

Ayudantía Topología

Contents

1	Interrogación N°1	2
1.1	Ayudantía 1 (12/08)	2
1.2	Ayudanía 2 (19/08)	4

Chapter 1

Interrogación N°1

1.1 Ayudantía 1 (12/08)

1. Sea X un conjunto infinito.

- (a) Sea $p \in X$ un punto arbitrario en X , demuestre que

$$\tau_1 = \{U \subset X : U = \emptyset \text{ o } p \in U\}$$

es una topología en X . Esta es conocida como **topología del punto particular**.

Proof.

- Claramente $\emptyset, X \in \tau_1$.
- $U_\alpha \in \tau_1 \Rightarrow p \in U_\alpha \Rightarrow p \in \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \Rightarrow \bigcup U_\alpha \in \tau_1$.
- $U_1, \dots, U_n \in \tau_1 \Rightarrow p \in U_i \Rightarrow p \in \bigcap_{i=1}^n U_i \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n U_i \in \tau_1$.

□

- (b) Sea $p \in X$ un punto arbitrario en X , demuestre que

$$\tau_2 = \{U \subset X : U = X \text{ o } p \notin U\}$$

es una topología en X . Esta es conocida como **topología del punto excluido**.

Proof.

- Claramente $\emptyset, X \in \tau_2$ ($p \notin \emptyset$).
- $U_\alpha \in \tau_2 \Rightarrow p \notin U_\alpha \Rightarrow p \notin \bigcup U_\alpha \Rightarrow \bigcup U_\alpha \in \tau_2$.
- $U_1, \dots, U_n \in \tau_2 \Rightarrow p \notin U_i \Rightarrow p \notin \bigcap_{i=1}^n U_i \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n U_i \in \tau_2$.

□

- (c) Determine cuando

$$\tau_3 = \{U \subset X : U = X \text{ o } X \setminus U \text{ es infinito}\}$$

es una topología en X .

Proof. Si $p \in X \Rightarrow \{p\}^c$ es infinito $\Rightarrow \{p\}$ es abierto. Si τ_3 es topología y $q \in X$, entonces

$$\bigcup_{p \neq q} \{p\} = X \setminus \{q\} \Rightarrow (X \setminus \{q\})^c = \{q\}$$

es infinito. Contradicción! * Es decir, τ_3 no es topología. \square

2. Sea $K = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ y \mathcal{B}_K la colección de intervalos abiertos $(a, b) \subset \mathbb{R}$ y de conjuntos de la forma $(a, b) - K$. Es decir,

$$\mathcal{B}_K = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\} \cup \{(a, b) - K\}.$$

- (a) Pruebe que \mathcal{B}_K es una base para X . Denotamos por \mathbb{R}_K la topología generada.

Proof.

- $t \in \mathbb{R}, \exists (a, b) \subset \mathbb{R} : t \in (a, b) \subset \mathcal{B}_K$;
- Notar que la intersección de elementos de la base es un elemento de la base

$$\begin{aligned} (a, b) \cap (c, d) &= (c, b) \\ (a, b) - K \cap (c, d) &= (c, b) - K \\ (a, b) - K \cap (c, d) - K &= (c, b) - K. \end{aligned}$$

\square

- (b) Considere las siguientes topologías en \mathbb{R} :

- $\tau_1 =$ topología estándar en \mathbb{R}
- $\tau_2 =$ topología \mathbb{R}_K
- $\tau_3 =$ topología cofinita en \mathbb{R}
- $\tau_4 =$ topología con $(-\infty, a) = \{x : x < a\}$ como base.

Determine, para cada una de estas topologías, cual de las otras contiene.

3. Sea X conjunto, denotamos por $\tau_{\text{cof}}(X)$ a la topología cofinita en X . Demuestre que

$$\tau_{\text{cof}}(X \times Y) \subseteq \tau_{\text{cof}}(X) \times \tau_{\text{cof}}(Y),$$

es decir, la topología producto de las topologías cofinitas es más finita que la topología cofinita en $X \times Y$. De un ejemplo en que estas topologías no son iguales.

|

Proof. Sea $U \in \tau_{\text{cof}}(X \times Y)$ Entonces,

$$U = X \times Y - \{(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)\} = \bigcap_{i=1}^n X \times Y - \{(a_i, b_i)\}.$$

Queremos ver que $X \times Y - \{(a, b)\}$ es abierto en $\tau_{\text{cof}}(X) \times \tau_{\text{cof}}(Y)$.
 Notar que $\mathcal{B} = \{U \times V : U \in \tau_{\text{cof}}(X), V \in \tau_{\text{cof}}(Y)\}$ es una base para $\tau_{\text{cof}}(X) \times \tau_{\text{cof}}(Y)$. Sea $(c, d) \in X \times Y - \{(a, b)\}$. Supongamos que $c \neq a$.

$$(c, d) \in \underbrace{X \setminus \{a\}}_{\in \tau_{\text{cof}}(X)} \times \underbrace{Y}_{\in \tau_{\text{cof}}(Y)} \subseteq X \times Y - \{(a, b)\}.$$

X infinito. Luego,

$$W = X \times Y \setminus \{a\} \in \tau_{\text{cof}}(X) \times \tau_{\text{cof}}(Y).$$

Pero $W^c = X \times \{a\}$ no es finito. Por lo tanto $W \in \tau_{\text{cof}}(X \times Y)$.
 Entonces $\tau_{\text{cof}}(X \times Y) \subsetneq \tau_{\text{cof}}(X) \times \tau_{\text{cof}}(Y)$. \square

1.2 Ayudanía 2 (19/08)

1. Considere $W \subseteq Y \subseteq X$, τ topología en X , τ' topología inducida en X . Pruebe que las topologías inducidas por τ y τ' en W son iguales.

Proof. U abierto en $\tau|_W \Leftrightarrow U = U_X \cap W$.

$$U \text{ abierto en } \tau'|_W \Leftrightarrow U = \overbrace{(U_X \cap Y)}^{\text{abierto en } \tau'} \cap W \quad \square$$

$$\Leftrightarrow U_X \cap W.$$

2. Considere \mathbb{Z} con la topología profinita y $H \leq \mathbb{Z}$. Pruebe que la topología inducida en H es igual a la topología profinita en H .

Remark. Topología profinita: $G, \tau(G)$. $\mathcal{B} = \{gH : H \triangleleft G, [G : H] < \infty\}$.
 Caso de \mathbb{Z} : si $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, entonces $S(a, b) = \{a + bn : n \in \mathbb{Z}\}$. Luego, $G = \mathbb{Z}$, $H = (b)$, $b \neq 0$.

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \{a(b) : b \neq 0\} \\ &= \{a + bn : n \neq 0\} \\ &= \{S(a, b)\}. \end{aligned}$$

Proof. $\tau(\mathbb{Z}) =$ topología profinita en \mathbb{Z} . Si $H \leq \mathbb{Z}$, $H = (m)$, $m \neq 0, 1$. Notar que se debe demostrar $\tau(H) = \tau(\mathbb{Z})|_H$. (Afirmamos que $\mathcal{B}(H) = \{S(sm, tm) : t \neq 0\}$ es base de $\tau(H)$ y que $\mathcal{B}(\mathbb{Z}) \cap H$ es base de $\tau(\mathbb{Z})|_H$)

\supseteq Sea $x \in B \in \mathcal{B}(\mathbb{Z}) \cap H$, $B = S(a, b) \cap (m)$. Luego, $x = a + bn \in$

(m). $x \in S(x, bm) \subseteq S(a, b) \cap (m)$. Si $y \in S(x, bm)$, entonces

$$\begin{aligned} y &= x + bmk \\ &= a + bn + bmk \\ &= a + b(n + mk) \in S(a, b). \end{aligned}$$

\square Sea $B \in \mathcal{B}(H)$. Luego $B = S(tm, sm)$, $s \neq 0$. Notar que B es un abierto de la base de $\tau(\mathbb{Z})$ y que $B \subseteq H = (m)$. Entonces, $B \in \tau(\mathbb{Z})|_H$. \square

3. X espacio topológico, $A \subseteq X$. Definimos la frontera de A por

$$\partial A := \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}.$$

- (a) $\partial A = \overline{A} \setminus \text{int}(A)$;
- (b) Demuestre que $\text{int}(A)$, ∂A son disjuntos y $\overline{A} = \text{int}(A) \cup \partial A$;
- (c) $\partial A = \emptyset \Leftrightarrow A$ abierto y cerrado;
- (d) U abierto $\Leftrightarrow \partial U = \overline{U} \setminus U$;
- (e) U abierto $\Leftrightarrow U = \text{int}(\overline{U})$?

Proof. (a) Notar que

$$\overline{A} \setminus \text{int}(A) = \overline{A} \cap \text{int}(A)^c.$$

Basta ver que $\text{int}(A)^c = \overline{X \setminus A}$.

$$\begin{aligned} x \in \text{int}(A)^c &\Leftrightarrow \forall U(X), U(X) \not\subseteq A \\ &\Leftrightarrow \forall U(X), U(X) \cap (X - A) \neq \emptyset. \\ x \in \overline{X \setminus A} &\Leftrightarrow \forall U(X), U(X) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset.. \end{aligned}$$

- (b) $\partial A = \overline{A} \setminus \text{int}(A) \Rightarrow \partial A \cap \text{int}(A) = \emptyset$. Luego, $(\bigcup \text{int}(A)) \cup \partial A = \overline{A}$.
- (c) $\partial A = \emptyset \Leftrightarrow A$ abierto y cerrado.

\Rightarrow Basta ver que

$$\begin{aligned} \partial A &= \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} \\ &= A \cap X \setminus A \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$

\Leftarrow Basta ver que

$$\begin{aligned} \partial A = \emptyset = \overline{A} \setminus \text{int}(A) &\Rightarrow \text{int}(A) = \overline{A} \quad (\text{int}(A) \subseteq A \subseteq \overline{A}) \\ &\Rightarrow A = \overline{A} = \text{int}(A) \\ &\Rightarrow A \text{ abierto y cerrado.} \end{aligned}$$

- (d) U abierto $\Leftrightarrow \partial U = \overline{U} \setminus U$

$$\Rightarrow \partial U = \bar{U} \setminus \text{int}(U) = \bar{U} \setminus U.$$

$$\Leftarrow \bar{U} = \text{int}(U) \cup \partial U = \text{int}(U) \cup (\bar{U} \setminus U). \quad \bar{U} \cap (\bar{U} \cap U^c)^c = \bar{U} \setminus (\bar{U} \setminus U) = \text{int}(U). \quad (\text{terminar dem})$$

(e) La igualdad es falsa, pero una de las contenciones es real.

□