.

Die Funktion heißt

- streng konvex oder linksgekrümmt, wenn ihre Steigung zunimmt,
- streng konkav oder rechtsgekrümmt, wenn ihre Steigung abnimmt.

Sie hat eine Wendestelle, wenn sich ihre Krümmung von konkav in konvex oder umgekehrt ändert.

Wiederholung: Extrem- und Wendestellen, Krümmung



Kurvendiskussion

- Die einzelnen Schritte der Kurvendiskussion werden anhand eines Beispiels erläutert:

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 4x - 16$$

- Folgende Schritte werden in der Regel betrachtet:
  - Berechnung der Nullstellen und des y-Achsenabschnitts,
  - (Prüfung auf Symmetrie),
  - (Prüfung der Grenzwerte für $x \to \pm\infty$),
  - (ggf. Prüfung auf vertikale Asymptoten),
  - Berechnung der Extremwerte,
  - Berechnung der Wendestellen,
  - graphische Darstellung.

Nullstellen und Achsenabschnitt

- Durch Ausprobieren: $x_1 = 2$. Polynomdivision:

$$
\begin{array}{rrrrl}
(\quad x^3 + 4x^2 & -4x & -16) & : (x-2) = x^2 + 6x + 8 \\
\underline{-x^3 + 2x^2} & & & \\
6x^2 & -4x & & \\
\underline{-6x^2} & \underline{+12x} & & \\
 & 8x & -16 & \\
 & \underline{-8x} & \underline{+16} & \\
 & & 0 &
\end{array}
$$

- Aus dem Restpolynom erhält man mittels der p-q-Formel die weiteren Nullstellen $x_2 = -2$ und $x_3 = -4$.
- Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = -16$.
- Damit gefundene Punkte: $(-4/0)$, $(-2/0)$, $(2/0)$ und $(0/-16)$.

Steigung und Extremwerte

- Eine differenzierbare Funktion verläuft streng monoton steigend auf einem Intervall I, wenn $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$. Sie verläuft streng monoton fallend auf I, wenn $f'(x) < 0$ für alle $x \in I$.
- Eine notwendige Bedingung für einen lokalen Extremwert im Inneren des Definitionsbereichs (also nicht an Randstellen) ist

$$\boxed{f'(x) = 0}$$

- Eine hinreichende Bedingung für ein lokales Maximum an der Stelle x_0 ist

$$\boxed{f'(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f''(x_0) < 0}$$

- Eine hinreichende Bedingung für ein lokales Minimum an der Stelle x_0 ist

$$\boxed{f'(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f''(x_0) > 0}$$

Steigung und Extremwerte

- Die erste und zweite Ableitung von $f(x) = x^3 + 4x^2 - 4x - 16$ lauten

$$f'(x) = 3x^2 + 8x - 4, \qquad f''(x) = 6x + 8$$

- Setzt man die erste Ableitung gleich Null und löst die quadratische Gleichung, so folgen mögliche Extremwerte bei

$$x_1 = 0{,}43, \qquad x_2 = -3{,}10$$

- Einsetzen in die zweite Ableitung ergibt

$$f''(0{,}43) = 6 \cdot 0{,}43 + 8 > 0, \quad f''(-3{,}1) = 6 \cdot (-3{,}1) + 8 < 0$$

  Also liegt bei $x = 0{,}43$ ein Minimum und bei $x = -3{,}10$ ein Maximum vor.
- Einsetzen in $f(x)$ liefert die Extrempunkte $(-3{,}10/5{,}05)$ und $(0{,}43/-16{,}90)$.

Krümmung und Wendestellen

- Eine zweimal differenzierbare Funktion verläuft linksgekrümmt oder streng konvex auf einem Intervall I, wenn $f''(x) > 0$ für alle $x \in I$. Sie verläuft rechtsgekrümmt oder streng konkav auf I, wenn $f''(x) < 0$ für alle $x \in I$.
- Eine notwendige Bedingung für eine Wendestelle im Inneren des Definitionsbereichs ist

$$\boxed{f''(x) = 0}$$

- Eine hinreichende Bedingung für eine Links-Rechts-Wendestelle an der Stelle x_0 ist

$$\boxed{f''(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f'''(x_0) < 0}$$

- Eine hinreichende Bedingung für eine Rechts-Links-Wendestelle an der Stelle x_0 ist

$$\boxed{f''(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f'''(x_0) > 0}$$

- Ist bei einer Wendestelle x_0 zusätzlich $f'(x_o) = 0$, so handelt es sich um eine Sattelstelle (Beispiel: $f(x) = x^3$).

Krümmung und Wendestellen

- Die zweite und dritte Ableitung von $f(x) = x^3 + 4x^2 - 4x - 16$ lauten

$$f''(x) = 6x + 8, \qquad f'''(x) = 6$$

- Setzt man die zweite Ableitung gleich Null, so folgt die mögliche Wendestelle bei

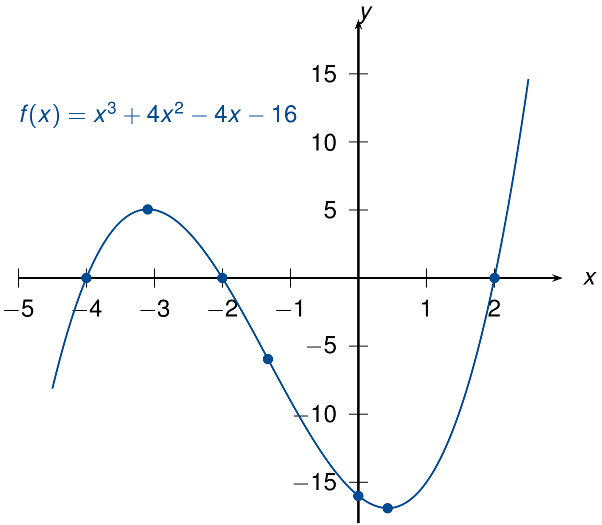
$$x_1 = -1{,}33$$

- Einsetzen in die dritte Ableitung ergibt

$$f'''(-1{,}33) = 6 > 0$$

  Also liegt bei $x = -1{,}33$ eine Rechts-Links-Wendestelle vor, bei der sich die Krümmung von konkav in konvex ändert.
- Einsetzen in $f(x)$ liefert den Wendepunkt $(-1{,}33/-5{,}96)$.

Graphische Darstellung



Gliederung

Grundlagen

- Ziel eines Unternehmens ist die Gewinnmaximierung:

  Gewinn = Erlös (Umsatz) − Kosten

- Ist x die Produktionsmenge, $E(x)$ der Erlös (Umsatz) und $K(x)$ die Kostenfunkton, so lautet der Gewinn

$$G(x) = E(x) - K(x)$$

- Notwendige Bedingung für ein Gewinnmaximum aus $G'(x) = 0$:

$$\boxed{K'(x) = E'(x)}$$

  In Worten: Grenzkosten gleich Grenzerlös.

- Insbesondere $E'(x)$ hängt davon ab, welche Marktform betrachtet wird.

Vollständige Konkurrenz

- Vollständige Konkurrenz bedeutet, dass ein kleines Unternehmen auf einem vollkommenen Markt mit vielen Anbietern und Nachfragern betrachtet wird.
- In diesem Fall kann der Verkaufspreis p als vorgegebene Konstante betrachtet werden, so das $E(x) = px$.
- Das Problem der Gewinnmaximierung lautet also: Zu maximieren ist

$$G(x) = px - K(x)$$

- Aus $G'(x) = 0$ folgt die Grenzkosten-Preis-Regel

$$\boxed{K'(x)=p}$$

- Hinreichende Bedingung für ein lokales Gewinnmaximum:

$$K'(x) = p \quad \text{und} \quad K''(x) > 0$$

Vollständige Konkurrenz

- Beispiel: Mit der Kostenfunktion $K(x) = 2.040 + 0{,}4x^2$ und dem Absatzpreis $p = 80$ erhält man die Gewinnfunktion

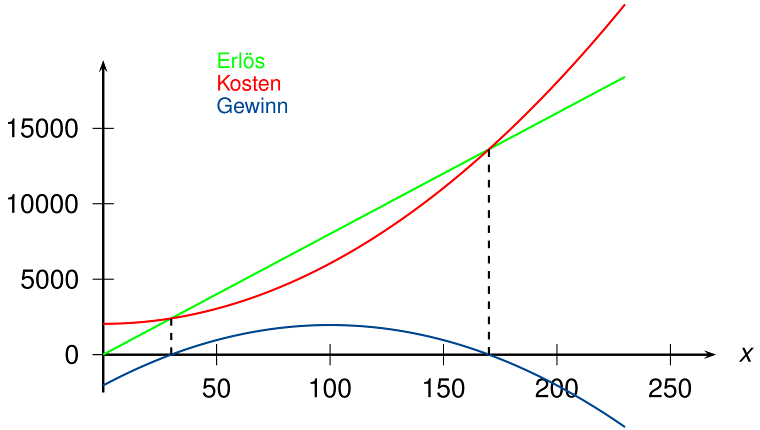
$$G(x) = 80x - 2.040 - 0{,}4x^2.$$

- Die Nullstellen dieser Funktion erhält man aus $x^2 - 200x + 5.100 = 0$ mittels der p-q-Formel:

$$x_1 = 30, \quad x_2 = 170$$

- Die Bedeutung dieser Nullstellen wird anhand der folgenden Abbildung verdeutlicht.

Vollständige Konkurrenz



Vollständige Konkurrenz

- Vor der ersten Nullstelle $x_1 = 30$ ist der Gewinn negativ, danach positiv. Dieser Punkt heißt daher Gewinnschwelle oder Break-Even-Punkt.
- Zwischen der ersten und der zweiten Nullstelle ist der Gewinn positiv. Daher heißt dieser Bereich Gewinnzone.
- Nach der zweiten Nullstelle $x_2 = 170$ wird der Gewinn wieder negativ. Dieser Pukt heißt daher Gewinngrenze.
- Das Gewinnmaximum liegt bei einer Produktion von $x = 100$, da hier $G'(x) = 80 - 0{,}8x = 0$ und $G''(x) = -0{,}8 < 0$ gilt.
- Alternativ: Hier gilt

$$K'(x) = p \quad \Longleftrightarrow \quad 0{,}8x = 80 \quad \text{sowie} \quad K''(x) = 0{,}8 > 0.$$

- Der maximale Gewinn ist $G(100) = 1.960$.

Monopol

- Bisher: Preis als gegeben unterstellt (Marktform vollständige Konkurrenz).
- Jetzt: Preis hängt von verkaufter Menge ab (Marktform Monopol (Alleinanbieter)).
- Beispiel: Die inverse Nachfragefunktion laute $p(x) = 100 - 2x$, die Kostenfunktion $K(x) = x^2 + 300$.
- Die Erlösfunktion ist nun

$$E(x) = p(x)x = (100 - 2x)x = 100x - 2x^2.$$

- Damit erhält man für die Gewinnfunktion

$$G(x) = E(x) - K(x) = 100x - 2x^2 - x^2 - 300 = -3x^2 + 100x - 300.$$

- Mittels der p-q-Formel folgt aus $x^2 - 33,\bar{3}x + 100 = 0$, dass die Gewinnschwelle bei $x_1 = 3,\bar{3}$ und die Gewinngrenze bei $x_2 = 30$ liegt.

Monopol

- Das Gewinnmaximum erhält man durch Ableitung der Gewinnfunktion:
$$G'(x) = -6x + 100 = 0, \quad \Rightarrow x = 50/3.$$

- Den vom Monopolisten gesetzten Preis erhält man durch Einsetzen in die Nachfragefunktion:
$$p(50/3) = 100 - 2 \cdot 50/3 = 66{,}\bar{6}$$

- Der maximale Gewinn beträgt
$$G(50/3) = 533, \bar{3}$$