Topología

Basado en las clases impartidas por Eduardo Oregón en el segundo semeste del 2025

Contents

Chapter 1

1.1 Clase 1 (04/08): Espacios Topológicos [12]

Definition 1.1 (sistema de vecindades). X conjunto no vacío. Si $x \in X$, consideramos $\mathcal{V}_x \subset 2^X$, tal que:

1. $\forall x \in X$, $\forall V \in \mathcal{V}_x$, $x \in \mathcal{V}_x$;
2. $\forall x \in X$, $\forall V \in \mathcal{V}$, si $V' \supset V \Rightarrow V' \in \mathcal{V}_x$;
3. Si $V_1, V_2 \in \mathcal{V} \Rightarrow V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}_x$.

El sistema de vecindades es $\{\mathcal{V}_x\}_{x \in X}$. Si $V \in \mathcal{V}_x$, V es vecindad de x.

Example.

1. (X, d) espacio métrico $\mathcal{V}_x := \{V \subset X | \exists \varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subset V\}$. Verificamos que sea sistema de vecindad.

   Proof. Verificamos $1), 2)$ y $3)$:

   1) $x \in X$, $V \in \mathcal{V}_x \Rightarrow x \in B_\varepsilon(x) \subset V$;
   2) X $x \in X$, $V \in \mathcal{V}_x$, $V' \supset V \Rightarrow x \in B_\varepsilon(x) \subset V \subset V' \Rightarrow V' \in \mathcal{V}_x$;
   3) $x \in V_1 \cap V_2, V_1, V_2 \in \mathcal{V}_x \Rightarrow B_{\varepsilon_1}(x) \subset V_1, B_{\varepsilon_2}(x) \subset V_2$
   $$\Rightarrow B_{\min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}}(x) \subset V_1 \cap V_2$$
   $$\Rightarrow V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}_x.$$

   □

2. X arbitrario, $\forall x \in X$, sea $\mathcal{V}_x = \{X\}$ es sistema de vecindades (vacuidad).
3. X arbitrario $\mathcal{V}_x = \{V \subset X \mid x \in V$ y $X \backslash V$ sea finito$\}$ (queda como ejercicio chequear que esto define un sistema de vecindades).

◇

Definition 1.2 (topología desde sistema de vecindades). Tenemos X, $\{\mathcal{V}_x\}_{x \in X}$ sistema de vecindades. Definimos, $\tau = \{U \subset X \mid x \in U \Rightarrow U \in \mathcal{V}_x\}$.

Lemma 1.3. τ cumple lo siguiente:

1. $\varnothing, X \in \tau$;
2. $U_\alpha \in \tau, \alpha \in A \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \tau$;
3. $U_1, \dots, U_n \in \tau \Rightarrow U_1 \cap \cdots \cap U_n \in \tau$.

τ es la topología inducida por $\{\mathcal{V}_x\}$. Elementos de τ (subconjuntos de X) se llamarán abiertos.

1.2 Clase 2 (06/08): Topología, Base [12, 13]

Proof. (último lema de la clase anterior)

1. $\varnothing \in \tau$ por vacuidad.

$$\begin{aligned} X \in \tau : x \in X \Rightarrow \exists V \in \mathcal{V}_x \quad & (1) x \in V; (2) x \in V \subset X \\ \Rightarrow X \in \mathcal{V}_x. \quad & \forall x : X \in \tau \end{aligned}$$

2. Tomar $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $U_\alpha \in \tau$, $\mathcal{U} = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Si $x \in \mathcal{U} \Rightarrow x \in U_\alpha \in \mathcal{V}_x$ para algún α. Como $U_\alpha \in \tau \Rightarrow U_\alpha \in \mathcal{V}_x$. Luego, si $x \in U_\alpha \subset \mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{U} \in \mathcal{V}_x$, $\forall x \in \mathcal{U}$. Por lo tanto, $\mathcal{U} \in \tau$.
3. Tomamos $U_1, \dots, U_n \in \tau$, $\mathcal{U} = U_1 \cap \cdots \cap U_n$ y $x \in \mathcal{U}$. Luego, $x \in U_i \quad \forall i$. Como $U_i \in \tau \Rightarrow U_i \in \mathcal{V}_x, \quad \forall i$. Por inducción (con las intersecciones), podemos afirmar que $\mathcal{U} \in \mathcal{V}_x$, $\forall x \in \mathcal{U}$. Por lo tanto, $\mathcal{U} \in \tau$.

□

1.2.1 Topología

Definition 1.4 (topología)**.** X conjunto no vacío, $\tau \subset 2^X$ es una topología si cumple:

1. $\varnothing, X \in \tau$;
2. $U_\alpha \in \tau,\ \alpha \in A \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \tau$;
3. $U_1, \dots, U_n \in \tau \Rightarrow U_1 \cap \cdots \cap U_n \in \tau$.

Remark. Se utilizará la siguiente notación:

- (X, τ) se llama espacio topológico.
- $U \in \tau \Rightarrow U$ se llama abierto (con respecto a la topología).

Lemma 1.5. τ topología en $X \Rightarrow$ Inducida por un único sistema de vecindades.

Proof. Para $x \in X$, definir $\mathcal{V}_x = \{V \subset X \mid \exists U \in \tau \text{ con } x \in U \subset V\}$. Verificamos que $\{\mathcal{V}_x\}_x$ es sistema de vecindades:

1. La definición implica $V \in \mathcal{V}_x \Rightarrow x\ (\in U \subset)\ \in V$;
2. Si $V \in \mathcal{V}_x$ y $V' \supset V \Rightarrow (V \in \mathcal{V}_x)\ x \in U \subset\ (U \in \tau)$
$$\Rightarrow x \in U \subset V' \Rightarrow V' \in \mathcal{V}_x;$$
3. Tomar $V_1, V_2 \in \mathcal{V}_x \Rightarrow x \in U_1 \subset V_1, \quad x \in U_2 \subset V_2$ con $U_1, U_2 \in \tau$
$$\Rightarrow x \in \underbrace{U_1 \cap U_2}_{\in \tau} \subset V_1 \cap V_2 \Rightarrow V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}_x;$$

(falta demostrar unicidad). □

Example (de espacios topológicos).

1. (Topología métrica): (X, d) espacio métrico. Abierto es $U \in X$ tal que $\forall x \in U, \exists \varepsilon > 0$ tal que $x \in B_\varepsilon(x) \subset U$.
   (a) $X = \mathbb{R}^n$, $d((x_i),(y_i)) = \sqrt{sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$. Así, se obtiene la topología estándar.
   (b) X arbitrario, d métrica discreta $d(x,y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y. \end{cases}$ Así, se obtiene la topología discreta: $\tau = 2^X$.
2. (Topología indiscreta): X arbitrario, $\tau = \{\varnothing, X\}$;
3. (Topología cofinita): X arbitrario, $\tau_{cof} = \{U \subset X \mid X \backslash U \text{ es finito}\} \cap \{\varnothing\}$ (queda como ejercicio verificar que es topología).

◇

1.2.2 Base de una topología

Una base es un subconjunto "manejable" de τ que la describe completamente!

Definition 1.6 (base). X es conjunto. $\mathcal{B} \subset 2^X$ es base para alguna topología si:

1. $\forall x \in X, \exists B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$ $\left(\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X\right)$.
2. $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}, \forall x \in B_1 \cap B_2, \exists B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Definition 1.7 (topología inducida). La topología inducida por la base $\mathcal{B}$ en X es:

$$\tau = \{U \subset X \mid \forall x \in U, \exists B \in \mathcal{B} \text{ tal que } x \in B \subset U\}.$$

Note. $\mathcal{B} \subset \tau$.

Lemma 1.8. τ, definido arriba, es una topología.

Example. (X, d) espacio métrico $\Rightarrow \mathcal{B} = \{B_\varepsilon(x) \mid x \in X, \varepsilon > 0\}$ es base de la topología métrica. $\diamond$

1.3 Clase 3 (08/08): Bases, Topología producto [13,15]

Proof. (lema 1.8)

1. $\varnothing, X \in \tau$: $\varnothing \in \tau$ por vacuidad y $X \in \tau$ por propiedad (1) de $\mathcal{B}$.
2. τ cerrado bajo unión: $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ colección con $U_\alpha \in \tau$, $\mathcal{U} = \bigcup_\alpha U_\alpha$.

$$\begin{aligned} \text{Si } x \in \mathcal{U} &\Rightarrow x \in U_\alpha \text{ para algún } \alpha \\ &\Rightarrow x \in B \subset U_\alpha \text{ para algún } B \in \mathcal{B} \\ &\Rightarrow x \in B \subset \mathcal{U}. \end{aligned}$$

   Por lo tanto, $\mathcal{U} \in \tau$.

3. τ cerrado bajo intersección finita: $U_1, \ldots, U_n \in \tau, \mathcal{U} = U_1 \cap \cdots \cap U_n$. Sea $x \in \mathcal{U} \Rightarrow x \in U_i \; \forall i \; (U_i \in \tau) \Rightarrow x \in B_i \subset U_i \; \forall \, i, B_i \in \mathcal{B}$. Propiedad (2) implica $x \in B \subset B_1 \cap \cdots \cap B_n \subset U_1 \cap \cdots \cap U_n = \mathcal{U}$. Por lo tanto, $\mathcal{U} \in \tau$.

$\square$

Note. Si B base genera $\tau \Rightarrow B \subset \tau$.

Definition 1.9 (topología generada)**.** τ topología está generada por una base B sin B es base, y τ es topología generada por B.

Utilidad: Dada τ topología a estudiar, queremos encontrar base B que la describa.

Example. (X, d) espacio métrico, $\mathcal{B} = \{B_\varepsilon(x) \mid \varepsilon > 0, x \in X\}$ es base para la topología métrica. $\diamond$

Proof. Probamos que B es base.

1. Notar $X = \bigcup_{x \in X} B_1(x)$. Por lo tanto, $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$.
2. $B_1, B_2 \in \mathcal{B}, B_1 = B_{\varepsilon_1}(x_1), B_2 = B_{\varepsilon_2}(x_2)$. Sea $x \in B_1 \cap B_2$. Queremos encontrar $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subset B_1 \cap B_2$. Por desigualdad triangular, tenemos que $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1 - d(x, x_1), \varepsilon_2 - d(x, x_2)\}$ sirve.

$\square$

Note. 1. Una base no es necesariamente una topología ((1) y (2) pueden fallar).

2. Si B es base y τ topología, $B \subset \tau \not\Rightarrow \tau$ es generada por B.

Example. Topología del límite inferior en $\mathbb{R}$: $B_l = \{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ (se deja como ejercicio demostrar que B_l es base). ◇

Definition 1.10 (topología del límite inferior). B_l genera la topología del límite inferior τ_l.

Remark.

1. τ_l no es τ_{std} ($[a, b)$ abierto en τ_l pero no en τ_{std}
2. $\tau_{std} \subset \tau_l$ (la demostración de esto queda como ejercicio).
3. (Intuición): Si $0 \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$ (para τ_{std}, y cerda de 0 si $|y| < \varepsilon$). Para τ_l, y cerca de 0, si $y \in [0, \varepsilon)$ ($0 \leq y < \varepsilon$ para $\varepsilon > 0$ chiquito).

1.3.1 Comparación de topologías

Definition 1.11 (topologías finas). τ, τ' topologías en X, decimos que τ' es más fina que τ si $\tau' \supset \tau$. Decimos que τ y τ' son comparables si $\tau' \supset \tau$ o $\tau \supset \tau'$.

Example. τ_l es más fina que τ'. ◇

Example. $\forall \tau$ topología en X, $\{\varnothing, X\} \subset \tau \subset 2^X$. Donde $\{\varnothing, X\}$ es llamada la topología indiscreta (todos cercanos entre sí) y 2^X la topología discreta (todos lejanos entre sí). ◇

En conclusión, si τ' es más fina que τ, los puntos están más lejanos respecto a τ' que a τ

1.4 Clase 4 (11/08): Topología producto [15] e inducida [16]

Lemma 1.12. $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ bases en X que generan la topología τ, τ' respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned} \tau' \supset \tau &\Leftrightarrow \text{(todo elemento de } \mathcal{B} \text{ está en } \tau'); \\ &\Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{B}, B \text{ es unión de elementos de } \mathcal{B}'; \\ &\Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{B}, \forall x \in B, \exists B' \in \mathcal{B}' \text{ tal que } x \in B' \subset B. \end{aligned}$$

Lemma 1.13. $\mathcal{B}_{X \times Y} := \{U \times U' \mid U \text{ abierto en } X, U' \text{ abierto en } Y\}$ es una base para una topología.

Definition 1.14 (topología producto). Topología producto en $X \times Y$ es la generada por $\mathcal{B}_{X \times Y}$.

Proof. (lemma 1.13.)

1. Como $X \times Y \in \mathcal{B}_{X\times Y} \Rightarrow \bigcup_{B\in\mathcal{B}_{X\times Y}} B = X \times Y$.

2. Tomar $B_1 = U_1 \times U_1' \in \mathcal{B}_{X\times Y}, B_2 = U_2 \times U_2' \in \mathcal{B}_{X\times Y}, (x,y) \in B_1 \cap B_2$ (U_1, U_2 abiertos en X y U_1', U_2' abiertos en Y). Notar que:

$$B_1 \cap B_2 = (U_1 \times U_1') \cap (U_2 \times U_2') = \underbrace{(U_1 \cap U_2)}_{\text{abto. en } X} \times \underbrace{(U_1' \cap U_2')}_{\text{abto. en } Y} \in \mathcal{B}_{X\times Y}.$$

□

Note. Misma demostración (salvo modificaciones esperables) implica que si $\mathcal{B}_X$ es base de X, $\mathcal{B}_Y$ base de Y, $\mathcal{B}'_{X\times Y} := \{B \times B' \mid B \in \mathcal{B}_X, B' \in \mathcal{B}_Y\}$ es base y genera la misma topología generada por $\mathcal{B}_{X\times Y}$.

Example (importante). $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Propiedad: topología estándar de $\mathbb{R}^2$ (métrica euclidiana) es igual a la topología producto en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (cada uno con su topología estándar).

- Topología estándar en $\mathbb{R}^2$: generada por base $\mathcal{B} = \{B_\varepsilon(x,y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2, \varepsilon > 0\}$.

- Topología producto en $\mathbb{R}^2$: generada por base $\mathcal{B}' = \{(a,b) \times (c,d) \mid a < b, c < d\}$.

◇

Exercise. Verificar para $\mathbb{R}^n$.

Definition 1.15 (topología inducida). $\tau|_Y := \{Y \cap U \mid U \in \tau\}$ es topología en Y. La llamamos topología en Y inducida por X.

Proof. (topología inducida es topología)

1. $\varnothing = \varnothing \cap Y, Y = X \cap Y$.

2. Si $U_\alpha \in \tau|_Y, \alpha \in A \Rightarrow U_\alpha = U_\alpha' \cap Y$ con $U_\alpha' \in \tau \Rightarrow \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha = \bigcup_{\alpha\in A}(U_{\alpha\in A} \cap Y) = \left[\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha\right] \times Y \in \tau|_Y$.

3. $U_1, \dots, U_n \in \tau|_Y, U_i = U_i' \cap Y \Rightarrow U_1 \cap \dots \cap U_n = (U_1' \cap Y) \cap \dots \cap (U_n' \cap Y) = (U_1' \cap \dots \cap U_n') \cap Y \in \tau|_Y$.

□

Lemma 1.16. $\mathcal{B}|_Y := \{Y \cap B \mid B \in \mathcal{B}\}$ es base para la topología en Y inducida por X.

Remark. Cuidado: La noción de abierto depende de la topología a especificar.

Example. En $X = \mathbb{R}, Y = [0,1] \cup (2,3) \cup \{4\}$. Notar que:

- Y es abierto en Y, pero no es abierto en X.
- $[0,1]$ también abierto en $Y : [0,1] = Y \cap (-1,2)$.
- $\{4\}$ también abierto en $Y : \{4\} = Y \cap (3,5)$.

$\diamond$

Note. Si $U \subset Y$ es abierto en $X \Rightarrow$ abierto en Y.

Lemma 1.17. $Y \subset X, \tau|_Y \subset \tau \Leftrightarrow Y$ es abierto en X.

Proposition 1.18. X, Y espacios topológicos, $A \subset X, B \subset Y$.

En $A \times B \to$ topología inducida desde $X \times Y$ (con topología producto)
$\to$ topología producto desde A y B (con topología inducida por X, Y respectivamente).

Estas topologías son la misma.

Proof. Elemento de topología primera: $U = U' \cap A \times B$
Elemento de topología segunda: U es unión de productos $V \times V'$ con V abierto en A, V' abierto en B. Notar que $V \times V' = (W \cap A) \times (W' \cap B) = (W \times W') \cap A \times B$. $\square$

1.5 Clase 5 (13/08): Cerrados, clausura, puntos límites [17]

Definition 1.19 (conjunto cerrado). X espacio topológico, $C \subset X$ es cerrado si $X \backslash C$ es abierto.

Lemma 1.20.

1. $X, \varnothing$ son cerrados;
2. Si $C_\alpha \subset X$ cerrados, $\alpha \in A \Rightarrow \bigcap_\alpha C_\alpha$ es cerrado;
3. Si $C_1, \ldots, C_n$ cerrados, entonces $C_1 \cup \cdots \cup C_n$ es cerrado.

Proof.

1. $X = X \backslash \varnothing,\ \varnothing = X \backslash X$;

2. $C_\alpha = \bigcap_{\alpha\in A} C_\alpha \Rightarrow X\backslash C = X\backslash \bigcap_{\alpha\in A} C_\alpha = \underbrace{\bigcup_{\alpha\in A} (\overbrace{X\backslash C_\alpha}^{\text{abto}})}_{\text{abto}}$;

3. $C = C_1\cup\cdots\cup C_n \Rightarrow X\backslash C = X\backslash(C_1\cup\cdots\cup C_n) = \underbrace{(\overbrace{X\backslash C_1}^{\text{abto}}) \cap\cdots\cap (\overbrace{X\backslash C_n}^{\text{abto}})}_{\text{abto}}$.

$\square$

Example.

1. $X = \mathbb{R}$, $[a, b]$ es cerrado $(\mathbb{R}\backslash[a, b] = (-\infty, a) \cup (b, \infty))$;

2. (X, d) espacio métrico (+ topología métrica) $\Rightarrow \overline{B_\varepsilon}(x)$ es cerrado. Luego, $X\backslash\overline{B_\varepsilon}(x) = \bigcup_{y\in X\backslash\overline{B_\varepsilon}(x)} B_{d(x,y)-\varepsilon}(y)$ (abierto en topología métrica);

3. X con la topología discreta $\Rightarrow$ todo subconjunto de X es abierto y cerrado!

$\diamond$

Definition 1.21 (cerrado topología inducida)**.** X espacio topológico, $Y \subset X$ (con la topología inducida), $C \subset Y$ es cerrado en Y si es cerrado en la topología inducida.

Lemma 1.22. C es cerrado en Y si y solo si $C = C' \cap Y$ con C' cerrado en X.

Proof.
$$\begin{aligned} C \subset Y \text{ es cerrado en } Y &\Leftrightarrow Y\backslash C \text{ es abierto en } Y \\ &\Leftrightarrow Y\backslash C = U \cap C \text{ con } U \subset X \text{ abierto} \\ &\Leftrightarrow C = (X\backslash U) \cap Y = C' \cap Y, \text{ con} \\ &\quad\; C' = X\backslash U \text{ cerrado.} \end{aligned}$$
$\square$

Definition 1.23 (clausura e interior)**.** X espacio topológico, $A \subset X$:

1. El interior de A es $\mathring{A}$ = unión de todos los abiertos contenidos en A;

2. La clausura de A es $\overline{A}$ = intersección de todos los cerrados que contienen A.

Remark.

1. $\mathring{A}$ es abierto, $\overline{A}$ es cerrada, $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$;

2. A es abierto si y solo si $\mathring{A} = A$. A es cerrado si y solo si $\overline{A} = A$;

3. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$;

4. El interior $\mathring{A}$ es el abierto mas grande contenido en A y la clausura $\overline{A}$ es el cerrado mas pequeño que contiene a A.

Proposition 1.24. X espacio topológico, $A \subset X$ cualquiera, $x \in X$.

$$\begin{aligned} x \in \overline{A} &\Leftrightarrow \forall U \text{ abierto conteniendo a } X\text{, se tiene } A \cap U \neq \varnothing \qquad (*) \\ &\Leftrightarrow \text{ toda vecindad de } x \text{ interseca a } A \\ &\Leftrightarrow A \text{ contiene puntos arbitrariamente cercanos a } X \text{ (según la topología).} \end{aligned}$$

Corollary 1.25. $C \subset X$ es cerrado si y solo si $\forall x \in X$, si toda vecindad de x contiene un punto de C, entonces $x \in X$.

Proof. (proposición 1.24)
$\boxed{\Leftarrow}$ Suponer que $x \notin \overline{A}$. Entonces $\exists C$ cerrado con $A \subset C$ y $x \notin C$. Luego, tomar $U := C \backslash C$ abierto. Entonces, $A \cap U = \varnothing$ y $x \in U$. Es decir, negamos $(*)$.
$\boxed{\Rightarrow}$ Negamos $(*) \Rightarrow \exists U$ abierto con $x \in U$ y $U \cap A = \varnothing$. Luego, $C = X \backslash U$ cerrado con $A \subset C$ y $x \notin C$. Entonces, $x \notin A$. □

Definition 1.26 (puntos de acumulación)**.** $A \subset X$. Decimos que $x \in X$ es punto límite/de acumulación de A si $\forall$ U abierto conteniendo a x, se tiene que $U \cap (A \backslash \{x\}) \neq \varnothing$. Escribimos $A' := \{\text{puntos límite de } A\}$.

Example. En $\mathbb{R}$, tenemos lo siguiente:

A	$\mathring{A}$	$\overline{A}$	A'
(a, b)	(a, b)	$[a, b]$	$[a, b]$
$[a, b)$	(a, b)	$[a, b]$	$[a, b]$
$[a, b]$	(a, b)	$[a, b]$	$[a, b]$
$[0, 1] \cup \{2\}$	$(0, 1)$	$[0, 1] \cup \{2\}$	$(0, 1)$

Notar que 2 no es punto de acumulación. ◇

1.6 Clase 6 (18/08): Espacios Hausdorff, convergencia [17]

Remark. $x \in A' \Leftrightarrow x \in \overline{A \setminus \{x\}}$.

Lemma 1.27. $\forall$ $A \subset X$, $\overline{A} = A \cup A'$.

Proof. $\boxed{\supset}$ Notar que $A \subset \overline{A}$. Si $x \in A' \Rightarrow x \in \overline{A \setminus \{x\}} \subset \overline{A}$ $(*)$. Notar que $(*) A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$. Por lo tanto $A' \subset \overline{A}$. Entonces, $A \cup A' \subset \overline{A}$.
$\boxed{\subset}$ ($\overline{A} \subset A \cup A'$, equiv: $\overline{A} \setminus A \subset A'$) Si $x \in \overline{A} \setminus A$. Entonces, $x \notin A$ y $\forall\, U \ni x$ abierto se tiene $A \cap U \neq \varnothing$. Como $x \notin A \Rightarrow (A \setminus \{x\}) \cap U \neq \varnothing$. Entonces, $x \in A'$. □

Remark. A' no es necesariamente cerrado.

Example. $X = \{a, b\}$; $\tau = \{\varnothing, X\}$ (a, b indistinguibles desde el punto de vista de τ). $A = \{b\} \Rightarrow A' = \{b\}$ (no es cerrado). $a \notin A' \Leftrightarrow a \notin \overline{A \setminus \{a\}} = \overline{\varnothing} = \varnothing$. $b \in A \Leftrightarrow b \in \overline{A \setminus \{b\}} = \overline{\{a\}} = \{a, b\}$. ◇

Problemas:

- Subconjuntos finitos no tienen topología discreta;
- Subconjuntos finitos no son cerrados.

Lemma 1.28. Si X es espacio topológico arbitrario. Son equivalentes:

1. Todos los subconjuntos finitos de X tienen la topología discreta.
2. Todos los subconjuntos finitos de X son cerrados.

Definition 1.29 (espacios T_1 o Frechet)**.** Un espacio topológico X es T_1 (cumple el axioma T_1) si sus subconjuntos finitos son cerrados.

Example. X con la topología indiscreta NO es T_1 si $\#X \geq 2$. ◇

Example. X con topología cofinita es T_1. En la topología

$$\{\text{subconjuntos cerrados}\} = \{\text{conjuntos finitos}\}$$

◇

Lemma 1.30. X es T_1, $A \subset X \Rightarrow A'$ es cerrado.

Proof. (Queremos $\overline{A'} = A'$, i.e. $\overline{A'} \setminus A' = \varnothing$) Suponer que $x \in \overline{A'}$, $x \notin A'$. Si $x \notin A'$, entonces $\exists\, U$ abierto con $x \in U$ y $U \cap A \subset \{x\}$. Si $x \in \overline{A'}$, entonces $A' \cap U \neq \varnothing$. Luego, $\exists\, y \in U \cap A'$ $(y \neq x)$. Como X es T_1, entonces $\{x\}$ es cerrado. Luego, $X \setminus \{x\}$ es abierto, y con ello tenemos que $U \setminus \{x\}$ es abierto. Si $V = U \setminus \{x\}$ abierto que contiene a y $(y \in A')$, entonces V contiene puntos de A, distintos de y. Luego, $\exists\, z \in A \cap V$. Así, $z \in A \cap U$ y $z \neq x$. Contradicción! ※ □

Definition 1.31 (espacios T_2 o Haussdorff)**.** Un espacio topológico X es T_2 (o Hausdorff), si $\forall\, x \neq y$ en X existen $U, U' \subset X$ abiertos <u>disjuntos</u> con $x \in U$, $y \in U'$.

Example. X con la topología cofinita, con $\#X = \infty$ es T_1 pero no es Hausdorff. Veamos que esto es así. Si $x \neq y \in X,\ x \in U,\ y \in U'$ abiertos ($X \setminus U,\ X \setminus U'$ finitos), entonces $(X \setminus U) \cup (X \setminus U')$ finito. Luego, $X \setminus (U \cap U')$ finito. Así, $U \cap U'$ infinito, por lo que $U \cap U'$ no puede ser disjunto. $\diamond$

Lemma 1.32. X Hausdorff $\Rightarrow X$ es T_1.

kk

Proof. (X es $T_1 \Leftrightarrow$ subconjuntos finitos son cerrados $\Leftrightarrow$ singlietons son cerrados) $\to$ (veremos el último si y solo si) Sea $x \in X$, queremos que $X \setminus \{x\}$ sea abierto. Si $y \neq x$, dado que X es Hausdorff, $\exists\ U_y, U'_y$ abiertos disjuntos con $y \in U_y,\ x \in U'_y$. Luego, $x \notin U_y$. Por lo tanto, $X \setminus \{x\} = \bigcup\limits_{y \neq x} U_y$ es abierto. $\square$

Example. (X, d) espacio métrico, X es Hausdorff con la topología métrica. $\diamond$

Corollary 1.33 (secreto)**.** Existen topologías que no vienen de métricas.

Proof (del ejemplo)**.** Para la topología métrica, bolas abiertas son abiertos. Si $x \neq y$, entonces $U = B_{\frac{d(x,y)}{2}}(x),\ U' = B_{\frac{d(x,y)}{2}}(y)$. $\square$

En X con la topología cofinita, $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ infinito contable. Definimos $y_n = x_n$ con $n \geq 1$ (cada elemento de X aparece exactamente una vez). Cada abierto $\varnothing \neq U \subset X$ contiene a $y_n\ \forall n \geq \mathbb{N}$ (N depende de U). (próxima clase: $y_n \to x\ \forall x \in X$).

1.7 Clase 7 (20/08):

Remark. $\mathcal{B} \subset \tau \Rightarrow$ quizás $\tau_{\mathcal{B}} \neq \tau$. Solo es cierto $\tau_{\mathcal{B}} \subset \tau$.

Remark. Existe una noción más débil (T_0): $\forall\ x \neq y \in X,\ \exists\ U$ abierto tal que, o bien $x \in U,\ y \notin U$ o $y \in U,\ x \notin U$. Se puede demostrar que $T_1 \Rightarrow T_0$. Además, $\exists\ X,\ T_0$, no T_1, tal que 1.30 se cumple.

Definition 1.34 (convergencia de suceciones)**.** X espacio topológico, $(X_n)_n$ sucesión en $X,\ x \in X$. Decimos que x_n converge a x (con respecto a la topología) $[x_n \to x]$ si: $\forall\ U$ abierto con $x \in U$ existe N tal que $n \geq N$ implica $x_n \in U$.

Note. Si $\mathcal{B}$ base para topología en $X,\ x_n \to x$ equivale a: $\forall B \in \mathcal{B}$ con $x \in B,\ \exists N$ tal que $n \geq N$ se tiene $x_n \in B$.

Example. (X, d) espacio métrico. $x_n \to x$ (topología métrica) $\longleftrightarrow x_n \to x$ (análisis real): $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N$ tal que $n \geq N \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$ ($x_n \in B_\varepsilon(x)$). $\diamond$

Example. X con la topología indiscreta ($\tau = \{\varnothing, X\}$). Entonces, para cualquier suceción $(x_n)_n$, para cualquier $x \in X,\ x_n \to x$ (solo se debe verificar $U = X$).

$\diamond$

Example. X con la topología discreta, entonces $(x_n \to x) \longleftrightarrow x_n = x$ para todo $n \gg 0$ [Caso $U = \{x\}$]. $\diamond$

Example. X infinito contable con topología cofinita [T_1, no T_2], $X = \{a_1, a_2, \dots\}$. Si $x_n = a_n \Rightarrow x_n \to x$ para todo $x \in X$ [Si U abierto, $x \in U \not\Rightarrow U = X \setminus \{a_{i_1}, \dots, a_{i_k}\}(i_1 < \cdots < i_k) \Rightarrow n \geq N = i_k + 1$ implica $x_n \to x$]. $\diamond$

Lemma 1.35. Si T_2, $(x_n)_n$ sucesión con $x_n \to x$, $x_n \to y$, entonces $x = y$.

Proof. Si $x \neq y$, dado que es T_2, entonces existen U, U' abiertos disjuntos con $x \in U$, $y \in U'$. Si $x_n \to x$, entonces existe N_1 tal que $n \geq N_1$ implica $x_n \in U$. Si $x_n \to y$, entonces existe N_2 tal que $n \geq N_2$ implica $x_n \in U$. Por lo tanto $n \geq N_1$ y $n \geq N_2$, entonces $x_n \in U \cap U'$. Contradicción! ※ $\square$

Continuidad: $f : X \to Y$, X, Y espacios topológicos.

- [No Def]: Si $x_n \to x$ en $X \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$ en Y.

Definition 1.36 (continuidad)**.** f es continua si $\forall\, U \subset Y$ abierto, se tiene $f^{-1}(U)$ es abierto en X.

Example. Si (X, d), (Y, d') son espacios métricos, entonces $f : X \to Y$ continua (respecto a topologías métricas) $\longleftrightarrow f(\varepsilon - \delta)$ continua: $\forall\, x \in X$, $\forall\, \varepsilon > 0$; $\exists\, \delta > 0$ tal que $d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$. $\diamond$

Remark. $d(x, y) < \delta$ es lo mismo que pedir $y \in B_\delta(x)$. Similarmente $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$ es lo mismo que $\delta(y) \in B_\varepsilon(f(x))$, $y \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(x))$.

Lemma 1.37. $X \xrightarrow{f} Y$, $\mathcal{B}'$ base de Y, $\mathcal{B}$ base de X. Entonces

$$\begin{aligned} f \text{ continua} &\Leftrightarrow [\text{Si } B' \in \mathcal{B}' \Rightarrow f^{-1}(B') \text{ es abierto} \\ &\Leftrightarrow \text{Si } B' \in \mathcal{B}',\ \forall\, y \in f^{-1}(B'),\ \text{existe } B \in \mathcal{B} \text{ con } y \in B \subset f^{-1}(B'). \end{aligned}$$

Lemma 1.38. Si $f : X \to Y$ continua (hay top. dadas). Entonces, si $x_n \to x$ en $X \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$ en Y.

Proof. Suponer $x_n \to x$ en X. Queremos que $f(x_n) \to f(x)$ en Y. Tomar $U \subset Y$ abierto con $f(x) \in U$. Luego, f continua implica que $f^{-1}(U)$ abierto con $x \in f^{-1}(U)$. Si $x_n \to x$, entonces existe N tal que $n \geq N$ implica $x_n \in f^{-1}(U)$. Entonces, existe N tal que $n \geq N$ implica $f(x_n) \in U$. Por lo tanto, $f(x_n) \to f(x)$. $\square$