

Teoría de Integración

Basado en las clases impartidas por Santiago Saglietti en el
segundo semestre del 2025

Contents

| | | |
|----------|--|----------|
| 1 | Integral de Riemann | 2 |
| 1.1 | Clase 1 (04/08) | 2 |
| 1.2 | Clase 2 (06/08) | 3 |
| 1.3 | Clase 3 (07/08) | 4 |
| 1.4 | Clase 4 (08/08) | 6 |
| | 1.4.1 Limitaciones de la integral de Riemann | 6 |
| | 1.4.2 Clase 5 (18/08) | 8 |
| 1.5 | Clase 6 (20/08) | 10 |

Chapter 1

Integral de Riemann

1.1 Clase 1 (04/08)

Definition 1.1 (partición + intervalos). Una partición de un intervalo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ es un subconjunto finito $\Pi \subseteq [a, b]$ tal que $a, b \in \Pi$. Denotaremos a las particiones como $\Pi = \{x_0, \dots, x_n\}$, donde $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Los intervalos $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$ serán llamados intervalos de la partición.

Remark. A veces, identificaremos la partición Π con $(I_i)_{i=1, \dots, n}$. En tal caso, abusando de la notación, escribiremos $I_i \in \Pi$ cuando queramos hablar de los intervalos de Π .

Definition 1.2 (norma de particiones). La norma de una partición Π como $\|\Pi\| := \max_{i=1, \dots, n} (x_i - x_{i-1}) = \max_{I_i \in \Pi} |I_i|$.

Definition 1.3 (partición marcada). Una partición marcada de $[a, b]$ es un par $\Pi^* := (\Pi, \varepsilon)$ donde:

- $\Pi = \{x_0, \dots, x_n\}$ es una partición de $[a, b]$;
- $\varepsilon = \{x_1^*, \dots, x_n^*\}$ es una colección de puntos tal que $x_i^* \in I_i$ para cada $i = 1, \dots, n$.

Remark. Dada una partición marcada $\Pi^* = (\Pi, \varepsilon)$, definimos $\|\Pi^*\| := \|\Pi\|$.

Definition 1.4 (Suma de Riemann). Sean $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada y $\Pi^* = (\Pi, \varepsilon)$ una partición marcada. Definimos la suma de Riemann de f asociada a Π^* como:

$$S_R(f; \Pi^*) := \sum_{i=1}^n f(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{I_i \in \Pi} f(x_i^*)|I_i|.$$

1.2 Clase 2 (06/08)

Definition 1.5 (Riemann integrable). Dada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada, decimos que es Riemann integrable si existe el límite $\lim_{\|\Pi^*\| \rightarrow 0} S_R(f; \Pi^*)$. Equivalentemente, $\exists L \in \mathbb{R}$, tal que dado cualquier $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que $\|\Pi^*\| < \delta \Rightarrow |S_R(f; \Pi^*) - L| < \varepsilon$.

Remark. Cuando el límite existe, lo llamamos la integral de Riemann de f en $[a, b]$ y lo notamos $\int_a^b f(x)dx$.

Definition 1.6 (Sumas superior e inferior de Darboux). Dadas $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada y $\Pi = (I_i)_{i=1, \dots, n}$ una partición de $[a, b]$, definimos

$$m_{I_i} := \inf_{x \in I_i} f(x), \quad M_{I_i} := \sup_{x \in I_i} f(x) \quad \text{y}$$

$$\underline{S}(f; \Pi) := \sum_{I_i \in \Pi} m_{I_i} |I_i|, \quad \overline{S}(f; \Pi) := \sum_{I_i \in \Pi} M_{I_i} |I_i|.$$

Llamamos a $\underline{S}(f; \Pi)$ y $\overline{S}(f; \Pi)$ las sumas inferior y superior de Darboux de f con respecto a Π , respectivamente.

Note. Como $m_{I_i} \leq f(x) \leq M_{I_i}$, $\forall x \in I_i$ para toda partición marcada $\Pi^* = (\Pi; \varepsilon)$, tenemos $\underline{S}(f; \Pi) \leq S_R(f; \Pi^*) \leq \overline{S}(f; \Pi)$.

Definition 1.7 (refinamiento). Diremos que una partición Π' de $[a, b]$ es un refinamiento de otra partición de $[a, b]$, Π , si $\Pi \subseteq \Pi'$. Equivalentemente, si para todo $J_i \in \Pi'$ existe $I_i \in \Pi$ tal que $J_i \subseteq I_i$.

Proposition 1.8. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada. Entonces,

- Si $\Pi \subseteq \Pi'$ son particiones de $[a, b]$,

$$\underline{S}(f; \Pi) \leq \underline{S}(f; \Pi'), \quad \overline{S}(f; \Pi) \geq \overline{S}(f; \Pi').$$

- Si Π_1, Π_2 son particiones de $[a, b]$ cualesquiera,

$$\underline{S}(f; \Pi_1) \leq \overline{S}(f; \Pi_2)$$

Definition 1.9. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada. Definimos:

- La integral superior (de Darboux) de f como $\int_a^b f(x)dx := \inf_{\Pi} \overline{S}(f; \Pi)$.
- La integral inferior (de Darboux) de f como $\int_a^b f(x)dx := \sup_{\Pi} \underline{S}(f; \Pi)$.

Theorem 1.10. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada. Entonces,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \underline{S}(f; \Pi) \quad \text{y} \quad \overline{\int_a^b f(x)dx} = \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \overline{S}(f; \Pi).$$

Remark. Equivalentemente, para cualquier sucesión $(\Pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de partición de $[a, b]$ tal que $\|\Pi_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, se tiene que

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}(f; \Pi_n) \quad \text{y} \quad \overline{\int_a^b f(x)dx} = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(f; \Pi_n).$$

Theorem 1.11. Dada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada, son equivalentes:

1. $\int_a^b f(x)dx = \overline{\int_a^b f(x)dx}$ (i.e., f es Darboux integrable).
2. f es Riemann integrable.
3. $\lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \overline{S}(f; \Pi) - \underline{S}(f; \Pi) = 0$.
4. $\forall (\Pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión de particiones de $[a, b]$ tal que $\|\Pi_n\| \rightarrow 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(f; \Pi_n) - \underline{S}(f; \Pi_n) = 0.$$

5. $\exists (\Pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión de particiones de $[a, b]$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(f; \Pi_n) - \underline{S}(f; \Pi_n) = 0.$$

1.3 Clase 3 (07/08)

Note. Las integrales en el sentido de Darboux y el de Riemann coinciden.

Proposition 1.12. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es monótona, entonces es Riemann integrable.

Remark. Una función monótona tiene discontinuidades numerables.

Proposition 1.13. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces es Riemann integrable.

En particular, existen funciones Riemann integrables con numerables discontinuidades. De hecho, hay ejemplos con c (cardinal del continuo) discontinuidades. No obstante, si f es integral de Riemann, su conjunto de discontinuidades tiene que ser "pequeño".

Theorem 1.14. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada. Entonces, f es integral de Riemann si y sólo si su conjunto de discontinuidades tiene medida nula.

Definition 1.15 (intervalo). Decimos que un conjunto $I \subseteq \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ es un intervalo si satisface

$$x, y \in I \Rightarrow z \in I \text{ para todo } \min x, y \leq z \leq \max x, y.$$

Example. (y propiedades)

- Dados $a \leq b$ ($a, b \in \mathbb{R}$), los conjuntos (a, b) , $(a, b]$, $[a, b]$, $[a, b)$ son intervalos;
- El conjunto vacío es un intervalo ($\emptyset = (a, a)$);
- Los puntos son intervalos. $I = [\lambda, \lambda]$;
- La intersección son intervalos de intervalos.

◇

Definition 1.16 (intervalo generalizado). Decimos que un conjunto $I \subseteq \mathbb{R}^d$ es un intervalo si puede escribirse como

$$I = \prod_{k=1}^d I_k$$

donde cada I_r es un intervalo en \mathbb{R} . La medida de un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}^d$ se define como

$$|I| := \prod_{k=1}^d |I_k|.$$

Note. Los intervalos en \mathbb{R}^d heredan las mismas propiedades en \mathbb{R} :

- Intersección de intervalos en \mathbb{R}^d es intervalo.
- Si $I \subseteq J \subseteq \mathbb{R}^d$ son intervalos, entonces $|I| \leq |J|$.

Definition 1.17 (medida nula). Un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^d$ se dice de medida nula si, dado $\varepsilon > 0$, existe una sucesión $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de intervalos de \mathbb{R}^d tal que

$$E \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \quad \text{y} \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} |I_n| < \varepsilon.$$

Example. (y propiedades)

1. Todo conjunto unitario $\{x\}, (x \in \mathbb{R}^d)$ tiene medida nula;

2. Toda unión numerable de conjuntos de medida nula tiene medida nula;
3. Cualquier conjunto numerable tiene medida nula;
4. Cualquier subconjunto de un conjunto de medida nula tiene medida nula;
5. Existen conjuntos no numerables de medida nula:
 - En \mathbb{R}^d con $d \geq 2$, los ejes $\{x : x_1 = 0\}, i = 1, \dots, d$ tiene medida nula.
 - En \mathbb{R} , el conjunto de cantor tiene medida nula.
6. $E \subseteq \mathbb{R}^d$ es de medida nula, entonces $\alpha \dot{E}$ tiene medida nula $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
7. $E \subseteq \mathbb{R}^d$ es de medida nula, entonces $E + v$ tiene medida nula $\forall v \in \mathbb{R}^d$.
8. Si E contiene un intervalo no unitario, entonces no tiene medida nula.
Notar que:
 - La vuelta no es válida: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ no contiene intervalos no unitarios pero no puede tener medida nula.
 - De esto se deduce que si $E \subseteq \mathbb{R}^d$ tiene medida nula. Entonces E^c es denso (no vale la vuelta: $E^c = \mathbb{Q}$).
9. $E \subseteq \mathbb{R}^d$ tiene medida nula si y sólo si

$$|E|_e := \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} |I_n| : E \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \right\} = 0, \quad I_n \text{ intervalo } \forall n \in \mathbb{N}.$$

◇

1.4 Clase 4 (08/08)

Theorem 1.18. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada. Entonces

$$f \text{ Riemann integrable} \iff D_f = \{x \in [a, b] : f \text{ discontinua en } x\} \text{ tiene medida nula.}$$

1.4.1 Limitaciones de la integral de Riemann

1. Sólo está definida para f acotada y sobre intervalos $[a, b]$ acotados. La teoría de integrales impropias resuelve esto.
2. Propiedades del espacio $\mathcal{R}([a, b]) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ Riemann integrable}\}$:
Nos gustaría poder definir una noción de convergencia en $\mathcal{R}([a, b])$ tal que

$$f_n \rightarrow f \text{ en } \mathcal{R}([a, b]) \Rightarrow \int_a^b f_n \rightarrow \int_a^b f \quad \left(\lim \int_a^b f_n = \int_a^b \lim f_n \right).$$

Remark. La convergencia puntal NO cumple esto (punto 2).

Example (1).

- $f_n := n\chi_{(0, \frac{1}{n}]}$ es Riemann integrable en $[0, 1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
- $f_n \rightarrow f \cong 0$ puntualmente en $[0, 1]$;
- $\int_0^1 f_n = 1 \not\rightarrow 0 = \int_0^1 f$.

◇

Example (2).

- Sea $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una enumeración de $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$;
- $f_n := \chi_{\{Q_1, \dots, Q_n\}}$ es Riemann integrable en $[0, 1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
- $f_n \rightarrow f := \chi_{\mathbb{Q} \cap [0, 1]}$ puntualmente en $[0, 1]$;
- f no es Riemann integrable. $\int_0^1 f = 0 \neq 1 = \overline{\int_0^1 f}$.

◇

Remark. La convergencia uniforme SÍ cumple esto, pero es demasiado fuerte.

Exercise (Guía 1). Sean $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{R}([a, b])$ tales que $f_n \rightarrow f$ uniformemente en $[a, b]$. Entonces, $f \in \mathcal{R}([a, b])$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$.

Example (3).

- $f_n(x) := x^n$ en $[0, 1]$, $f_n \in \mathcal{R}([a, b])$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \rightarrow \chi = f$ puntualmente;
- $f \in \mathcal{R}([a, b])$ y $\int_0^1 f_n(x) dx = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 = \int_0^1$;
- f_n no converge uniformemente a f .

◇

Resulta que la noción de convergencia "óptima" (la más "débil" que cumple lo que queremos) es la de convergencia en L' :

$$f_n \xrightarrow{L'} f \text{ si } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f_n - f| = 0.$$

Esta noción de convergencia viene dada por una "norma":

- $\|f\|_{L'} := \int_a^b |f|$ (recordar que $f \in \mathcal{R}([a, b]) \Rightarrow |f| \in \mathcal{R}([a, b])$);
- $d_{L'}(f, g) := \|f - g\|_{L'} = \int_a^b |f - g|$.

Remark. $\|\cdot\|_{L'}$ no es una norma porque $\|f\|_{L'} = 0 \not\Rightarrow f = 0$. Decimos que es una *pseudo-norma* y d una *pseudo-métrica*.

Para arreglar esto, dadas $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, decimos que son *equivalentes* y lo notamos $f \sim g$ si $\{x \in [a, b] : f(x) \neq g(x)\}$ tiene medida nula. Resulta que \sim es una relación de equivalencia y, además,

$$f, g \in \mathcal{R}([a, b]), f \sim g \Rightarrow \int_a^b f = \int_a^b g.$$

Sea $\overline{\mathcal{R}}([a, b])$ el conjunto de clases de equivalencia de $\mathcal{R}([a, b])$, y denotamos por \bar{f} a la clase de equivalencia de $f \in \mathcal{R}([a, b])$. Con esto, $\|\bar{f}\|_{L'} := \int_a^b |f| dx$ define una norma en $\overline{\mathcal{R}}([a, b])$ que se llama la **norma** L' .

Remark. Hay un problema: $(\overline{\mathcal{R}}([a, b]), \|\cdot\|_{L'})$ NO ES COMPLETO!

3. **TFC:** Si $f \in \mathcal{R}([a, b])$ es continua en $x_0 \in [a, b]$, entonces $F(x) := \int_a^x f(t) dt$ es derivable en x_0 y $F'(x_0) = f(x_0)$. En particular, F es derivable en x y $F'(x) = f(x)$ para todo x salvo un conjunto de medida nula.

1.4.2 Clase 5 (18/08)

Teorema Fundamental del Cálculo: Si $f \in \mathcal{R}([a, b])$ es continua en $x_0 \in [a, b]$, entonces $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(x) := \int_a^x f(t) dt$ es derivable en $x = x_0$ y vale $F'(x_0) = f(x_0)$. En particular, $F'(x) = f(x)$ salvo quizás por un conjunto de $x \in [a, b]$ de medida nula. O sea, podemos integrar y luego derivar y esto es "casi" como no hacer nada. Pero, tenemos problemas:

1. Este "casi" no puede removerse

Theorem 1.19 (Hankel, 1871). Dado $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, existe $f \in \mathcal{R}([a, b])$ tal que $F(x) := \int_a^x f(t) dt$ no es derivable para ningún x en un subconjunto denso en $[a, b]$ (y, en particular, infinito).

2. A veces no podemos componer en el orden inverso

Theorem 1.20 (Volterra, 1881). Dado $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, existe $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivable en $[a, b]$, tal que f' es acotada en $[a, b]$ pero $f' \notin \mathcal{R}([a, b])$.

Extendiendo la integral de Riemann

Sean $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada y $\Pi = \{x_0, \dots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$. Definimos:

$$\begin{aligned} \Phi_{f, \Pi}(x) &:= m_{I_1} \chi_{[x_0, x_1]}(x) + \sum_{i=2}^n m_{I_i} \chi_{(x_{i-1}, x_i]}(x), \quad m_{I_i} = \inf_{t \in I_i} f(t) \\ &= m_{I_1} \chi_{\{x_0\}}(x) + \sum_{i=1}^n m_{I_i} \chi_{(x_{i-1}, x_i]}(x) \\ \psi_{f, \Pi} &:= M_{I_1} \chi_{\{x_0\}}(x) + \sum_{i=1}^n M_{I_i} \chi_{(x_{i-1}, x_i]}(x), \quad M_{I_i} = \sup_{t \in I_i} f(t). \end{aligned}$$

Observemos que $\Phi_{f, \Pi}(x) \leq f(x) \leq \psi_{f, \Pi}(x) \quad \forall x \in [a, b]$. Además,

$$\int_a^b \Phi_{f, \Pi}(x) dx = \underline{S}(f, \Pi) \int_a^b \psi_{f, \Pi}(x) dx = \overline{S}(f, \Pi).$$

En particular, si f es Riemann integrable,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \overline{\int_a^b f(x)dx} = \inf \left\{ \int_a^b \psi_{f,\Pi} : \Pi \text{ partición} \right\} \\ &= \underline{\int_a^b f(x)dx} = \sup \left\{ \int_a^b \Phi_{f,\Pi} : \Pi \text{ partición} \right\}.\end{aligned}$$

Definition 1.21 (función escalonada). Una función $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ se dice escalonada si existen $\Pi = \{x_0, \dots, x_n\}$ partición de $[a, b]$ y $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$\Phi|_{(x_{i-1}, x_i)} \equiv c_i \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Notemos que podemos escribir a cualquier función Φ escalonada como

$$\begin{aligned}\Phi(x) &:= \sum_{i=1}^n c_i \cdot \chi_{(x_{i-1}, x_i)}(x) + \sum_{i=0}^n \Phi(x_i) \cdot \chi_{\{x_i\}}(x) \\ &= \sum_{i=1}^k c_j \cdot \chi_{A_j}(x)..\end{aligned}$$

donde los A_j son intervalos disjuntos tales que $\bigsqcup_{j=1}^k A_j = [a, b]$ (se pone una "D" dentro de la unión para denotar que estamos haciendo una unión disjunta).

Si tomamos Φ de la forma $\Phi = \sum_{j=1}^k c_j \cdot \chi_{A_j}$ con $(A_j)_{j=1, \dots, k}$ disjuntos, $\bigsqcup_{j=1}^k A_j = [a, b]$ pero A_j no son necesariamente intervalos, diremos que Φ es una función escalonada generalizada. Como para funciones escalonadas "normales", tenemos

$$\int_a^b \Phi(x)dx = \sum_{j=1}^k c_j \cdot |A_j| \left(= \sum_{i=1}^n c_i \cdot |I_i| \right)$$

La función longitud Sea \mathcal{I} la colección de los intervalos en \mathbb{R} . Definimos la función longitud $\lambda : \mathcal{I} \rightarrow [0, \infty]$ como $\lambda(I) := |I|$.

Propiedades:

1. $\lambda(\emptyset) = 0$;
2. $I_1, I_2 \in \mathcal{I}, I_1 \subseteq I_2 \Rightarrow \lambda(I_1) \leq \lambda(I_2)$ (Monotonía de λ);
3. (Aditividad finita de λ) Si $I \in \mathcal{I}$ es tal que $I = \bigsqcup_{i=1}^n J_i$ con $J_i \in \mathcal{I}, \forall i = 1, \dots, n, J_i \cap J_j = \emptyset$ sin $i \neq j$, entonces

$$\lambda(I) = \sum_{i=1}^n \lambda(J_i);$$

4. (σ -aditividad de λ) Si $I \in \mathcal{I}$ es tal que $I = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$, con $(I_i)_i \in \mathbb{N} \subseteq \mathcal{I}$ disjuntos, entonces

$$\lambda(I) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(I_i);$$

5. (σ -subaditividad de λ) Si $I \in \mathcal{I}$ verifica $I \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$, $(I_i)_{i \in \mathbb{N}}$ intervalos (no necesariamente disjuntos), entonces $\lambda(I) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(I_i)$;
6. $\lambda(I+x) = \lambda(I)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $I+x := \{a+x : a \in I\}$;
7. $\lambda(\{x\}) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

1.5 Clase 6 (20/08)

Nos gustaría extender λ a una clase más grande que \mathcal{I} . Más precisamente, nos gustaría definir una aplicación $m : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$, donde \mathcal{M} es una colección de subconjuntos de \mathbb{R} tal que $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{M}$, de manera tal que, dado $E \in \mathcal{M}$, $m(E)$ represente la "longitud" de E . Idealmente, nos gustaría que m cumpla lo siguiente:

1. $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$;
2. Si $I \in \mathcal{I}$, entonces $m(I) = |I|$;
3. m es σ -aditiva ($E, (E_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}$, $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \Rightarrow m(E) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$);

Exercise. (1) + (2) + (3) $\Rightarrow m$ es monóton, σ -subaditiva y finitamente aditiva.

- 4 Si $E \in \mathcal{M}$, entonces $E+x \in \mathcal{M}$ y $m(E+x) = m(E) \forall x \in \mathbb{R}$.

El problema es que, si asumimos el Axioma de Elección, uno puede mostrar que no existe una tal m que cumpla (1) – (2) – (3) – (4) y, de hecho, no se sabe si existe m que cumpla (1) – (2) – (3). (Si asumimos la hipótesis del continuo, entonces no existe m que cumpla (1) – (2) – (3)).

Luego, para construir m debemos debilitar alguna de las propiedades:

- Si debilitamos (1) \Rightarrow TEORÍA DE LA MEDIDA;
- Si debilitamos (3) pidiendo solo (hay dos opciones):
 - \rightarrow aditividad finita \Rightarrow "medidas finitamente aditivas";
 - \rightarrow σ -subaditividad \Rightarrow "medidas exteriores".

Vamos a optar por debilitar (1).

Una manera de extender λ es la siguiente:

- i. Si $E = \bigcup_{i=1}^n I_i$ entonces definimos $\lambda(E) := \sum_{i=1}^n \lambda(I_i)$;
- ii. Si $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ entonces definimos $\lambda(E) := \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(I_i)$;
- iii. La fórmula anterior nos permite definir $\lambda(\delta)$ para todo δ abierto en \mathbb{R} ;
- iv. Para conjuntos mas generales, "aproximar" por abiertos.

Definition 1.22 (premedida). Sea X un conjunto no vacío y \mathcal{C} una colección de subconjuntos de X tal que $\emptyset \in \mathcal{C}$. Diremos que una aplicación $\mathcal{T} : \mathcal{C} \rightarrow [0, \infty]$ es una premedida si $\mathcal{T}(\emptyset) = 0$.

Remark. El conjunto no vacío X será llamado un espacio y la colección \mathcal{C} será llamada una clase (de subconjuntos de X).

Intuitivamente, \mathcal{C} representa la colección de subconjuntos cuyo "tamaño" sabemos medir y \mathcal{T} nos da su medida.

Example.

1. **Premedida de Lebesgue:** $\mathcal{C} := \mathcal{I} := \{I \subseteq \mathbb{R} : I \text{ intervalo}\}$, $\mathcal{T}(I) := |I|$.
2. **Premedidas de Lebesgue-Stieltjes:** Sea $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monótona creciente y continua a derecha ($\lim_{x \rightarrow x_0}^+ F(x) = F(x_0)$). Una función tal se dice una función de Lebesgue-Stieltjes.

◇

Observemos que, por monotonía, existen límites

$$\left\{ \begin{array}{l} F(\infty) := \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) \\ F(-\infty) := \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) \end{array} \right\} \in \mathbb{R}$$

Sea además la clase $\tilde{\mathcal{I}}$ de intervalos de \mathbb{R} dada por

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{I}} &:= \{I(a, b) : \} \text{ donde } I(a, b) := (a, b] \cap \mathbb{R} \\ &= \{(a, b] : -\infty \leq a \leq b\} \cup \{(a, \infty) : -\infty \leq a < \infty\}. \end{aligned}$$

Definimos la premedida \mathcal{T}_F de Lebesgue-Stieltjes asociada a F como la aplicación $\mathcal{T}_F : \tilde{\mathcal{I}} \rightarrow [0, \infty]$, dada por

$$\mathcal{T}_F(I(a, b)) = F(b) - F(a).$$

Note. Observar que si $F(x) = x$ entonces \mathcal{T}_F es la premedida de Lebesgue (sobre $\tilde{\mathcal{I}}$).

3. **Premedidas de Probabilidad:** Si F es una función de L-S tal que $F(\infty) = 1$ y $F(-\infty) = 0$, decimos que F es una función de distribución (acumulada). En tal caso, la premedida \mathcal{T}_F se conoce como premedida de probabilidad o predistribución (en \mathbb{R}).

Remark. $\mathcal{T}_F(\mathbb{R}) = \mathcal{T}_F(I(-\infty, \infty)) = F(\infty) - F(-\infty) = 1 - 0 = 1$.

4. Premedida...