Ayudantía Topología

Contents

Chapter 1

Ayudantía 1 (12/08)

1. Sea X un conjunto infinito.

   (a) Sea $p \in X$ un punto arbitrario en X, demuestre que

   $$\tau_1 = \{U \subset X \ : \ U = \varnothing \text{ o } p \in U\}$$

   es una topología en X. Esta es conocida como **topología del punto particular**.

   > **Proof.**
   > - Claramente $\varnothing, X \in \tau_1$.
   > - $U_\alpha \in \tau_1 \Rightarrow p \in U_\alpha \Rightarrow p \in \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \Rightarrow \bigcup U_\alpha \in \tau_1$.
   > - $U_1, \ldots, U_n \in \tau_1 \Rightarrow p \in U_i \Rightarrow p \in \bigcap_{i=1}^{n} U_i \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \tau_1$.
   >
   > $\square$

   (b) Sea $p \in X$ un punto arbitrario en X, demuestre que

   $$\tau_2 = \{U \subset X \ : \ U = X \text{ o } p \notin U\}$$

   es una topología en X. Esta es conocida como **topología del punto excluido**.

   > **Proof.**
   > - Claramente $\varnothing, X \in \tau_2$ $(p \notin \varnothing)$.
   > - $U_\alpha \in \tau_2 \Rightarrow p \notin U_\alpha \Rightarrow p \notin \bigcup U_\alpha \Rightarrow \bigcup U_\alpha \in \tau_2$.
   > - $U_1, \ldots, U_n \in \tau_2 \Rightarrow p \notin U_i \Rightarrow p \notin \bigcap_{i=1}^{n} U_i \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \tau_2$.
   >
   > $\square$

   (c) Determine cuando

   $$\tau_3 = \{U \subset X \ : \ U = X \text{ o } X \setminus U \text{ es infinito}\}$$

   es una topología en X.

Proof. Si $p \in X \Rightarrow \{p\}^c$ es infinito $\Rightarrow \{p\}$ es abierto. Si τ_3 es topología y $q \in X$, entonces

$$\bigcup_{p \neq q} \{p\} = X \setminus \{q\} \Rightarrow (X \setminus \{q\})^c = \{q\}$$

es infinito. Contradicción! ※ Es decir, τ_3 no es topología. $\square$

2. Sea $K = \{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ y $\mathcal{B}_K$ la colección de intervalos abiertos $(a, b) \subset \mathbb{R}$ y de conjuntos de la forma $(a, b) - K$. Es decir,

$$\mathcal{B}_K = \{(a, b) \ : \ a, b \in \mathbb{R}\} \cup \{(a, b) - K\}.$$

(a) Pruebe que $\mathcal{B}_K$ es una base para X. Denotamos por $\mathbb{R}_K$ la topología generada.

Proof.

- $t \in \mathbb{R}, \ \exists (a, b) \subset \mathbb{R} \ : \ t \in (a, b) \subset \mathcal{B}_K$;
- Notar que la intersección de elementos de la base es un elemento de la base

$$\begin{aligned}
(a, b) \cap (c, d) &= (c, b) \\
(a, b) - K \cap (c, d) &= (c, b) - K \\
(a, b) - K \cap (c, d) - K &= (c, b) - K.
\end{aligned}$$

$\square$

(b) Considere las siguientes topologías en $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= \text{ topología estándar en } \mathbb{R} \\
\tau_2 &= \text{ topología } \mathbb{R}_K \\
\tau_3 &= \text{ topología cofinita en } \mathbb{R} \\
\tau_4 &= \text{ topología con } (-\infty, a) = \{x \ : \ x < a\} \text{ como base.}
\end{aligned}$$

Determine, para cada una de estas topologías, cual de las otras contiene.

3. Sea X conjunto, denotamos por $\tau_{\text{cof}}(X)$ a la topología cofinita en X. Demuestre que

$$\tau_{\text{cof}}(X \times Y) \subseteq \tau_{\text{cof}}(X) \times \tau_{\text{cof}}(Y),$$

es decir, la topología producto de las topologías cofinitas es más finita que la topología cofinita en $X \times Y$. De un ejemplo en que estas topologías no son iguales.

Proof. Sea $U \in \tau_{\text{cof}}(X \times Y)$ Entonces,

$$U = X \times Y - \{(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)\} = \bigcap_{i=1}^{n} X \times Y - \{(a_i, b_i)\}.$$

Queremos ver que $X \times Y - \{(a,b)\}$ es abierto en $\tau_{\text{cof}}(X) \times \tau_{\text{cof}}(Y)$. Notar que $\mathcal{B} = \{U \times V \ : \ U \in \tau_{\text{cof}}(X), V \in \tau_{\text{cof}}(Y)\}$ es una base para $\tau_{\text{cof}}(X) \times \tau_{\text{cof}}(Y)$. Sea $(c,d) \in X \times Y - \{(a,b)\}$. Supongamos que $c \neq a$.

$$(c,d) \in \underbrace{X \setminus \{a\}}_{\in \tau_{\text{cof}}(X)} \times \underbrace{Y}_{\in \tau_{\text{cof}}(Y)} \subseteq X \times Y - \{(a,b)\}.$$

X infinito. Luego,

$$W = X \times Y \setminus \{a\} \in \tau_{\text{cof}}(X) \times \tau_{\text{cof}}(Y).$$

Pero $W^c = X \times \{a\}$ no es finito. Por lo tanto $W \in \tau_{\text{cof}}(X \times Y)$. Entonces $\tau_{\text{cof}}(X \times Y) \subsetneq \tau_{\text{cof}}(X) \times \tau_{\text{cof}}(Y)$. $\square$