Wirtschaftsmathematik

Thilo Klein

thilo@klein.uk

Gliederung

Grundlagen

Finanzmathematik

- Zins- und Zinseszinsrechnung
- Äquivalenzprinzip und Kapitalwert
- Rentenrechnung
- Tilgungsrechnung

Lineare Algebra

- Matrizen
- Lineare Produktionsmodelle
- Lineare Gleichungssysteme und inverse Matrizen
- Das Leontief-Modell

Gliederung

Funktionen einer Variablen
- Grundbegriffe
- Eigenschaften von Funktionen
- Wichtige Funktionstypen

Differentialrechnung
- Differentialquotient und Ableitung
- Kurvendiskussion
- Gewinnmaximierung

Funktionen mehrerer Variablen
- Grundlegende Darstellungsformen
- Differentialrechnung
- Optimierungsprobleme

Integralrechnung

Literatur

Christiaans, T. und Ross, M. 2016: Wirtschaftsmathematik für das Bachelor-Studium: Lehr- und Arbeitsbuch, 2. Auflage, Wiesbaden: Springer Gabler.

Gliederung

Grundlagen

Finanzmathematik
- Zins- und Zinseszinsrechnung
- Äquivalenzprinzip und Kapitalwert
- Rentenrechnung
- Tilgungsrechnung

Lineare Algebra
- Matrizen
- Lineare Produktionsmodelle
- Lineare Gleichungssysteme und inverse Matrizen
- Das Leontief-Modell

Elementare Rechenregeln

- Elementare Rechenregeln sind die Voraussetzung für die Korrektheit bei finanz- und wirtschaftsmathematischen Anwendungen.
- Zahlen, Rechenregeln, Rechengesetze, Bruchrechnung, Potenzen, Wurzeln und Logarithmus werden an vielen Stellen im Studium und Beruf benötigt.
- Zahlenmengen:
  - Natürliche Zahlen: $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$,
  - ganze Zahlen: $Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$,
  - rationale Zahlen: Q, alle ganzen Zahlen und alle Brüche,
  - reelle Zahlen: R, alle rationalen Zahlen und alle irrationalen Zahlen (zum Beispiel $\sqrt{2}$, e, π, $\ldots$).

Elementare Rechenregeln

- Von links nach rechts rechnen
- Klammern als Erstes ausrechnen (von innen nach außen)
- Potenz- vor Punktrechnung (multiplizieren, dividieren)
- Punkt- vor Strichrechnung (addieren, subtrahieren)
- Das Multiplikationszeichen (Punkt) kann weggelassen werden
- Negative Zahlen: $a + (-b) = a - b$
- Kommutativgesetz
  - $a + b = b + a$
  - $a \cdot b = b \cdot a$
- Assoziativgesetz
  - $(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$
  - $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$
- Distributivgesetz
  - $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
  - $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Bruchrechnung

Definition und Schreibweise:

- Zähler a geteilt durch Nenner ($b \neq 0$): $a : b = \frac{a}{b} = a/b$

Rechenregeln für Brüche:

- Kürzen oder erweitern: $\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b}, \quad \frac{a+c}{b+c} \neq \frac{a}{b}$
- Addition: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$
- Subtraktion: $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d}$
- Multiplikation: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$
- Division: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

Binomische Formeln

Die binomischen Formeln ergeben sich durch einfaches Ausmultiplizieren. Es ist trotzdem häufig sinnvoll, sie zu kennen, zum Beispiel, weil man sie manchmal rückwärts anwenden muss:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \tag{I.}$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \tag{II.}$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \tag{III.}$$

Als Beispiel der Beweis der zweiten Formel:

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a \cdot a - a \cdot b - b \cdot a + b \cdot b = a^2 - 2ab + b^2$$

Potenzen und Wurzeln

Regel	Beispiel
$a^0 = 1$	$5^0 = 1$
$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$	$2^3 \cdot 2^4 = 2^7$
$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$	$3^5 \cdot 4^5 = 12^5$
$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$	$\left(2^3\right)^4 = 2^{12}$
$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$	$2^{-3} = \frac{1}{2^3}$
$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$	$\frac{6^4}{6^2} = 6^2$
$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$	$\frac{10^5}{5^5} = 2^5$
$\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$	$\sqrt[5]{32} = 32^{1/5} = 32^{0,2} = 2$

Gleichungen

Rechenregeln für (lineare) Gleichungen:

- Alle Rechenoperationen, die Äquivalenzumformungen sind, sind erlaubt, solange sie für beide Seiten der Gleichung gleich durchgeführt werden.
- Dabei wird so umgeformt, dass am Ende derjenige Wert für x gefunden wird, der die Gleichung löst.
- Äquivalenzumformungen sind Umformungen, die die Lösungsmenge der Gleichung nicht ändern.
- Bei nichtlinearen Gleichungen müssen manchmal Umformungen gemacht werden, die keine Äquivalenzumformungen sind (zum Beispiel Quadrieren); eine Probe ist dann unbedingt erforderlich.

Beispiele:

- $$\begin{aligned} 4+x &= 7 \quad \big| -4 \\ x &= 7-4=3 \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} 4x &= -12 \quad \big| \div 4 \\ x &= -12/4=-3 \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} \frac{8-x}{2} &= 3 \quad \big| \cdot 2 \\ 8-x &= 3\cdot 2 \quad \big| -8 \\ -x &= 6-8 \quad \big| \div(-1) \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Gleichungen

Grundlegende Rechenregel für Gleichungen mit Exponenten: Die Gegenoperation, um auf einer Seite einer Gleichung den Exponenten *b* aufzulösen, ist:

Beide Seiten mit $1/b$ potenzieren.

Beispiele:

- $$x^5 = 32 \quad \left|\sqrt[5]{} \; oder \; (\;)^{\frac{1}{5}}\right.$$
  $$x = \sqrt[5]{32} = 2$$
- $$x^{-7} = 128 \quad \left|\left(\sqrt[7]{}\right)^{-1} \; oder \; (\;)^{-\frac{1}{7}}\right.$$
  $$x = \left(\sqrt[7]{128}\right)^{-1} = (128)^{-\frac{1}{7}} = 0{,}5$$
- $$(2-3x)^{-3{,}3} = 2 \quad \left|(\;)^{\frac{1}{-3{,}3}}\right.$$
  $$(2-3x) = 2^{\frac{1}{-3{,}3}} \quad \left|-2 \;\; \div(-3)\right.$$
  $$x = \frac{2^{\frac{1}{-3{,}3}} - 2}{-3} \approx 0{,}40$$

Logarithmen

Logarithmus von a zur Basis b (mit $a > 0$, $b > 0$):

$$\boxed{\log_b a = x \quad \Longleftrightarrow \quad b^x = a}$$

Also: b hoch wieviel ergibt a?

Rechenregeln:

$$\log_b(x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$$
$$\log_b(x/y) = \log_b x - \log_b y$$
$$\log_b(x^y) = y \cdot \log_b x$$

Wichtigste Basen: $b = 10$ (Zehnerlogarithmus $\lg = \log_{10}$) und $b = e$ (natürlicher Logarithmus $\ln = \log_e$) mit $e = 2,71828\ldots$ (Eulersche Zahl).

Logarithmen

Steht in Gleichungen die gesuchte Variable im Exponenten, so kann mit Hilfe des Logarithmus aufgelöst werden. Beispiel:

$$4^x = 10$$

Entweder:

$$x = \log_4 10 \approx 1{,}66$$

oder:

$$\begin{aligned} 4^x &= 10 \quad && |\ln \\ \Leftrightarrow \quad \ln(4^x) &= \ln 10 && | \\ \Leftrightarrow \quad x \cdot \ln 4 &= \ln 10 && |\div \ln 4 \\ \Leftrightarrow \quad x &= \frac{\ln 10}{\ln 4} \approx 1{,}66 && \end{aligned}$$

Quadratische Gleichungen

Allgemeine Form:

$$\boxed{x^2 + px + q = 0}$$

Lösung mit der p-q-Formel:

$$\boxed{x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

Mit $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ gilt für das Lösungsverhalten:

- $D > 0$: zwei Lösungen
- $D = 0$: eine Lösung
- $D < 0$: keine (reelle) Lösung

Quadratische Gleichungen

Beispiel: $4x^2 + 12x + 8 = 0$ wird zunächst durch 4 dividiert, um die p-q-Formel anwenden zu können:

$$x^2 \underbrace{+3}_{p=+3} x + \underbrace{2}_{q=+2} = 0$$

$$x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2}$$

also

$$x_1 = -1, \quad x_2 = -2.$$

Quadratische Gleichungen

Beispiel Wurzelgleichung. Aus

$$\sqrt{x+2} = x$$

erhält man durch Quadrieren

$$x^2 - x - 2 = 0$$

Die Lösungen $x_1 = 2$ und $x_2 = -1$ dieser quadratischen Gleichung sind jedoch nicht beide Lösungen der Wurzelgleichung. Grund: Quadrieren ist keine Äquivalenzumformung.

Durch die Probe folgt $L = \{2\}$.

Lineare Ungleichungen

- Eine lineare Ungleichung setzt zwei lineare Ausdrücke derart miteinander in Beziehung, dass der Ausdruck auf der linken Seite kleiner ($<$), kleiner oder gleich ($\leqq$), größer ($>$) oder größer oder gleich ($\geqq$) dem Ausdruck auf der rechten Seite sein soll.
- Meistens ist eine unbekannte Variable x in der Gleichung enthalten, und die interessierende Fragestellung ist, welche Werte x annehmen darf, damit die Ungleichung erfüllt ist.
- Die Lösung von linearen Ungleichungen erfolgt auf dem gleichen Weg wie bei linearen Gleichungen, das heißt, durch Äquivalenzumformungen wird die unbekannte Variable x auf die eine Seite der Ungleichung gebracht, so dass dann das Lösungsintervall direkt abgelesen werden kann.
- Wenn die Ungleichung im Rahmen der Umformung mit einer negativen Zahl multipliziert oder dividiert wird, kehrt das Ungleichheitszeichen seine Richtung um.
- Wird mit der unbekannten Variablen (x) multipliziert oder dividiert, muss eine Fallunterscheidung vorgenommen werden, um die Richtung des Ungleichheitszeichens zu bestimmen.
- Für weitere Erklärungen und Übungsaufgaben wird auf die angegebene Literatur verwiesen.

Prozentrechnung

Die grundlegende Formel zur Berechnung des Prozentwertes (W) aus dem Grundwert (G) und dem Prozentsatz (p) lautet:

$$W = \frac{p}{100} \cdot G$$

Aus dieser Formel lassen sich alle anderen Formeln durch Umformung ableiten.

Beachte: Prozent bedeutet pro Hundert, also z.B.:

$$5\% = \frac{5}{100} = 0{,}05.$$

Prozentrechnung

Prozentwert gesucht: Wieviel Euro sind 5% von 200 €?

	%	€	
	100	200	
: 100			: 100
	1	$\frac{200}{100}$	
$\cdot 5$			$\cdot 5$
	5	$\frac{2\cancel{00}}{1\cancel{00}} \cdot 5 = 10$	

$$W = \frac{p}{100} \cdot G$$

also:

$$W = \frac{5}{1\cancel{00}} \cdot 2\cancel{00} = 10$$

Antwort: 10 €

Prozentrechnung

Prozentsatz gesucht: Wieviel Prozent sind 10 € von 200 €?

$$
\begin{array}{c|c|c|c}
 & € & \% & \\
\hline
 & 200 & 100 & \\
:200 & & & :200 \\
 & 1 & \frac{100}{200} & \\
\cdot 10 & & & \cdot 10 \\
 & 10 & \frac{\cancel{100}\cdot 10}{\cancel{200}} = 5 &
\end{array}
$$

$$p = \frac{W}{G} \cdot 100$$

also:

$$p = \frac{10}{\cancel{200}} \cdot \cancel{100} = 5$$

Antwort: 5 %

Prozentrechnung

Grundwert gesucht: Wie hoch ist der Grundwert, wenn 5% gleich 10 € sind?

	%	€	
	5	10	
$:5$			$:5$
	1	$\frac{10}{5}$	
$\cdot 100$			$\cdot 100$
	100	$\frac{\cancel{10}^{2}}{\cancel{5}_{1}} \cdot 100 = 200$	

$$G = \frac{W}{p} \cdot 100$$

also:

$$G = \frac{\cancel{10}^{2}}{\cancel{5}_{1}} \cdot 100 = 200$$

Antwort: 200 €

Prozentrechnung

Vermehrter Grundwert gesucht: Wie hoch ist der vermehrte Grundwert G_+, wenn 5% von 200 € hinzugerechnet werden?

	%	€	
	100	200	
$:100$			$:100$
	1	$\frac{200}{100}$	
$\cdot 105$			$\cdot 105$
	105	$\frac{\cancel{200}}{\cancel{100}} \cdot 105 = 210$	

$$G_+ = G + W = \frac{100 + p}{100} \cdot G,$$

also:

$$G_+ = \frac{100 + 5}{1\cancel{00}} \cdot 2\cancel{00}$$

$$= 210$$

Antwort: 210 €

Prozentrechnung

Zur Prozentrechnung gibt es hier keine Aufgaben; stattdessen an dieser Stelle noch einige Anmerkungen:

- Die einfache Zinsrechnung (ohne Zinseszinsen) ist eine direkte Anwendung der Prozentrechnung. Wir werden sie mit Übungsaufgaben in der Vorlesung behandeln.
- In den Wirtschaftswissenschaften werden prozentuale Änderungen häufig als Wachstumsraten bezeichnet. Steigt zum Beispiel das reale Bruttoinlandsprodukt (BIP) um 2%, so spricht man von einem Wirtschaftswachstum um 2%.
- Bei Prozentsätzen ist immer wichtig, auf welchen Grundwert sie bezogen werden. Steigt zum Beispiel das BIP von 100 Milliarden auf 101 Milliarden, so wächst es um 1%. Fällt es anschließend um 1%, also um $1 \cdot 101/100 = 1{,}01$ Milliarden, so beträgt es nur noch 99,99 Milliarden. Der Grundwert vor dem Rückgang um 1% ist nämlich 101 Milliarden, ncht 100 Milliarden.

Summenzeichen

$$\sum_{i=1}^{5} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$$

Die Laufvariable i durchläuft alle ganzen Zahlen von 1 bis 5

Jede dieser Zahlen der Laufvariable wird einmal in den Term hinter dem Summenzeichen (Summenglied) eingesetzt, und dann wird über alle i aufsummiert.

Beispiele:

$$\sum_{i=6}^{12} i^2 = 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 + 11^2 + 12^2$$

$$\sum_{i=2}^{6} 2(i+1) = 6 + 8 + 10 + 12 + 14 = 2\sum_{i=2}^{6}(i+1)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{\ln i} = \frac{1}{\ln 1} + \frac{2}{\ln 2} + \frac{3}{\ln 3} + \frac{4}{\ln 4} + \cdots$$

$$\sum_{i=0}^{4} \frac{20}{1{,}1^i} = 20\left(1 + \frac{1}{1{,}1^1} + \frac{1}{1{,}1^2} + \frac{1}{1{,}1^3} + \frac{1}{1{,}1^4}\right)$$

Hinweis: Es gilt $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$ (Gaußsche Summenformel).

Gliederung

Grundlagen

Finanzmathematik

- Zins- und Zinseszinsrechnung
- Äquivalenzprinzip und Kapitalwert
- Rentenrechnung
- Tilgungsrechnung

Lineare Algebra

- Matrizen
- Lineare Produktionsmodelle
- Lineare Gleichungssysteme und inverse Matrizen
- Das Leontief-Modell

Einführung

Fragestellungen der Finanzmathematik:

- Wie viel Geld erhält man bei einer verzinsten Anlage?
- Wie lange brauche ich bei einer verzinsten Anlage um einen bestimmten Betrag zu erhalten?
- Wie können verschiedene Verzinsungsmodelle verglichen werden?
- Wie kann eine Rente (= konstante Zahlung über einen Zeitraum) berechnet werden?
- Was kostet die Tilgung eines Kredites?

$\longrightarrow$ **Grundlage für Investition und Finanzierung**

Einführung

Wesentliche Kenntnisse, die vermittelt werden sollen:

- Einfache (lineare) Verzinsung sowie Zinseszinsen (exponentielle Verzinsung).
- Unterschiedliche Zeitbezüge von Zahlungen.
- Kapitalwert, Barwert, Endwert, Zeitwert.
- Verfahren zur Behandlung von periodisch konstanten Zahlungen (Renten).
- Kredite und Darlehen, Tilgungspläne.

Zinsrechnung

- Zinsen (Z) sind die Vergütung für die befristete Überlassung von Kapital.
- Die Zinsperiode ist üblicherweise ein Jahr; die Zinssätze p in Prozent oder $i = p/100$ beziehen sich also auf ein ganzes Jahr.
- Die Zinsrechnung unterscheidet sich von der Prozentrechnung durch die Berücksichtigung des Zeitraums, für den Zinsen anfallen.
- Ist der Zeitraum kein ganzes Jahr, so handelt es sich dabei um unterjährige Verzinsung.
- In Deutschland Einteilung des Zinsjahres in 12 Monate zu je 30 Tagen (30/360 oder deutsche Zinsmethode).

Zinsrechnung

- Die grundlegende Formel zur Berechnung der Zinsen ($\hat{=}$ Prozentwert) (Z) aus dem Kapital ($\hat{=}$ Grundwert) (K), dem auf ein Jahr bezogenen Zinssatz ($\hat{=}$ Prozentsatz) (p) und der Zeit (t) lautet:

$$Z = \frac{K \cdot p \cdot t}{100 \cdot T},$$

  wobei $T = 1$ ($T = 12$, $T = 360$), wenn t in Jahren (Monaten, Tagen) angegeben ist.
- Für die Berechnung der Zeit t wird der Einzahlungstag mitgezählt, der Auszahlungstag nicht.
- Aus dieser Formel lassen sich alle anderen benötigten Formeln durch Umformung herleiten.

Zinsrechnung

Zinsen gesucht: Wieviel Zinsen erhält man für ein Kapital von 200 €, das für 3 Monate zum Zinssatz 5% angelegt wird?

$$Z = \frac{K \cdot p \cdot t}{100 \cdot T} = \frac{\cancel{200} \cdot 5 \cdot \cancelto{1}{3}}{\cancel{100} \cdot \cancelto{4}{12}} = 2{,}5 \qquad \text{Antwort: } 2{,}5\ €$$

Zinssatz gesucht: Wie hoch ist der Zinssatz, wenn man für ein Kapital von 200 €, das für 3 Monate angelegt wird, 2,5 € Zinsen erhält?

$$p = \frac{Z \cdot T \cdot 100}{K \cdot t} = \frac{2{,}5 \cdot \cancelto{4}{12} \cdot \cancel{100}}{\cancel{200} \cdot \cancelto{1}{3}} = 5 \qquad \text{Antwort: } 5\ \%$$

Zinsrechnung

Kapital gesucht: Wie hoch ist das angelegte Kapital, wenn man bei einem Zinssatz von 5% nach 3 Monaten 2,5 € Zinsen erhält?

$$K = \frac{Z \cdot T \cdot 100}{p \cdot t} = \frac{2{,}5 \cdot \cancelto{4}{12} \cdot 100}{5 \cdot \cancelto{1}{3}} = 200 \qquad \text{Antwort: } 200 \text{ €}$$

Vermehrtes Kapital gesucht: Wie hoch ist das Endkapital K_+ ($\hat{=}$ vermehrtes Kapital), wenn man ein Anfangskapital ($\hat{=}$ Kapital) von 200 € zum Zinssatz 5% für 3 Monate anlegt?

$$K_+ = K + Z = \left(1 + \frac{p \cdot t}{100 \cdot T}\right) \cdot K = \left(1 + \frac{5 \cdot \cancelto{1}{3}}{100 \cdot \cancelto{4}{12}}\right) \cdot 200 = 202{,}5$$

Antwort: 202,5 €

Zinsrechnung

Zeit gesucht: Für welchen Zeitraum müssen 200 € angelegt werden, um bei einem Zinssatz von 5% Zinsen in Höhe von 2,5 € zu erhalten?

$$t = \frac{Z \cdot T \cdot 100}{K \cdot p} = \frac{\cancel{2{,}5}^{1} \cdot \cancel{12}^{6} \cdot 1\cancel{00}}{\cancel{200}^{1} \cdot \cancel{5}^{2}} = 3$$

Antwort: 3 Monate

Zinsrechnung

Beispiel mit Datumsangaben, um den Zeitraum t zu berechnen: Vom 28.02. bis zum 02.04. eines Jahres werden 3.000 € zu 2,2% angelegt. Wie hoch ist das Endkapital?

- Zeitraum t: Drei Tage im Februar, 30 Tage im März, 1 Tag im April, also 34 Tage.
- Vermehrtes Kapital (= Endkapital):

$$K_+ = K + Z = \left(1 + \frac{2{,}2 \cdot 34}{100 \cdot 360}\right) \cdot 3.000 = 3.006,23$$

Zinseszinsrechnung

Wird ein Kapital verzinst und die Zinsen werden dem Kapital zugeschlagen, so wird in der nächsten Periode das Kapital einschließlich der Zinsen verzinst (Zinseszins). Zunächst nur ganzjährige Verzinsung.

Ist zum Zeitpunkt $t-1$ das Kapital gleich K_{t-1}, so folgt mit dem Zinssatz $i_t = p_t/100$ aus der Formel für das vermehrte Kapital

$$K_t = (1+i_t)K_{t-1}.$$

Ist der Zinssatz über n Jahre konstant gleich i, so folgt

$$\begin{aligned}
K_1 &= (1+i)K_0 \\
K_2 &= (1+i)K_1 = (1+i)(1+i)K_0 = (1+i)^2 K_0 \\
&\dots \\
K_n &= (1+i)^n K_0
\end{aligned}$$

Dies ist die Leibnizsche Zinseszinsformel: $\boxed{K_n = K_0(1+i)^n}$

Endwert und Barwert

Mittels der Zinseszinsformel erhält man den Endwert K_n eines Kapitals K_0 nach n Jahren, das zum Zinssatz i pro Jahr verzinst wird.

Die Formel kann nach K_0 umgestellt werden, um den Barwert eines Kapitals K_n am Anfang des Betrachtungszeitraums, also zum Zeitpunkt 0 zu erhalten:

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+i)^n}$$

Beispiel: Ein Betrag von $K_0 = 1.000$ wird zum Zinssatz $i = 5\% = 0{,}05$ für 10 Jahre angelegt. Der Endwert (in $t = n$) ist

$$K_n = 1{,}05^{10} \cdot 1.000 = 1.628,89$$

Der Barwert dieses Betrages in $t = 0$ ist

$$K_0 = \frac{1.628{,}89}{1{,}05^{10}} = 1.000$$

Verdoppelungszeit

Wie lange dauert es, bis sich ein Betrag K_0 verdoppelt hat (bis also $K_n = 2K_0$ ist)?

Diese Frage kann man durch Logarithmierung der Formel

$$2K_0 = K_0 \cdot (1+i)^n$$

beantworten, nachdem zuerst beide Seiten durch K_0 dividiert werden:

$$2 = (1+i)^n$$

$$\ln 2 = n \cdot \ln(1+i)$$

Verdoppelungszeit: $$n = \frac{\ln 2}{\ln(1+i)}$$

(Hinweis: Das Ergebnis wird im allgemeinen eine nichtganzzahlige Jahresanzahl sein; vgl. dazu den nächsten Abschnitt.)

Nichtkonstanter Zinssatz

Ist der Zinssatz nicht konstant, so kann der Endwert K_n des Kapitals analog nach folgender Formel berechnet werden:

$$K_n = (1 + i_1)(1 + i_2) \cdot \ldots \cdot (1 + i_n)K_0$$

Durch Berechnung der n-ten Wurzel aus dem Produkt der Zinsfaktoren erhält man einen konstanten durchschnittlichen Zinssatz, der zum selben Endwert führt (geometrisches Mittel):

$$(1 + i_1)(1 + i_2) \cdot \ldots \cdot (1 + i_n) = (1 + i)^n,$$

also

$$i = \sqrt[n]{(1 + i_1)(1 + i_2) \cdot \ldots \cdot (1 + i_n)} - 1$$

Im folgenden wird ein konstanter Zinssatz unterstellt.

Gemischte Verzinsung

- Ein- und Auszahlungen fallen in praktischen Fällen selten mit dem Anfang und dem Ende von Zinsperioden zusammen.
- Beispiel: Zum 01.07.2000 werden 1.000 Euro eingezahlt und mit einem Jahreszinssatz von 4% verzinst. Welcher Endwert ergibt sich zum 01.04.2009?
- Hinweis: Nach der deutschen Zinsmethode wird der Einzahlungstag meistens mitgezählt, der Auszahlungstag nicht, allerdings uneinheitlich, vgl. BGB §§ 187, 188.
- Verwendet man die gemischte Verzinsung, so gilt:

$$K_n = 1.000 \cdot (1 + \frac{180}{360} \cdot 0{,}04) \cdot (1 + 0{,}04)^8 \cdot (1 + \frac{90}{360} \cdot 0{,}04) = 1409{,}90$$

- Nachteil: Ergebnis hängt vom Zeitpunkt der Einzahlung ab.

Gemischte Verzinsung

- Beispiel: Verschiebt man im vorangehenden Beispiel den Ein- und den Auszahlungstermin um jeweils zwei Monate nach hinten, so folgt:

$$K_n = 1.000 \cdot (1 + \frac{120}{360} \cdot 0{,}04) \cdot (1 + 0{,}04)^8 \cdot (1 + \frac{150}{360} \cdot 0{,}04) = 1.409{,}93$$

- Die gemischte Verzinsung ist also inkonsistent und vom Zeitpunkt der Einzahlung abhängig.
- Ein eindeutiges Ergebnis liefert dagegen die Verzinsung mit nicht ganzzahligen Exponenten.
- Dazu wird einfach der (nichtganzzahlige) Zeitraum t in Jahren ausgerechnet, im Beispiel:

$$\text{Tage} = 180 + 8 \cdot 360 + 90 = 120 + 8 \cdot 360 + 150 = 3150, \qquad (1)$$

$$\text{also } t = \frac{3150}{360} = 8{,}75 \text{ Jahre} \qquad (2)$$

Nichtganzzahlige Exponenten

- Dann kann einfach mit der normalen Zinseszinsformel weiter gerechnet werden::

$$K_n = 1.000 \cdot (1 + 0{,}04)^{8{,}75} = 1.409{,}42$$

- Methodisch ist die Verzinsung mit nichtganzzahligen Exponenten sauberer, weil sie nicht vom Einzahlungsdatum abhängt. Wenn Startzeitpunkte nicht exakt bekannt sind, oder wenn aufgrund weiterer Ungenauigkeiten ein exaktes Ergebnis sowieso nicht berechenbar ist, sollte sie verwendet werden.
- Weil die gemischte Verzinsung üblicherweise höhere Zinserträge als die Verzinsung mit nicht ganzzahligen Exponenten erbringt, ist sie zwar inkonsistent, aber im Grundsatz bei Geldanlagen verbraucherfreundlich.

Unterjährige Verzinsung mit Zinseszinsen

Wird die Zinsperiode bei der Zinseszinsrechnung auf einen Bruchteil eines Jahres verkürzt, so spricht man von unterjähriger Verzinsung. Durch die häufigere Zinsgutschrift werden eher Zinseszinsen erzielt.

Ist i_{nom} der auf ein Jahr bezogene nominale Zinssatz (bisher einfach *Zinssatz* genannt), so ist zum Beispiel $i_{\text{nom}}/12$ der relative Monatszinssatz oder $i_{\text{nom}}/4$ der relative Quartalszinssatz.

Beispiel: Ergebnisse bei einheitlichem nominalen Jahreszinssatz $i_{\text{nom}} = 0{,}12$ (= 12%), Kapitalanlage 1.000 Euro, Laufzeit 1 Jahr. Endwert bei ...

- jährlicher Verzinsung: $1.000 \cdot 1{,}12 = 1.120{,}00$
- halbjährlicher Verzinsung: $1.000 \cdot 1{,}06^2 = 1.123{,}60$
- vierteljährlicher Verzinsung: $1.000 \cdot 1{,}03^4 = 1.125{,}51$
- monatlicher Verzinsung: $1.000 \cdot 1{,}01^{12} = 1.126{,}83$
- täglicher Verzinsung: $1.000 \cdot 1{,}000\bar{3}^{360} = 1.127{,}47$

Unterjährige Verzinsung mit Zinseszinsen

- Der effektive Zinssatz i_{eff} ist bei unterjähriger Verzinsung höher als der nominale Zinssatz (bisher war keine Unterscheidung nötig).
- Findet die Zinszahlung monatlich, also 12 mal pro Jahr statt, so folgt aus der Zinseszinsformel für das Endkapital nach n Jahren

$$K_n = \left(1 + \frac{i_{\text{nom}}}{12}\right)^{12n} K_0.$$

- Gleicher Endwert bei monatlicher und jährlicher Zinszuschreibung erfordert:

$$K_0(1 + i_{\text{eff}})^n = K_0 \left(1 + \frac{i_{\text{nom}}}{12}\right)^{12n}$$

  Auflösen nach i_{eff} liefert:

$$\boxed{i_{\text{eff}} = \left(1 + \frac{i_{\text{nom}}}{12}\right)^{12} - 1}$$

Unterjährige Verzinsung mit Zinseszinsen

- Durch diese Formel wird der effektive Zinssatz berechnet. Eine jährliche Zinsgutschrift mit dem effektiven Zinssatz ergibt den selben Endwert wie eine monatliche Gutschrift mit $i_{\text{nom}}/12$.
- Beispiel: $i_{\text{nom}} = 6\%$, $i_{\text{nom}}/12 = 0{,}5\%$, dann ist

$$i_{\text{eff}} = 1{,}005^{12} - 1 = 0{,}0617 = 6{,}17\%$$

- Werden 100 Euro für 10 Jahre angelegt, so ergibt sich in beiden Fällen (bis auf Rundungsfehler) der selbe Endwert

$$K_n = 100 \cdot 1{,}0617^{10} = 181,98; \quad K_n = 100 \cdot 1{,}005^{120} = 181{,}94$$

Unterjährige Verzinsung mit Zinseszinsen

- Umgekehrt kann zu einem gegebenen effektiven Jahreszinssatz ein konformer unterjähriger Zinssatz (hier der Monatszinssatz) bestimmt werden:

$$\boxed{\frac{i_{\text{nom}}}{12} = \sqrt[12]{(1 + i_{\text{eff}})} - 1}$$

- Der durch diese Formel berechnete Zinssatz ist der zum Jahreszinssatz i_{eff} konforme Monatszinssatz $\frac{i_{\text{nom}}}{12}$.
- Beispiel: Bei einem effektiven Jahreszinssatz von 10% erhält man nach 10 Jahren aus einem Anlagebetrag von 100,- einen Endwert von $K_n = 100 \cdot 1{,}1^{10} = 259{,}37$.
  Denselben Wert (bis auf Rundungsfehler) erhält man bei monatlicher Zinsgutschrift mit dem Zinssatz $\frac{i_{\text{nom}}}{12} = \sqrt[12]{1{,}1} - 1 = 0{,}00797 = 0{,}797\%$: $K_n = 100 \cdot 1{,}00797^{120} = 259{,}25$.
- Hinweis: Die Formeln zu Bestimmung des effektiven Zinssatzes und des konformen unterjährigen Zinssatzes können analog bei anderen unterjährigen Zeiträumen verwendet werden (z.B. „4“ statt „12“ bei quartalsweiser Verzinsung).

Berücksichtigung von Gebühren

Ein Betrag von $K_0 = 500$ € wird zu 6% nominal bei monatlicher Verzinsung für zwei Jahre angelegt. Angenommen, am Anfang der Laufzeit fällt zusätzlich eine Gebühr (Agio) in Höhe von $g = 1{,}0\%$ an. Wie hoch ist dann der Effektivzins?

- Schritt 1: Einzahlung: $K_0 \cdot (1 + g) = 500 \cdot (1 + 0{,}01) = 505{,}00.$
- Schritt 2: Am Ende der Laufzeit werden ausgezahlt:

$$K_t = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i_{\text{nom}}}{12}\right)^{24} = 500 \cdot \left(1 + \frac{0{,}06}{12}\right)^{24} = 563{,}58$$

- Schritt 3: Der Effektivzins ist nun der entsprechende Jahreszinssatz, der zum selben Endwert führt:

$$563{,}58 = 505{,}00 \cdot (1 + i_{\text{eff}})^2,$$

$$\text{also } i_{\text{eff}} = \left(\frac{563{,}58}{505{,}00}\right)^{1/2} - 1 = 0{,}0564 = 5{,}64\%$$

Kontinuierliche Verzinsung

- Stetige oder kontinuierliche Verzinsung bedeutet, dass in jedem Moment proportional zum augenblicklichen Kapital Zinsen gezahlt werden.
- Anwendungen sind zum Beispiel die Bewertung von Optionen und die Wirtschaftstheorie.
- Der auf ein Jahr bezogene Zinssatz sei ρ. Pro Zinsperiode beträgt der Zinssatz also ρ/h. Dann beträgt der Endwert nach n Jahren:

$$K_n = K_0 \left(1 + \frac{\rho}{h}\right)^{hn}.$$

- Diesen Ausdruck kann man umformen zu

$$K_n = K_0 \left[\left(1 + \frac{1}{h/\rho}\right)^{h/\rho}\right]^{\rho n}.$$

Kontinuierliche Verzinsung

- Kontinuierliche Zinszuschreibung bedeutet formal, dass $h \to \infty$ und damit auch $(h/\rho) \to \infty$. Der Grenzwert des Terms in den eckigen Klammern ist die Eulersche Zahl $e = 2{,}71828\ldots$. Damit folgt:

$$K_n = K_0 \left[\lim_{(h/\rho)\to\infty} \left(1 + \frac{1}{h/\rho}\right)^{h/\rho} \right]^{\rho n} = K_0 e^{\rho n}.$$

- ρ ist ein jahresbezogener Zinssatz und wird auch Zinsintensität oder Momentanzinssatz genannt. Auch hier kann ein konformer Effektivzinssatz berechnet werden:

$$K_0 e^{\rho n} = K_0 (1 + i_{\text{eff}})^n \;\Rightarrow\; e^{\rho} = (1 + i_{\text{eff}}),$$

also

$$i_{\text{eff}} = e^{\rho} - 1 \quad \text{oder} \quad \rho = \ln(1 + i_{\text{eff}})$$

Kontinuierliche Verzinsung

Beispiel:

- Bei einem Jahreszinssatz von 10% erhält man nach 10 Jahren aus einem Anlagebetrag von 100,- einen Endwert von $K_n = 259{,}37$ (Zinseszinsformel).
- Denselben Wert (bis auf Rundungsfehler) erhält man bei kontinuierlicher Zinsgutschrift mit dem Zinssatz $\rho = \ln 1,1 = 0{,}0953 = 9{,}53\%$:

$$K_n = 100 \cdot e^{0{,}0953 \cdot 10} = 259{,}35$$

Hinweis: ρ und i unterscheiden sich zumindest für kleine Zinssätze nur geringfügig, weil die Näherung $\ln(1 + i) \approx i$ für kleine i gilt.

Gliederung

Grundlagen

Finanzmathematik
- Zins- und Zinseszinsrechnung
- Äquivalenzprinzip und Kapitalwert
- Rentenrechnung
- Tilgungsrechnung

Lineare Algebra
- Matrizen
- Lineare Produktionsmodelle
- Lineare Gleichungssysteme und inverse Matrizen
- Das Leontief-Modell

Problemstellung

Zahlungen, die zu unterschiedlichen Zeitpunkten anfallen, können nicht direkt miteinander verglichen werden, denn ...

- bei zu leistenden Zahlungen haben frühere Zahlungen den Nachteil, dass die Liquidität zwischenzeitlich nicht mehr Zins bringend angelegt werden kann,
- bei zu erhaltenden Zahlungen haben die früheren Einnahmen den Vorteil, dass die Liquidität in der Zwischenzeit Zins bringend angelegt werden kann.

Beispiel: 1.000 €, die heute erhalten werden, haben einen höheren Wert als 1.000 € in einem Jahr. Wird nämlich die heute erhaltene Zahlung für ein Jahr angelegt (Zinssatz 3%), ergibt sich in einem Jahr mit 1.030 € ein höherer Wert.

Zahlungen können also nur sinnvoll miteinander verglichen werden, wenn sich ihr jeweiliger Wert auf einen einheitlichen Zeitpunkt bezieht.

Endwert und Barwert

Beispiel: Für den Verkauf eines Produktes liegen zwei Angebote vor: A bietet 20.000 Euro sofort und 10.000 Euro in 3 Jahren; B bietet je 15.000 Euro in einem Jahr und in 2 Jahren. Welches Angebot ist – bei einer alternativen Verzinsung von 5% – für den Verkäufer günstiger?

Lösung: Zahlungen können dann miteinander verglichen werden, wenn die Werte inklusive möglicher Zinserträge einer alternativen Anlage zu einem einheitlichen Zeitpunkt bestimmt werden. Die Endwerte der beiden Zahlungsreihen in $t = 3$ betragen:

$$-\text{A}: \quad 20.000 \cdot 1{,}05^3 + 10.000 = 33.152{,}50$$

$$-\text{B}: \quad 15.000 \cdot 1{,}05^2 + 15.000 \cdot 1{,}05 = 32.287{,}50$$

Angebot A ist daher besser.

Endwert und Barwert

Alternativ kann man auch alle Werte auf den Zeitpunkt 0 beziehen, indem die Barwerte ausgerechnet werden:

$$-A: \qquad 20.000 + \frac{10.000}{1{,}05^3} = \frac{33.152{,}50}{1{,}05^3} = 28.638{,}38$$

$$-B: \qquad \frac{15.000}{1{,}05} + \frac{15.000}{1{,}05^2} = \frac{32.287{,}50}{1{,}05^3} = 27.891{,}16$$

Auch in diesem Fall ist A vorzuziehen.

Es spielt allgemein keine Rolle, ob der Barwert oder der Endwert verwendet wird, um zwei Zahlungsströme miteinander zu vergleichen.

Allgemeine Darstellung

- Zwei Zahlungen Z_t und Z_0 heißen in der Finanzmathematik äquivalent, wenn für den relevanten Zinssatz i (ganzjährig oder unterjährig mit Zinseszinsen) gilt
$$Z_t = Z_0 \cdot (1 + i)^t$$
- Unterjährig ohne Zinseszinsen (Tage $t < 360$):
$$Z_t = Z_0 \cdot \left(1 + i \cdot \frac{t}{360}\right)$$
- Entsprechend sind zwei Zahlungsreihen äquivalent, wenn sie nach Auf- oder Abzinsung auf einen gemeinsamen Zeitpunkt den gleichen Wert haben.
- Sind zwei Zahlungen oder Zahlungsreihen äquivalent bezüglich eines Zeitpunktes, so auch bezüglich jedes anderen Zeitpunktes.
- Im vorangehenden Beispiel sind die Zahlungsreihen nicht äquivalent. Da A besser ist als B, wenn man den Endwert betrachtet, muss A auch besser sein als B, wenn man den Barwert betrachtet.

Investitionsrechnung

- In der Investitionsrechnung geht es um die Bewertung von Finanz- oder Realinvestitionen anhand der mit ihnen verbundenen Zahlungsströme.
- Vereinfachend wird unterstellt, dass eine sogenannte Normalinvestition mit einer einmaligen Auszahlung $-Z_0$ im Zeitpunkt 0 und anschließend nur positiven, jährlichen Einnahmen Z_j verbunden ist (nachschüssig, das heißt am Jahresende).
- Die grundlegende Methode der Investitionsrechnung ist die Kapitalwertmethode. Der Kapitalwert KW ist der Barwert sämtlicher mit dem Investitionsprojekt verbundenen Zahlungen:

$$KW = -Z_0 + \sum_{j=1}^{n} \frac{Z_j}{(1+i)^j} = -Z_0 + \frac{Z_1}{(1+i)^1} + \frac{Z_2}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{Z_n}{(1+i)^n}$$

- Eine Investition ist vorteilhaft gemäß der Kapitalwertmethode, wenn $KW > 0$ ist. Ist $KW \leqq 0$, so ist eine festverzinsliche Anlage zum Zinssatz i besser, weil sie einen höheren oder mindestens gleichen Ertrag erbringen würde.

Investitionsrechnung

- Offenbar spielt die Höhe des Zinssatzes i in der Investitionsrechnung eine hervorragende Rolle. In der Praxis wird nicht ein Marktzinssatz, sondern ein sogenannter Kalkulationszinssatz oder Kalkulationszinsfuß verwendet, der gleich einem am Markt erzielbaren (oder zu zahlenden) Zinssatz zuzüglich einem Risikoaufschlag ist.
- Als interner Zinsfuß wird derjenige Zinssatz bezeichnet, bei dem der Barwert aller Einzahlungen gleich dem Barwert aller Auszahlungen ist, also $KW = 0$ ist.
- Der interne Zinsfuß beschreibt damit die Rendite einer Investition.
- Eine Investition ist vorteilhaft gemäß der internen Zinsfußmethode, wenn der interne Zinsfuß größer als der Kalkulationszinsfuß ist.

Investitionsrechnung

- Für den Fall mit nur einer Auszahlung am Anfang und nachfolgenden Einzahlungen (Normalinvestition) ist der interne Zinssatz eindeutig durch die positive Lösung der folgenden Gleichung bezüglich i bestimmt:
$$Z_0 = \sum_{j=1}^{n} \frac{Z_j}{(1+i)^j}$$
- Beachte: Die Variable ist nun i.
- Handelt es sich nicht um eine Normalinvestition, so kann die Gleichung mehrere positive Lösungen haben, von denen die richtige auszuwählen ist.
- Im Allgemeinen ist die Berechnung des internen Zinsfußes nur numerisch möglich. Im Falle von nur einer oder zwei Perioden muss aber lediglich eine quadratische Gleichung gelöst werden.

Investitionsrechnung

Beispiel: Eine Investition von 1.000 € führt zu Rückzahlungen von 600 € und 500 € in den beiden Folgejahren. Der Kalkulationszinsfuß sei 5%.

- Kapitalwertmethode:

$$KW = -1.000 + \frac{600}{1{,}05^1} + \frac{500}{1{,}05^2} = 24{,}94 > 0$$

  Die Investition ist vorteilhaft gemäß der Kapitalwertmethode.

- Interne Zinsfußmethode:

$$0 = -1.000 + \frac{600}{(1+i)^1} + \frac{500}{(1+i)^2} \quad \overset{\text{p-q-Formel}}{\Longrightarrow} \quad i_{\text{int}} = 6{,}81\%$$

  Da $i_{\text{int}} > 5\%$ (= Kalkulationszinsfuß) ist die Investition ebenfalls vorteilhaft gemäß der internen Zinsfußmethode. (Hinweis: Die negative Lösung der quadratischen Gleichung ist ökonomisch nicht relevant.)

- Insbesondere beim Vergleich mehrerer Projekte müssen beide Methoden nicht zum gleichen Ergebnis führen ($\rightarrow$ Investitionsrechnung).

Investitionsrechnung

Beispiel: Verglichen werden zwei Projekte A und B:

Jahr t	0	1	2	3	4	5
A_t	-2.000	1.000	0	1.000	0	1.000
B_t	-1.600	400	400	600	600	600

Lösung mit der Kapitalwertmethode (Kalkulationszinsfuß 5%):

$$KW_A = -2.000 + \frac{1.000}{1{,}05^1} + \frac{0}{1{,}05^2} + \frac{1.000}{1{,}05^3} + \frac{0}{1{,}05^4} + \frac{1.000}{1{,}05^5} = 599{,}74 > 0$$

$$KW_B = -1.600 + \frac{400}{1{,}05^1} + \frac{400}{1{,}05^2} + \frac{600}{1{,}05^3} + \frac{600}{1{,}05^4} + \frac{600}{1{,}05^5} = 625{,}80 > 0$$

Projekt B ist demnach vorzuziehen.

Gliederung

Grundlagen

Finanzmathematik

- Zins- und Zinseszinsrechnung
- Äquivalenzprinzip und Kapitalwert
- Rentenrechnung
- Tilgungsrechnung

Lineare Algebra

- Matrizen
- Lineare Produktionsmodelle
- Lineare Gleichungssysteme und inverse Matrizen
- Das Leontief-Modell

Gegenstand

- Eine Rente ist eine Reihe fest vereinbarter Zahlungen Z, die zu bestimmten Zeitpunkten jeweils
  - am Anfang (vorschüssige Rente)
  - oder am Ende (nachschüssige Rente) einer Periode (Monat, Jahr) geleistet werden.
- Ein zentraler Gegenstand der Rentenrechnung ist die Bestimmung des Endwertes und des Barwertes solcher Zahlungsreihen.
- Die Berechnung erfolgt unter Verwendung der Summen von arithmetischen und geometrischen Reihen, für deren Herleitung auf die Literatur verwiesen wird.

Berechnung eines Rentenendwertes

- Der Zinsfaktor $1 + i$ wird zur vereinfachten Darstellung mit q abgekürzt ($q = 1 + i$).
- Der Endwert K_n einer nachschüssigen Rente ist die aufgezinste Summe aller einzelnen Rentenzahlungen:

$$\begin{aligned} K_n &= Zq^{n-1} + Zq^{n-2} + \ldots + Zq + Z \\ &= Z \cdot \underbrace{\left(q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + q + 1\right)}_{\text{geometrische Reihe}} \\ &= Z \cdot \underbrace{\frac{q^n - 1}{q - 1}}_{\text{Summe der geometrischen Reihe}} \end{aligned}$$

- Kurz:

$$K_n = Z\frac{q^n - 1}{q - 1}$$

End- und Barwert einer nachschüssigen Rente

- Ersetzt man wieder q durch $1+i$, so folgt schließlich für den Endwert der nachschüssigen Rente::

$$\boxed{K_n = Z\frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

- Der Barwert der nachschüssigen Rente kann daraus durch Diskontierung mit dem Abzinsungsfaktor $1/(1+i)^n$ bestimmt werden:

$$\boxed{K_0 = \frac{K_n}{(1+i)^n} = Z\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}}$$

End- und Barwert einer vorschüssigen Rente

Der Endwert einer vorschüssigen Rente folgt aus der Überlegung, dass bei vorschüssiger Zahlungsweise im Vergleich zur nachschüssigen Zahlung einmal mehr verzinst wird. Der Endwert der nachschüssigen Rente wird daher mit $(1+i)$ multipliziert:

$$\boxed{K_n = Z(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

Der Barwert kann wieder durch Diskontierung mit dem Abzinsungsfaktor $1/(1+i)^n$ bestimmt werden:

$$\boxed{K_0 = \frac{K_n}{(1+i)^n} = Z\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^{n-1}}}$$

Bezeichnungen

$$
\begin{aligned}
p &\triangleq \text{Zinssatz in Prozent} \\
i &\triangleq p/100 \\
q = (1+i) &\triangleq \text{(jährlicher) Zinsfaktor} \\
(1+i)^n &\triangleq \text{Aufzinsungsfaktor} \\
(1+i)^{-n} &\triangleq \text{Abzinsungsfaktor, Diskontierungsfaktor} \\
(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i} &\triangleq \text{Rentenendwertfaktor (vorschüssig)} \\
\frac{(1+i)^n - 1}{i} &\triangleq \text{Rentenendwertfaktor (nachschüssig)} \\
\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^{n-1}} &\triangleq \text{Rentenbarwertfaktor (vorschüssig)} \\
\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} &\triangleq \text{Rentenbarwertfaktor (nachschüssig)}
\end{aligned}
$$

Bedeutung der Rentenfaktoren

- Mit den bisher abgeleiteten Formeln lassen sich zahlreiche Probleme der Finanzmathematik lösen. Einige Beispiele dazu werden im folgenden behandelt.
- Da die Rentenfaktoren von zentraler Bedeutung sind, wurden sie früher für bestimmte Zahlenwerte tabelliert. Angesichts der modernen EDV ist dieses Vorgehen nicht mehr zeitgemäß.

Sparvertrag

In einen Sparvertrag werden jährlich am Jahresanfang 1.000,- eingezahlt. Der jährliche Zinssatz beträgt 5%. Der Endwert nach 10 Jahren beträgt dann

$$K_n = 1.000 \cdot 1{,}05 \frac{1{,}05^{10} - 1}{0{,}05} = 13.206{,}79$$

Der Barwert ist

$$K_0 = \frac{13.206{,}79}{1{,}05^{10}} = 8.107{,}82$$

Bei nachschüssiger Zahlungsweise gilt dagegen:

$$K_n = 1.000 \cdot \frac{1{,}05^{10} - 1}{0{,}05} = 12.577{,}89$$

$$K_0 = \frac{12.577{,}89}{1{,}05^{10}} = 7.721{,}73$$

Unterjährige Renten

Bisher jährliche Rentenzahlungen; jetzt: Aufteilung der Jahre in jeweils 12 Rentenzahlungs-Perioden.

Vorgehensweise:

- Bestimmung des Jahresendwertes Z_e (konforme jährlich nachschüssige Ersatzrentenrate) der 12 unterjährigen Rentenzahlungen Z_u.
- Mit dem äquivalenten Jahresendwert kann dann wie bisher weiter gerechnet werden.

Zu beachten ist, dass innerhalb eines Jahres i.d.R. keine Zinseszinsen berechnet werden. Die Aufzinsung der 12 unterjährigen Rentenzahlungen erfolgt daher mit einfacher (unterjährig linearer) Verzinsung.

Die folgenden Berechnungen zeigen unter Verwendung der Summenformel für eine arithmetische Reihe, wie die jährlich nachschüssigen Ersatzrentenraten Z_e aus den monatlichen Raten Z_u hergeleitet werden.

Konforme Ersatzrentenraten

Konforme jährlich nachschüssige Ersatzrentenrate bei unterjährig nachschüssiger Rente:

$$
\begin{aligned}
Z_e &= Z_u\left(1+\frac{11}{12}i\right)+Z_u\left(1+\frac{10}{12}i\right)+\ldots+Z_u\left(1+\frac{0}{12}i\right)\\
&= Z_u\left(12+\frac{11+10+\ldots+0}{12}i\right) = 12Z_u+\frac{i}{12}Z_u(1+2+\ldots+11)\\
&= 12Z_u+\frac{i}{12}Z_u\frac{11\cdot 12}{2} = Z_u(12+5{,}5i)
\end{aligned}
$$

Konforme jährlich nachschüssige Ersatzrentenrate bei unterjährig vorschüssiger Rente:

$$
\begin{aligned}
Z_e &= Z_u\left(1+\frac{12}{12}i\right)+Z_u\left(1+\frac{11}{12}i\right)+\ldots+Z_u\left(1+\frac{1}{12}i\right)\\
&= Z_u\left(12+\frac{12+11+\ldots+1}{12}i\right) = 12Z_u+\frac{i}{12}Z_u(1+2+\ldots+12)\\
&= 12Z_u+\frac{i}{12}Z_u\frac{12\cdot 13}{2} = Z_u(12+6{,}5i)
\end{aligned}
$$

Konforme Ersatzrentenraten

- Konforme jährlich nachschüssige Ersatzrentenrate Z_e bei m unterjährig nachschüssigen Zahlungen Z_u:

$$\boxed{Z_e = Z_u\left(m + \frac{m-1}{2}i\right)} \quad \text{bei } m = 12\text{:} \quad \boxed{Z_e = Z_u(12 + 5{,}5i)}$$

- Konforme jährlich nachschüssige Ersatzrentenrate Z_e bei m unterjährig vorschüssigen Zahlungen Z_u:

$$\boxed{Z_e = Z_u\left(m + \frac{m+1}{2}i\right)} \quad \text{bei } m = 12\text{:} \quad \boxed{Z_e = Z_u(12 + 6{,}5i)}$$

- Mit der äquivalenten jährlichen Ersatzrentenrate Z_e kann nun unter Verwendung der nachschüssigen Rentenformeln weitergerechnet werden.

Beispiele

Wieviel Geld können Sie nach 10 Jahren abheben, wenn Sie monatlich vorschüssig 100 € bei einem Zinssatz von 3% anlegen?

(1) Nachschüssige Ersatzrentenrate:

$$\begin{aligned} Z_e &= Z_u(12 + 6{,}5i) \\ &= 100 \cdot (12 + 6{,}5 \cdot 0{,}03) \\ &= 100 \cdot 12{,}195 = 1219{,}50 \end{aligned}$$

(2) Rentenendwert nachschüssig:

$$\begin{aligned} K_n &= Z_e \frac{(1+i)^n - 1}{i} \\ &= 1219{,}50 \cdot \frac{1{,}03^{10} - 1}{0{,}03} \\ &= 13.980{,}20 \end{aligned}$$

Beispiele

Ein heute 57-jähriger Arbeitnehmer hat in 10 Jahren einen Anspruch auf eine monatliche Betriebsrente von 500 Euro, die vorschüssig bezahlt wird. Durch welche Gegenleistung kann sie heute bei einem Zinssatz von 6% abgelöst werden, wenn eine Lebenserwartung von 79 Jahren angenommen wird?

Lösung in drei Schritten:

(1) Berechnung der konformen jährlich nachschüssigen Ersatzrentenrate der vorschüssigen unterjährigen Rente.

(2) Barwert der Ersatzrentenraten zum Zeitpunkt des Rentenbeginns.

(3) Barwert heute.

Beispiele

(1) Berechnung der Ersatzrentenrate:

$$Z_e = Z_u(12 + 6{,}5i) = 500 \cdot (12 + 6{,}5 \cdot 0{,}06) = 6.195$$

(2) Barwert zum Zeitpunkt des Rentenbeginns:

$$K_{10} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} Z_e = \frac{1{,}06^{12} - 1}{0{,}06 \cdot 1{,}06^{12}} 6.195 = 51.937{,}91$$

(3) Barwert heute:

$$K_0 = \frac{K_{10}}{(1+i)^{10}} = \frac{51.937{,}91}{1{,}06^{10}} = 29.001{,}86$$

Ewige Rente

- Allgemein heißt in der Rentenrechnung eine Rente mit unendlicher Laufzeit ewige Rente.
- Die Endwerte sind unendlich, die Barwerte können sinnvoll berechnet werden.
- Barwert der ewigen nachschüssigen Rente:

$$K_0 = \lim_{n\to\infty} Z \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} = \frac{Z}{i}, \quad \text{kurz:} \quad \boxed{K_0 = \frac{Z}{i}}$$

- Barwert der ewigen vorschüssigen Rente:

$$K_0 = \lim_{n\to\infty} Z \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^{n-1}} = Z + \frac{Z}{i}, \quad \text{kurz:} \quad \boxed{K_0 = Z + \frac{Z}{i}}$$

- Hinweis: Die Rente entspricht den Zinsen.

Gliederung

Grundlagen

Finanzmathematik

- Zins- und Zinseszinsrechnung
- Äquivalenzprinzip und Kapitalwert
- Rentenrechnung
- Tilgungsrechnung

Lineare Algebra

- Matrizen
- Lineare Produktionsmodelle
- Lineare Gleichungssysteme und inverse Matrizen
- Das Leontief-Modell

Annuitäten- und Tilgungsdarlehen

- Berechnung der Raten (= Zinsen plus Tilgung) zur Rückzahlung größerer Darlehen.
- Entweder wird das Darlehen innerhalb der Laufzeit (Zinsbindungsfrist) vollständig zurückgezahlt, oder es verbleibt eine Restschuld.
- Annuitätendarlehen: Die Rate (= Annuität) bleibt über den Rückzahlungszeitraum konstant.
- Tilgungsdarlehen: Der Tilgungsanteil bleibt konstant, wodurch die Rate aufgrund der weniger werdenden Zinsen sinkt.

Annuitätendarlehen

- Zur Tilgung eines Darlehens K_0 werde über eine feste Laufzeit jeweils zum Ende einer Periode ein Betrag Z eingezahlt. Dann ist die Schuld getilgt, wenn der Barwert der Zahlungen Z gleich K_0 ist:

$$K_0 = Z\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$$

- Also muss der Tilgungsbetrag (die Annuität) lauten:

$$\boxed{Z = K_0\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}}$$

- Der Kehrwert des Rentenbarwertfaktors heißt Annuitätenfaktor.
- Restschuld am Ende des Jahres k (ohne Herleitung):

$$\boxed{K_k = K_0\frac{(1+i)^n - (1+i)^k}{(1+i)^n - 1}}$$

Annuitätendarlehen

- Beispiel: Um ein Darlehen von 16.000,- in 20 Jahren zurückzuzahlen, beträgt die erforderliche jährliche Rückzahlung bei einem Zinssatz von 9%

$$Z = 16.000 \frac{0{,}09 \cdot 1{,}09^{20}}{1{,}09^{20} - 1} = 1.752{,}74$$

- Nach 10 Jahren beträgt die Restschuld:

$$K_{10} = 16.000 \frac{1{,}09^{20} - 1{,}09^{10}}{1{,}09^{20} - 1} = 11.248{,}51$$

- Nach 20 Jahren beträgt die Restschuld:

$$K_{20} = 16.000 \frac{1{,}09^{20} - 1{,}09^{20}}{1{,}09^{20} - 1} = 0$$

Annuitätendarlehen

- Nun wird angenommen, die Höhe der Annuität wird vorgegeben.
- Dann kann die Laufzeit n berechnet werden, nach der das Darlehen getilgt ist (folgt durch Auflösen der Annuitätenformel nach n):

$$\boxed{n = -\frac{\ln(1 - K_0 \cdot i/Z)}{\ln(1+i)}}$$

- Für das vorangehende Beispiel (Darlehen $K_0 = 16.000$, Zinssatz $i = 0{,}09$, Annuität $Z = 1.752{,}74$) folgt:

$$n = -\frac{\ln(1 - 16.000 \cdot 0{,}09/1.752{,}74)}{\ln 1{,}09} = 20{,}0001$$

Tilgungsdarlehen

- Bei einem Tilgungsdarlehen ist der Tilgunsbetrag T konstant.
- Die Rate setzt sich aus Tilgung T und Zinsen zusammen.
- Die Rate ist anfangs hoch und sinkt dann zum Ende der Laufzeit immer weiter.
- Soll das Darlehen der Höhe K_0 in n Jahren getilgt werden, so beträgt die Tilgung T pro Jahr
$$T = \frac{K_0}{n}$$
- Die Restschuld am Ende des Jahres k ist $K_k = K_0 - k \cdot T$.
- Die im Jahr k zu zahlenden Zinsen betragen: $i \cdot K_{k-1}$, die gesamte Rate daher $Z_k = T + i \cdot K_{k-1}$.

Tilgungsdarlehen

Beispiel: Ein Unternehmen nimmt einen Kredit über 500.000 € zu 7% Zins auf. Der Kredit ist in fünf Jahren mit gleich bleibenden Tilgungsraten zu tilgen. Hier bietet sich die Darstellung anhand eines Zins- und Tilgungsplanes an:

Jahr	Restschuld	Zinsen	Tilgung	Rate
0	500.000	0	0	0
1	400.000	35.000	100.000	135.000
2	300.000	28.000	100.000	128.000
3	200.000	21.000	100.000	121.000
4	100.000	14.000	100.000	114.000
5	0	7.000	100.000	107.000

Gliederung

Grundlagen

Finanzmathematik
- Zins- und Zinseszinsrechnung
- Äquivalenzprinzip und Kapitalwert
- Rentenrechnung
- Tilgungsrechnung

Lineare Algebra
- Matrizen
- Lineare Produktionsmodelle
- Lineare Gleichungssysteme und inverse Matrizen
- Das Leontief-Modell

Gegenstand

Fragestellungen der Linearen Algebra:

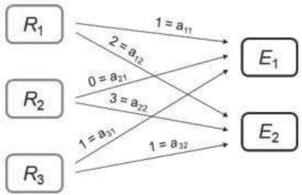
- Wie kann ich größere Datenmengen in strukturierter Form darstellen?
- Tabellarische Daten (Excel) sind wichtiger Bestandteil vieler betriebs- und volkswirtschaftlicher Fragestellungen.
- Wie kann ich lineare Beziehungen zwischen Produktionsprozessen oder Bilanzbeziehungen beschreiben?
- Wie kann ich Teilbedarfsmengen oder interne Leistungen verrechnen?

$\longrightarrow$ **Beschaffung / Fertigung, Unternehmenssteuerung**

Einführungsbeispiel

- Eine Unternehmung stellt mit Hilfe der Produktionsfaktoren R_1, R_2, R_3 zwei Produkte E_1 und E_2 her.
- Zur Produktion für jede Mengeneinheit e_j von E_j $(j = 1, 2)$ werden a_{ij} Mengeneinheiten r_i von R_i $(i = 1, 2, 3)$ verbraucht (die a_{ij} heißen Inputkoeffizienten). Die graphische Darstellung heißt Gozintograph.

		Verbrauch für 1 ME von E1	E2
von ME der Produktions-faktoren	R1	1 (a_{11})	2 (a_{12})
	R2	0 (a_{21})	3 (a_{22})
	R3	1 (a_{31})	1 (a_{32})



- Welche Mengen r_i von den Produktionsfaktoren R_i werden zur Herstellung der Mengen $e_1 = 10$ und $e_2 = 5$ der Endprodukte E_j benötigt?

Einführungsbeispiel

Lösung:

- In Gleichungsform:

$$\begin{aligned} r_1 &= a_{11} \cdot e_1 + a_{12} \cdot e_2 = 1 \cdot 10 + 2 \cdot 5 = 20 \\ r_2 &= a_{21} \cdot e_1 + a_{22} \cdot e_2 = 0 \cdot 10 + 3 \cdot 5 = 15 \\ r_3 &= a_{31} \cdot e_1 + a_{32} \cdot e_2 = 1 \cdot 10 + 1 \cdot 5 = 15 \end{aligned}$$

- In Matrixform:

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Matrizen

Eine $m \times n$-Matrix A mit m Zeilen und n Spalten (kurz: $A_{m,n}$) ist ein geordnetes, rechteckiges Schema von $m \cdot n$ Symbolen oder Zahlen.

$$A_{m,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & a_{ij} & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- $i =$ Zeilenindex, $j =$ Spaltenindex, a_{ij} Element oder Komponente der Matrix A in der i-ten Zeile und j-ten Spalte.
- Zwei Matrizen sind gleich, wenn sie gleiche Größe haben und alle Ihre Elemente übereinstimmen.
- Die grundlegenden Operationen mit Matrizen werden anhand von Beispielen erläutert.

Addition und Subtraktion

- Zwei Matrizen A und B können addiert bzw. subtrahiert werden, wenn sie bzgl. der Anzahl der Zeilen und Spalten jeweils übereinstimmen, indem jeweils die Einträge an den gleichen Stellen (i, j) addiert bzw. subtrahiert werden.
- Beispiele:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Multiplikation mit einem Skalar

- Als Skalar bezeichnet man in der linearen Algebra zur Unterscheidung von Matrizen (und Vektoren, siehe unten) eine reelle Zahl.
- Eine Matrix A wird mit einem Skalar $\lambda \in R$ multipliziert, indem jedes Element a_{ij} mit λ multipliziert wird.
- Beispiel:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Transposition und Vektoren

- Die Transponierte einer Matrix A ist die Matrix A', die aus A durch die Vertauschung von Zeilen und Spalten entsteht.
- Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$$

- Ein Vektor (oder (Spaltenvektor) $\mathbf{x}$ ist eine Matrix mit nur einer Spalte. Transponiert man ihn, so erhält man einen Zeilenvektor. Umgekehrt wird ein Zeilenvektor durch Transposition zum Spaltenvektor.
- Beispiel:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{zum Platzsparen: } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}',$$

oder auch komma- oder semikolongetrennt $\mathbf{x} = (2, 1)'$.

Multiplikation zweier Matrizen

- Zwei Matrizen A und B können miteinander multipliziert werden, wenn die Anzahl der Spalten der ersten Matrix gleich der Anzahl der Zeilen der zweiten Matrix ist.
- Zunächst wird der einfachste Fall der Multiplikation zweier Vektoren $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)'$ und $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)'$ betrachtet.
- Das Skalarprodukt dieser Vektoren ist definiert als

$$\mathbf{x}'\mathbf{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

- Andere übliche Schreibweisen: $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$, $\mathbf{x}^T\mathbf{y}$.

Multiplikation zweier Matrizen

- Das Skalarprodukt ist nur definiert, wenn beide Vektoren die gleiche Dimension haben, wobei der Zeilenvektor (eine $(1 \times n)$-Matrix) vorne und der Spaltenvektor (eine $(n \times 1)$-Matrix) hinten steht.
- Das Ergebnis ist eine (1×1)-Matrix, also ein Skalar.
- Beispiel: $\mathbf{x} = (2, 1, 3)'$ und $\mathbf{y} = (10, 12, 11)'$:

$$\mathbf{x}'\mathbf{y} = 2 \cdot 10 + 1 \cdot 12 + 3 \cdot 11 = 65$$

- Matrizenmultiplikation: Bilde sämtliche Skalarprodukte der Zeilenvektoren der vorderen Matrix mit den Spaltenvektoren der hinteren Matrix; in der Ergebnismatrix steht an der Stelle (i, k) das Skalarprodukt des i-ten Zeilenvektors der vorderen Matrix mit der k-ten Spalte der hinteren Matrix.
- Das Einführungsbeispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 10 + 2 \cdot 5 \\ 0 \cdot 10 + 3 \cdot 5 \\ 1 \cdot 10 + 1 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Multiplikation zweier Matrizen

- Für allgemeine Matrizen ist also der Ausdruck $A_{m,n} \cdot B_{n,r}$ definiert, der Ausdruck $B_{n,r} \cdot A_{m,n}$ dagegen nicht. Für das Ergebnis gilt:

$$A_{m,n} \cdot B_{n,r} = C_{m,r}$$

- Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}_{3,2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}_{2,2} = \begin{pmatrix} 1+2 & 4+1 \\ 3+0 & 12+0 \\ 4+4 & 16+2 \end{pmatrix}_{3,2} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 12 \\ 8 & 18 \end{pmatrix}_{3,2}$$

- Die folgende Matrizenmultiplikation ist dagegen nicht definiert:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}_{2,2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}_{3,2}$$

Falksches Schema

- Das folgende Multiplikationsschema kann am Anfang helfen. Links unten steht die erste Matrix A, die mit der Matrix B rechts oben zeilen- mal spaltenweise multipliziert wird.
- Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4,2}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}_{2,3}$$

$$\begin{array}{cc|ccc} & & 1 & 2 & 4 \\ & & -1 & 2 & -2 \\ \hline 2 & 1 & 1 & 6 & 6 \\ 1 & -2 & 3 & -2 & 8 \\ -1 & 2 & -3 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 \end{array}$$

Rechenregeln

Assoziativgesetze:

$$(A+B)+C = A+(B+C)$$
$$(AB)C = A(BC)$$

Kommutativgesetz:
(nur für Addition)

$$A+B = B+A$$

Distributivgesetze:

$$A(B+C) = AB+AC$$
$$(A+B)C = AC+BC$$

Transposition:

$$(A+B)' = A'+B'$$
$$(A-B)' = A'-B'$$
$$(A')' = A$$
$$(rA)' = rA'$$
$$(AB)' = B'A'$$

Spezielle Matrizen

Quadratische Matrix:	$n = m$
Diagonalmatrix:	$n = m$, $a_{ij} = 0$ für $i \neq j$
symmetrische Matrix:	$A = A'$
obere Dreiecksmatrix:	$a_{ij} = 0$ für alle $i > j$
untere Dreiecksmatrix:	$a_{ij} = 0$ für alle $i < j$
Einsmatrix:	$a_{ij} = 1$ für alle i, j
Nullmatrix O:	$a_{ij} = 0$ für alle i, j
Einheitsmatrix $I_{n,n}$:	$a_{ij} = 1$ für $i = j$, $a_{ij} = 0$ für $i \neq j$

Spezielle Matrizen

- Die Nullmatrix ist das neutrale Element der Addition:

$$O_{n,n} + A_{n,n} = A_{n,n} + O_{n,n} = A_{n,n}$$

- Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Die Einheitsmatrix ist das neutrale Element der Multiplikation:

$$I_{n,n}A_{n,n} = A_{n,n}I_{n,n} = A_{n,n}$$

- Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Gliederung

Grundlagen

Finanzmathematik

- Zins- und Zinseszinsrechnung
- Äquivalenzprinzip und Kapitalwert
- Rentenrechnung
- Tilgungsrechnung

Lineare Algebra

- Matrizen
- Lineare Produktionsmodelle
- Lineare Gleichungssysteme und inverse Matrizen
- Das Leontief-Modell

Einführungsbeispiel

- Einführungsbeispiel aus dem vorangehenden Abschnitt:

		Verbrauch für 1 ME von E1	E2
von ME der	R1	1 (a_{11})	2 (a_{12})
Produktions-	R2	0 (a_{21})	3 (a_{22})
faktoren	R3	1 (a_{31})	1 (a_{32})

- Um $e_1 = 10$ und $e_2 = 5$ Einheiten zu produzieren, sind folgende Rohstoffmengen erforderlich: $(r_1, r_2, r_3)' = (20, 15, 15)'$.
- Wie hoch ist der Gewinn G, wenn die Rohstoffpreise $\mathbf{p}_r = (0{,}5; 1; 2)'$ und die Verkaufspreise der Endprodukte $\mathbf{p} = (10; 20)'$ betragen?

$$
\begin{aligned}
G &= \text{Erlös} - \text{Kosten} = \mathbf{p}'\mathbf{e} - \mathbf{p}_r'\mathbf{r} \\
&= \begin{pmatrix} 10 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 15 \end{pmatrix} \\
&= 10 \cdot 10 + 20 \cdot 5 - 0{,}5 \cdot 20 - 1 \cdot 15 - 2 \cdot 15 = 145
\end{aligned}
$$

Bedarfsermittlung von Rohstoffen

- Der folgende Abschnitt wird anhand eines weiteren Beispiels behandelt. Die Tabelle gibt wieder die Inputkoeffizienten des linearen Produktionsprozesses an:

	E_1	E_2
R_1	3	7
R_2	2	4
R_3	5	2

- Die Zeilen der Tabelle geben die Verwendungsnachweise an, die Spalten die Stücklisten.
- Die Tabelle wird als Matrix A geschrieben:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Bedarfsermittlung von Rohstoffen

- Gesamtbedarf an Rohstoffen r_1, r_2 und r_3 für die Produktionsmengen e_1 und e_2:

$$\begin{aligned} r_1 &= 3e_1 + 7e_2 \\ r_2 &= 2e_1 + 4e_2 \\ r_3 &= 5e_1 + 2e_2 \end{aligned}$$

- In Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

- Für $e_1 = 40$ und $e_2 = 70$ ergibt sich folgender Rohstoffbedarf:

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40 \\ 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 610 \\ 360 \\ 340 \end{pmatrix}$$

Bedarfsermittlung von Rohstoffen

- Wenn die Preise für Endprodukte und Rohstoffe gegeben sind, kann auch der Gewinn berechnet werden.
- Für das Beispiel gelte: $p_1 = 200$, $p_2 = 300$, $p_{r_1} = 10$, $p_{r_2} = 20$, $p_{r_3} = 10$. Zusätzlich fallen Fixkosten in Höhe von 10.000 Euro an.
- Damit folgt für den Gewinn, wenn $e_1 = 40$ und $e_2 = 70$ Einheiten abgesetzt werden können:

$$G = \underbrace{200 \cdot 40 + 300 \cdot 70}_{\text{Erlös (Umsatz)}} - \underbrace{(10 \cdot 610 + 20 \cdot 360 + 10 \cdot 340 + 10.000)}_{\text{Kosten}}$$

$$= 29.000 - 26.700 = 2.300$$

Mehrstufige lineare Produktionsprozesse

- Nun werden aus den drei Rohstoffen zunächst drei Zwischenprodukte (Z_i) und aus diesen Zwischenprodukten die beiden Endprodukte erzeugt.

	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	2	1	1
R_2	3	3	4
R_3	4	5	2

	E_1	E_2
Z_1	6	2
Z_2	4	1
Z_3	3	7

- Multipliziert man den Vektor der Endprodukterzeugung mit der zweiten Matrix von links, so erhält man den Bedarf an Zwischenprodukten $(z_1, z_2, z_3)'$. Multipliziert man den Bedarf an Zwischenprodukten von links mit der ersten Matrix, folgt daraus der Bedarf an Rohstoffen.

Mehrstufige lineare Produktionsprozesse

- Damit gilt:

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}}_{(z_1, z_2, z_3)'}$$

- Multipliziert man die beiden Matrizen rechts aus, so ergibt sich die Bedarfsmatrix für Rohstoffe des Gesamtprozesses. Will man etwa $e_1 = 30$ und $e_2 = 40$ Einheiten produzieren, so folgt für den Rohstoffbedarf:

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 12 \\ 42 & 37 \\ 50 & 27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.050 \\ 2.740 \\ 2.580 \end{pmatrix}$$

- Ergänzungsfrage: Wieviel wird von den einzelnen Zwischenprodukten jeweils produziert?

Mehrstufige lineare Produktionsprozesse

- Falls die Rohstoffe nicht nur bei der Erstellung der Zwischenprodukte, sondern auch direkt bei der Endprodukterzeugung benötigt werden, muss dies zusätzlich berücksichtigt werden.

	E_1	E_2
R_1	2	0
R_2	0	3
R_3	0	0

- $$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 120 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Der Gesamtbedarf ist also $(1.050, 2.740, 2.580)' + (60, 120, 0)' = (1.110, 2.860, 2.580)'$.

Gliederung

Grundlagen

Finanzmathematik
- Zins- und Zinseszinsrechnung
- Äquivalenzprinzip und Kapitalwert
- Rentenrechnung
- Tilgungsrechnung

Lineare Algebra
- Matrizen
- Lineare Produktionsmodelle
- Lineare Gleichungssysteme und inverse Matrizen
- Das Leontief-Modell

Wiederholung Schulmathematik: Lösungsmethoden

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 &= 7 && \text{(I)}\\
x_1 - x_2 &= 1 && \text{(II)}
\end{aligned}
$$

- Einsetzungsverfahren: Aus (II): $x_1 = 1 + x_2$, einsetzen in (I): $2(1 + x_2) + 3x_2 = 7$, also $x_2 = 1$, einsetzen in (II): $x_1 = 2$.
- Gleichsetzungsverfahren: (I) und (II) nach x_1 auflösen:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 3{,}5 - 1{,}5x_2\\
x_1 &= 1 + x_2
\end{aligned}
$$

  Gleichsetzen: $3{,}5 - 1{,}5x_2 = 1 + x_2$, also $x_2 = 1$, einsetzen in (II): $x_1 = 2$.

Wiederholung Schulmathematik: Lösungsmethoden

- Additionsverfahren: Multiplikation von (II) mit -2 und anschließende Addition beider Gleichungen:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 7 && \text{(I)} \\ -2x_1 + 2x_2 &= -2 && \text{(II')} \\ 5x_2 &= 5, && \text{(I)+(II')} \end{aligned}$$

  also $x_2 = 1$. Einsetzen in (II) liefert wieder $x_1 = 2$.

Fazit: Das Gleichungssystem (I), (II) hat die Lösungsmenge $L = \{(2; 1)\}$.

Lösungsverhalten

- (I) und (II) stellen für sich genommen Geradengleichungen dar:

$$2x_1 + 3x_2 = 7 \Rightarrow x_2 = -\frac{2}{3}x_1 + \frac{7}{3}$$
$$x_1 - x_2 = 1 \Rightarrow x_2 = x_1 - 1$$

- Im Beispiel schneiden sich beide Geraden genau einmal: eindeutige Lösung $L = \{(2; 1)\}$.
- Durch $x_1 - x_2 = 1$ und $2x_1 - 2x_2 = 2$ sind zwei identische Geraden gegeben: unendlich viele Lösungen $L = \{(x_1, x_2) \in R^2 \mid x_2 = x_1 - 1\}$.
- Durch $x_1 - x_2 = 1$ und $2x_1 - 2x_2 = 4$ sind zwei parallele Geraden gegeben: keine Lösung $L = \emptyset$.

Lösungsverhalten

- Lineare Gleichungssysteme, auch mit mehr als zwei Variablen und Gleichungen, haben generell entweder eine eindeutige, keine oder unendlich viele Lösungen.
  - Wenn mehr Gleichungen als Variablen vorhanden sind, wird es in der Regel keine Lösung geben.
  - Wenn mehr Variablen als Gleichungen vorhanden sind, wird es in der Regel unendlich viele Lösungen geben.
  - Wenn die Anzahl der Variablen und Gleichungen übereinstimmt, wird es in der Regel eine eindeutige Lösung geben.
- Genauere Bedingungen finden Sie in der Literatur. Später wird kurz das Rangkriterium dargestellt.

Matrix-Darstellung

- Aus den Koeffizienten des Gleichungssystems (I), (II) kann eine Matrix geformt werden:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- Die beiden Variablen und die rechte Seite des Gleichungssystems lassen sich als Vektoren darstellen:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Damit kann das Gleichungssystem (I), (II) matriziell folgendermaßen dargestellt werden:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{oder kurz:} \qquad A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Gaußscher Algorithmus

- Das Additionsverfahren wird nun zum Gaußschen Algorithmus erweitert.
- Erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$\hat{A} = (A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

- Folgende elementaren Zeilenoperationen lassen die Lösungsmenge des Gleichungssystems unverändert:
  - Vertauschen zweier Zeilen,
  - Multiplikation einer Zeile mit einer reellen Zahl außer Null,
  - Addition einer Zeile zu einer anderen Zeile.
  - Sie dürfen keine Zahl zu einer Gleichung addieren!

Gaußscher Algorithmus

- Ziel der Umformungen: Aus A wird eine Einheitsmatrix $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$. Aus **b** wird dann der Lösungsvektor.
-

$$\left(\begin{array}{cc|c}2&3&7\\1&-1&1\end{array}\right)\xrightarrow{I:2}\left(\begin{array}{cc|c}1&1{,}5&3{,}5\\1&-1&1\end{array}\right)\xrightarrow[II-I]{}\left(\begin{array}{cc|c}1&1{,}5&3{,}5\\0&-2{,}5&-2{,}5\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[II:(-2{,}5)]{}\left(\begin{array}{cc|c}1&1{,}5&3{,}5\\0&1&1\end{array}\right)\xrightarrow{I-1{,}5II}\left(\begin{array}{cc|c}1&0&2\\0&1&1\end{array}\right)$$

- Ergebnis in Gleichungsform:

$$1\cdot x_1+0\cdot x_2=2$$
$$0\cdot x_1+1\cdot x_2=1$$

also $x_1=2$ und $x_2=1$.

- Hinweis: Als Zwischenlösung ergibt sich die obere Dreiecksform der Matrix A.

Gaußscher Algorithmus mit drei Gleichungen

Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 10 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 10 \\ -x_1 + 2x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \hat{A} = (A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 10 \\ 1 & -1 & 1 & 10 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Division I. durch 2, anschließend Subtraktion II.$-$I.:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0{,}5 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 10 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0{,}5 & 0 & 5 \\ 0 & -0{,}5 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Addition III.$+$I.:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0{,}5 & 0 & 5 \\ 0 & -0{,}5 & 1 & 5 \\ 0 & -0{,}5 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

Gaußscher Algorithmus mit drei Gleichungen

Subtraktion III.$-$II.:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0{,}5 & 0 & 5 \\ 0 & -0{,}5 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Division II. durch $-0{,}5$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0{,}5 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Addition II.$+$ 2$\cdot$ III.:

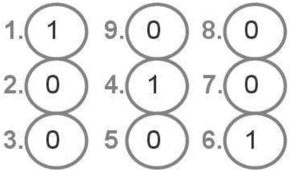
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0{,}5 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Addition I.$+$ 0,5$\cdot$ II.:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right), \quad \text{also} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gaußscher Algorithmus mit drei Gleichungen

Der systematische, *algorithmische* Weg besteht darin, nebenstehende Reihenfolge der Produktion von Nullen und Einsen zu verfolgen.



- In der Regel ist es sinnvoll, sich an diese Reihenfolge zu halten.
- Allerdings kann man manchmal einige Schritte in anderer Reihenfolge machen, um sich Rechenarbeit zu ersparen (siehe vorangehendes Beispiel).
- Der Gaußsche Algorithmus funktioniert auch bei mehr als drei Gleichungen; allerdings wird die Berechnung per Hand schnell sehr aufwendig. Er wird aber auch in Software-Lösungen verwendet.

Das Rangkriterium

- Der Rang einer Matrix ist die Anzahl der Zeilen in einer oberen Dreiecksform, in der jede Zeile mehr führende Nullen hat als die vorausgehende, die nicht ausschließlich aus Nullen bestehen.
- Mit dem Rang kann ein wichtiges Kriterium für die Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme angegeben werden.
- Das Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ hat genau dann für beliebige Werte von $\mathbf{b}$ eine eindeutige Lösung für $\mathbf{x}$, wenn die Anzahl m der Zeilen von A gleich der Anzahl n der Spalten von A gleich dem Rang $\mathrm{Rg}(A)$ von A ist. In diesem Fall heißt A regulär, andernfalls singulär.

Das Rangkriterium

- Beispiel:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2, \\ 2x_1 - x_2 &= 4. \end{aligned}$$

  Mit dem Gaußschen Algorithmus erhält man

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right),$$

  also die eindeutige Lösung $x_1 = 2$, $x_2 = 0$.
- Gemäß dem Rangkriterium muss das so sein, denn $\mathrm{Rg}(A) = 2$.
- Für das Beispiel

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2, \\ 2x_1 + 2x_2 &= 5 \end{aligned}$$

  ist dagegen $\mathrm{Rg}(A) = 1$ und das System hat keine Lösung. Ersetzt man $\mathbf{b} = (2;5)'$ durch $\mathbf{b} = (2;4)'$ oder $\mathbf{b} = (0;0)'$ so erhält man dagegen unendlich viele Lösungen.
- Frage: Wie lässt sich die letzte Aussage nachweisen?

Innerbetriebliche Verrechnungspreise

- Ein wichtiges Anwendungsbeispiel für lineare Gleichungssysteme ist die innerbetriebliche Leistungsverrechnung in der Kostenrechnung.
- Gegeben seien zwei Abteilungen (Kostenstellen), die Leistungen für den Hauptbetrieb und für die jeweils andere Abteilung erbringen (zum Beispiel Kommunikation, Instandhaltung, Verwaltung).
- In jeder Abteilung fallen Primärkosten an (etwa Löhne und Rohstoffe), die gedeckt werden müssen. Zusätzlich sind die Sekundärkosten zu berücksichtigen, die durch Lieferungen anderer Abteilungen entstehen.
- Die innerbetrieblichen Leistungen werden zunächst mengenmäßig erfasst. Um sie verrechnen zu können, müssen sie in Geldeinheiten ausgedrückt werden.
- Da es keine Marktpreise gibt, spricht man von innerbetrieblichen Verrechnungspreisen.

Innerbetriebliche Verrechnungspreise

- Die Abteilung 1 liefere 10 Einheiten an die Abteilung 2 und 20 Einheiten an den Hauptbetrieb (Gesamtproduktion 30). Die primären Kosten der Abteilung 1 betragen 400 Euro.
- Die Abteilung 2 liefere 20 Einheiten an die Abteilung 1 und 30 Einheiten an den Hauptbetrieb (Gesamtproduktion 50). Die primären Kosten der Abteilung 2 betragen 300 Euro.

	A_1	A_2	Hauptbetrieb	Gesamtproduktion
A_1	0	10	20	30
A_2	20	0	30	50
Primärkosten	400	300		

Innerbetriebliche Verrechnungspreise

Zur Ermittlung von Verrechnungspreisen p_1 und p_2 wird gefordert, dass die in einer Abteilung anfallenden Gesamtkosten (Primär- und Sekundärkosten) durch ihre gesamte Produktionsleistung gedeckt werden:

$$\boxed{\text{Primärkosten} + \text{Sekundärkosten} = \text{Wert der Leistung}}$$

- Für das Beispiel bedeutet das:

$$\begin{aligned} 0p_1 + 20p_2 + 400 &= 30p_1 \\ 10p_1 + 0p_2 + 300 &= 50p_2 \end{aligned}$$

- In der Standardform für lineare Gleichungssysteme also:

$$\begin{aligned} 30p_1 - 20p_2 &= 400 \\ -10p_1 + 50p_2 &= 300 \end{aligned}$$

- Lösung: Verrechnungspreise $p_1 = 20$, $p_2 = 10$

Innerbetriebliche Verrechnungspreise

- Die Gesamtkosten der Abteilung 1 sind mit diesen Preisen gleich dem Wert der Gesamtproduktion (der Leistung) der Abteilung 1:

$$20 \cdot 10 + 400 = 30 \cdot 20$$

- Entsprechend für Abteilung 2:

$$10 \cdot 20 + 300 = 50 \cdot 10$$

- Ebenso gilt, dass die Summe der Leistungen der beiden Abteilungen für den Hauptbetrieb genau die gesamten primären Kosten deckt:

$$20 \cdot 20 + 30 \cdot 10 = 400 + 300$$

Quadratische Matrizen und Inverse

- B ist die Inverse der quadratischen Matrix $A_{n,n}$, wenn $AB = BA = I$.
- Eine quadratische Matrix A kann höchstens eine Inverse haben.
- Bezeichnung: Die Inverse einer Matrix A wird mit A^{-1} bezeichnet.
- Beispiel: $A = (a)$, $a \neq 0$, dann ist $A^{-1} = 1/a$, denn $a \cdot 1/a = 1 = I_{1,1}$.
- A ist genau dann invertierbar, wenn A regulär ist, wenn also

$$\mathrm{Rg}(A) = n.$$

- Wenn A regulär ist, hat $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ die eindeutige Lösung $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.
- Die Berechnung der Inversen kann mittels eines dem Gaußschen Algorithmus verwandten Verfahrens erfolgen.

Berechnung der Inversen

- Die zu invertierende Matrix A wird gemeinsam mit einer Einheitsmatrix in ein Schema $(A|I)$ gestellt.
- Durch elementare Zeilentransformationen wird dieses Schema in $(I|A^{-1})$ überführt.
- Beispiel:

$$(A|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 1 \end{array}\right) \quad \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0{,}5 & -0{,}25 \end{array}\right) \quad \rightarrow \quad (I|A^{-1}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -0{,}5 & 0{,}75 \\ 0 & 1 & 0{,}5 & -0{,}25 \end{array}\right)$$

- Probe:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0{,}5 & 0{,}75 \\ 0{,}5 & -0{,}25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel Gleichungssystem

Gegeben ist das bereits beim Gaußschen Algorithmus als Beispiel verwendete lineare Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, diesmal mit $(A|I)$:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 10 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 10 \\ -x_1 + 2x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad (A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Division I. durch 2, anschließend Subtraktion II.$-$I.:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}5 & 1 & -0{,}5 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Addition III.$+$I.:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}5 & 1 & -0{,}5 & 1 & 0 \\ 0 & -0{,}5 & 2 & 0{,}5 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Beispiel Gleichungssystem

Subtraktion III.$-$II.:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}5 & 1 & -0{,}5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Division II. durch $-0{,}5$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Addition II.$+$ 2$\cdot$ III.:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Beispiel Gleichungssystem

Addition I.$+$ 0,5$\cdot$ II.:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right), \quad \text{also} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Damit erhält man wiederum die Lösung des Gleichungssystems:

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gliederung

Grundlagen

Finanzmathematik
- Zins- und Zinseszinsrechnung
- Äquivalenzprinzip und Kapitalwert
- Rentenrechnung
- Tilgungsrechnung

Lineare Algebra
- Matrizen
- Lineare Produktionsmodelle
- Lineare Gleichungssysteme und inverse Matrizen
- Das Leontief-Modell

Direktbedarfs- und Gesamtbedarfsmatrix

- Betrachten Sie das im Abschnitt 3.2 verwendete Beispiel der Bedarfsermittlung von Rohstoffen erneut:

	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	2	1	1
R_2	3	3	4
R_3	4	5	2

	E_1	E_2
Z_1	6	2
Z_2	4	1
Z_3	3	7

	E_1	E_2
R_1	2	0
R_2	0	3
R_3	0	0

- Für $e_1 = 30$ und $e_2 = 40$ Einheiten der Endprodukte sind der Bedarf $(260, 160, 370)'$ an Zwischenprodukten und folgender Gesamtrohstoffbedarf in mehreren Schritten berechnet worden: $(1.110, 2.860, 2.580)'$.

Direktbedarfs- und Gesamtbedarfsmatrix

- Ausgangspunkt der Bedarfsermittlung ist häufig der Gozintograph.
- Die Standardmethode in der Produktionsplanung besteht darin, aus dem Gozintographen eine Direktbedarfsmatrix zu ermitteln, die für das vorliegende Beispiel wie folgt aussieht:

	E_1	E_2	Z_1	Z_2	Z_3	R_1	R_2	R_3
E_1	0	0	0	0	0	0	0	0
E_2	0	0	0	0	0	0	0	0
Z_1	6	2	0	0	0	0	0	0
Z_2	4	1	0	0	0	0	0	0
Z_3	3	7	0	0	0	0	0	0
R_1	2	0	2	1	1	0	0	0
R_2	0	3	3	3	4	0	0	0
R_3	0	0	4	5	2	0	0	0

Direktbedarfs- und Gesamtbedarfsmatrix

- In der folgenden Gleichung bezeichnet D die Direktbedarfsmatrix, $\mathbf{x}$ den Gesamtbedarfsvektor an End- und Zwischenprodukten und Rohstoffen, und $\mathbf{p}$ den Primärbedarfsvektor, hier also die gewünschten Mengen der Endprodukte für den Verkauf:

$$\underbrace{D\mathbf{x}}_{\text{Sekundärbedarf}} + \underbrace{\mathbf{p}}_{\text{Primärbedarf}} = \underbrace{\mathbf{x}}_{\text{Gesamtbedarf}}$$

- Durch Anwendung der Matrixalgebra lässt sich diese Gleichung nach $\mathbf{p}$ oder $\mathbf{x}$ auflösen:

$$\mathbf{p} = \mathbf{x} - D\mathbf{x} = I\mathbf{x} - D\mathbf{x} = (I - D)\mathbf{x}, \text{ kurz: } \mathbf{p} = (I - D)\mathbf{x}$$

  Multipliziert man $(I-D)$ von links mit der Inversen $(I-D)^{-1}$, so ergibt das die Einheitsmatrix I. Also gilt

$$(I - D)^{-1}\mathbf{p} = (I - D)^{-1}(I - D)\mathbf{x} = I\mathbf{x} = \mathbf{x}, \text{ kurz: } \mathbf{x} = (I - D)^{-1}\mathbf{p}$$

Direktbedarfs- und Gesamtbedarfsmatrix

- $(I - D)^{-1}$ heißt Gesamtbedarfsmatrix.
- Multipliziert man den Vektor des Primärbedarfs $(30, 40, 0, 0, 0, 0, 0, 0)'$ von links mit der Gesamtbedarfsmatrix, so erhält man den bereits zuvor anders berechneten Vektor des Gesamtbedarfs

$$(30, 40, 260, 160, 370, 1.110, 2.860, 2.580)'$$

- Da hier eine große Matrix (die allerdings dünn besetzt ist) invertiert werden muss, eignet sich dieses Verfahren nicht für eine Berechnung von Hand. Wegen der algorithmischen Vorgehensweise ist es jedoch gut für praktische EDV-Lösungen geeignet.

Direktbedarfs- und Gesamtbedarfsmatrix

- Zusammenfassung:

$$\underbrace{D\mathbf{x}}_{\text{Sekundärbedarf}} + \underbrace{\mathbf{p}}_{\text{Primärbedarf}} = \underbrace{\mathbf{x}}_{\text{Gesamtbedarf}}$$

- Möglicher Konsum bei Produktion von **x**:

$$\boxed{\mathbf{p} = (I - D)\mathbf{x}}$$

- Erforderliche Produktion zum Konsum von **p**:

$$\boxed{\mathbf{x} = (I - D)^{-1}\mathbf{p}}$$

Das Leontief-Modell

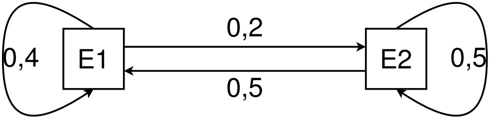
- Das Verfahren mittels der Direktbedarfsmatrix kann auch für das Leontief-Modell verwendet werden, das interindustrielle Verflechtungen berücksichtigt. End- und Zwischenprodukte werden nicht nur mit Rohstoffen und Zwischenprodukten erzeugt, sondern auch mit anderen End- und Zwischenprodukten.
- Um das Leontieff-Modell ohne EDV lösbar zu halten, wird ein sehr einfaches Beispiel betrachtet, bei dem es nur zwei Endprodukte und keine Zwischenprodukte und Rohstoffe gibt.
- Die zuvor hergeleiteten Formeln für Primärbedarf und Gesamtbedarf können direkt verwendet werden.

Beispiel: Bergwerksproblem

- Ein Kohlebergwerk (Sektor 1) produziert sowohl für ein Kohlekraftwerk (Sektor 2) und für den Verbraucher (Konsum) als auch für eigene Zwecke.Analog produziert das Kohlekraftwerk seinerseits sowohl für das Bergwerk und den Verbraucher als auch für sich selbst.
- Der Primärbedarf ist nun durch die Nachfrage der Endkonsumenten (Verbraucher) gegeben:

$$\mathbf{p} = (p_1, p_2)'$$

- Frage: Wieviele ME von Gut 1 und Gut 2 werden zur Deckung beliebiger Konsummengen p_1 und p_2 benötigt?
- Gozintograph und Direktbedarfsmatrix:



	E_1	E_2
E_1	0,4	0,2
E_2	0,5	0,5

Beispiel: Bergwerksproblem

- Für das Bergwerksproblem erhält man:

$$D = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}, \quad (I - D) = \begin{pmatrix} 0{,}6 & -0{,}2 \\ -0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

- Wie viele Einheiten stehen jeweils für den Konsum zur Verfügung, wenn insgesamt $\mathbf{x} = (300, 400)'$ Einheiten produziert werden?

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & -0{,}2 \\ -0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 300 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix}$$

- Wie viele Einheiten müssen produziert werden, um $\mathbf{p} = (100, 50)'$ Einheiten für den Konsum zu haben?

$$(I - D)^{-1} = \begin{pmatrix} 2{,}5 & 1 \\ 2{,}5 & 3 \end{pmatrix}$$

Also ist

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}5 & 1 \\ 2{,}5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 400 \end{pmatrix}$$

Gliederung

Funktionen einer Variablen
- Grundbegriffe
- Eigenschaften von Funktionen
- Wichtige Funktionstypen

Differentialrechnung
- Differentialquotient und Ableitung
- Kurvendiskussion
- Gewinnmaximierung

Funktionen mehrerer Variablen
- Grundlegende Darstellungsformen
- Differentialrechnung
- Optimierungsprobleme

Integralrechnung

Definition

- Eine Funktion ist eine eindeutige Zuordnung. Jedem Element einer Menge (der Definitionsmenge D) wird eindeutig ein Element einer anderen Menge (der Zielmenge Z) zugeordnet.
- Die zweite Variable $y \in Z$ hängt dabei von der ersten Variablen $x \in D$ ab. Man kann daher auch sagen, *y ist eine Funktion von x*.
- Hier werden nur reellwertige Funktionen betrachtet. Sowohl Definitionsbereich D als auch Zielbereich Z sind reelle Zahlen.
- Dann gilt mit $D \subset R$ (Symbol $\subset$ für *Teilmenge*): Eine reellwertige Funktion ist eine Abbildung, die jedem Element von D (Definitionsbereich) genau ein Element aus R (Zielbereich) zuordnet. Schreibweise:

$$f: D \to R; \qquad y = f(x) \text{ als Zuordnungsvorschrift}$$

Anwendungen

- Zahlreiche ökonomische Sachverhalte lassen sich als Funktionen darstellen:
  - Einkommensteuertarif: Durch den Einkommensteuertarif wird jedem (zu versteuernden) Einkommen eindeutig ein Steuerbetrag zugeordnet.
  - Nachfragefunktion: Die Nachfragefunktion nach z.B. Kaffee ordnet jedem Kaffeepreis p eine (eindeutige) Nachfragemenge $N(p)$ zu.
  - Kostenfunktion: Die Kostenfunktion $K(x)$ ordnet jeder Produktionsmenge x die minimalen Kosten zu.
  - Erlösfunktion: Die Erlös- oder Umsatzfunktion $E(x)$ ordnet jeder Absatzmenge x den Erlös zu.
  - Gewinnfunktion: $G(x) = E(x) - K(x)$.
  - ...

$\longrightarrow$ **Mikroökonomik, Kostenrechnung, Marketing**

Beispiele

- Lineare Funktion:

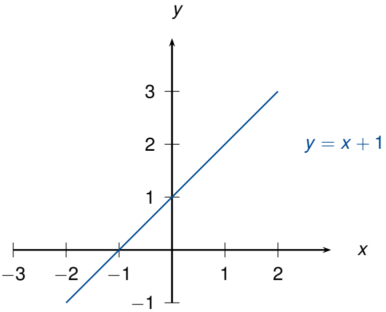
$$f(x) = x + 1 \qquad : D = R$$
$$(\text{oder: } y = x + 1)$$

- Hyperbel-Funktion:

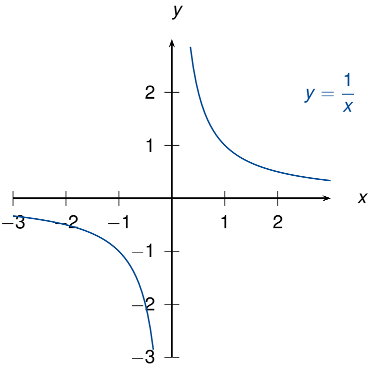
$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad : D = R \setminus \{0\}$$

- Die angegebenen Definitionsbereiche sind die maximal möglichen. In ökonomischen Anwendungen wird der Definitionsbereich häufig weiter eingeschränkt. Beispiel: Wenn $f(x) = x + 1$ eine Kostenfunktion in Abhängigkeit von der Menge x darstellt, muss $x \geqq 0$ gelten: $D = R_+$, wobei $R_+ = \{x \in R \mid x \geqq 0\}$ (in Worten: R_+ *ist die Menge aller Zahlen x aus R, für die gilt* $x \geqq 0$).

Beispiele



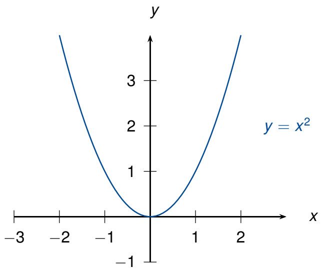
$D = R$



$D = R \setminus \{0\}$

Wertetabelle

Einen ersten Eindruck über den Verlauf von Funktionen kann man anhand von Wertetabellen erhalten.



Beispiel: $y = x^2$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

Fragen: Wie lautet der Definitionsbereich von $y = x^2$! Erstellen Sie anhand von Wertetabellen auch Skizzen von $y = 2x$, $y = -2x$, $y = 2x^2$, $y = -2x^2$, $y = 2x^3$ und $y = -2x^3$ und geben Sie jeweils D an!

Ökonomische Bedeutung

- Funktionen stellen Beziehungen zwischen einer unabhängigen Variablen (hier: x) und einer abhängigen Variablen (hier: y) her.
- Die Analyse solcher Beziehungen gehört zu den Hauptaufgaben der Wirtschaftswissenschaften. Beispiele: Wie beeinflusst der Preis (unabhängige Variable) den Absatz (abhängige Variable) eines Produktes? Wie beeinflusst das Volkseinkommen den gesamtwirtschaftlichen Konsum?
- Als sinnvoll erweist sich eine abgeänderte Symbolik. Statt $y = f(x)$ kann es z.B. zweckmäßig sein, Ausdrücke zu verwenden wie

  $$x = x(p) \qquad \text{(Nachfragemenge } x \text{ als Funktion des Preises } p\text{)}$$

  oder

  $$C = C(Y) \qquad \text{(Konsum } C \text{ als Funktion des Volkseinkommens } Y\text{).}$$

Ökonomische Bedeutung

- Es ist naheliegend, dass die Nachfrage x nach einem Gut, zum Beispiel einem bestimmten Automobil, nicht nur vom Preis p dieses Gutes, sondern auch vom Preis anderer Güter (Kraftstoff) und vom Einkommen der einzelnen Konsumenten abhängt.
- In den Wirtschaftswissenschaften spielen daher auch Funktionen eine wichtige Rolle, die nicht nur von einer, sondern von mehreren Variablen abhängen.
- Beispiel: Die Nachfragefunktion nach einem Gut 1 kann vom Preis p_1 dieses Gutes, vom Preis p_2 eines anderen Gutes und vom Einkommen y abhängen:

$$x_1 = x_1(p_1, p_2, y)$$

- Funktionen mehrerer Variablen werden später betrachtet.

Gliederung

Funktionen einer Variablen
- Grundbegriffe
- Eigenschaften von Funktionen
- Wichtige Funktionstypen

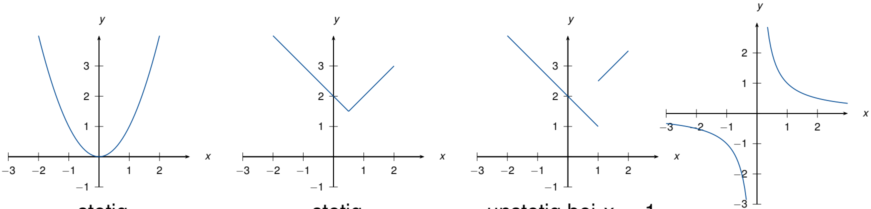
Differentialrechnung
- Differentialquotient und Ableitung
- Kurvendiskussion
- Gewinnmaximierung

Funktionen mehrerer Variablen
- Grundlegende Darstellungsformen
- Differentialrechnung
- Optimierungsprobleme

Integralrechnung

Stetigkeit

Eine Funktion $f : D \to R$ ist anschaulich gesprochen stetig an der Stelle $x_0 \in D$, wenn ihre graphische Darstellung dort keine Lücke aufweist. (Genauer, wenn für $\Delta x > 0$ gilt $\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 - \Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$.)



stetig — stetig — unstetig bei $x = 1$ — n. def. bei $x = 0$

Übung: Ordnen Sie die folgenden Funktionen den Abbildungen zu:

$$y = 1/x, \quad y = x^2, \quad y = \begin{cases} -x+2 & : \ x < 0{,}5 \\ x+1 & : \ 0{,}5 \leqq x \end{cases}, \quad y = \begin{cases} -x+2 & : \ x < 1 \\ x+1{,}5 & : \ 1 \leqq x \end{cases}$$

Nullstellensatz: Eine stetige Funktion, die zwischen zwei Stellen a und b das Vorzeichen wechselt, hat zwischen a und b mindestens eine Nullstelle.

Monotonie und Beschränktheit

- Eine Funktion f verläuft monoton steigend (streng monoton steigend) auf einem Intervall $I \subset D$, wenn für alle $x_1, x_2 \in I$ gilt: Aus $x_1 > x_2$ folgt $f(x_1) \geqq f(x_2)$ (aus $x_1 > x_2$ folgt $f(x_1) > f(x_2)$).
- Anschaulich: Eine Funktion ist monoton steigend, wenn ihre Funktionswerte mit steigenden x-Werten nicht kleiner werden, und streng monoton steigend, wenn die Funktionswerte größer werden.
- Eine Funktion f verläuft monoton fallend (streng monoton fallend) auf einem Intervall $I \subset D$, wenn für alle $x_1, x_2 \in I$ gilt: Aus $x_1 > x_2$ folgt $f(x_1) \leqq f(x_2)$ (aus $x_1 > x_2$ folgt $f(x_1) < f(x_2)$).
- Anschaulich: Eine Funktion ist monoton fallend, wenn ihre Funktionswerte mit steigenden x-Werten nicht größer werden, und streng monoton fallend, wenn die Funktionswerte kleiner werden.
- Eine Funktion f ist nach oben (unten) beschränkt, wenn es eine Zahl c gibt mit $f(x) \leqq (\geqq) c$ für alle $x \in D$.

Extrem- und Wendestellen, Krümmung

Eine reelle Funktion $f: D \to R$ hat

- eine Nullstelle x_0, wenn $f(x_0) = 0$,
- ein globales Maximum $x_{\max}$, wenn $f(x_{\max}) \geqq f(x)$ für alle $x \in D$,
- eine globales Minimum $x_{\min}$, wenn $f(x_{\min}) \leqq f(x)$ für alle $x \in D$,
- ein lokales Maximum $x_{\max}$, wenn $f(x_{\max}) \geqq f(x)$ für alle x in einer Umgebung um $x_{\max}$,
- ein lokales Minimum $x_{\min}$, wenn $f(x_{\min}) \leqq f(x)$ für alle x einer Umgebung um $x_{\min}$.

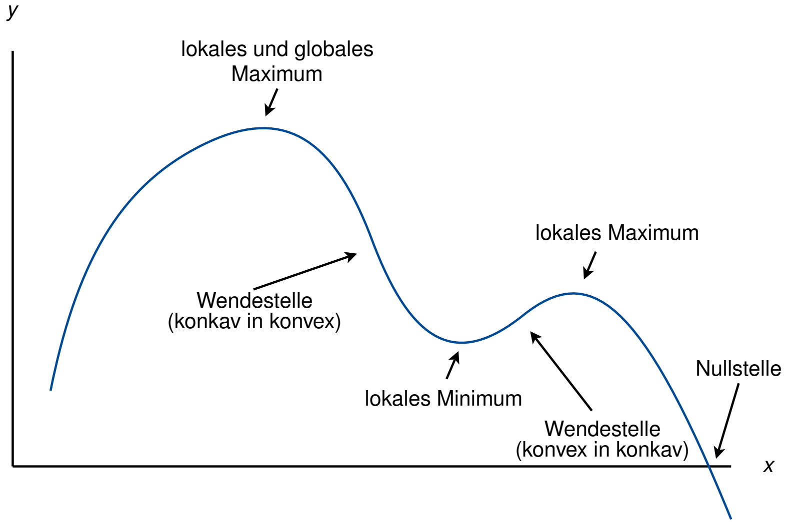
Oberbegriffe für Maxima und Minima: Extremstellen oder Optimalstellen; die Punkte heißen auch Hoch- und Tiefpunkte.

Die Funktion heißt

- streng konvex oder linksgekrümmt, wenn ihre Steigung zunimmt,
- streng konkav oder rechtsgekrümmt, wenn ihre Steigung abnimmt.

Sie hat eine Wendestelle, wenn sich ihre Krümmung von konkav in konvex oder umgekehrt ändert.

Extrem- und Wendestellen, Krümmung



Gliederung

Funktionen einer Variablen
- Grundbegriffe
- Eigenschaften von Funktionen
- Wichtige Funktionstypen

Differentialrechnung
- Differentialquotient und Ableitung
- Kurvendiskussion
- Gewinnmaximierung

Funktionen mehrerer Variablen
- Grundlegende Darstellungsformen
- Differentialrechnung
- Optimierungsprobleme

Integralrechnung

Lineare Funktionen

- Die Funktion $f: \ R \to R$ mit
$$f(x) = mx + b$$
heißt lineare Funktion oder genauer linear-affine Funktion.
- Lineare Funktionen sind stetig auf R. Ihr Bild ist eine Gerade.
- m ist die Steigung der Funktion und b der y-Achsenabschnitt.

Die Steigung der linearen Funktion

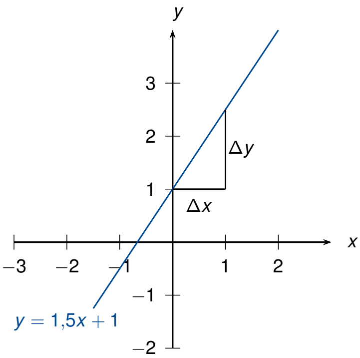
Die Steigung ist

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2{,}5 - 1}{1 - 0} = 1{,}5$$

Allgemeiner gilt:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Eine lineare Funktion kann daher stets aufgrund zweier Punkte ermittelt werden.



Die Steigung der linearen Funktion

- Beispiel: Gegeben sind die Punkte $P_1(-1, 1)$ und $P_2(3, 2)$. Gesucht ist die lineare Funktion durch diese Punkte.
- Lösung:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-1}{3-(-1)} = \frac{1}{4}.$$

- Einsetzen in $y = mx + b$ liefert

$$y = \frac{1}{4}x + b.$$

- Einsetzen des Punktes P_2 liefert

$$2 = \frac{1}{4} \cdot 3 + b \qquad \Rightarrow \qquad b = \frac{5}{4}.$$

- Also lautet die gesuchte Geradengleichung:

$$y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$$

Änderung des Funktionswertes

- Gegeben ist die Gerade $y = 1{,}5x + 1$. Frage: Wie ändert sich der Funktionswert, wenn x um eine Einheit steigt?
- Beispiel: $x_0 = 2$ steigt um $\Delta x = 1$ auf 3. Dann ändert sich der Funktionswert um

$$\Delta y = f(3) - f(2) = 5{,}5 - 4 = 1{,}5,$$

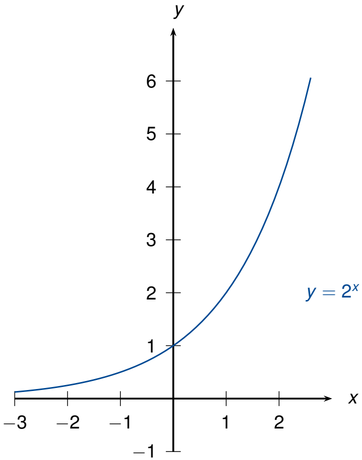
also um die Steigung $m = 1{,}5$.
- Die Steigung der linearen Funktion gibt also an, um wieviel sich der y-Wert ändert, wenn der x-Wert um $\Delta x = 1$ erhöht wird.
- Für Änderungen $\Delta x \neq 1$ gilt allgemein (folgt direkt aus $m = \Delta y / \Delta x$):

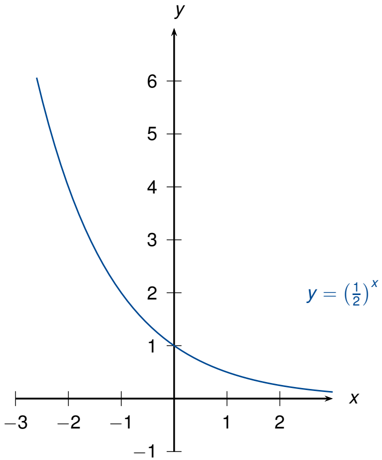
$$\Delta y = m \Delta x$$

Exponentialfunktion

- Die Funktion $f: \ R \to R$ mit
$$f(x) = ab^x, \qquad a \in R, \ b \in R_{++}$$
heißt Exponentialfunktion.
- Wegen $f(0) = ab^0 = a$ gilt $f(x) = f(0)b^x$.
- Da mit Exponentialfunktionen häufig Wachstums- oder Zerfallsvorgänge in der Zeit modelliert werden, wird meist die Variable t (time) statt x verwendet:
$$f(t) = f(0)b^t$$
- Beispiel: Ersetzt man in der Leibnizschen Zinseszinsformel $K_n = K_0 \cdot (1+i)^n$ die Variablenbezeichnungen gemäß $K_n = y$, $K_0 = a$, $1 + i = b$ und $n = x$, so erkennt man, dass es sich um eine Exponentialfunktion $y = ab^x$ handelt.

Exponentialfunktion





Exponentialfunktion

- Die wichtigste Basis ist die Eulersche Zahl $e = 2{,}71828182845\ldots$.
- Die Funktion

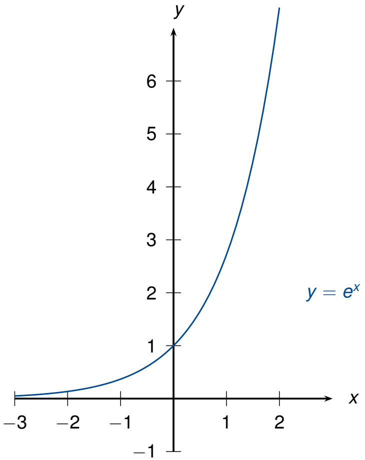
$$f(x) = e^x$$

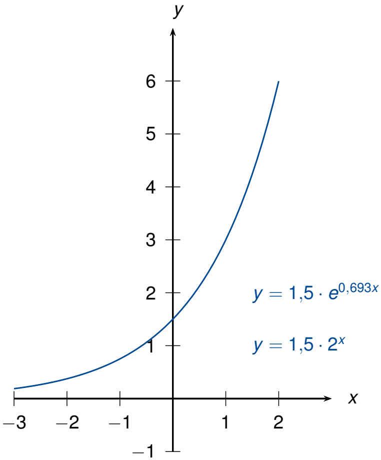
  wird auch als natürliche Exponentialfunktion bezeichnet.
- Man kann jede Exponentialfunktion in eine Exponentialfunktion mit der Basis e umformen.
- Beispiel: Gegeben ist $y = 1{,}5 \cdot 2^x$. Setzt man

$$2^x = e^{\rho x},$$

  so muss lediglich $\rho = \ln 2 \approx 0{,}693$ gewählt werden, um zu erreichen, dass $y = 1{,}5 \cdot 2^x$ und $y = 1{,}5 \cdot e^{0{,}693x}$ dieselbe Funktion angeben.

Exponentialfunktion





Polynome

- Die Funktion $f: \; R \to R$ mit

$$f(x) = x^3 - 9x^2 - 16x + 60$$

  ist ein Beispiel für ein Polynom oder eine ganzrationale Funktion dritten Grades.
- Polynome sind stetig auf R. Summen, Differenzen und Produkte von Polynomen sind wieder Polynome.
- Ist x_1 eine Nullstelle eines Polynoms n-ten Grades (also $f(x_1) = 0$), so ist $f(x)/(x - x_1)$ ein Polynom $(n - 1)$-ten Grades.
- Ein Polynom vom Grade n hat höchstens n reelle Nullstellen.

Nullstellen und Polynomdivision

- Beispiel: Gesucht sind die Nullstellen von $f(x) = x^3 - 9x^2 - 16x + 60$.
- Da hier nicht auf numerische Verfahren eingegangen wird, muss für $n = 3$ in der Regel eine Nullstelle durch Ausprobieren gefunden werden.
- Eine ganzzahlige Nullstelle muss Teiler des absoluten Gliedes a_0 sein.
- Hier: $f(2) = 0$, also $x_1 = 2$ als erste Nullstelle.
- Nun wird eine Polynomdivision durchgeführt (Hinweis: in der Polynomdivision werden die Ergebnisse jeweils schon mit -1 multipliziert):

$$
\begin{array}{l}
\left(\quad x^3 - 9x^2 - 16x + 60\right) : \left(x - 2\right) = x^2 - 7x - 30 \\
\underline{-x^3 + 2x^2} \\
\qquad -7x^2 - 16x \\
\qquad \underline{7x^2 - 14x} \\
\qquad\qquad -30x + 60 \\
\qquad\qquad \underline{30x - 60} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Nullstellen und Polynomdivision

- Multiplikation von

$$(x^3 - 9x^2 - 16x + 60) : (x - 2) = x^2 - 7x - 30$$

mit $(x - 2)$ liefert:

$$f(x) = x^3 - 9x^2 - 16x + 60 = (x - 2) \cdot (x^2 - 7x - 30)$$

- $f(x) = 0$, wenn entweder $x-2 = 0$ (also $x = 2$) oder $x^2-7x-30 = 0$.
- Die weiteren Nullstellen können also durch Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 - 7x - 30 = 0$ gefunden werden.
- Mit der p-q-Formel erhält man:

$$x_{1,2} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 + 30} = 3{,}5 \pm \sqrt{12{,}25 + 30},$$

also $x_2 = 10$ und $x_3 = -3$.

Wiederholung: Quadratische Gleichungen

- Eine quadratische Gleichung kann stets in diese Form gebracht werden (bei $ax^2 + bx + c = 0$ zuerst durch a dividieren):

$$\boxed{x^2 + px + q = 0}$$

- Lösung (p-q-Formel):

$$\boxed{x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

Zerlegung in Linearfaktoren

- Ebenso wie $f(x)$ gemäß

$$f(x) = x^3 - 9x^2 - 16x + 60 = (x - 2) \cdot (x^2 - 7x - 30)$$

in zwei Faktoren zerlegt werden konnte, kann mit den gefunden Nullstellen das quadratische Restpolynom zerlegt werden:

$$x^2 - 7x - 30 = (x - 10)(x + 3)$$

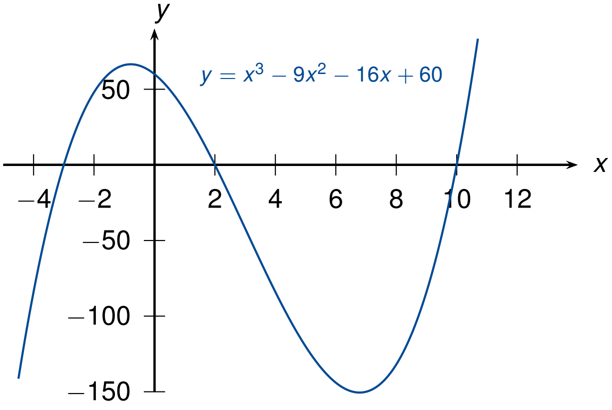
- Damit folgt für das gesamte Polynom die Zerlegung in Linearfaktoren:

$$f(x) = x^3 - 9x^2 - 16x + 60 = (x - 2) \cdot (x - 10) \cdot (x + 3)$$

- Anhand dieser Darstellung sind die Nullstellen direkt ablesbar.

Graphische Darstellung

Die betrachtete Funktion dritten Grades wird hier in verzerrter Form dargestellt.



Gliederung

Funktionen einer Variablen
- Grundbegriffe
- Eigenschaften von Funktionen
- Wichtige Funktionstypen

Differentialrechnung
- Differentialquotient und Ableitung
- Kurvendiskussion
- Gewinnmaximierung

Funktionen mehrerer Variablen
- Grundlegende Darstellungsformen
- Differentialrechnung
- Optimierungsprobleme

Integralrechnung

Gegenstand

- Die Differentialrechnung ist das wichtigste Hilfsmittel zur Analyse des Verlaufs von Funktionen.
- Der Verlauf einer Funktion wird natürlich durch ihre Steigung in jedem Punkt beschrieben. Entsprechend ist die zentrale Aufgabe der Differentialrechnung die Bestimmung der jeweiligen Steigungen von Funktionen.
- Da die Steigung einer nichtlinearen Funktion selbst nicht konstant ist, ist die Steigung selbst abhängig von der Variablen x. Man erhält also eine Steigungsfunktion, die als Ableitung bezeichnet wird.
- Die Differentialrechnung gehört aufgrund des Marginalprinzips (Beschreibung optimaler Lösungen durch Grenzbetrachtungen) zu den wichtigsten mathematischen Hilfsmitteln in den Wirtschaftswissenschaften.

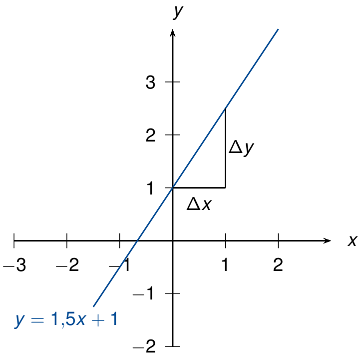
Die Steigung einer linearen Funktion

Wiederholung: Die Steigung der linearen Funktion $y = mx + b$ ist

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Die Änderung des Funktionswertes ist

$$\Delta y = m \Delta x$$



Im folgenden werden analoge Beziehungen für nichtlineare Funktionen gesucht.

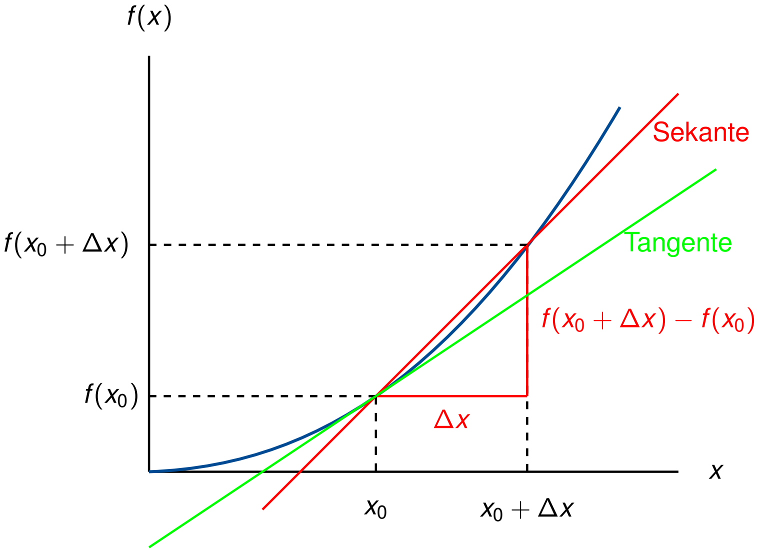
Der Differenzenquotient

- Die durchschnittliche Steigung einer Funktion $f(x)$ zwischen zwei Stellen x_0 und $x_0 + \Delta x$ kann durch den Differenzenquotienten

$$\boxed{\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

  dargestellt werden (vgl. folgende Abbildung).
- Der Differenzenquotient gibt die Steigung der Sekante durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ an.
- Je kleiner Δx ist, desto besser wird die Steigung der Funktion an einer bestimmten Stelle x_0 erfasst. Die Steigung bei x_0 entspricht der Steigung der Tangente an $(x_0, f(x_0))$.

Der Differenzenquotient



Der Differentialquotient

- Die exakte Steigung in einem Punkt kann ermittelt werden, indem der Grenzwert für $\Delta x \to 0$ bestimmt wird. Existiert dieser Grenzwert, so heißt die Funktion $f(x)$ differenzierbar an der Stelle x_0.
- Der Grenzwert heißt Differentialquotient oder Ableitung der Funktion $f(x)$ und wird mit $f'(x)$ oder dy/dx bezeichnet:

$$f'(x_0) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

- Geometrisch gesehen ist die Ableitung $f'(x_0)$ einer Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 gleich der Steigung ihrer Tangente an $f(x_0)$.
- Existiert $f'(x)$ für alle x des Definitionsbereichs D, so heißt $f(x)$ differenzierbar auf D.

Der Differentialquotient

- Beispiel: Die Ableitung von $f(x) = x^2$ an der Stelle x_0 errechnet sich aus

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_0 \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0. \end{aligned}$$

- Die Stelle x_0 steht dabei für eine beliebige Stelle (also eine bliebige Zahl, für die der Funktionswert berechnet wird).
- Allgemein lautet die Ableitungsfunktion von $f(x) = x^2$ demnach $f'(x) = 2x$.

Differentiale

- Die Ableitung von $f(x)$ an der Stelle x_0 gibt die Steigung der Tangente an $f(x)$ bei x_0 an.
- Man Änderungen des Funktionswertes durch Bewegungen entlang der Tangente abschätzen.
- Verwendet man $\Delta y := f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ in der Definition der Ableitung, so folgt aus

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

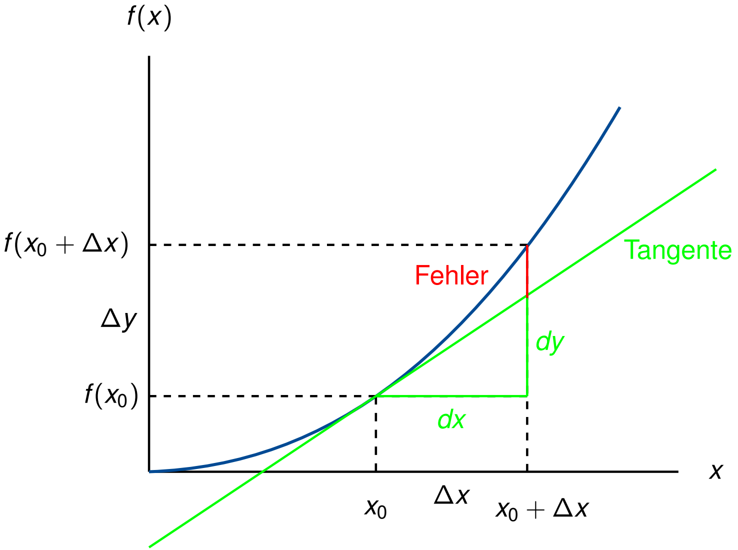
die folgende für kleine Δx gute Näherungsformel für Änderungen von y (also Δy) ind Abhängigkeit von Änderungen von x (also Δx):

$$\boxed{\Delta y \approx f'(x_0) \cdot \Delta x}$$

- Mit den Differentialen $dy \approx \Delta y$ und $dx = \Delta x$ gilt die exakte Beziehung

$$\boxed{dy = f'(x_0) \cdot dx}$$

Differentiale



Differentiale

- Zahlenbeispiel: Für $f(x) = x^2$ gilt $f'(x) = 2x$. Ändert man den x-Wert von $x_0 = 1$ auf 1,1, so dass $\Delta x = 0{,}1$, so folgt:

$$\Delta y \approx dy = f'(1)dx = 2 \cdot 0{,}1 = 0{,}2$$

- Für die exakte Änderung gilt:

$$\Delta y = f(1{,}1) - f(1) = 1{,}1^2 - 1^2 = 0{,}21$$

- $dy = 0{,}2$ ist hier also eine gute Näherung für $\Delta y = 0{,}21$.
- Beispiel Kostenfunktion: Stellt $K = K(x)$ eine Kostenfunktion dar, so folgt aus $dK = K'(x)dx$, dass $K'(x)$ näherungsweise die Kostensteigerung dK angibt, wenn eine Einheit mehr produziert wird ($dx = 1$), also die Grenzkosten:

$$dK = K'(x)dx \quad \Rightarrow K'(x) = dK \quad \text{für } dx = 1$$

Wichtige Ableitungen

In der Anwendung ist die Durchführung der Grenzwertberechnung für den Differentialquotienten nicht erforderlich, weil die Ableitungsfunktionen aller hier interessierenden Funktionen nach allgemeingültigen Regeln bekannt sind:

$f(x)$	a	x^k	e^x	$\ln x$	a^x	$\log_a x$
$f'(x)$	0	kx^{k-1}	e^x	$\frac{1}{x}$	$\ln a \cdot a^x$	$\frac{1}{\ln a} \frac{1}{x}$

Für zusammengesetzte Funktionen gelten folgende Rechenregeln:

$$(af(x))' = af'(x),$$
$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

Beispiele

$$f(x) = 2x^8 \quad \Rightarrow$$
$$f(x) = 3x^7 + x^2 \quad \Rightarrow$$
$$f(x) = 3x^7 - 4x^2 + 3x \quad \Rightarrow$$
$$f(x) = \ln x \quad \Rightarrow$$
$$f(x) = 10 \ln x + 2x \quad \Rightarrow$$
$$f(x) = 4e^x \quad \Rightarrow$$
$$f(x) = x^2 - 4e^x \quad \Rightarrow$$
$$f(x) = 10^x \quad \Rightarrow$$
$$f(x) = x - 10^x \quad \Rightarrow$$
$$f(x) = \log_{10} x \quad \Rightarrow$$
$$f(x) = 10x^{-2} + x^{-1} - x \quad \Rightarrow$$
$$f(x) = 1/x^3 \quad \Rightarrow$$

Produktregel

- Bei komplizierteren Verknüpfungen von Funktionen sind zusätzliche Regeln zur Bestimmung der Ableitungen erforderlich.
- Produktregel: Wenn $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ das Produkt von zwei Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ ist, so gilt:

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

- Beispiel:

$$f(x) = x^2 \cdot (1 + \sqrt{x}) \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = 2x \cdot (1 + \sqrt{x}) + x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Quotientenregel

- Quotientenregel: Wenn $f(x) = u(x)/v(x)$ der Quotient von zwei Funktion $u(x)$ und $v(x)$ ist, so gilt:

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2}$$

- Beispiel:

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x^3} \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = \frac{2x \cdot (1+x^3) - x^2 \cdot 3x^2}{(1+x^3)^2}$$

Kettenregel

- Kettenregel: Wenn $f(x) = h(g(x))$ eine verkettete Funktion h von g von x ist, so gilt:

$$f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x)$$

- In der Leibnizschen Schreibweise nimmt sich die Kettenregel wie eine Trivialität aus. Wenn $y = h(z)$ und $z = g(x)$, dann gilt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}$$

- Beispiel:

$$f(x) = \ln(1 + x^2) \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = \frac{1}{1 + x^2} \cdot 2x$$

Höhere Ableitungen

- Die Ableitung $f'(x)$ von $f(x)$ ist selbst eine Funktion, die in der Regel wieder abgeleitet werden kann.
- Die Ableitung von $f'(x)$ heißt zweite Ableitung von $f(x)$ und wird mit $f''(x)$ bezeichnet. Entsprechend ist $f'''(x)$ die dritte Ableitung und $f^{(n)}(x)$ die n-te Ableitung von $f(x)$.
- Beispiel:

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^4 - x^3 + 5x \\
f'(x) &= 4x^3 - 3x^2 + 5 \\
f''(x) &= 12x^2 - 6x \\
f'''(x) &= 24x - 6 \\
f^{(4)}(x) &= 24 \\
f^{(5)}(x) &= 0 \\
f^{(6)}(x) &= 0
\end{aligned}$$

Elastizitäten

- Elastizitäten stellen wichtige Kennzahlen zur Reaktion von Nachfragefunktionen auf Preis- oder Einkommensänderungen dar.
- Hier wird nur die Preiselastizität der Nachfrage betrachtet:

$$\text{Preiselastizität der Nachfrage} := \frac{\text{prozentuale Nachfrageänderung}}{\text{prozentuale Preisänderung}}$$

- Symbol: $\eta =$ Preiselastizität
- Beispiel: Steigt der Preis einer Eiskugel von 2 Euro auf 2,20 Euro und geht die nachgefragte Menge von 10 auf 8 Kugeln zurück, bewirkt eine Preissteigerung um 10% einen Mengenrückgang um 20%. Also:

$$\eta = \frac{-20\%}{10\%} = -2$$

- Interpretation: Eine einprozentige Preiserhöhung bewirkt einen zweiprozentigen Nachfragerückgang.

Elastizitäten

- Frage: Wie kann man die Elastizität für eine Nachfragefunktion $x = N(p)$ einfach bestimmen?
- In Symbolen gilt:

$$\eta = \frac{\Delta x / x \cdot 100}{\Delta p / p \cdot 100} = \frac{\Delta x}{\Delta p} \frac{p}{x}$$

- Da ein Differenzenquotient durch den Differentialquotienten, also die Ableitung angenähert werden kann, gilt ungefähr:

$$\eta = \frac{dx}{dp} \frac{p}{x} \qquad \left(= N'(p) \frac{p}{x}\right)$$

- Zur Unterscheidung bezeichnet man die ursprüngliche Elastizität als Bogenelastizität, die mittels des Differentialquotienten berechnete als Punktelastizität.

Elastizitäten

- Beispiel: $x(p) = 100 - 2p$. Für die Preiselastizität der Nachfrage folgt
$$\frac{dx}{dp}\frac{p}{x} = \frac{-2p}{100-2p}.$$
- Da $100 - 2p > 0$ für $x > 0$, ist die Elastizität negativ. Daher wird häufig der Betrag verwendet (der Betrag $|x|$ macht aus einer negativen Zahl x eine positive Zahl):
$$\left|\frac{dx}{dp}\frac{p}{x}\right| = \frac{2p}{100-2p}.$$
- Setzt man $\left|\frac{dx}{dp}\frac{p}{x}\right| \gtreqless 1$, so folgt
$$\left|\frac{dx}{dp}\frac{p}{x}\right| \begin{cases} >1 & p > 25 \qquad (|\eta| > 1 \text{heißt elastische Nachfrage}) \\ =1 & p = 25 \\ <1 & p < 25 \qquad (|\eta| < 1 \text{heißt unelastische Nachfrage}) \end{cases}$$

Elastizitäten

- Die Umkehrfunktion des Beispiels $x(p) = 100 - 2p$ lautet $p(x) = 50 - 0{,}5x$. Daraus lässt sich die Nachfrageelastizität des Preises bestimmen:

$$\frac{dp}{dx}\frac{x}{p} = \frac{-0{,}5x}{50 - 0{,}5x}$$

- Ersetzt man x durch $x = 100 - 2p$ so folgt:

$$\frac{dp}{dx}\frac{x}{p} = \frac{-50 + p}{p} = \frac{-100 + 2p}{2p} = \frac{1}{\frac{dx}{dp}\frac{p}{x}} = \frac{1}{\eta}$$

- Die Nachfrageelastizität de Preises ist also gleich dem Kehrwert der Preiselastizität der Nachfrage (nicht nur in diesem Beispiel).

Gliederung

Funktionen einer Variablen
- Grundbegriffe
- Eigenschaften von Funktionen
- Wichtige Funktionstypen

Differentialrechnung
- Differentialquotient und Ableitung
- Kurvendiskussion
- Gewinnmaximierung

Funktionen mehrerer Variablen
- Grundlegende Darstellungsformen
- Differentialrechnung
- Optimierungsprobleme

Integralrechnung

Wiederholung: Extrem- und Wendestellen, Krümmung

Eine reelle Funktion $f: D \to R$ hat

- eine Nullstelle x_0, wenn $f(x_0) = 0$,
- ein globales Maximum x_{max}, wenn $f(x_{\text{max}}) \geqq f(x)$ für alle $x \in D$,
- eine globales Minimum x_{min}, wenn $f(x_{\text{min}}) \leqq f(x)$ für alle $x \in D$,
- ein lokales Maximum x_{max}, wenn $f(x_{\text{max}}) \geqq f(x)$ für alle x in einer Umgebung um x_{max},
- ein lokales Minimum x_{min}, wenn $f(x_{\text{min}}) \leqq f(x)$ für alle x einer Umgebung um x_{min}.

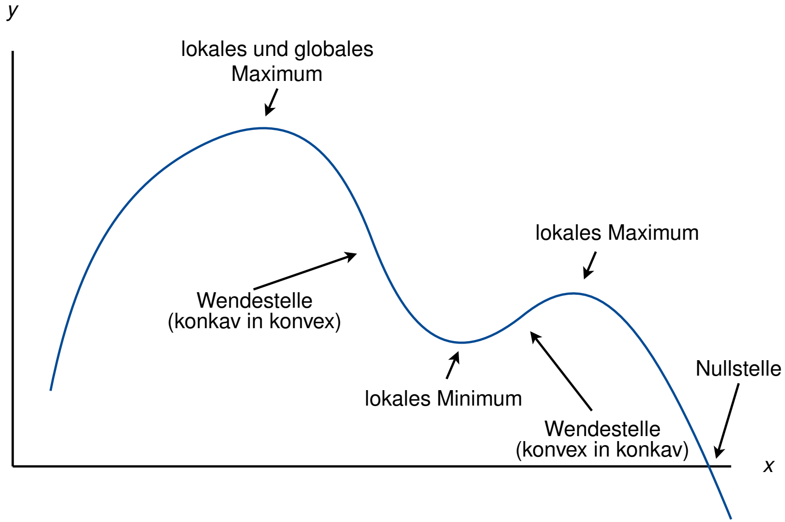
Oberbegriffe für Maxima und Minima: Extremstellen oder Optimalstellen; die Punkte heißen auch Hoch- und Tiefpunkte.

Die Funktion heißt

- streng konvex oder linksgekrümmt, wenn ihre Steigung zunimmt,
- streng konkav oder rechtsgekrümmt, wenn ihre Steigung abnimmt.

Sie hat eine Wendestelle, wenn sich ihre Krümmung von konkav in konvex oder umgekehrt ändert.

Wiederholung: Extrem- und Wendestellen, Krümmung



Kurvendiskussion

- Die einzelnen Schritte der Kurvendiskussion werden anhand eines Beispiels erläutert:

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 4x - 16$$

- Folgende Schritte werden in der Regel betrachtet:
  - Berechnung der Nullstellen und des y-Achsenabschnitts,
  - (Prüfung auf Symmetrie),
  - (Prüfung der Grenzwerte für $x \to \pm\infty$),
  - (ggf. Prüfung auf vertikale Asymptoten),
  - Berechnung der Extremwerte,
  - Berechnung der Wendestellen,
  - graphische Darstellung.

Nullstellen und Achsenabschnitt

- Durch Ausprobieren: $x_1 = 2$. Polynomdivision:

$$
\begin{array}{rrrrl}
(\quad x^3 + 4x^2 & -4x & -16 \,) & : (x-2) = x^2+6x+8 \\
\underline{-x^3 + 2x^2} & & & \\
6x^2 & -4x & & \\
\underline{-6x^2} & \underline{+12x} & & \\
& 8x & -16 & \\
& \underline{-8x} & \underline{+16} & \\
& & 0 &
\end{array}
$$

- Aus dem Restpolynom erhält man mittels der p-q-Formel die weiteren Nullstellen $x_2 = -2$ und $x_3 = -4$.
- Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = -16$.
- Damit gefundene Punkte: $(-4/0)$, $(-2/0)$, $(2/0)$ und $(0/-16)$.

Steigung und Extremwerte

- Eine differenzierbare Funktion verläuft streng monoton steigend auf einem Intervall I, wenn $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$. Sie verläuft streng monoton fallend auf I, wenn $f'(x) < 0$ für alle $x \in I$.
- Eine notwendige Bedingung für einen lokalen Extremwert im Inneren des Definitionsbereichs (also nicht an Randstellen) ist

$$\boxed{f'(x) = 0}$$

- Eine hinreichende Bedingung für ein lokales Maximum an der Stelle x_0 ist

$$\boxed{f'(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f''(x_0) < 0}$$

- Eine hinreichende Bedingung für ein lokales Minimum an der Stelle x_0 ist

$$\boxed{f'(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f''(x_0) > 0}$$

Steigung und Extremwerte

- Die erste und zweite Ableitung von $f(x) = x^3 + 4x^2 - 4x - 16$ lauten

$$f'(x) = 3x^2 + 8x - 4, \qquad f''(x) = 6x + 8$$

- Setzt man die erste Ableitung gleich Null und löst die quadratische Gleichung, so folgen mögliche Extremwerte bei

$$x_1 = 0{,}43, \qquad x_2 = -3{,}10$$

- Einsetzen in die zweite Ableitung ergibt

$$f''(0{,}43) = 6 \cdot 0{,}43 + 8 > 0, \quad f''(-3{,}1) = 6 \cdot (-3{,}1) + 8 < 0$$

  Also liegt bei $x = 0{,}43$ ein Minimum und bei $x = -3{,}10$ ein Maximum vor.
- Einsetzen in $f(x)$ liefert die Extrempunkte $(-3{,}10/5{,}05)$ und $(0{,}43/-16{,}90)$.

Krümmung und Wendestellen

- Eine zweimal differenzierbare Funktion verläuft linksgekrümmt oder streng konvex auf einem Intervall I, wenn $f''(x) > 0$ für alle $x \in I$. Sie verläuft rechtsgekrümmt oder streng konkav auf I, wenn $f''(x) < 0$ für alle $x \in I$.
- Eine notwendige Bedingung für eine Wendestelle im Inneren des Definitionsbereichs ist

$$\boxed{f''(x) = 0}$$

- Eine hinreichende Bedingung für eine Links-Rechts-Wendestelle an der Stelle x_0 ist

$$\boxed{f''(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f'''(x_0) < 0}$$

- Eine hinreichende Bedingung für eine Rechts-Links-Wendestelle an der Stelle x_0 ist

$$\boxed{f''(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f'''(x_0) > 0}$$

- Ist bei einer Wendestelle x_0 zusätzlich $f'(x_o) = 0$, so handelt es sich um eine Sattelstelle (Beispiel: $f(x) = x^3$).

Krümmung und Wendestellen

- Die zweite und dritte Ableitung von $f(x) = x^3 + 4x^2 - 4x - 16$ lauten

$$f''(x) = 6x + 8, \qquad f'''(x) = 6$$

- Setzt man die zweite Ableitung gleich Null, so folgt die mögliche Wendestelle bei

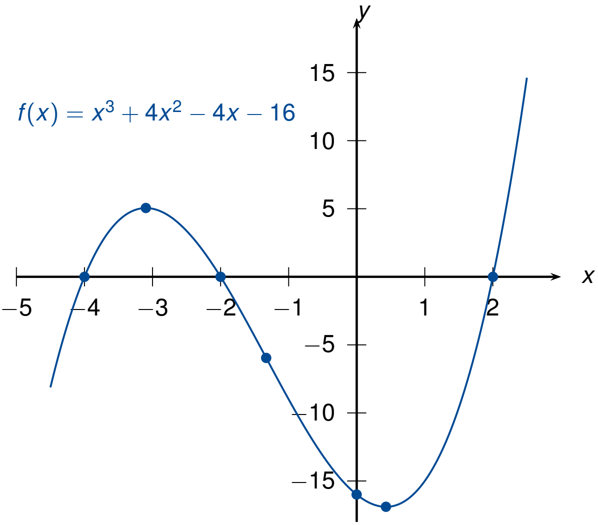
$$x_1 = -1{,}33$$

- Einsetzen in die dritte Ableitung ergibt

$$f'''(-1{,}33) = 6 > 0$$

  Also liegt bei $x = -1{,}33$ eine Rechts-Links-Wendestelle vor, bei der sich die Krümmung von konkav in konvex ändert.
- Einsetzen in $f(x)$ liefert den Wendepunkt $(-1{,}33/-5{,}96)$.

Graphische Darstellung



Gliederung

Funktionen einer Variablen
- Grundbegriffe
- Eigenschaften von Funktionen
- Wichtige Funktionstypen

Differentialrechnung
- Differentialquotient und Ableitung
- Kurvendiskussion
- Gewinnmaximierung

Funktionen mehrerer Variablen
- Grundlegende Darstellungsformen
- Differentialrechnung
- Optimierungsprobleme

Integralrechnung

Grundlagen

- Ziel eines Unternehmens ist die Gewinnmaximierung:

  Gewinn = Erlös (Umsatz) − Kosten

- Ist x die Produktionsmenge, $E(x)$ der Erlös (Umsatz) und $K(x)$ die Kostenfunkton, so lautet der Gewinn

$$G(x) = E(x) - K(x)$$

- Notwendige Bedingung für ein Gewinnmaximum aus $G'(x) = 0$:

$$\boxed{K'(x) = E'(x)}$$

  In Worten: Grenzkosten gleich Grenzerlös.

- Insbesondere $E'(x)$ hängt davon ab, welche Marktform betrachtet wird.

Vollständige Konkurrenz

- Vollständige Konkurrenz bedeutet, dass ein kleines Unternehmen auf einem vollkommenen Markt mit vielen Anbietern und Nachfragern betrachtet wird.
- In diesem Fall kann der Verkaufspreis p als vorgegebene Konstante betrachtet werden, so das $E(x) = px$.
- Das Problem der Gewinnmaximierung lautet also: Zu maximieren ist

$$G(x) = px - K(x)$$

- Aus $G'(x) = 0$ folgt die Grenzkosten-Preis-Regel

$$\boxed{K'(x)=p}$$

- Hinreichende Bedingung für ein lokales Gewinnmaximum:

$$K'(x) = p \quad \text{und} \quad K''(x) > 0$$

Vollständige Konkurrenz

- Beispiel: Mit der Kostenfunktion $K(x) = 2.040 + 0{,}4x^2$ und dem Absatzpreis $p = 80$ erhält man die Gewinnfunktion

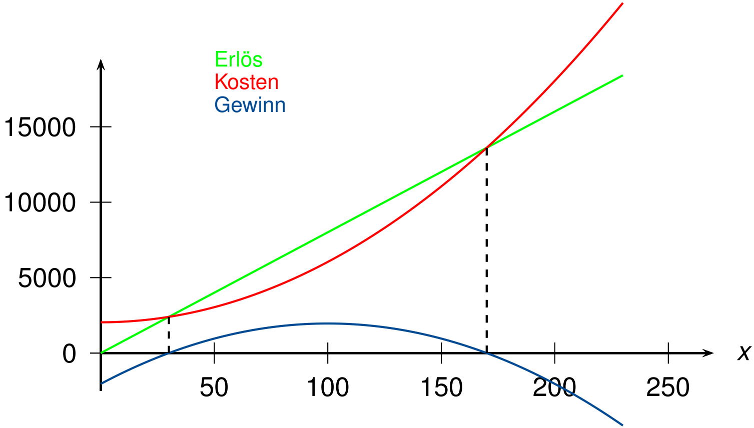
$$G(x) = 80x - 2.040 - 0{,}4x^2.$$

- Die Nullstellen dieser Funktion erhält man aus $x^2 - 200x + 5.100 = 0$ mittels der p-q-Formel:

$$x_1 = 30, \quad x_2 = 170$$

- Die Bedeutung dieser Nullstellen wird anhand der folgenden Abbildung verdeutlicht.

Vollständige Konkurrenz



Vollständige Konkurrenz

- Vor der ersten Nullstelle $x_1 = 30$ ist der Gewinn negativ, danach positiv. Dieser Punkt heißt daher Gewinnschwelle oder Break-Even-Punkt.
- Zwischen der ersten und der zweiten Nullstelle ist der Gewinn positiv. Daher heißt dieser Bereich Gewinnzone.
- Nach der zweiten Nullstelle $x_2 = 170$ wird der Gewinn wieder negativ. Dieser Pukt heißt daher Gewinngrenze.
- Das Gewinnmaximum liegt bei einer Produktion von $x = 100$, da hier $G'(x) = 80 - 0{,}8x = 0$ und $G''(x) = -0{,}8 < 0$ gilt.
- Alternativ: Hier gilt

$$K'(x) = p \quad \Longleftrightarrow \quad 0{,}8x = 80 \quad \text{sowie} \quad K''(x) = 0{,}8 > 0.$$

- Der maximale Gewinn ist $G(100) = 1.960$.

Monopol

- Bisher: Preis als gegeben unterstellt (Marktform vollständige Konkurrenz).
- Jetzt: Preis hängt von verkaufter Menge ab (Marktform Monopol (Alleinanbieter)).
- Beispiel: Die inverse Nachfragefunktion laute $p(x) = 100 - 2x$, die Kostenfunktion $K(x) = x^2 + 300$.
- Die Erlösfunktion ist nun

$$E(x) = p(x)x = (100 - 2x)x = 100x - 2x^2.$$

- Damit erhält man für die Gewinnfunktion

$$G(x) = E(x) - K(x) = 100x - 2x^2 - x^2 - 300 = -3x^2 + 100x - 300.$$

- Mittels der p-q-Formel folgt aus $x^2 - 33,\bar{3}x + 100 = 0$, dass die Gewinnschwelle bei $x_1 = 3,\bar{3}$ und die Gewinngrenze bei $x_2 = 30$ liegt.

Monopol

- Das Gewinnmaximum erhält man durch Ableitung der Gewinnfunktion:
$$G'(x) = -6x + 100 = 0, \quad \Rightarrow x = 50/3.$$
- Den vom Monopolisten gesetzten Preis erhält man durch Einsetzen in die Nachfragefunktion:
$$p(50/3) = 100 - 2 \cdot 50/3 = 66{,}\bar{6}$$
- Der maximale Gewinn beträgt
$$G(50/3) = 533, \bar{3}$$

Gliederung

Funktionen einer Variablen
- Grundbegriffe
- Eigenschaften von Funktionen
- Wichtige Funktionstypen

Differentialrechnung
- Differentialquotient und Ableitung
- Kurvendiskussion
- Gewinnmaximierung

Funktionen mehrerer Variablen
- Grundlegende Darstellungsformen
- Differentialrechnung
- Optimierungsprobleme

Integralrechnung

Gegenstand

- Hängt die Variable y von mehreren Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ab, so liegt eine Funktion $f : D \to R$ mehrerer Variablen mit $D \subset R^n$ vor:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

- Der wesentliche Schritt zum Verständnis ist der Übergang von einer Funktion einer Variablen zu einer Funktion zweier Variablen. Um die Darstellung möglichst einfach zu halten, werden ausschließlich Funktionen zweier Variablen betrachtet:

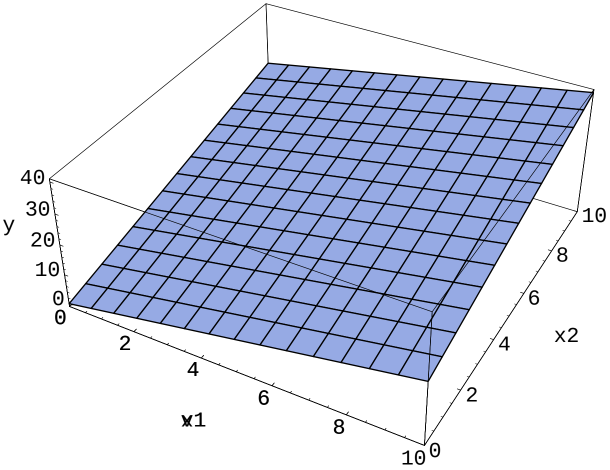
$$y = f(x_1, x_2)$$

  Als Beispiel zur Erklärung wird durchgehend das Konzept der Produktionsfunktion verwendet, die den mengenmäßigen Zusammenhang zwischen dem Faktoreinsatz (Input) und dem Faktorertrag (Output, Güterproduktion) eines Unternehmens in mathematischer Darstellung wieder gibt.
- Anders als bisher wird die Produktionsmenge nun mit y bezeichnet, die Inputs mit x_1 und x_2.

Lineare Produktionsfunktion

- Als einfachstes Beispiel dient die folgende lineare Produktionsfunktion $f: R^2_+ \to R$:
$$y = 2x_1 + 2x_2$$
- Aufgabe: Erstellen Sie eine Wertetabelle für $x_1 = 0, 1, 2$ und $x_2 = 0, 1, 2$.
- Die Abildung auf der nächsten Seite zeigt das Funktionsgebirge der betrachteten linearen Produktionsfunktion.

Lineare Produktionsfunktion



Vertikalschnitte: Ertragskurven

- Da die dreidimensionale Darstellung schwierig ist, werden alternativ Horizontal- und Vertikalschnitte betrachtet.
- Für einen Vertikalschnitt wird eine der unabhängigen Variablen konstant gesetzt.
- Beispiel: Setzt man $x_2 = 2$, so erhält man die Funktion

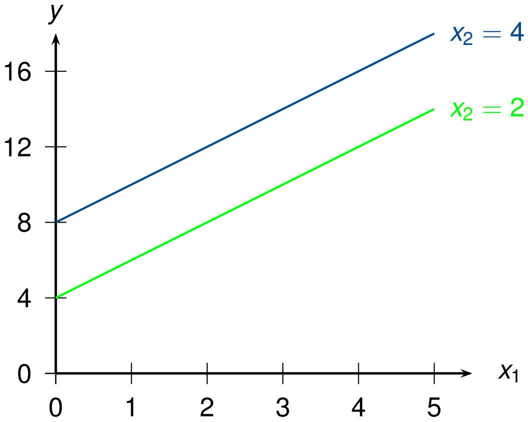
$$y = 2x_1 + 4.$$

- Graphisch entspricht das einem Schnitt durch das Funktionsgebirge parallel zur (x_1, y)-Ebene bei $x_2 = 2$.
- Für $x_2 = 4$ erhält man entsprechend die Funktion

$$y = 2x_1 + 8$$

  als Vertikalschnitt bei $x_2 = 4$. Die Vertikalschnitte heißen in der Produktionstheorie Ertragskurven.

Vertikalschnitte: Ertragskurven



Horizontalschnitte: Isoquanten

- Die Horizontalschnitte oder Höhenlinien entstehen durch Schnitte parallel zur (x_1, x_2)-Ebene bei einem festen Wert für y. Sie heißen in der Produktionstheorie Isoquanten.
- Beispiel: Für die Produktionsfunktion $y = 2x_1 + 2x_2$ wird das Outputniveau auf $y = 40$ festgelegt. Dann kann man

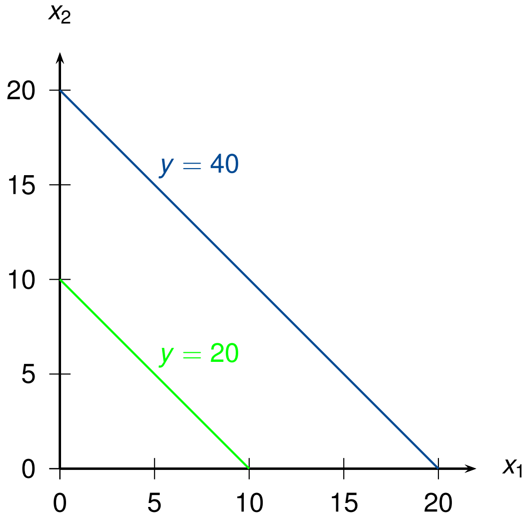
$$40 = 2x_1 + 2x_2$$

nach x_2 auflösen und erhält die Isoquante

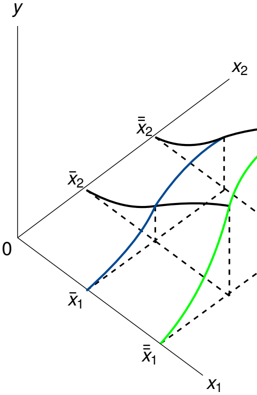
$$x_2 = 20 - x_1.$$

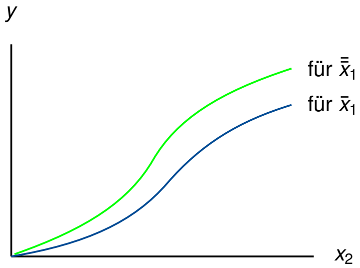
- Die 40 Einheiten können also mit $x_1 = x_2 = 10$ ebenso wie zum Beispiel mit $x_1 = 5$ und $x_2 = 15$ produziert werden. Ein Produktionsfaktor kann also durch den jeweils anderen ersetzt werden. Eine Produktionsfunktion mit dieser Eigenschaft heißt substitutionale Produktionsfunktion.

Horizontalschnitte: Isoquanten

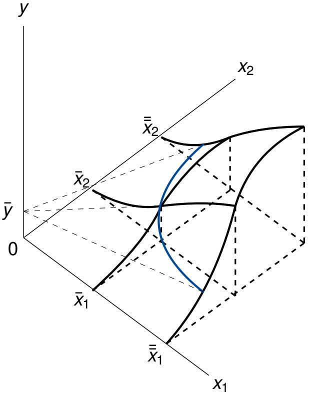


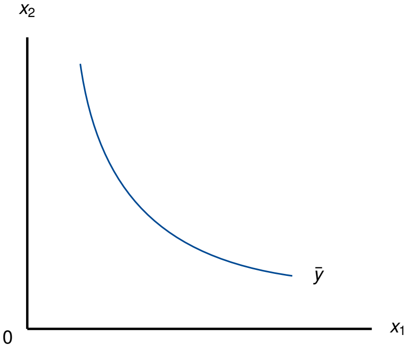
Algemeine Darstellung: Vertikalschnitte





Allgemeine Darstellung: Horizontalschnitte





Cobb-Douglas-Produktionsfunktion

- Das Standardbeispiel für eine substitutionale Produktionsfunktion ist die Cobb-Douglas-Funktion:

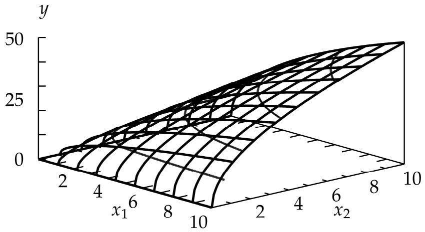
$$y = ax_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}, \quad \text{mit} \quad a > 0,\ 0 < \alpha_1, \alpha_2 < 1$$

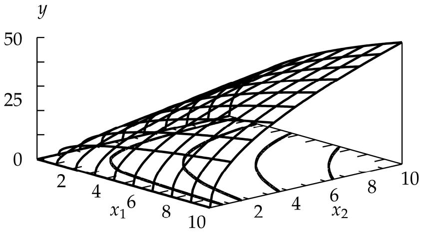
- Beispiel: $\alpha_1 = \alpha_2 = 0{,}5$ und $a = 5$, also

$$y = 5x_1^{0,5} x_2^{0,5} = 5\sqrt{x_1}\sqrt{x_2} = 5\sqrt{x_1 x_2}$$

- Will man z.B. $y = 50$ Einheiten produzieren, so ist dies mit $x_1 = x_2 = 10$ ebenso möglich wie mit $x_1 = 5$ und $x_2 = 20$.
- Beispiel Ertragskurve: Für $y = 5\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}$ und $x_1 = 100$ ergibt sich die Ertragskurve $y = 50\sqrt{x_2}$. Ist dagegen $x_1 = 144$, so lautet die Ertragskurve $y = 60\sqrt{x_2}$.
- Beispiel Isoquante: Für eine Produktionsmenge von $y = 50$ folgt $50 = 5\sqrt{x_1 x_2}$, also $x_2 = 100/x_1$.

Cobb-Douglas-Produktionsfunktion





Gliederung

Funktionen einer Variablen
- Grundbegriffe
- Eigenschaften von Funktionen
- Wichtige Funktionstypen

Differentialrechnung
- Differentialquotient und Ableitung
- Kurvendiskussion
- Gewinnmaximierung

Funktionen mehrerer Variablen
- Grundlegende Darstellungsformen
- Differentialrechnung
- Optimierungsprobleme

Integralrechnung

Partielle Ableitungen

- Eine differenzierbare Funktion zweier Variablen kann nach jeder dieser Variablen partiell abgeleitet werden.
- Wird für die Funktion $f(x_1, x_2)$ eine Variable (zum Beispiel x_2) als Konstante interpretiert (oder festgehalten), dann heißt die Ableitung von f nach x_1 die partielle Ableitung von f nach x_1:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = f_{x_1}(x_1, x_2)$$

- Analog wird die partielle Ableitung nach x_2 berechnet:

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = f_{x_2}(x_1, x_2)$$

- Partielle Ableitungen beschreiben den isolierten Einfluss einer Variablen auf den Funktionswert unter der Annahme, dass die andere Variable konstant bleibt.

Beispiele

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2) &= x_1^2 + x_2^3 && \Rightarrow \\
f(x_1, x_2) &= 2x_1^2 + 6x_2 && \Rightarrow \\
f(x_1, x_2) &= x_1^2 x_2^3 && \Rightarrow \\
f(x_1, x_2) &= \frac{x_1}{x_2} + x_1 x_2 && \Rightarrow \\
f(x_1, x_2) &= 3x_1^{-1} x_2^2 && \Rightarrow \\
f(x_1, x_2) &= e^{x_1^2 x_2} && \Rightarrow \\
f(x_1, x_2) &= x_1^{x_2} && \Rightarrow
\end{aligned}
$$

Grenzproduktivitäten

- Die Interpretation der partiellen Ableitungen bei Produktionsfunktionen ergibt sich daraus, dass sie die Steigungen der jeweiligen Ertragskurven angeben.
- Die partiellen Ableitungen werden als Grenzproduktivitäten bezeichnet:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = f_{x_1}(x_1, x_2) \quad : \quad \text{Grenzproduktivität des Faktors 1}$$
$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = f_{x_2}(x_1, x_2) \quad : \quad \text{Grenzproduktivität des Faktors 2}$$

- Aus der Definition der Ableitungen ergibt sich, dass die Grenzproduktivitäten die Erhöhung des Output angeben, wenn der jeweilige Faktoreinsatz um eine Einheit steigt (siehe Differentiale).

Differentiale

- Steigt der Einsatz des Faktors 1 um eine Einheit, so gilt

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 \quad \text{bzw.} \quad \Delta y \approx \frac{\partial y}{\partial x_1} \Delta x_1,$$

  für $\Delta x_1 = 1$ gibt also $\partial y / \partial x_1$ näherungsweise die entsprechende Produktionssteigerung an.
- Gleichermaßen kann der Einfluss einer Erhöhung von x_2 berechnet werden:

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2 \quad \text{bzw.} \quad \Delta y \approx \frac{\partial y}{\partial x_2} \Delta x_2.$$

- Die hier berechneten Differentiale heißen partielle Differentiale.

Differentiale

- Frage: Wie kann die Änderung von y ermittelt werden, wenn x_1 und x_2 gleichzeitig variiert werden?
- Antwort: Die partiellen Differentiale werden addiert, man erhält ein totales Differential:

$$\boxed{dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2}$$

- Analog zum partiellen Differential erhält man eine für kleine Änderungen von x_1 und x_2 gute Näherung für die tatsächliche Funktionswertänderung gemäß

$$\Delta y \approx \frac{\partial y}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} \Delta x_2$$

Gliederung

Funktionen einer Variablen
- Grundbegriffe
- Eigenschaften von Funktionen
- Wichtige Funktionstypen

Differentialrechnung
- Differentialquotient und Ableitung
- Kurvendiskussion
- Gewinnmaximierung

Funktionen mehrerer Variablen
- Grundlegende Darstellungsformen
- Differentialrechnung
- Optimierungsprobleme

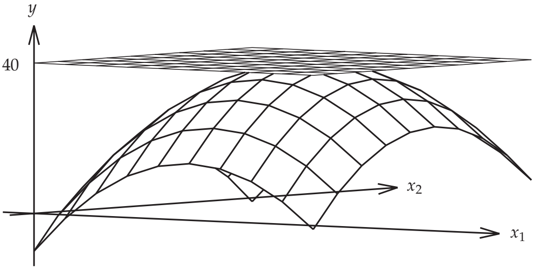
Integralrechnung

Optimierung ohne Nebenbedingungen

- Optimierungsprobleme nehmen in der Ökonomik eine zentrale Stellung ein (ökonomisches Prinzip).
- Bei Funktionen mehrerer Variablen ist zu unterscheiden, ob Nebenbedingungen vorliegen oder nicht. Zunächst wird der Fall ohne Nebenbedingungen betrachtet.
- Generell gilt: Beschränkung auf notwendige Bedingungen. Für entsprechende hinreichende Bedingungen wird auf die Literatur verwiesen.
- Die grundlegende notwendige Bedingung ist analog zum Fall einer Variablen. Wenn ein Punkt eine Extremwert ist, müssen beide partiellen Ableitungen gleich Null sein:

$$\boxed{f_{x_1}(x_1, x_2) = 0, \qquad f_{x_2}(x_1, x_2) = 0}$$

Optimierung ohne Nebenbedingungen



- Die Abbildung zeigt die Funktion $f(x_1, x_2) = 40 - (x_1 - 5)^2 - (x_2 - 5)^2$.
- Beim Maximum muss die Tangentialebene an die Funktion horizontal verlaufen.
- Dafür ist notwendig, dass beide partiellen Ableitungen gleich 0 sind: $f_{x_1} = -2x_1 + 10 = 0$, $f_{x_2} = -2x_2 + 10 = 0$. Das Maximum liegt bei $(x_1, x_2) = (5, 5)$ mit $f(5, 5) = 40$.

Optimierung mit Nebenbedingungen

- Gegeben sind nun eine Zielfunktion $f(x_1, x_2)$ und eine Nebenbedingung der Form $g(x_1, x_2) = 0$.
- Sofern möglich, wird die Nebenbedingung nach einer der Variablen aufgelöst und in die Zielfunktion eingesetzt.
- Die Zielfunktion ist so nur noch von einer Variablen abhängig. Die Extremwerte können dann mit den Methoden der eindimensionalen Extremwertbestimmung ermittelt werden.
- Eine allgemeinere Methode basiert auf der Verwendung einer Lagrangefunktion; dazu wird auf die Literatur verwiesen.

Optimierung mit Nebenbedingungen

- Beispiel: Gegeben sei die Produktionsfunktion $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 x_2}$. Angestrebt wird ein Produktionsniveau von $y = 10$. Die Faktorpreise betragen $q_1 = 2$ und $q_2 = 8$. Gesucht ist die Faktormengenkombination, die die Produktionskosten minimiert.
- Die Zielfunktion lautet damit:

$$K = 2x_1 + 8x_2$$

- Die Nebenbedingung ist:

$$\sqrt{x_1 x_2} = 10.$$

- Auflösen der Nebenbedingung nach x_2:

$$x_2 = 100/x_1$$

Optimierung mit Nebenbedingungen

- Einsetzen in die Zielfunktion:

$$K(x_1) = 2x_1 + 800/x_1$$

- Ableitung gleich Null setzen:

$$K'(x_1) = 2 - 800/x_1^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 20$$

- Bei der Lösung handelt es sich um ein Minimum, denn

$$K''(x_1) = 1600/x_1^3 > 0 \quad \text{für} \quad x_1 = 20.$$

- Einsetzen in die Nebenbedingung ergibt $x_2 = 5$. Die minimalen Kosten zur Produktion von $y = 10$ betragen demnach

$$K = 2 \cdot 20 + 8 \cdot 5 = 80.$$

Gliederung

Funktionen einer Variablen
- Grundbegriffe
- Eigenschaften von Funktionen
- Wichtige Funktionstypen

Differentialrechnung
- Differentialquotient und Ableitung
- Kurvendiskussion
- Gewinnmaximierung

Funktionen mehrerer Variablen
- Grundlegende Darstellungsformen
- Differentialrechnung
- Optimierungsprobleme

Integralrechnung

Grundlagen

- Die Integralrechnung stellt in gewisser Hinsicht die Umkehrung der Differentialrechnung dar.
- Ist $F(x)$ eine differenzierbare Funktion mit $F'(x) = f(x)$, so heißt $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$. Da additive Konstanten bei der Ableitung verschwinden, ist die Stammfunktion nur bis auf eine additive Konstante C bestimmt.
- Das unbestimmte Integral einer Funktion $f(x)$ ist die Menge ihrer Stammfunktionen:

$$\boxed{\int f(x)\, dx = F(x)} \quad \text{mit } F'(x) = f(x)$$

- Beispiel: $f(x) = x^2$, dann ist

$$F(x) = \int x^2\, dx = \frac{1}{3}x^3 + C,$$

wobei C eine beliebige Konstante ist.

Grundlagen

- Das bestimmte Integral erhält man aus der Stammfunktion, indem die festen Integrationsgrenzen a und b (oder die variable obere Grenze x) eingeführt werden:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

- oder

$$\boxed{F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\,dt \quad [\Rightarrow F'(x) = f(x)]}$$

- Dieser Zusammenhang gilt, wenn f stetig auf $[a, b]$ ist (und $x \in (a, b)$ für die zweite Schreibweise) und wird als Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung bezeichnet.

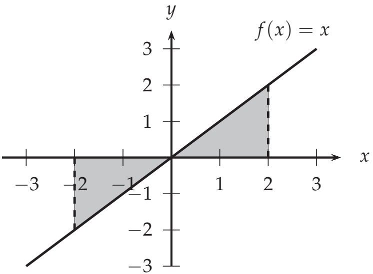
Flächenberechnung

- Ist die Funktion $f(x) \geqq 0$ auf dem Intervall $[a, b]$, so ist

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

  der Flächeninhalt der von $f(x)$, der x-Achse und den Geraden $x = a$ und $x = b$ begrenzten Fläche.
- Ist $f(x) \leqq 0$, so wird der Betrag verwendet.
- Hat $f(x)$ Nullstellen in $[a, b]$, so werden die Beträge der Integrale über die durch die Integrationsgrenzen und Nullstellen gebildeten Teilintervalle verwendet.

Flächenberechnung



- Beispiel: Gesucht ist die Fläche zwischen $f(x) = x$ und der x-Achse zwischen -2 und 2.
- Da $f(x) < 0$ für $x < 0$, werden die Beträge der Teilintegrale berechnet:

$$\left|\int_{-2}^{0} x\ dx\right| + \left|\int_{0}^{2} x\ dx\right|$$
$$= \left|\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^{0}\right| + \left|\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{2}\right|$$
$$= |[0-2]| + |[2-0]|$$
$$= |-2| + |2| = 4.$$

Flächenberechnung

- Beispiel: Soll die zwischen den beiden Funktionen $f(x) = x + 2$ und $g(x) = x^2$ eingeschlossene Fläche berechnet werden, so berechnet man zunächst die Schnittpunkte (Nullstellen von $f(x) - g(x)$): $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.
- Die gesuchte Fläche ergibt sich aus

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} [f(x) - g(x)]\, dx &= \int_{-1}^{2} [x + 2 - x^2]\, dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{2} \\ &= \left(2 + 4 - \frac{8}{3}\right) - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3}\right) = 4{,}5\end{aligned}$$

- Verwendet man $g(x) - f(x)$, so lautet das Ergebnis $-4{,}5$, so dass der Betrag zu bilden ist.

Wichtige Grundintegrale und Rechenregeln

$f(x)$	a	$x^k,\ k \neq -1$	$\frac{1}{x}$	e^x	$\ln x$
$F(x)$	ax	$\frac{1}{k+1}x^{k+1}$	$\ln\lvert x\rvert$	e^x	$x \ln x - x$

$$\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx,$$

$$\int cf(x)\, dx = c \int f(x)\, dx$$

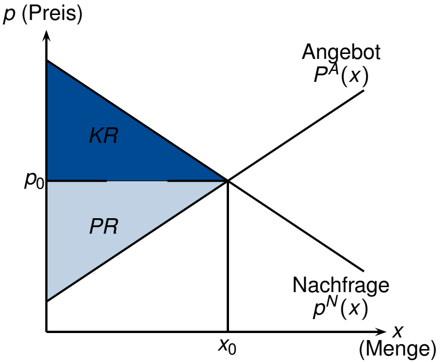
$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^{x_0} f(x)\, dx + \int_{x_0}^b f(x)\, dx,$$

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$$

Konsumenten- und Produzentenrente

- Die Konsumentenrente misst den Nutzengewinn der Konsumenten der dadurch entsteht, dass sie nur den Marktpreis p_0 zahlen und nicht den Preis ihrer maximalen Zahlungsbereitschaft (entsprechend ihrer Nachfragekurve).
- x_0 sei die Gleichgewichtsmenge. Die Konsumentenrente entspricht der Fläche unter der Nachfragefunktion bis zum Gleichgewichtspreis p_0.
- Die Produzentenrente entspricht der Fläche über der Angebotsfunktion bis zum Gleichgewichtspreis p_0.
- Konsumenten- und Produzentenrente gemeinsam können als Maß für den auf einem Markt erzeugten Wohlstand dienen.
- $p^N(x)$ und $p^A(x)$ seien die inverse Nachfrage- und die inverse Angebotsfunktion.

Konsumenten- und Produzentenrente



$$KR = \int_0^{x_0} p^N(x)\,dx - x_0 \cdot p_0$$

$$PR = x_0 \cdot p_0 - \int_0^{x_0} p^A(x)\,dx$$

daraus folgt:

$$KR + PR = \int_0^{x_0} p^N(x) - p^A(x)\,dx$$

Konsumenten- und Produzentenrente

- Beispiel: Wie hoch sind Gleichgewichtspreis und -menge sowie Konsumenten- und Produzentenrente für die folgenden inversen Nachfrage- und Angebotsfunktionen?

$$p^N(x) = 10 - 3x, \quad p^A(x) = 2x$$

- Gleichgewicht: Aus $p^N(x) = p^A(x)$ folgt $x_0 = 2$, einsetzen liefert $p_0 = 4$.
- Konsumenten- und Produzentenrente:

$$\begin{aligned} KR &= \int_0^{x_0} p^N(x)\,dx - x_0 p_0 = \int_0^2 10 - 3x\,dx - 4 \cdot 2 = [10x - 1{,}5x^2]_0^2 - 8 \\ &= [14 - 0] - 8 = 6 \\ PR &= x_0 p_0 - \int_0^{x_0} p^A(x)\,dx = 4 \cdot 2 - \int_0^2 2x\,dx = 8 - [x^2]_0^2 \\ &= 8 - [4 - 0] = 4 \end{aligned}$$

Konsumenten- und Produzentenrente

- Weitere Interpretation der Produzentenrente: Wegen der Grenzkosten-Preis-Regel ($K'(x) = p$) entspricht die Angebotsfunktion jedes einzelnen Unternehmens seiner Grenzkostenfunktion.
- Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt:

$$\int_0^{x_0} K'(x)\, dx = K(x_0) - K(0), \quad \text{also } K(x_0) = K(0) + \int_0^{x_0} K'(x)\, dx$$

- Wegen $K(0) = K_f$ (Fixkosten) und $K(x_0) = K_f + K_v(x_0)$ muss das bestimmte Integral von 0 bis x_0 der Grenzkostenfunktion (also die Fläche unter der Angebotsfunktion) gleich den variablen Kosten $K_v(x_0)$ sein.
- Die Produzentenrente ist also gleich dem Umsatz $p_0 x_0$ minus den variablen Kosten und unterscheidet sich von den Gewinnen ($=$ Umsatz minus gesamte Kosten) lediglich durch die nicht abgezogenen Fixkosten.
- Es gilt also: Gewinn $=$ Produzentenrente $-$ Fixkosten