

Ayudantía Teoría de Integración

August 27, 2025

Contents

0.1	Ayudantia 14 de Agosto	1
0.1.1	Ejercicio 11 (Guia) (i)	1
0.1.2	Ejercicio 11 (Guia) (ii)	2
0.1.3	Ejercicio 11 (Guia) (iii)	2
0.2	Ayudantía 21/08	2

0.1 Ayudantia 14 de Agosto

0.1.1 Ejercicio 11 (Guia) (i)

Proof. (A) Para ver que C es cerrado, veremos que cada C_n lo es. Notamos que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $f(x) := \frac{1}{3}x$ y $g(x) := \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x$ son continuas y $C_n = f(C_{n-1}) \cup g(C_{n-1}) \Rightarrow C_n$ es compacto \Rightarrow es cerrado, $\forall n$

(B) Para ver que es no numerable, vamos a construir una inyección $\Phi : X \rightarrow X$ con X no numerable. Sea entonces $X := [0, 2^{\mathbb{N}}]$ y dado $w \in X$, definimos:

$$C_n(w) := \frac{C_0}{3^n} + \sum_{k=1}^n n \frac{w_k}{3^k}$$

$$\text{Si } n = 2: C_2(w) = [0, \frac{1}{9}] + \frac{w_1}{3} + \frac{w_2}{9} = \begin{cases} [0, \frac{1}{9}] \\ [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \\ [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \\ [\frac{8}{9}, 1] \end{cases}$$

Basicamente, $C_n(w)$ referencia siempre a alguno de los 2^n intervalos de C_n . Luego, es claro que para w fijo, $C_{n+1}(w) \subseteq C_n(w) \subseteq C_n(*)$ y $\text{diam}(C_n(w)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Por el Teorema de intersección de Cantor: $|\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n(w)| = 1$. Sea $C(w)$ tal elemento. Luego, por (*), $C(w) \in C$.

Sea entonces $\Phi : [0, 2^{\mathbb{N}}] \rightarrow C$ tal que $\Phi(w) := C(w)$ y Φ es inyectiva (basta ver que pasa si $w^{(1)}, w^{(2)}$ difieren en una coordenada). Como $[0, 2^{\mathbb{N}}] = C$, se concluye.

(C) Si suponemos que existe $(a, b) \subset C$. SPG, $a = 0$. Consideremos $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande.

$$3^{-n} < b \Rightarrow (0, b) \not\subseteq [0, \frac{1}{3^n}] \cup [\frac{2}{3^n}, \frac{3}{3^n}] \subseteq C_n$$

Luego, $\exists z \in (0, b) : z \notin C_n$, para algun $n \Rightarrow z \notin C$ (Contradiccion). \square

0.1.2 Ejercicio 11 (Guia) (ii)

0.1.3 Ejercicio 11 (Guia) (iii)

Ahora, para la integral superior:

0.2 Ayudantía 21/08

1. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Probar que su gráfico en \mathbb{R}^2 :

$$\mathcal{G} : \{(x, f(x)) : x \in [a, b]\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

tiene medida nula.

Proof. Sea $\varepsilon > 0$, debemos contruir una familia de cuadrados en \mathbb{R}^2 que verifique $\mathcal{G} \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} Q_i$ y $\sum_{i \in \mathbb{N}} |Q_i| < \varepsilon$. Como $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces f es uniformemente continua. Así, si $\varepsilon, \exists \delta > 0$: si $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Sin pérdida de generalidad, sea $S \leq 1$ y empezamos a particionar $[a, b]$. Sea $n := \lceil \frac{b-a}{\delta} \rceil$ y consideramos la partición $\{I_j\}_{j=1}^n$ tales que $I_j := [x_j, x_{j+1}]$ con $x_0 = a, x_n = b$ y $0 < x_{j+1} - x_j \leq \delta$. Con esto, tenemos que:

- (a) Por construcción, $\text{diam}(I_j) \leq \delta, \forall 0 \leq j \leq n$;
- (b) En particular, si $x \in I_j \Rightarrow I_j \subseteq B(x, \delta), \forall j \in \{1, \dots, n\}$. Luego, en cada $j \in \{1, \dots, n\}$ elegimos $x_j \in I_j$ y cumple que $I_j \subseteq B(x_j, \delta)$. Además, $f(I_j) \subseteq B(f(x_j), \varepsilon)$.

Ahora definimos los cuadrados: Dado $(x, f(x)) \in \mathcal{G} \Rightarrow x \in I_j \subseteq B(x_j, \delta)$, para algún j y $f(x) \in B(f(x_j), \varepsilon)$. Por lo tanto, $(x, f(x)) \in B(x_j, \delta) \times B(f(x_j), \varepsilon)$. Luego, $\mathcal{G} \subseteq \bigcup_{j=1}^n B(x_j, \delta) \times B(f(x_j), \varepsilon)$. Además:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n |B(x_j, \delta) \times B(f(x_j), \varepsilon)| &= n(2\delta)(2\varepsilon) = 4\varepsilon n\delta \\ &= 4\varepsilon \lceil \frac{b-a}{\delta} \rceil \delta \\ &\leq 4\varepsilon \left(\frac{b-a}{\delta} + 1 \right) \delta \\ &= 4\varepsilon ([b-a] + \delta) \\ &\stackrel{\delta \leq 1}{\leq} 4\varepsilon (b-1+1). \end{aligned}$$

□

2. Sean $\alpha \in (0, 1]$ y $C_0 := [0, 1]$. Para cada $n \geq 1$, defina recursivamente, el conjunto C_n que resulta de retirar el intervalo central de largo $\alpha 3^{-n}$ a C_{n-1} . Por ejemplo, $C_1 := [0, \frac{3-\alpha}{6}] \cup [\frac{3+\alpha}{6}, 1]$. Defina $C_\alpha := \bigcap_{n \geq 0} C_n$.

- (a) Pruebe que C_α tiene medida nula $\Leftrightarrow \alpha = 1$. [Con esto (y mas resultados) χ_{C_α} es R-integrable $\Leftrightarrow \alpha = 1$.]

Proof. Primero, estudiemos un poco mas de la construcción de los C_α . Para construir C_n , debemos retirar 2^{n-1} intervalos de largo $\alpha 3^{-n}$. Así, si sumamos los largos de los intervalos retirados hasta n obtenemos:

$$\sum_{k=1}^n 2^{k-1}(\alpha 3^{-k}) = \frac{\alpha}{2} \sum_{n=1}^k \left(\frac{2}{3}\right)^k \frac{\alpha}{2} \left(\sum_{k=0}^n \left(\frac{2}{3}\right)^k - 1\right).$$

Por lo tanto, el largo neto al sustraer todos los intervalos es

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n 2^{k-1}(\alpha 3^{-k}) = \frac{\alpha}{2} \left[\frac{1}{1 - \frac{2}{3}} - 1 \right] = \alpha.$$

Supongamos que $\alpha < 1$. Supongamos que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \{I_j\}_{j=1}^\infty$ tal que $C_\alpha \subseteq \bigcup_{j=1}^\infty I_j$ y $\sum_{j=1}^\infty |I_j| < \varepsilon$ (i.e., C_α tiene medida nula). En particular, si consideramos $\varepsilon := 1 - \alpha > 0$, obtenemos un cubrimiento de C_α , $\{I_k\}_{k \in \mathbb{N}} : \sum_{k=1}^\infty |I_k| < 1 - \alpha$. Si ahora añadimos a esta colección todos los intervalos sustraídos, entonces puedo cubrir $[0, 1]$. Como el largo es numerablemente sub-aditivo, entonces $1 = |[0, 1]| = |I_k \cup \{\text{lo que quite}\}| < (1 - \alpha) + \alpha = 1$. □