Ayudantías Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

August 29, 2025

Contents

Chapter 1

1.1 Ayudantía 2 (18/08)

1. Considere la ecuación canónica

$$y^n = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \tag{1}$$

Proof. Como y es solución de (1), en particular $y \in C^n(I)$. Por lo tanto la función $t \mapsto (t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$, y luego $f(t, y(t), \dots, y^{(n-1)}(t) \in C^1(I)$. Por lo tanto $y \in C^{n+1}(I)$.
$\boxed{\text{Por inducción en } k \in \mathbb{N}}$ **Caso base:** Facil!
Paso inductivo: Suponer que $\exists\ k \in \mathbb{N}$ tal que se cumple lo anterior y que $f \in C^{k+1}(\mathbb{R}^n)$. Por hipótesis, $y \in C^{n+k}(I)$, y por lo tanto $g(t) = (t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \in C^{n+k-(n-1)}(I) = C^{k+1}(I; \mathbb{R}^n)$. Luego , la composición $(y^{(n)}(t) =)\ f \circ g(t) \in C(I)^{k+1}$, por lo que $y \in C^{n+k+1}(I)$. Concluimos que si $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, entonces $y \in C^\infty(I)$. □

2. Considere el sistema

$$(*) \begin{cases} y''(t) + y(t)^2 = 0 \quad \forall\ t \in [0,1]; \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases}$$

Demuestre que si y es una solución no trivial de $(*)$, entonces $y(t) > 0\ \forall t \in (0,1)$.

Proof. Notemos que $y''(t) = -y(t)^2 \leq 0$. Entonces, y es convava; es decir, $\forall a, b \in [0,1]$, y $\forall s \in [0,1]$ se tiene la desigualdad

$$y(a + (b-a)s) \geq y(a) + (y(b) - y(a))s. \tag{C}$$

Con $a = 0,\ b = 1$, tenemos que $\forall\ t \in [0,1]$,

$$y(t) \geq 0 + t(0-0) = 0.$$

Ahora, como $y \not\equiv 0,\ \exists t_0 \in (0,1)$ tal que $y(t_0) > 0$. Sea $t_1 \in (0, t_0)$, y

$s = \frac{t_1}{t_1} \in (0, 1)$. Por (C), con $a = 0,\ b = t_0$, tenemos que

$$\begin{aligned} y(t_1) = y(0 + t_0 \cdot s) &\overset{(C)}{\geq} y(0) + s(y(t_0) - y(0)) \\ &= 0 + s \cdot y(t_0) > 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $y > 0$ en $(0, t_0)$. Por otro lado, para $t_1 \in (t_0, 1)$, definimos $s = \frac{t_1 - t_0}{1 - t_0}$, y ocupando (C) con $a = t_0$ y $b = 1$ obtenemos

$$\begin{aligned} y(t_1) = y(t_0 + s(1 - t_0)) &\overset{(C)}{\geq} y(t_0) + s(y(1) - y(t_0)) \\ &= (1 - s)y(t_0) > 0. \end{aligned}$$

□

3. Considere

$$(+) \begin{cases} y' = \sqrt{|y|}; \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

   (a) Resuelva el sistema para $y_0 \neq 0$ y determine el invervalo maximal de la solución.

Proof.

(a) Primero asumamos que $y_0 > 0$. Dividiendo la EDO por $\sqrt{y}$ e integrando alrededor de t_0, obtenemos

$$\begin{aligned} (t - t_0) &= \int_{t_0}^{t} 1 ds = \int_{t_0}^{t} \frac{y'(s)}{\sqrt{y(s)}} ds \overset{(c.v.)}{=} \int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{\sqrt{u}} du \\ &= 2(\sqrt{y(t)} - \sqrt{y_0}) \\ \Rightarrow y(t) &= \left(\frac{t - t_0}{2} + \sqrt{y_0} \right)^2. \end{aligned}$$

Para $y_0 < 0$

$$(t - t_0) = \int_{|y_0|}^{|y(t)|} \frac{-1}{\sqrt{v}} dv = -2(|\sqrt{y(t)}| - \sqrt{|y_0|})$$

Por lo tanto, $y(t) = \left(\sqrt{|y_0|} - \frac{t - t_0}{2} \right)^2$. Sea

$$F_1(r) = \int_{y_0}^{r} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2(\sqrt{r} - \sqrt{y_0}).$$

Esta función es monótona (estricta) en el intervalo $(0, \infty)$ y por lo tanto biyectiva. $F_1(y(t)) = t - t_0$. Calculamos

$$\begin{aligned} T_+ &= \lim_{r \to \infty} F_1(r) = \infty \\ T_- &= \lim_{r \to 0} F_1(r) = -2\sqrt{y_0}. \end{aligned}$$

Entonces $t - t_0 \in (-2\sqrt{y_0}, \infty),\ t \in (t_0 - 2\sqrt{y_0}, \infty)$.

$$F_2(r) = 2(\sqrt{|y_0|} - \sqrt{|r|}, \quad r \in (-\infty, 0)$$

$$\begin{aligned} T_- &= \lim_{r \to -\infty} F_2(r) = \infty \\ T_+ &= \lim_{r \to \infty} . \end{aligned}$$

□

1.2 Ayudantía N°3

Ejercicio 1

$y' = \sin(t)e^y$.

Proof.

$$\begin{aligned} e^{-y}y' = \sin(t) &\Rightarrow \int e^{-y}dy = \int \sin t dt \\ &\Rightarrow -e^{-y} = -\cos t + C. \end{aligned}$$

Donde $C := -e^{y(t_0)} + \cos(t_0)$, y $e^{-y(t)} = \cos t - C$. Buscamos ahora el intervalo: $y(t) = -\log(\cos t + e^{y(t_0)} - \cos(t_0))$, $y' = f(y)g(t)$, $f(y) \neq 0$. Se trabaja en un intervalo I tal que $f(y(t)) \neq 0 \quad \forall t \in I$. □

Ejercicio 2

$x' = x(1-x)$

Proof. Hay dos formas de ver esto, como separable y como Bernoulli. Para separable hay que asumir $x \neq 0, 1$ y para Bernoulli sólo $x \neq 0$. Para este ejercicio, lo veremos como Bernoulli. Sea $y := x^{-1} \quad (x \neq 0, y \neq 0)$. Con esto

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{x'}{x^2} \\ &= \frac{-x(1-x)}{x^2} \\ &= -\left(\frac{1}{x} - 1\right) \\ &= 1 - y. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} y' + y = 1 &\Rightarrow e^t y' + e^t y = e^t \\ &\Rightarrow \int (e^t y)' dt = \int e^t dt \\ &\Rightarrow y = e^{-t}(e^t + c) = 1 + ce^{-t} \\ &\quad c = y(0) - 1 \\ &\quad x = \frac{1}{1 + ce^{-t}}. \end{aligned}$$

Si $-1 < c < 0 \Rightarrow 0 < y(0) < 1 \Rightarrow x(0) > 1$. Luego, la solución tiene intervalo de definición de la forma (T, ∞), con T tal que $1 + ce^{-T} = 0$, que equivale a $T = \log(-c)$.

Si $y(0) - 1 = c < -1$, entonces $y(0) < 0 \Rightarrow x(0) < 0$. En este caso, la solución tiene intervalo de definición $(\infty, \log(-c))$.

En otro caso ($C \geq 0$), el intervalo de definición es $\mathbb{R}$. □

Ejercicio 3

$x' = x(1 - x) - x$.

Proof. Esto tiene una solución estacionaria cuando la ecuacuión $x - x^2 - c = 0$ tiene solución real. El determinante es $\Delta = 1 - 4c$, por lo que lo anterior pasa si $c \leq \frac{1}{4}$

- Si $c \leq \frac{1}{4}$, tenemos las soluciones estacionarias $x \equiv \frac{1 \pm \sqrt{1-4c}}{2}$. Tomando $y = x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1-4c}}{2}$.Luego,

$$\begin{aligned} y' = x' &= -\left(x - \frac{1 + \sqrt{1 - 4c}}{2}\right)\left(x - \frac{1 - \sqrt{1 - 4c}}{2}\right) \\ &= -y\left(y + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1 - 4c}}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1 - 4c}}{2}\right) \\ &= -y(y + \sqrt{1 - 4c}) \end{aligned}$$

- Si $c > \frac{1}{4}$,

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x(1-x)-c} &= \int 1dt, \qquad y = x - \frac{1}{2} \\
\Rightarrow t - t_0 &= \int \frac{dy}{\left(y+\frac{1}{2}\right)\left(1-y-\frac{1}{2}\right)-c} \\
&= \int \frac{dy}{\left(\frac{1}{4}-x\right)-y^2} \\
&= -\int \frac{dy}{y^2+\left(c-\frac{1}{4}\right)}, \qquad y = \sqrt{c-\frac{1}{4}}z \\
&= -\int \frac{dz}{z^2+1} \cdot \sqrt{c-\frac{1}{4}}^{-1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{c-\frac{1}{3}}}(\arctan(z(t_0)) - \arctan(z(t)))
\end{aligned}$$

□