Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Basado en las clases impartidas por - en el segundo semeste del 2025

Chapter 1

1.1 Clase (20/08)

1.1.1 Algunas ecuaciones no-lineales

Example. Considere la EDO:

$$y' = -\frac{t^2 + y^2}{t^2 - ty} = -\frac{M(t,y)}{N(t,y)}, \quad t > 0$$

Sean $M(t,y) = t^2 + y^2$ y $N(t,y) = t^2 - ty, \quad \forall (t,y) \in \mathbb{R}^2$, y así:

$$M(st, sy) = s^2 M(t,y) \text{ y } N(st, sy) = s^2 N(t,y), \quad s,t,y \in \mathbb{R}.$$

En tal caso, conviene introductir el cambio de variable $y = ty$, y así:

$$u + tu' = -\frac{t^2 + t^2u^2}{t^2 - t^2u} = -\frac{1+u^2}{1-u},$$

y así

$$\begin{aligned}
u' = -\frac{1}{t} \cdot \frac{1+u}{1-u} &\Leftrightarrow \frac{du}{dt} = -\frac{1}{t} \cdot \frac{1+u}{1-u} \\
&\Leftrightarrow \frac{1-u}{1+u} du = -\frac{1}{t} dt \\
&\Leftrightarrow log((1+u)^2) - u = -log(t) + C \\
&\Leftrightarrow (1+u)^2 = \frac{C}{t} e^u \\
&\Leftrightarrow (t + y(t))^2 = Cte^{y(t)/t} \quad \text{(solución definida implícitamente).}
\end{aligned}$$

$\diamond$

En general, si $M, N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son dos funciones tales que

$$M(st, sy) = s^\alpha M(t,y) \text{ y } N(st, sy) = s^\alpha N(t,y), \quad \forall s,t,y \in \mathbb{R},$$

para cierto $\alpha > 0$, se sugiere utilizar el cambio de variable $y = tu$.

Ecuación de Bernoulli: tiene la forma

$$y'(t) + P(t)y(t) = f(t)(y(t))^n \quad \text{con } n \in \mathbb{N}$$

Note. los casos $n = 0$ y $n = 1$ ya han sido estudiados.

Para $n \geq 2$ conviene utilizar el cambio de variable $u = y^{1-n}$. Luego, $u' = (1-n)y^{-n}y'$, es decir: $y' = \frac{1}{1-n}y^n u'$, y así:

$$\begin{aligned} \frac{y^n}{1-n}u' + P(t)y(t) = f(t)(y(t))^n &\Leftrightarrow \frac{1}{1-n}u' + P(t)y^{1-n} = f(t) \\ &\Leftrightarrow u'(t) + (1-n)P(t)u(t) = (1-n)f(t) \\ &\quad \text{(se resuelve con factor integrante).} \end{aligned}$$

Ecuación de Ricatti: es de la forma

$$y' = P(t) + Q(t)y(t) + R(t)(y(t))^2$$

Supongamos que se conoce una solución $y_1(t)$ de esta EDO, es decir:

$$y_1'(t) - P(t) - Q(t)y_1(t) - R(t)(y_1(t))^2 = 0$$

Luego, definimos $z(t) = y(t) - y_1(t)$, y así:

$$y'(t) = z'(t) + y_1'(t) = P(t) + Q(t)(z(t) + y_1(t)) + R(t)(z(t) + y_1(t))^2 \Leftrightarrow z'(t) - [Q(t) + 2y_1(t)R(t)]z(t) = R(t)(z(t))^2$$

Example. Resolver la EDO:

$$y'(t) = 6 + 5y(t) + (y(t))^2$$

Corresponde a una ecuación de Ricatti con:

$$P(t) = 6, \quad Q(t) = 5, \quad R(t) = 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Nótese que $y_1(t) = -2$, $\forall t \in \mathbb{R}$ es solución. Luego, definimos:

$$\begin{aligned} z(t) &= y(t) - y_1(t) = y(t) + 2 \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow & z'(t) - z(t) = (z(t))^2. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} u'(t) + u(t) = -1 &\Rightarrow u(t) = Ce^{-t} - 1 \quad \forall t \in \mathbb{R} \ (C \in \mathbb{R}) \\ &\Rightarrow z(t) = \frac{1}{u(t)} = \frac{1}{Ce^{-t} - 1} \\ &\Rightarrow y(t) = z(t) - 2 = \frac{1}{Ce^{-t} - 1} - 2. \end{aligned}$$

$\diamond$

Note. Si $C > 0$, la solución "explota" cuando $t = \log(C)$.

1.1.2 III. Problema de Cauchy: existencia y unicidad

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un conjunto abierto, que por lo general será de la forma $\Omega = I \times \widetilde{\Omega}$, con $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto y $\widetilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Dada una función

$$f \in C(\Omega; \mathbb{R}^n)$$

consideramos nuevamente el problema de Cauchy

$$(PC) \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & \forall x \in I \text{ con} \quad x_0 \in I \text{ y} \\ y(x_0) = y_0, & \qquad\qquad\quad y \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

El (PC) puede ser formulado de manera equivalente, pero "relativamente" más débil:

Lemma 1.1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un conjunto abierto de la forma $\Omega = I \times \widetilde{\Omega}$, $I \subset \mathbb{R}$ intervalo abierto y $\widetilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ conjunto abierto. Dados $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$ y $f \in C(\Omega; \mathbb{R}^n)$, una función $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ es solución de (PC) si y sólo si:

(i) $\varphi \in C(I; \mathbb{R}^n)$;

(ii) $(x, \varphi(x)) \in \Omega \quad \forall x \in I$;

(iii) $\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s))ds \quad \forall x \in I$.

(i, ii y iii es formulación integral del (PC)).

Remark. La formulación integral nos permite estudiar el (PC) desde una perspectiva más abstracta. Supongamos por ahora que

$$\Omega = \mathbb{R}^{n+1},\ I = \mathbb{R},\ \widetilde{\Omega} = \mathbb{R}^n \text{ y } f \in C(\mathbb{R}^{n+1}; \mathbb{R}^n).$$

Dados $y_0 \in \mathbb{R}^n$ y $x_0 \in \mathbb{R}$, consideramos la aplicación $T : C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n) \to C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$.

$$T(\varphi)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s))ds \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Por el lema precedente, es evidente que $\varphi \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ es solución de (PC) si y sólo si $T(\varphi) \equiv \varphi$ (i.e., φ es punto fijo de T).

1.2 Clase (22/08)

$\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $\Omega = I \times \widetilde{\Omega}$ con $I \subset \mathbb{R}$ intervalo abierto y $\widetilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ conjunto abierto.

$$(PC) \quad \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & \forall x \in I, \\ y(x_0) = y_0 & (x_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}^n) \end{cases}$$

(i) Resolver localmente el problema (PC) corresponde a encontrar un intervalo $J \subset I$ y una función $\varphi \in C^1(J; \mathbb{R}^n)$ tales que:

$$x_0 \in J,\ (x, \varphi(x)) \in \Omega\ \forall x \in J,\ \varphi'(x) = f(x, \varphi(x))\ \forall x \in J;$$

(ii) Si $J_1,\ J_2 \subset I$ son intervalos abiertos que contienen a x_0, y $\phi_1 \in C^1(J_1; \mathbb{R}^n)$ y $\phi_2 \in C^1(J_2; \mathbb{R}^n)$ son soluciones locales de (PC), decimos que ϕ_2 extiende a ϕ_1 es una restricción de ϕ_2;

(iii) Una solución es maximal cuando no admite extensiones;

(iv) Una solución local, definida sobre $J \subset I$, es global si $J = I$.

Recuerdo. Dados $a < b$ números reales, el espaacio vectorial

$$C([a, b]; \mathbb{R}^n)$$

dotado de la norma $\|\varphi\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |\varphi(x)| \quad \forall \varphi \in C([a, b]; \mathbb{R}^n)$, es un espacio de Banach.

- Todo sub-conjunto cerradeo de $(C([a, b]; \mathbb{R}^n); \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio métrico completo.
- Todo sub-conjunto vectorial cerrado de $(C([a, b]; \mathbb{R}^n); \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach.

1.2.1 Aplicaciones contractivas: teorema del punto fijo de Baanch

Definition 1.2 (aplicación contractiva). Sea (X,d) un espacio métrico completo. Decimos que una aplicación $T : X \to X$ es contractiva si existe $\alpha \in [0,1)$ tal que

$$d(T(x),T(y)) \leq \alpha d(x,y) \quad \forall x,y \in X$$

Theorem 1.3 (punto fijo de Banach). Sea (X,d) un espacio métrico completo y $T : X \to X$ una aplicación contractiva. Entonces, existe un único $\hat{x} \in X$ tal que $T(\hat{x}) = \hat{x}$.

1.2.2 Funciones Lipschitz

Note. $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $(x,y) \in \Omega$, $x \in \mathbb{R}$, y $y \in \mathbb{R}^n$

Definition 1.4 (función globalmente Lipschitz). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ abierto, y $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ una función. Decimos que f es globalmente Lipschitz respecto a la variable y en Ω si existe una constante $L > 0$ tal que

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad \forall (x,y_1),(x,y_2) \in \Omega$$

Note. $\mathrm{Lip}(y;\Omega)$ denota el espacio vectorial de todas las funciones $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ que son globalmente Lipschitz respecto a y en Ω.

Definition 1.5 (función localmente Lipschitz). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Se dice que una función $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ es localmente Lipschitz respecto a la variable y en Ω si: para cualquier punto $(\overline{x},\overline{y}) \in \Omega$, existe $\varepsilon > 0$ y una constante $L > 0$ tales que $B((\overline{x},\overline{y}),\varepsilon) \subset \Omega$, y

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad \forall (x,y_1),(x,y_2) \in B((\overline{x},\overline{y},\varepsilon).$$

Note. $\mathrm{Lip}_{loc}(y;\Omega)$.

Proposition 1.6.

(A) Si $f \in \mathrm{Lip}(y;\Omega)$, entonces f es uniformemente continua respecto a y en Ω: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall (x,y_1),(x,y_2) \in \Omega$,

$$|y_1 - y_2| \leq \delta \Rightarrow |f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq \varepsilon$$

(B) Si $f \in \mathrm{Lip}_{loc}(y;\Omega)$, entonces f es continua respecto a la variable y en Ω: para todo $(\overline{x},\overline{y}) \in \Omega$:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\ |y - \overline{y}| \leq \delta \Rightarrow (\overline{x},\overline{y}) \in \Omega \text{ y } |f(\overline{x},\overline{y}) - f(\overline{x},y)| \leq \varepsilon$$

Remark. En general, $\mathrm{Lip}(y;\Omega) \not\subseteq C(\Omega;\mathbb{R}^n)$. Por ejemplo,

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ y \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

pertenece a $\mathrm{Lip}(y;\mathbb{R}^2)$, pero es discontinua en el conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$. Recíprocamente, la continuidad ("en pareja") de una función no implica ningún tipo de Lipschitzianidad (local o global).

Example. $\hat{f}(x,y) = \sqrt{|y|} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Vemos que no es localmente Lipszhitz: $\hat{f} \notin \mathrm{Lip}_{loc}(y;\mathbb{R}^2)$: por contradicción, debiese existir $\varepsilon > 0$ tal que $f \in \mathrm{Lip}(y; B((0,0),\varepsilon))$. Por ende, existe una constante $L > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \left| f(0,0) - f\left(0, \frac{\varepsilon}{n}\right) \right| &\leq L \cdot \frac{\varepsilon}{n} \quad \forall n \geq 2, \\ \Leftrightarrow \sqrt{\frac{\varepsilon}{n}} &\leq \frac{L\varepsilon}{n} \\ \Leftrightarrow \sqrt{n} &\leq L\sqrt{\varepsilon} \quad \forall n \geq 2, \end{aligned}$$

lo cual es absurdo! $\diamond$

Theorem 1.7. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un conjunto abierto y

$$f = (f_1, f_2, \ldots, f_n) : \ \Omega \to \mathbb{R}^n$$

una función tal que las derivadas parciales $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ $\forall i,j \in \{1,\ldots,n\}$ existen y son continuas en Ω. Entonces:

(A) $f \in \mathrm{Lip}_{loc}(y;\Omega)$;

(B) Si, además, Ω es convexo, $f \in \mathrm{Lip}(y;\Omega)$ si y sólo si

$$\sup_{(x,y)\in\Omega} \left| \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x,y) \right| < \infty \quad \forall i,j \in \{1,\ldots,n\}$$

1.3 Clase (25/08)

Remark. Consideramos las funciones $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definidos por:

$$f_1(x,y) = \frac{1}{1+y^2}, \ f_2(x,y) = \frac{x}{1+y^2}, \ f_3(x,y) = \begin{cases} xy & \text{si } x > 0; \\ y & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Se puede demostrar que:

(i) $f_1 \in \mathrm{Lip}(y;\mathbb{R}^2)$;

(ii) $f_2 \in \mathrm{Lip}(y;\mathbb{R}^2)$, pero $f_2 \in \mathrm{Lip}(y;\Omega)$ para cualquir dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ que sea acorada en al dirección de x;

(iii) $f_3 \in \mathrm{Lip}(y;\mathbb{R}^2)$ y $f_3 \in \mathrm{Lip}(y;\Omega)$ para cualquier dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ que sea acotado en la dirección de x. No obstante, $\frac{\partial f_3}{\partial y}$ no es continua en $\mathbb{R}^2$.

Theorem 1.8. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un conjunto abierto. Si $f \in \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(y;\Omega)$ y $K \subset \Omega$ es un conjunto compacto tal que $\sup_{(x,y)\in K} |f(x,y)| < \infty$, entonces $f \in \mathrm{Lip}(y;K)$.

Theorem 1.9 (Picard-Lindelöf)**.** Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un conjunto abierto y $f \in C(\Omega;\mathbb{R}^n) \cap \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(y;\Omega)$. Entonces, para cada $(x_0, y_0) \in \Omega$, existe un $\delta > 0$ tal que, si denotamos

$$I_\delta = [x_0 - \delta, x_0 + \delta],$$

el problema de Cauchy

$$(PC) \quad \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & \forall x \in I_\delta, \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

admite una única solución.

Proof. Como Ω es abierto y $(x_0, y_0) \in \Omega$, existen $a_0 > 0$ y $b_0 > 0$ tal que, si ponemos

$$R = [x_0 - a_0, x_0 - a_0] \times \overline{B(y_0, b_0)},$$

entonces $R \subset \Omega$ y $f \in \mathrm{Lip}(y;R)$.

- Sea $L > 0$ una constante de Lipschitsz para f en R (respecto a y):

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad \forall (x, y_1), (x, y_2) \in R.$$

- Denotemos por $M = \max_{(x,y)\in R} |f(x,y)|$.

Fijemos un número $\delta > 0$ tal que

$$0 < \delta < \min\left\{a_0, \frac{b_0}{M}, \frac{1}{L}\right\}$$

y consideremos el conjunto:

$$X = \{\varphi \in C(I_\delta;\mathbb{R}^n) \mid |\varphi(x) - y_0| \leq b_0 \quad \forall x \in I_\delta\}$$

donde (X, d) es un espacio métrico completo con la distancia usual en $C(I_\delta, \mathbb{R}^n)$.
Definimos la aplicación $T : X \to C(I_\delta;\mathbb{R}^n)$ por

$$T(\varphi)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s))ds \quad \forall \varphi \in X,\ \forall x \in I_\delta.$$

Notemos que, dado $\varphi \in X$, φ es solución de (PC) en I_δ si y sólo si φ es un punto fijo de la aplicación T en X.

$$\varphi \in C(I_\delta; \mathbb{R}^n) \ : \ (x, \varphi(x)) \in \Omega \quad \forall x \in I_\delta; \ \varphi(x_0) = y_0$$

PDQ: $|\varphi(x) - y_0| \leq b_0 \quad \forall x \in I_\delta$.

Proof. Por contradicción, supongamos que $\exists \hat{x} \in I_\delta : \ |\varphi(x) - y_0| > b_0$. Por continuidad, existe $\hat{x}_0 \in I_\delta$ tal que

$$|\varphi(\hat{x}_0 - y_0| = b_0 \text{ y } |\varphi(x) - y_0 \quad x \in (x_0, \hat{x}_0).$$

$$\begin{aligned}
b_0 &= |\varphi(\hat{x}_0) - y_0| \\
&= \left| \int_{x_0}^{\hat{x}_0} f(s, \varphi(s)) ds \right| \\
&\leq \left| \int_{x_0}^{\hat{x}_0} |f(s, \varphi(s))| ds \right| \\
&\leq M|\hat{x}_0 - x_0| \leq M\delta < b_0.
\end{aligned}$$

□

Dada $\varphi \in X$, ciertamente $T(\varphi) \in C(I_\delta; \mathbb{R}^n)$. Además, $\forall x \in I_\delta$,

$$\begin{aligned}
|T(\varphi)(x) - y_0| &= \left| \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s)) ds \right| \\
&\leq \left| \int_{x_0}^{x} |f(s, \varphi(s)) ds| \right| \\
&\leq M|x - x_0| \leq M\delta < b_0.
\end{aligned}$$

entonces, $T(\varphi) \in X$. Demostremos ahora que T es una contracción: dados $\varphi, \psi \in X$,

$$\begin{aligned}
|T(\varphi)(x) - T(\psi)(x)| &= \left| \int_{x_0}^{x} (f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s))) ds \right| \\
&\leq \left| \int_{x_0}^{x} |f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s))| ds \right| \\
&\leq L \left| \int_{x_0}^{x} |\varphi(s) - \psi(s)| ds \right| \\
&\leq L|x - x_0| \|\varphi - \psi_0\|_\infty \leq L\delta \|\varphi - \psi\|_\infty,
\end{aligned}$$

con $L\delta < 1$. Luego, $T : X \to X$ es una contracción, y entonces admite un único punto fijo $\hat{\varphi} \in X$, que constituye la única solución del (PC) en I_δ. □