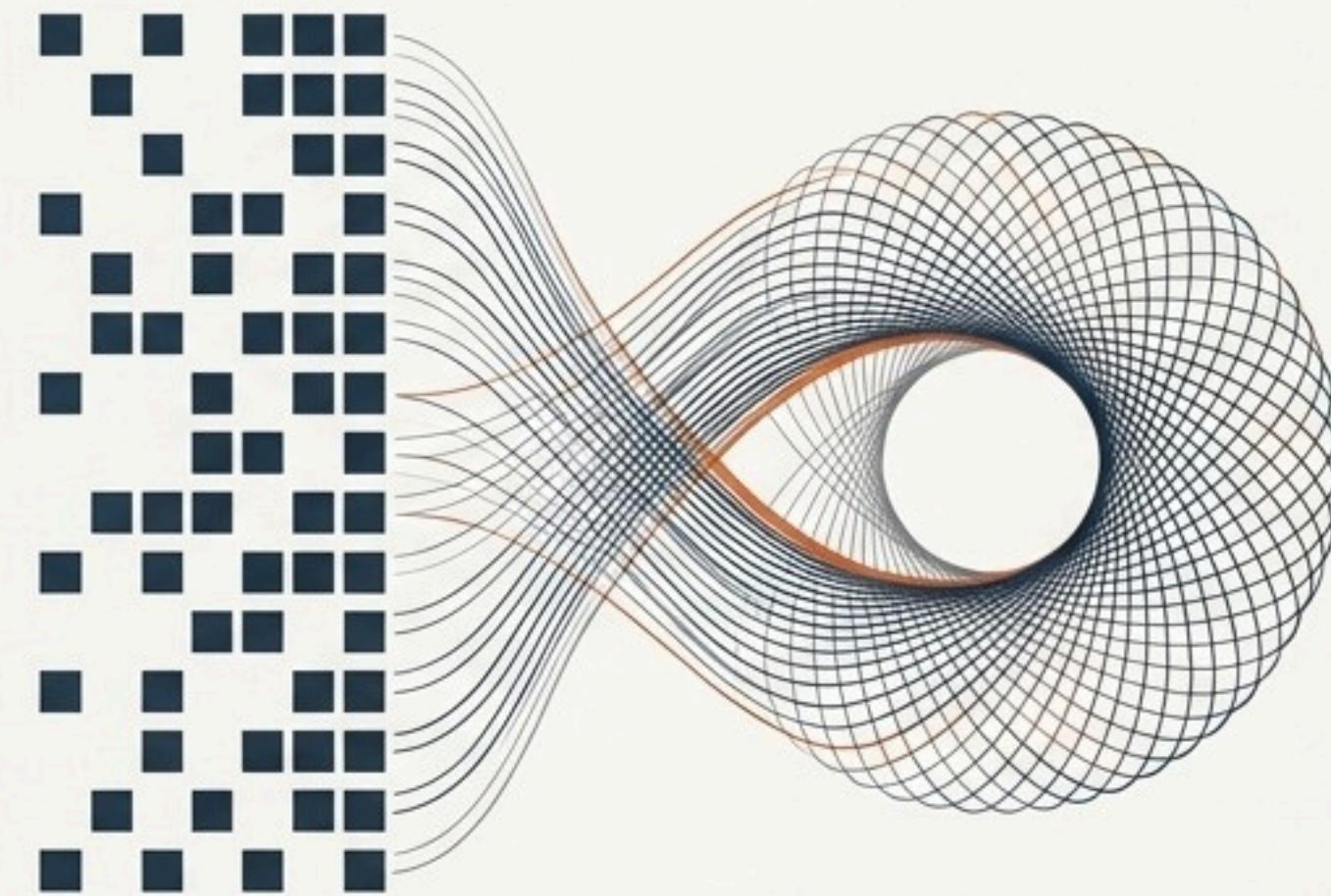


# Reconstruction d'Images par Décomposition Matricielle

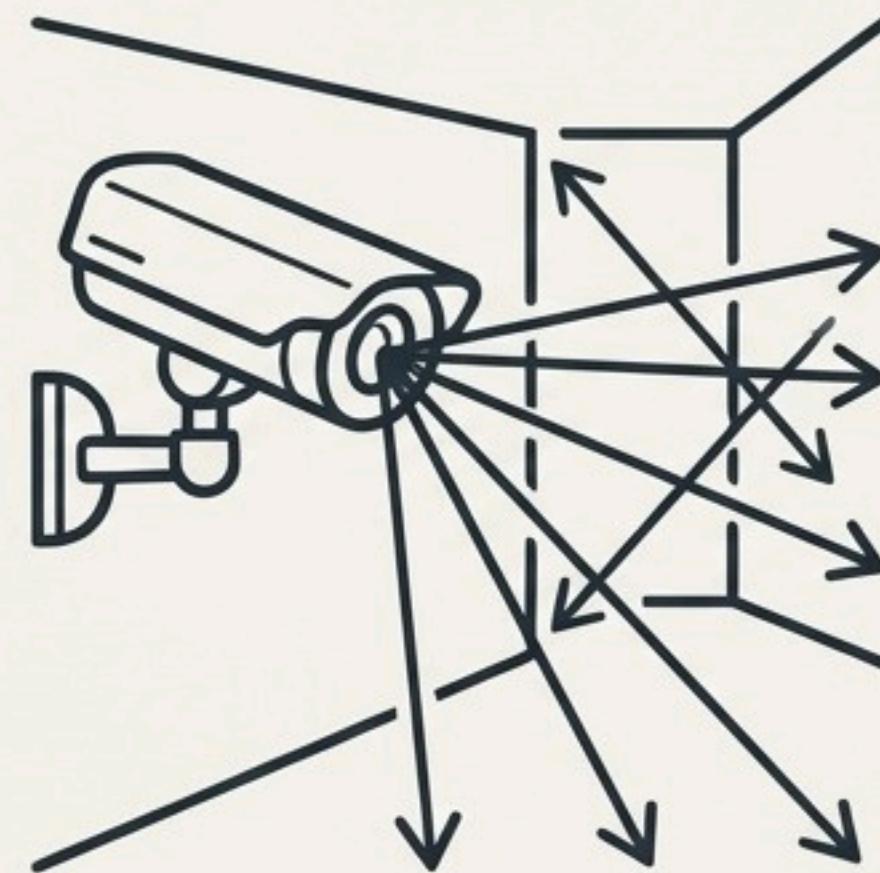
## Analyse Comparative : NMF, SVD, SGD



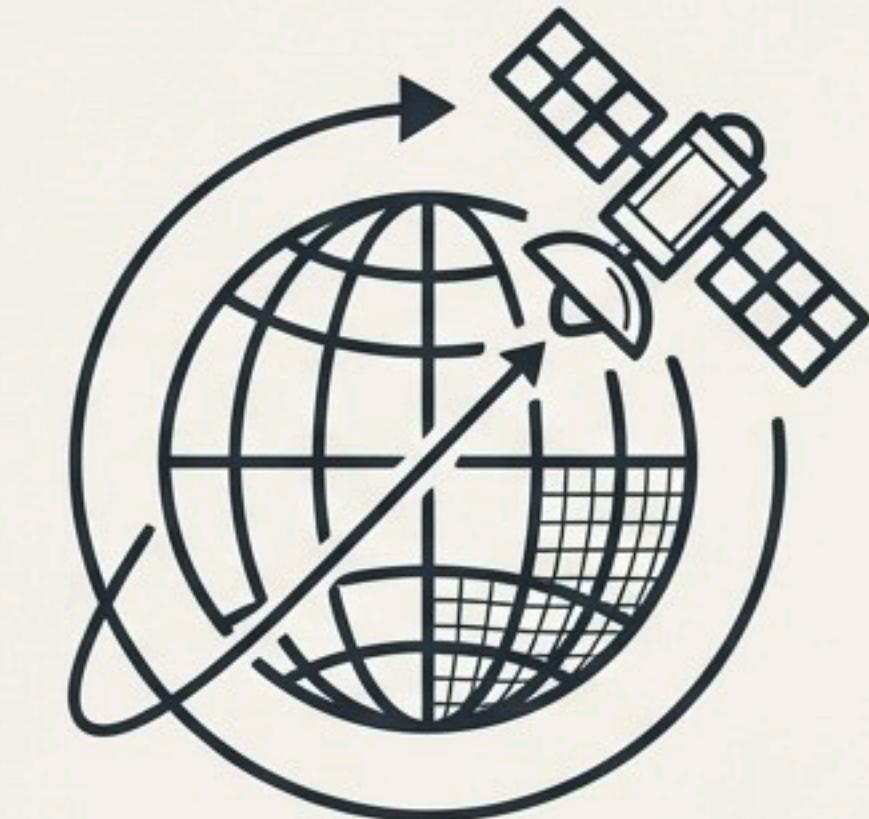
# Un Enjeu au Cœur d'Applications Critiques



Restaurer des images de qualité à partir de mesures partielles. (Ex: imagerie médicale, IRM, scanner).

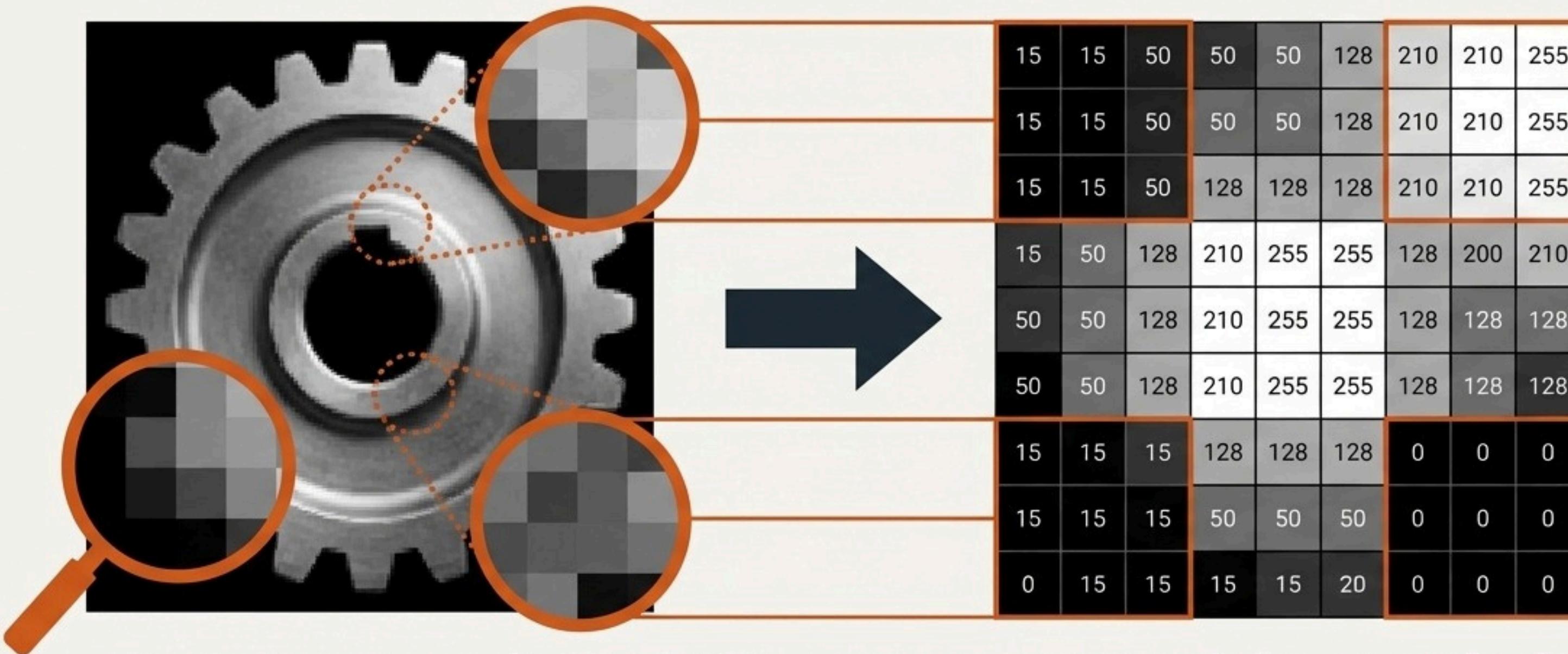


Combler des zones manquantes ou augmenter la résolution. (Ex: vidéosurveillance).



Fusionner plusieurs prises de vue pour une image complète. (Ex: imagerie satellite, drones).

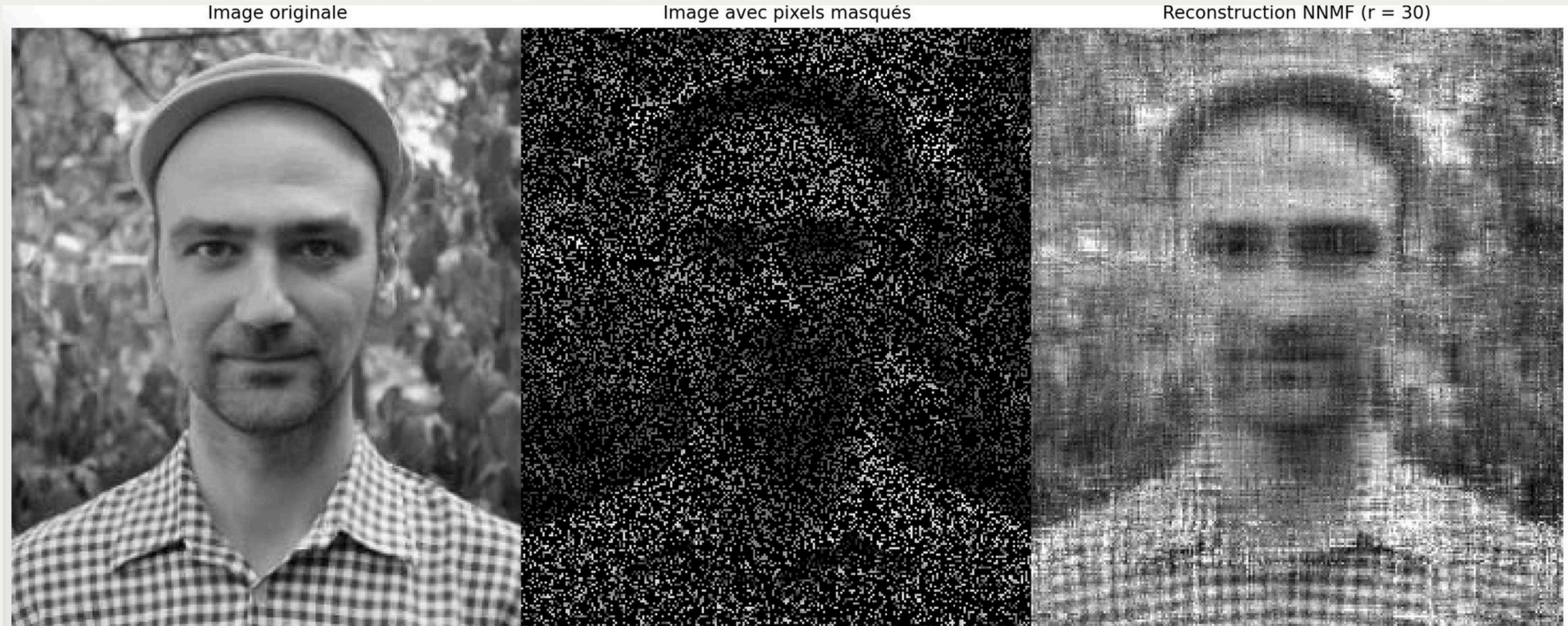
# Le Principe Fondamental : Une Image est une Matrice



Une image en niveaux de gris peut être vue comme une matrice bidimensionnelle où chaque entrée est une valeur entre 0 (noir) et 255 (blanc).

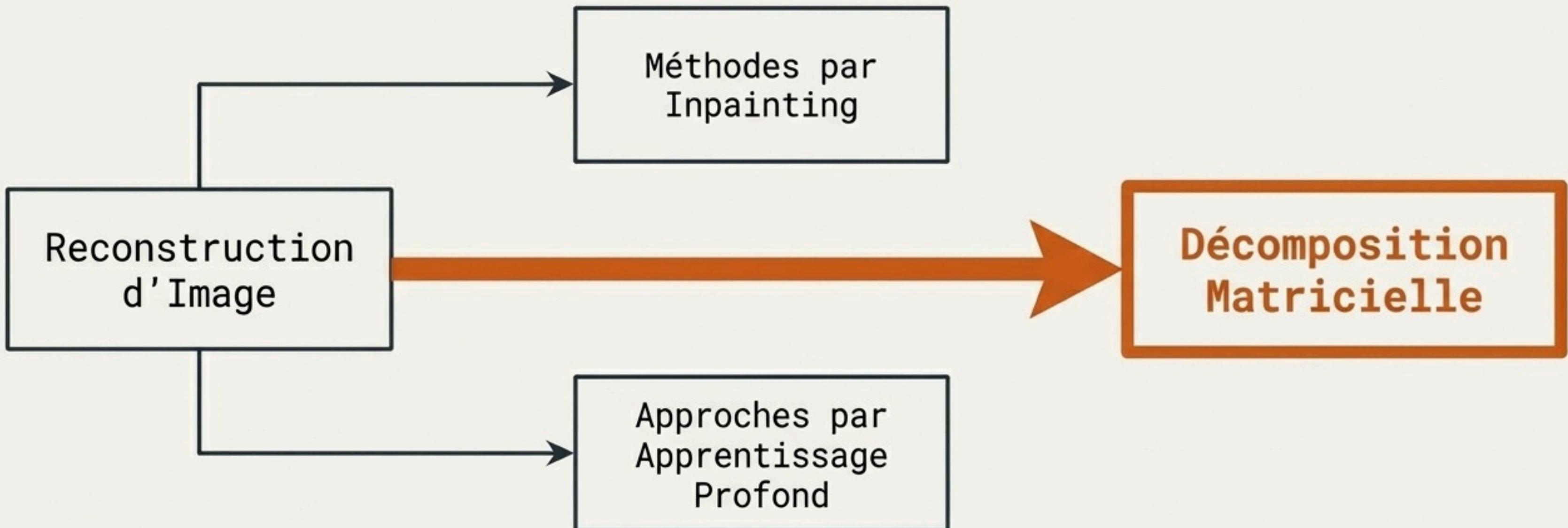
**75 % Pixels masqués (mis à 0)**

## **La Mission : Reconstruire l'Information Manquante**



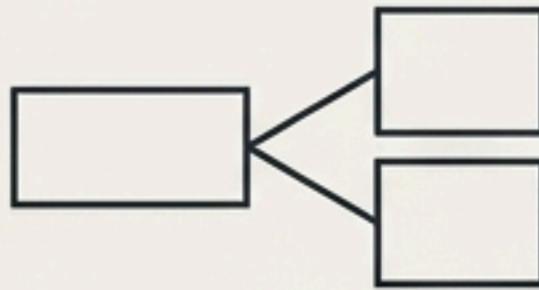
L'objectif est de développer une méthode capable d'estimer de manière fidèle les parties manquantes d'une image en se basant uniquement sur les pixels restants.

# Cartographie des Méthodes de Reconstruction

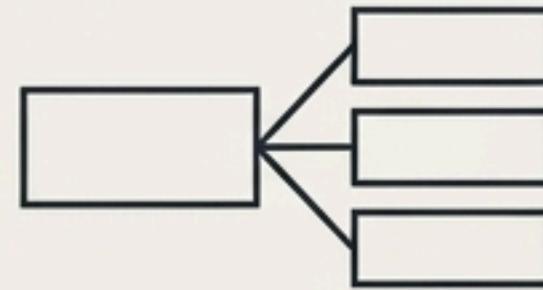


Il n'existe pas de nombre fini de techniques, mais plusieurs grandes familles de méthodes.  
Notre expédition se concentre sur une approche spécifique et puissante.

# Les Outils de l'Explorateur et le Terrain d'Étude



NMF



SVD



SGD



# Au Cœur du Réacteur NMF (1/3) : Principe et Préparation

## Principe

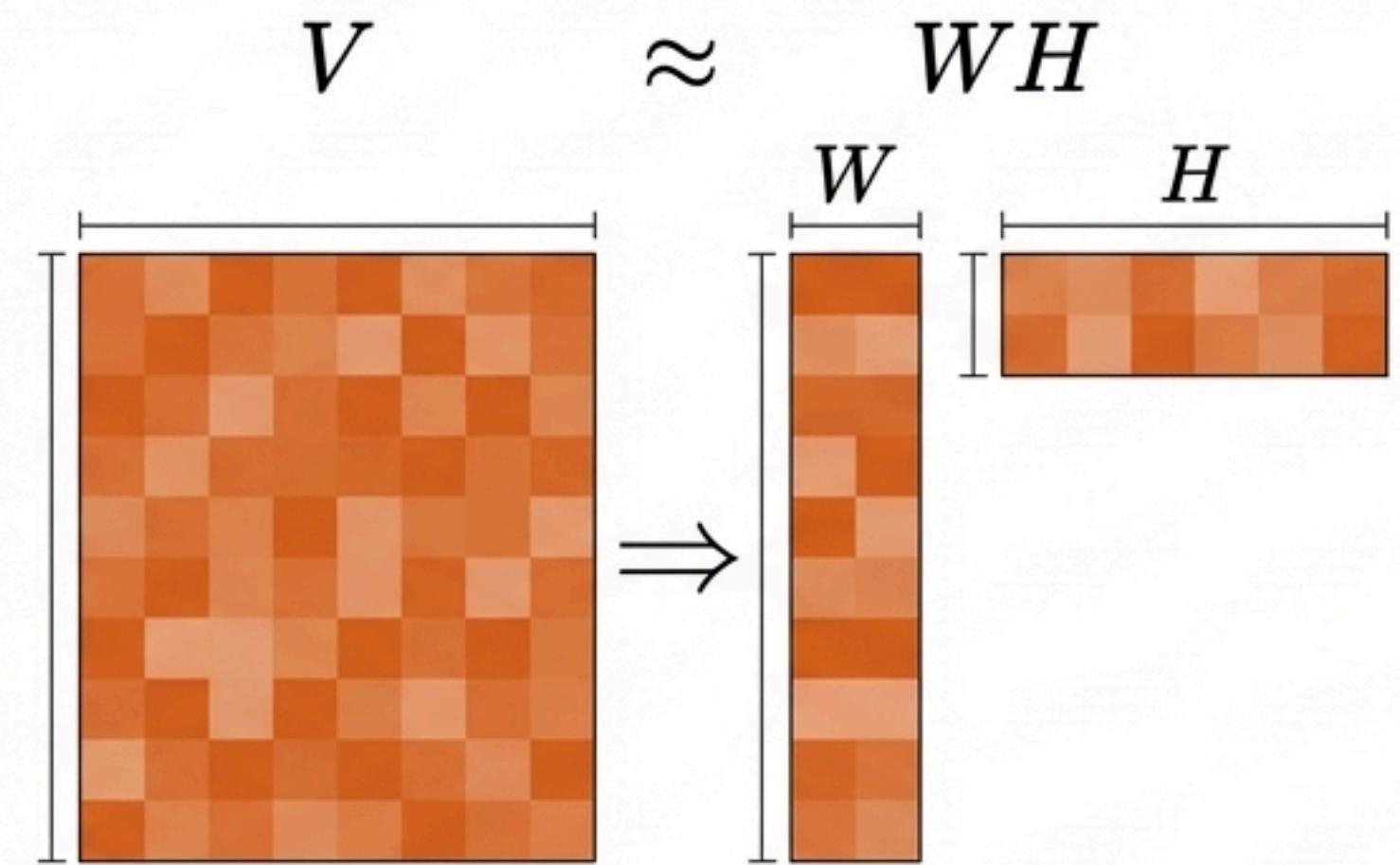
Décomposer la matrice de l'image ( $V$ ) en deux matrices à valeurs positives,  $W$  et  $H$ , interprétables comme des "parties" et des "coefficients d'assemblage". L'hypothèse clé est l'**extraction de caractéristiques additives**.

## Préparation des Données

**ETAPE 0 :** Les images grise étant déjà sous forme de matrice bidimensionnelle  $n \times m$ , il n'y a presque rien à préparer.

**ETAPE 1 : Normalisation\*\*:** Mettre à l'échelle les valeurs des pixels. Typiquement, diviser chaque valeur par 255 pour obtenir une plage de  $[0, 1]$ . Ceci stabilise l'optimisation.

**ETAPE 2 : Création du Masque\*\*:** Générer une matrice binaire ( $M$ ) de même taille que  $V$ .  $M(i,j) = 1$  si le pixel  $(i,j)$  est connu, et  $M(i,j) = 0$  s'il est manquant. Ce masque est crucial pour l'étape suivante.



## Au Cœur du Réacteur NMF (2/3) : Le Mécanisme de Masquage

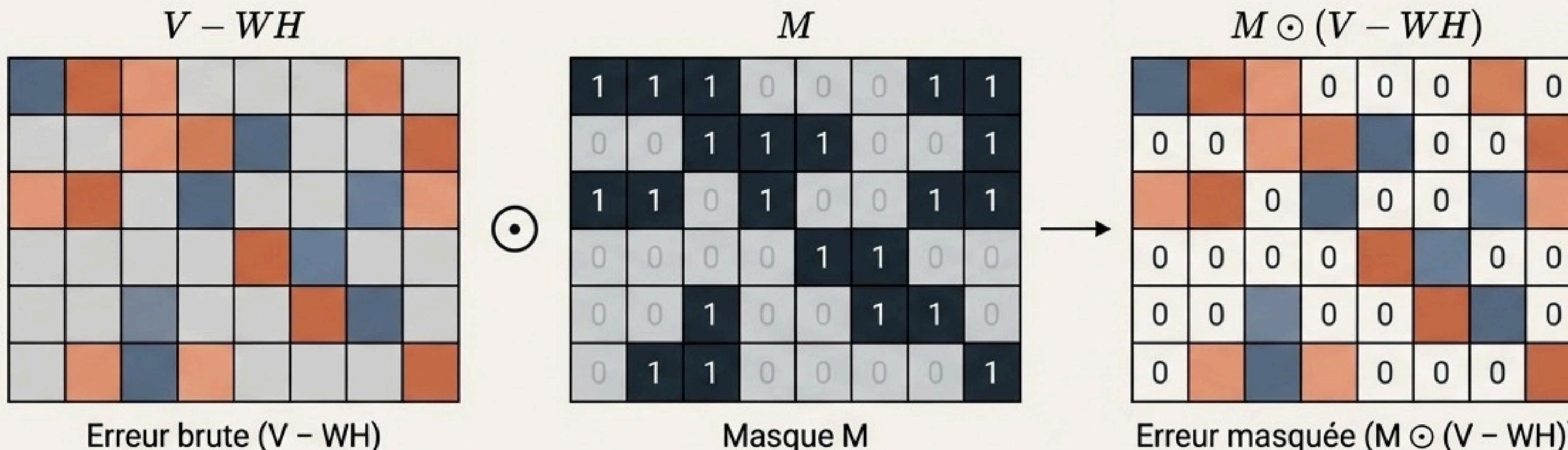
L'algorithme est modifié pour ignorer les pixels manquants lors de l'optimisation.

### Fonction Objectif

Au lieu de minimiser l'erreur sur toute la matrice, on minimise l'erreur uniquement sur les pixels connus.

$$\min_{W,H} \| M \odot (V - WH) \|^2$$

Où  $\odot$  est le produit élément par élément (Produit Hadamard). Le masque  $M$  met à zéro l'erreur pour les pixels manquants, les excluant du calcul.



Les règles de mise à jour itératives pour  $W$  et  $H$  sont ajustées pour intégrer ce masque, assurant que seuls les pixels observés influencent l'apprentissage des matrices de facteurs.<sup>8</sup>

## Au Cœur du Réacteur NMF (3/3) : La Puissance des "Parties"

Mises à jour multiplicative respectant la contrainte de non-négativité :

$$H \leftarrow H \odot \frac{W^\top (M \odot V)}{W^\top (M \odot (WH))}$$

$$W \leftarrow W \odot \frac{(M \odot V) H^\top}{(M \odot (WH)) H^\top}$$

### Matrice W ("Dictionnaire")

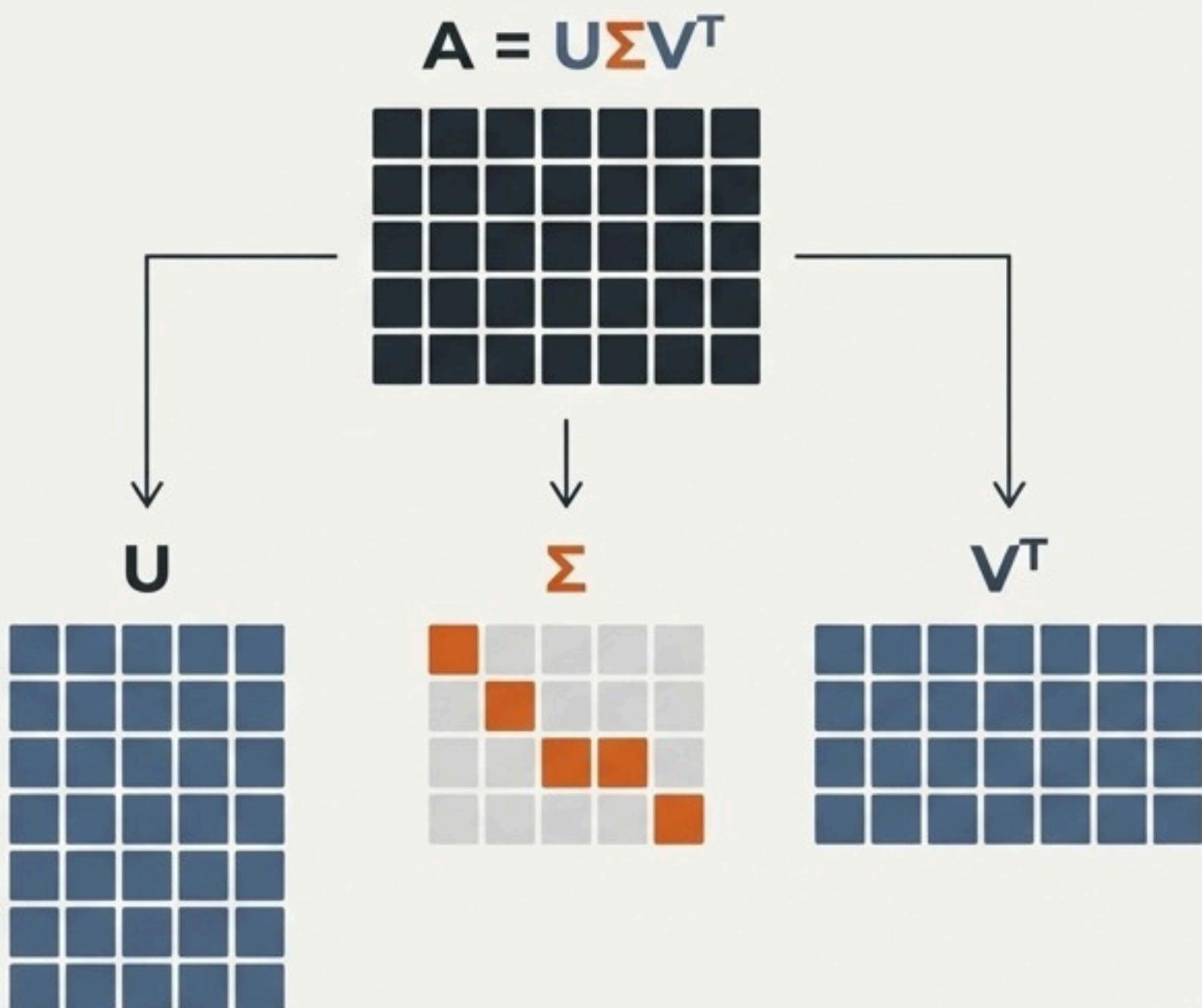
Chaque colonne peut être visualisée comme une "image de base" ou une caractéristique fondamentale (un motif, une texture, un composant).

### Matrice H ("Coefficients")

Chaque colonne spécifie comment combiner ces "images de base" pour reconstruire une image d'entrée spécifique. C'est la "recette" d'assemblage.

# Protocole 2 : La Décomposition en Valeurs Singulières (SVD)

- **Principe** : Trouver la meilleure approximation de la matrice originale par une matrice de rang inférieur, en capturant les corrélations les plus significatives.
- **Préparation des données** : Centrage des données en soustrayant la moyenne de chaque pixel.
- **Hypothèse clé** : Très efficace pour la compression et la réduction de bruit en isolant les composantes les plus importantes de l'image.



# SVD - Étape 1 : Le Centrage des Données

**\*\*Objectif du centrage\*\*** : Éliminer la composante de luminosité moyenne pour focaliser l'analyse sur la variance et la structure des données. C'est une condition préalable pour que SVD agisse comme une Analyse en Composantes Principales (ACP).

150	160	155
152	155	158
148	153	154

Matrice Originale (A)

$$\text{mean}(A) \approx 154$$



$$A' = A - \text{mean}(A)$$

-4	6	1
-2	1	4
-6	-1	0

Matrice Centrée (A')

# SVD - Étape 2 : Anatomie de $A = U\Sigma V^T$

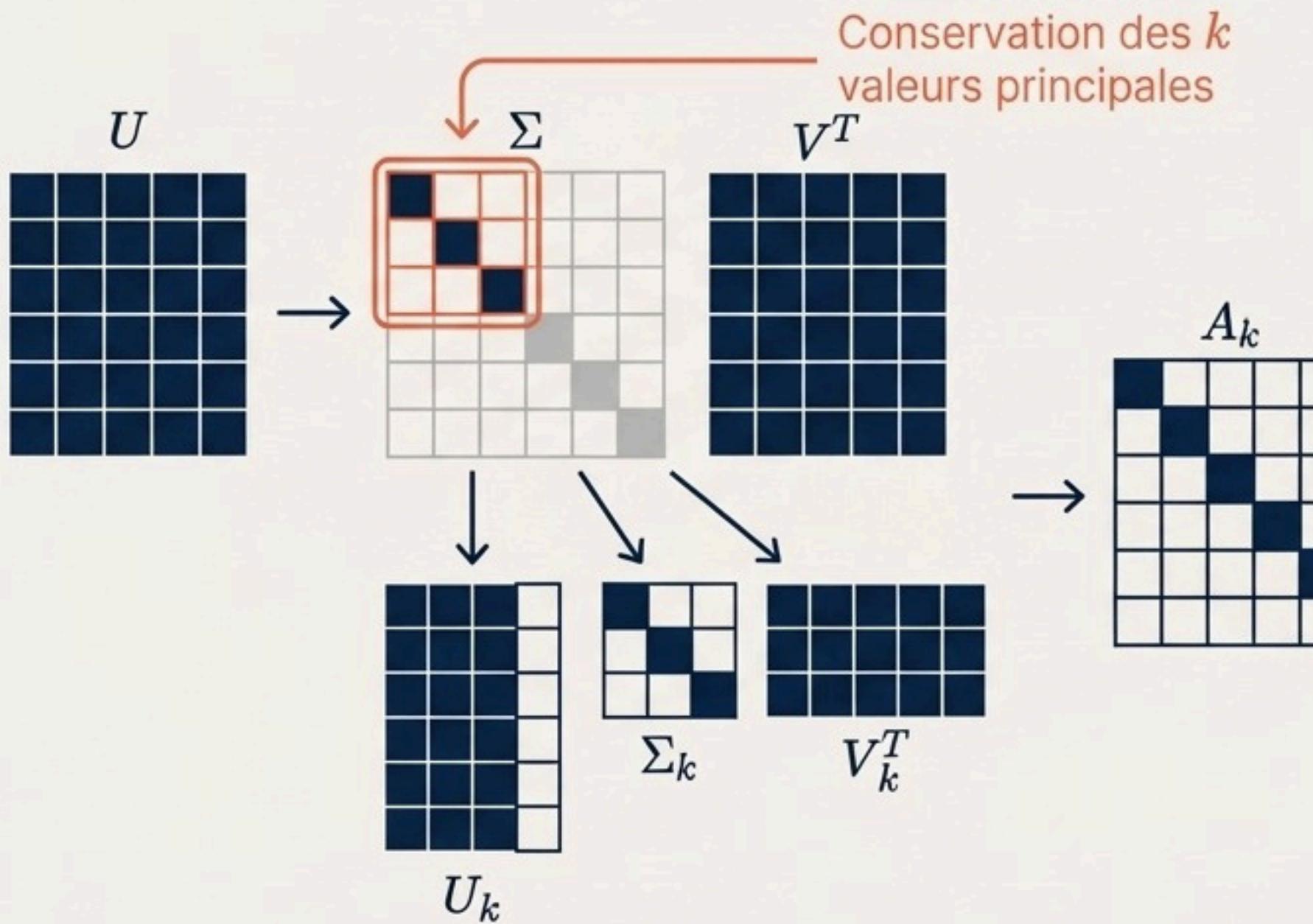
$$A = U \Sigma V^T$$

**U (Vecteurs singuliers gauches)** : Les 'eigen-images' ou motifs de base des colonnes (pixels). Décrit les relations entre les pixels.

**$\Sigma$  (Valeurs singulières)** : Le cœur de SVD. Une matrice diagonale où chaque valeur ( $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ ) quantifie l'importance ou 'l'énergie' d'un motif. Ordonnées de la plus grande à la plus petite.

**$V^T$  (Vecteurs singuliers droits)** : Les 'coefficients' ou poids de chaque motif pour reconstruire les lignes (caractéristiques) de l'image.

# SVD - Étape 3 : La Reconstruction par Approximation de Rang Faible



## Le Principe

On ne conserve que les  $k$  plus grandes valeurs singulières (et les vecteurs correspondants). C'est la meilleure approximation de rang  $k$  de la matrice originale.

## La Formule

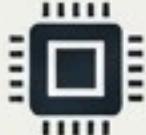
$$A \approx A_k = U_k \Sigma_k V_k^T$$

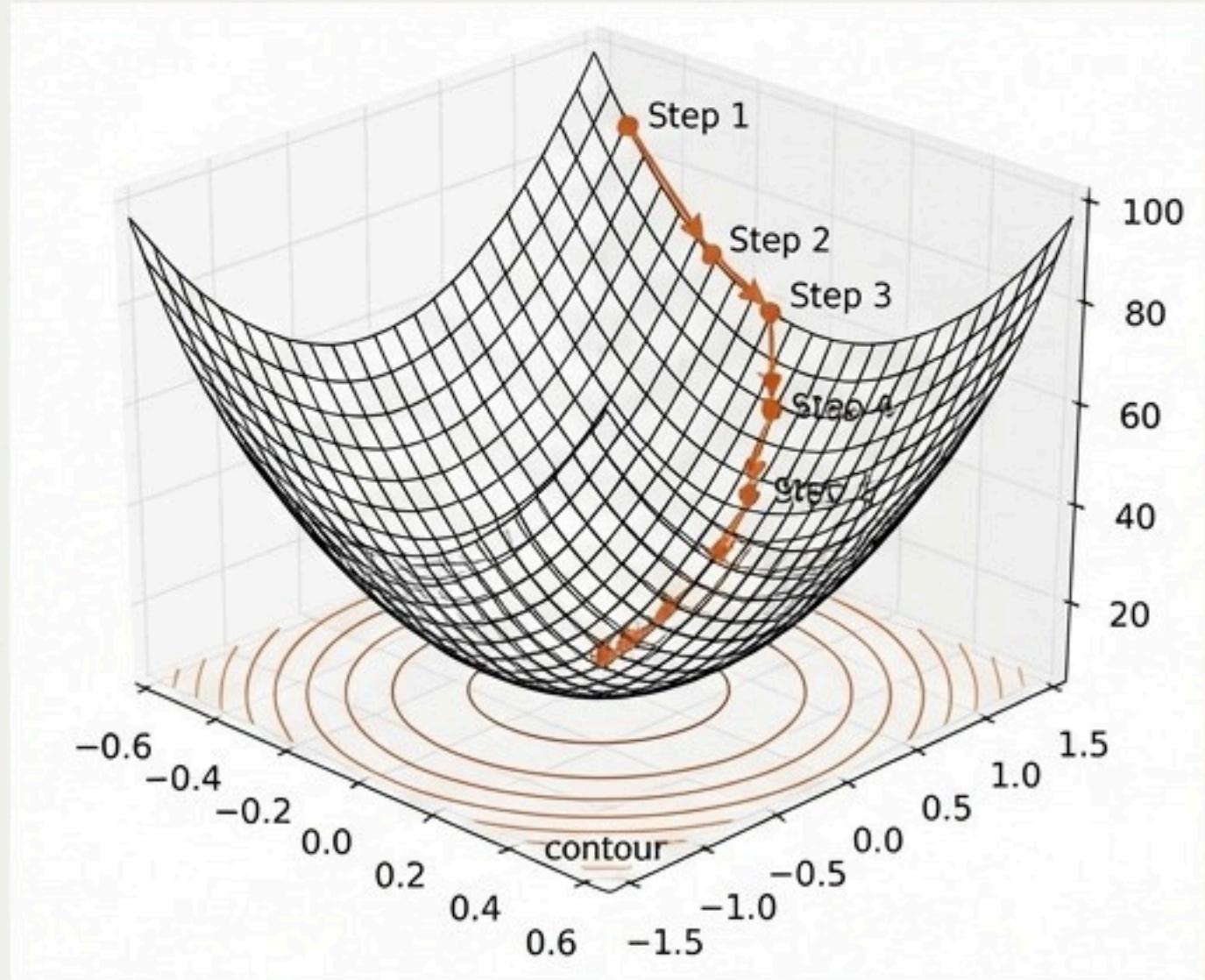
## Les Bénéfices

**Compression** : On stocke beaucoup moins de données.

**Réduction de Bruit** : En éliminant les valeurs singulières les plus faibles, on supprime le bruit et on ne conserve que le 'signal' principal.

# Protocole 3 : L'Approche par Descente de Gradient Stochastique (SGD)

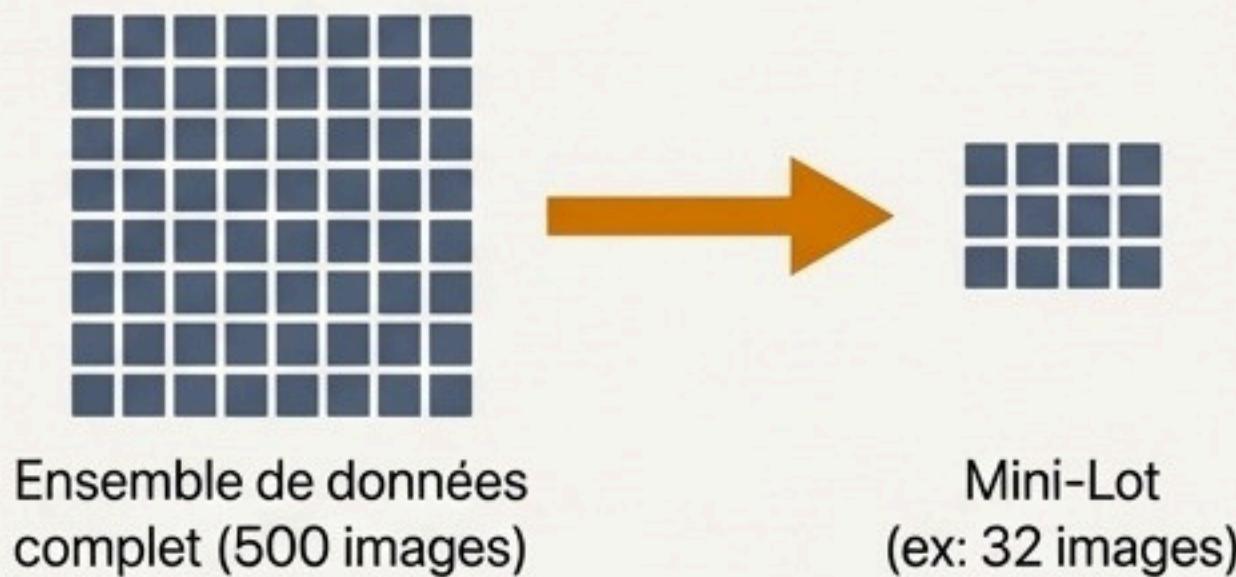
-  **Principe** : Apprendre itérativement les facteurs de la matrice en minimisant une fonction de coût. La reconstruction est le résultat d'une optimisation.
-  **Préparation des données** : Création de mini-lots ("mini-batches"), sélection du taux d'apprentissage ("learning rate").
-  **Hypothèse clé** : Flexible et adaptable, mais sa performance dépend fortement du réglage des hyperparamètres.



$$J(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i, \theta))^2$$

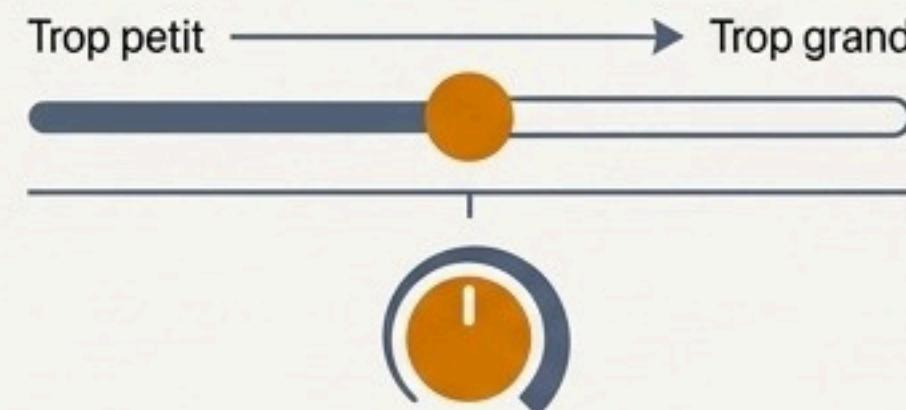
# SGD : Le Secret de la Préparation des Données

## Les Mini-Lots (Mini-batches)



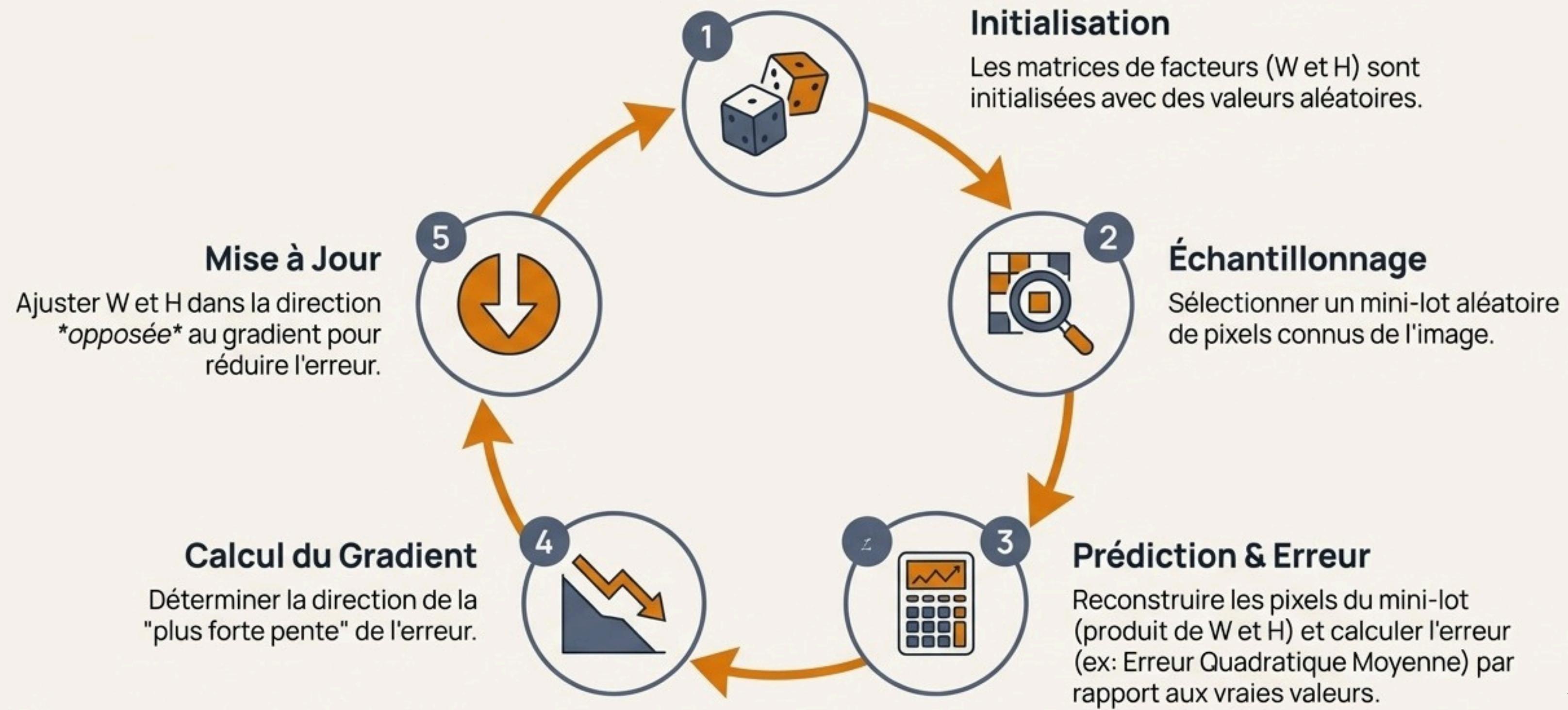
- **Concept:** Au lieu de calculer l'erreur sur les 500 images à chaque étape, nous en sélectionnons un petit sous-ensemble aléatoire (un 'mini-lot').
- **Avantage:** Cela rend chaque étape de calcul beaucoup plus rapide et permet de converger plus efficacement sur de grands jeux de données.

## Le Taux d'Apprentissage (Learning Rate)

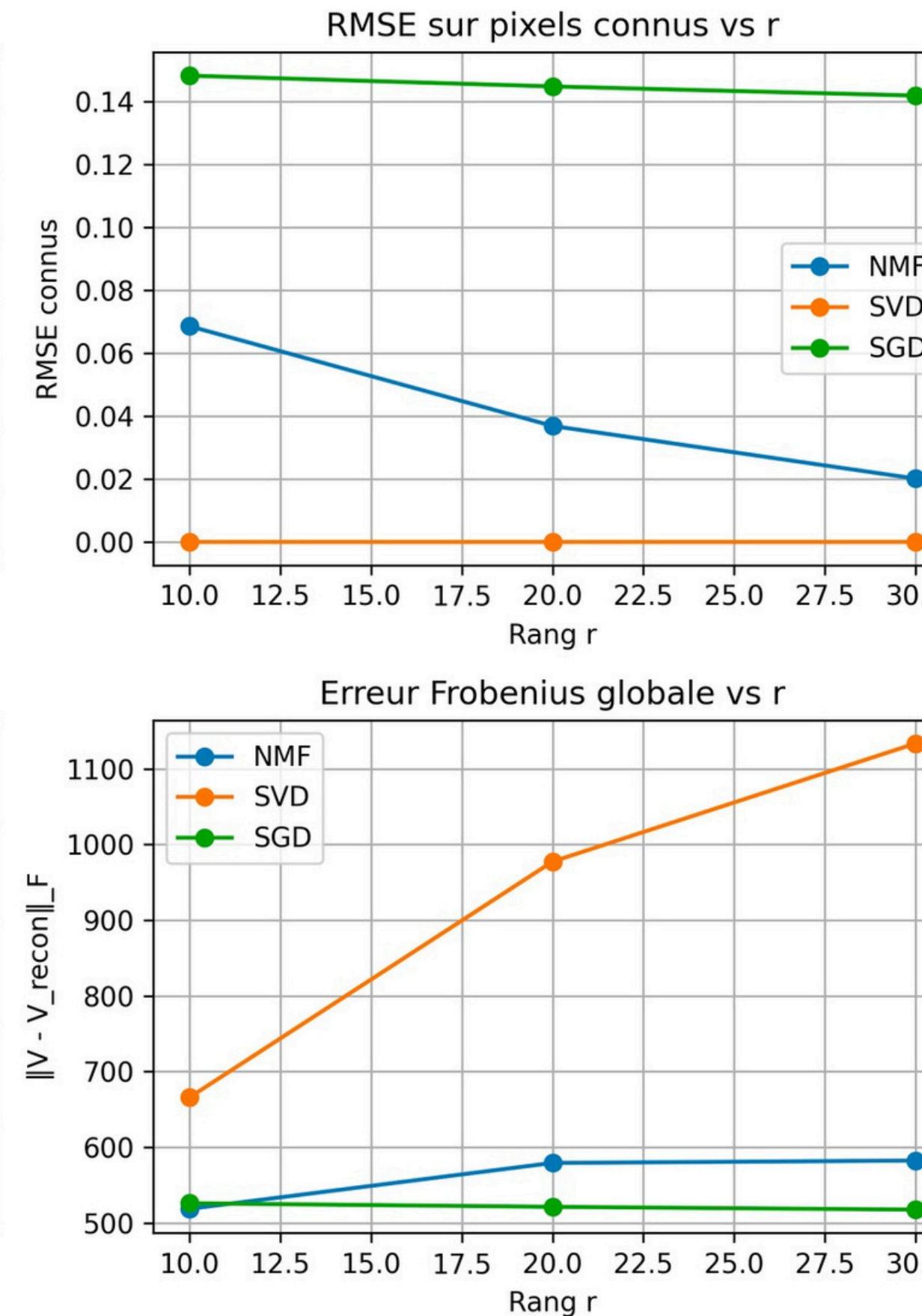
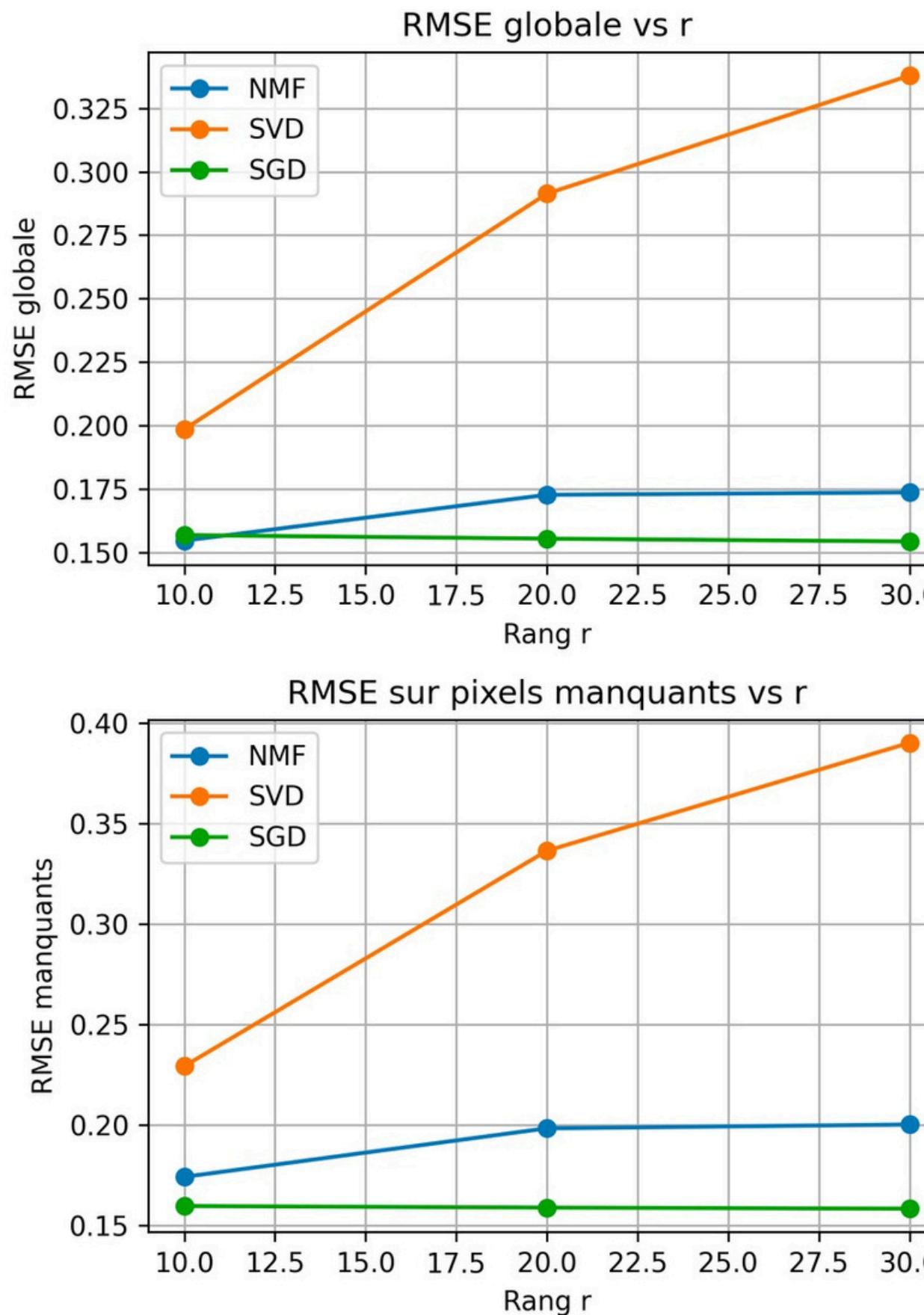


- **Concept:** Cet hyperparamètre crucial contrôle la taille des pas effectués pour minimiser l'erreur. Trop grand, l'algorithme diverge. Trop petit, la convergence est trop lente.

# SGD : Le Mécanisme de l'Optimisation Itérative



# Comparaison NMF / SVD / SGD pour différents rangs r



$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^T (\hat{y}_t - y_t)^2}{T}}.$$

$\hat{y}_t$  = image reconstruite

$y_t$  = image original

$T$  = nombre Image  
(=500)

===== Récapitulatif des temps d'exécution (en secondes) =====			
r	NMF	SVD	SGD
10	11.200	54.027	312.656
20	14.106	53.791	310.085
30	15.772	53.903	313.919

THANK  
YOU