Wirtschaftsmathematik: Finanzmathematik

Thilo Klein

thilo@klein.uk

Gliederung

Einführung

Fragestellungen der Finanzmathematik:

- Wie viel Geld erhält man bei einer verzinsten Anlage?
- Wie lange brauche ich bei einer verzinsten Anlage um einen bestimmten Betrag zu erhalten?
- Wie können verschiedene Verzinsungsmodelle verglichen werden?
- Wie kann eine Rente (= konstante Zahlung über einen Zeitraum) berechnet werden?
- Was kostet die Tilgung eines Kredites?

$\longrightarrow$ **Grundlage für Investition und Finanzierung**

Einführung

Wesentliche Kenntnisse, die vermittelt werden sollen:

- Einfache (lineare) Verzinsung sowie Zinseszinsen (exponentielle Verzinsung).
- Unterschiedliche Zeitbezüge von Zahlungen.
- Kapitalwert, Barwert, Endwert, Zeitwert.
- Verfahren zur Behandlung von periodisch konstanten Zahlungen (Renten).
- Kredite und Darlehen, Tilgungspläne.

Zinsrechnung

- Zinsen (Z) sind die Vergütung für die befristete Überlassung von Kapital.
- Die Zinsperiode ist üblicherweise ein Jahr; die Zinssätze p in Prozent oder $i = p/100$ beziehen sich also auf ein ganzes Jahr.
- Die Zinsrechnung unterscheidet sich von der Prozentrechnung durch die Berücksichtigung des Zeitraums, für den Zinsen anfallen.
- Ist der Zeitraum kein ganzes Jahr, so handelt es sich dabei um unterjährige Verzinsung.
- In Deutschland Einteilung des Zinsjahres in 12 Monate zu je 30 Tagen (30/360 oder deutsche Zinsmethode).

Zinsrechnung

- Die grundlegende Formel zur Berechnung der Zinsen ($\hat{=}$ Prozentwert) (Z) aus dem Kapital ($\hat{=}$ Grundwert) (K), dem auf ein Jahr bezogenen Zinssatz ($\hat{=}$ Prozentsatz) (p) und der Zeit (t) lautet:

  $$Z = \frac{K \cdot p \cdot t}{100 \cdot T},$$

  wobei $T = 1$ ($T = 12$, $T = 360$), wenn t in Jahren (Monaten, Tagen) angegeben ist.
- Für die Berechnung der Zeit t wird der Einzahlungstag mitgezählt, der Auszahlungstag nicht.
- Aus dieser Formel lassen sich alle anderen benötigten Formeln durch Umformung herleiten.

Zinsrechnung

Zinsen gesucht: Wieviel Zinsen erhält man für ein Kapital von 200 €, das für 3 Monate zum Zinssatz 5% angelegt wird?

$$Z = \frac{K \cdot p \cdot t}{100 \cdot T} = \frac{\cancel{200} \cdot 5 \cdot \cancelto{1}{3}}{\cancel{100} \cdot \cancelto{4}{12}} = 2{,}5 \qquad \text{Antwort: } 2{,}5\ €$$

Zinssatz gesucht: Wie hoch ist der Zinssatz, wenn man für ein Kapital von 200 €, das für 3 Monate angelegt wird, 2,5 € Zinsen erhält?

$$p = \frac{Z \cdot T \cdot 100}{K \cdot t} = \frac{2{,}5 \cdot \cancelto{4}{12} \cdot \cancel{100}}{\cancel{200} \cdot \cancelto{1}{3}} = 5 \qquad \text{Antwort: } 5\ \%$$

Zinsrechnung

Kapital gesucht: Wie hoch ist das angelegte Kapital, wenn man bei einem Zinssatz von 5% nach 3 Monaten 2,5 € Zinsen erhält?

$$K = \frac{Z \cdot T \cdot 100}{p \cdot t} = \frac{2{,}5 \cdot \cancelto{4}{12} \cdot 100}{5 \cdot \cancelto{1}{3}} = 200 \qquad \text{Antwort: } 200\ €$$

Vermehrtes Kapital gesucht: Wie hoch ist das Endkapital K_+ ($\hat{=}$ vermehrtes Kapital), wenn man ein Anfangskapital ($\hat{=}$ Kapital) von 200 € zum Zinssatz 5% für 3 Monate anlegt?

$$K_+ = K + Z = \left(1 + \frac{p \cdot t}{100 \cdot T}\right) \cdot K = \left(1 + \frac{5 \cdot \cancelto{1}{3}}{100 \cdot \cancelto{4}{12}}\right) \cdot 200 = 202{,}5$$

Antwort: 202,5 €

Zinsrechnung

Zeit gesucht: Für welchen Zeitraum müssen 200 € angelegt werden, um bei einem Zinssatz von 5% Zinsen in Höhe von 2,5 € zu erhalten?

$$t = \frac{Z \cdot T \cdot 100}{K \cdot p} = \frac{\cancelto{1}{2{,}5} \cdot \cancelto{6}{12} \cdot 1\cancel{00}}{\cancelto{1}{200} \cdot \cancelto{2}{5}} = 3$$

Antwort: 3 Monate

Zinsrechnung

Beispiel mit Datumsangaben, um den Zeitraum t zu berechnen: Vom 28.02. bis zum 02.04. eines Jahres werden 3.000 € zu 2,2% angelegt. Wie hoch ist das Endkapital?

- Zeitraum t: Drei Tage im Februar, 30 Tage im März, 1 Tag im April, also 34 Tage.
- Vermehrtes Kapital (= Endkapital):

$$K_+ = K + Z = \left(1 + \frac{2{,}2 \cdot 34}{100 \cdot 360}\right) \cdot 3.000 = 3.006,23$$

Zinseszinsrechnung

Wird ein Kapital verzinst und die Zinsen werden dem Kapital zugeschlagen, so wird in der nächsten Periode das Kapital einschließlich der Zinsen verzinst (Zinseszins). Zunächst nur ganzjährige Verzinsung.

Ist zum Zeitpunkt $t-1$ das Kapital gleich K_{t-1}, so folgt mit dem Zinssatz $i_t = p_t/100$ aus der Formel für das vermehrte Kapital

$$K_t = (1 + i_t)K_{t-1}.$$

Ist der Zinssatz über n Jahre konstant gleich i, so folgt

$$\begin{aligned}
K_1 &= (1+i)K_0 \\
K_2 &= (1+i)K_1 = (1+i)(1+i)K_0 = (1+i)^2 K_0 \\
&\dots \\
K_n &= (1+i)^n K_0
\end{aligned}$$

Dies ist die Leibnizsche Zinseszinsformel: $\boxed{K_n = K_0(1+i)^n}$

Endwert und Barwert

Mittels der Zinseszinsformel erhält man den Endwert K_n eines Kapitals K_0 nach n Jahren, das zum Zinssatz i pro Jahr verzinst wird.

Die Formel kann nach K_0 umgestellt werden, um den Barwert eines Kapitals K_n am Anfang des Betrachtungszeitraums, also zum Zeitpunkt 0 zu erhalten:

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+i)^n}$$

Beispiel: Ein Betrag von $K_0 = 1.000$ wird zum Zinssatz $i = 5\% = 0{,}05$ für 10 Jahre angelegt. Der Endwert (in $t = n$) ist

$$K_n = 1{,}05^{10} \cdot 1.000 = 1.628,89$$

Der Barwert dieses Betrages in $t = 0$ ist

$$K_0 = \frac{1.628{,}89}{1{,}05^{10}} = 1.000$$

Verdoppelungszeit

Wie lange dauert es, bis sich ein Betrag K_0 verdoppelt hat (bis also $K_n = 2K_0$ ist)?
Diese Frage kann man durch Logarithmierung der Formel

$$2K_0 = K_0 \cdot (1+i)^n$$

beantworten, nachdem zuerst beide Seiten durch K_0 dividiert werden:

$$\begin{aligned} 2 &= (1+i)^n \\ \ln 2 &= n \cdot \ln(1+i) \\ \text{Verdoppelungszeit:} \quad n &= \frac{\ln 2}{\ln(1+i)} \end{aligned}$$

(Hinweis: Das Ergebnis wird im allgemeinen eine nichtganzzahlige Jahresanzahl sein; vgl. dazu den nächsten Abschnitt.)

Nichtkonstanter Zinssatz

Ist der Zinssatz nicht konstant, so kann der Endwert K_n des Kapitals analog nach folgender Formel berechnet werden:

$$K_n = (1 + i_1)(1 + i_2) \cdot \ldots \cdot (1 + i_n)K_0$$

Durch Berechnung der n-ten Wurzel aus dem Produkt der Zinsfaktoren erhält man einen konstanten durchschnittlichen Zinssatz, der zum selben Endwert führt (geometrisches Mittel):

$$(1 + i_1)(1 + i_2) \cdot \ldots \cdot (1 + i_n) = (1 + i)^n,$$

also

$$i = \sqrt[n]{(1 + i_1)(1 + i_2) \cdot \ldots \cdot (1 + i_n)} - 1$$

Im folgenden wird ein konstanter Zinssatz unterstellt.

Gemischte Verzinsung

- Ein- und Auszahlungen fallen in praktischen Fällen selten mit dem Anfang und dem Ende von Zinsperioden zusammen.
- Beispiel: Zum 01.07.2000 werden 1.000 Euro eingezahlt und mit einem Jahreszinssatz von 4% verzinst. Welcher Endwert ergibt sich zum 01.04.2009?
- Hinweis: Nach der deutschen Zinsmethode wird der Einzahlungstag meistens mitgezählt, der Auszahlungstag nicht, allerdings uneinheitlich, vgl. BGB §§ 187, 188.
- Verwendet man die gemischte Verzinsung, so gilt:

$$K_n = 1.000 \cdot \left(1 + \frac{180}{360} \cdot 0{,}04\right) \cdot (1 + 0{,}04)^8 \cdot \left(1 + \frac{90}{360} \cdot 0{,}04\right) = 1409{,}90$$

- Nachteil: Ergebnis hängt vom Zeitpunkt der Einzahlung ab.

Gemischte Verzinsung

- Beispiel: Verschiebt man im vorangehenden Beispiel den Ein- und den Auszahlungstermin um jeweils zwei Monate nach hinten, so folgt:

$$K_n = 1.000 \cdot \left(1 + \frac{120}{360} \cdot 0{,}04\right) \cdot (1 + 0{,}04)^8 \cdot \left(1 + \frac{150}{360} \cdot 0{,}04\right) = 1.409{,}93$$

- Die gemischte Verzinsung ist also inkonsistent und vom Zeitpunkt der Einzahlung abhängig.
- Ein eindeutiges Ergebnis liefert dagegen die Verzinsung mit nicht ganzzahligen Exponenten.
- Dazu wird einfach der (nichtganzzahlige) Zeitraum t in Jahren ausgerechnet, im Beispiel:

$$\text{Tage} = 180 + 8 \cdot 360 + 90 = 120 + 8 \cdot 360 + 150 = 3150, \qquad (1)$$

$$\text{also } t = \frac{3150}{360} = 8{,}75 \text{ Jahre} \qquad (2)$$

Nichtganzzahlige Exponenten

- Dann kann einfach mit der normalen Zinseszinsformel weiter gerechnet werden::

$$K_n = 1.000 \cdot (1 + 0{,}04)^{8{,}75} = 1.409{,}42$$

- Methodisch ist die Verzinsung mit nichtganzzahligen Exponenten sauberer, weil sie nicht vom Einzahlungsdatum abhängt. Wenn Startzeitpunkte nicht exakt bekannt sind, oder wenn aufgrund weiterer Ungenauigkeiten ein exaktes Ergebnis sowieso nicht berechenbar ist, sollte sie verwendet werden.
- Weil die gemischte Verzinsung üblicherweise höhere Zinserträge als die Verzinsung mit nicht ganzzahligen Exponenten erbringt, ist sie zwar inkonsistent, aber im Grundsatz bei Geldanlagen verbraucherfreundlich.

Unterjährige Verzinsung mit Zinseszinsen

Wird die Zinsperiode bei der Zinseszinsrechnung auf einen Bruchteil eines Jahres verkürzt, so spricht man von unterjähriger Verzinsung. Durch die häufigere Zinsgutschrift werden eher Zinseszinsen erzielt.

Ist i_{nom} der auf ein Jahr bezogene nominale Zinssatz (bisher einfach *Zinssatz* genannt), so ist zum Beispiel $i_{\text{nom}}/12$ der relative Monatszinssatz oder $i_{\text{nom}}/4$ der relative Quartalszinssatz.

Beispiel: Ergebnisse bei einheitlichem nominalen Jahreszinssatz $i_{\text{nom}} = 0{,}12$ ($= 12\%$), Kapitalanlage 1.000 Euro, Laufzeit 1 Jahr. Endwert bei ...

- jährlicher Verzinsung: $1.000 \cdot 1{,}12 = 1.120{,}00$
- halbjährlicher Verzinsung: $1.000 \cdot 1{,}06^2 = 1.123{,}60$
- vierteljährlicher Verzinsung: $1.000 \cdot 1{,}03^4 = 1.125{,}51$
- monatlicher Verzinsung: $1.000 \cdot 1{,}01^{12} = 1.126{,}83$
- täglicher Verzinsung: $1.000 \cdot 1{,}000\bar{3}^{360} = 1.127{,}47$

Unterjährige Verzinsung mit Zinseszinsen

- Der effektive Zinssatz i_{eff} ist bei unterjähriger Verzinsung höher als der nominale Zinssatz (bisher war keine Unterscheidung nötig).
- Findet die Zinszahlung monatlich, also 12 mal pro Jahr statt, so folgt aus der Zinseszinsformel für das Endkapital nach n Jahren

$$K_n = \left(1 + \frac{i_{\text{nom}}}{12}\right)^{12n} K_0.$$

- Gleicher Endwert bei monatlicher und jährlicher Zinszuschreibung erfordert:

$$K_0(1 + i_{\text{eff}})^n = K_0 \left(1 + \frac{i_{\text{nom}}}{12}\right)^{12n}$$

  Auflösen nach i_{eff} liefert:

$$\boxed{i_{\text{eff}} = \left(1 + \frac{i_{\text{nom}}}{12}\right)^{12} - 1}$$

Unterjährige Verzinsung mit Zinseszinsen

- Durch diese Formel wird der effektive Zinssatz berechnet. Eine jährliche Zinsgutschrift mit dem effektiven Zinssatz ergibt den selben Endwert wie eine monatliche Gutschrift mit $i_{\text{nom}}/12$.
- Beispiel: $i_{\text{nom}} = 6\%$, $i_{\text{nom}}/12 = 0{,}5\%$, dann ist

$$i_{\text{eff}} = 1{,}005^{12} - 1 = 0{,}0617 = 6{,}17\%$$

- Werden 100 Euro für 10 Jahre angelegt, so ergibt sich in beiden Fällen (bis auf Rundungsfehler) der selbe Endwert

$$K_n = 100 \cdot 1{,}0617^{10} = 181,98; \quad K_n = 100 \cdot 1{,}005^{120} = 181{,}94$$

Unterjährige Verzinsung mit Zinseszinsen

- Umgekehrt kann zu einem gegebenen effektiven Jahreszinssatz ein konformer unterjähriger Zinssatz (hier der Monatszinssatz) bestimmt werden:

$$\boxed{\frac{i_{\text{nom}}}{12} = \sqrt[12]{(1 + i_{\text{eff}})} - 1}$$

- Der durch diese Formel berechnete Zinssatz ist der zum Jahreszinssatz i_{eff} konforme Monatszinssatz $\frac{i_{\text{nom}}}{12}$.
- Beispiel: Bei einem effektiven Jahreszinssatz von 10% erhält man nach 10 Jahren aus einem Anlagebetrag von 100,- einen Endwert von $K_n = 100 \cdot 1{,}1^{10} = 259{,}37$.
  Denselben Wert (bis auf Rundungsfehler) erhält man bei monatlicher Zinsgutschrift mit dem Zinssatz $\frac{i_{\text{nom}}}{12} = \sqrt[12]{1{,}1} - 1 = 0{,}00797 = 0{,}797\%$: $K_n = 100 \cdot 1{,}00797^{120} = 259{,}25$.
- Hinweis: Die Formeln zu Bestimmung des effektiven Zinssatzes und des konformen unterjährigen Zinssatzes können analog bei anderen unterjährigen Zeiträumen verwendet werden (z.B. „4“ statt „12“ bei quartalsweiser Verzinsung).

Berücksichtigung von Gebühren

Ein Betrag von $K_0 = 500$ € wird zu 6% nominal bei monatlicher Verzinsung für zwei Jahre angelegt. Angenommen, am Anfang der Laufzeit fällt zusätzlich eine Gebühr (Agio) in Höhe von $g = 1{,}0\%$ an. Wie hoch ist dann der Effektivzins?

- Schritt 1: Einzahlung: $K_0 \cdot (1 + g) = 500 \cdot (1 + 0{,}01) = 505{,}00$.
- Schritt 2: Am Ende der Laufzeit werden ausgezahlt:

$$K_t = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i_{\text{nom}}}{12}\right)^{24} = 500 \cdot \left(1 + \frac{0{,}06}{12}\right)^{24} = 563{,}58$$

- Schritt 3: Der Effektivzins ist nun der entsprechende Jahreszinssatz, der zum selben Endwert führt:

$$563{,}58 = 505{,}00 \cdot (1 + i_{\text{eff}})^2,$$

$$\text{also } i_{\text{eff}} = \left(\frac{563{,}58}{505{,}00}\right)^{1/2} - 1 = 0{,}0564 = 5{,}64\%$$

Kontinuierliche Verzinsung

- Stetige oder kontinuierliche Verzinsung bedeutet, dass in jedem Moment proportional zum augenblicklichen Kapital Zinsen gezahlt werden.
- Anwendungen sind zum Beispiel die Bewertung von Optionen und die Wirtschaftstheorie.
- Der auf ein Jahr bezogene Zinssatz sei ρ. Pro Zinsperiode beträgt der Zinssatz also ρ/h. Dann beträgt der Endwert nach n Jahren:

$$K_n = K_0 \left(1 + \frac{\rho}{h}\right)^{hn}.$$

- Diesen Ausdruck kann man umformen zu

$$K_n = K_0 \left[\left(1 + \frac{1}{h/\rho}\right)^{h/\rho}\right]^{\rho n}.$$

Kontinuierliche Verzinsung

- Kontinuierliche Zinszuschreibung bedeutet formal, dass $h \to \infty$ und damit auch $(h/\rho) \to \infty$. Der Grenzwert des Terms in den eckigen Klammern ist die Eulersche Zahl $e = 2{,}71828\ldots$. Damit folgt:

$$K_n = K_0 \left[\lim_{(h/\rho)\to\infty} \left(1 + \frac{1}{h/\rho}\right)^{h/\rho} \right]^{\rho n} = K_0 e^{\rho n}.$$

- ρ ist ein jahresbezogener Zinssatz und wird auch Zinsintensität oder Momentanzinssatz genannt. Auch hier kann ein konformer Effektivzinssatz berechnet werden:

$$K_0 e^{\rho n} = K_0 (1 + i_{\text{eff}})^n \;\Rightarrow\; e^{\rho} = (1 + i_{\text{eff}}),$$

also

$$i_{\text{eff}} = e^{\rho} - 1 \quad \text{oder} \quad \rho = \ln(1 + i_{\text{eff}})$$

Kontinuierliche Verzinsung

Beispiel:

- Bei einem Jahreszinssatz von 10% erhält man nach 10 Jahren aus einem Anlagebetrag von 100,- einen Endwert von $K_n = 259{,}37$ (Zinseszinsformel).
- Denselben Wert (bis auf Rundungsfehler) erhält man bei kontinuierlicher Zinsgutschrift mit dem Zinssatz $\rho = \ln 1,1 = 0{,}0953 = 9{,}53\%$:

$$K_n = 100 \cdot e^{0{,}0953 \cdot 10} = 259{,}35$$

Hinweis: ρ und i unterscheiden sich zumindest für kleine Zinssätze nur geringfügig, weil die Näherung $\ln(1+i) \approx i$ für kleine i gilt.

Gliederung

Problemstellung

Zahlungen, die zu unterschiedlichen Zeitpunkten anfallen, können nicht direkt miteinander verglichen werden, denn ...

- bei zu leistenden Zahlungen haben frühere Zahlungen den Nachteil, dass die Liquidität zwischenzeitlich nicht mehr Zins bringend angelegt werden kann,
- bei zu erhaltenden Zahlungen haben die früheren Einnahmen den Vorteil, dass die Liquidität in der Zwischenzeit Zins bringend angelegt werden kann.

Beispiel: 1.000 €, die heute erhalten werden, haben einen höheren Wert als 1.000 € in einem Jahr. Wird nämlich die heute erhaltene Zahlung für ein Jahr angelegt (Zinssatz 3%), ergibt sich in einem Jahr mit 1.030 € ein höherer Wert.

Zahlungen können also nur sinnvoll miteinander verglichen werden, wenn sich ihr jeweiliger Wert auf einen einheitlichen Zeitpunkt bezieht.

Endwert und Barwert

Beispiel: Für den Verkauf eines Produktes liegen zwei Angebote vor: A bietet 20.000 Euro sofort und 10.000 Euro in 3 Jahren; B bietet je 15.000 Euro in einem Jahr und in 2 Jahren. Welches Angebot ist – bei einer alternativen Verzinsung von 5% – für den Verkäufer günstiger?

Lösung: Zahlungen können dann miteinander verglichen werden, wenn die Werte inklusive möglicher Zinserträge einer alternativen Anlage zu einem einheitlichen Zeitpunkt bestimmt werden. Die Endwerte der beiden Zahlungsreihen in $t = 3$ betragen:

$$-\text{A}: \quad 20.000 \cdot 1{,}05^3 + 10.000 = 33.152{,}50$$

$$-\text{B}: \quad 15.000 \cdot 1{,}05^2 + 15.000 \cdot 1{,}05 = 32.287{,}50$$

Angebot A ist daher besser.

Endwert und Barwert

Alternativ kann man auch alle Werte auf den Zeitpunkt 0 beziehen, indem die Barwerte ausgerechnet werden:

$$-A: \qquad 20.000 + \frac{10.000}{1{,}05^3} = \frac{33.152{,}50}{1{,}05^3} = 28.638{,}38$$

$$-B: \qquad \frac{15.000}{1{,}05} + \frac{15.000}{1{,}05^2} = \frac{32.287{,}50}{1{,}05^3} = 27.891{,}16$$

Auch in diesem Fall ist A vorzuziehen.

Es spielt allgemein keine Rolle, ob der Barwert oder der Endwert verwendet wird, um zwei Zahlungsströme miteinander zu vergleichen.

Allgemeine Darstellung

- Zwei Zahlungen Z_t und Z_0 heißen in der Finanzmathematik äquivalent, wenn für den relevanten Zinssatz i (ganzjährig oder unterjährig mit Zinseszinsen) gilt
$$Z_t = Z_0 \cdot (1+i)^t$$
- Unterjährig ohne Zinseszinsen (Tage $t < 360$):
$$Z_t = Z_0 \cdot \left(1 + i \cdot \frac{t}{360}\right)$$
- Entsprechend sind zwei Zahlungsreihen äquivalent, wenn sie nach Auf- oder Abzinsung auf einen gemeinsamen Zeitpunkt den gleichen Wert haben.
- Sind zwei Zahlungen oder Zahlungsreihen äquivalent bezüglich eines Zeitpunktes, so auch bezüglich jedes anderen Zeitpunktes.
- Im vorangehenden Beispiel sind die Zahlungsreihen nicht äquivalent. Da A besser ist als B, wenn man den Endwert betrachtet, muss A auch besser sein als B, wenn man den Barwert betrachtet.

Investitionsrechnung

- In der Investitionsrechnung geht es um die Bewertung von Finanz- oder Realinvestitionen anhand der mit ihnen verbundenen Zahlungsströme.
- Vereinfachend wird unterstellt, dass eine sogenannte Normalinvestition mit einer einmaligen Auszahlung $-Z_0$ im Zeitpunkt 0 und anschließend nur positiven, jährlichen Einnahmen Z_j verbunden ist (nachschüssig, das heißt am Jahresende).
- Die grundlegende Methode der Investitionsrechnung ist die Kapitalwertmethode. Der Kapitalwert KW ist der Barwert sämtlicher mit dem Investitionsprojekt verbundenen Zahlungen:

$$KW = -Z_0 + \sum_{j=1}^{n} \frac{Z_j}{(1+i)^j} = -Z_0 + \frac{Z_1}{(1+i)^1} + \frac{Z_2}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{Z_n}{(1+i)^n}$$

- Eine Investition ist vorteilhaft gemäß der Kapitalwertmethode, wenn $KW > 0$ ist. Ist $KW \leqq 0$, so ist eine festverzinsliche Anlage zum Zinssatz i besser, weil sie einen höheren oder mindestens gleichen Ertrag erbringen würde.

Investitionsrechnung

- Offenbar spielt die Höhe des Zinssatzes i in der Investitionsrechnung eine hervorragende Rolle. In der Praxis wird nicht ein Marktzinssatz, sondern ein sogenannter Kalkulationszinssatz oder Kalkulationszinsfuß verwendet, der gleich einem am Markt erzielbaren (oder zu zahlenden) Zinssatz zuzüglich einem Risikoaufschlag ist.
- Als interner Zinsfuß wird derjenige Zinssatz bezeichnet, bei dem der Barwert aller Einzahlungen gleich dem Barwert aller Auszahlungen ist, also $KW = 0$ ist.
- Der interne Zinsfuß beschreibt damit die Rendite einer Investition.
- Eine Investition ist vorteilhaft gemäß der internen Zinsfußmethode, wenn der interne Zinsfuß größer als der Kalkulationszinsfuß ist.

Investitionsrechnung

- Für den Fall mit nur einer Auszahlung am Anfang und nachfolgenden Einzahlungen (Normalinvestition) ist der interne Zinssatz eindeutig durch die positive Lösung der folgenden Gleichung bezüglich i bestimmt:

$$Z_0 = \sum_{j=1}^{n} \frac{Z_j}{(1+i)^j}$$

- Beachte: Die Variable ist nun i.
- Handelt es sich nicht um eine Normalinvestition, so kann die Gleichung mehrere positive Lösungen haben, von denen die richtige auszuwählen ist.
- Im Allgemeinen ist die Berechnung des internen Zinsfußes nur numerisch möglich. Im Falle von nur einer oder zwei Perioden muss aber lediglich eine quadratische Gleichung gelöst werden.

Investitionsrechnung

Beispiel: Eine Investition von 1.000 € führt zu Rückzahlungen von 600 € und 500 € in den beiden Folgejahren. Der Kalkulationszinsfuß sei 5%.

- Kapitalwertmethode:

$$KW = -1.000 + \frac{600}{1{,}05^1} + \frac{500}{1{,}05^2} = 24{,}94 > 0$$

  Die Investition ist vorteilhaft gemäß der Kapitalwertmethode.

- Interne Zinsfußmethode:

$$0 = -1.000 + \frac{600}{(1+i)^1} + \frac{500}{(1+i)^2} \quad \stackrel{\text{p-q-Formel}}{\Longrightarrow} \quad i_{\text{int}} = 6{,}81\%$$

  Da $i_{\text{int}} > 5\%$ ($=$ Kalkulationszinsfuß) ist die Investition ebenfalls vorteilhaft gemäß der internen Zinsfußmethode. (Hinweis: Die negative Lösung der quadratischen Gleichung ist ökonomisch nicht relevant.)

- Insbesondere beim Vergleich mehrerer Projekte müssen beide Methoden nicht zum gleichen Ergebnis führen ($\rightarrow$ Investitionsrechnung).

Investitionsrechnung

Beispiel: Verglichen werden zwei Projekte A und B:

Jahr t	0	1	2	3	4	5
A_t	-2.000	1.000	0	1.000	0	1.000
B_t	-1.600	400	400	600	600	600

Lösung mit der Kapitalwertmethode (Kalkulationszinsfuß 5%):

$$KW_A = -2.000 + \frac{1.000}{1{,}05^1} + \frac{0}{1{,}05^2} + \frac{1.000}{1{,}05^3} + \frac{0}{1{,}05^4} + \frac{1.000}{1{,}05^5} = 599{,}74 > 0$$

$$KW_B = -1.600 + \frac{400}{1{,}05^1} + \frac{400}{1{,}05^2} + \frac{600}{1{,}05^3} + \frac{600}{1{,}05^4} + \frac{600}{1{,}05^5} = 625{,}80 > 0$$

Projekt B ist demnach vorzuziehen.

Gliederung

Gegenstand

- Eine Rente ist eine Reihe fest vereinbarter Zahlungen Z, die zu bestimmten Zeitpunkten jeweils
  - am Anfang (vorschüssige Rente)
  - oder am Ende (nachschüssige Rente) einer Periode (Monat, Jahr) geleistet werden.
- Ein zentraler Gegenstand der Rentenrechnung ist die Bestimmung des Endwertes und des Barwertes solcher Zahlungsreihen.
- Die Berechnung erfolgt unter Verwendung der Summen von arithmetischen und geometrischen Reihen, für deren Herleitung auf die Literatur verwiesen wird.

Berechnung eines Rentenendwertes

- Der Zinsfaktor $1 + i$ wird zur vereinfachten Darstellung mit q abgekürzt ($q = 1 + i$).
- Der Endwert K_n einer nachschüssigen Rente ist die aufgezinste Summe aller einzelnen Rentenzahlungen:

$$\begin{aligned} K_n &= Zq^{n-1} + Zq^{n-2} + \ldots + Zq + Z \\ &= Z \cdot \underbrace{(q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + q + 1)}_{\text{geometrische Reihe}} \\ &= Z \cdot \underbrace{\frac{q^n - 1}{q - 1}}_{\text{Summe der geometrischen Reihe}} \end{aligned}$$

- Kurz:

$$K_n = Z \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

End- und Barwert einer nachschüssigen Rente

- Ersetzt man wieder q durch $1+i$, so folgt schließlich für den Endwert der nachschüssigen Rente::

$$\boxed{K_n = Z\frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

- Der Barwert der nachschüssigen Rente kann daraus durch Diskontierung mit dem Abzinsungsfaktor $1/(1+i)^n$ bestimmt werden:

$$\boxed{K_0 = \frac{K_n}{(1+i)^n} = Z\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}}$$

End- und Barwert einer vorschüssigen Rente

Der Endwert einer vorschüssigen Rente folgt aus der Überlegung, dass bei vorschüssiger Zahlungsweise im Vergleich zur nachschüssigen Zahlung einmal mehr verzinst wird. Der Endwert der nachschüssigen Rente wird daher mit $(1 + i)$ multipliziert:

$$\boxed{K_n = Z(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

Der Barwert kann wieder durch Diskontierung mit dem Abzinsungsfaktor $1/(1 + i)^n$ bestimmt werden:

$$\boxed{K_0 = \frac{K_n}{(1+i)^n} = Z\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^{n-1}}}$$

Bezeichnungen

$$
\begin{aligned}
p &\triangleq \text{Zinssatz in Prozent} \\
i &\triangleq p/100 \\
q = (1+i) &\triangleq \text{(jährlicher) Zinsfaktor} \\
(1+i)^n &\triangleq \text{Aufzinsungsfaktor} \\
(1+i)^{-n} &\triangleq \text{Abzinsungsfaktor, Diskontierungsfaktor} \\
(1+i)\frac{(1+i)^n-1}{i} &\triangleq \text{Rentenendwertfaktor (vorschüssig)} \\
\frac{(1+i)^n-1}{i} &\triangleq \text{Rentenendwertfaktor (nachschüssig)} \\
\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^{n-1}} &\triangleq \text{Rentenbarwertfaktor (vorschüssig)} \\
\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n} &\triangleq \text{Rentenbarwertfaktor (nachschüssig)}
\end{aligned}
$$

Bedeutung der Rentenfaktoren

- Mit den bisher abgeleiteten Formeln lassen sich zahlreiche Probleme der Finanzmathematik lösen. Einige Beispiele dazu werden im folgenden behandelt.
- Da die Rentenfaktoren von zentraler Bedeutung sind, wurden sie früher für bestimmte Zahlenwerte tabelliert. Angesichts der modernen EDV ist dieses Vorgehen nicht mehr zeitgemäß.

Sparvertrag

In einen Sparvertrag werden jährlich am Jahresanfang 1.000,- eingezahlt. Der jährliche Zinssatz beträgt 5%. Der Endwert nach 10 Jahren beträgt dann

$$K_n = 1.000 \cdot 1{,}05 \frac{1{,}05^{10} - 1}{0{,}05} = 13.206{,}79$$

Der Barwert ist

$$K_0 = \frac{13.206{,}79}{1{,}05^{10}} = 8.107{,}82$$

Bei nachschüssiger Zahlungsweise gilt dagegen:

$$K_n = 1.000 \cdot \frac{1{,}05^{10} - 1}{0{,}05} = 12.577{,}89$$

$$K_0 = \frac{12.577{,}89}{1{,}05^{10}} = 7.721{,}73$$

Unterjährige Renten

Bisher jährliche Rentenzahlungen; jetzt: Aufteilung der Jahre in jeweils 12 Rentenzahlungs-Perioden.

Vorgehensweise:

- Bestimmung des Jahresendwertes Z_e (konforme jährlich nachschüssige Ersatzrentenrate) der 12 unterjährigen Rentenzahlungen Z_u.
- Mit dem äquivalenten Jahresendwert kann dann wie bisher weiter gerechnet werden.

Zu beachten ist, dass innerhalb eines Jahres i.d.R. keine Zinseszinsen berechnet werden. Die Aufzinsung der 12 unterjährigen Rentenzahlungen erfolgt daher mit einfacher (unterjährig linearer) Verzinsung.

Die folgenden Berechnungen zeigen unter Verwendung der Summenformel für eine arithmetische Reihe, wie die jährlich nachschüssigen Ersatzrentenraten Z_e aus den monatlichen Raten Z_u hergeleitet werden.

Konforme Ersatzrentenraten

Konforme jährlich nachschüssige Ersatzrentenrate bei unterjährig nachschüssiger Rente:

$$
\begin{aligned}
Z_e &= Z_u\left(1+\frac{11}{12}i\right)+Z_u\left(1+\frac{10}{12}i\right)+\ldots+Z_u\left(1+\frac{0}{12}i\right)\\
&= Z_u\left(12+\frac{11+10+\ldots+0}{12}i\right) = 12Z_u+\frac{i}{12}Z_u(1+2+\ldots+11)\\
&= 12Z_u+\frac{i}{12}Z_u\frac{11\cdot 12}{2} = Z_u(12+5{,}5i)
\end{aligned}
$$

Konforme jährlich nachschüssige Ersatzrentenrate bei unterjährig vorschüssiger Rente:

$$
\begin{aligned}
Z_e &= Z_u\left(1+\frac{12}{12}i\right)+Z_u\left(1+\frac{11}{12}i\right)+\ldots+Z_u\left(1+\frac{1}{12}i\right)\\
&= Z_u\left(12+\frac{12+11+\ldots+1}{12}i\right) = 12Z_u+\frac{i}{12}Z_u(1+2+\ldots+12)\\
&= 12Z_u+\frac{i}{12}Z_u\frac{12\cdot 13}{2} = Z_u(12+6{,}5i)
\end{aligned}
$$

Konforme Ersatzrentenraten

- Konforme jährlich nachschüssige Ersatzrentenrate Z_e bei m unterjährig nachschüssigen Zahlungen Z_u:

$$\boxed{Z_e = Z_u\left(m + \frac{m-1}{2}i\right)} \quad \text{bei } m = 12: \quad \boxed{Z_e = Z_u(12 + 5{,}5i)}$$

- Konforme jährlich nachschüssige Ersatzrentenrate Z_e bei m unterjährig vorschüssigen Zahlungen Z_u:

$$\boxed{Z_e = Z_u\left(m + \frac{m+1}{2}i\right)} \quad \text{bei } m = 12: \quad \boxed{Z_e = Z_u(12 + 6{,}5i)}$$

- Mit der äquivalenten jährlichen Ersatzrentenrate Z_e kann nun unter Verwendung der nachschüssigen Rentenformeln weitergerechnet werden.

Beispiele

Wieviel Geld können Sie nach 10 Jahren abheben, wenn Sie monatlich vorschüssig 100 € bei einem Zinssatz von 3% anlegen?

(1) Nachschüssige Ersatzrentenrate:

$$\begin{aligned} Z_e &= Z_u(12 + 6{,}5i) \\ &= 100 \cdot (12 + 6{,}5 \cdot 0{,}03) \\ &= 100 \cdot 12{,}195 = 1219{,}50 \end{aligned}$$

(2) Rentenendwert nachschüssig:

$$\begin{aligned} K_n &= Z_e \frac{(1+i)^n - 1}{i} \\ &= 1219{,}50 \cdot \frac{1{,}03^{10} - 1}{0{,}03} \\ &= 13.980{,}20 \end{aligned}$$

Beispiele

Ein heute 57-jähriger Arbeitnehmer hat in 10 Jahren einen Anspruch auf eine monatliche Betriebsrente von 500 Euro, die vorschüssig bezahlt wird. Durch welche Gegenleistung kann sie heute bei einem Zinssatz von 6% abgelöst werden, wenn eine Lebenserwartung von 79 Jahren angenommen wird?

Lösung in drei Schritten:

(1) Berechnung der konformen jährlich nachschüssigen Ersatzrentenrate der vorschüssigen unterjährigen Rente.

(2) Barwert der Ersatzrentenraten zum Zeitpunkt des Rentenbeginns.

(3) Barwert heute.

Beispiele

(1) Berechnung der Ersatzrentenrate:

$$Z_e = Z_u(12 + 6{,}5i) = 500 \cdot (12 + 6{,}5 \cdot 0{,}06) = 6.195$$

(2) Barwert zum Zeitpunkt des Rentenbeginns:

$$K_{10} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} Z_e = \frac{1{,}06^{12} - 1}{0{,}06 \cdot 1{,}06^{12}} 6.195 = 51.937{,}91$$

(3) Barwert heute:

$$K_0 = \frac{K_{10}}{(1+i)^{10}} = \frac{51.937{,}91}{1{,}06^{10}} = 29.001{,}86$$

Ewige Rente

- Allgemein heißt in der Rentenrechnung eine Rente mit unendlicher Laufzeit ewige Rente.
- Die Endwerte sind unendlich, die Barwerte können sinnvoll berechnet werden.
- Barwert der ewigen nachschüssigen Rente:

$$K_0 = \lim_{n\to\infty} Z \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} = \frac{Z}{i}, \quad \text{kurz:} \quad \boxed{K_0 = \frac{Z}{i}}$$

- Barwert der ewigen vorschüssigen Rente:

$$K_0 = \lim_{n\to\infty} Z \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^{n-1}} = Z + \frac{Z}{i}, \quad \text{kurz:} \quad \boxed{K_0 = Z + \frac{Z}{i}}$$

- Hinweis: Die Rente entspricht den Zinsen.

Gliederung

Annuitäten- und Tilgungsdarlehen

- Berechnung der Raten (= Zinsen plus Tilgung) zur Rückzahlung größerer Darlehen.
- Entweder wird das Darlehen innerhalb der Laufzeit (Zinsbindungsfrist) vollständig zurückgezahlt, oder es verbleibt eine Restschuld.
- Annuitätendarlehen: Die Rate (= Annuität) bleibt über den Rückzahlungszeitraum konstant.
- Tilgungsdarlehen: Der Tilgungsanteil bleibt konstant, wodurch die Rate aufgrund der weniger werdenden Zinsen sinkt.

Annuitätendarlehen

- Zur Tilgung eines Darlehens K_0 werde über eine feste Laufzeit jeweils zum Ende einer Periode ein Betrag Z eingezahlt. Dann ist die Schuld getilgt, wenn der Barwert der Zahlungen Z gleich K_0 ist:

$$K_0 = Z\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$$

- Also muss der Tilgungsbetrag (die Annuität) lauten:

$$\boxed{Z = K_0\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}}$$

- Der Kehrwert des Rentenbarwertfaktors heißt Annuitätenfaktor.
- Restschuld am Ende des Jahres k (ohne Herleitung):

$$\boxed{K_k = K_0\frac{(1+i)^n - (1+i)^k}{(1+i)^n - 1}}$$

Annuitätendarlehen

- Beispiel: Um ein Darlehen von 16.000,- in 20 Jahren zurückzuzahlen, beträgt die erforderliche jährliche Rückzahlung bei einem Zinssatz von 9%

$$Z = 16.000 \frac{0{,}09 \cdot 1{,}09^{20}}{1{,}09^{20} - 1} = 1.752{,}74$$

- Nach 10 Jahren beträgt die Restschuld:

$$K_{10} = 16.000 \frac{1{,}09^{20} - 1{,}09^{10}}{1{,}09^{20} - 1} = 11.248{,}51$$

- Nach 20 Jahren beträgt die Restschuld:

$$K_{20} = 16.000 \frac{1{,}09^{20} - 1{,}09^{20}}{1{,}09^{20} - 1} = 0$$

Annuitätendarlehen

- Nun wird angenommen, die Höhe der Annuität wird vorgegeben.
- Dann kann die Laufzeit n berechnet werden, nach der das Darlehen getilgt ist (folgt durch Auflösen der Annuitätenformel nach n):

$$\boxed{n = -\frac{\ln(1 - K_0 \cdot i/Z)}{\ln(1+i)}}$$

- Für das vorangehende Beispiel (Darlehen $K_0 = 16.000$, Zinssatz $i = 0{,}09$, Annuität $Z = 1.752{,}74$) folgt:

$$n = -\frac{\ln(1 - 16.000 \cdot 0{,}09/1.752{,}74)}{\ln 1{,}09} = 20{,}0001$$

Tilgungsdarlehen

- Bei einem Tilgungsdarlehen ist der Tilgunsbetrag T konstant.
- Die Rate setzt sich aus Tilgung T und Zinsen zusammen.
- Die Rate ist anfangs hoch und sinkt dann zum Ende der Laufzeit immer weiter.
- Soll das Darlehen der Höhe K_0 in n Jahren getilgt werden, so beträgt die Tilgung T pro Jahr
$$T = \frac{K_0}{n}$$
- Die Restschuld am Ende des Jahres k ist $K_k = K_0 - k \cdot T$.
- Die im Jahr k zu zahlenden Zinsen betragen: $i \cdot K_{k-1}$, die gesamte Rate daher $Z_k = T + i \cdot K_{k-1}$.

Tilgungsdarlehen

Beispiel: Ein Unternehmen nimmt einen Kredit über 500.000 € zu 7% Zins auf. Der Kredit ist in fünf Jahren mit gleich bleibenden Tilgungsraten zu tilgen. Hier bietet sich die Darstellung anhand eines Zins- und Tilgungsplanes an:

Jahr	Restschuld	Zinsen	Tilgung	Rate
0	500.000	0	0	0
1	400.000	35.000	100.000	135.000
2	300.000	28.000	100.000	128.000
3	200.000	21.000	100.000	121.000
4	100.000	14.000	100.000	114.000
5	0	7.000	100.000	107.000