Ayudantía de Estadística para Matemáticas (no programación)

Basado en las ayudantías impartidas por - en el segundo semeste del 2025

Contents

Chapter 1

I1

1.1 Ayudantía 2

1.1.1 Probabilidad Condicional

1. **Monty Hall.**

   Proof. $p \in \{1, \dots, n\},\ A = \{p \text{ fuese auto}\},\ C = \{\text{ganar al cambiar}\}$. Queremos comparar: $\mathbb{P}(C)$ y $\mathbb{P}(A)$. Notemos

   $$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(C|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(C|A^c)\mathbb{P}(A^c)$$

   $$\mathbb{P}(A) = \frac{t}{n}; \quad \mathbb{P}(A^c) = 1 - \frac{t}{n} = \frac{n-t}{n}$$

   $$\mathbb{P}(C|A) = \frac{t-1}{n-k-1}, \quad \mathbb{P}(C|A^c) = \frac{t}{n-k-1}$$

   Entonces,

   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(C) &= \left(\frac{t-1}{n-k-1}\right)\left(\frac{t}{n}\right)\left(\frac{t}{n-k-1}\right)\left(\frac{n-t}{n}\right) \\ &= \frac{t}{n}\left(\frac{(t-1)+n-t}{n-k-1}\right) \\ &= \left(\frac{t}{n}\right)\left(\frac{n-1}{n-k-1}\right)\end{aligned}$$

   Luego,

   $$\begin{aligned}\mathcal{P}(C) \geq \mathcal{P}(A) &\Leftrightarrow \frac{t}{n}\left(\frac{n-1}{n-k-1}\right) \geq \frac{t}{n} \\ &\Leftrightarrow n-1 \geq n-k-1 \\ &\Leftrightarrow k \geq 0.\end{aligned}$$

   Hay que cambiarse! □

2. **Bella Durmiente.**

Proof. Eventos:

$$\begin{aligned}
L &= \{\text{despertó el Lunes}\}\\
M &= \{\text{despertó el martes}\}\\
D &= L \sqcup M = \{\text{despertó}\}\\
C &= \{\text{haya salido cara}\}.
\end{aligned}$$

Notar que, como $\mathbb{P}(M)\mathbb{P}(C|M) = \mathbb{P}(C \cap M) = \mathbb{P}(\underbrace{M|C}_{0})\mathbb{P}(C)$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(C|D) &= \mathbb{P}(C|L)\mathbb{P}(L) + \mathbb{P}(\underbrace{C|M}_{0})\mathbb{P}(M)\\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\\
&= \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

□

1.1.2 Independencia de Eventos

1. **Paradoja del cumpleaños.**

Proof. $E_i = \{\text{Persona } i \text{ cumple años en distinta fecha que los } i-1 \text{ anteriores}\}$. Vamos a calcular $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right)$ (la intesección es que cumplen en distinta fecha). Notemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(E_1 \cap E_2) &= \mathbb{P}(E_2|E_1)\mathbb{P}(E_1)\\
\mathbb{P}((E_1 \cap E_2) \cap E_3) &= \mathbb{P}(E_3|E_1 \cap E_2)\mathbb{P}(E_1 \cap E_2)\\
&= \mathbb{P}(E_3|E_1 \cap E_2)\mathbb{P}(E_2|E_1)\mathbb{P}(E_1).
\end{aligned}$$

esto se puede seguir por inducccíon. Luego,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right) &= \mathbb{P}(E_1)\mathbb{P}(E_2|E_1)\cdots\mathbb{P}(E_n|E_1 \cap \cdots \cap E_{n-1})\\
&= \prod_{k=1}^{k} \frac{N-(k-1)}{N}\\
&= \frac{1}{N^n} \cdot \frac{N!}{(N-n)!}\\
\Rightarrow p &= 1 - \frac{1}{N^n} \cdot \frac{N!}{(N-n)!}.
\end{aligned}$$

□

2. **Complemento de eventos independientes.** $A_1 \ldots A_n$ independientes ssi $A_n^c \ldots A_n^c$ independientes

Proof. $\Rightarrow$ Notar que si $n = 2$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_1^c \cap A_2^c) &= \mathbb{P}((A_1 \cup A_2)^c) \\
&= 1 - \mathbb{P}(A_1 \cup A_2) \\
&= 1 - (\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)) \\
&= 1 - \mathbb{P}(A_1) - \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2) \\
&= (1 - \mathbb{P}(A_1))(1 - \mathbb{P}(A_2)) \\
&= \mathbb{P}(A_1^c)\mathbb{P}(A_2^c).
\end{aligned}$$

Supongamos que se cumplepara $k < n$: $i_1 \dots i_m$ indices:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_{i1} \cap \dots \cap A_{im}) &= \prod_{j=1}^{m} \mathbb{P}(A_{ij}) \quad \text{trivial para } m < n \\
\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) &= \mathbb{P}(A_1 \cap (A_2 \cap \dots \cap A_n)) \\
&= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2 \cap \dots \cap A_n) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i).
\end{aligned}$$

$\square$

1.1.3 Un problema de Dardos

Proof. Sean

$$\begin{aligned}
D_1 &= \{\text{acierto el dardo 1}\} \\
\mathbb{P}(D_1) &= \frac{1}{3} \\
D_i &= \{\text{acierto el dardo } i\} \quad : \quad i \in \{2, 3\} \\
\mathbb{P}(D_i | D_{i-1}) &= \frac{1}{2} \\
\mathbb{P}(D_i | D_{i-1}^c) &= \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Por ejemplo,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(6) =& \mathbb{P}(D_1 \cap D_2 \cap D_3) + \mathbb{P}(D_1^c \cap D_2 \cap D_3) \\
&+ \mathbb{P}(D_1 \cap D_2^c \cap D_3) + \mathbb{P}(D_1 \cap D_2 \cap d_3^c) \\
=& \mathbb{P}(D_3|D_2)(D_2|D_1)\mathbb{P}(D_1) + (D_3|D_2)\mathbb{P}(D_2|D_1^c)(D_1^c) \\
&+ \mathbb{P}(D_3|D_2^c)\mathbb{P}(D_2^c|D_1)\mathbb{P}(D_1) + \mathbb{P}(D_3^c|D_2)\mathbb{P}(D_2|D_1)\mathbb{P}(D_1) \\
=& \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \\
&+ \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \\
=& \frac{7}{24}.
\end{aligned}$$

Luego, $\mathbb{P}(6_{\text{elementos}} = 1 - \mathbb{P}^5($ $\square$