Ayudantía Teoría de Integración

August 17, 2025

Contents

0.1 Ayudantia 14 de Agosto

0.1.1 Ejercicio 11 (Guia) (i)

(A) Para ver que C es cerrado, veremos que cada C_n lo se. Notamos que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f(x) := frac13x$ y $g(x) := frac23 + frac13$ son continuas y $C_n = f(C_{n-1}) \cup g(C_{n-1}) \Rightarrow C_n$ es compacto $\Rightarrow$ es cerrado, $\forall n$

(B) Para ver que es no numerable, vamos a construir una inyeccion $\Phi : X \to X$ con X no numerable. Sea entonces $X := 0, 2^{\mathbb{N}}$ y dado $w \in X$, definimos:

$$C_n(w) := \frac{C_0}{3^n} + \sum_{k=1} n \frac{w_k}{3^k}$$

Si $n = 2$: $C_2(w) = [0, \frac{1}{9}] + \frac{w_1}{3} + \frac{w_2}{9} = \begin{cases} [0, \frac{1}{9}] \\ [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \\ [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \\ [\frac{8}{9}, 1] \end{cases}$

Basicamente, $C_n(w)$ referencia siempre a alguno de los 2^n intervalos de C_n. Luego, es claro que para w fijo, $C_{n+1}(w) \subseteq C_n(w) \subseteq C_n(*)$ y $diam(C_n(w)) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Por el Teorema de interseccion de Cantor: $|\cap_{n\in\mathbb{N}} C_n(w)| = 1$. Sea $C(w)$ tal elemento. Luego, por $(*)$, $C(w) \in C$.

Sea entonces $\Phi : 0, 2^{\mathbb{N}} \to C$ tal que $\Phi(w) := C(w)$ y Φ es inyectiva (basta ver que pasa si $w^{(1)}, w^{(2)}$ difieren en una coordenada). Como $|0, 2^{\mathbb{N}}| = C$, se concluye.

(C) Si suponemos que existe $(a, b) \subset C$. SPG, $a = 0$. Consideremos $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande.

$$3^{-n} < b \Rightarrow (0, b) \nsubseteq [0, \frac{1}{3^n}] \cup [\frac{2}{3^n}, \frac{3}{3^n}] \subseteq C_n$$

Luego, $z \in (0, b) : z \notin C_n, nz \notin C$ (Contradiccion).

0.1.2 Ejercicio 11 (Guia) (ii)

Por (i), sabemos que $C = \overline{C} = \partial C$. El resultado se sigue de lo siguiente: Si (X, d) espacio metrico y $A \subseteq XD = \partial A$ (donde D son los puntos de discontinuidad de X_A.

0.1.3 Ejercicio 11 (Guia) (iii)

Consideremos entonces 1_C. Veamos sus integrales superior e inferior.

$$\underline{\int_0^1} 1_C(x)dx = sup\{L(P, 1_C) \quad : \quad P \text{ particion de } [0,1]\}$$

$L(P, 1_C) = \sum m_i(x_{i+1} - x_i) = 0$ siempre, $\forall P$.

Por lo tanto, $\underline{\int_0^1} 1_C(x)dx = 0$.

Ahora, para la integral superior:

$$\overline{\int_0^1} 1_C(x)dx = \inf\{U(P, mathds1_X) \quad : \quad P \text{ particion}\}$$