Teoría de Integración

Basado en las clases impartidas por Santiago Saglietti en el segundo semeste del 2025

Contents

Chapter 1

Integral de Riemann

1.1 Clase 1 (04/08)

Definición 1.1 (partición + intervalos). Una partición de un intervalo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ es un subconjunto finito $\Pi \subseteq [a, b]$ tal que $a, b \in \Pi$. Denotaremos a las particiones como $\Pi = \{x_0, \ldots, x_n\}$, donde $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Los intervalos $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$ serán llamados intervalos de la partición.

Observación. A veces, identificaremos la partición Π con $(I_i)_{i=1,\ldots,n}$. En tal caso, abusando de la notación, escribiremos $I_i \in \Pi$ cuando queramos hablar de los intervalos de Π.

Definición 1.2 (norma de particiones). La norma de una partición Π como $\|\Pi\| := \max_{i=1,\ldots,n}(x_i - x_{i-1}) = \max_{I_i \in \Pi} |I_i|$.

Definición 1.3 (partición marcada). Una partición marcada de $[a, b]$ es un par $\Pi^* := (\Pi, \varepsilon)$ donde:

- $\Pi = \{x_0, \ldots, x_n\}$ es una partición de $[a, b]$;
- $\varepsilon = \{x_1^*, \ldots, x_n^*\}$ es una colección de puntos tal que $x_i^* \in I_i$ para cada $i = 1, \ldots, n$.

Observación. Dada una partición marcada $\Pi^* = (\Pi, \varepsilon)$, definimos $\|\Pi^*\| := \|\Pi\|$.

Definición 1.4 (Suma de Riemann). Sean $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada y $\Pi^* = (\Pi, \varepsilon)$ una partición marcada. Definimos la suma de Riemann de f asociada a Π^* como:

$$S_R(f; \Pi^*) := \sum_{n=1}^{n} f(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{I_i \in \Pi} f(x_i^*)|I_i|.$$

1.2 Clase 2 (06/08)

Definición 1.5 (Riemann integrable)**.** Dada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada, decimos que es Riemann integrable si existe el límite $\lim_{\|\Pi^*\|\to 0} S_R(f;\Pi^*)$.
Equivalentemente, $\exists L \in \mathbb{R}$, tal que dado cualquier $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que $\|\Pi^*\| < \delta \Rightarrow |S_R(f;\Pi^*) - L| < \varepsilon$.

Observación. Cuando el límite existe, lo llamamos la integral de Riemann de f en $[a,b]$ y lo notamos $\int_a^b f(x)dx$.

Definición 1.6 (Sumas superior e inferior de Darboux)**.** Dadas $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada y $\Pi = (I_i)_{i=1,\ldots,n}$ una partición de $[a,b]$, definimos

$$m_{I_i} := \inf_{x\in I_i} f(x), \quad M_{I_i} := \sup_{x\in I_i} f(x) \quad \text{y}$$

$$\underline{S}(f;\Pi) := \sum_{I_i\in\Pi} m_{I_i}|I_i|, \quad \overline{S}(f;\Pi) := \sum_{I_i\in\Pi} M_{I_i}|I_i|.$$

Llamamos a $\underline{S}(f;\Pi)$ y $\overline{S}(f;\Pi)$ las sumas inferior y superior de Darboux de f con respecto a Π, respectivamente.

Nota. Como $m_{I_i} \le f(x) \le M_{I_i}$, $\forall x \in I_i$ para toda partición marcada $\Pi^* = (\Pi;\varepsilon)$, tenemos $\underline{S}(f;\Pi) \le S_R(f;\Pi^*) \le \overline{S}(f;\Pi)$.

Definición 1.7 (refinamiento)**.** Diremos que una partición Π' de $[a,b]$ es un refinamiento de otra partición de $[a,b]$, Π, si $\Pi \subseteq \Pi'$.
Equivalentemente, si para todo $J_i \in \Pi'$ existe $I_i \in \Pi$ tal que $J_i \subseteq I_i$.

Proposición 1.8. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada. Entonces,

- Si $\Pi \subseteq \Pi'$ son particiones de $[a,b]$,

$$\underline{S}(f;\Pi) \le \underline{S}(f;\Pi'), \quad \overline{S}(f;\Pi) \ge \overline{S}(f;\Pi').$$

- Si Π_1, Π_2 son particiones de $[a,b]$ cualesquiera,

$$\underline{S}(f;\Pi_1) \le \overline{S}(f;\Pi_2)$$

Definición 1.9. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada. Definimos:

- La integral superior (de Darboux) de f como $\overline{\int_a^b} f(x)dx := \inf_{\Pi} \overline{S}(f;\Pi)$.
- La integral inferior (de Darboux) de f como $\underline{\int_a^b} f(x)dx := \sup_{\Pi} \underline{S}(f;\Pi)$.

Teorema 1.10. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada. Entonces,

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \lim_{\|\Pi\|\to 0} \underline{S}(f;\Pi) \quad \text{y} \quad \overline{\int_a^b} f(x)dx = \lim_{\|\Pi\|\to 0} \overline{S}(f;\Pi).$$

Observación. Equivalentemente, para cualquier sucesión $(\Pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de partición de $[a,b]$ tal que $\|\Pi_n\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$, se tiene que

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f;\Pi_n) \quad \text{y} \quad \overline{\int_a^b} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f;\Pi_n).$$

Teorema 1.11. Dada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada, son equivalentes:

1. $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$ (i.e., f es Darboux integrable).
2. f es Riemann integrable.
3. $\lim_{\|\Pi\|\to 0} \overline{S}(f;\Pi) - \underline{S}(f;\Pi) = 0$.
4. $\forall (\Pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de particiones de $[a,b]$ tal que $\|\Pi_n\| \to 0$,
$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f;\Pi_n) - \underline{S}(f;\Pi_n) = 0.$$
5. $\exists (\Pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de particiones de $[a,b]$ tal que
$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f;\Pi_n) - \underline{S}(f;\Pi_n) = 0.$$

1.3 Clase 3 (07/08)

Nota. Las integrales en el sentido de Darboux y el de Riemann coinciden.

Proposición 1.12. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es monótona, entonces es Riemann integrable.

Observación. Una función monótona tiene discontinuidades numerables.

Proposición 1.13. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces es Riemann integrable.

En particular, existen funciones Riemann integrables con numerables discontinuidades. De hecho, hay ejemplos con c (cardinal del continuo) discontinuidades. No obstante, si f es integral de Riemann, su conjunto de discontinuidades tiene que ser "pequeño".

Teorema 1.14. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada. Entonces, f es Riemann Integrable si y sólo si su conjunto de discontinuidades tiene medida nula.

Definición 1.15 (intervalo)**.** Decimos que un conjunto $I \subseteq \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ es un intervalo si satisface

$$x, y \in I \Rightarrow z \in I \text{ para todo } \min x, y \leq z \leq \max x, y.$$

Ejemplo. (y propiedades)

- Dados $a \leq b$ $(a, b \in \mathbb{R})$, los conjuntos $(a, b), (a, b], [a, b], [a, b)$ son intervalos;
- El conjunto vacío es un intervalo ($\varnothing = (a, a)$);
- Los puntos son intervalos. $I = [\lambda, \lambda]$;
- La intersección de intervalos es intervalos.

$\diamond$

Definición 1.16 (intervalo generalizado)**.** Decimos que un conjunto $I \subseteq \mathbb{R}^d$ es un intervalo si puede escribirse como

$$I = \prod_{k=1}^{d} I_k$$

donde cada I_r es un intervalo en $\mathbb{R}$. La medida de un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}^d$ se define como

$$|I| := \prod_{k=1}^{d} |I_k|.$$

Nota. Los intervalos en $\mathbb{R}^d$ heredan las mismas pripiedades en $\mathbb{R}$:

- Intersección de intervalos en $\mathbb{R}^d$ es intervalo.
- Si $I \subseteq J \subseteq \mathbb{R}^d$ son intervalos, entonces $|I| \leq |J|$.

Definición 1.17 (medida nula)**.** Un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^d$ se dice de medida nula si, dado $\varepsilon > 0$, existe una sucesión $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de intervalos de $\mathbb{R}^d$ tal que

$$E \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \quad \text{y} \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} |I_n| < \varepsilon.$$

Ejemplo. (y propiedades)

1. Todo conjunto unitario $\{x\}, (x \in \mathbb{R}^d)$ tiene medida nula;
2. Toda unión numerable de conjuntos de medida nula tiene medida nula;

3. Cualquier conjunto numerable tiene medida nula;
4. Cualquier subconjunto de un conjunto de medida nula tiene medida nula;
5. Existen conjuntos no numerables de medida nula:
   - En $\mathbb{R}^d$ con $d \geq 2$, los ejes $\{x : x_1 = 0\}, i = 1, \ldots, d$ tiene medida nula.
   - En $\mathbb{R}$, el conjunto de cantor tiene medida nula.
6. $E \subseteq \mathbb{R}^d$ es de medida nula, entonces $\alpha\dot{E}$ tiene medida nula $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
7. $E \subseteq \mathbb{R}^d$ es de medida nula, entonces $E + v$ tiene medida nula $\forall v \in \mathbb{R}^d$.
8. Si E contiene un intervalo no unitario, entonces no tiene medida nula. Notar que:
   - La vuelta no es válida: $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ no contiene untervalos no unitarios pero no puede tener medida nula.
   - De esto se deduce que si $E \subseteq \mathbb{R}^d$ tiene medida nula. Entonces E^c es denso (no vale la vuelta: $E^c = \mathbb{Q}$).
9. $E \subseteq \mathbb{R}^d$ tiene medida nula si y sólo si

$$|E|_e \coloneqq \inf\{\sum_{n\in\mathbb{N}} |I_n| : E \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n\} = 0, \quad I_n \text{ intervalo } \forall n \in \mathbb{N}.$$

$\diamond$

1.4 Clase 4 (08/08)

Teorema 1.18. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada. Entonces

$$f \text{ Riemann integrable} \Longleftrightarrow D_f = \{x \in [a, b] : f \text{ discontinua en } x\} \text{ tiene medida nula.}$$

1.4.1 Limitaciones de la integral de Riemann

1. Sólo está definida para f acotada y sobre intervalos $[a, b]$ acotados. La teoría de integrales impropias resuelve esto.
2. Propiedades del espacio $\mathcal{R}([a, b]) = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} : f \text{ Riemann integrable}\}$: Nos gustaría poder definir una noción de convergencia en $\mathcal{R}([a, b])$ tal que

$$f_n \to f \text{ en } \mathcal{R}([a, b]) \Rightarrow \int_a^b f_n \to \int_a^b f \quad \left(\lim \int_a^b f_n = \int_a^b \lim f_n\right).$$

Observación. La convergencia puntal NO cumple esto (punto 2).

Ejemplo (1).

- $f_n \coloneqq n\chi_{(0,\frac{1}{n}]}$ es Riemann integrable en $[0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
- $f_n \to f \cong 0$ puntualmente en $[0,1]$;
- $\int_0^1 f_n = 1 \not\to 0 = \int_0^1 f$.

◇

Ejemplo (2).

- Sea $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una enumeración de $\mathbb{Q} \cap [0,1]$;
- $f_n \coloneqq \chi_{\{Q_1,\dots,Q_n\}}$ es Riemann integrable en $[0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
- $f_n \to f \coloneqq \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ puntualmente en $[0,1]$;
- f no es Riemann integrable. $\underline{\int_0^1} f = 0 \neq 1 = \overline{\int_0^1} f$.

◇

Observación. La convergencia uniforme SÍ cumple esto, pero es demasiado fuerte.

Ejercicio (Guía 1)**.** Sean $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}([a,b])$ tales que $f_n \to f$ uniformemente en $[a,b]$. Entonces, $f \in \mathcal{R}([a,b])$ y $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$.

Ejemplo (3).

- $f_n(x) \coloneqq x^n$ en $[0,1]$, $f_n \in \mathcal{R}([a,b])$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \to \chi = f$ puntualmente;
- $f \in \mathcal{R}([a,b])$ y $\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{1}{n+1} \to 0 = \int_0^1$;
- f_n no converge uniformemente a f.

◇

Resulta que la noción de convergencia "óptima" (la más "débil" que cumple lo que queremos) es la de convergencia en L':

$$f_n \xrightarrow{L'} f \text{ si } \lim_{n\to\infty} \int_a^b |f_n - f| = 0.$$

Esta noción de convergencia viene dada por una "norma":

- $\|f\|_{L'} \coloneqq \int_a^b |f|$ (recordar que $f \in \mathcal{R}([a,b]) \Rightarrow |f| \in \mathcal{R}([a,b])$);
- $d_{L'}(f,g) \coloneqq \|f - g\|_{L'} = \int_a^b |f - g|$.

Observación. $\|\cdot\|_{L'}$ no es una norma porque $\|f\|_{L'} = 0 \not\Rightarrow f = 0$. Decimos que es una *pseudo-norma* y d una *pseudo-métrica*.

Para arreglar esto, dadas $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$, decimos que son *equivalentes* y lo notamos $f \sim g$ si $\{x \in [a,b] \ : \ f(x) \neq g(x)\}$ tiene medida nula. Resulta que $\sim$ es una relación de equivalencia y, además,

$$f,g \in \mathcal{R}([a,b]),\ f \sim g \Rightarrow \int_a^b f = \int_a^b g.$$

Sea $\overline{\mathcal{R}}([a,b])$ el conjunto de clases de equivalencia de $\mathcal{R}([a,b])$, y denotamos por $\overline{f}$ a la clase de equivalencia de $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Con esto, $\|\overline{f}\|_{L'} := \int_a^b |f|dx$ define una norma en $\overline{\mathcal{R}}([a,b])$ que se llama la **norma** L'.

Observación. Hay un problema: $(\overline{\mathcal{R}}([a,b]), \|\cdot\|_{L'})$ NO ES COMPLETO!

3. **TFC:** Si $f \in \mathcal{R}([a,b])$ es continua en $x_0 \in [a,b]$, entonces $F(x) := \int_a^x f(t)dt$ es derivable en x_0 y $F'(x_0) = f(x_0)$. En particular, F es derivable en x y $F'(x) = f(x)$ para todo x salvo un conjunto de medida nula.

1.4.2 Clase 5 (18/08)

Teorema Fundamental del Cálculo: Si $f \in \mathcal{R}([a,b])$ es continua en $x_0 \in [a,b]$, entonces $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por $F(x) := \int_a^x f(t)dt$ es derivable en $x = x_0$ y vale $F'(x_0) = f(x_0)$. En particular, $F'(x) = f(x)$ salvo quizás por un conjunto de $x \in [a,b]$ de medida nula. O sea, podemos integrar y luego derivar y esto es "casi" como no hacer nada. Pero, tenemos problemas:

1. **Este "casi" no puede removerse**

> **Teorema 1.19** (Hankel, 1871)**.** Dado $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, existe $f \in \mathcal{R}([a,b])$ tal que $F(x) := \int_a^x f(t)dt$ no es derivable para ningún x en un subconjunto denso en $[a,b]$ (y, en particular, infinito).

2. **A veces no podemos componer en el orden inverso**

> **Teorema 1.20** (Volterra, 1881)**.** Dado $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, existe $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivable en $[a,b]$, tal que f' es acotada en $[a,b]$ pero $f' \notin \mathcal{R}([a,b])$.

Extendiendo la integral de Riemann

Sean $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada y $\Pi = \{x_0, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a,b]$. Definimos:

$$\begin{aligned}
\Phi_{f,\Pi}(x) &:= m_{I_1}\chi_{[x_0,x_1]}(x) + \sum_{i=2}^{n} m_{I_i}\chi_{(x_{i-1},x_i]}(x), \quad m_{I_i} = \inf_{t \in I_i} f(t) \\
&= m_{I_1}\chi_{\{x_0\}}(x) + \sum_{i=1}^{n} m_{I_i}\chi_{(x_{i-1},x_i]}(x) \\
\psi_{f,\Pi}(x) &:= M_{I_1}\chi_{\{x_0\}}(x) + \sum_{i=1}^{n} M_{I_i}\chi_{(x_{i-1},x_i]}(x), \quad M_{I_i} = \sup_{t \in I_i} f(t).
\end{aligned}$$

Observemos que $\Phi_{f,\Pi}(x) \leq f(x) \leq \psi_{f,\Pi}(x) \quad \forall x \in [a,b]$. Además,

$$\int_a^b \Phi_{f,\Pi}(x)dx = \underline{S}(f,\Pi),$$

$$\int_a^b \psi_{f,\Pi}(x)dx = \overline{S}(f,\Pi).$$

En particular, si f es Riemann integrable,

$$\int_a^b f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf\left\{\int_a^b \psi_{f,\Pi} \ : \ \Pi \text{ partición}\right\}$$
$$= \underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup\left\{\int_a^b \Phi_{f,\Pi} \ : \ \Pi \text{ partición}\right\}.$$

> **Definición 1.21** (función escalonada)**.** Una función $\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ se dice escalonada si existen $\Pi = \{x_0, \ldots, x_n\}$ partición de $[a,b]$ y $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ tales que
> $$\Phi|_{(x_{i-1},x_i)} \equiv c_i \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

Notemos que podemos escribir a cualquier función Φ escalonada como

$$\Phi(x) := \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \chi_{(x_{i-1},x_i)}(x) + \sum_{i=0}^{n} \Phi(x_i) \cdot \chi_{\{x_i\}}(x)$$
$$= \sum_{i=1}^{k} c_j \cdot \chi_{A_j}(x).$$

donde los A_j son intervalos disjuntos tales que $\biguplus_{j=1}^{k} A_j = [a,b]$ (se pone una "D" dentro de la unión para denotar que estamos haciendo una unión disjunta).

Si tomamos Φ de la forma $\Phi = \sum_{j=1}^{k} c_j \cdot \chi_{A_j}$ con $(A_j)_{j=1,\ldots,k}$ disjuntos, $\biguplus_{j=1}^{k} A_j = [a,b]$ pero A_j no son necesariamente intervalos, diremos que Φ es una función escalonada generalizada. Como para funciones escalonadas "normales", tenemos

$$\int_a^b \Phi(x)dx = \sum_{j=1}^{k} c_j \cdot |A_j| \left(= \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot |I_i| \right)$$

La función longitud Sea $\mathcal{I}$ la colección de los intervalos en $\mathbb{R}$. Definimos la función longitud $\lambda : \mathcal{I} \to [0,\infty]$ como $\lambda(I) := |I|$.
Propiedades:

1. $\lambda(\varnothing) = 0$;
2. $I_1, I_2 \in \mathcal{I},\ I_1 \subseteq I_2 \Rightarrow \lambda(I_1) \leq \lambda(I_2)$ (Monotonía de λ);
3. (Aditividad finita de λ) Si $I \in \mathcal{I}$ es tal que $I = \biguplus_{i=1}^{n} J_i$ con $J_i \in \mathcal{I},\ \forall i = 1, \ldots, n,\ J_i \cap J_j = \varnothing$ con $i \neq j$, entonces
$$\lambda(I) = \sum_{i=1}^{n} \lambda(J_i);$$
4. (σ-aditividad de λ) Si $I \in \mathcal{I}$ es tal que $I = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$, con $(I_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{I}$ disjuntos, entonces
$$\lambda(I) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(I_i);$$

5. (σ-subaditividad de λ) Si $I \in \mathcal{I}$ verifica $I \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i,\ (I_1)_{i\in\mathbb{N}})$ intervalos (no necesariamente disjuntos), entonces $\lambda(I) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(I_i)$;
6. $\lambda(I+x) = \lambda(I),\ \forall x \in \mathbb{R},\ I+x := \{a+x \ :\ a \in I\}$;
7. $\lambda(\{x\}) = 0\ \forall\ x \in \mathbb{R}$.

1.5 Clase 6 (20/08)

Nos gustaría extender λ a una clase más grande que $\mathcal{I}$. Más precisamente, nos gustaría definir una aplicación $m : \mathcal{M} \to [0,\infty]$, donde $\mathcal{M}$ es una coleccción de subconjuntos de $\mathbb{R}$ tal que $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{M}$, de manera tal que, dado $E \in \mathcal{M},\ m(E)$ represente la "longitud" de E. Idealmente, nos gustaría que m cumpla lo siguiente:

1. $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$;
2. Si $I \in \mathcal{I}$, entonces $m(I) = |I|$;
3. m es σ-aditiva $(E,\ (E_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M},\ E = \biguplus_{n=1}^{\infty} E_n \Rightarrow m(E) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n))$;

Ejercicio. $(1)+(2)+(3) \Rightarrow m$ es monótona, σ-subaditiva y finitamente aditiva.

4 Si $E \in \mathcal{M}$, entonces $E + x \in \mathcal{M}$ y $m(E+x) = m(E)\ \forall x \in \mathbb{R}$.

El problema es que, si asumimos el Axioma de Elección, uno puede mostrar que no existe una tal m que cumpla $(1)-(2)-(3)-(4)$ y, de hecho, no se sabe si existe m que cumpla $(1)-(2)-(3)$. (Si asumimos la hipótesis del continuo, entonces no existe m que cumpla $(1)-(2)-(3)$).

Luego, para construir m debemos debilitar alguna de las propiedades:

- Si debilitamos $(1) \Rightarrow$ TEORÍA DE LA MEDIDA;
- Si debilitamos (3), tenemos dos opciones sobre lo que pedir:
  - $\rightarrow$ aditividad finita $\Rightarrow$ "medidas finitamente aditivas";
  - $\rightarrow$ σ-subaditividad $\Rightarrow$ "medidas exteriores".

Vamos a optar por debilitar (1).

Una manera de extender λ es la siguiente:

i. Si $E = \biguplus_{i=1}^{n} I_i$ entonces defninimos $\lambda(E) := \sum_{i=1}^{n} \lambda(I_i)$;
ii. Si $E = \biguplus_{i=1}^{\infty} I_i$ entonces definimos $\lambda(E) := \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(I_i)$;
iii. La fórmula anterior nos permite definir $\lambda(E)$ para todo E abierto en $\mathbb{R}$;
iv. Para conjuntos mas generales, "aproximar" por abiertos.

Definición 1.22 (premedida). Sea X un conjunto no vacío y $\mathscr{C}$ una colección de subconjuntos de X tal que $\varnothing \in \mathscr{C}$. Diremos que una aplicación $\tau : \mathscr{C} \to [0, \infty]$ es una premedida si $\tau(\varnothing) = 0$.

Observación. El conjunto no vacío X será llamado un espacio y la colección $\mathscr{C}$ será llamada una clase (de subconjuntos de X).

Intuitivamente, $\mathscr{C}$ representa la colección de subconjuntos cuyo "tamaño" sabemos medir y τ nos da su medida.

Ejemplo.

1. **Premedida de Lebesgue:** $\mathscr{C} := \mathcal{I} := \{I \subseteq \mathbb{R} \,:\, I \text{ intervalo}\}$, $\tau(I) := |I|$.

2. **Premedidas de Lebesgue-Stieltjes:** Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monótona creciente y continua a derecha ($\lim^{+}_{x \to x_0} F(x) = F(x_0)$). Una función tal se dice una función de Lebesgue-Stieltjes.

◇

Observemos que, por monotonía, existen los límites

$$\left.\begin{cases} F(\infty) := \lim\limits_{x\to\infty} F(x) \\ F(-\infty) := \lim\limits_{x\to-\infty} F(x) \end{cases}\right\} \in \mathbb{R}$$

Sea además la clase $\widetilde{\mathcal{I}}$ de intervalos de $\mathbb{R}$ dada por

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{I}} &:= \{I(a,b) \,:\, -\infty \le a \le b \le \infty\} \text{ donde } I(a,b) := (a,b] \cap \mathbb{R} \\ &= \{(a,b] \,:\, -\infty \le a \le b < \infty\} \cup \{(a,\infty) \,:\, -\infty \le a < \infty\}.\end{aligned}$$

Definimos la premedida τ_F de Lebesgue-Stieltjes asociada a F como la aplicación $\tau_F : \widetilde{\mathcal{I}} \to [0, \infty]$, dada por

$$\tau_F(I(a,b)) = F(b) - F(a).$$

Nota. Observar que si $F(x) = x$ entonces τ_F es la premedida de Lebesgue (sobre $\widetilde{\mathcal{I}}$.

3. **Premedidas de Probabilidad:** Si F es una función de L-S tal que $F(\infty) = 1$ y $F(-\infty) = 0$, decimos que F es una función de distribución (acumulada). En tal caso, la premedida τ_F se conoce como premedida de probabilidad o predistribución (en $\mathbb{R}$).

Observación. $\tau_F(\mathbb{R}) = \tau_F(I(-\infty, \infty)) = F(\infty) - F(-\infty) = 1 - 0 = 1$.

4. **Premedida...**

1.6 Clase 7 (22/08)

Definición 1.23 (semiálgebra)**.** Sea X un espacio y $\mathscr{C}$ una clase de subconjuntos de X. Decimos que $\mathscr{C}$ es una semiálgebra (de subconjuntos de X) si cumple:

1. $\varnothing \in \mathscr{C}$;
2. ($\mathscr{C}$ es cerrada por intesecciones finitas) $A, B \in \mathscr{C} \Rightarrow A \cap B \in \mathscr{C}$;
3. Si $A \in \mathscr{C}$, existen $C_1, \ldots, C_n \in \mathscr{C}$ disjuntos tal que $A^c = \biguplus_{i=1}^n C_i$.

Ejemplo.

1. La clase $\mathcal{I}_d$ de intervalos en $\mathbb{R}^d$ es una semiálgebra.
2. La clase $\widetilde{\mathcal{I}} := \{(a, b] \cap \mathbb{R} \ : \ -\infty \leq a \leq b \leq \infty\}$ es una semiálgebra.
3. Si X e Y son espacios y $\mathscr{C}_X, \mathscr{C}_Y$ son semiálgebras en X e Y respectivamente, entonces
$$\mathscr{C}_X \times \mathscr{C}_Y := \{F \times G \ : \ F \in \mathscr{C}_X, \ G \in \mathscr{C}_Y\}$$
es una semiálgebra en $X \times Y$, llamada "semiálgebra producto".

$\diamond$

Definición 1.24 (álgebra)**.** Sean X un espacio y $\mathscr{A}$ una clase de subconjuntos de X. Decimos que $\mathscr{A}$ es un álgebra (de subconjuntos de X) si cumple que:

(i) $\varnothing \in \mathscr{A}$;

(ii) $\mathscr{A}$ es cerrado por intersecciones finitas;

(iii) ($\mathscr{A}$ es cerrada por complementos) $A \in \mathscr{A} \Rightarrow A^c \in \mathscr{A}$.

Equivalentemente, en presencia de (iii), (ii) se puede reemplazar por:

(ii') ($\mathscr{A}$ es cerrada por uniones finitas) $A, B \in \mathscr{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathscr{A}$. (**Dem:** Ejercicio!)

Ejemplo.

1. X espacio, $\mathscr{A}_1 := \{\varnothing, X\}$, $\mathscr{A}_2 := \mathcal{P}(X)$ son álgebras (donde $\mathscr{A}$ es llamada el álgebra trivial);
2. Sea $\mathscr{S}$ una semiálgebra de subconjuntos de un espacio X. Entonces
$$\mathscr{A} := \left\{ E \subseteq X \ : \ \exists S_1, \ldots, S_n \in \mathscr{S} \text{ disjuntos tal que } E = \biguplus_{i=1}^n S_i \right\}$$
es un álgebra, llamada el álgebra generada por $\mathscr{S}$. Notemos que $\mathscr{A}(\mathscr{S})$ es el menor álgebra que contiene a $\mathscr{S}$:

   (i) $\mathscr{A}(\mathscr{S})$ es un álgebra y $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{A}(\mathscr{S})$;

(ii) Si $\mathscr{A}'$ es un álgebra con $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{A}'$ entonces $\mathscr{A}(\mathscr{S}) \subseteq \mathscr{A}'$.

$\diamond$

Nota. Toda álgebra es una semiálgebra.

Definición 1.25 (σ-álgebra)**.** Una clase (no vacía) $\mathscr{M}$ de subconjuntos de un espacio X se dice una σ-álgebra si cumple:

1. $\varnothing \in \mathscr{M}$;
2. $E \in \mathscr{M} \Rightarrow E^c \in \mathscr{M}$;
3. $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{M} \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathscr{M}$.

Llamamos al par $(X, \mathscr{M})$ un espacio medible y a los elementos de $\mathscr{M}$, conjuntos medibles.

Nota.

1. Todo σ-álgebra es un álgebra;
2. Equivalentemente, en presencia de (1), (3) se puede reemplazar por

   (3'.) $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{M} \Rightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathscr{M}$.

Ejemplo.

1. σ-álgebra $\Rightarrow$ álgebra $\Rightarrow$ semiálgebra (no valen las recíprocas);
2. $\{\varnothing, X\}, \mathcal{P}(X)$ son σ-álgebras;
3. Si $(\mathscr{M}_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ son σ-álgebras, entonces

$$\bigcap_{\gamma\in\Gamma} \mathscr{M}_\gamma \coloneqq \{E \subseteq X \ : \ E \in \mathscr{M}_\gamma, \ \forall \gamma \in \Gamma\}$$

   es una σ-álgebra.

4. Si $\mathscr{M}$ es una clase de subconjuntos de X, entonces

$$\sigma(\mathscr{M}) \coloneqq \bigcap_{\substack{\mathscr{M} \ \sigma\text{-álgebra} \\ \mathscr{C} \subseteq \mathscr{M}}} \mathscr{M}$$

   es la σ-álgebra generada por $\mathscr{M}$. De hecho, $\sigma(\mathscr{M})$ es la menor σ-álgebra que contiene a $\mathscr{C}$:

   (a) $\sigma(\mathscr{C})$ es σ-álgebra y $\mathscr{C} \subseteq \sigma(\mathscr{C})$;

   (b) Si $\mathscr{F}$ es σ-álgebra y $\mathscr{C} \subset \mathscr{F}$ entonces $\sigma(\mathscr{C}) \subseteq \mathscr{F}$.

5. Si $(X, \mathscr{T})$ es un espacio topológico, $\sigma(\mathscr{T})$ se conoce como la σ-álgebra de Borel, y sus elementos se llaman Borelianos. La notamos $\beta(X)$ $(= \sigma(\mathscr{T}))$.

$\diamond$

Ejemplo. $\beta(\mathbb{R})$ contiene a todos los abiertos, cerrados, intervalos, conjuntos de tipo G_δ y $F_\sigma, \ldots$ De hecho, $\beta(\mathbb{R}) = \sigma(\text{cerrados}) = \sigma(\text{compactos}) = \sigma(\mathcal{I}) = \sigma(\widetilde{\mathcal{I}})$.

$\diamond$

Definición 1.26. Sea $\mathscr{C}$ una clase (no vacía) de subconjuntos de X y $\mu : \mathscr{C} \to [0, \infty]$ una función (la llamamos una función de conjuntos). Diremos que:

(i) μ **es monótona** (en $\mathscr{C}$) si $A, B \in \mathscr{C},\ A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$;

(ii) μ **es finitamente aditiva** si $(A_i)_{i=1,\ldots,n} \subseteq \mathscr{C}$, entonces

$$\mu\Big(\biguplus_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i);$$

(iii) μ **es σ-aditiva** si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{C}$ disjuntos, entonces

$$\mu\Big(\biguplus_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i);$$

(iv) μ **es σ-subaditiva** si $\mu(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_n)$, para todo $A \in \mathscr{C}$ y $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{C}$ tal que $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$

1.7 Clase 8 (25/08)

Observación. Rana da una definición más débil de (4):

$$A \in \mathscr{C},\ A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,\ A_i \in \mathscr{C}\ \forall i \Rightarrow \mu(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

Ambas definiciones son equivalentes si $\mathscr{C}$ es una semiálgebra y μ es monótona (siempre será el caso para nosotros).

Definición 1.27 (premedida finita y σ-finita)**.** Una premedida $\tau : \mathscr{C} \to [0, \infty]$ se dice:

1. **finita** si $X \in \mathscr{C}$ y $\tau < \infty$;
2. **σ-finita** si existen $(C_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{C}$ disjuntos tales que

$$\biguplus_{n=1}^{\infty} C_n = X \quad \text{y} \quad \tau(C_n) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ejemplo.

1. finita $\Rightarrow$ σ-finita;

2. La función longitud $\lambda : \mathcal{I} \to [0, \infty]$ es σ-finita pero no finita;

3. Si F es una función de L-S, entonces $\tau_F : \widetilde{\mathcal{I}} \to [0, \infty]$ es siempre σ-finita ($\tau_F((n, n+1]) = F(n+1) - F(n) < \infty \ \forall n \in \mathbb{Z}$) y es finita si y sólo si $\tau_F(\mathbb{R}) = \tau_F((-\infty, \infty] \cap \mathbb{R}) = F(\infty) - F(-\infty) < \infty$.

$\diamond$

Definición 1.28 (medida)**.** Sea $(X, \mathscr{M})$ es un espacio medible. Diremos que $\mu : \mathscr{M} \to [0, \infty]$ es una medida (en $(X, \mathscr{M})$) si:

1. $\mu(\varnothing) = 0$;

2. μ es σ-aditiva en $\mathscr{M}$ $\left(\mu\left(\biguplus_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)\right)$.

Llamamos a la terna $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un epacio de medida.

Objetivo. Construir un espacio de medida $(\mathbb{R}, \mathscr{M}, \mu)$ tal que $\mathcal{I} \subseteq \mathscr{M}$ y

$$\begin{cases} \mu(I) = |I| \ \forall I \in \mathcal{I}, \\ \mu(E + x) = \mu(E) \ \forall E \in \mathscr{M}. \end{cases}$$

Ejemplo (Espacios de Probabilidad)**.** Si $(X, \mathscr{M}, \mu)$ es un EdM tal que $\mu(X) = 1$, $(X, \mathscr{M}, \mu)$ recibe el nombre de espacios de probabilidad. $\diamond$

- X recibe el nombre de espacio muestral, y se lo nota Ω (en lugar de X);
- $\mathscr{M}$ se suele notar como $\mathscr{F}$ (ó $\mathscr{Y}$). Sus elementos se dicen eventos;
- μ recibe el nombre de medida de probabilidad ó distribución y se la nota $\mathbb{P}$.

En probabilidad, típicamente se estudian 2 tipos de distribuciones en $\mathbb{R}$ (o en $\mathbb{R}^d$).

1. **Distribuciones discretas:** $\exists S \subseteq \mathbb{R}$ numerable y $(p_x)_{x \in S} \subseteq [0, 1]$ tal que $\mathbb{P}(A) = \sum_{x \in A \cap S} p_x$.
   Ejemplo. Binomial, Geométrica, Poisson,... $\diamond$

2. **Distribuciones (absolutamente) continuas:** $\exists f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ "integrable" tal que $\mathbb{P}(A) = \int_A f(x)dx$.
   Ejemplo. Uniforme, Exponencial, Normal,... $\diamond$

Propiedades generales de una medida. Si μ es una medida sobre $(X, \mathscr{M})$, entonces:

1. μ es monótona (en $\mathscr{M}$);

2. μ es σ-subaditiva;

3. μ es **continua por debajo**: si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{M}$ es creciente ($A_n \subseteq A_{n+1}\ \forall n$) entonces
$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

4. μ es **continua por arriba**: si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{M}$ es decreciente ($A_{n+1} \subseteq A_n\ \forall n$) y $\mu(A_{n_0}) < \infty$ para algún n_0 ($\Rightarrow \mu(A_n) < \infty\ \forall n \geq n_0$), entonces
$$\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

(**Cuidado!** (4) puede no valer si $\mu(A_n) = \infty\ \forall n \in \mathbb{N}$)

Definición 1.29 (premedida extendible y unívocamente extendible)**.** Una premedida $\tau : \mathscr{S} \to [0,\infty]$ definida sobre una semiálgebra de subconjunto de X, se dice:

1. **Extendible** si es
   (E1) finitamente aditiva en $\mathscr{S}$;
   (E2) σ-subaditiva en $\mathscr{S}$.
2. **Unívocamente extendible** si es extendible y se cumple
   (E3) σ-finita

Observación. Los nombres de extendible y unívocamente extendible no se encontrarán en el Rana (los puso el profe).

Teorema 1.30 (Extensión de Carathéodory)**.** Dados un espacio X y una premedida τ sobre una semiálgebra $\mathscr{S}$ de subconjuntos de X tal que τ es extendible, existe una extensión de τ a una medida μ_τ definida sobre $\sigma(\mathscr{S})$ la σ-álgebra generada por $\mathscr{S}$. Más aún, si τ es unívocamente extendible, entonces la extensión μ_τ a $\sigma(\mathscr{S})$ es única.
Por último, si τ es unívocamente extendible, entonces se puede extender de manera única a una medida $\overline{\mu_\tau}$ sobre la μ_τ-completación de $\sigma(\mathscr{S})$, i.e. la σ-álgebra $\overline{\sigma(\mathscr{S})}$ dada por
$$\overline{\sigma(\mathscr{S})} := \{B \cup N : B \in \sigma(\mathscr{S}), \exists \widetilde{N} \in \sigma(\mathscr{S}) \text{ con } N \subseteq \widetilde{N} \text{ y } \mu_\tau(\widetilde{N}) = 0\}$$
mediante la fórmula $\overline{\mu_\tau}(B \cap N) := \mu_\tau(B)$.

1.8 Clase 9 (27/08)

Observación. Si $\tau : \mathscr{S} \to [0,\infty]$ es σ-aditiva en $\mathscr{S}$ y $\mathscr{S}$ es una semiálgebra, entonces τ es extendible.

Observación. La extensión puede no ser única si τ no es σ-finita.

Ejemplo. $\widetilde{\mathcal{I}}_{\mathbb{Q}} \coloneqq \widetilde{\mathcal{I}} \cap \mathbb{Q} = \{(a,b] \cap \mathbb{Q} \ : \ -\infty \leq a \leq b \leq \infty\}$ $\diamond$

Nota.

- $\widetilde{\mathcal{I}}_{\mathbb{Q}}$ es una semiálgebra;
- $\sigma(\widetilde{\mathcal{I}}_{\mathbb{Q}}) = \sigma(\widetilde{\mathcal{I}} \cap \mathbb{Q}) \overset{\text{Ej!}}{=} \sigma(\widetilde{\mathcal{I}}) \cap \mathbb{Q} = \beta(\mathbb{R}) \cap \mathbb{Q} = \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ (9.52)
- $\tau : \widetilde{\mathcal{I}}_{\mathbb{Q}} \to [0,\infty]$, dada por $\tau(A) \coloneqq \begin{cases} 0 & A = \varnothing \\ \infty & A \neq \varnothing, \ A \in \widetilde{\mathcal{I}}_{\mathbb{Q}} \end{cases}$ (Observar que τ no es σ-finita)
- Para cada $r > 0$, $\mu_r : \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \to [0,\infty]$ dada por $\mu_r(A) \coloneqq r(\#A)$ es una extensión de τ (y es una medida)

Definición 1.31 (espacio completo y conjuntos μ-nulos)**.** Sea $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un EdM y definamos

$$\mathscr{N}_\mu \coloneqq \{E \subset X \ : \ \exists N \in \mathscr{M} \text{ con } E \subseteq N \text{ y } \mu(N) = 0\}$$

Los elementos de $\mathscr{N}_\mu$ se dicen conjuntos μ-nulos. Diremos que $(X, \mathscr{M}, \mu)$ es completo si $\mathscr{N}_\mu \subseteq \mathscr{M}$

Observación. $(X, \overline{\sigma(\mathscr{S})}, \overline{\mu_\delta})$ es completo. En efecto, $\mathscr{N}_{\overline{\mu_\delta}}$ corresponde al subconjunto de $\overline{\sigma(\mathscr{S})}$ que se obtiene tomando $B = \varnothing$.

Observación. Veremos más adelante que las siguientes premedidas son UE:

(i) Premedidas de Lebesgue-Stieltjes (en particular, la función longitud λ (sobre $\widetilde{\mathcal{I}}$) y las premedidas de probabilidad).

(ii) Premedidas de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$, con $d \in \mathbb{N}$.

En particular;

Corolario 1.32. Para cada función F de Lebesgue-Stieltjes, existe una σ-álgebra $\mathscr{M}_F$ sobre $\mathbb{R}$ y una única medida μ_F en $(\mathbb{R}, \mathscr{M}_F)$ tal que

$$\mu_F = (I(a,b)) = F(b) - F(a) \quad \forall -\infty \leq a \leq b \leq \infty$$

Además, $\beta(\mathbb{R}) \subseteq \mathscr{M}_F$. Es decir, μ_F es una medida que extiende a τ_F, a todo $\mathscr{M}_F$ (y en particular, a todo $\beta(\mathbb{R})$). Además, $(\mathbb{R}, \mathscr{M}_F, \mu_F)$ es un EdM completo. ($\mathscr{M}_F \coloneqq \overline{\sigma(\widetilde{\mathcal{I}})^F}$, $\mu_F \coloneqq \overline{\mu_{\tau_F}}$). La medida μ_F se conoce como medida de L-S asociada a F. En particular, para cualquier función de distribución F, existe una única medida de probabilidad $\mathbb{P}_F$ en $(\mathbb{R}, \beta(\mathbb{R}))$ tal que

$$\mathbb{P}_F(I(a,b)) = F(b) - F(a) \quad \forall -\infty \leq a \leq b \leq \infty$$

(En la guía 3 veremos que $F \to \mathbb{P}_F$ es una biyección)

Nota. Los β son los Borelianos y $I(a,b) = (a,b] \cap \mathbb{R}$. (super $F \to 10.26$).

Ejemplo (Importante!). **Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.** Tomando $F = id$ en el Corolario anterior, obtenemos una σ-álgebra $\mathscr{L}(\mathbb{R}) := \mathscr{M}_{id}$ con $\beta(\mathbb{R}) \subseteq \mathscr{L}(\mathbb{R})$ y una medida μ_{id} en $(\mathbb{R}, \mathscr{L}(\mathbb{R}))$ tal que $\mu_{id}(I(a,b)) = b - a \quad \forall -\infty \leq a \leq b \leq \infty$. En particular, de esto se deduce que $\mu_{id}(I) = |I| \quad \forall I \in \mathcal{I}$. Dicha medida recibe el nombre de medida de Lebesgue (en $\mathbb{R}$), y los elementos de $\mathscr{L}(\mathbb{R})$ se dicen conjuntos medibles Lebesgue. Adoptaremos la notación $\mu_{id}(E) := \lambda(E) := |E|$. La medida μ_{id} es la extensión de la noción de longitud que buscábamos y $\mathscr{L}(\mathbb{R})$ son los conjuntos cuya "longitud" podremos medir. Además, los conjuntos de medida nula (de la guía 2), son exactamente aquellos $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$ tal que $\mu_{id}(A) = 0$ (lo veremos más adelante!). ◇

Ejemplo (Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$). Si $\mathcal{I}_d$ son los intervalos en $\mathbb{R}^d$ y definimos $\tau : \mathcal{I}_d \to [0, \infty]$ como $\tau(I) := |I|$, entonces $\mathcal{I}_d$ es una semiálgebra y τ es una premedida σ-aditiva en $\mathcal{I}_d$ (lo veremos después). Por lo tanto, τ se puede extender (de manera única, pues τ es σ-finita) a una medida μ_δ sobre la σ-álgebra $\mathscr{L}(\mathbb{R}^d) = \overline{\sigma(\mathcal{I}_d)^\tau}$, llamada medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$ y $\mathscr{L}(\mathbb{R}^d)$ es la clase de conjuntos medibles Lebesgue en $\mathbb{R}^d$. Al igual que antes, dado $E \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^d)$, notamos $|E| := \mu_\tau(E)$. ◇

1.9 Clase 10 (29/08)

Demostración del teorema de extensión de Carathéodory

Paso 1: Medidas Exteriores

Proposición 1.33. Si $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo,

$$|E|_e = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \ : \ (I_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ intervalos, } E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right\}$$

Demostración.
($\geq$) Tomando $I_1 = I, \ I_{n+1} = \varnothing \quad \forall n \in \mathbb{N}$

($\leq$) Por la σ-subaditividad de λ en $\mathcal{I}$: si $I \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}$ entonces $\lambda(I) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(I_i)$. □

Definición 1.34 (Medida exterior inducida por una premedida). Sea X un espacio, $\mathscr{C}$ una clase de subconjuntos de X y $\tau : \mathscr{C} \to [0, \infty]$ una premedida. Definimos la medida exterior inducida por τ como la aplicación $\mu_\tau^* : \mathscr{P}(X) \to [0, \infty]$ dada por

$$\mu_\tau^*(A) := \inf\{ \sum_{n=1}^{\infty} \tau(C_i) \ : \ (C_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathscr{C} \text{ y } A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \}$$

con la convención de que $\inf \varnothing := \infty$.

Ejemplo. $\mu_\lambda^* =$ *medida exterior de Lebesgue* y la notamos $|E|_e := \mu_\lambda^*(E)$. ◇

Idealmente, nos gustaría que μ_τ^* cumpla

$$\begin{cases} (C1)\ \mu_{\tau^*}(C) = \tau(C) \quad \forall C \in \mathscr{C} \\ (C2)\ \mu_\tau^* \text{ es } \sigma\text{-subaditiva en } \mathscr{P}(X) \end{cases}$$

pero no tienen por qué cumplirse ninguna de la 2:

(C1) Sean $X = \{a,b\}$, $\mathscr{C} = \{\varnothing, \{a\}, X\}$,

$$\tau(A) = \begin{cases} 0 & A = \varnothing \\ 2 & A = \{a\} \\ 1 & A = X \end{cases}$$

Luego, $\tau(\{a\}) = 2$, $\mu_\tau^*(\{a\}) = 1 \neq \tau(\{a\})$.

(C2) Medida exterior de Lebesgue no es σ-aditiva (lo vemos mas adelante!)

Proposición 1.35. Si τ es una premedida sobre una semiálgebra $\mathscr{S}$ que satisface

(E2) τ es σ-subaditiva en $\mathscr{S}$,

entonces $\mu_\tau^*(A) = \tau(A) \quad \forall A \in \mathscr{S}$ (i.e. μ_τ^* cumple (C1)).

Demostración. $\underline{\mu_\tau^*(A) \leq \tau(A).}$ Tomando $C_1 = A \in \mathscr{S}$, $C_{n+1} = \varnothing \in \mathscr{S}$. Luego $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es cubrimiento de A por elementos de $\mathscr{S}$ y luego

$$\mu_\tau^*(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \tau(C_n) = \tau(A)$$

$\underline{\tau(A) \leq \mu_\tau^*(A).}$ Si $(C_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{S}$ es un cubrimiento de $A \in \mathscr{S}$ entonces por (E2), tenemos que $\tau(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \tau(C_n)$. Tomando inf sobre tales cubrimientos, resulta $\tau(A) \leq \mu_\tau^*(A)$. □

Teorema 1.36. Sean X un espacio, $\mathscr{C}$ una clase de subconjuntos de X y $\tau : \mathscr{C} \to [0,\infty]$ una premedida. Entonces,

1. $\mu_\tau^*(\varnothing)$;
2. μ_τ^* es monótona ($A \subseteq B \Rightarrow \mu_\tau^*(A) \leq \mu_\tau^*(B)$);
3. μ_τ^* es σ-subaditiva ($A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \Rightarrow \mu_\tau^*(A) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu_\tau^*(A_n)$.

Demostración.

1. $\mu_\tau^*(\varnothing) \geq 0$ es por definición. Para ver que $\mu_\tau^*(\varnothing) \leq 0$, tomamos el cubrimiento $C_n = \varnothing$ y repetimos el argumento de la Proposición anterior.
2. Si $\mu_\tau^*(B) = \infty$, la desigualdad es inmediata. Si $\mu_\tau^*(B) < \infty$, entonces existen cubrimientos de B por elementos de $\mathscr{S}$. Sea $(C_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{S}$

un cubrimiento de B. Entonces, $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es también cubrimiento de A y, luego, $\mu^*_\tau(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \tau(C_n)$. Como esto es cierto para todo cubrimiento $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de B, tomando ínfimo en la desigualdad anterior sobre tales cubrimientos resulta $\mu^*_\tau(A) \leq \mu^*_\tau(B)$.

3. Dado $\varepsilon > 0$, sea $(C_i^{(n)})_{i\in\mathbb{N}}$ un cubrimiento de A_n tal que $\sum_{i=1}^\infty \tau(C_i^{(n)}) \leq \mu^*_\tau(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$. Luego, notando que $(C_i^{(n)} \ : \ i \in \mathbb{N}, \ n \in \mathbb{N})$ es un cubrimiento de A, obtenemos que

$$\begin{aligned}\mu^*_\tau(A) &\leq \sum_{n=1}^\infty \sum_{i=1}^\infty \tau(C_i^{(n)}) \leq \sum_{n=1}^\infty \left(\mu^*_\tau(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) \\ &\leq \sum_{n=1}^\infty \mu^*_\tau(A_n) + \varepsilon \underbrace{\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^m}}_{1}\end{aligned}$$

Luego, $\mu^*_\tau(A) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu^*_\tau(A_n) + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$. Tomando $\varepsilon \to 0^+$, obtenemos la σ-subaditividad de μ^*_τ.

□

Definición 1.37 (medida exterior). Sea X un espacio. Decimos que $\mu^* : \mathscr{P}(X) \to [0,\infty]$ es una medida exterior si:

1. $\mu^*(\varnothing) = 0$;
2. $A \subseteq B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$;
3. $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \Rightarrow \mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu^*(A_n)$.

Ejemplo.

1. Medidas exteriores generadas por una premedida;
2. Si $(\mu^*_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ son medidas exteriores sobre X, entonces

$$\mu^*(A) := \sup_{\gamma\in\Gamma} \mu^*_\gamma(A)$$

es una medida exterior (Ej. Guía 3).

3. **Medida exterior s-dimensional de Hausdorff en $\mathbb{R}^d$.**

- Si I es un intervalo en $\mathbb{R}^d$, entonces $|rI| = r^d|I|$;
- Si $E \subseteq \mathbb{R}^d$ es medible Lebesgue, entonces $|rE| = r^d|E|$;
- En particular, si $E = B(x,r)$, entonces

$$|E| = |B(0,r)| = |rB(0,1)| = r^d|B(0,1)| = C_d(diamE)^d, \quad C_d := \frac{|B(0,1)|}{2^d}$$

- Si $E \subseteq \mathbb{R}^d$ es "s-dimensional" y $\mathscr{H}_s$ es la medida que queremos, entonces debería valer que

$$\mathscr{H}_s(E \cap B(x,r)) = \mathscr{H}_s(\text{entorno s-dimensional}) \approx (diam\ (\text{entorno}))^s$$

Luego, si cubrimos a E por entornos pequeños $(E \cap B(x,r))_{i\in\mathbb{N}}$, entonces

$$\mathscr{H}_s(E) \approx \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathscr{H}_s(E \cap B(x_i,r_i)) \approx \sum_{i\in\mathbb{N}} (diam(E \cap B(x_i,r_i)))^s.$$

$\diamond$

1.10 Clase 11 (01/09)

Medida exterior de Hausdorff

$\mathscr{H}_s$ = medida que "mide" el tamaño de objetos s-dimensionales en $\mathbb{R}^d$.

Si E es un conjunto s-dimensional en $\mathbb{R}^d$, entonces

$$\mathscr{H}_s(E) \overset{r_1 \ll 1}{\approx} \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathscr{H}_s(E \cap B(x_i,r_i)) \approx \sum_{i\in\mathbb{N}} (\mathrm{diam}(E \cap B(x_i,r_i)))^s.$$

Teniendo esto en cuenta, dados $d \in \mathbb{N},\ s \in [0,d],\ \delta > 0$, definimos:

- $C_\delta \coloneqq \{A \subseteq \mathbb{R}^d \ : \ \mathrm{diam}A < \delta\}$;
- $\mathscr{H}_s^{(\delta)}(E) \coloneqq \inf\{\sum_{n\in\mathbb{N}} (\mathrm{diam}A_n)^s \ : \ (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C_\delta,\ E \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\}$. Donde $\mathscr{H}_s^{(\delta)}(E)$ es la medida exterior inducida por $\tau_s^{(\delta)}$ y $\tau_s^{(\delta)}(A) \coloneqq (\mathrm{diam}A)^s$ la δ-premedida de Hausdorff s-dimensional en $\mathbb{R}^d$ con $\tau_s^{(\delta)} : C_\delta \to [0,\infty]$.

Observar. Si $\delta' < \delta$ entonces $\mathscr{H}_s^{(\delta')}(E) \geq \mathscr{H}_s^{(\delta)}(E)$.

Luego, podemos definir

$$\mathscr{H}_s(E) \coloneqq \sup_{\delta>0} \mathscr{H}_s^{(\delta)}(E) = \lim_{\delta\to 0^+} \mathscr{H}_s^{(\delta)}(E),$$

donde $\mathscr{H}_s$ es la medida exterior de Hausdorff s-dimensional en $\mathbb{R}^d$.

Definición 1.38 (conjunto μ^*-medible)**.** Sea X un espacio y $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ medida exterior. Decimos que $E \subseteq X$ es un conjunto μ^*-medible si

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \quad \forall A \subseteq X.$$

Observar. $\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$ vale siempre (por σ-subaditividad de μ^*. Luego, para ver que R es μ^*-medible, basta ver que $\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$.

Teorema 1.39. Sea μ^* una medida exterior sobre un espacio X. Entonces:

1. $\mu^*(E) = 0 \Rightarrow E$ es μ^*-medible;
2. La clase $\mathscr{M}_{\mu^*}$ de conjuntos μ^*-medibles es una σ-álgebra;
3. La restricción μ de μ^* a $\mathscr{M}_{\mu^*}$ es una medida.

En particular, $(X, \mathscr{M}_{\mu^*}, \mu)$ es un espacio de medida completo.

Demostración.

1. Si $A \subseteq X$, $\mu^*(A \cap E) \leq \mu^*(E) = 0$. Además, por monotonía, $\mu^*(A \cap E^c) \leq \mu^*(A)$. Luego, $\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) = 0 + \mu^*(A \cap E^c) \leq \mu^*(A)$.

2. $\underline{\varnothing \in \mathscr{M}_{\mu^*}}$: Se sigue de (1), pues $\mu^*(\varnothing) = 0$, por definición.

   $\underline{E \in \mathscr{M}_{\mu^*}}$: Directo de la definición de $\mathscr{M}_{\mu^*}$, puesto que es simétrica en E y E^c.

   $\underline{(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathscr{M}_{\mu^*} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathscr{M}_{\mu^*}}$: Esto lo demostramos en tres pasos. En primer lugar, demostramos que si $E_1, E_2 \in \mathscr{M}_{\mu^*}$, entonces $E_1 \cap E_2, E_1 \cup E_2 \in \mathscr{M}_{\mu^*}$.

   > **Demostración.** Si $A \subseteq X$, entonces
   >
   > $$\begin{aligned} \mu^*(A) &= \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_1^c) \\ &= \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap \overbrace{E_1^c \cap E_2}^{E_2 \setminus E_1}) + \mu^*(A \cap \underbrace{E_1^c \cap E_2^c}_{(E_1 \cup E_2)^c}) \\ &\geq \mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) + \mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)^c). \end{aligned}$$
   >
   > Notar que la primera igualdad se tiene por $E_1 \in \mathscr{M}_{\mu^*}$ y la segunda por $E_2 \in \mathscr{M}_{\mu^*}$. Esto implica que $E_1 \cap E_2 \in \mathscr{M}_{\mu^*}$. Pero entonces $E_1 \cap E_2 = ((E_1 \cap E_2)^c)^c = (\underbrace{\underbrace{E_1^c}_{\in \mathscr{M}_{\mu^*}} \cup \underbrace{E_2^c}_{\in \mathscr{M}_{\mu^*}}}_{\in \mathscr{M}_{\mu^*}})^c \in \mathscr{M}_{\mu^*}$ $\square$

   Para el segundo paso, demostramos que si $E_1, \ldots, E_n \in \mathscr{M}_{\mu^*}$ disjuntos, entonces

   $$\mu^*\left(A \cap \left(\biguplus_{i=1}^{n} E_i\right)\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A \cap E_i).$$

   > **Demostración.** La idea es probarlo por inducción. Basta ver el caso $n = 2$ (los otros casos salen iterando éste)
   >
   > $$\begin{aligned} &\mu^*(A \cap (E_1 \uplus E_2)) \\ &= \mu^*(\underbrace{A \cap (E_1 \uplus E_2) \cap E_1}_{A \cap E_1}) + \mu^*(\underbrace{A \cap (E_1 \uplus E_2) \cap E_1^c}_{A \cap E_2}). \end{aligned}$$
   >
   > pues $E_2 \subseteq E_1^c$ por ser disjuntos. $\square$

   Por último, vemos que si $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathscr{M}_{\mu^*}$, entonces $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathscr{M}_{\mu^*}$.

Demostración. Podemos suponer que los E_n son disjuntos. Si no, los cambiamos por

$$\begin{aligned}
&E_1' := E_1 \in \mathscr{M}_{\mu^*}\\
&E_2' := E_2 \setminus E_1 = E_2 \cap E_1^c \in \mathscr{M}_{\mu^*}\\
&\vdots\\
&E_{n+1}' := E_{n+1} \setminus \bigcup_{i=1}^{n} E_i \in \mathscr{M}_{\mu^*},
\end{aligned}$$

y

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}{}^{\text{D}} E_n'.$$

Sea

$$F_n := \bigcup_{i=1}^{n}{}^{\text{D}} E_i \longrightarrow E := \bigcup_{n\in\mathbb{N}}{}^{\text{D}} E_n.$$

Notar que si $F_n \subseteq E$, entonces $E^c \subseteq F_n^c$. Luego, dado $A \subseteq X$, como $F_n \in \mathscr{M}_{\mu^*}$, se tiene

$$\begin{aligned}
\mu^*(A) &= \underbrace{\mu^*(A\cap F_n)}_{=\sum_{i=1}^{n}\mu^*(A\cap E_i)} + \mu^*(\underbrace{A\cap F_n^c}_{\subseteq A\cap E^c})\\
&\geq \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A\cap E_i) + \mu^*(A\cap E^c).
\end{aligned}$$

Tomando $n\to\infty$,

$$\begin{aligned}
\mu^*(A) &\geq \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A\cap E_i) + \mu^*(A\cap E^c)\\
&\geq \mu^*(A\cap E) + \mu^*(A\cap E^c) \qquad (\mu^* \ \sigma\text{-subad.})\\
A\cap E &= \bigcup_{i=1}^{\infty} A\cap E_i.
\end{aligned}$$

□

□

1.11 Clase 12 (03/09)

Teorema 1.40. Si μ^* es una medida exterior sobre un espacio X, entonces:

1. $\mu^*(E) = 0 \Rightarrow E$ es μ^*-medible;
2. $\mathscr{M}_{\mu^*} := \{E \subseteq X \mid E \text{ es } \mu^*\text{-medible}\}$ es σ-álgebra;
3. $\mu := \mu^*\big|_{\mathscr{M}_{\mu^*}}$ es una medida y $(X, \mathscr{M}_{\mu^*}, \mu)$ es completo.

Demostración (3). Debemos ver que si $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{M}_{\mu^*}$ son disjuntos entonces

$$\mu\left(\biguplus_{n=1}^{\infty}\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n)$$

La desigualdad ($\leq$) viene dada ya que μ^* es σ-aditiva. Entonces, basta ver la desigualdad ($\geq$). Para esto, notamos que:

$$\mu^*\left(\biguplus_{n=1}^{\infty} E_n\right) \underset{\substack{\downarrow \\ \mu^*\text{-monótona}}}{\geq} \mu^*\left(\biguplus_{n=1}^{M} E_n\right) \underset{\substack{\downarrow \\ E_n \text{ es } \mu^*\text{-medible } \forall n}}{=} \sum_{n=1}^{M} \mu^*(E_n)$$

Si tomamos $M \longrightarrow \infty$, resulta que

$$\mu^*\left(\biguplus_{n=1}^{\infty} E_n\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n).$$

Entonces, μ es medida. Ahora, tenemos que ver que $(X, \mathscr{M}_{\mu^*}, \mu)$ es completo. Notamos que si $E \subseteq X$ es μ-nulo, es decir, $\exists N \in \mathscr{M}_{\mu^*}$ tal que $E \subseteq N$ y $\mu(N) = 0$, entonces

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(N) = 0$$

Por lo tanto, $\mu^*(E) = 0$ y, por (1), $E \in \mathscr{M}_{\mu^*}$. □

Observar. Esto muestra que si μ es finitamente aditiva ($\Rightarrow$ monótona) y σ-subaditiva, entonces es σ-aditiva (es un si y sólo si).

Proposición 1.41. Si τ es una premedida sobre la semiálgebra $\mathscr{S}$ que es extendible ($E_1 + E_2$) entonces su medida exterior asociada μ_τ^* cumple que:

C1) $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{M}_{\mu^*} \quad (\Rightarrow \sigma(\mathscr{S}) \subseteq \mathscr{M}_{\mu^*})$;

C2) $\mu_\tau^*(A) = \tau(A) \quad \forall A \in \mathscr{S} \Leftrightarrow \mu(A) = \tau(A) \quad \forall A \in \mathscr{S}$ por (C1).

Demostración. (C2) ya se ha visto antes, entonces queda demostrar (C1). Necesitamos ver que si $A \in \mathscr{S}$ entonces

$$\mu_\tau^*(F) \geq \mu_\tau^*(F \cap A) + \mu_\tau^*(F \cap A^c) \quad \forall F \subseteq X.$$

En efecto, si $\mu_\tau^*(F)=\infty$, es evidente. Si $\mu_\tau^*(F)<\infty$, dado $\varepsilon>0$, existen $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}\subseteq\mathscr{S}$ tal que $F\subseteq\bigcup_{i\in\mathbb{N}}B_i$ y $\sum_{i\in\mathbb{N}}\leq\mu_\tau^*(F)+\varepsilon$. Por otro lado, como $A\in\mathscr{S}$, existen $S_1,\dots,S_k$ disjuntos tales que $A^c=\biguplus_{j=1}^k S_j$. Como $B_i=\bigcup_{j=1}^k B_i\cap S_j$, donde $S_0\coloneqq A$, por (E1)

$$\tau(B_i)=\sum_{j=0}^k\tau(B_i\cap S_j).$$

Sumando en i, resulta

$$\begin{aligned}
\mu_\tau^*(F)+\varepsilon\geq\sum_{i\in\mathbb{N}}\tau(B_i)&=\sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{i=0}^k\tau(B_i\cap S_j)\\
&=\sum_{j=0}^k\sum_{i\in\mathbb{N}}\tau(B_i\cap S_j)\\
\left(\substack{B_i\cap S_j\in\mathscr{S}\\ \text{y }(C2)}\right)&=\sum_{j=0}^k\sum_{i\in\mathbb{N}}\mu_\tau^*(B_i\cap S_j)\\
\left(F\cap S_j\subseteq\textstyle\bigcup_{i\in\mathbb{N}}B_i\cap S_j\Rightarrow\right)&\geq\sum_{j=0}^k\mu_\tau^*(F\cap S_j)\\
&=\mu_\tau^*(F\cap A)+\sum_{j=1}^k\mu_\tau^*(F\cap S_j)\\
\left(F\cap S^c\subseteq\textstyle\bigcup_{j=1}^k F\cap S_j\Rightarrow\right)&\geq\mu_\tau^*(F\cap A)+\mu_\tau^*(F\cap A^c).
\end{aligned}$$

Luego, A es μ_τ^*-medible (y se cumple $(C1)$). □

Corolario 1.42 (Carathéodory hasta ahora - Versión 1)**.** Si μ^* es una medida exterior en X, entonces

$$\mathscr{M}_{\mu^*}\coloneqq\{E\subseteq X\ :\ E\text{ es }\mu^*\text{-medible}\}$$

es σ-álgebra y $(X,\mathscr{M}_{\mu^*},\mu^*\big|_{\mathscr{M}_{\mu^*}})$ es un espacio de medida completo.

Además, si τ es una premedida en una semiálgebra $\mathscr{S}$ que es extendible y μ_τ^* es su medida exterior asociada, entonces $\sigma(\mathscr{S})\subseteq\mathscr{M}_{\mu_\tau^*}$ y $\mu_\tau\coloneqq\mu_\tau^*\big|_{\mathscr{M}_{\mu^*}}$ es una medida que se extiende a τ.

Teorema 1.43. Si τ es una premedida sobre una semiálgebra $\mathscr{S}$ que es unívocamente extendible $(E1+E2+E3)$ entonces $\sigma(\mathscr{S}) \subseteq \mathscr{M}_{\mu_\tau^*}$ y además son equivalentes:

1. $A \in \mathscr{M}_{\mu_\tau^*}$;
2. $\exists B \in \sigma(\mathscr{S}),\ N_1 \in \mathscr{M}_{\mu_\tau^*}$ con $\mu_\tau^*(N_1) = 0$ tal que $A = B - N_1$;
3. $\exists C \in \sigma(\mathscr{S}),\ N_2 \in \mathscr{M}_{\mu_\tau^*}$ con $\mu_\tau^*(N_2) = 0$ tal que $A = C \cup N_2$.

Observar. $\mu_\tau^*(A) = \mu_\tau^*(B) = \mu_\tau^*(C)$ y $\mathscr{M}_{\mu_\tau^*}$ es la $\mu_\tau^*\big|_{\sigma(\mathscr{S})}$-completación.

Demostración. Que (2) $\Rightarrow$ (1) y (3) $\Rightarrow$ (1) es inmediato. Veamos que (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3).

$\boxed{(1) \Rightarrow (2)}$ Supongamos primero que $\mu_\tau^*(A) < \infty$. Dado $\varepsilon > 0$, existen $(B_n^{(\varepsilon)})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{S}$ tal que $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n^{(\varepsilon)}$ y $\sum_{n\in\mathbb{N}} \tau(B_n^{(\varepsilon)}) \leq \mu_\tau^*(A) + \varepsilon$. En praticular,

$$\begin{aligned}\mu_\tau^*(A) \leq \mu_\tau^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n^{(\varepsilon)}\right) &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_\tau^*(B_n^{(\varepsilon)}) \\ \left(\substack{\mu_\tau^* \text{ extiende a} \\ \tau \text{ si es extendible}}\right) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \tau(B_n^{(\varepsilon)}) \leq \mu_\tau^*(A) + \varepsilon. \qquad (*)\end{aligned}$$

Sea $B := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n^{(\frac{1}{k})}$. Notemos que $B \in \sigma(\mathscr{S})$ y que $A \subseteq B$. Además, como $A, B \in \mathscr{M}_{\mu^*}$ por hipótesis y $\sigma(\mathscr{S}) \subseteq \mathscr{M}_{\mu^*}$ y $\mu_\tau = \mu_\tau^*\big|_{\mathscr{M}_{\mu_\tau^*}}$ es finitamente aditiva y si definimos $N_1 := B \setminus A$ y $B^{(\frac{1}{k})} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n^{(\frac{1}{k})}$, entonces $N_1 \in \mathscr{M}_{\mu_\tau^*},\ A := B - N_2$, y para todo $k_0 \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\mu_\tau^*(N_1) = \mu_\tau^*(B - A) = \mu_\tau^*\Big(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} (B^{(\frac{1}{k})} \setminus A)\Big) \\ \leq \mu_\tau^*(B^{(\frac{1}{k_0})} - A).\end{aligned}$$

Luego,

$$A \subseteq B^{(\frac{1}{k_0})} \Rightarrow \mu_\tau^*(B^{(\frac{1}{k_0})}) - \mu_\tau^*(A) \leq \frac{1}{k_0} \qquad (*)$$

Tomando $k_0 \longrightarrow \infty$, resulta (1) $\Rightarrow$ (2). □

1.12 Clase 13 (05/09)

Demostración (Continuación clase anterior).

$\boxed{(1) \Rightarrow (2)}$ Si $\mu_\tau^*(A) < \infty$ (LISTO!). Si $\mu_\tau^*(A) = \infty$, tomamos $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq$

$\mathscr{S}$ disjuntos tal que $X = \biguplus_{n\in\mathbb{N}} E_n$ y $\tau(E_n) < \infty$. Luego, $\mu_\tau^*(A \cap E_n) \leq \mu_\tau^*(E_n) = \tau(E_n) < \infty$ (La igualdad es, pues $E_n \in \mathscr{S}, \tau$ σ-sub). Por ende, por lo ya probado, existe $B_n \in \sigma(\mathscr{S})$ tal que $A \cap E_n \subseteq B_n$ y $\mu_\tau(B_n) = \mu_\tau(A \cap E_n) < \infty$. Luego, $B \coloneqq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ y $N \coloneqq B - A$ cumplen lo pedido pues $A = \biguplus_{n\in\mathbb{N}} A \cap E_n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = B$ y

$$\begin{aligned}\mu_\tau(B \setminus A) = \mu_\tau\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \setminus A\right) &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_\tau(B_n \setminus A) \\ &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_\tau(B_n \setminus (A \cap E_n)) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\mu_\tau(B_n) - \mu_\tau(A \cap E_n)}_{0} = 0\end{aligned}$$

.

$\boxed{(2) \Rightarrow (3)}$ Notemos que por $(2) \Rightarrow (1)$, $A \in \mathscr{M}_{\mu_\tau^*}$ si vale (2). En particular, $A^c \in \mathscr{M}_{\mu_\tau^*}$. Luego, por $(1) \Rightarrow (2)$ para A^c, $\exists \widetilde{B} \in \sigma(\mathscr{S})$ y $N_2 \in \mathscr{M}_{\mu_\tau^*}$ con $\mu_\tau(N_2) = 0$ tal que $A^c = \widetilde{B} - N_2$. Pero entonces, tomando $C \coloneqq \widetilde{B}^c$, vemos que $C \in \sigma(\mathscr{S})$ y $A = (A^c)^c = (\widetilde{B} \cap N_2^c)^c = \widetilde{B}^c \cup (N_2^c)^c = C \cup N_2$. $\square$

Observar. $\mathscr{M}_{\mu_\tau^*} = \overline{\sigma(\mathscr{S})}$ (con resp. a $\mu_\tau^*|_{\sigma(\mathscr{S})}$). En efecto, si $A \in \mathscr{M}_{\mu_\tau^*}$ entonces, por $(1) \Rightarrow (3)$, existen $C \in \sigma(\mathscr{S})$ y $N \in \mathscr{M}_{\mu_\tau^*}$ tal que $A = C \cup N$ y $\mu_\tau^*(N) = 0$. Como $N \in \mathscr{M}_{\mu^*}$, por $(1) \Rightarrow (2)$ para N, existe $\widetilde{N} \in \sigma(\mathscr{S})$ tal que $N \subseteq \widetilde{N}$ y $0 = \mu_\tau(N) = \mu_\tau(\widetilde{N})$. Luego, N resulta $\mu_\tau^*\big|_{\sigma(\mathscr{S})}$-nulo y, por lo tanto, $N \in \overline{\sigma(\mathscr{S})}^{\mu_\tau^*|_{\sigma(\mathscr{S})}}$.

Por otro lado, si $A \in \overline{\sigma(\mathscr{S})}$ (resp. a $\mu_\tau^*|_{\sigma(\mathscr{S})}$), entonces $A = B \cup N$ donde $B \in \sigma(\mathscr{S})$ y $\exists \widetilde{N} \in \sigma(\mathscr{S})$ tal que $N \subseteq \widetilde{N}$ y $\mu_\tau^*(N) = 0$, y entonces $A = B \cup N \in \mathscr{M}_{\mu_\tau^*}$ (pues $\sigma(\mathscr{S}) \subseteq \mathscr{M}_{\mu_\tau^*}$).

Observar. En particular, hemos probado:

Proposición 1.44. Si τ es una premedida UE sobre una semiálgebra $\mathscr{S}$ entonces, dado $A \subseteq X$ (no necesariamente μ_τ^*-medible),

$$\begin{aligned}\mu_\tau^*(A) &\coloneqq \min\{\mu_\tau(B) \mid B \in \sigma(\mathscr{S}),\ A \subseteq B\} \\ &= \max\{\mu_\tau(C) \mid C \in \sigma(\mathscr{S}),\ C \subseteq A\}.\end{aligned}$$

Teorema 1.45. $\beta(\mathbb{R}^d) \subsetneq \mathcal{L}(\mathbb{R}^d) \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$. De hecho, $\#\mathscr{L}(\mathbb{R}^d) = 2^c$, $\#\mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \setminus \mathscr{L}(\mathbb{R}^d) = 2^c$, $\#\beta(\mathbb{R}^d) = c$.

Teorema 1.46. Existe $V \subseteq \mathbb{R}$ no medible Lebesgue.

Lema 1.47. $|E+x|_e = |E|_e \quad \forall E \subseteq \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}$. Además, si $E \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$, entonces $E + x \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$ y $|E| = |E+x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Axioma de Elección. Si $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ es una familia de conjuntos disjuntos, no vacíos, entonces existe un conjunto A tal que $A \cap A_\gamma$ tiene exactamente 1 elemento $\forall\gamma \in \Gamma$.

Demostración (lema 1.47)**.** Definimos una relación de equivalencia $\sim$ en $[0,1)$ decretando que $x \sim y$ si $x - y \in \mathbb{Q}$. Por el Axioma de Elección, existe un conjunto $V \subseteq \mathbb{R}$ que tiene exactamente 1 elemento de cada clase de equivalencia de $\sim$. Observemos que:

V1) $(V + Q_1) \cap (V + Q_2) = \varnothing \quad \forall Q_1, Q_2 \in \mathbb{Q}$ distintos. En efecto, si $v_1 + Q_1 = v_2 + Q_2$ con $v_1, v_2 \in V \Rightarrow v_1 - v_2 = Q_2 - Q_1 \in \mathbb{Q} \Rightarrow v_1 \sim v_2 \Rightarrow v_1 = v_2 \Rightarrow Q_1 = Q_2$.

V2) $[0,1) \subseteq \bigcup_{Q\in\mathbb{Q}} V + Q$. Notar que dado $x \in [0,1)$, existe un único $v \in V$ tal que $x \sim v$, i.e., $x - v = Q \in \mathbb{Q} \Rightarrow x = v + Q \in V + Q$.

Si V fuera medible, por $(V2)$ y el Lema,

$$1 == |[0,1)| \leq \sum_{Q\in\mathbb{Q}} |V + Q| = \sum_{Q\in\mathbb{Q}} |V| \Rightarrow |V| > 0$$

Por otro lado, por $(V1)$, $\biguplus^{\mathrm{D}}_{Q\in\mathbb{Q}\cap[0,1)} V + Q \subseteq [0,2)$, y luego, por el Lema y como $|V| > 0$,

$$\begin{aligned}
\infty = \sum_{Q\in\mathbb{Q}\cap[0,1)} |V| = \left| \biguplus^{\mathrm{D}}_{Q\in\mathbb{Q}\cap[0,1)} V + Q \right| \\
&\leq |[0,2)| = |[0,1)| + |[1,2)| \\
&= |[0,1)| + |1 + [0,1)| = 2|[0,1)| \\
&= 2 < \infty,
\end{aligned}$$

lo cual es una contradicción. Luego V no es medible. □

1.13 Clase 15 (10/09)

Teorema 1.48 (Dynkin)**.** Si $\mathscr{L}$ es un λ-sistema que contiene un π-sistema $\mathcal{P}$ entonces $\sigma(\mathcal{P}) \subseteq \mathscr{L}$

Demostración (continuación)**.** Bastaba con probar que $\lambda(\mathcal{P})$ es un π-sistema. Esto es equivalente a probar que

$$\lambda(\mathcal{P}) \subseteq \mathscr{L}_A \coloneqq \{B \subseteq X \ : \ A \cap B \in \lambda(\mathcal{P})\} \quad \forall A \in \lambda(\mathcal{P}).$$

A su vez, para esto basta probar que:

$$\begin{cases} (1)\ \mathscr{L}_A \text{ es un } \lambda\text{-sistema } \forall A \in \lambda(\mathcal{P}) \\ (2)\ \mathcal{P} \subseteq \mathscr{L}_A. \end{cases}$$

Veamos (1).

(λ_1) $X \in \mathscr{L}_A$: Como $A \in \lambda(\mathcal{P})$, se tiene que $A \cap X = A \in \lambda(\mathcal{P})$ $\quad (\Rightarrow X \in \mathscr{L}_A)$ ✓

(λ_2) $B \in \mathscr{L}_A \Rightarrow B^c \in \mathscr{L}_A$: Notar que

$$\begin{aligned} A \cap B^c \in \lambda(\mathcal{P}) &\Leftrightarrow (A \cap B^c)^c = A^c \cup B \in \lambda(\mathcal{P}) \\ &\Leftrightarrow A^c \cup B^c = \underbrace{A^c}_{\substack{\in\lambda(\mathcal{P}) \\ \text{pues} \\ A\in\lambda(\mathcal{P})}} \uplus \underbrace{(B \cap A)}_{\substack{\in\lambda(\mathcal{P}) \\ \text{pues} \\ B\in\mathscr{L}_A}} \in \lambda(\mathcal{P}) \ \left(\substack{\text{cierto pues } \lambda(\mathcal{P}) \\ \text{es } \lambda\text{-sistema}}\right). \end{aligned}$$

(λ_3) Si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{L}_A$ disjuntos, entonces $(A \cap B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también. Además, cada $A \cap B_n \in \lambda(\mathcal{P})$ pues $B_n \in \mathscr{L}_A$. Luego,

$$A \cap \left(\biguplus_{n\in\mathbb{N}} B_n \right) = \biguplus_{n\in\mathbb{N}} A \cap B_n \in \lambda(\mathcal{P}) \quad \left(\Rightarrow \biguplus_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathscr{L}_A \right)$$

Veamos (2). Vamos por casos

1. ($A \in \mathcal{P}$): Si $B \in \mathcal{P}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{P}$, pues $\mathcal{P}$ es un π-sistema, y entonces $A \cap B \in \mathcal{P} \subseteq \lambda(\mathcal{P})$ y así resulta $B \in \mathscr{L}_A$. Como $B \in \mathcal{P}$ era arbitrario, esto nos dice que $\mathcal{P} \subseteq \mathscr{L}_A$. En particular, por (1) resulta que $\lambda(\mathcal{P}) \subseteq \mathscr{L}_A$.

2. ($A \in \lambda(\mathcal{P})$ general): Si tomamos $B \in \mathcal{P}$, entonces $B \in \mathscr{L}_A \Leftrightarrow A \cap B \in \lambda(\mathscr{P}) \Leftrightarrow A \in \mathscr{L}_B$. Luego, lo que queremos mostrar es que, para todo $B \in \mathcal{P}$, $\lambda(\mathcal{P}) \subseteq \mathscr{L}_B$. Pero esto vale por el caso 1. ✓

□

Definición 1.49 (extensión de una premedida). Sean $\tau : \mathscr{S} \to [0, \infty]$ una premedida sobre $\mathscr{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una σ-álgebra. Decimos que una medida $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ es una extensión de τ (sobre $\mathcal{F}$) si:

1. $\mathscr{S} \subseteq \mathcal{F} \quad (\Rightarrow \sigma(\mathscr{S}) \subseteq \mathcal{F})$;

2. $\mu(A) = \tau(A) \quad \forall A \in \mathscr{S}$.

Teorema 1.50 (Unicidad de Extensión de Carathéodory). Sea τ una premedida definida sobre una semiálgebra $\mathscr{S}$ de subconjuntos de un espacio X. Si τ es σ-finita, entonces existe a lo sumo una extensión de μ sobre $\sigma(\mathscr{S})$. En particular, si τ es UE, entonces admite exactamente:

- una extensión sobre $\sigma(\mathscr{S})$, i.e. $\mu_\tau := \mu_\tau^*\big|_{\sigma(\mathscr{S})}$;
- una extensión sobre $\mathscr{M}_{\mu_\tau^*}$, i.e., $\mu_\tau^*\big|_{\mathscr{M}_{\mu_\tau^*}}$.

Demostración. Sean μ, μ' medidas sobre $(X, \mathscr{M})$ tal que $\mu(B) = \mu'(B) \quad \forall B \in \mathscr{S}$. Queremos ver que $\mu(A) = \mu'(A) \quad \forall A \in \mathscr{M}$ (primero cuando $\mathscr{M} = \sigma(\mathscr{S})$ y luego con $\mathscr{M} = \mathscr{M}_{\mu_\tau^*}$):

Caso $\mathscr{M} = \sigma(\mathscr{S})$: Tomamos $(E_n)_n \subseteq \mathscr{S}$ disjuntos tal que $X = \biguplus_{n\in\mathbb{N}} E_n$ y $\tau(E_n) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (podemos, pues τ es σ-finita). Observemos que, por ser μ y μ' medidas en $\sigma(\mathscr{S})$ si $A \in \sigma(\mathscr{S})$, entonces:

$$\mu(A) = \mu\left(\biguplus_{n\in\mathbb{N}} A \cap E_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A \cap E_n) \quad \text{y} \quad \mu'(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu'(A \cap E_n).$$

Luego, bastará con ver que $\mu(A \cap E_n) = \mu'(A \cap E_n) \quad \forall n \in \mathbb{N},\ A \in \sigma(\mathscr{S})$. Luego, fijemos $n \in \mathbb{N}$ y definamos

$$\xi_n := \{A \in \sigma(\mathscr{S}) \ : \ \mu(A \cap E_n) = \mu'(A \cap E_n)\}.$$

Queremos ver que $\sigma(\mathscr{S}) \subseteq \xi_n$. Para ello, como $\mathscr{S}$ es un π-sistema, por Dynkin bastará con ver que

1. ξ_n es un λ-sistema;
2. $\mathscr{S} \subseteq \xi_n$.

Veamos 1.

(λ_1) $X \in \xi_n$: Es cierto, pues $\mu(X \cap E_n) = \mu(E_n) = \tau(E_n) = \mu'(E_n) = \mu'(X \cap E_n)$;

(λ_2) $A \in \xi_n \Rightarrow A^c \in \xi_n$: $\mu(A^c \cap E) = \mu(E_n \setminus A) = \mu(E_n) - \mu(A \cap E_n)$ (la última igualdad se da pues $\mu(E_n) < \infty$). Luego, por (λ_1), esto último es igual a $\mu'(E_n) - \mu'(A \cap E_n) = \mu'(A^c \cap E_n)$;

(λ_3) Si $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \xi_n$ son disjuntos, entonces

$$\begin{aligned}\mu\left(\left(\biguplus_{k\in\mathbb{N}} A_k\right)\cap E_n\right) = \mu\left(\biguplus_{k\in\mathbb{N}} A_k \cap E_n\right) &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k\cap E_n)\\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu'(A_k\cap E_n)\\ &= \mu'\left(\left(\biguplus_{k\in\mathbb{N}} A_k\right)\cap E_n\right).\end{aligned}$$

Luego, $\biguplus_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \xi_n$

Veamos 2. Si $A \in \mathscr{S}$ entonces $A\cap E_n \in \mathscr{S}$ pues $\mathscr{S}$ es un π-sistema, y entonces $\mu(A\cap E_n) = \tau(A\cap E_n) = \mu'(A\cap E_n)$. ✓

<u>Caso cuando $\mathscr{M} = \mathscr{M}_{\mu_\tau^*}$</u> ($\tau$ unívocamente extendible): Sea $A \in \mathscr{M}_{\mu_\tau^*}$. Como τ es σ-finita en $\mathscr{S}$, existen $B, C \in \sigma(\mathscr{S})$ tales que $C \subseteq A \subseteq B$ y $\mu_\tau^*(C) = \mu_\tau^*(A) = \mu_\tau^*(B)$. Entonces, si μ es una extensión de τ sobre $\mathscr{M}_{\mu_\tau^*}$, tenemos que

$$\mu_\tau^*(A) = \underset{\substack{\downarrow\\ C\in\sigma(\mathscr{S}) \text{ y } \exists! \text{ ext. en } \sigma(\mathscr{S})}}{\mu_\tau^*(C) \le \mu(C)} \le \mu(A) \le \underset{\substack{\downarrow\\ B\in\sigma(\mathscr{S})}}{\mu(B) = \mu_\tau^*(B)} = \mu_\tau^*(A)$$

de donde resulta que $\mu(A) = \mu_\tau^*(A)$ y la extensión es única. Además, satisface $\mu(A) = \mu_\tau(B) = \mu_\tau(C)$ para cualquier $C, B \in \sigma(\mathscr{S})$ tal que $C \subseteq A \subseteq B$, $N_1 = A\setminus C$ y $N_2 = B\setminus A$ son μ_τ-nulos. Luego, $\mu = \overline{\mu_\tau}$, donde $\overline{\mu_\tau}$ es la "completación" de μ_τ definida en el Teorema de Extensión de Carathéodory. $\square$

Nota. De la demostración se deduce que si μ y ν son medidas finitas sobre $(X, \mathscr{M})$, entonces

$$\mathscr{L} := \{A \in \mathscr{M} \ : \ \mu(A) = \nu(A)\}$$

es un λ-sistema si y solo si $X \in \mathscr{L}$. En particular, si dos medidas fnitas coinciden en un π-sistema $\mathcal{P}$ que contiene a X, entonces coinciden en $\sigma(\mathcal{P})$.

1.14 Clase 16 (12/09)

Comentario. Si queremos definir una medida <u>finita</u> sobre $(\mathbb{R}, \beta(\mathbb{R}))$, por el comentario de la vez pasada, basta predefinirla en un π-sistema $\mathcal{P}$ que genere a $\beta(\mathbb{R})$ (si queremos unicidad de la extensión a $\beta(\mathbb{R})$).

Una elección natural es tomar $\mathcal{P} := \{(-\infty, x] \ : \ x \in \mathbb{R}\}$ $(\sigma(\mathcal{P}) = \beta(\mathbb{R}))$.

Luego, si μ es una medida que extiende a una premedida τ sobre $\mathcal{P}$, entonces μ queda unívocamente determinada sobre $\widetilde{\mathcal{I}}$:

- $\mu(\mathbb{R}) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(-\infty, n]\right) = \lim_{n\to\infty}\mu((-\infty, n]) = \lim_{n\to\infty}\tau((-\infty, n])$.
- $\mu((a, b]) = \mu((-\infty, b]\setminus(-\infty, b]) = \tau((-\infty, b]) - \tau((-\infty, a])$.

- $\mu((a,\infty)) = \mu(\mathbb{R} - (-\infty, a]) = \lim_{n\to\infty} \tau((-\infty, n]) - \tau((-\infty, a])$.

En conclusión, $\widetilde{\mathcal{I}}$ es la semiálgebra natural que aparece cuando buscamos extender un apremedida definida sobre $\mathcal{P}$ (y necesitamos definirla al menos sobre un π-sistema como $\mathcal{P}$ si queremos unicidad).

Luego, la idea será:

$$\begin{aligned} \tau \text{ sobre } \mathcal{P} \Rightarrow \ & \text{extensión automática a } \widetilde{\mathcal{I}} \\ \Rightarrow \ & \text{extensión a } \beta(\mathbb{R}) \text{ por Carathéodory..} \end{aligned}$$

$\tau((-\infty, x]) =: F_\tau(x)$.

Teorema 1.51. Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monótona creciente. Entonces, $\tau_F : \widetilde{\mathcal{I}} \to [0,\infty]$ dada por $\tau(I(a,b)) = F(b) - F(a)$ $(-\infty \leq a \leq b \leq \infty)$ cumple que:

E1) τ_F es finitamente aditiva;

E2) Si F es continua a derecha, τ_F es σ-subaditiva.

Es decir, si F es de L-S entonces τ_F es extendible (de hecho, es unívocamente extendible)

Demostración.

E1) Sea $I \in \widetilde{\mathcal{I}}$. Luego, $I = I(a,b)$ para ciertos $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$ y $\tau(I) = F(b) - F(a)$. Ahora, si $I = \biguplus_{i=1}^n J_i$ entonces, eventualmente reordenando los J_i, podemos suponer que $J_i = I(a_i, b_i)$ para cada $i = 1, \ldots, n$, donde $a = a_1 \leq b_1 = a_2 \leq \cdots \leq b_{n-1} = a_n \leq b_n = b$. Luego, $\tau(I) = F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n F(b_i) - F(a_i) = \sum_{i=1}^n \tau(J_i)$.

E2) Supongamos primero que $I = (a,b]$ con $-\infty < a < b < \infty$. Si $I \subseteq \bigcup_{i=1}^\infty J_i$ con $J_i \in \widetilde{\mathcal{I}}$, entonces $J_i = (a_i, b_i] \cap \mathbb{R}$ con $-\infty \leq a_i \leq b_i \leq \infty$. Eventualmente, cambiando $a_i \longrightarrow \max\{a, a_i\}$, $b_i \longrightarrow \min\{b, b_i\}$, puedo suponer que $-\infty < a_i \leq b_i < \infty$. Ahora, como F es continua a derecha, dado $\varepsilon > 0$, existen

- $\delta > 0$ tal que $a + \delta < b$ y $F(a+\delta) < F(a) + \varepsilon$;
- $\eta_i > 0$ tal que $F(b_i + \eta_i) < F(b_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$ para cada $i \in \mathbb{N}$.

Luego, los intervalos de la forma $((a_i, b_i + \eta_i))_{i\in\mathbb{N}}$ cubren $[a+\delta, b]$, con lo cual, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $[a+\delta, b] \subseteq \bigcup_{i=1}^N (a_i, b_i + \eta_i)$. Como $a+\delta \in [a+\delta, b]$, existe $i_1 \in \{1, \ldots, N\}$ tal que $a+\delta \in (a_i, b_i + \eta_i) =: I_1$.

1. Si $b \in I_1$, entonces

$$\begin{aligned} F(b) - F(a+\delta) &\leq F(b_{i_1} + \eta_{i_1}) - F(a_{i_1}) \\ &\leq F(b_{i_1}) + \frac{\varepsilon}{2^{i_1}} - F(a_{i_1}) \\ &\leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \Big(F(b_i) + \frac{\varepsilon}{2^i} - F(a_i) \Big) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} F(b_i) - F(a_i) + \varepsilon. \end{aligned}$$

   de modo que $F(b) - F(a) \leq F(b) - F(a+\delta) + \varepsilon \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} F(b_i) + 2\varepsilon$. Tomando $\varepsilon \longrightarrow 0^+$, resulta $\tau(I) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \tau(J_i)$. ✓

2. Si $b \notin I_1$, entonces $b_{i_1} + \eta_{i_1} \leq b$ y, luego, $b_{i_1} + \eta_{i_1} \in [a+\delta, b]$, de modo tal que existe $i_2 \in \{1, \ldots, N\} \setminus \{i_1\}$ tal que $b_{i_1} + \eta_{i_1} \in (a_{i_2}, b_{i_2} + \eta_{i_2}) = I_2$. En general, existen $m \leq N$ e $i_1, \ldots, i_m \in \{1, \ldots, N\}$ tales que

$$a_{i_1} < a + \delta < b_{i_1} + \eta_{i_1} < \cdots < b_{i_{m-1}} - \eta_{i_{m-1}} \leq b < b_{i_m} + \eta_{i_m}$$

   con $b_{i_k} + \eta_{i_k} \in (a_{i_{k+1}}, b_{i_{k+1}} + \eta_{i_{k+1}}) \quad \forall k = 1, \ldots, m$. Luego,

$$\begin{aligned} F(b) - F(a+\delta) &\leq F(b_{i_m} + \eta_{i_m}) - F(a_{i_1}) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{m-1} F(b_{i_{k+1}} + \eta_{i_{k+1}}) - F(b_{i_k} + \eta_{i_k}) \right) \\ &\quad + F(b_{i_1} + \eta_{i_1}) - F(a_{i_1}) \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{m-1} F(b_{i_{k+1}} + \eta_{i_{k+1}}) - F(a_{i_{k+1}}) \right) \\ &\quad + F(b_{i_1} + \eta_{i_1}) - F(a_{i_1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} F(b_i + \eta_i) - F(a_i) \\ &\leq \sum_{i \in \mathbb{N}} F(b_i) - F(a_{i_1}) + \varepsilon. \end{aligned}$$

   Con lo cual, $\tau(I) = F(b) - F(a) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \tau(j_i) + 2\varepsilon$. Tomando $\varepsilon \longrightarrow 0^+$, obtenemos el resultado (en el caso $-\infty < a < b < \infty$).

3. Si $a = b$ entonces $I = \varnothing$ y el resultado es inmediato.

4. Si $a = -\infty$ ó $b = \infty$ y $a \neq b$, entonces

$$(\max\{a, -N\}, \min\{b, N\} \subseteq I \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

   de modo que, si $I \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} J_i$, por el caso anterior,

□