# Teoría de Integración

Basado en las clases impartidas por Santiago Saglietti en el segundo semeste del 2025

# Contents

# Chapter 1

# Integral de Riemann

## 1.1 Clase 1 (04/08)

**Definición 1.1** (partición + intervalos)**.** Una partición de un intervalo $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ es un subconjunto finito $\Pi \subseteq [a,b]$ tal que $a, b \in \Pi$. Denotaremos a las particiones como $\Pi = \{x_0, \ldots, x_n\}$, donde $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Los intervalos $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$ serán llamados intervalos de la partición.

**Observación.** A veces, identificaremos la partición $\Pi$ con $(I_i)_{i=1,\ldots,n}$. En tal caso, abusando de la notación, escribiremos $I_i \in \Pi$ cuando queramos hablar de los intervalos de $\Pi$.

**Definición 1.2** (norma de particiones)**.** La norma de una partición $\Pi$ como $\|\Pi\| := \max_{i=1,\ldots,n}(x_i - x_{i-1}) = \max_{I_i \in \Pi} |I_i|$.

**Definición 1.3** (partición marcada)**.** Una partición marcada de $[a,b]$ es un par $\Pi^* := (\Pi, \varepsilon)$ donde:

- $\Pi = \{x_0, \ldots, x_n\}$ es una partición de $[a,b]$;
- $\varepsilon = \{x_1^*, \ldots, x_n^*\}$ es una colección de puntos tal que $x_i^* \in I_i$ para cada $i = 1, \ldots, n$.

**Observación.** Dada una partición marcada $\Pi^* = (\Pi, \varepsilon)$, definimos $\|\Pi^*\| := \|\Pi\|$.

**Definición 1.4** (Suma de Riemann)**.** Sean $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada y $\Pi^* = (\Pi, \varepsilon)$ una partición marcada. Definimos la suma de Riemann de $f$ asociada a $\Pi^*$ como:

$$S_R(f; \Pi^*) := \sum_{n=1}^{n} f(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{I_i \in \Pi} f(x_i^*)|I_i|.$$

## 1.2 Clase 2 (06/08)

**Definición 1.5** (Riemann integrable)**.** Dada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada, decimos que es Riemann integrable si existe el límite $\lim_{\|\Pi^*\| \to 0} S_R(f; \Pi^*)$.
Equivalentemente, $\exists L \in \mathbb{R}$, tal que dado cualquier $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que $\|\Pi^*\| < \delta \Rightarrow |S_R(f; \Pi^*) - L| < \varepsilon$.

**Observación.** Cuando el límite existe, lo llamamos la integral de Riemann de $f$ en $[a, b]$ y lo notamos $\int_a^b f(x)dx$.

**Definición 1.6** (Sumas superior e inferior de Darboux)**.** Dadas $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada y $\Pi = (I_i)_{i=1,\ldots,n}$ una partición de $[a, b]$, definimos

$$m_{I_i} := \inf_{x \in I_i} f(x), \quad M_{I_i} := \sup_{x \in I_i} f(x) \quad \text{y}$$

$$\underline{S}(f; \Pi) := \sum_{I_i \in \Pi} m_{I_i} |I_i|, \quad \overline{S}(f; \Pi) := \sum_{I_i \in \Pi} M_{I_i} |I_i|.$$

Llamamos a $\underline{S}(f; \Pi)$ y $\overline{S}(f; \Pi)$ las sumas inferior y superior de Darboux de $f$ con respecto a $\Pi$, respectivamente.

**Nota.** Como $m_{I_i} \leq f(x) \leq M_{I_i}$, $\forall x \in I_i$ para toda partición marcada $\Pi^* = (\Pi; \varepsilon)$, tenemos $\underline{S}(f; \Pi) \leq S_R(f; \Pi^*) \leq \overline{S}(f; \Pi)$.

**Definición 1.7** (refinamiento)**.** Diremos que una partición $\Pi'$ de $[a, b]$ es un refinamiento de otra partición de $[a, b]$, $\Pi$, si $\Pi \subseteq \Pi'$.
Equivalentemente, si para todo $J_i \in \Pi'$ existe $I_i \in \Pi$ tal que $J_i \subseteq I_i$.

**Proposición 1.8.** Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada. Entonces,

- Si $\Pi \subseteq \Pi'$ son particiones de $[a, b]$,

$$\underline{S}(f; \Pi) \leq \underline{S}(f; \Pi'), \quad \overline{S}(f; \Pi) \geq \overline{S}(f; \Pi').$$

- Si $\Pi_1, \Pi_2$ son particiones de $[a, b]$ cualesquiera,

$$\underline{S}(f; \Pi_1) \leq \overline{S}(f; \Pi_2)$$

**Definición 1.9.** Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada. Definimos:

- La integral superior (de Darboux) de $f$ como $\overline{\int_a^b} f(x)dx := \inf_{\Pi} \overline{S}(f; \Pi)$.
- La integral inferior (de Darboux) de $f$ como $\underline{\int_a^b} f(x)dx := \sup_{\Pi} \underline{S}(f; \Pi)$.

**Teorema 1.10.** Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada. Entonces,

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \lim_{\|\Pi\|\to 0} \underline{S}(f;\Pi) \quad \text{y} \quad \overline{\int_a^b} f(x)dx = \lim_{\|\Pi\|\to 0} \overline{S}(f;\Pi).$$

**Observación.** Equivalentemente, para cualquier sucesión $(\Pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de partición de $[a,b]$ tal que $\|\Pi_n\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$, se tiene que

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f;\Pi_n) \quad \text{y} \quad \overline{\int_a^b} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f;\Pi_n).$$

**Teorema 1.11.** Dada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada, son equivalentes:

1. $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$ (i.e., $f$ es Darboux integrable).
2. $f$ es Riemann integrable.
3. $\lim_{\|\Pi\|\to 0} \overline{S}(f;\Pi) - \underline{S}(f;\Pi) = 0$.
4. $\forall (\Pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de particiones de $[a,b]$ tal que $\|\Pi_n\| \to 0$,
$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f;\Pi_n) - \underline{S}(f;\Pi_n) = 0.$$
5. $\exists (\Pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de particiones de $[a,b]$ tal que
$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f;\Pi_n) - \underline{S}(f;\Pi_n) = 0.$$

## 1.3 Clase 3 (07/08)

**Nota.** Las integrales en el sentido de Darboux y el de Riemann coinciden.

**Proposición 1.12.** Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es monótona, entonces es Riemann integrable.

**Observación.** Una función monótona tiene discontinuidades numerables.

**Proposición 1.13.** Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces es Riemann integrable.

En particular, existen funciones Riemann integrables con numerables discontinuiodades. De hecho, hay ejemplos con $c$ (cardinal del continuo) discontinuidades. No obstante, si $f$ es integral de Riemann, su conjunto de discontinuidades tiene que ser "pequeño".

**Teorema 1.14.** Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada. Entonces, $f$ es integral de Riemann si y sólo si su conjunto de discontinuidades tiene medida nula.

**Definición 1.15** (intervalo)**.** Decimos que un conjunto $I \subseteq \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ es un intervalo si satisface

$$x, y \in I \Rightarrow z \in I \text{ para todo } \min x, y \leq z \leq \max x, y.$$

**Ejemplo.** (y propiedades)

- Dados $a \leq b$ $(a, b \in \mathbb{R})$, los conjuntos $(a, b), (a, b], [a, b], [a, b)$ son intervalos;
- El conjunto vacío es un intervalo $(\varnothing = (a, a))$;
- Los puntos son intervalos. $I = [\lambda, \lambda]$;
- La intersección son intervalos de intervalos.

◇

**Definición 1.16** (intervalo generalizado)**.** Decimos que un conjunto $I \subseteq \mathbb{R}^d$ es un intervalo si puede escribirse como

$$I = \prod_{k=1}^{d} I_k$$

donde cada $I_r$ es un intervalo en $\mathbb{R}$. La medida de un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}^d$ se define como

$$|I| := \prod_{k=1}^{d} |I_k|.$$

**Nota.** Los intervalos en $\mathbb{R}^d$ heredan las mismas pripiedades en $\mathbb{R}$:

- Intersección de intervalos en $\mathbb{R}^d$ es intervalo.
- Si $I \subseteq J \subseteq \mathbb{R}^d$ son intervalos, entonces $|I| \leq |J|$.

**Definición 1.17** (medida nula)**.** Un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^d$ se dice de medida nula si, dado $\varepsilon > 0$, existe una sucesión $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de intervalos de $\mathbb{R}^d$ tal que

$$E \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \quad \text{y} \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} |I_n| < \varepsilon.$$

**Ejemplo.** (y propiedades)

1. Todo conjunto unitario $\{x\}, (x \in \mathbb{R}^d)$ tiene medida nula;

2. Toda unión numerable de conjuntos de medida nula tiene medida nula;
3. Cualquier conjunto numerable tiene medida nula;
4. Cualquier subconjunto de un conjunto de medida nula tiene medida nula;
5. Existen conjuntos no numerables de medida nula:
    - En $\mathbb{R}^d$ con $d \geq 2$, los ejes $\{x : x_1 = 0\}, i = 1, \ldots, d$ tiene medida nula.
    - En $\mathbb{R}$, el conjunto de cantor tiene medida nula.
6. $E \subseteq \mathbb{R}^d$ es de medida nula, entonces $\alpha \dot{E}$ tiene medida nula $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
7. $E \subseteq \mathbb{R}^d$ es de medida nula, entonces $E + v$ tiene medida nula $\forall v \in \mathbb{R}^d$.
8. Si $E$ contiene un intervalo no unitario, entonces no tiene medida nula. Notar que:
    - La vuelta no es válida: $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ no contiene untervalos no unitarios pero no puede tener medida nula.
    - De esto se deduce que si $E \subseteq \mathbb{R}^d$ tiene medida nula. Entonces $E^c$ es denso (no vale la vuelta: $E^c = \mathbb{Q}$).
9. $E \subseteq \mathbb{R}^d$ tiene medida nula si y sólo si

$$|E|_e := \inf\{\sum_{n \in \mathbb{N}} |I_n| : E \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n\} = 0, \quad I_n \text{ intervalo } \forall n \in \mathbb{N}.$$

◇

## 1.4 Clase 4 (08/08)

**Teorema 1.18.** Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada. Entonces

$$f \text{ Riemann integrable} \Longleftrightarrow D_f = \{x \in [a, b] : f \text{ discontinua en } x\}$$
$$\text{tiene medida nula.}$$

### 1.4.1 Limitaciones de la integral de Riemann

1. Sólo está definida para $f$ acotada y sobre intervalos $[a, b]$ acotados. La teoría de integrales impropias resuelve esto.
2. Propiedades del espacio $\mathcal{R}([a, b]) = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} : f \text{ Riemann integrable}\}$: Nos gustaría poder definir una noción de convergencia en $\mathcal{R}([a, b])$ tal que

$$f_n \to f \text{ en } \mathcal{R}([a, b]) \Rightarrow \int_a^b f_n \to \int_a^b f \quad \left(\lim \int_a^b f_n = \int_a^b \lim f_n\right).$$

**Observación.** La convergencia puntal NO cumple esto (punto 2).

**Ejemplo** (1).

- $f_n \coloneqq n\chi_{(0,\frac{1}{n}]}$ es Riemann integrable en $[0,1],\ \forall n \in \mathbb{N}$;
- $f_n \to f \cong 0$ puntualmente en $[0,1]$;
- $\int_0^1 f_n = 1 \not\to 0 = \int_0^1 f$.

$\diamond$

**Ejemplo** (2).

- Sea $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una enumeración de $\mathbb{Q} \cap [0,1]$;
- $f_n \coloneqq \chi_{\{Q_1,\ldots,Q_n\}}$ es Riemann integrable en $[0,1],\ \forall n \in \mathbb{N}$;
- $f_n \to f \coloneqq \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ puntualmente en $[0,1]$;
- $f$ no es Riemann integrable. $\underline{\int_0^1} f = 0 \neq 1 = \overline{\int_0^1} f$.

$\diamond$

**Observación.** La convergencia uniforme SÍ cumple esto, pero es demasiado fuerte.

**Ejercicio** (Guía 1)**.** Sean $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}([a,b])$ tales que $f_n \to f$ uniformemente en $[a,b]$. Entonces, $f \in \mathcal{R}([a,b])$ y $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$.

**Ejemplo** (3).

- $f_n(x) \coloneqq x^n$ en $[0,1],\ f_n \in \mathcal{R}([a,b]),\ \forall n \in \mathbb{N},\ f_n \to \chi = f$ puntualmente;
- $f \in \mathcal{R}([a,b])$ y $\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{1}{n+1} \to 0 = \int_0^1$;
- $f_n$ no converge uniformemente a $f$.

$\diamond$

Resulta que la noción de convergencia "óptima" (la más "débil" que cumple lo que queremos) es la de convergencia en $L'$:

$$f_n \xrightarrow{L'} f \text{ si } \lim_{n\to\infty} \int_a^b |f_n - f| = 0.$$

Esta noción de convergencia viene dada por una "norma":

- $\|f\|_{L'} \coloneqq \int_a^b |f|$ (recordar que $f \in \mathcal{R}([a,b]) \Rightarrow |f| \in \mathcal{R}([a,b])$);
- $d_{L'}(f,g) \coloneqq \|f-g\|_{L'} = \int_a^b |f-g|$.

**Observación.** $\|\cdot\|_{L'}$ no es una norma porque $\|f\|_{L'} = 0 \not\Rightarrow f = 0$. Decimos que es una *pseudo-norma* y $d$ una *pseudo-métrica*.

Para arreglar esto, dadas $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, decimos que son *equivalentes* y lo notamos $f \sim g$ si $\{x \in [a, b] \ : \ f(x) \neq g(x)\}$ tiene medida nula. Resulta que $\sim$ es una relación de equivalencia y, además,

$$f, g \in \mathcal{R}([a, b]),\ f \sim g \Rightarrow \int_a^b f = \int_a^b g.$$

Sea $\overline{\mathcal{R}}([a, b])$ el conjunto de clases de equivalencia de $\mathcal{R}([a, b])$, y denotamos por $\overline{f}$ a la clase de equivalencia de $f \in \mathcal{R}([a, b])$. Con esto, $\|\overline{f}\|_{L'} \coloneqq \int_a^b |f| dx$ define una norma en $\overline{\mathcal{R}}([a, b])$ que se llama la **norma** $L'$.

**Observación.** Hay un problema: $(\overline{\mathcal{R}}([a, b]), \| \cdot \|_{L'})$ NO ES COMPLETO!

3. **TFC:** Si $f \in \mathcal{R}([a, b])$ es continua en $x_0 \in [a, b]$, entonces $F(x) \coloneqq \int_a^x f(t) dt$ es derivable en $x_0$ y $F'(x_0) = f(x_0)$. En particular, $F$ es derivable en $x$ y $F'(x) = f(x)$ para todo $x$ salvo un conjunto de medida nula.

### 1.4.2 Clase 5 (18/08)

**Teorema Fundamental del Cálculo:** Si $f \in \mathcal{R}([a, b])$ es continua en $x_0 \in [a, b]$, entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por $F(x) \coloneqq \int_a^x f(t) dt$ es derivable en $x = x_0$ y vale $F'(x_0) = f(x_0)$. En particular, $F'(x) = f(x)$ salvo quizás por un conjunto de $x \in [a, b]$ de medida nula. O sea, podemos integrar y luego derivar y esto es "casi" como no hacer nada. Pero, tenemos problemas:

1. **Este "casi" no puede removerse**

> **Teorema 1.19** (Hankel, 1871)**.** Dado $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, existe $f \in \mathcal{R}([a, b])$ tal que $F(x) \coloneqq \int_a^x f(t) dt$ no es derivable para ningún $x$ en un subconjunto denso en $[a, b]$ (y, en particular, infinito).

2. **A veces no podemos componer en el orden inverso**

> **Teorema 1.20** (Volterra, 1881)**.** Dado $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, existe $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivable en $[a, b]$, tal que $f'$ es acotada en $[a, b]$ pero $f' \notin \mathcal{R}([a, b])$.

**Extendiendo la integral de Riemann**

Sean $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada y $\Pi = \{x_0, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$. Definimos:

$$\begin{aligned}
\Phi_{f,\Pi}(x) &\coloneqq m_{I_1} \chi_{[x_0, x_i]}(x) + \sum_{i=2}^{n} m_{I_i} \chi_{(x_{i-1}, x_i]}(x), \quad m_{I_i} = \inf_{t \in I_i} f(t) \\
&= m_{I_1} \chi_{\{x_0\}}(x) + \sum_{i=1}^{n} m_{I_i} \chi_{(x_{i-1}, x_i]}(x) \\
\psi_{f,\Pi} &\coloneqq M_{I_1} \chi_{\{x_0\}}(x) + \sum_{i=1}^{n} M_{I_i} \chi_{(x_{i-1}, x_i]}(x), \quad M_{I_i} = \sup_{t \in I_i} f(t).
\end{aligned}$$

Observemos que $\Phi_{f,\Pi}(x) \leq f(x) \leq \psi_{f,\Pi}(x) \quad \forall x \in [a, b]$. Además,

$$\int_a^b \Phi_{f,\Pi}(x) dx = \underline{S}(f, \Pi) \int_a^b \psi_{f,\Pi}(x) dx = \overline{S}(f, \Pi).$$

En particular, si $f$ es Riemann integrable,

$$\int_a^b f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf\left\{\int_a^b \psi_{f,\Pi} \ : \ \Pi \text{ partición}\right\}$$
$$= \underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup\left\{\int_a^b \Phi_{f,\Pi} \ : \ \Pi \text{ partición}\right\}.$$

**Definición 1.21** (función escalonada)**.** Una función $\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ se dice escalonada si existen $\Pi = \{x_0, \ldots, x_n\}$ partición de $[a,b]$ y $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$\Phi|_{(x_{i-1},x_i)} \equiv c_i \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

Notemos que podemos escribir a cualquier función $\Phi$ escalonada como

$$\Phi(x) \coloneqq \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \chi_{(x_{i-1},x_i}(x) + \sum_{i=0}^{n} \Phi(x_i) \cdot \chi_{\{x_i\}}(x)$$
$$= \sum_{i=1}^{k} c_j \cdot \chi_{A_j}(x)..$$

donde los $A_j$ son intervalos disjuntos tales que $\biguplus_{j=1}^{k} A_j = [a,b]$ (se pone una "D" dentro de la unión para denotar que estamos haciendo una unión disjunta).

Si tomamos $\Phi$ de la forma $\Phi = \sum_{j=1}^{k} c_j \cdot \chi_{A_j}$ con $(A_j)_{j=1,\ldots,k}$ disjuntos, $\biguplus_{j=1}^{k} A_j = [a,b]$ pero $A_j$ no son necesariamente intervalos, diremos que $\Phi$ es una función escalonada generalizada. Como para funciones escalonadas "normales", tenemos

$$\int_a^b \Phi(x)dx = \sum_{j=1}^{k} c_j \cdot |A_j| \left(= \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot |I_i|\right)$$

**La función longitud** Sea $\mathcal{I}$ la colección de los intervalos en $\mathbb{R}$. Definimos la función longitud $\lambda : \mathcal{I} \to [0, \infty]$ como $\lambda(I) \coloneqq |I|$.

**Propiedades:**

1. $\lambda(\varnothing) = 0$;
2. $I_1, I_2 \in \mathcal{I},\ I_1 \subseteq I_2 \Rightarrow \lambda(I_1) \leq \lambda(I_2)$ (Monotonía de $\lambda$);
3. (Aditividad finita de $\lambda$) Si $I \in \mathcal{I}$ es tal que $I = \biguplus_{i=1}^{n} J_i$ con $J_i \in \mathcal{I},\ \forall i = 1, \ldots, n,\ J_i \cap J_j = \varnothing$ sin $i \neq j$, entonces

$$\lambda(I) = \sum_{i=1}^{n} \lambda(J_i);$$

4. ($\sigma$-aditividad de $\lambda$) Si $I \in \mathcal{I}$ es tal que $I = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$, con $(I_i)_i \in \mathbb{N} \subseteq \mathcal{I}$ disjuntos, entonces
$$\lambda(I) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(I_i);$$
5. ($\sigma$-subaditividad de $\lambda$) Si $I \in \mathcal{I}$ verifica $I \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$, $(I_1)_{i\in\mathbb{N}})$ intervalos (no necesariamente disjuntos), entonces $\lambda(I) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(I_i)$;
6. $\lambda(I+x) = \lambda(I),\ \forall x \in \mathbb{R},\ I+x \coloneqq \{a+x\ :\ a \in I\}$;
7. $\lambda(\{x\}) = 0\ \forall\ x \in \mathbb{R}$.

## 1.5 Clase 6 (20/08)

Nos gustaría extender $\lambda$ a una clase más grande que $\mathcal{I}$. Más precisamente, nos gustaría definir una aplicación $m : \mathcal{M} \to [0, \infty]$, donde $\mathcal{M}$ es una colecccción de subconjuntos de $\mathbb{R}$ tal que $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{M}$, de manera tal que, dado $E \in \mathcal{M}$, $m(E)$ represente la "longitud" de $E$. Idealmente, nos gustaría que $m$ cumpla lo siguiente:

1. $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$;
2. Si $I \in \mathcal{I}$, entonces $m(I) = |I|$;
3. $m$ es $\sigma$-aditiva $(E,\ (E_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M},\ E = \bigcup_{n=1}^{\infty}{}^{\mathrm{D}} E_n \Rightarrow m(E) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n))$;

**Ejercicio.** $(1) + (2) + (3) \Rightarrow m$ es monóton, $\sigma$-subaditiva y finitamente aditiva.

4 Si $E \in \mathcal{M}$, entonces $E + x \in \mathcal{M}$ y $m(E + x) = m(E)\ \forall x \in \mathbb{R}$.

El problema es que, si asumimos el Axioma de Elección, uno puede mostrar que no existe una tal $m$ que cumpla $(1) - (2) - (3) - (4)$ y, de hecho, no se sabe si existe $m$ que cumpla $(1) - (2) - (3)$. (Si asumimos la hipótesis del continuo, entonces no existe $m$ que cumpla $(1) - (2) - (3)$).

Luego, para construir $m$ debemos debilitar alguna de las propiedades:

- Si debilitamos $(1) \Rightarrow$ TEORÍA DE LA MEDIDA;
- Si debilitamos $(3)$ pidiento solo (hay dos opciones):
  - $\to$ aditividad finita $\Rightarrow$ "medidas finitamente aditivas";
  - $\to$ $\sigma$-subaditividad $\Rightarrow$ "medidas exteriores".

Vamos a optar por debilitar (1).

Una manera de extender $\lambda$ es la siguiente:

i. Si $E = \biguplus_{i=1}^{n} I_i$ entonces defninimos $\lambda(E) \coloneqq \sum_{i=1}^{n} \lambda(I_i)$;

ii. Si $E = \biguplus_{i=1}^{\infty} I_i$ entonces definimos $\lambda(E) \coloneqq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(I_i)$;

iii. La fórmula anterior nos permite definir $\lambda(6)$ para todo 6 abierto en $\mathbb{R}$;

iv. Para conjuntos mas generales, "aproximar" por abiertos.

**Definición 1.22** (premedida)**.** Sea $X$ un conjunto no vacío y $\mathscr{C}$ una colección de subconjuntos de $X$ tal que $\varnothing \in \mathscr{C}$. Diremos que una aplicación $\mathcal{T} : \mathscr{C} \to [0, \infty]$ es una premedida si $\mathcal{T}(\varnothing) = 0$.

**Observación.** El conjunto no vacío $X$ será llamado un espacio y la colección $\mathscr{C}$ será llamada una clase (de subconjuntos de $X$).

Intuitivamente, $\mathscr{C}$ representa la colección de subconjuntos cuyo "tamaño" sabemos medir y $\mathcal{T}$ nos da su medida.

**Ejemplo.**

1. **Premedida de Lebesgue:** $\mathscr{C} \coloneqq \mathcal{I} \coloneqq \{I \subseteq \mathbb{R} \ : \ I \text{ intervalo}\}$, $\mathcal{T}(I) \coloneqq |I|$.

2. **Premedidas de Lebesgue-Stieltjes:** Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monótona creciente y continua a derecha ($\lim_{x\to x_0}^{+} F(x) = F(x_0)$). Una función tal se dice una función de Lebesgue-Stieltjes.

$\diamond$

Observemos que, por monotonía, existen límites

$$\left\{ \begin{array}{c} F(\infty) \coloneqq \lim\limits_{x\to\infty} F(x) \\ F(-\infty) \coloneqq \lim\limits_{x\to-\infty} F(x) \end{array} \right\} \in \mathbb{R}$$

Sea además la clase $\widetilde{\mathcal{I}}$ de intervalos de $\mathbb{R}$ dada por

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{I}} &\coloneqq \{I(a,b) \ : \ \} \text{ donde } I(a,b) \coloneqq (a,b] \cap \mathbb{R} \\ &= \{(a,b] \ : \ -\infty \leq a \leq b\} \cup \{(a,\infty) \ : \ -\infty \leq a < \infty\}.. \end{aligned}$$

Definimos la premedida $\mathcal{T}_F$ de Lebesgue-Stieltjes asociada a $F$ como la aplicación $\mathcal{T}_F : \widetilde{\mathcal{I}} \to [0,\infty]$, dada por

$$\mathcal{T}_F(I(a,b)) = F(b) - F(a).$$

**Nota.** Observar que si $F(x) = x$ entonces $\mathcal{T}_F$ es la premedida de Lebesgue (sobre $\widetilde{\mathcal{I}}$.

3. **Premedidas de Probabilidad:** Si $F$ es una función de L-S tal que $F(\infty) = 1$ y $F(-\infty) = 0$, decimos que $F$ es una función de distribución (acumulada). En tal caso, la premedida $\mathcal{T}_F$ se conoce como premedida de probabilidad o predistribución (en $\mathbb{R}$).

**Observación.** $\mathcal{T}_F(\mathbb{R}) = \mathcal{T}_F(I(-\infty,\infty)) = F(\infty) - F(-\infty) = 1 - 0 = 1.$

4. **Premedida...**

## 1.6 Clase 7 (22/08)

**Definición 1.23** (semiálgebra)**.** Sea $X$ un espacio y $\mathscr{C}$ una clase de subconjuntos de $X$. Decimos que $\mathscr{C}$ es una semiálgebra (de subconjuntos de $X$) si cumple:

1. $\varnothing \in \mathscr{C}$;
2. ($\mathscr{C}$ es cerrada por intesecciones finitas) $A, B \in \mathscr{C} \Rightarrow A \cap B \in \mathscr{C}$;
3. Si $A \in \mathscr{C}$, existen $C_1, \ldots, C_n \in \mathscr{C}$ disjuntos tal que $A^c = \biguplus_{i=1}^{n} C_i$.

**Ejemplo.**

1. La clase $\mathcal{I}_d$ de intervalos en $\mathbb{R}^d$ es una semiálgebra.
2. La clase $\widetilde{\mathcal{I}} := \{(a,b] \cap \mathbb{R} \ : \ -\infty \leq a \leq b \leq \infty\}$ es una semiálgebra.
3. Si $X$ e $Y$ son espacios y $\mathscr{C}_X, \mathscr{C}_Y$ son semiálgebras en $X$ e $Y$ respectivamente, entonces

$$\mathscr{C}_X \times \mathscr{C}_Y := \{F \times G \ : \ F \in \mathscr{C}_X, \ G \in \mathscr{C}_Y\}$$

es una semiálgebra en $X \times Y$, llamada "semiálgebra producto".

$\diamond$

**Definición 1.24** (álgebra)**.** Sean $X$ un espacio y $\mathscr{A}$ una clase de subconjuntos de $X$. Decimos que $\mathscr{A}$ es un álgebra (de subconjuntos de $X$) si cumple que:

(i) $\varnothing \in \mathscr{A}$;

(ii) $\mathscr{A}$ es cerrado por intersecciones finitas;

(iii) ($\mathscr{A}$ es cerrada por complementos) $A \in \mathscr{A} \Rightarrow A^c \in \mathscr{A}$.

Equivalentemente, en presencia de (iii), (ii) se puede reemplazar por:

(ii') ($\mathscr{A}$ es cerrada por uniones finitas) $A, B \in \mathscr{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathscr{A}$. (**Dem:** Ejercicio!)

**Ejemplo.**

1. $X$ espacio, $\mathscr{A}_1 := \{\varnothing, X\}$, $\mathscr{A}_2 := \mathcal{P}(X)$ son álgebras (donde $\mathscr{A}$ es llamada el álgebra trivial);

2. Sea $\mathscr{S}$ una semiálgebra de subconjuntos de un espacio $X$. Entonces

$$\mathscr{A} := \{E \subseteq X \ : \ \exists S_1, \ldots, S_n \in \mathscr{S} \text{ disjuntos tal que } E = \biguplus_{i=1}^{n} S_i\}$$

es un álgebra, llamada el álgebra generada por $\mathscr{S}$. Notemos que $\mathscr{A}(\mathscr{S}$ es el menor álgebra que contiene a $\mathscr{S}$:

(i) $\mathscr{A}(\mathscr{S})$ es un álgebra y $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{A}(\mathscr{S})$;

(ii) Si $\mathscr{A}'$ es un álgebra con $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{A}'$ entonces $\mathscr{A}(\mathscr{S} \subseteq \mathscr{A}'$.

$\diamond$

**Nota.** Toda álgebr es una semiálgebra.

**Definición 1.25** ($\sigma$-álgebra)**.** Una clase (no vacía) $\mathscr{M}$ de subconjuntos de un espacio $X$ se dice una $\sigma$-álgebra si cumple:

1. $\varnothing \in \mathscr{M}$;
2. $E \in \mathscr{M} \Rightarrow E^c \in \mathscr{M}$;
3. $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{M} \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathscr{M}$.

Llamamos al par $(X, \mathscr{M})$ un espacio medible y a los elementos de $\mathscr{M}$, conjuntos medibles.

**Nota.**

1. Todo $\sigma$-álgebra es un álgebra;
2. Equivalentemente, en presencia de (1), (3) se puede reemplazar por

   (iii') $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{M} \Rightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathscr{M}$.

**Ejemplo.**

1. $\sigma$-álgebra $\Rightarrow$ álgebra $\Rightarrow$ semiálgebra (no valen las recíprocas);
2. $\{\varnothing, X\}, \mathcal{P}(X)$ son $\sigma$-álgebras;
3. Si $(\mathscr{M}_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ son $\sigma$-álgebras, entonces

$$\bigcap_{\gamma\in\Gamma} \mathscr{M}_\gamma := \{E \subseteq X \ : \ E \in \mathscr{M}_\gamma, \ \forall\gamma \in \Gamma\}$$

   es una $\sigma$-álgebra.

4. Si $\mathscr{M}$ es una clase de subconjuntos de $X$, entonces

$$\sigma(\mathscr{M}) := \bigcap_{\substack{\mathscr{M} \ \sigma\text{-álgebra} \\ \mathscr{C} \subseteq \mathscr{M}}} \mathscr{M}$$

es la $\sigma$-álgebra generada por $\mathscr{C}$. De hecho, $\sigma(\mathscr{M})$ es la menor $\sigma$-álgebra que contiene a $\mathscr{C}$:

(a) $\sigma(\mathscr{C})$ es $\sigma$-álgebra y $\mathscr{C} \subseteq \sigma(\mathscr{C})$;

(b) Si $\mathscr{F}$ es $\sigma$-álgebra y $\mathscr{C} \subset \mathscr{F}$ entonces $\sigma(\mathscr{C}) \subseteq \mathscr{F}$.

5. Si $(X, \mathscr{T})$ es un espacio topológico, $\sigma(\mathscr{T})$ se conoce como la $\sigma$-álgebra de Borel, y sus elementos se llaman Borelianos. La notamos $\beta(X)$ $(= \sigma(\mathscr{T}))$.

$\diamond$

**Ejemplo.** $\beta(\mathbb{R})$ contiene a tods los abiertos, cerrados, intervalos, conjuntos de tipo $G_\delta$ y $F_\sigma, \ldots$ De hecho, $\beta(\mathbb{R}) = \sigma(\text{cerrados}) = \sigma(\text{compactos}) = \sigma(\mathcal{I}) = \sigma(\widetilde{\mathcal{I}})$. $\diamond$

**Definición 1.26.** Sea $\mathscr{C}$ una clase (no vacía) de subconjuntos de $X$ y $\mu : \mathscr{C} \to [0, \infty]$ una función (la llamamos una función de conjuntos). Diremos que:

(i) $\mu$ **es monótona** (en $\mathscr{M}$) si $A, B \in \mathscr{C},\ A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$;

(ii) $\mu$ **es finitamente aditiva** si $(A_i)_{i=1,\ldots,n} \subseteq \mathscr{C}$ disjuntos $\Rightarrow \mu(\biguplus_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$;

(iii) $\mu$ **es $\sigma$-aditiva** si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{C}$ disjuntos $\Rightarrow \mu(\biguplus_{i=1}^\infty A_i) = \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i)$;

(iv) $\mu$ **es $\sigma$-subaditiva** si $\mu(A) \leq \sum_{i=1}^\infty \mu(A_n)$, para todo $A \in \mathscr{C}$ y $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{C}$ tal que $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$

## 1.7 Clase 8 (25/08)

**Observación.** Rana da una definición más débil de (4):

$$A \in \mathscr{C},\ A = \bigcup_{i=1}^\infty A_i,\ A_i \in \mathscr{C}\ \forall i \Rightarrow \mu(A) \leq \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i)$$

Ambas definiciones son equivalentes si $\mathscr{C}$ es una semiálgebra y $\mu$ es monótona (siempre será el caso para nosotros).

**Definición 1.27** (premedida finita y $\sigma$-finita)**.** Una premedida $\mathcal{T} : \mathscr{C} \to [0, \infty]$ se dice:

1. **finita** si $X \in \mathscr{C}$ y $\mathcal{T} < \infty$;
2. **$\sigma$-finita** si existen $(C_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{C}$ disjuntos tales que $\biguplus_{n=1}^\infty C_n = X$ y $\mathcal{T}(C_n) < \infty\ \forall n \in \mathbb{N}$.

**Ejemplo.**

1. finita $\Rightarrow$ $\sigma$-finita;

2. La función longitud $\lambda : \mathcal{I} \to [0, \infty]$ es $\sigma$-finita pero no finita;

3. Si $F$ es una función de L-S, entonces $\mathcal{T}_F : \widetilde{\mathcal{I}} \to [0, \infty]$ es siempre $\sigma$-finita ($\mathcal{T}_F((n, n+1]) = F(n+1) - F(n) < \infty \ \forall n \in \mathbb{Z}$) y es finita si y sólo si $\mathcal{T}_F(\mathbb{R}) = \mathcal{T}_F((-\infty, \infty] \cap \mathbb{R}) = F(\infty) - F(-\infty) < \infty$.

$\diamond$

**Definición 1.28** (medida)**.** Sea $(X, \mathscr{M})$ es un espacio medible. Diremos que $\mu : \mathscr{M} \to [0, \infty]$ es una medida (en $(X, \mathscr{M})$) si:

1. $\mu(\varnothing) = 0$;

2. $\mu$ es $\sigma$-subaditiva en $\mathscr{M}$ $\left(\mu\left(\biguplus_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)\right)$.

Llamamos a la terna $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un epacio de medida.

**Objetivo.** Construir un espacio de medida $(\mathbb{R}, \mathscr{M}, \mu)$ tal que $\mathcal{I} \subseteq \mathscr{M}$ y

$$\begin{cases} \mu(I) = |I| \ \forall I \in \mathcal{I}, \\ \mu(E + x) = \mu(E) \ \forall E \in \mathscr{M}. \end{cases}$$

**Ejemplo** (Espacios de Probabilidad)**.** Si $(X, \mathscr{M}, \mu)$ es un EdM tal que $\mu(X) = 1$, $(X, \mathscr{M}, \mu)$ recibe el nombre de espacios de probabilidad. $\diamond$

- $X$ recibe el nombre de espacio muestral, y se lo nota $\Omega$ (en lugar de $X$);
- $\mathscr{M}$ se suele notar como $\mathscr{F}$ (ó $\mathscr{Y}$). Sus elementos se dicen eventos;
- $\mu$ recibe el nombre de medida de probabilidad ó distribución y se la nota $\mathbb{P}$.

En probabilidad, típicamente se estudian 2 tipos de distribuciones en $\mathbb{R}$ (o en $\mathbb{R}^d$).

1. **Distribuciones discretas:** $\exists S \subseteq \mathbb{R}$ numerable y $(p_x)_{x \in S} \subseteq [0, 1]$ tal que $\mathbb{P}(A) = \sum_{x \in A \cap S} p_x$.
   **Ejemplo.** Binomial, Geométrica, Poisson,... $\diamond$

2. **Distribuciones (absolutamente) continuas:** $\exists f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ "integrable" tal que $\mathbb{P}(A) = \int_A f(x)dx$.
   **Ejemplo.** Uniforme, Exponencial, Normal,... $\diamond$

**Propiedades generales de una medida.** Si $\mu$ es una medida sobre $(X, \mathscr{M})$, entonces:

1. $\mu$ es monótona (en $\mathscr{M}$);

2. $\mu$ es $\sigma$-subaditiva;

3. $\mu$ es **continua por debajo**: si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{M}$ es creciente ($A_n \subseteq A_{n+1}\ \forall n$) entonces
$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

4. $\mu$ es **continua por arriba**: si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{M}$ es decreciente ($A_{n+1} \subseteq A_n\ \forall n$) y $\mu(A_{n_0}) < \infty$ para algún $n_0$ ($\Rightarrow \mu(A_n) < \infty\ \forall n \geq n_0$), entonces
$$\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

(**Cuidado!** (4) puede no valer si $\mu(A_n) = \infty\ \forall n \in \mathbb{N}$)

**Definición 1.29** (premedida extendible y unívocamente extendible)**.** Una premedida $\mathcal{T} : \mathscr{S} \to [0,\infty]$ definida sobre una semiálgebra de subconjunto de $X$, se dice:

1. **Extendible** si es
   - (E1) finitamente aditiva en $\mathscr{S}$;
   - (E2) $\sigma$-subaditiva en $\mathscr{S}$.
2. **Unívocamente extendible** si es extendible y se cumple
   - (E3) $\sigma$-finita

**Observación.** Los nombres de extendible y unívocamente extendible no se encontrarán en el Rana (los puso el profe).

**Teorema 1.30** (Extensión de Carathéodory)**.** Dados un espacio $X$ y una premedida $\mathcal{T}$ sobre una semiálgebra $\mathscr{S}$ de subconjuntos de $X$ tal que $\mathcal{T}$ es extendible, existe una extensión de $\mathcal{T}$ a una medida $\mu_{\mathcal{T}}$ definida sobre $\sigma(\mathscr{S})$ la $\sigma$-álgebra generada por $\mathscr{S}$. Más aún, si $\mathcal{T}$ es unívocamente extendible, entonces la extensión $\mu_{\mathcal{T}}$ a $\sigma(\mathscr{S})$ es única.
Por último, si $\mathcal{T}$ es unívocamente extendible, entonces se puede extender de manera única a una medida $\overline{\mu_{\mathcal{T}}}$ sobre la $\mu_{\mathcal{T}}$-completación de $\sigma(\mathscr{S})$, i.e. la $\sigma$-álgebra $\overline{\sigma(\mathscr{S})}$ dada por
$$\overline{\sigma(\mathscr{S})} \coloneqq \{B \cup N : B \in \sigma(\mathscr{S}), \exists \widetilde{N} \in \sigma(\mathscr{S}) \text{ con } N \subseteq \widetilde{N} \text{ y } \mu_{\mathcal{T}}(\widetilde{N}) = 0\}$$
mediante la fórmula $\overline{\mu_{\mathcal{T}}}(B \cap N) \coloneqq \mu_{\mathcal{T}}(B)$.

## 1.8 Clase 9 (27/08)

**Observación.** Si $\mathcal{T} : \mathscr{S} \to [0,\infty]$ es $\sigma$-aditiva en $\mathscr{S}$ y $\mathscr{S}$ es una semiálgebra, entonces $\mathcal{T}$ es extendible.

**Observación.** La extensión puede no ser única si $\mathcal{T}$ no es $\sigma$-finita.

**Ejemplo.** $\widetilde{\mathcal{I}}_{\mathbb{Q}} \coloneqq \widetilde{\mathcal{I}} \cap \mathbb{Q} = \{(a,b] \cap \mathbb{Q} \ : \ -\infty \leq a \leq b \leq \infty\}$ ◇

**Nota.**

- $\widetilde{\mathcal{I}}_{\mathbb{Q}}$ es una semiálgebra;
- $\sigma(\widetilde{\mathcal{I}}_{\mathbb{Q}}) = \sigma(\widetilde{\mathcal{I}} \cap \mathbb{Q}) \overset{\text{Ej!}}{=} \sigma(\widetilde{\mathcal{I}}) \cap \mathbb{Q} = \beta(\mathbb{R}) \cap \mathbb{Q} = \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ (9.52)
- $\mathcal{T} : \widetilde{\mathcal{I}}_{\mathbb{Q}} \to [0,\infty]$, dada por $\mathcal{T}(A) \coloneqq \begin{cases} 0 & A = \varnothing \\ \infty & A \neq \varnothing, \ A \in \widetilde{\mathcal{I}}_{\mathbb{Q}} \end{cases}$ (Observar que $\mathcal{T}$ no es $\sigma$-finita)
- Para cada $r > 0$, $\mu_r : \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \to [0,\infty]$ dada por $\mu_r(A) \coloneqq r(\#A)$ es una extensión de $\mathcal{T}$ (y es una medida)

**Definición 1.31** (espacio completo y conjuntos $\mu$-nulos)**.** Sea $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un EdM y definamos

$$\mathscr{N}_\mu \coloneqq \{E \subset X \ : \ \exists N \in \mathscr{M} \text{ con } E \subseteq N \text{ y } \mu(N) = 0\}$$

Los elementos de $\mathscr{N}_\mu$ se dicen conjuntos $\mu$-nulos. Diremos que $(X, \mathscr{M}, \mu)$ es completo si $\mathscr{N}_\mu \subseteq \mathscr{M}$

**Observación.** $(X, \overline{\sigma(\mathscr{S})}, \overline{\mu_\delta})$ es completo. En efecto, $\mathscr{N}_{\overline{\mu_\delta}}$ corresponde al subconjunto de $\overline{\sigma(\mathscr{S})}$ que se obtiene tomando $B = \varnothing$.

**Observación.** Veremos más adelante que las siguientes premedidas son UE:

(i) Premedidas de Lebesgue-Stieltjes (en particular, la función longitud $\lambda$ (sobre $\widetilde{\mathcal{I}}$) y las premedidas de probabilidad).

(ii) Premedidas de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$, con $d \in \mathbb{N}$.

En particular;

**Corolario 1.32.** Para cada función $F$ de Lebesgue-Stieltjes, existe una $\sigma$-álgebra $\mathscr{M}_F$ sobre $\mathbb{R}$ y una única medida $\mu_F$ en $(\mathbb{R}, \mathscr{M}_F)$ tal que

$$\mu_F = (I(a,b)) = F(b) - F(a) \quad \forall -\infty \leq a \leq b \leq \infty$$

Además, $\beta(\mathbb{R}) \subseteq \mathscr{M}_F$. Es decir, $\mu_F$ es una medida que extiende a $\mathcal{T}_F$, a todo $\mathscr{M}_F$ (y en particular, a todo $\beta(\mathbb{R})$). Además, $(\mathbb{R}, \mathscr{M}_F, \mu_F)$ es un EdM completo. ($\mathscr{M}_F \coloneqq \overline{\sigma(\widetilde{\mathcal{I}})^F}$, $\mu_F \coloneqq \overline{\mu_{\mathcal{T}_F}}$). La medida $\mu_F$ se conoce como medida de L-S asociada a $F$. En particular, para cualquier función de distribución $F$, existe una única medida de probabilidad $\mathbb{P}_F$ en $(\mathbb{R}, \beta(\mathbb{R}))$ tal que

$$\mathbb{P}_F(I(a,b)) = F(b) - F(a) \quad \forall -\infty \leq a \leq b \leq \infty$$

(En la guía 3 veremos que $F \to \mathbb{P}_F$ es una biyección)

**Nota.** Los $\beta$ son los Borelianos y $I(a,b) = (a,b] \cap \mathbb{R}$. (super $F \to 10.26$).

**Ejemplo** (Importante!). **Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.** Tomando $F = id$ en el Corolario anterior, obtenemos una $\sigma$-álgebra $\mathscr{L}(\mathbb{R}) := \mathscr{M}_{id}$ con $\beta(\mathbb{R}) \subseteq \mathscr{L}(\mathbb{R})$ y una medida $\mu_{id}$ en $(\mathbb{R}, \mathscr{L}(\mathbb{R}))$ tal que $\mu_{id}(I(a,b)) = b - a \quad \forall -\infty \leq a \leq b \leq \infty$. En particular, de esto se deduce que $\mu_{id}(I) = |I| \quad \forall I \in \mathcal{I}$. Dicha medida recibe el nombre de medida de Lebesgue (en $\mathbb{R}$), y los elementos de $\mathscr{L}(\mathbb{R})$ se dicen conjuntos medibles Lebesgue. Adoptaremos la notación $\mu_{id}(E) := \lambda(E) := |E|$. La medida $\mu_{id}$ es la extensión de la noción de longitud que buscábamos y $\mathscr{L}(\mathbb{R})$ son los conjuntos cuya "longitud" podremos medir. Además, los conjuntos de medida nula (de la guía 2), son exactamente aquellos $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$ tal que $\mu_{id}(A) = 0$ (lo veremos más adelante!). ◇

**Ejemplo** (Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$). Si $\mathcal{I}_d$ son los intervalos en $\mathbb{R}^d$ y definimos $\mathcal{T} : \mathcal{I}_d \to [0, \infty]$ como $\mathcal{T}(I) := |I|$, entonces $\mathcal{I}_d$ es una semiálgebra y $\mathcal{T}$ es una premedida $\sigma$-aditiva en $\mathcal{I}_d$ (lo veremos después). Por lo tanto, $\mathcal{T}$ se puede extender (de manera única, pues $\mathcal{T}$ es $\sigma$-finita) a una medida $\mu_\delta$ sobre la $\sigma$-álgebra $\mathscr{L}(\mathbb{R}^d) = \overline{\sigma(\mathcal{I}_d)^{\mathcal{T}}}$, llamada medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$ y $\mathscr{L}(\mathbb{R}^d)$ es la clase de conjuntos medibles Lebesgue en $\mathbb{R}^d$. Al igual que antes, dado $E \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^d)$, notamos $|E| := \mu_{\mathcal{T}}(E)$. ◇

## 1.9 Clase 10 (29/08)

### Demostración del teorema de extensión de Carathéodory

**Paso 1:** Medidas Exteriores

**Proposición 1.33.** Si $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo,

$$|E|_e = \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \ : \ (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ intervalos, } E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\}$$

**Demostración.** $\geq$) Tomando $I_1 = I, \ I_{n+1} = \varnothing \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\leq$) Por la $\sigma$-subaditividad de $\lambda$ en $\mathcal{I}$: si $I \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}$ entonces $\lambda(I) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(I_i)$. □

**Definición 1.34** (Medida exterior inducida por una premedida). Sea $X$ un espacio, $\mathscr{C}$ una clase de subconjuntos de $X$ y $\mathcal{T} : \mathscr{C} \to [0, \infty]$ una premedida. Definimos la medida exterior inducida por $\mathcal{T}$ como la aplicación $\mu^*_{\mathcal{T}} : \mathscr{P}(X) \to [0, \infty]$ dada por

$$\mu^*_{\mathcal{T}}(A) := \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{T}(C_i) \ : \ (C_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{C} \text{ y } A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\}$$

con la convención de que $\inf \varnothing := \infty$.

**Ejemplo.** $\mu^*_\lambda =$ *medida exterior de Lebesgue* y la notamos $|E|_e := \mu^*_\lambda(E)$. ◇

Idealmente, nos gustaría que $\mu^*_{\mathcal{T}}$ cumpla

$$\begin{cases} (C1)\ \mu_{\mathcal{T}^*}(C) = \mathcal{T}(C) \quad \forall C \in \mathscr{C} \\ (C2)\ \mu^*_{\mathcal{T}} \text{ es } \sigma\text{-subaditiva en } \mathscr{P}(X) \end{cases}$$

no tienen por qué cumplirse ninguna de la 2:

(C1) $X = \{a, b\}$, $\mathscr{C} = \{\varnothing, \{a\}, X\}$, $\mathcal{T}(A) = \begin{cases} 0 & A = \varnothing \\ 2 & A = \{a\} \\ 1 & A = X \end{cases}$ $\mathcal{T}(\{a\}) = 2$, $\mu^*_{\mathcal{T}}(\{a\}) = 1 \neq \mathcal{T}(\{a\})$.

(C2) Medida exterior de Lebesgue no es $\sigma$-aditiva (lo vemos mas adelante!)

**Proposición 1.35.** Si $\mathcal{T}$ es una premedida sobre una semiálgebra $\mathscr{S}$ que satisface

(E2) $\mathcal{T}$ es $\sigma$-subaditiva en $\mathscr{S}$,

entonces $\mu^*_{\mathcal{T}}(A) = \mathcal{T}(A) \quad \forall A \in \mathscr{S}$ (i.e. $\mu^*_{\mathcal{T}}$ cumple (C1)).

**Demostración.** $\underline{\mu^*_{\mathcal{T}}(A) \leq \mathcal{T}(A)}$. Tomando $C_1 = A \in \mathscr{S}$, $C_{n+1} = \varnothing \in \mathscr{S}$. Luego $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es cubrimiento de $A$ por elementos de $\mathscr{S}$ y luego

$$\mu^*_{\mathcal{T}}(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{T}(C_n) = \mathcal{T}(A)$$

$\underline{\mathcal{T}(A) \leq \mu^*_{\mathcal{T}}(A)}$. Si $(C_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{S}$ es un cubrimiento de $A \in \mathscr{S}$ entonces por (E2), tenemos que $\mathcal{T}(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{T}(C_n)$. Tomando inf sobre tales cubrimientos, resulta $\mathcal{T}(A) \leq \mu^*_{\mathcal{T}}(A)$. □

**Teorema 1.36.** Sean $X$ un espacio, $\mathscr{C}$ una clase de subconjuntos de $X$ y $\mathcal{T} : \mathscr{C} \to [0, \infty]$ una premedida. Entonces,

1. $\mu^*_{\mathcal{T}}(\varnothing)$;
2. $\mu^*_{\mathcal{T}}$ es monótona ($A \subseteq B \Rightarrow \mu^*_{\mathcal{T}}(A) \leq \mu^*_{\mathcal{T}}(B)$);
3. $\mu^*_{\mathcal{T}}$ es $\sigma$-subaditiva ($A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \Rightarrow \mu^*_{\mathcal{T}}(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*_{\mathcal{T}}(A_n)$.

**Demostración.**

1. $\mu^*_{\mathcal{T}}(\varnothing) \geq 0$ es por definición. Para ver que $\mu^*_{\mathcal{T}}(\varnothing) \leq 0$, tomamos el cubrimiento $C_n = \varnothing$ y repetimos el argumento de la Proposición anterior.
2. Si $\mu^*_{\mathcal{T}}(B) = \infty$, la desigualdad es inmediata. Si $\mu^*_{\mathcal{T}}(B) < \infty$, entonces existen cubrimientos de $B$ por elementos de $\mathscr{S}$. Sea $(C_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{S}$ un cubrimiento de $B$. Entonces, $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es también cubrimiento de $A$ y, luego, $\mu^*_{\mathcal{T}}(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{T}(C_n)$. Como esto es cierto para todo

cubrimiento $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $B$, tomando ínfimo en la desigualdad anterior sobre tales cubrimientos resulta $\mu^*_{\mathcal{T}}(A) \leq \mu^*_{\mathcal{T}}(B)$.

3. Dado $\varepsilon > 0$, sea $(C_i^{(n)})_{i\in\mathbb{N}}$ un cubrimiento de $A_n$ tal que $\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{T}(C_i^{(n)}) \leq \mu^*_{\mathcal{T}}(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$. Luego, notando que $(C_i^{(n)} \ : \ i \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N})$ es un cubrimiento de $A$, obtenemos que

$$\begin{aligned}\mu^*_{\mathcal{T}}(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{T}(C_i^{(n)}) &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\mu^*_{\mathcal{T}}(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*_{\mathcal{T}}(A_n) + \varepsilon \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^m}}_{1}\end{aligned}$$

Luego, $\mu^*_{\mathcal{T}}(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*_{\mathcal{T}}(A_n) + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$. Tomando $\varepsilon \to 0^+$, obtenemos la $\sigma$-subaditividad de $\mu^*_{\mathcal{T}}$.

□

**Definición 1.37** (medida exterior)**.** Sea $X$ un espacio. Decimos que $\mu^* : \mathscr{P}(X) \to [0,\infty]$ es una <u>medida exterior</u> si:

1. $\mu^*(\varnothing) = 0$;
2. $A \subseteq B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$;
3. $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \Rightarrow \mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$.

**Ejemplo.**

1. Medidas exteriores generadas por una premedida;
2. Si $(\mu^*_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ son medidas exteriores sobre $X$, entonces

$$\mu^*(A) \coloneqq \sup_{\gamma\in\Gamma} \mu^*_\gamma(A)$$

es una medida exterior (Ej. Guía 3).

3. **Medida exterior $s$-dimensional de Hausdorff en $\mathbb{R}^d$.**

- Si $I$ es un intervalo en $\mathbb{R}^d$, entonces $|rI| = r^d|I|$;
- Si $E \subseteq \mathbb{R}^d$ es medible Lebesgue, entonces $|rE| = r^d|E|$;
- En particular, si $E = B(x,r)$, entonces

$$|E| = |B(0,r)| = |rB(0,1)| = r^d|B(0,1)| = C_d(diamE)^d, \quad C_d \coloneqq \frac{|B(0,1)|}{2^d}$$

- Si $E \subseteq \mathbb{R}^d$ es "s-dimensional" y $\mathscr{H}_s$ es la medida que queremos, entonces debería valer que

$$\mathscr{H}_s(E \cap B(x,r)) = \mathscr{H}_s(\text{entorno s-dimensional}) \approx (diam\ (\text{entorno}))^s$$

Luego, si cubrimos a $E$ por entornos pequeños $(E \cap B(x,r))_{i\in\mathbb{N}}$, entonces

$$\mathscr{H}_s(E) \approx \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathscr{H}_s(E \cap B(x_i,r_i)) \approx \sum_{i\in\mathbb{N}} (diam(E \cap B(x_i,r_i)))^s.$$

$\diamond$

## 1.10 Clase 11 (01/09)

### Medida exterior de Hausdorff

$\mathscr{H}_s$ = medida que "mide" el tamaño de objetos s-dimensionales en $\mathbb{R}^d$.

Si $E$ es un conjunto s-dimensional en $\mathbb{R}^d$, entonces

$$\mathscr{H}_s(E) \overset{r_1 \ll 1}{\approx} \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathscr{H}_s(E \cap B(x_i,r_i)) \approx \sum_{i\in\mathbb{N}} (\text{diam}(E \cap B(x_i,r_i)))^s.$$

Teniendo esto en cuenta, dados $d \in \mathbb{N},\ s \in [0,d],\ \delta > 0$, definimos:

- $C_\delta \coloneqq \{A \subseteq \mathbb{R}^d \ : \ \text{diam}A < \delta\}$;
- $\mathscr{H}_s^{(\delta)}(E) \coloneqq \inf\{\sum_{n\in\mathbb{N}} (\text{diam}A_n)^s \ : \ (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C_\delta,\ E \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\}$. Donde $\mathscr{H}_s^{(\delta)}(E)$ es la medida exterior inducida por $\mathcal{T}_s^{(\delta)}$ y $\mathcal{T}_s^{(\delta)}(A) \coloneqq (\text{diam}A)^s$ la $\delta$-premedida de Hausdorff s-dimensional en $\mathbb{R}^d$ con $\mathcal{T}_s^{(\delta)} : C_\delta \to [0,\infty]$.

**Observar.** Si $\delta' < \delta$ entonces $\mathscr{H}_s^{(\delta')}(E) \geq \mathscr{H}_s^{(\delta)}(E)$.

Luego, podemos definir

$$\mathscr{H}_s(E) \coloneqq \sup_{\delta>0} \mathscr{H}_s^{(\delta)}(E) = \lim_{\delta\to 0^+} \mathscr{H}_s^{(\delta)}(E),$$

donde $\mathscr{H}_s$ es la medida exterior de Hausdorff s-dimensional en $\mathbb{R}^d$.

**Definición 1.38** (conjunto $\mu^*$-medible)**.** Sea $X$ un espacio y $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ medida exterior. Decimos que $E \subseteq X$ es un <u>conjunto $\mu^*$-medible</u> si

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \quad \forall A \subseteq X.$$

**Observar.** $\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$ vale siempre (por $\sigma$-subaditividad de $\mu^*$. Luego, para ver que $R$ es $\mu^*$-medible, basta ver que $\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$.

**Teorema 1.39.** Sea $\mu^*$ una medida exterior sobre un espacio $X$. Entonces:

1. $\mu^*(E) = 0 \Rightarrow E$ es $\mu^*$-medible;
2. La clase $\mathscr{M}_{\mu^*}$ de conjuntos $\mu^*$-medibles es una $\sigma$-álgebra;
3. La restricción $\mu$ de $\mu^*$ a $\mathscr{M}_{\mu^*}$ es una medida.

En particular, $(X, \mathscr{M}_{\mu^*}, \mu)$ es un espacio de medida completo.

**Demostración.**

1. Si $A \subseteq X$, $\mu^*(A \cap E) \leq \mu^*(E) = 0$. Además, por monotonía, $\mu^*(A \cap E^c) \leq \mu^*(A)$. Luego, $\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) = 0 + \mu^*(A \cap E^c) \leq \mu^*(A)$.

2. $\varnothing \in \mathscr{M}_{\mu^*}$: Se sigue de (1), pues $\mu^*(\varnothing) = 0$, por definición.

   $E \in \mathscr{M}_{\mu^*}$: Directo de la definición de $\mathscr{M}_{\mu^*}$, puesto que es simétrica en $E$ y $E^c$.

   $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{M}_{\mu^*} \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathscr{M}_{\mu^*}$: Esto lo demostramos en tres pasos. En primer lugar, demostramos que si $E_1, E_2 \in \mathscr{M}_{\mu^*}$, entonces $E_1 \cap E_2, E_1 \cup E_2 \in \mathscr{M}_{\mu^*}$.

   > **Demostración.** Si $A \subseteq X$, entonces
   >
   > $$\begin{aligned}\mu^*(A) &= \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_1^c) \\ &= \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap \overbrace{E_1^c \cap E_2}^{E_2 \setminus E_1}) + \mu^*(A \cap \underbrace{E_1^c \cap E_2^c}_{(E_1 \cup E_2)^c}) \\ &\geq \mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) + \mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)^c).\end{aligned}$$
   >
   > Notar que la primera igualdad se tiene por $E_1 \in \mathscr{M}_{\mu^*}$ y la segunda por $E_2 \in \mathscr{M}_{\mu^*}$. Esto implica que $E_1 \cap E_2 \in \mathscr{M}_{\mu^*}$. Pero entonces $E_1 \cap E_2 = ((E_1 \cap E_2)^c)^c = (\underbrace{\underbrace{E_1^c}_{\in \mathscr{M}_{\mu^*}} \cup \underbrace{E_2^c}_{\in \mathscr{M}_{\mu^*}}}_{\in \mathscr{M}_{\mu^*}})^c \in \mathscr{M}_{\mu^*}$ $\square$

   Para el segundo paso, demostramos que si $E_1, \ldots, E_n \in \mathscr{M}_{\mu^*}$ disjuntos, entonces $\mu^*\left(A \cap \left(\biguplus_{i=1}^{n} E_i\right)\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A \cap E_i)$.

   > **Demostración.** La idea es probarlo por inducción. Basta ver el caso $n = 2$ (los otros casos salen iterando éste)
   >
   > $$\begin{aligned}&\mu^*(A \cap (E_1 \uplus E_2)) \\ &= \mu^*(\underbrace{A \cap (E_1 \uplus E_2) \cap E_1}_{A \cap E_1}) + \mu^*(\underbrace{A \cap (E_1 \uplus E_2) \cap E_1^c}_{A \cap E_2}).\end{aligned}$$
   >
   > pues $E_2 \subseteq E_1^c$ por ser disjuntos. $\square$

   Por último, vemos que si $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{M}_{\mu^*}$, entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathscr{M}_{\mu^*}$.

**Demostración.** Podemos suponer que los $E_n$ son disjuntos. Si no, los cambiamos por

$$\begin{aligned}
&E_1' \coloneqq E_1 \in \mathscr{M}_{\mu^*}\\
&E_2' \coloneqq E_2 \setminus E_1 = E_2 \cap E_1^c \in \mathscr{M}_{\mu^*}\\
&\vdots\\
&E_{n+1}' \coloneqq E_{n+1} \setminus \bigcup_{i=1}^{n} E_i \in \mathscr{M}_{\mu^*},
\end{aligned}$$

y $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = \biguplus_{n=1}^{\infty} E_n'$. Sea $F_n \coloneqq \biguplus_{i=1}^{n} E_i \longrightarrow E \coloneqq \biguplus_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Notar que si $F_n \subseteq E$, entonces $E^c \subseteq F_n^c$. Luego, dado $A \subseteq X$, como $F_n \in \mathscr{M}_{\mu^*}$, se tiene

$$\begin{aligned}
\mu^*(A) &= \underbrace{\mu^*(A \cap F_n)}_{=\sum_{i=1}^{n} \mu^*(A\cap E_i)} + \mu^*(\underbrace{A \cap F_n^c}_{\subseteq A\cap E^c})\\
&\geq \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A \cap E_i) + \mu^*(A \cap E^c).
\end{aligned}$$

Tomando $n \to \infty$,

$$\begin{aligned}
\mu^*(A) &\geq \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A \cap E_i) + \mu^*(A \cap E^c)\\
&\geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \qquad (\mu^* \ \sigma\text{-subad.})\\
A \cap E &= \bigcup_{i=1}^{\infty} A \cap E_i.
\end{aligned}$$

$\square$

$\square$