Ayudantías Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

August 18, 2025

Contents

Chapter 1

1.1 Ayudantía 2 (18/08)

1. Considere la ecuación canónica

$$y^n = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \tag{1}$$

> **Proof.** Como y es solución de (1), en particular $y \in C^n(I)$. Por lo tanto la función $t \mapsto (t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$, y luego $f(t, y(t), \dots, y^{(n-1)}(t) \in C^1(I)$. Por lo tanto $y \in C^{n+1}(I)$.
> $\boxed{\text{Por inducción en } k \in \mathbb{N}}$ **Caso base:** Facil!
> **Paso inductivo:** Suponer que $\exists\ k \in \mathbb{N}$ tal que se cumple lo anterior y que $f \in C^{k+1}(\mathbb{R}^n)$. Por hipótesis, $y \in C^{n+k}(I)$, y por lo tanto $g(t) = (t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \in C^{n+k-(n-1)}(I) = C^{k+1}(I; \mathbb{R}^n)$. Luego , la composición $(y^{(n)}(t) =)\ f \circ g(t) \in C(I)^{k+1}$, por lo que $y \in C^{n+k+1}(I)$. Concluimos que si $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, entonces $y \in C^\infty(I)$. □

2. Considere el sistema

$$(*) \begin{cases} y''(t) + y(t)^2 = 0 \quad \forall\ t \in [0, 1]; \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases}$$

Demuestre que si y es una solución no trivial de $(*)$, entonces $y(t) > 0\ \forall t \in (0, 1)$.

> **Proof.** Notemos que $y''(t) = -y(t)^2 \leq 0$. Entonces, y es convava; es decir, $\forall a, b \in [0, 1]$, y $\forall s \in [0, 1]$ se tiene la desigualdad
>
> $$y(a + (b - a)s) \geq y(a) + (y(b) - y(a))s. \tag{C}$$
>
> Con $a = 0,\ b = 1$, tenemos que $\forall\ t \in [0, 1]$,
>
> $$y(t) \geq 0 + t(0 - 0) = 0.$$
>
> Ahora, como $y \not\equiv 0,\ \exists t_0 \in (0, 1)$ tal que $y(t_0) > 0$. Sea $t_1 \in (0, t_0)$, y

$s = \frac{t_1}{t_1} \in (0, 1)$. Por (C), con $a = 0,\ b = t_0$, tenemos que

$$\begin{aligned} y(t_1) = y(0 + t_0 \cdot s) &\overset{(C)}{\geq} y(0) + s(y(t_0) - y(0)) \\ &= 0 + s \cdot y(t_0) > 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $y > 0$ en $(0, t_0)$. Por otro lado, para $t_1 \in (t_0, 1)$, definimos $s = \frac{t_1 - t_0}{1 - t_0}$, y ocupando (C) con $a = t_0$ y $b = 1$ obtenemos

$$\begin{aligned} y(t_1) = y(t_0 + s(1 - t_0)) &\overset{(C)}{\geq} y(t_0) + s(y(1) - y(t_0)) \\ &= (1 - s)y(t_0) > 0. \end{aligned}$$

□

3. Considere

$$(+) \begin{cases} y' = \sqrt{|y|}; \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

(a) Resuelva el sistema para $y_0 \neq 0$ y determine el invervalo maximal de la solución.

Proof.

(a) Primero asumamos que $y_0 > 0$. Dividiendo la EDO por $\sqrt{y}$ e integrando alrededor de t_0, obtenemos

$$\begin{aligned} (t - t_0) &= \int_{t_0}^{t} 1 ds = \int_{t_0}^{t} \frac{y'(s)}{\sqrt{y(s)}} ds \overset{(c.v.)}{=} \int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{\sqrt{u}} du \\ &= 2(\sqrt{y(t)} - \sqrt{y_0}) \\ \Rightarrow y(t) &= \left(\frac{t - t_0}{2} + \sqrt{y_0} \right)^2. \end{aligned}$$

Para $y_0 < 0$

$$(t - t_0) = \int_{|y_0|}^{|y(t)|} \frac{-1}{\sqrt{v}} dv = -2(|\sqrt{y(t)}| - \sqrt{|y_0|})$$

Por lo tanto, $y(t) = \left(\sqrt{|y_0|} - \frac{t - t_0}{2} \right)^2$. Sea

$$F_1(r) = \int_{y_0}^{r} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2(\sqrt{r} - \sqrt{y_0}).$$

Esta función es monótona (estricta) en el intervalo $(0, \infty)$ y por lo tanto biyectiva. $F_1(y(t)) = t - t_0$. Calculamos

$$\begin{aligned} T_+ &= \lim_{r \to \infty} F_1(r) = \infty \\ T_- &= \lim_{r \to 0} F_1(r) = -2\sqrt{y_0}. \end{aligned}$$

Entonces $t - t_0 \in (-2\sqrt{y_0}, \infty),\ t \in (t_0 - 2\sqrt{y_0}, \infty)$.

$$F_2(r) = 2(\sqrt{|y_0|} - \sqrt{|r|}, \quad r \in (-\infty, 0)$$

$$T_- = \lim_{r \to -\infty} F_2(r) = \infty$$
$$T_+ = \lim_{r \to \infty} .$$

$\square$