

# Teoría de Integración

Basado en las clases impartidas por Santiago Saglietti en el  
segundo semestre del 2025

# Contents

|          |  |          |
|----------|--|----------|
| <b>1</b> | <b>Integral de Riemann</b>                             | <b>2</b> |
| 1.1      | Clase 1 (04/08) . . . . .                              | 2        |
| 1.2      | Clase 2 (06/08) . . . . .                              | 3        |
| 1.3      | Clase 3 (07/08) . . . . .                              | 4        |
| 1.4      | Clase 4 (08/08) . . . . .                              | 6        |
|          | 1.4.1 Limitaciones de la integral de Riemann . . . . . | 6        |
|          | 1.4.2 Clase 5 (18/08) . . . . .                        | 8        |
| 1.5      | Clase 6 (20/08) . . . . .                              | 10       |
| 1.6      | Clase 7 (22/08) . . . . .                              | 11       |
| 1.7      | Clase 8 (25/08) . . . . .                              | 14       |
| 1.8      | Clase 9 (27/08) . . . . .                              | 16       |
| 1.9      | Clase 10 (29/08) . . . . .                             | 18       |
| 1.10     | Clase 11 (01/09) . . . . .                             | 21       |
| 1.11     | Clase 12 (03/09) . . . . .                             | 23       |
| 1.12     | Clase 13 (05/09) . . . . .                             | 26       |
| 1.13     | Clase 15 (10/09) . . . . .                             | 28       |
| 1.14     | Clase 16 (12/09) . . . . .                             | 31       |

# Chapter 1

## Integral de Riemann

### 1.1 Clase 1 (04/08)

**Definición 1.1** (partición + intervalos). Una partición de un intervalo  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$  es un subconjunto finito  $\Pi \subseteq [a, b]$  tal que  $a, b \in \Pi$ . Denotaremos a las particiones como  $\Pi = \{x_0, \dots, x_n\}$ , donde  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ . Los intervalos  $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 1, \dots, n$  serán llamados intervalos de la partición.

**Observación.** A veces, identificaremos la partición  $\Pi$  con  $(I_i)_{i=1, \dots, n}$ . En tal caso, abusando de la notación, escribiremos  $I_i \in \Pi$  cuando queramos hablar de los intervalos de  $\Pi$ .

**Definición 1.2** (norma de particiones). La norma de una partición  $\Pi$  como  $\|\Pi\| := \max_{i=1, \dots, n} (x_i - x_{i-1}) = \max_{I_i \in \Pi} |I_i|$ .

**Definición 1.3** (partición marcada). Una partición marcada de  $[a, b]$  es un par  $\Pi^* := (\Pi, \varepsilon)$  donde:

- $\Pi = \{x_0, \dots, x_n\}$  es una partición de  $[a, b]$ ;
- $\varepsilon = \{x_1^*, \dots, x_n^*\}$  es una colección de puntos tal que  $x_i^* \in I_i$  para cada  $i = 1, \dots, n$ .

**Observación.** Dada una partición marcada  $\Pi^* = (\Pi, \varepsilon)$ , definimos  $\|\Pi^*\| := \|\Pi\|$ .

**Definición 1.4** (Suma de Riemann). Sean  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  acotada y  $\Pi^* = (\Pi, \varepsilon)$  una partición marcada. Definimos la suma de Riemann de  $f$  asociada a  $\Pi^*$  como:

$$S_R(f; \Pi^*) := \sum_{i=1}^n f(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{I_i \in \Pi} f(x_i^*)|I_i|.$$

## 1.2 Clase 2 (06/08)

**Definición 1.5** (Riemann integrable). Dada  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  acotada, decimos que es Riemann integrable si existe el límite  $\lim_{\|\Pi^*\| \rightarrow 0} S_R(f; \Pi^*)$ . Equivalentemente,  $\exists L \in \mathbb{R}$ , tal que dado cualquier  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  tal que  $\|\Pi^*\| < \delta \Rightarrow |S_R(f; \Pi^*) - L| < \varepsilon$ .

**Observación.** Cuando el límite existe, lo llamamos la integral de Riemann de  $f$  en  $[a, b]$  y lo notamos  $\int_a^b f(x)dx$ .

**Definición 1.6** (Sumas superior e inferior de Darboux). Dadas  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  acotada y  $\Pi = (I_i)_{i=1, \dots, n}$  una partición de  $[a, b]$ , definimos

$$m_{I_i} := \inf_{x \in I_i} f(x), \quad M_{I_i} := \sup_{x \in I_i} f(x) \quad \text{y}$$

$$\underline{S}(f; \Pi) := \sum_{I_i \in \Pi} m_{I_i} |I_i|, \quad \overline{S}(f; \Pi) := \sum_{I_i \in \Pi} M_{I_i} |I_i|.$$

Llamamos a  $\underline{S}(f; \Pi)$  y  $\overline{S}(f; \Pi)$  las sumas inferior y superior de Darboux de  $f$  con respecto a  $\Pi$ , respectivamente.

**Nota.** Como  $m_{I_i} \leq f(x) \leq M_{I_i}$ ,  $\forall x \in I_i$  para toda partición marcada  $\Pi^* = (\Pi; \varepsilon)$ , tenemos  $\underline{S}(f; \Pi) \leq S_R(f; \Pi^*) \leq \overline{S}(f; \Pi)$ .

**Definición 1.7** (refinamiento). Diremos que una partición  $\Pi'$  de  $[a, b]$  es un refinamiento de otra partición de  $[a, b]$ ,  $\Pi$ , si  $\Pi \subseteq \Pi'$ . Equivalentemente, si para todo  $J_i \in \Pi'$  existe  $I_i \in \Pi$  tal que  $J_i \subseteq I_i$ .

**Proposición 1.8.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  acotada. Entonces,

- Si  $\Pi \subseteq \Pi'$  son particiones de  $[a, b]$ ,

$$\underline{S}(f; \Pi) \leq \underline{S}(f; \Pi'), \quad \overline{S}(f; \Pi) \geq \overline{S}(f; \Pi').$$

- Si  $\Pi_1, \Pi_2$  son particiones de  $[a, b]$  cualesquiera,

$$\underline{S}(f; \Pi_1) \leq \overline{S}(f; \Pi_2)$$

**Definición 1.9.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  acotada. Definimos:

- La integral superior (de Darboux) de  $f$  como  $\int_a^b f(x)dx := \inf_{\Pi} \overline{S}(f; \Pi)$ .
- La integral inferior (de Darboux) de  $f$  como  $\int_a^b f(x)dx := \sup_{\Pi} \underline{S}(f; \Pi)$ .

**Teorema 1.10.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  acotada. Entonces,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \underline{S}(f; \Pi) \quad \text{y} \quad \overline{\int_a^b f(x)dx} = \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \overline{S}(f; \Pi).$$

**Observación.** Equivalentemente, para cualquier sucesión  $(\Pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de partición de  $[a, b]$  tal que  $\|\Pi_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , se tiene que

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}(f; \Pi_n) \quad \text{y} \quad \overline{\int_a^b f(x)dx} = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(f; \Pi_n).$$

**Teorema 1.11.** Dada  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  acotada, son equivalentes:

1.  $\int_a^b f(x)dx = \overline{\int_a^b f(x)dx}$  (i.e.,  $f$  es Darboux integrable).
2.  $f$  es Riemann integrable.
3.  $\lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \overline{S}(f; \Pi) - \underline{S}(f; \Pi) = 0$ .
4.  $\forall (\Pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sucesión de particiones de  $[a, b]$  tal que  $\|\Pi_n\| \rightarrow 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(f; \Pi_n) - \underline{S}(f; \Pi_n) = 0.$$

5.  $\exists (\Pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sucesión de particiones de  $[a, b]$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(f; \Pi_n) - \underline{S}(f; \Pi_n) = 0.$$

### 1.3 Clase 3 (07/08)

**Nota.** Las integrales en el sentido de Darboux y el de Riemann coinciden.

**Proposición 1.12.** Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es monótona, entonces es Riemann integrable.

**Observación.** Una función monótona tiene discontinuidades numerables.

**Proposición 1.13.** Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es continua, entonces es Riemann integrable.

En particular, existen funciones Riemann integrables con numerables discontinuidades. De hecho, hay ejemplos con  $c$  (cardinal del continuo) discontinuidades. No obstante, si  $f$  es integral de Riemann, su conjunto de discontinuidades tiene que ser "pequeño".

**Teorema 1.14.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  acotada. Entonces,  $f$  es Riemann Integrable si y sólo si su conjunto de discontinuidades tiene medida nula.

**Definición 1.15** (intervalo). Decimos que un conjunto  $I \subseteq \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$  es un intervalo si satisface

$$x, y \in I \Rightarrow z \in I \text{ para todo } \min x, y \leq z \leq \max x, y.$$

**Ejemplo.** (y propiedades)

- Dados  $a \leq b$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ), los conjuntos  $(a, b)$ ,  $(a, b]$ ,  $[a, b]$ ,  $[a, b)$  son intervalos;
- El conjunto vacío es un intervalo ( $\emptyset = (a, a)$ );
- Los puntos son intervalos.  $I = [\lambda, \lambda]$ ;
- La intersección de intervalos es intervalos.

◇

**Definición 1.16** (intervalo generalizado). Decimos que un conjunto  $I \subseteq \mathbb{R}^d$  es un intervalo si puede escribirse como

$$I = \prod_{k=1}^d I_k$$

donde cada  $I_k$  es un intervalo en  $\mathbb{R}$ . La medida de un intervalo  $I \subseteq \mathbb{R}^d$  se define como

$$|I| := \prod_{k=1}^d |I_k|.$$

**Nota.** Los intervalos en  $\mathbb{R}^d$  heredan las mismas propiedades en  $\mathbb{R}$ :

- Intersección de intervalos en  $\mathbb{R}^d$  es intervalo.
- Si  $I \subseteq J \subseteq \mathbb{R}^d$  son intervalos, entonces  $|I| \leq |J|$ .

**Definición 1.17** (medida nula). Un conjunto  $E \subseteq \mathbb{R}^d$  se dice de medida nula si, dado  $\varepsilon > 0$ , existe una sucesión  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de intervalos de  $\mathbb{R}^d$  tal que

$$E \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \quad \text{y} \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} |I_n| < \varepsilon.$$

**Ejemplo.** (y propiedades)

1. Todo conjunto unitario  $\{x\}, (x \in \mathbb{R}^d)$  tiene medida nula;
2. Toda unión numerable de conjuntos de medida nula tiene medida nula;

3. Cualquier conjunto numerable tiene medida nula;
4. Cualquier subconjunto de un conjunto de medida nula tiene medida nula;
5. Existen conjuntos no numerables de medida nula:
  - En  $\mathbb{R}^d$  con  $d \geq 2$ , los ejes  $\{x : x_1 = 0\}, i = 1, \dots, d$  tiene medida nula.
  - En  $\mathbb{R}$ , el conjunto de cantor tiene medida nula.
6.  $E \subseteq \mathbb{R}^d$  es de medida nula, entonces  $\alpha E$  tiene medida nula  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ .
7.  $E \subseteq \mathbb{R}^d$  es de medida nula, entonces  $E + v$  tiene medida nula  $\forall v \in \mathbb{R}^d$ .
8. Si  $E$  contiene un intervalo no unitario, entonces no tiene medida nula. Notar que:
  - La vuelta no es válida:  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  no contiene intervalos no unitarios pero no puede tener medida nula.
  - De esto se deduce que si  $E \subseteq \mathbb{R}^d$  tiene medida nula. Entonces  $E^c$  es denso (no vale la vuelta:  $E^c = \mathbb{Q}$ ).
9.  $E \subseteq \mathbb{R}^d$  tiene medida nula si y sólo si

$$|E|_e := \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} |I_n| : E \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \right\} = 0, \quad I_n \text{ intervalo } \forall n \in \mathbb{N}.$$

◇

## 1.4 Clase 4 (08/08)

**Teorema 1.18.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  acotada. Entonces

$$f \text{ Riemann integrable} \iff D_f = \{x \in [a, b] : f \text{ discontinua en } x\} \text{ tiene medida nula.}$$

### 1.4.1 Limitaciones de la integral de Riemann

1. Sólo está definida para  $f$  acotada y sobre intervalos  $[a, b]$  acotados. La teoría de integrales impropias resuelve esto.
2. Propiedades del espacio  $\mathcal{R}([a, b]) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ Riemann integrable}\}$ :  
Nos gustaría poder definir una noción de convergencia en  $\mathcal{R}([a, b])$  tal que

$$f_n \rightarrow f \text{ en } \mathcal{R}([a, b]) \Rightarrow \int_a^b f_n \rightarrow \int_a^b f \quad \left( \lim \int_a^b f_n = \int_a^b \lim f_n \right).$$

**Observación.** La convergencia puntal NO cumple esto (punto 2).

**Ejemplo (1).**

- $f_n := n\chi_{(0, \frac{1}{n}]}$  es Riemann integrable en  $[0, 1]$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ;
- $f_n \rightarrow f \cong 0$  puntualmente en  $[0, 1]$ ;
- $\int_0^1 f_n = 1 \not\rightarrow 0 = \int_0^1 f$ .

◇

**Ejemplo (2).**

- Sea  $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una enumeración de  $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ ;
- $f_n := \chi_{\{Q_1, \dots, Q_n\}}$  es Riemann integrable en  $[0, 1]$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ;
- $f_n \rightarrow f := \chi_{\mathbb{Q} \cap [0, 1]}$  puntualmente en  $[0, 1]$ ;
- $f$  no es Riemann integrable.  $\int_0^1 f = 0 \neq 1 = \overline{\int_0^1 f}$ .

◇

**Observación.** La convergencia uniforme SÍ cumple esto, pero es demasiado fuerte.

**Ejercicio (Guía 1).** Sean  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{R}([a, b])$  tales que  $f_n \rightarrow f$  uniformemente en  $[a, b]$ . Entonces,  $f \in \mathcal{R}([a, b])$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$ .

**Ejemplo (3).**

- $f_n(x) := x^n$  en  $[0, 1]$ ,  $f_n \in \mathcal{R}([a, b])$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n \rightarrow \chi = f$  puntualmente;
- $f \in \mathcal{R}([a, b])$  y  $\int_0^1 f_n(x) dx = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 = \int_0^1 f$ ;
- $f_n$  no converge uniformemente a  $f$ .

◇

Resulta que la noción de convergencia "óptima" (la más "débil" que cumple lo que queremos) es la de convergencia en  $L'$ :

$$f_n \xrightarrow{L'} f \text{ si } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f_n - f| = 0.$$

Esta noción de convergencia viene dada por una "norma":

- $\|f\|_{L'} := \int_a^b |f|$  (recordar que  $f \in \mathcal{R}([a, b]) \Rightarrow |f| \in \mathcal{R}([a, b])$ );
- $d_{L'}(f, g) := \|f - g\|_{L'} = \int_a^b |f - g|$ .

**Observación.**  $\|\cdot\|_{L'}$  no es una norma porque  $\|f\|_{L'} = 0 \not\Rightarrow f = 0$ . Decimos que es una *pseudo-norma* y  $d$  una *pseudo-métrica*.

Para arreglar esto, dadas  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , decimos que son *equivalentes* y lo notamos  $f \sim g$  si  $\{x \in [a, b] : f(x) \neq g(x)\}$  tiene medida nula. Resulta que  $\sim$  es una relación de equivalencia y, además,

$$f, g \in \mathcal{R}([a, b]), f \sim g \Rightarrow \int_a^b f = \int_a^b g.$$



Sea  $\overline{\mathcal{R}}([a, b])$  el conjunto de clases de equivalencia de  $\mathcal{R}([a, b])$ , y denotamos por  $\overline{f}$  a la clase de equivalencia de  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ . Con esto,  $\|\overline{f}\|_{L'} := \int_a^b |f| dx$  define una norma en  $\overline{\mathcal{R}}([a, b])$  que se llama la **norma**  $L'$ .

**Observación.** Hay un problema:  $(\overline{\mathcal{R}}([a, b]), \|\cdot\|_{L'})$  NO ES COMPLETO!

3. **TFC:** Si  $f \in \mathcal{R}([a, b])$  es continua en  $x_0 \in [a, b]$ , entonces  $F(x) := \int_a^x f(t) dt$  es derivable en  $x_0$  y  $F'(x_0) = f(x_0)$ . En particular,  $F$  es derivable en  $x$  y  $F'(x) = f(x)$  para todo  $x$  salvo un conjunto de medida nula.

### 1.4.2 Clase 5 (18/08)

**Teorema Fundamental del Cálculo:** Si  $f \in \mathcal{R}([a, b])$  es continua en  $x_0 \in [a, b]$ , entonces  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $F(x) := \int_a^x f(t) dt$  es derivable en  $x = x_0$  y vale  $F'(x_0) = f(x_0)$ . En particular,  $F'(x) = f(x)$  salvo quizás por un conjunto de  $x \in [a, b]$  de medida nula. O sea, podemos integrar y luego derivar y esto es "casi" como no hacer nada. Pero, tenemos problemas:

1. Este "casi" no puede removerse

**Teorema 1.19** (Hankel, 1871). Dado  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ , existe  $f \in \mathcal{R}([a, b])$  tal que  $F(x) := \int_a^x f(t) dt$  no es derivable para ningún  $x$  en un subconjunto denso en  $[a, b]$  (y, en particular, infinito).

2. A veces no podemos componer en el orden inverso

**Teorema 1.20** (Volterra, 1881). Dado  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ , existe  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  derivable en  $[a, b]$ , tal que  $f'$  es acotada en  $[a, b]$  pero  $f' \notin \mathcal{R}([a, b])$ .

### Extendiendo la integral de Riemann

Sean  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  acotada y  $\Pi = \{x_0, \dots, x_n\}$  una partición de  $[a, b]$ . Definimos:

$$\begin{aligned}\Phi_{f, \Pi}(x) &:= m_{I_1} \chi_{[x_0, x_1]}(x) + \sum_{i=2}^n m_{I_i} \chi_{(x_{i-1}, x_i]}(x), \quad m_{I_i} = \inf_{t \in I_i} f(t) \\ &= m_{I_1} \chi_{\{x_0\}}(x) + \sum_{i=1}^n m_{I_i} \chi_{(x_{i-1}, x_i]}(x) \\ \psi_{f, \Pi}(x) &:= M_{I_1} \chi_{\{x_0\}}(x) + \sum_{i=1}^n M_{I_i} \chi_{(x_{i-1}, x_i]}(x), \quad M_{I_i} = \sup_{t \in I_i} f(t).\end{aligned}$$

Observemos que  $\Phi_{f, \Pi}(x) \leq f(x) \leq \psi_{f, \Pi}(x) \quad \forall x \in [a, b]$ . Además,

$$\begin{aligned}\int_a^b \Phi_{f, \Pi}(x) dx &= \underline{S}(f, \Pi), \\ \int_a^b \psi_{f, \Pi}(x) dx &= \overline{S}(f, \Pi).\end{aligned}$$

En particular, si  $f$  es Riemann integrable,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \overline{\int_a^b f(x)dx} = \inf \left\{ \int_a^b \psi_{f,\Pi} : \Pi \text{ partición} \right\} \\ &= \underline{\int_a^b f(x)dx} = \sup \left\{ \int_a^b \Phi_{f,\Pi} : \Pi \text{ partición} \right\}.\end{aligned}$$

**Definición 1.21** (función escalonada). Una función  $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  se dice escalonada si existen  $\Pi = \{x_0, \dots, x_n\}$  partición de  $[a, b]$  y  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$  tales que

$$\Phi|_{(x_{i-1}, x_i)} \equiv c_i \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Notemos que podemos escribir a cualquier función  $\Phi$  escalonada como

$$\begin{aligned}\Phi(x) &:= \sum_{i=1}^n c_i \cdot \chi_{(x_{i-1}, x_i)}(x) + \sum_{i=0}^n \Phi(x_i) \cdot \chi_{\{x_i\}}(x) \\ &= \sum_{i=1}^k c_j \cdot \chi_{A_j}(x).\end{aligned}$$

donde los  $A_j$  son intervalos disjuntos tales que  $\bigsqcup_{j=1}^k A_j = [a, b]$  (se pone una "D" dentro de la unión para denotar que estamos haciendo una unión disjunta).

Si tomamos  $\Phi$  de la forma  $\Phi = \sum_{j=1}^k c_j \cdot \chi_{A_j}$  con  $(A_j)_{j=1, \dots, k}$  disjuntos,  $\bigsqcup_{j=1}^k A_j = [a, b]$  pero  $A_j$  no son necesariamente intervalos, diremos que  $\Phi$  es una función escalonada generalizada. Como para funciones escalonadas "normales", tenemos

$$\int_a^b \Phi(x)dx = \sum_{j=1}^k c_j \cdot |A_j| \left( = \sum_{i=1}^n c_i \cdot |I_i| \right)$$

**La función longitud** Sea  $\mathcal{I}$  la colección de los intervalos en  $\mathbb{R}$ . Definimos la función longitud  $\lambda : \mathcal{I} \rightarrow [0, \infty]$  como  $\lambda(I) := |I|$ .

**Propiedades:**

1.  $\lambda(\emptyset) = 0$ ;
2.  $I_1, I_2 \in \mathcal{I}, I_1 \subseteq I_2 \Rightarrow \lambda(I_1) \leq \lambda(I_2)$  (Monotonía de  $\lambda$ );
3. (Aditividad finita de  $\lambda$ ) Si  $I \in \mathcal{I}$  es tal que  $I = \bigsqcup_{i=1}^n J_i$  con  $J_i \in \mathcal{I}, \forall i = 1, \dots, n, J_i \cap J_j = \emptyset$  con  $i \neq j$ , entonces

$$\lambda(I) = \sum_{i=1}^n \lambda(J_i);$$

4. ( $\sigma$ -aditividad de  $\lambda$ ) Si  $I \in \mathcal{I}$  es tal que  $I = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ , con  $(I_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{I}$  disjuntos, entonces

$$\lambda(I) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(I_i);$$

5. ( $\sigma$ -subaditividad de  $\lambda$ ) Si  $I \in \mathcal{I}$  verifica  $I \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ ,  $(I_i)_{i \in \mathbb{N}}$  intervalos (no necesariamente disjuntos), entonces  $\lambda(I) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(I_i)$ ;
6.  $\lambda(I + x) = \lambda(I)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $I + x := \{a + x : a \in I\}$ ;
7.  $\lambda(\{x\}) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$ .

## 1.5 Clase 6 (20/08)

Nos gustaría extender  $\lambda$  a una clase más grande que  $\mathcal{I}$ . Más precisamente, nos gustaría definir una aplicación  $m : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ , donde  $\mathcal{M}$  es una colección de subconjuntos de  $\mathbb{R}$  tal que  $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{M}$ , de manera tal que, dado  $E \in \mathcal{M}$ ,  $m(E)$  represente la "longitud" de  $E$ . Idealmente, nos gustaría que  $m$  cumpla lo siguiente:

1.  $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ ;
2. Si  $I \in \mathcal{I}$ , entonces  $m(I) = |I|$ ;
3.  $m$  es  $\sigma$ -aditiva ( $E, (E_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}$ ,  $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \Rightarrow m(E) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$ );

**Ejercicio.** (1) + (2) + (3)  $\Rightarrow m$  es monótona,  $\sigma$ -subaditiva y finitamente aditiva.

- 4 Si  $E \in \mathcal{M}$ , entonces  $E + x \in \mathcal{M}$  y  $m(E + x) = m(E) \forall x \in \mathbb{R}$ .

El problema es que, si asumimos el Axioma de Elección, uno puede mostrar que no existe una tal  $m$  que cumpla (1) – (2) – (3) – (4) y, de hecho, no se sabe si existe  $m$  que cumpla (1) – (2) – (3). (Si asumimos la hipótesis del continuo, entonces no existe  $m$  que cumpla (1) – (2) – (3)).

Luego, para construir  $m$  debemos debilitar alguna de las propiedades:

- Si debilitamos (1)  $\Rightarrow$  TEORÍA DE LA MEDIDA;
- Si debilitamos (3), tenemos dos opciones sobre lo que pedir:
  - $\rightarrow$  aditividad finita  $\Rightarrow$  "medidas finitamente aditivas";
  - $\rightarrow$   $\sigma$ -subaditividad  $\Rightarrow$  "medidas exteriores".

Vamos a optar por debilitar (1).

Una manera de extender  $\lambda$  es la siguiente:

- i. Si  $E = \bigcup_{i=1}^n I_i$  entonces definimos  $\lambda(E) := \sum_{i=1}^n \lambda(I_i)$ ;
- ii. Si  $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$  entonces definimos  $\lambda(E) := \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(I_i)$ ;
- iii. La fórmula anterior nos permite definir  $\lambda(E)$  para todo  $E$  abierto en  $\mathbb{R}$ ;
- iv. Para conjuntos mas generales, "aproximar" por abiertos.

**Definición 1.22** (premedida). Sea  $X$  un conjunto no vacío y  $\mathcal{C}$  una colección de subconjuntos de  $X$  tal que  $\emptyset \in \mathcal{C}$ . Diremos que una aplicación  $\tau : \mathcal{C} \rightarrow [0, \infty]$  es una premedida si  $\tau(\emptyset) = 0$ .

**Observación.** El conjunto no vacío  $X$  será llamado un espacio y la colección  $\mathcal{C}$  será llamada una clase (de subconjuntos de  $X$ ).

Intuitivamente,  $\mathcal{C}$  representa la colección de subconjuntos cuyo "tamaño" sabemos medir y  $\tau$  nos da su medida.

**Ejemplo.**

1. **Premedida de Lebesgue:**  $\mathcal{C} := \mathcal{I} := \{I \subseteq \mathbb{R} : I \text{ intervalo}\}$ ,  $\tau(I) := |I|$ .
2. **Premedidas de Lebesgue-Stieltjes:** Sea  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  monótona creciente y continua a derecha ( $\lim_{x \rightarrow x_0}^+ F(x) = F(x_0)$ ). Una función tal se dice una función de Lebesgue-Stieltjes.

◇

Observemos que, por monotonía, existen los límites

$$\left\{ \begin{array}{l} F(\infty) := \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) \\ F(-\infty) := \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) \end{array} \right\} \in \mathbb{R}$$

Sea además la clase  $\tilde{\mathcal{I}}$  de intervalos de  $\mathbb{R}$  dada por

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{I}} := \{I(a, b) : -\infty \leq a \leq b \leq \infty\} \text{ donde } I(a, b) &:= (a, b] \cap \mathbb{R} \\ &= \{(a, b] : -\infty \leq a \leq b < \infty\} \cup \{(a, \infty) : -\infty \leq a < \infty\}. \end{aligned}$$

Definimos la premedida  $\tau_F$  de Lebesgue-Stieltjes asociada a  $F$  como la aplicación  $\tau_F : \tilde{\mathcal{I}} \rightarrow [0, \infty]$ , dada por

$$\tau_F(I(a, b)) = F(b) - F(a).$$

**Nota.** Observar que si  $F(x) = x$  entonces  $\tau_F$  es la premedida de Lebesgue (sobre  $\tilde{\mathcal{I}}$ ).

3. **Premedidas de Probabilidad:** Si  $F$  es una función de L-S tal que  $F(\infty) = 1$  y  $F(-\infty) = 0$ , decimos que  $F$  es una función de distribución (acumulada). En tal caso, la premedida  $\tau_F$  se conoce como premedida de probabilidad o predistribución (en  $\mathbb{R}$ ).

**Observación.**  $\tau_F(\mathbb{R}) = \tau_F(I(-\infty, \infty)) = F(\infty) - F(-\infty) = 1 - 0 = 1$ .

4. **Premedida...**

## 1.6 Clase 7 (22/08)

**Definición 1.23 (semiálgebra).** Sea  $X$  un espacio y  $\mathcal{C}$  una clase de subconjuntos de  $X$ . Decimos que  $\mathcal{C}$  es una semiálgebra (de subconjuntos de  $X$ ) si cumple:

1.  $\emptyset \in \mathcal{C}$ ;
2. ( $\mathcal{C}$  es cerrada por intersecciones finitas)  $A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{C}$ ;
3. Si  $A \in \mathcal{C}$ , existen  $C_1, \dots, C_n \in \mathcal{C}$  disjuntos tal que  $A^c = \bigcup_{i=1}^n C_i$ .

**Ejemplo.**

1. La clase  $\mathcal{I}_d$  de intervalos en  $\mathbb{R}^d$  es una semiálgebra.
2. La clase  $\tilde{\mathcal{I}} := \{(a, b] \cap \mathbb{R} : -\infty \leq a \leq b \leq \infty\}$  es una semiálgebra.
3. Si  $X$  e  $Y$  son espacios y  $\mathcal{C}_X, \mathcal{C}_Y$  son semiálgebras en  $X$  e  $Y$  respectivamente, entonces

$$\mathcal{C}_X \times \mathcal{C}_Y := \{F \times G : F \in \mathcal{C}_X, G \in \mathcal{C}_Y\}$$

es una semiálgebra en  $X \times Y$ , llamada "semiálgebra producto".

◇

**Definición 1.24 (álgebra).** Sean  $X$  un espacio y  $\mathcal{A}$  una clase de subconjuntos de  $X$ . Decimos que  $\mathcal{A}$  es un álgebra (de subconjuntos de  $X$ ) si cumple que:

- (i)  $\emptyset \in \mathcal{A}$ ;
- (ii)  $\mathcal{A}$  es cerrado por intersecciones finitas;
- (iii) ( $\mathcal{A}$  es cerrada por complementos)  $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$ .

Equivalentemente, en presencia de (iii), (ii) se puede reemplazar por:

- (ii') ( $\mathcal{A}$  es cerrada por uniones finitas)  $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$ . (**Dem:** Ejercicio!)

**Ejemplo.**

1.  $X$  espacio,  $\mathcal{A}_1 := \{\emptyset, X\}$ ,  $\mathcal{A}_2 := \mathcal{P}(X)$  son álgebras (donde  $\mathcal{A}$  es llamada el álgebra trivial);
2. Sea  $\mathcal{S}$  una semiálgebra de subconjuntos de un espacio  $X$ . Entonces

$$\mathcal{A} := \left\{ E \subseteq X : \exists S_1, \dots, S_n \in \mathcal{S} \text{ disjuntos tal que } E = \bigcup_{i=1}^n S_i \right\}$$

es un álgebra, llamada el álgebra generada por  $\mathcal{S}$ . Notemos que  $\mathcal{A}(\mathcal{S})$  es el menor álgebra que contiene a  $\mathcal{S}$ :

- (i)  $\mathcal{A}(\mathcal{S})$  es un álgebra y  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{S})$ ;

(ii) Si  $\mathcal{A}'$  es un álgebra con  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}'$  entonces  $\mathcal{A}(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{A}'$ .

◇

**Nota.** Toda álgebra es una semiálgebra.

**Definición 1.25** ( $\sigma$ -álgebra). Una clase (no vacía)  $\mathcal{M}$  de subconjuntos de un espacio  $X$  se dice una  $\sigma$ -álgebra si cumple:

1.  $\emptyset \in \mathcal{M}$ ;
2.  $E \in \mathcal{M} \Rightarrow E^c \in \mathcal{M}$ ;
3.  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathcal{M}$ .

Llamamos al par  $(X, \mathcal{M})$  un espacio medible y a los elementos de  $\mathcal{M}$ , conjuntos medibles.

**Nota.**

1. Todo  $\sigma$ -álgebra es un álgebra;
2. Equivalentemente, en presencia de (1), (3) se puede reemplazar por  
(3'.)  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M} \Rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathcal{M}$ .

**Ejemplo.**

1.  $\sigma$ -álgebra  $\Rightarrow$  álgebra  $\Rightarrow$  semiálgebra (no valen las recíprocas);
2.  $\{\emptyset, X\}, \mathcal{P}(X)$  son  $\sigma$ -álgebras;
3. Si  $(\mathcal{M}_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$  son  $\sigma$ -álgebras, entonces

$$\bigcap_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{M}_\gamma := \{E \subseteq X : E \in \mathcal{M}_\gamma, \forall \gamma \in \Gamma\}$$

es una  $\sigma$ -álgebra.

4. Si  $\mathcal{M}$  es una clase de subconjuntos de  $X$ , entonces

$$\sigma(\mathcal{M}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{M} \text{ } \sigma\text{-álgebra} \\ \mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}}} \mathcal{M}$$

es la  $\sigma$ -álgebra generada por  $\mathcal{M}$ . De hecho,  $\sigma(\mathcal{M})$  es la menor  $\sigma$ -álgebra que contiene a  $\mathcal{C}$ :

- (a)  $\sigma(\mathcal{C})$  es  $\sigma$ -álgebra y  $\mathcal{C} \subseteq \sigma(\mathcal{C})$ ;
- (b) Si  $\mathcal{F}$  es  $\sigma$ -álgebra y  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$  entonces  $\sigma(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{F}$ .
5. Si  $(X, \mathcal{T})$  es un espacio topológico,  $\sigma(\mathcal{T})$  se conoce como la  $\sigma$ -álgebra de Borel, y sus elementos se llaman Borelianos. La notamos  $\beta(X) (= \sigma(\mathcal{T}))$ .

**Ejemplo.**  $\beta(\mathbb{R})$  contiene a todos los abiertos, cerrados, intervalos, conjuntos de tipo  $G_\delta$  y  $F_\sigma, \dots$ . De hecho,  $\beta(\mathbb{R}) = \sigma(\text{cerrados}) = \sigma(\text{compactos}) = \sigma(\mathcal{I}) = \sigma(\widetilde{\mathcal{I}})$ .

**Definición 1.26.** Sea  $\mathcal{C}$  una clase (no vacía) de subconjuntos de  $X$  y  $\mu : \mathcal{C} \rightarrow [0, \infty]$  una función (la llamamos una función de conjuntos). Diremos que:

- (i)  $\mu$  es **monótona** (en  $\mathcal{C}$ ) si  $A, B \in \mathcal{C}, A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$ ;
- (ii)  $\mu$  es **finitamente aditiva** si  $(A_i)_{i=1, \dots, n} \subseteq \mathcal{C}$ , entonces

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i);$$

- (iii)  $\mu$  es  **$\sigma$ -aditiva** si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}$  disjuntos, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i);$$

- (iv)  $\mu$  es  **$\sigma$ -subaditiva** si  $\mu(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_n)$ , para todo  $A \in \mathcal{C}$  y  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}$  tal que  $A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$

## 1.7 Clase 8 (25/08)

**Observación.** Rana da una definición más débil de (4):

$$A \in \mathcal{C}, A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, A_i \in \mathcal{C} \forall i \Rightarrow \mu(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

Ambas definiciones son equivalentes si  $\mathcal{C}$  es una semiálgebra y  $\mu$  es monótona (siempre será el caso para nosotros).

**Definición 1.27** (premedida finita y  $\sigma$ -finita). Una premedida  $\tau : \mathcal{C} \rightarrow [0, \infty]$  se dice:

- 1. **finita** si  $X \in \mathcal{C}$  y  $\tau < \infty$ ;
- 2.  **$\sigma$ -finita** si existen  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}$  disjuntos tales que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = X \quad \text{y} \quad \tau(C_n) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

**Ejemplo.**

1. finita  $\Rightarrow$   $\sigma$ -finita;
2. La función longitud  $\lambda : \mathcal{I} \rightarrow [0, \infty]$  es  $\sigma$ -finita pero no finita;
3. Si  $F$  es una función de L-S, entonces  $\tau_F : \tilde{\mathcal{I}} \rightarrow [0, \infty]$  es siempre  $\sigma$ -finita ( $\tau_F((n, n+1]) = F(n+1) - F(n) < \infty \forall n \in \mathbb{Z}$ ) y es finita si y sólo si  $\tau_F(\mathbb{R}) = \tau_F((-\infty, \infty] \cap \mathbb{R}) = F(\infty) - F(-\infty) < \infty$ .

◇

**Definición 1.28 (medida).** Sea  $(X, \mathcal{M})$  es un espacio medible. Diremos que  $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$  es una medida (en  $(X, \mathcal{M})$ ) si:

1.  $\mu(\emptyset) = 0$ ;
2.  $\mu$  es  $\sigma$ -aditiva en  $\mathcal{M}$  ( $\mu(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ ).

Llamamos a la terna  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  un espacio de medida.

**Objetivo.** Construir un espacio de medida  $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, \mu)$  tal que  $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{M}$  y

$$\begin{cases} \mu(I) = |I| \quad \forall I \in \mathcal{I}, \\ \mu(E+x) = \mu(E) \quad \forall E \in \mathcal{M}. \end{cases}$$

**Ejemplo (Espacios de Probabilidad).** Si  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  es un EdM tal que  $\mu(X) = 1$ ,  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  recibe el nombre de espacios de probabilidad. ◇

- $X$  recibe el nombre de espacio muestral, y se lo nota  $\Omega$  (en lugar de  $X$ );
- $\mathcal{M}$  se suele notar como  $\mathcal{F}$  (ó  $\mathcal{Y}$ ). Sus elementos se dicen eventos;
- $\mu$  recibe el nombre de medida de probabilidad ó distribución y se la nota  $\mathbb{P}$ .

En probabilidad, típicamente se estudian 2 tipos de distribuciones en  $\mathbb{R}$  (o en  $\mathbb{R}^d$ ).

1. **Distribuciones discretas:**  $\exists S \subseteq \mathbb{R}$  numerable y  $(p_x)_{x \in S} \subseteq [0, 1]$  tal que  $\mathbb{P}(A) = \sum_{x \in A \cap S} p_x$ .

**Ejemplo.** Binomial, Geométrica, Poisson, ... ◇

2. **Distribuciones (absolutamente) continuas:**  $\exists f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  "integrable" tal que  $\mathbb{P}(A) = \int_A f(x) dx$ .

**Ejemplo.** Uniforme, Exponencial, Normal, ... ◇

**Propiedades generales de una medida.** Si  $\mu$  es una medida sobre  $(X, \mathcal{M})$ , entonces:

1.  $\mu$  es monótona (en  $\mathcal{M}$ );
2.  $\mu$  es  $\sigma$ -subaditiva;



3.  $\mu$  es **continua por debajo**: si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$  es creciente ( $A_n \subseteq A_{n+1} \forall n$ ) entonces

$$\mu \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

4.  $\mu$  es **continua por arriba**: si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$  es decreciente ( $A_{n+1} \subseteq A_n \forall n$ ) y  $\mu(A_{n_0}) < \infty$  para algún  $n_0$  ( $\Rightarrow \mu(A_n) < \infty \forall n \geq n_0$ ), entonces

$$\mu \left( \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

(**Cuidado!** (4) puede no valer si  $\mu(A_n) = \infty \forall n \in \mathbb{N}$ )

**Definición 1.29** (premedida extendible y unívocamente extendible). Una premedida  $\tau : \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$  definida sobre una semiálgebra de subconjunto de  $X$ , se dice:

1. **Extendible** si es
  - (E1) finitamente aditiva en  $\mathcal{S}$ ;
  - (E2)  $\sigma$ -subaditiva en  $\mathcal{S}$ .
2. **Unívocamente extendible** si es extendible y se cumple
  - (E3)  $\sigma$ -finita

**Observación.** Los nombres de extendible y unívocamente extendible no se encontrarán en el Rana (los puso el profe).

**Teorema 1.30** (Extensión de Carathéodory). Dados un espacio  $X$  y una premedida  $\tau$  sobre una semiálgebra  $\mathcal{S}$  de subconjuntos de  $X$  tal que  $\tau$  es extendible, existe una extensión de  $\tau$  a una medida  $\mu_\tau$  definida sobre  $\sigma(\mathcal{S})$  la  $\sigma$ -álgebra generada por  $\mathcal{S}$ . Más aún, si  $\tau$  es unívocamente extendible, entonces la extensión  $\mu_\tau$  a  $\sigma(\mathcal{S})$  es única.

Por último, si  $\tau$  es unívocamente extendible, entonces se puede extender de manera única a una medida  $\overline{\mu}_\tau$  sobre la  $\mu_\tau$ -completación de  $\sigma(\mathcal{S})$ , i.e. la  $\sigma$ -álgebra  $\overline{\sigma(\mathcal{S})}$  dada por

$$\overline{\sigma(\mathcal{S})} := \{B \cup N : B \in \sigma(\mathcal{S}), \exists \tilde{N} \in \sigma(\mathcal{S}) \text{ con } N \subseteq \tilde{N} \text{ y } \mu_\tau(\tilde{N}) = 0\}$$

mediante la fórmula  $\overline{\mu}_\tau(B \cap N) := \mu_\tau(B)$ .

## 1.8 Clase 9 (27/08)

**Observación.** Si  $\tau : \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$  es  $\sigma$ -aditiva en  $\mathcal{S}$  y  $\mathcal{S}$  es una semiálgebra, entonces  $\tau$  es extendible.

**Observación.** La extensión puede no ser única si  $\tau$  no es  $\sigma$ -finita.

**Ejemplo.**  $\tilde{\mathcal{I}}_{\mathbb{Q}} := \tilde{\mathcal{I}} \cap \mathbb{Q} = \{(a, b] \cap \mathbb{Q} : -\infty \leq a \leq b \leq \infty\}$   $\diamond$

**Nota.**

- $\tilde{\mathcal{I}}_{\mathbb{Q}}$  es una semiálgebra;
- $\sigma(\tilde{\mathcal{I}}_{\mathbb{Q}}) = \sigma(\tilde{\mathcal{I}} \cap \mathbb{Q}) \stackrel{\text{Ej!}}{=} \sigma(\tilde{\mathcal{I}}) \cap \mathbb{Q} = \beta(\mathbb{R}) \cap \mathbb{Q} = \mathcal{P}(\mathbb{Q})$  (9.52)
- $\tau : \tilde{\mathcal{I}}_{\mathbb{Q}} \rightarrow [0, \infty]$ , dada por  $\tau(A) := \begin{cases} 0 & A = \emptyset \\ \infty & A \neq \emptyset, A \in \tilde{\mathcal{I}}_{\mathbb{Q}} \end{cases}$  (Observar que  $\tau$  no es  $\sigma$ -finita)
- Para cada  $r > 0$ ,  $\mu_r : \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \rightarrow [0, \infty]$  dada por  $\mu_r(A) := r(\#A)$  es una extensión de  $\tau$  (y es una medida)

**Definición 1.31** (espacio completo y conjuntos  $\mu$ -nulos). Sea  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  un EdM y definamos

$$\mathcal{N}_{\mu} := \{E \subset X : \exists N \in \mathcal{M} \text{ con } E \subseteq N \text{ y } \mu(N) = 0\}$$

Los elementos de  $\mathcal{N}_{\mu}$  se dicen conjuntos  $\mu$ -nulos. Diremos que  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  es completo si  $\mathcal{N}_{\mu} \subseteq \mathcal{M}$

**Observación.**  $(X, \overline{\sigma(\mathcal{S})}, \overline{\mu_{\delta}})$  es completo. En efecto,  $\mathcal{N}_{\overline{\mu_{\delta}}}$  corresponde al subconjunto de  $\overline{\sigma(\mathcal{S})}$  que se obtiene tomando  $B = \emptyset$ .

**Observación.** Veremos más adelante que las siguientes premedidas son UE:

- (i) Premedidas de Lebesgue-Stieltjes (en particular, la función longitud  $\lambda$  (sobre  $\tilde{\mathcal{I}}$ ) y las premedidas de probabilidad).
- (ii) Premedidas de Lebesgue en  $\mathbb{R}^d$ , con  $d \in \mathbb{N}$ .

En particular;

**Corolario 1.32.** Para cada función  $F$  de Lebesgue-Stieltjes, existe una  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{M}_F$  sobre  $\mathbb{R}$  y una única medida  $\mu_F$  en  $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_F)$  tal que

$$\mu_F(I(a, b)) = F(b) - F(a) \quad \forall -\infty \leq a \leq b \leq \infty$$

Además,  $\beta(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{M}_F$ . Es decir,  $\mu_F$  es una medida que extiende a  $\tau_F$ , a todo  $\mathcal{M}_F$  (y en particular, a todo  $\beta(\mathbb{R})$ ). Además,  $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_F, \mu_F)$  es un EdM completo. ( $\mathcal{M}_F := \overline{\sigma(\tilde{\mathcal{I}})^F}$ ,  $\mu_F := \overline{\mu_{\tau_F}}$ ). La medida  $\mu_F$  se conoce como medida de L-S asociada a  $F$ . En particular, para cualquier función de distribución  $F$ , existe una única medida de probabilidad  $\mathbb{P}_F$  en  $(\mathbb{R}, \beta(\mathbb{R}))$  tal que

$$\mathbb{P}_F(I(a, b)) = F(b) - F(a) \quad \forall -\infty \leq a \leq b \leq \infty$$

(En la guía 3 veremos que  $F \rightarrow \mathbb{P}_F$  es una biyección)

**Nota.** Los  $\beta$  son los Borelianos y  $I(a, b) = (a, b] \cap \mathbb{R}$ . (super  $F \rightarrow 10.26$ ).

**Ejemplo (Importante!). Medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}$ .** Tomando  $F = id$  en el Corolario anterior, obtenemos una  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{L}(\mathbb{R}) := \mathcal{M}_{id}$  con  $\beta(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{L}(\mathbb{R})$  y una medida  $\mu_{id}$  en  $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}))$  tal que  $\mu_{id}(I(a, b)) = b - a \quad \forall -\infty \leq a \leq b \leq \infty$ . En particular, de esto se deduce que  $\mu_{id}(I) = |I| \quad \forall I \in \mathcal{I}$ . Dicha medida recibe el nombre de medida de Lebesgue (en  $\mathbb{R}$ ), y los elementos de  $\mathcal{L}(\mathbb{R})$  se dicen conjuntos medibles Lebesgue. Adoptaremos la notación  $\mu_{id}(E) := \lambda(E) := |E|$ . La medida  $\mu_{id}$  es la extensión de la noción de longitud que buscábamos y  $\mathcal{L}(\mathbb{R})$  son los conjuntos cuya "longitud" podremos medir. Además, los conjuntos de medida nula (de la guía 2), son exactamente aquellos  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$  tal que  $\mu_{id}(A) = 0$  (lo veremos más adelante!).  $\diamond$

**Ejemplo (Medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^d$ ).** Si  $\mathcal{I}_d$  son los intervalos en  $\mathbb{R}^d$  y definimos  $\tau : \mathcal{I}_d \rightarrow [0, \infty]$  como  $\tau(I) := |I|$ , entonces  $\mathcal{I}_d$  es una semiálgebra y  $\tau$  es una premedida  $\sigma$ -aditiva en  $\mathcal{I}_d$  (lo veremos después). Por lo tanto,  $\tau$  se puede extender (de manera única, pues  $\tau$  es  $\sigma$ -finita) a una medida  $\mu_\tau$  sobre la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d) = \sigma(\mathcal{I}_d)^\tau$ , llamada medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^d$  y  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$  es la clase de conjuntos medibles Lebesgue en  $\mathbb{R}^d$ . Al igual que antes, dado  $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ , notamos  $|E| := \mu_\tau(E)$ .  $\diamond$

## 1.9 Clase 10 (29/08)

### Demostración del teorema de extensión de Carathéodory

**Paso 1:** Medidas Exteriores

**Proposición 1.33.** Si  $I \subseteq \mathbb{R}$  es un intervalo,

$$|E|_e = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| : (I_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ intervalos, } E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right\}$$

**Demostración.**

( $\geq$ ) Tomando  $I_1 = I$ ,  $I_{n+1} = \emptyset \quad \forall n \in \mathbb{N}$

( $\leq$ ) Por la  $\sigma$ -subaditividad de  $\lambda$  en  $\mathcal{I}$ : si  $I \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$  entonces  $\lambda(I) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(I_i)$ .  $\square$

**Definición 1.34** (Medida exterior inducida por una premedida). Sea  $X$  un espacio,  $\mathcal{C}$  una clase de subconjuntos de  $X$  y  $\tau : \mathcal{C} \rightarrow [0, \infty]$  una premedida. Definimos la medida exterior inducida por  $\tau$  como la aplicación  $\mu_\tau^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$  dada por

$$\mu_\tau^*(A) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \tau(C_i) : (C_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C} \text{ y } A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \right\}$$

con la convención de que  $\inf \emptyset := \infty$ .

**Ejemplo.**  $\mu_\lambda^* =$  medida exterior de Lebesgue y la notamos  $|E|_e := \mu_\lambda^*(E)$ .  $\diamond$

Idealmente, nos gustaría que  $\mu_\tau^*$  cumpla

$$\begin{cases} (C1) \mu_{\tau^*}(C) = \tau(C) & \forall C \in \mathcal{C} \\ (C2) \mu_\tau^* \text{ es } \sigma\text{-subaditiva en } \mathcal{P}(X) \end{cases}$$

pero no tienen por qué cumplirse ninguna de la 2:

(C1) Sean  $X = \{a, b\}$ ,  $\mathcal{C} = \{\emptyset, \{a\}, X\}$ ,

$$\tau(A) = \begin{cases} 0 & A = \emptyset \\ 2 & A = \{a\} \\ 1 & A = X \end{cases}$$

Luego,  $\tau(\{a\}) = 2$ ,  $\mu_\tau^*(\{a\}) = 1 \neq \tau(\{a\})$ .

(C2) Medida exterior de Lebesgue no es  $\sigma$ -aditiva (lo vemos mas adelante!)

**Proposición 1.35.** Si  $\tau$  es una premedida sobre una semiálgebra  $\mathcal{S}$  que satisface

(E2)  $\tau$  es  $\sigma$ -subaditiva en  $\mathcal{S}$ ,

entonces  $\mu_\tau^*(A) = \tau(A) \quad \forall A \in \mathcal{S}$  (i.e.  $\mu_\tau^*$  cumple (C1)).

**Demostración.**  $\mu_\tau^*(A) \leq \tau(A)$ . Tomando  $C_1 = A \in \mathcal{S}$ ,  $C_{n+1} = \emptyset \in \mathcal{S}$ . Luego  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es cubrimiento de  $A$  por elementos de  $\mathcal{S}$  y luego

$$\mu_\tau^*(A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \tau(C_n) = \tau(A)$$

$\tau(A) \leq \mu_\tau^*(A)$ . Si  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}$  es un cubrimiento de  $A \in \mathcal{S}$  entonces por (E2), tenemos que  $\tau(A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \tau(C_n)$ . Tomando inf sobre tales cubrimientos, resulta  $\tau(A) \leq \mu_\tau^*(A)$ .  $\square$

**Teorema 1.36.** Sean  $X$  un espacio,  $\mathcal{C}$  una clase de subconjuntos de  $X$  y  $\tau : \mathcal{C} \rightarrow [0, \infty]$  una premedida. Entonces,

1.  $\mu_\tau^*(\emptyset)$ ;
2.  $\mu_\tau^*$  es monótona ( $A \subseteq B \Rightarrow \mu_\tau^*(A) \leq \mu_\tau^*(B)$ );
3.  $\mu_\tau^*$  es  $\sigma$ -subaditiva ( $A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \Rightarrow \mu_\tau^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_\tau^*(A_n)$ ).

**Demostración.** 1.  $\mu_\tau^*(\emptyset) \geq 0$  es por definición. Para ver que  $\mu_\tau^*(\emptyset) \leq 0$ , tomamos el cubrimiento  $C_n = \emptyset$  y repetimos el argumento de la Proposición anterior.

2. Si  $\mu_\tau^*(B) = \infty$ , la desigualdad es inmediata. Si  $\mu_\tau^*(B) < \infty$ , entonces existen cubrimientos de  $B$  por elementos de  $\mathcal{S}$ . Sea  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}$

un cubrimiento de  $B$ . Entonces,  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es también cubrimiento de  $A$  y, luego,  $\mu_\tau^*(A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \tau(C_n)$ . Como esto es cierto para todo cubrimiento  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $B$ , tomando ínfimo en la desigualdad anterior sobre tales cubrimientos resulta  $\mu_\tau^*(A) \leq \mu_\tau^*(B)$ .

3. Dado  $\varepsilon > 0$ , sea  $(C_i^{(n)})_{i \in \mathbb{N}}$  un cubrimiento de  $A_n$  tal que  $\sum_{i=1}^{\infty} \tau(C_i^{(n)}) \leq \mu_\tau^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$ . Luego, notando que  $(C_i^{(n)} : i \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N})$  es un cubrimiento de  $A$ , obtenemos que

$$\begin{aligned} \mu_\tau^*(A) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \tau(C_i^{(n)}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left( \mu_\tau^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \right) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_\tau^*(A_n) + \varepsilon \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}}_1 \end{aligned}$$

Luego,  $\mu_\tau^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_\tau^*(A_n) + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$ . Tomando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , obtenemos la  $\sigma$ -subaditividad de  $\mu_\tau^*$ . □

**Definición 1.37** (medida exterior). Sea  $X$  un espacio. Decimos que  $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$  es una medida exterior si:

1.  $\mu^*(\emptyset) = 0$ ;
2.  $A \subseteq B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ ;
3.  $A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \Rightarrow \mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$ .

**Ejemplo.**

1. Medidas exteriores generadas por una premedida;
2. Si  $(\mu_\gamma^*)_{\gamma \in \Gamma}$  son medidas exteriores sobre  $X$ , entonces

$$\mu^*(A) := \sup_{\gamma \in \Gamma} \mu_\gamma^*(A)$$

es una medida exterior (Ej. Guía 3).

3. **Medida exterior  $s$ -dimensional de Hausdorff en  $\mathbb{R}^d$ .**

- Si  $I$  es un intervalo en  $\mathbb{R}^d$ , entonces  $|rI| = r^d |I|$ ;
- Si  $E \subseteq \mathbb{R}^d$  es medible Lebesgue, entonces  $|rE| = r^d |E|$ ;
- En particular, si  $E = B(x, r)$ , entonces

$$|E| = |B(0, r)| = |rB(0, 1)| = r^d |B(0, 1)| = C_d (\text{diam } E)^d, \quad C_d := \frac{|B(0, 1)|}{2^d}$$

- Si  $E \subseteq \mathbb{R}^d$  es " $s$ -dimensional" y  $\mathcal{H}_s$  es la medida que queremos, entonces debería valer que

$$\mathcal{H}_s(E \cap B(x, r)) = \mathcal{H}_s(\text{entorno } s\text{-dimensional}) \approx (\text{diam (entorno)})^s$$

Luego, si cubrimos a  $E$  por entornos pequeños  $(E \cap B(x, r))_{i \in \mathbb{N}}$ , entonces

$$\mathcal{H}_s(E) \approx \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_s(E \cap B(x_i, r_i)) \approx \sum_{i \in \mathbb{N}} (\text{diam}(E \cap B(x_i, r_i)))^s.$$

◇

## 1.10 Clase 11 (01/09)

### Medida exterior de Hausdorff

$\mathcal{H}_s$  = medida que "mide" el tamaño de objetos s-dimensionales en  $\mathbb{R}^d$ .

Si  $E$  es un conjunto s-dimensional en  $\mathbb{R}^d$ , entonces

$$\mathcal{H}_s(E) \stackrel{r_1 \leq 1}{\approx} \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_s(E \cap B(x_i, r_i)) \approx \sum_{i \in \mathbb{N}} (\text{diam}(E \cap B(x_i, r_i)))^s.$$

Teniendo esto en cuenta, dados  $d \in \mathbb{N}$ ,  $s \in [0, d]$ ,  $\delta > 0$ , definimos:

- $C_\delta := \{A \subseteq \mathbb{R}^d : \text{diam} A < \delta\}$ ;
- $\mathcal{H}_s^{(\delta)}(E) := \inf\{\sum_{n \in \mathbb{N}} (\text{diam} A_n)^s : (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq C_\delta, E \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\}$ .  
Donde  $\mathcal{H}_s^{(\delta)}(E)$  es la medida exterior inducida por  $\tau_s^{(\delta)}$  y  $\tau_s^{(\delta)}(A) := (\text{diam} A)^s$  la  $\delta$ -premedida de Hausdorff s-dimensional en  $\mathbb{R}^d$  con  $\tau_s^{(\delta)} : C_\delta \rightarrow [0, \infty]$ .

**Observar.** Si  $\delta' < \delta$  entonces  $\mathcal{H}_s^{(\delta')}(E) \geq \mathcal{H}_s^{(\delta)}(E)$ .

Luego, podemos definir

$$\mathcal{H}_s(E) := \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_s^{(\delta)}(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mathcal{H}_s^{(\delta)}(E),$$

donde  $\mathcal{H}_s$  es la medida exterior de Hausdorff s-dimensional en  $\mathbb{R}^d$ .

**Definición 1.38** (conjunto  $\mu^*$ -medible). Sea  $X$  un espacio y  $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$  medida exterior. Decimos que  $E \subseteq X$  es un conjunto  $\mu^*$ -medible si

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \quad \forall A \subseteq X.$$

**Observar.**  $\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$  vale siempre (por  $\sigma$ -subaditividad de  $\mu^*$ ). Luego, para ver que  $R$  es  $\mu^*$ -medible, basta ver que  $\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$ .

**Teorema 1.39.** Sea  $\mu^*$  una medida exterior sobre un espacio  $X$ . Entonces:

1.  $\mu^*(E) = 0 \Rightarrow E$  es  $\mu^*$ -medible;
2. La clase  $\mathcal{M}_{\mu^*}$  de conjuntos  $\mu^*$ -medibles es una  $\sigma$ -álgebra;
3. La restricción  $\mu$  de  $\mu^*$  a  $\mathcal{M}_{\mu^*}$  es una medida.

En particular,  $(X, \mathcal{M}_{\mu^*}, \mu)$  es un espacio de medida completo.

**Demostración.**

1. Si  $A \subseteq X$ ,  $\mu^*(A \cap E) \leq \mu^*(E) = 0$ . Además, por monotonía,  $\mu^*(A \cap E^c) \leq \mu^*(A)$ . Luego,  $\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) = 0 + \mu^*(A \cap E^c) \leq \mu^*(A)$ .
2.  $\emptyset \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ : Se sigue de (1), pues  $\mu^*(\emptyset) = 0$ , por definición.  
 $E \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ : Directo de la definición de  $\mathcal{M}_{\mu^*}$ , puesto que es simétrica en  $E$  y  $E^c$ .  
 $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}_{\mu^*} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ : Esto lo demostramos en tres pasos. En primer lugar, demostramos que si  $E_1, E_2 \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ , entonces  $E_1 \cap E_2, E_1 \cup E_2 \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ .

**Demostración.** Si  $A \subseteq X$ , entonces

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &= \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_1^c) \\ &= \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap \overbrace{E_1^c \cap E_2}^{E_2 \setminus E_1}) + \mu^*(A \cap \underbrace{E_1^c \cap E_2^c}_{(E_1 \cup E_2)^c}) \\ &\geq \mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) + \mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)^c). \end{aligned}$$

Notar que la primera igualdad se tiene por  $E_1 \in \mathcal{M}_{\mu^*}$  y la segunda por  $E_2 \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ . Esto implica que  $E_1 \cap E_2 \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ . Pero entonces  $E_1 \cap E_2 = ((E_1 \cap E_2)^c)^c = (\underbrace{E_1^c}_{\in \mathcal{M}_{\mu^*}} \cup \underbrace{E_2^c}_{\in \mathcal{M}_{\mu^*}})^c \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ .  $\square$

Para el segundo paso, demostramos que si  $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{M}_{\mu^*}$  disjuntos, entonces

$$\mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right)\right) = \sum_{i=1}^n \mu^*(A \cap E_i).$$

**Demostración.** La idea es probarlo por inducción. Basta ver el caso  $n = 2$  (los otros casos salen iterando éste)

$$\begin{aligned} &\mu^*(A \cap (E_1 \uplus E_2)) \\ &= \mu^*(\underbrace{A \cap (E_1 \uplus E_2) \cap E_1}_{A \cap E_1}) + \mu^*(\underbrace{A \cap (E_1 \uplus E_2) \cap E_1^c}_{A \cap E_2}). \end{aligned}$$

pues  $E_2 \subseteq E_1^c$  por ser disjuntos.  $\square$

Por último, vemos que si  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}_{\mu^*}$ , entonces  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ .

**Demostración.** Podemos suponer que los  $E_n$  son disjuntos. Si no, los cambiamos por

$$\begin{aligned} E'_1 &:= E_1 \in \mathcal{M}_{\mu^*} \\ E'_2 &:= E_2 \setminus E_1 = E_2 \cap E_1^c \in \mathcal{M}_{\mu^*} \\ &\vdots \\ E'_{n+1} &:= E_{n+1} \setminus \bigcup_{i=1}^n E_i \in \mathcal{M}_{\mu^*}, \end{aligned}$$

y

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E'_n.$$

Sea

$$F_n := \bigcup_{i=1}^n E_i \longrightarrow E := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n.$$

Notar que si  $F_n \subseteq E$ , entonces  $E^c \subseteq F_n^c$ . Luego, dado  $A \subseteq X$ , como  $F_n \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ , se tiene

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &= \underbrace{\mu^*(A \cap F_n)}_{= \sum_{i=1}^n \mu^*(A \cap E_i)} + \underbrace{\mu^*(A \cap F_n^c)}_{\subseteq A \cap E^c} \\ &\geq \sum_{i=1}^n \mu^*(A \cap E_i) + \mu^*(A \cap E^c). \end{aligned}$$

Tomando  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &\geq \sum_{i=1}^n \mu^*(A \cap E_i) + \mu^*(A \cap E^c) \\ &\geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \quad (\mu^* \text{ } \sigma\text{-subad.}) \\ A \cap E &= \bigcup_{i=1}^{\infty} A \cap E_i. \end{aligned}$$

□

□

## 1.11 Clase 12 (03/09)



**Teorema 1.40.** Si  $\mu^*$  es una medida exterior sobre un espacio  $X$ , entonces:

1.  $\mu^*(E) = 0 \Rightarrow E$  es  $\mu^*$ -medible;
2.  $\mathcal{M}_{\mu^*} := \{E \subseteq X \mid E \text{ es } \mu^*\text{-medible}\}$  es  $\sigma$ -álgebra;
3.  $\mu := \mu^*|_{\mathcal{M}_{\mu^*}}$  es una medida y  $(X, \mathcal{M}_{\mu^*}, \mu)$  es completo.

**Demostración (3).** Debemos ver que si  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}_{\mu^*}$  son disjuntos entonces

$$\mu \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n)$$

La desigualdad  $(\leq)$  viene dada ya que  $\mu^*$  es  $\sigma$ -aditiva. Entonces, basta ver la desigualdad  $(\geq)$ . Para esto, notamos que:

$$\begin{array}{ccc} \mu^* \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) & \geq & \mu^* \left( \bigcup_{n=1}^M E_n \right) = \sum_{n=1}^M \mu^*(E_n) \\ & \downarrow & \downarrow \\ & \mu^*\text{-monótona} & E_n \text{ es } \mu^*\text{-medible } \forall n \end{array}$$

Si tomamos  $M \rightarrow \infty$ , resulta que

$$\mu^* \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n).$$

Entonces,  $\mu$  es medida. Ahora, tenemos que ver que  $(X, \mathcal{M}_{\mu^*}, \mu)$  es completo. Notamos que si  $E \subseteq X$  es  $\mu$ -nulo, es decir,  $\exists N \in \mathcal{M}_{\mu^*}$  tal que  $E \subseteq N$  y  $\mu(N) = 0$ , entonces

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(N) = 0$$

Por lo tanto,  $\mu^*(E) = 0$  y, por (1),  $E \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ . □

**Observar.** Esto muestra que si  $\mu$  es finitamente aditiva ( $\Rightarrow$  monótona) y  $\sigma$ -subaditiva, entonces es  $\sigma$ -aditiva (es un si y sólo si).

**Proposición 1.41.** Si  $\tau$  es una premedida sobre la semiálgebra  $\mathcal{S}$  que es extendible  $(E_1 + E_2)$  entonces su medida exterior asociada  $\mu_{\tau}^*$  cumple que:

- C1)  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{M}_{\mu^*} \quad (\Rightarrow \sigma(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{M}_{\mu^*})$ ;
- C2)  $\mu_{\tau}^*(A) = \tau(A) \quad \forall A \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \mu(A) = \tau(A) \quad \forall A \in \mathcal{S} \text{ por (C1)}.$

**Demostración.** (C2) ya se ha visto antes, entonces queda demostrar (C1). Necesitamos ver que si  $A \in \mathcal{S}$  entonces

$$\mu_{\tau}^*(F) \geq \mu_{\tau}^*(F \cap A) + \mu_{\tau}^*(F \cap A^c) \quad \forall F \subseteq X.$$

En efecto, si  $\mu_\tau^*(F) = \infty$ , es evidente. Si  $\mu_\tau^*(F) < \infty$ , dado  $\varepsilon > 0$ , existen  $(B_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}$  tal que  $F \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i$  y  $\sum_{i \in \mathbb{N}} \mu_\tau(B_i) \leq \mu_\tau^*(F) + \varepsilon$ . Por otro lado, como  $A \in \mathcal{S}$ , existen  $S_1, \dots, S_k$  disjuntos tales que  $A^c = \bigsqcup_{j=1}^k S_j$ . Como  $B_i = \bigcup_{j=1}^k B_i \cap S_j$ , donde  $S_0 := A$ , por (E1)

$$\tau(B_i) = \sum_{j=0}^k \tau(B_i \cap S_j).$$

Sumando en  $i$ , resulta

$$\begin{aligned} \mu_\tau^*(F) + \varepsilon &\geq \sum_{i \in \mathbb{N}} \tau(B_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j=0}^k \tau(B_i \cap S_j) \\ &= \sum_{j=0}^k \sum_{i \in \mathbb{N}} \tau(B_i \cap S_j) \\ &\stackrel{\left( \begin{smallmatrix} B_i \cap S_j \in \mathcal{S} \\ \text{y (C2)} \end{smallmatrix} \right)}{=} \sum_{j=0}^k \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu_\tau^*(B_i \cap S_j) \\ &\stackrel{(F \cap S_j \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i \cap S_j \Rightarrow)}{\geq} \sum_{j=0}^k \mu_\tau^*(F \cap S_j) \\ &= \mu_\tau^*(F \cap A) + \sum_{j=1}^k \mu_\tau^*(F \cap S_j) \\ &\stackrel{(F \cap S^c \subseteq \bigcup_{j=1}^k F \cap S_j \Rightarrow)}{\geq} \mu_\tau^*(F \cap A) + \mu_\tau^*(F \cap A^c). \end{aligned}$$

Luego,  $A$  es  $\mu_\tau^*$ -medible (y se cumple (C1)). □

**Corolario 1.42** (Carathéodory hasta ahora - Versión 1). Si  $\mu^*$  es una medida exterior en  $X$ , entonces

$$\mathcal{M}_{\mu^*} := \{E \subseteq X : E \text{ es } \mu^*\text{-medible}\}$$

es  $\sigma$ -álgebra y  $(X, \mathcal{M}_{\mu^*}, \mu^*|_{\mathcal{M}_{\mu^*}})$  es un espacio de medida completo.

Además, si  $\tau$  es una premedida en una semiálgebra  $\mathcal{S}$  que es extendible y  $\mu_\tau^*$  es su medida exterior asociada, entonces  $\sigma(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{M}_{\mu_\tau^*}$  y  $\mu_\tau := \mu_\tau^*|_{\mathcal{M}_{\mu_\tau^*}}$  es una medida que se extiende a  $\tau$ .

**Teorema 1.43.** Si  $\tau$  es una premedida sobre una semiálgebra  $\mathcal{S}$  que es unívocamente extendible ( $E1 + E2 + E3$ ) entonces  $\sigma(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{M}_{\mu_\tau^*}$  y además son equivalentes:

1.  $A \in \mathcal{M}_{\mu_\tau^*}$ ;
2.  $\exists B \in \sigma(\mathcal{S}), N_1 \in \mathcal{M}_{\mu_\tau^*}$  con  $\mu_\tau^*(N_1) = 0$  tal que  $A = B - N_1$ ;
3.  $\exists C \in \sigma(\mathcal{S}), N_2 \in \mathcal{M}_{\mu_\tau^*}$  con  $\mu_\tau^*(N_2) = 0$  tal que  $A = C \cup N_2$ .

**Observar.**  $\mu_\tau^*(A) = \mu_\tau^*(B) = \mu_\tau^*(C)$  y  $\mathcal{M}_{\mu_\tau^*}$  es la  $\mu_\tau^*|_{\sigma(\mathcal{S})}$ -completación.

**Demostración.** Que (2)  $\Rightarrow$  (1) y (3)  $\Rightarrow$  (1) es inmediato. Veamos que (1)  $\Rightarrow$  (2)  $\Rightarrow$  (3).

(1)  $\Rightarrow$  (2) Supongamos primero que  $\mu_\tau^*(A) < \infty$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , existen  $(B_n^{(\varepsilon)})_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}$  tal que  $A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n^{(\varepsilon)}$  y  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \tau(B_n^{(\varepsilon)}) \leq \mu_\tau^*(A) + \varepsilon$ . En particular,

$$\begin{aligned} \mu_\tau^*(A) &\leq \mu_\tau^*\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n^{(\varepsilon)}\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_\tau^*(B_n^{(\varepsilon)}) \\ &\left(\begin{array}{l} \mu_\tau^* \text{ extiende a } \\ \tau \text{ si es extendible} \end{array}\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \tau(B_n^{(\varepsilon)}) \leq \mu_\tau^*(A) + \varepsilon. \end{aligned} \quad (*)$$

Sea  $B := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n^{(\frac{1}{k})}$ . Notemos que  $B \in \sigma(\mathcal{S})$  y que  $A \subseteq B$ . Además, como  $A, B \in \mathcal{M}_{\mu_\tau^*}$  por hipótesis y  $\sigma(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{M}_{\mu_\tau^*}$  y  $\mu_\tau = \mu_\tau^*|_{\mathcal{M}_{\mu_\tau^*}}$  es finitamente aditiva y si definimos  $N_1 := B \setminus A$  y  $B^{(\frac{1}{k_0})} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n^{(\frac{1}{k_0})}$ , entonces  $N_1 \in \mathcal{M}_{\mu_\tau^*}$ ,  $A := B - N_1$ , y para todo  $k_0 \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \mu_\tau^*(N_1) &= \mu_\tau^*(B - A) = \mu_\tau^*\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} (B^{(\frac{1}{k})} \setminus A)\right) \\ &\leq \mu_\tau^*(B^{(\frac{1}{k_0})} - A). \end{aligned}$$

Luego,

$$A \subseteq B^{(\frac{1}{k_0})} \Rightarrow \mu_\tau^*(B^{(\frac{1}{k_0})}) - \mu_\tau^*(A) \leq \frac{1}{k_0} \quad (*)$$

Tomando  $k_0 \rightarrow \infty$ , resulta (1)  $\Rightarrow$  (2).  $\square$

## 1.12 Clase 13 (05/09)

**Demostración** (Continuación clase anterior).

(1)  $\Rightarrow$  (2) Si  $\mu_\tau^*(A) < \infty$  (LISTO!). Si  $\mu_\tau^*(A) = \infty$ , tomamos  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}$  disjuntos tal que  $X = \biguplus_{n \in \mathbb{N}} E_n$  y  $\tau(E_n) < \infty$ . Luego,  $\mu_\tau^*(A \cap E_n) \leq$

$\mu_\tau^*(E_n) = \tau(E_n) < \infty$  (La igualdad es, pues  $E_n \in \mathcal{S}$ ,  $\tau$   $\sigma$ -sub). Por ende, por lo ya probado, existe  $B_n \in \sigma(\mathcal{S})$  tal que  $A \cap E_n \subseteq B_n$  y  $\mu_\tau(B_n) = \mu_\tau(A \cap E_n) < \infty$ . Luego,  $B := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$  y  $N := B - A$  cumplen lo pedido pues  $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A \cap E_n \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = B$  y

$$\begin{aligned} \mu_\tau(B \setminus A) &= \mu_\tau \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \setminus A \right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_\tau(B_n \setminus A) \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_\tau(B_n \setminus (A \cap E_n)) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\mu_\tau(B_n) - \mu_\tau(A \cap E_n)}_0 = 0. \end{aligned}$$

(2)  $\Rightarrow$  (3) Notemos que por (2)  $\Rightarrow$  (1),  $A \in \mathcal{M}_{\mu_\tau^*}$  si vale (2). En particular,  $A^c \in \mathcal{M}_{\mu_\tau^*}$ . Luego, por (1)  $\Rightarrow$  (2) para  $A^c$ ,  $\exists \tilde{B} \in \sigma(\mathcal{S})$  y  $N_2 \in \mathcal{M}_{\mu_\tau^*}$  con  $\mu_\tau(N_2) = 0$  tal que  $A^c = \tilde{B} - N_2$ . Pero entonces, tomando  $C := \tilde{B}^c$ , vemos que  $C \in \sigma(\mathcal{S})$  y  $A = (A^c)^c = (\tilde{B} \cap N_2^c)^c = \tilde{B}^c \cup (N_2^c)^c = C \cup N_2$ .  $\square$

**Observar.**  $\mathcal{M}_{\mu_\tau^*} = \overline{\sigma(\mathcal{S})}$  (con resp. a  $\mu_\tau^*|_{\sigma(\mathcal{S})}$ ). En efecto, si  $A \in \mathcal{M}_{\mu_\tau^*}$  entonces, por (1)  $\Rightarrow$  (3), existen  $C \in \sigma(\mathcal{S})$  y  $N \in \mathcal{M}_{\mu_\tau^*}$  tal que  $A = C \cup N$  y  $\mu_\tau^*(N) = 0$ . Como  $N \in \mathcal{M}_{\mu_\tau^*}$ , por (1)  $\Rightarrow$  (2) para  $N$ , existe  $\tilde{N} \in \sigma(\mathcal{S})$  tal que  $N \subseteq \tilde{N}$  y  $0 = \mu_\tau(N) = \mu_\tau(\tilde{N})$ . Luego,  $N$  resulta  $\mu_\tau^*|_{\sigma(\mathcal{S})}$ -nulo y, por lo tanto,  $N \in \overline{\sigma(\mathcal{S})}^{\mu_\tau^*|_{\sigma(\mathcal{S})}}$ .

Por otro lado, si  $A \in \overline{\sigma(\mathcal{S})}$  (resp. a  $\mu_\tau^*|_{\sigma(\mathcal{S})}$ ), entonces  $A = B \cup N$  donde  $B \in \sigma(\mathcal{S})$  y  $\exists \tilde{N} \in \sigma(\mathcal{S})$  tal que  $N \subseteq \tilde{N}$  y  $\mu_\tau^*(N) = 0$ , y entonces  $A = B \cup N \in \mathcal{M}_{\mu_\tau^*}$  (pues  $\sigma(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{M}_{\mu_\tau^*}$ ).

**Observar.** En particular, hemos probado:

**Proposición 1.44.** Si  $\tau$  es una premedida UE sobre una semiálgebra  $\mathcal{S}$  entonces, dado  $A \subseteq X$  (no necesariamente  $\mu_\tau^*$ -medible),

$$\begin{aligned} \mu_\tau^*(A) &:= \min\{\mu_\tau(B) \mid B \in \sigma(\mathcal{S}), A \subseteq B\} \\ &= \max\{\mu_\tau(C) \mid C \in \sigma(\mathcal{S}), C \subseteq A\}. \end{aligned}$$

**Teorema 1.45.**  $\beta(\mathbb{R}^d) \subsetneq \mathcal{L}(\mathbb{R}^d) \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ . De hecho,  $\#\mathcal{L}(\mathbb{R}^d) = 2^c$ ,  $\#\mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \setminus \mathcal{L}(\mathbb{R}^d) = 2^c$ ,  $\#\beta(\mathbb{R}^d) = c$ .

**Teorema 1.46.** Existe  $V \subseteq \mathbb{R}$  no medible Lebesgue.

**Lema 1.47.**  $|E + x|_e = |E|_e \quad \forall E \subseteq \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$ . Además, si  $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ , entonces  $E + x \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$  y  $|E| = |E + x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .

**Axioma de Elección.** Si  $(A_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$  es una familia de conjuntos disjuntos, no vacíos, entonces existe un conjunto  $A$  tal que  $A \cap A_\gamma$  tiene exactamente 1 elemento  $\forall \gamma \in \Gamma$ .

**Demostración** (lema 1.47). Definimos una relación de equivalencia  $\sim$  en  $[0, 1)$  decretando que  $x \sim y$  si  $x - y \in \mathbb{Q}$ . Por el Axioma de Elección, existe un conjunto  $V \subseteq \mathbb{R}$  que tiene exactamente 1 elemento de cada clase de equivalencia de  $\sim$ . Observemos que:

V1)  $(V + Q_1) \cap (V + Q_2) = \emptyset \quad \forall Q_1, Q_2 \in \mathbb{Q}$  distintos. En efecto, si  $v_1 + Q_1 = v_2 + Q_2$  con  $v_1, v_2 \in V \Rightarrow v_1 - v_2 = Q_2 - Q_1 \in \mathbb{Q} \Rightarrow v_1 \sim v_2 \Rightarrow v_1 = v_2 \Rightarrow Q_1 = Q_2$ .

V2)  $[0, 1) \subseteq \bigcup_{Q \in \mathbb{Q}} V + Q$ . Notar que dado  $x \in [0, 1)$ , existe un único  $v \in V$  tal que  $x \sim v$ , i.e.,  $x - v = Q \in \mathbb{Q} \Rightarrow x = v + Q \in V + Q$ .

Si  $V$  fuera medible, por (V2) y el Lema,

$$1 = |[0, 1)| \leq \sum_{Q \in \mathbb{Q}} |V + Q| = \sum_{Q \in \mathbb{Q}} |V| \Rightarrow |V| > 0$$

Por otro lado, por (V1),  $\bigcup_{Q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)} V + Q \subseteq [0, 2)$ , y luego, por el Lema y como  $|V| > 0$ ,

$$\begin{aligned} \infty &= \sum_{Q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)} |V| = \left| \bigcup_{Q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)} V + Q \right| \\ &\leq |[0, 2)| = |[0, 1)| + |[1, 2)| \\ &= |[0, 1)| + |1 + [0, 1)| = 2|[0, 1)| \\ &= 2 < \infty, \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción. Luego  $V$  no es medible.  $\square$

### 1.13 Clase 15 (10/09)

**Teorema 1.48** (Dynkin). Si  $\mathcal{L}$  es un  $\lambda$ -sistema que contiene un  $\pi$ -sistema  $\mathcal{P}$  entonces  $\sigma(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{L}$

**Demostración** (continuación). Bastaba con probar que  $\lambda(\mathcal{P})$  es un  $\pi$ -sistema. Esto es equivalente a probar que

$$\lambda(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{L}_A := \{B \subseteq X : A \cap B \in \lambda(\mathcal{P})\} \quad \forall A \in \lambda(\mathcal{P}).$$

A su vez, para esto basta probar que:

$$\begin{cases} (1) \mathcal{L}_A \text{ es un } \lambda\text{-sistema } \forall A \in \lambda(\mathcal{P}) \\ (2) \mathcal{P} \subseteq \mathcal{L}_A. \end{cases}$$

**Veamos (1).**

( $\lambda_1$ )  $X \in \mathcal{L}_A$ : Como  $A \in \lambda(\mathcal{P})$ , se tiene que  $A \cap X = A \in \lambda(\mathcal{P})$  ( $\Rightarrow X \in \mathcal{L}_A$ ) ✓

( $\lambda_2$ )  $B \in \mathcal{L}_A \Rightarrow B^c \in \mathcal{L}_A$ : Notar que

$$\begin{aligned} A \cap B^c \in \lambda(\mathcal{P}) &\Leftrightarrow (A \cap B^c)^c = A^c \cup B \in \lambda(\mathcal{P}) \\ &\Leftrightarrow A^c \cup B = \underbrace{A^c}_{\substack{\in \lambda(\mathcal{P}) \\ \text{pues} \\ A \in \lambda(\mathcal{P})}} \cup \underbrace{B}_{\substack{\in \lambda(\mathcal{P}) \\ \text{pues} \\ B \in \mathcal{L}_A}} \in \lambda(\mathcal{P}) \quad \left( \begin{array}{l} \text{cierto pues } \lambda(\mathcal{P}) \\ \text{es } \lambda\text{-sistema} \end{array} \right). \end{aligned}$$

( $\lambda_3$ ) Si  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}_A$  disjuntos, entonces  $(A \cap B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  también. Además, cada  $A \cap B_n \in \lambda(\mathcal{P})$  pues  $B_n \in \mathcal{L}_A$ . Luego,

$$A \cap \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A \cap B_n \in \lambda(\mathcal{P}) \quad \left( \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{L}_A \right)$$

**Veamos (2).** Vamos por casos

1. ( $A \in \mathcal{P}$ ): Si  $B \in \mathcal{P}$ , entonces  $A \cap B \in \mathcal{P}$ , pues  $\mathcal{P}$  es un  $\pi$ -sistema, y entonces  $A \cap B \in \mathcal{P} \subseteq \lambda(\mathcal{P})$  y así resulta  $B \in \mathcal{L}_A$ . Como  $B \in \mathcal{P}$  era arbitrario, esto nos dice que  $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{L}_A$ . En particular, por (1) resulta que  $\lambda(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{L}_A$ .
2. ( $A \in \lambda(\mathcal{P})$  general): Si tomamos  $B \in \mathcal{P}$ , entonces  $B \in \mathcal{L}_A \Leftrightarrow A \cap B \in \lambda(\mathcal{P}) \Leftrightarrow A \in \mathcal{L}_B$ . Luego, lo que queremos mostrar es que, para todo  $B \in \mathcal{P}$ ,  $\lambda(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{L}_B$ . Pero esto vale por el caso 1. ✓

□

**Definición 1.49** (extensión de una premedida). Sean  $\tau : \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$  una premedida sobre  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$  y  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$  una  $\sigma$ -álgebra. Decimos que una medida  $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$  es una extensión de  $\tau$  (sobre  $\mathcal{F}$ ) si:

1.  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{F}$  ( $\Rightarrow \sigma(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{F}$ );
2.  $\mu(A) = \tau(A) \quad \forall A \in \mathcal{S}$ .

**Teorema 1.50** (Unicidad de Extensión de Carathéodory). Sea  $\tau$  una premedida definida sobre una semiálgebra  $\mathcal{S}$  de subconjuntos de un espacio  $X$ . Si  $\tau$  es  $\sigma$ -finita, entonces existe a lo sumo una extensión de  $\mu$  sobre  $\sigma(\mathcal{S})$ . En particular, si  $\tau$  es UE, entonces admite exactamente:

- una extensión sobre  $\sigma(\mathcal{S})$ , i.e.  $\mu_\tau := \mu_\tau^*|_{\sigma(\mathcal{S})}$ ;
- una extensión sobre  $\mathcal{M}_{\mu_\tau^*}$ , i.e.,  $\mu_\tau^*|_{\mathcal{M}_{\mu_\tau^*}}$ .

**Demostración.** Sean  $\mu, \mu'$  medidas sobre  $(X, \mathcal{M})$  tal que  $\mu(B) = \mu'(B) \quad \forall B \in \mathcal{S}$ . Queremos ver que  $\mu(A) = \mu'(A) \quad \forall A \in \mathcal{M}$  (primero cuando  $\mathcal{M} = \sigma(\mathcal{S})$  y luego con  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\mu_\tau^*}$ ):

Caso  $\mathcal{M} = \sigma(\mathcal{S})$ : Tomamos  $(E_n)_n \subseteq \mathcal{S}$  disjuntos tal que  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$  y  $\tau(E_n) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$  (podemos, pues  $\tau$  es  $\sigma$ -finita). Observemos que, por ser  $\mu$  y  $\mu'$  medidas en  $\sigma(\mathcal{S})$  si  $A \in \sigma(\mathcal{S})$ , entonces:

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A \cap E_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A \cap E_n) \quad \text{y} \quad \mu'(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu'(A \cap E_n).$$

Luego, bastará con ver que  $\mu(A \cap E_n) = \mu'(A \cap E_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}, A \in \sigma(\mathcal{S})$ . Luego, fijemos  $n \in \mathbb{N}$  y definamos

$$\xi_n := \{A \in \sigma(\mathcal{S}) : \mu(A \cap E_n) = \mu'(A \cap E_n)\}.$$

Queremos ver que  $\sigma(\mathcal{S}) \subseteq \xi_n$ . Para ello, como  $\mathcal{S}$  es un  $\pi$ -sistema, por Dynkin bastará con ver que

1.  $\xi_n$  es un  $\lambda$ -sistema;
2.  $\mathcal{S} \subseteq \xi_n$ .

**Veamos 1.**

( $\lambda_1$ )  $X \in \xi_n$ : Es cierto, pues  $\mu(X \cap E_n) = \mu(E_n) = \tau(E_n) = \mu'(E_n) = \mu'(X \cap E_n)$ ;

( $\lambda_2$ )  $A \in \xi_n \Rightarrow A^c \in \xi_n$ :  $\mu(A^c \cap E) = \mu(E_n \setminus A) = \mu(E_n) - \mu(A \cap E_n)$  (la última igualdad se da pues  $\mu(E_n) < \infty$ ). Luego, por ( $\lambda_1$ ), esto último es igual a  $\mu'(E_n) - \mu'(A \cap E_n) = \mu'(A^c \cap E_n)$ ;

( $\lambda_3$ ) Si  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \xi_n$  son disjuntos, entonces

$$\begin{aligned} \mu\left(\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) \cap E_n\right) &= \mu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \cap E_n\right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k \cap E_n) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu'(A_k \cap E_n) \\ &= \mu'\left(\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) \cap E_n\right). \end{aligned}$$

Luego,  $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \xi_n$

**Veamos 2.** Si  $A \in \mathcal{S}$  entonces  $A \cap E_n \in \mathcal{S}$  pues  $\mathcal{S}$  es un  $\pi$ -sistema, y entonces  $\mu(A \cap E_n) = \tau(A \cap E_n) = \mu'(A \cap E_n)$ . ✓

Caso cuando  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\mu_\tau^*}$  ( $\tau$  unívocamente extendible): Sea  $A \in \mathcal{M}_{\mu_\tau^*}$ . Como  $\tau$  es  $\sigma$ -finita en  $\mathcal{S}$ , existen  $B, C \in \sigma(\mathcal{S})$  tales que  $C \subseteq A \subseteq B$  y

$\mu_\tau^*(C) = \mu_\tau^*(A) = \mu_\tau^*(B)$ . Entonces, si  $\mu$  es una extensión de  $\tau$  sobre  $\mathcal{M}_{\mu_\tau^*}$ , tenemos que

$$\begin{array}{ccc} \mu_\tau^*(A) = \mu_\tau^*(C) \leq \mu(C) \leq \mu(A) \leq \mu(B) = \mu_\tau^*(B) = \mu_\tau^*(A) \\ \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\ C \in \sigma(\mathcal{S}) \text{ y } \exists! \text{ ext. en } \sigma(\mathcal{S}) & & B \in \sigma(\mathcal{S}) \end{array}$$

de donde resulta que  $\mu(A) = \mu_\tau^*(A)$  y la extensión es única. Además, satisface  $\mu(A) = \mu_\tau(B) = \mu_\tau(C)$  para cualquier  $C, B \in \sigma(\mathcal{S})$  tal que  $C \subseteq A \subseteq B$ ,  $N_1 = A \setminus C$  y  $N_2 = B \setminus A$  son  $\mu_\tau$ -nulos. Luego,  $\mu = \overline{\mu_\tau}$ , donde  $\overline{\mu_\tau}$  es la "completación" de  $\mu_\tau$  definida en el Teorema de Extensión de Carathéodory.  $\square$

**Nota.** De la demostración se deduce que si  $\mu$  y  $\nu$  son medidas finitas sobre  $(X, \mathcal{M})$ , entonces

$$\mathcal{L} := \{A \in \mathcal{M} : \mu(A) = \nu(A)\}$$

es un  $\lambda$ -sistema si y solo si  $X \in \mathcal{L}$ . En particular, si dos medidas finitas coinciden en un  $\pi$ -sistema  $\mathcal{P}$  que contiene a  $X$ , entonces coinciden en  $\sigma(\mathcal{P})$ .

## 1.14 Clase 16 (12/09)

**Comentario.** Si queremos definir una medida finita sobre  $(\mathbb{R}, \beta(\mathbb{R}))$ , por el comentario de la vez pasada, basta predefinirla en un  $\pi$ -sistema  $\mathcal{P}$  que genere a  $\beta(\mathbb{R})$  (si queremos unicidad de la extensión a  $\beta(\mathbb{R})$ ).

Una elección natural es tomar  $\mathcal{P} := \{(-\infty, x] : x \in \mathbb{R}\}$  ( $\sigma(\mathcal{P}) = \beta(\mathbb{R})$ ).

Luego, si  $\mu$  es una medida que extiende a una premedida  $\tau$  sobre  $\mathcal{P}$ , entonces  $\mu$  queda unívocamente determinada sobre  $\tilde{\mathcal{I}}$ :

- $\mu(\mathbb{R}) = \mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-\infty, n]) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu((-\infty, n]) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau((-\infty, n])$ .
- $\mu((a, b]) = \mu((-\infty, b] \setminus (-\infty, a]) = \tau((-\infty, b]) - \tau((-\infty, a])$ .
- $\mu((a, \infty)) = \mu(\mathbb{R} - (-\infty, a]) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau((-\infty, n]) - \tau((-\infty, a])$ .

En conclusión,  $\tilde{\mathcal{I}}$  es la semiálgebra natural que aparece cuando buscamos extender un apremedida definida sobre  $\mathcal{P}$  (y necesitamos definirla al menos sobre un  $\pi$ -sistema como  $\mathcal{P}$  si queremos unicidad).

Luego, la idea será:

$$\begin{aligned} \tau \text{ sobre } \mathcal{P} &\Rightarrow \text{extensión automática a } \tilde{\mathcal{I}} \\ &\Rightarrow \text{extensión a } \beta(\mathbb{R}) \text{ por Carathéodory.} \end{aligned}$$

$$\tau((-\infty, x]) =: F_\tau(x).$$



**Teorema 1.51.** Sea  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  monótona creciente. Entonces,  $\tau_F : \tilde{\mathcal{I}} \rightarrow [0, \infty]$  dada por  $\tau(I(a, b)) = F(b) - F(a)$  ( $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$ ) cumple que:

- E1)  $\tau_F$  es finitamente aditiva;
- E2) Si  $F$  es continua a derecha,  $\tau_F$  es  $\sigma$ -subaditiva.

Es decir, si  $F$  es de L-S entonces  $\tau_F$  es extendible (de hecho, es unívocamente extendible)

### Demostración.

E1) Sea  $I \in \tilde{\mathcal{I}}$ . Luego,  $I = I(a, b)$  para ciertos  $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$  y  $\tau(I) = F(b) - F(a)$ . Ahora, si  $I = \bigcup_{i=1}^n J_i$  entonces, eventualmente reordenando los  $J_i$ , podemos suponer que  $J_i = I(a_i, b_i)$  para cada  $i = 1, \dots, n$ , donde  $a = a_1 \leq b_1 = a_2 \leq \dots \leq b_{n-1} = a_n \leq b_n = b$ . Luego,  $\tau(I) = F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n F(b_i) - F(a_i) = \sum_{i=1}^n \tau(J_i)$ .

E2) Supongamos primero que  $I = (a, b]$  con  $-\infty < a < b < \infty$ . Si  $I \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i$  con  $J_i \in \tilde{\mathcal{I}}$ , entonces  $J_i = (a_i, b_i] \cap \mathbb{R}$  con  $-\infty \leq a_i \leq b_i \leq \infty$ . Eventualmente, cambiando  $a_i \rightarrow \max\{a, a_i\}$ ,  $b_i \rightarrow \min\{b, b_i\}$ , puedo suponer que  $-\infty < a_i \leq b_i < \infty$ . Ahora, como  $F$  es continua a derecha, dado  $\varepsilon > 0$ , existen

- $\delta > 0$  tal que  $a + \delta < b$  y  $F(a + \delta) < F(a) + \varepsilon$ ;
- $\eta_i > 0$  tal que  $F(b_i + \eta_i) < F(b_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$  para cada  $i \in \mathbb{N}$ .

Luego, los intervalos de la forma  $((a_i, b_i + \eta_i))_{i \in \mathbb{N}}$  cubren  $[a + \delta, b]$ , con lo cual, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $[a + \delta, b] \subseteq \bigcup_{i=1}^N (a_i, b_i + \eta_i)$ . Como  $a + \delta \in [a + \delta, b]$ , existe  $i_1 \in \{1, \dots, N\}$  tal que  $a + \delta \in (a_{i_1}, b_{i_1} + \eta_{i_1}) =: I_1$ .

1. Si  $b \in I_1$ , entonces

$$\begin{aligned} F(b) - F(a + \delta) &\leq F(b_{i_1} + \eta_{i_1}) - F(a_{i_1}) \\ &\leq F(b_{i_1}) + \frac{\varepsilon}{2^{i_1}} - F(a_{i_1}) \\ &\leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \left( F(b_i) + \frac{\varepsilon}{2^i} - F(a_i) \right) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} F(b_i) - F(a_i) + \varepsilon. \end{aligned}$$

de modo que  $F(b) - F(a) \leq F(b) - F(a + \delta) + \varepsilon \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} F(b_i) + 2\varepsilon$ . Tomando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , resulta  $\tau(I) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \tau(J_i)$ . ✓

2. Si  $b \notin I_1$ , entonces  $b_{i_1} + \eta_{i_1} \leq b$  y, luego,  $b_{i_1} + \eta_{i_1} \in [a + \delta, b]$ , de modo tal que existe  $i_2 \in \{1, \dots, N\} \setminus \{i_1\}$  tal que  $b_{i_1} + \eta_{i_1} \in (a_{i_2}, b_{i_2} + \eta_{i_2}) = I_2$ . En general, existen  $m \leq N$  e  $i_1, \dots, i_m \in \{1, \dots, N\}$  tales que:

$$a_{i_1} < a + \delta < b_{i_1} + \eta_{i_1} < \dots < b_{i_{m-1}} + \eta_{i_{m-1}} \leq b < b_{i_m} + \eta_{i_m}$$

con  $b_{i_k} + \eta_{i_k} \in (a_{i_{k+1}}, b_{i_{k+1}} + \eta_{i_{k+1}}) \quad \forall k = 1, \dots, m$ . Luego,

$$\begin{aligned}
F(b) - F(a + \delta) &\leq F(b_{i_m} + \eta_{i_m}) - F(a_{i_1}) \\
&= \left( \sum_{k=1}^{m-1} F(b_{i_{k+1}} + \eta_{i_{k+1}}) - F(b_{i_k} + \eta_{i_k}) \right) \\
&\quad + F(b_{i_1} + \eta_{i_1}) - F(a_{i_1}) \\
&\leq \left( \sum_{k=1}^{m-1} F(b_{i_{k+1}} + \eta_{i_{k+1}}) - F(a_{i_{k+1}}) \right) \\
&\quad + F(b_{i_1} + \eta_{i_1}) - F(a_{i_1}) \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} F(b_i + \eta_i) - F(a_i) \\
&\leq \sum_{i \in \mathbb{N}} F(b_i) - F(a_{i_1}) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Con lo cual,  $\tau(I) = F(b) - F(a) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \tau(j_i) + 2\varepsilon$ . Tomando  $\varepsilon \longrightarrow 0^+$ , obtenemos el resultado (en el caso  $-\infty < a < b < \infty$ ).

3. Si  $a = b$  entonces  $I = \emptyset$  y el resultado es inmediato.
4. Si  $a = -\infty$  ó  $b = \infty$  y  $a \neq b$ , entonces

$$(\max\{a, -N\}, \min\{b, N\}) \subseteq I \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

de modo que, si  $I \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} J_i$ , por el caso anterior,

□