

Ayudantía Teoría de Integración

August 28, 2025

Contents

1		2
1.1	Ayudantia 14 de Agosto	2
1.1.1	Ejercicio 11 (Guia) (i)	2
1.1.2	Ejercicio 11 (Guia) (ii)	3
1.1.3	Ejercicio 11 (Guia) (iii)	3
1.2	Ayudantía 21/08	3
1.3	Ayudantía 28 de Agosto	4

Chapter 1

1.1 Ayudantia 14 de Agosto

1.1.1 Ejercicio 11 (Guia) (i)

Proof. (A) Para ver que C es cerrado, veremos que cada C_n lo es. Notamos que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $f(x) := \frac{1}{3}x$ y $g(x) := \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x$ son continuas y $C_n = f(C_{n-1}) \cup g(C_{n-1}) \Rightarrow C_n$ es compacto \Rightarrow es cerrado, $\forall n$

(B) Para ver que es no numerable, vamos a construir una inyección $\Phi : X \rightarrow X$ con X no numerable. Sea entonces $X := [0, 2^{\mathbb{N}}]$ y dado $w \in X$, definimos:

$$C_n(w) := \frac{C_0}{3^n} + \sum_{k=1}^n n \frac{w_k}{3^k}$$

$$\text{Si } n = 2: C_2(w) = [0, \frac{1}{9}] + \frac{w_1}{3} + \frac{w_2}{9} = \begin{cases} [0, \frac{1}{9}] \\ [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \\ [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \\ [\frac{8}{9}, 1] \end{cases}$$

Basicamente, $C_n(w)$ referencia siempre a alguno de los 2^n intervalos de C_n . Luego, es claro que para w fijo, $C_{n+1}(w) \subseteq C_n(w) \subseteq C_n(*)$ y $\text{diam}(C_n(w)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Por el Teorema de intersección de Cantor: $|\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n(w)| = 1$. Sea $C(w)$ tal elemento. Luego, por (*), $C(w) \in C$.

Sea entonces $\Phi : [0, 2^{\mathbb{N}}] \rightarrow C$ tal que $\Phi(w) := C(w)$ y Φ es inyectiva (basta ver que pasa si $w^{(1)}, w^{(2)}$ difieren en una coordenada). Como $|[0, 2^{\mathbb{N}}]| = C$, se concluye.

(C) Si suponemos que existe $(a, b) \subset C$. SPG, $a = 0$. Consideremos $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande.

$$3^{-n} < b \Rightarrow (0, b) \not\subseteq [0, \frac{1}{3^n}] \cup [\frac{2}{3^n}, \frac{3}{3^n}] \subseteq C_n$$

Luego, $\exists z \in (0, b) : z \notin C_n$, para algun $n \Rightarrow z \notin C$ (Contradicción). □

1.1.2 Ejercicio 11 (Guia) (ii)

1.1.3 Ejercicio 11 (Guia) (iii)

Ahora, para la integral superior:

1.2 Ayudantía 21/08

1. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Probar que su gráfico en \mathbb{R}^2 :

$$\mathcal{G} : \{(x, f(x)) : x \in [a, b]\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

tiene medida nula.

Proof. Sea $\varepsilon > 0$, debemos contruir una familia de cuadrados en \mathbb{R}^2 que verifique $\mathcal{G} \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} Q_i$ y $\sum_{i \in \mathbb{N}} |Q_i| < \varepsilon$. Como $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces f es uniformemente continua. Así. si ε , $\exists \delta > 0$: si $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Sin pérdida de generalidad, sea $S \leq 1$ y empezamos a particionar $[a, b]$. Sea $n := \lceil \frac{b-a}{\delta} \rceil$ y consideramos la partición $\{I_j\}_{j=1}^n$ tales que $I_j := [x_j, x_{j+1}]$ con $x_0 = a$, $x_n = b$ y $0 < x_{j+1} - x_j \leq \delta$. Con esto, tenemos que:

- (a) Por construcción, $\text{diam}(I_j) \leq \delta$, $\forall 0 \leq j \leq n$;
- (b) En particular, si $x \in I_j \Rightarrow I_j \subseteq B(x, \delta)$, $\forall j \in \{1, \dots, n\}$. Luego, en cada $j \in \{1, \dots, n\}$ elegimos $x_j \in I_j$ y cumple que $I_j \subseteq B(x_j, \delta)$. Además, $f(I_j) \subseteq B(f(x_j), \varepsilon)$.

Ahora definimos los cuadrados: Dado $(x, f(x)) \in \mathcal{G} \Rightarrow x \in I_j \subseteq B(x_j, \delta)$, para algún j y $f(x) \in B(f(x_j), \varepsilon)$. Por lo tanto, $(x, f(x)) \in B(x_j, \delta) \times B(f(x_j), \varepsilon)$. Luego, $\mathcal{G} \subseteq \bigcup_{j=1}^n B(x_j, \delta) \times B(f(x_j), \varepsilon)$. Además:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n |B(x_j, \delta) \times B(f(x_j), \varepsilon)| &= n(2\delta)(2\varepsilon) = 4\varepsilon n\delta \\ &= 4\varepsilon \lceil \frac{b-a}{\delta} \rceil \delta \\ &\leq 4\varepsilon \left(\frac{b-a}{\delta} + 1 \right) \delta \\ &= 4\varepsilon([b-a] + \delta) \\ &\leq \underbrace{4\varepsilon(b-1+1)}_{\delta \leq 1}. \end{aligned}$$

□

2. Sean $\alpha \in (0, 1]$ y $C_0 := [0, 1]$. Para cada $n \geq 1$, defina recursivamente, el conjunto C_n que resulta de retirar el intervalo central de largo $\alpha 3^{-n}$ a C_{n-1} . Por ejemplo, $C_1 := [0, \frac{3-\alpha}{6}] \cup [\frac{3+\alpha}{6}, 1]$. Defina $C_\alpha := \bigcap_{n \geq 0} C_n$.

- (a) Pruebe que C_α tiene medida nula $\Leftrightarrow \alpha = 1$. [Con esto (y mas resultados) χ_{C_α} es R-integrable $\Leftrightarrow \alpha = 1$.]

Proof. Primero, estudiemos un poco mas de la construcción de los C_α . Para construir C_n , debemos retirar 2^{n-1} intervalos de largo $\alpha 3^{-n}$. Así, si sumamos los largos de los intervalos retirados hasta n obtenemos:

$$\sum_{k=1}^n 2^{k-1}(\alpha 3^{-k}) = \frac{\alpha}{2} \sum_{n=1}^k \left(\frac{2}{3}\right)^k \frac{\alpha}{2} \left(\sum_{k=0}^n \left(\frac{2}{3}\right)^k - 1\right).$$

Por lo tanto, el largo neto al sustraer todos los intervalos es

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n 2^{k-1}(\alpha 3^{-k}) = \frac{\alpha}{2} \left[\frac{1}{1 - \frac{2}{3}} - 1 \right] = \alpha.$$

Supongamos que $\alpha < 1$. Supongamos que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \{I_j\}_{j=1}^\infty$ tal que $C_\alpha \subseteq \bigcup_{j=1}^\infty I_j$ y $\sum_{j=1}^\infty |I_j| < \varepsilon$ (i.e., C_α tiene medida nula). En particular, si consideramos $\varepsilon := 1 - \alpha > 0$, obtenemos un cubrimiento de C_α , $\{I_k\}_{k \in \mathbb{N}} : \sum_{k=1}^\infty |I_k| < 1 - \alpha$. Si ahora añadimos a esta colección todos los intervalos sustraídos, entonces puedo cubrir $[0, 1]$. Como el largo es numerablemente sub-aditivo, entonces $1 = |[0, 1]| = |I_k \cup \{\text{lo que quite}\}| < (1 - \alpha) + \alpha = 1$. \square

1.3 Ayudantía 28 de Agosto

Ejercicio N°1

Sea μ una medida sobre (X, β) (β una σ -álgebra). Pruebe que:

1. Si $A, B \in \beta : A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$
2. Si $(A_n)_n \subseteq \beta$ y $A \in \beta$ tales que $A \subseteq \bigcup_n A_n \Rightarrow \mu(A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$
3. Sea $(A_n)_n \subseteq \beta$ tal que $A_n \subseteq A_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Luego:

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$$

4. Si $(A_n)_n \subseteq \beta$ cumple que $A_{n+1} \subseteq A_n \forall n$, entonces:

$$\mu\left(\bigcap_n A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) \quad \text{si } \exists n_0 \in \mathbb{N} : \mu(A_{n_0}) < \infty$$

Proof (1.). Basta notar que:

$$\begin{aligned} B = A \uplus (B \setminus A) &\Rightarrow \mu(B) = \mu(A) + \underbrace{\mu(B \setminus A)}_{\geq 0} \\ &\geq \mu(A). \end{aligned}$$

□

Proof (2.). Por (1.) tenemos que $\mu(A) \leq \mu(\bigcup_n A_n)$. ¿ $\mu(\bigcup_n A_n) \leq \sum_n \mu(A_n)$?

Idea. Descomponer $\bigcup_n A_n$ en otra unión que sea disjunta y que permita acotar?

Sea $B_1 := A_1$, $B_2 := A_2 \setminus A_1 = A_2 \setminus B_1, \dots$, $B_n := A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} B_k$. Luego, $(B_n)_n$ es disjunta y $\bigcup_n A_n = \biguplus_n B_n$. Finalmente:

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \mu\left(\biguplus_n B_n\right) = \sum_n \mu(B_n) \leq \sum_n \mu(A_n)$$

Notar que la última desigualdad es por (1.) y $B_n \subseteq A_n$.

□

Proof (3.). Nuevamente, vamos a apelar a una descomposición disjunta: Sean

$$B_1 := A_1, B_2 := A_2 \setminus A_1, \dots, B_n := A_n \setminus A_{n-1}$$

Como la sucesión es creciente, $\bigcup_n A_n = \biguplus_n B_n$. Luego,

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_n A_n\right) &= \mu\left(\biguplus_n B_n\right) = \sum_n \mu(B_n) \\ &= \mu(B_1) + \sum_{n \geq 2} \mu(B_n) \\ &= \mu(A_1) + \sum_{n \geq 2} [\mu(A_n) - \mu(A_{n-1})] \quad (*) \\ &= \mu(A_1) + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \mu(A_k) - \mu(A_{k-1}) \\ &= \mu(A_1) + \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) - \mu(A_1) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) \end{aligned}$$

Donde (*) es cierto, pues $B_n := A_n \setminus A_{n-1}$ cumple que $A_n = A_{n-1} \uplus B_n$. Queda como ejercicio probar la continuidad si el espacio es σ -finito □

Proof (4.). Notamos primero que como $A_{n+1} \subseteq A_n \stackrel{(i)}{\Rightarrow} \mu(A_{n+1}) \leq \mu(A_n) \Rightarrow$

$(\mu(A_n))_n \subset \mathbb{R}$ es monótona decreciente y acotada por abajo. Entonces, es convergente. Notemos que, siendo n fijo

$$\begin{aligned}
 \mu(A_n) - \mu\left(\bigcap_{k \geq 1} A_k\right) &= \mu\left(A_n \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) \\
 &= \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (A_n \setminus A_k)\right) \\
 &= \mu\left(\bigcup_{k \geq n+1} \underbrace{(A_n \setminus A_k)}_{\text{creciente en } k}\right) \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_n \setminus A_k) \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_n) - \mu(A_k).
 \end{aligned}$$

y esto concluye. □

Ejercicio N°2

Pruebe que la medida de Lebesgue del triángulo en \mathbb{R}^2 coincide con el area usual.

Proof. (0) Los triángulos son Lebesgue medibles: Como los triángulos son cerrados, entonces son Borelianos y por lo tanto Lebesgue. □