Topología

Basado en las clases impartidas por Eduardo Oregón en el segundo semeste del 2025

Contents

Chapter 1

1.1 Clase 1 (04/08): Espacios Topológicos [12]

Definition 1.1 (sistema de vecindades). X conjunto no vacío. Si $x \in X$, consideramos $\mathcal{V}_x \subset 2^X$, tal que:

1. $\forall x \in X$, $\forall V \in \mathcal{V}_x$, $x \in \mathcal{V}_x$;
2. $\forall x \in X$, $\forall V \in \mathcal{V}$, si $V' \supset V \Rightarrow V' \in \mathcal{V}_x$;
3. Si $V_1, V_2 \in \mathcal{V} \Rightarrow V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}_x$.

El sistema de vecindades es $\{\mathcal{V}_x\}_{x \in X}$. Si $V \in \mathcal{V}_x$, V es vecindad de x.

Example. 1. (X, d) espacio métrico $\mathcal{V}_x := \{V \subset X | \exists \varepsilon > 0 \text{ tal que } B_\varepsilon(x) \subset V\}$. Verificamos que sea sistema de vecindad.

Proof. Verificamos $1), 2)$ y $3)$:

1) $x \in X$, $V \in \mathcal{V}_x \Rightarrow x \in B_\varepsilon(x) \subset V$;
2) X $x \in X$, $V \in \mathcal{V}_x$, $V' \supset V \Rightarrow x \in B_\varepsilon(x) \subset V \subset V' \Rightarrow V' \in \mathcal{V}_x$;
3) $x \in V_1 \cap V_2, V_1, V_2 \in \mathcal{V}_x \Rightarrow B_{\varepsilon_1}(x) \subset V_1, B_{\varepsilon_2}(x) \subset V_2$

$$\Rightarrow B_{\min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}}(x) \subset V_1 \cap V_2$$
$$\Rightarrow V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}_x.$$

□

2. X arbitrario, $\forall x \in X$, sea $\mathcal{V}_x = \{X\}$ es sistema de vecindades (vacuidad).
3. X arbitrario $\mathcal{V}_x = \{V \subset X \mid x \in V \text{ y } X \backslash V \text{ sea finito}\}$ (queda como ejercicio chequear que esto define un sistema de vecindades).

◇

Definition 1.2 (topología desde sistema de vecindades). Tenemos X, $\{\mathcal{V}_x\}_{x \in X}$ sistema de vecindades. Definimos, $\tau = \{U \subset X \; | x \in U \Rightarrow U \in \mathcal{V}_x\}$.

Lemma 1.3. τ cumple lo siguiente:

1. $\varnothing, X \in \tau$;
2. $U_\alpha \in \tau, \alpha \in A \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \tau$;
3. $U_1, \ldots, U_n \in \tau \Rightarrow U_1 \cap \cdots \cap U_n \in \tau$.

τ es la topología inducida por $\{\mathcal{V}_x\}$. Elementos de τ (subconjuntos de X) se llamarán abiertos.

1.2 Clase 2 (06/08): Topología, Base [12, 13]

Proof. (último lema de la clase anterior)

1. $\varnothing \in \tau$ por vacuidad.

$$\begin{aligned} X \in \tau : x \in X \Rightarrow \exists V \in \mathcal{V}_x \quad (1) x \in V; (2) x \in V \subset X \\ \Rightarrow X \in \mathcal{V}_x. \quad \forall x : X \in \tau \end{aligned}$$

2. Tomar $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $U_\alpha \in \tau$, $\mathcal{U} = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Si $x \in \mathcal{U} \Rightarrow x \in U_\alpha \in \mathcal{V}_x$ para algún α. Como $U_\alpha \in \tau \Rightarrow U_\alpha \in \mathcal{V}_x$. Luego, si $x \in U_\alpha \subset \mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{U} \in \mathcal{V}_x$, $\forall x \in \mathcal{U}$. Por lo tanto, $\mathcal{U} \in \tau$.
3. Tomamos $U_1, \ldots, U_n \in \tau$, $\mathcal{U} = U_1 \cap \cdots \cap U_n$ y $x \in \mathcal{U}$. Luego, $x \in U_i \quad \forall i$. Como $U_i \in \tau \Rightarrow U_i \in \mathcal{V}_x, \quad \forall i$. Por inducción (con las intersecciones), podemos afirmar que $\mathcal{U} \in \mathcal{V}_x$, $\forall x \in \mathcal{U}$. Por lo tanto, $\mathcal{U} \in \tau$.

$\square$

1.2.1 Topología

Definition 1.4 (topología)**.** X conjunto no vacío, $\tau \subset 2^X$ es una topología si cumple:

1. $\varnothing, X \in \tau$;
2. $U_\alpha \in \tau,\ \alpha \in A \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \tau$;
3. $U_1, \ldots, U_n \in \tau \Rightarrow U_1 \cap \cdots \cap U_n \in \tau$.

Remark. Se utilizará la siguiente notación:

- (X, τ) se llama espacio topológico.
- $U \in \tau \Rightarrow U$ se llama abierto (con respecto a la topología).

Lemma 1.5. τ topología en $X \Rightarrow$ Inducida por un único sistema de vecindades.

Proof. Para $x \in X$, definir $\mathcal{V}_x = \{V \subset X \mid \exists U \in \tau \text{ con } x \in U \subset V\}$. Verificamos que $\{\mathcal{V}_x\}_x$ es sistema de vecindades:

1. La definición implica $V \in \mathcal{V}_x \Rightarrow x \ (\in U \subset) \ \in V$;
2. Si $V \in \mathcal{V}_x$ y $V' \supset V \Rightarrow (V \in \mathcal{V}_x) \ x \in U \subset \ (U \in \tau)$
$$\Rightarrow x \in U \subset V' \Rightarrow V' \in \mathcal{V}_x;$$
3. Tomar $V_1, V_2 \in \mathcal{V}_x \Rightarrow x \in U_1 \subset V_1, \quad x \in U_2 \subset V_2$ con $U_1, U_2 \in \tau$
$$\Rightarrow x \in \underbrace{U_1 \cap U_2}_{\in \tau} \subset V_1 \cap V_2 \Rightarrow V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}_x;$$

(falta demostrar unicidad). □

Example (de espacios topológicos).

1. (Topología métrica): (X, d) espacio métrico. Abierto es $U \in X$ tal que $\forall x \in U, \exists \varepsilon > 0$ tal que $x \in B_\varepsilon(x) \subset U$.
   (a) $X = \mathbb{R}^n$, $d((x_i), (y_i)) = \sqrt{sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$. Así, se obtiene la topología estándar.
   (b) X arbitrario, d métrica discreta $d(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y. \end{cases}$ Así, se obtiene la topología discreta: $\tau = 2^X$.
2. (Topología indiscreta): X arbitrario, $\tau = \{\varnothing, X\}$;
3. (Topología cofinita): X arbitrario, $\tau_{cof} = \{U \subset X \mid X \backslash U \text{ es finito}\} \cap \{\varnothing\}$ (queda como ejercicio verificar que es topología).

◇

1.2.2 Base de una topología

Una base es un subconjunto "manejable" de τ que la describe completamente!

Definition 1.6 (base). X es conjunto. $\mathcal{B} \subset 2^X$ es base para alguna topología si:

1. $\forall x \in X, \exists B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$ $\left(\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X\right)$.
2. $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}, \forall x \in B_1 \cap B_2, \exists B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Definition 1.7 (topología inducida). La topología inducida por la base $\mathcal{B}$ en X es:

$$\tau = \{U \subset X \mid \forall x \in U, \exists B \in \mathcal{B} \text{ tal que } x \in B \subset U\}.$$

Note. $\mathcal{B} \subset \tau$.

Lemma 1.8. τ, definido arriba, es una topología.

Example. (X, d) espacio métrico $\Rightarrow \mathcal{B} = \{B_\varepsilon(x) \mid x \in X, \varepsilon > 0\}$ es base de la topología métrica. $\diamond$

1.3 Clase 3 (08/08): Bases, Topología producto [13,15]

Proof. (lema 1.8)

1. $\varnothing, X \in \tau$: $\varnothing \in \tau$ por vacuidad y $X \in \tau$ por propiedad (1) de $\mathcal{B}$.
2. τ cerrado bajo unión: $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ colección con $U_\alpha \in \tau$, $\mathcal{U} = \bigcup_\alpha U_\alpha$.

$$\begin{aligned} \text{Si } x \in \mathcal{U} &\Rightarrow x \in U_\alpha \text{ para algún } \alpha \\ &\Rightarrow x \in B \subset U_\alpha \text{ para algún } B \in \mathcal{B} \\ &\Rightarrow x \in B \subset \mathcal{U}. \end{aligned}$$

   Por lo tanto, $\mathcal{U} \in \tau$.

3. τ cerrado bajo intersección finita: $U_1, \ldots, U_n \in \tau, \mathcal{U} = U_1 \cap \cdots \cap U_n$. Sea $x \in \mathcal{U} \Rightarrow x \in U_i \ \forall i \ (U_i \in \tau) \Rightarrow x \in B_i \subset U_i \ \forall\, i, B_i \in \mathcal{B}$. Propiedad (2) implica $x \in B \subset B_1 \cap \cdots \cap B_n \subset U_1 \cap \cdots \cap U_n = \mathcal{U}$. Por lo tanto, $\mathcal{U} \in \tau$.

$\square$

Note. Si B base genera $\tau \Rightarrow B \subset \tau$.

Definition 1.9 (topología generada)**.** τ topología está generada por una base B sin B es base, y τ es topología generada por B.

Utilidad: Dada τ topología a estudiar, queremos encontrar base B que la describa.

Example. (X, d) espacio métrico, $\mathcal{B} = \{B_\varepsilon(x) \mid \varepsilon > 0, x \in X\}$ es base para la topología métrica. $\diamond$

Proof. Probamos que B es base.

1. Notar $X = \bigcup_{x \in X} B_1(x)$. Por lo tanto, $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$.
2. $B_1, B_2 \in \mathcal{B}, B_1 = B_{\varepsilon_1}(x_1), B_2 = B_{\varepsilon_2}(x_2)$. Sea $x \in B_1 \cap B_2$. Queremos encontrar $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subset B_1 \cap B_2$. Por desigualdad triangular, tenemos que $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1 - d(x, x_1), \varepsilon_2 - d(x, x_2)\}$ sirve.

$\square$

Note. 1. Una base no es necesariamente una topología ((1) y (2) pueden fallar).

2. Si B es base y τ topología, $B \subset \tau \not\Rightarrow \tau$ es generada por B.

Example. Topología del límite inferior en $\mathbb{R}$: $B_l = \{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ (se deja como ejercicio demostrar que B_l es base). ◇

Definition 1.10 (topología del límite inferior). B_l genera la topología del límite inferior τ_l.

Remark.

1. τ_l no es τ_{std} ($[a, b)$ abierto en τ_l pero no en τ_{std}
2. $\tau_{std} \subset \tau_l$ (la demostración de esto queda como ejercicio).
3. (Intuición): Si $0 \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$ (para τ_{std}, y cerda de 0 si $|y| < \varepsilon$). Para τ_l, y cerca de 0, si $y \in [0, \varepsilon)$ ($0 \leq y < \varepsilon$ para $\varepsilon > 0$ chiquito).

1.3.1 Comparación de topologías

Definition 1.11 (topologías finas). τ, τ' topologías en X, decimos que τ' es más fina que τ si $\tau' \supset \tau$. Decimos que τ y τ' son comparables si $\tau' \supset \tau$ o $\tau \supset \tau'$.

Example. τ_l es más fina que τ'. ◇

Example. $\forall \tau$ topología en X, $\{\varnothing, X\} \subset \tau \subset 2^X$. Donde $\{\varnothing, X\}$ es llamada la topología indiscreta (todos cercanos entre sí) y 2^X la topología discreta (todos lejanos entre sí). ◇

En conclusión, si τ' es más fina que τ, los puntos están más lejanos respecto a τ' que a τ

1.4 Clase 4 (11/08): Topología producto [15] e inducida [16]

Lemma 1.12. $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ bases en X que generan la topología τ, τ' respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned} \tau' \supset \tau &\Leftrightarrow \text{(todo elemento de } \mathcal{B} \text{ está en } \tau'); \\ &\Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{B}, B \text{ es unión de elementos de } \mathcal{B}'; \\ &\Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{B}, \forall x \in B, \exists B' \in \mathcal{B}' \text{ tal que } x \in B' \subset B. \end{aligned}$$

Lemma 1.13. $\mathcal{B}_{X\times Y} := \{U \times U' \mid U \text{ abierto en } X, U' \text{ abierto en } Y\}$ es una base para una topología.

Definition 1.14 (topología producto). Topología producto en $X \times Y$ es la generada por $\mathcal{B}_{X\times Y}$.

Proof. (lemma 1.13.)

1. Como $X \times Y \in \mathcal{B}_{X\times Y} \Rightarrow \bigcup_{B\in\mathcal{B}_{X\times Y}} B = X \times Y$.

2. Tomar $B_1 = U_1 \times U_1' \in \mathcal{B}_{X\times Y}, B_2 = U_2 \times U_2' \in \mathcal{B}_{X\times Y}, (x,y) \in B_1 \cap B_2$ (U_1, U_2 abiertos en X y U_1', U_2' abiertos en Y). Notar que:

$$B_1 \cap B_2 = (U_1 \times U_1') \cap (U_2 \times U_2') = \underbrace{(U_1 \cap U_2)}_{\text{abto. en } X} \times \underbrace{(U_1' \cap U_2')}_{\text{abto. en } Y} \in \mathcal{B}_{X\times Y}.$$

□

Note. Misma demostración (salvo modificaciones esperables) implica que si $\mathcal{B}_X$ es base de X, $\mathcal{B}_Y$ base de Y, $\mathcal{B}'_{X\times Y} \coloneqq \{B \times B' \mid B \in \mathcal{B}_X, B' \in \mathcal{B}_Y\}$ es base y genera la misma topología generada por $\mathcal{B}_{X\times Y}$.

Example (importante). $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Propiedad: topología estándar de $\mathbb{R}^2$ (métrica euclidiana) es igual a la topología producto en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (cada uno con su topología estándar).

- Topología estándar en $\mathbb{R}^2$: generada por base $\mathcal{B} = \{B_\varepsilon(x,y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2, \varepsilon > 0\}$.
- Topología producto en $\mathbb{R}^2$: generada por base $\mathcal{B}' = \{(a,b) \times (c,d) \mid a < b, c < d\}$.

◇

Exercise. Verificar para $\mathbb{R}^n$.

Definition 1.15 (topología inducida). $\tau|_Y \coloneqq \{Y \cap U \mid U \in \tau\}$ es topología en Y. La llamamos topología en Y inducida por X.

Proof. (topología inducida es topología)

1. $\varnothing = \varnothing \cap Y, Y = X \cap Y$.

2. Si $U_\alpha \in \tau|_Y, \alpha \in A \Rightarrow U_\alpha = U_\alpha' \cap Y$ con $U_\alpha' \in \tau \Rightarrow \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha = \bigcup_{\alpha\in A}(U_{\alpha\in A} \cap Y) = \left[\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha\right] \times Y \in \tau|_Y$.

3. $U_1, \dots, U_n \in \tau|_Y, U_i = U_i' \cap Y \Rightarrow U_1 \cap \dots \cap U_n = (U_1' \cap Y) \cap \dots \cap (U_n' \cap Y) = (U_1' \cap \dots \cap U_n') \cap Y \in \tau|_Y$.

□

Lemma 1.16. $\mathcal{B}|_Y \coloneqq \{Y \cap B \mid B \in \mathcal{B}\}$ es base para la topología en Y inducida por X.

Remark. Cuidado: La noción de abierto depende de la topología a especificar.

Example. En $X = \mathbb{R}, Y = [0,1] \cup (2,3) \cup \{4\}$. Notar que:

- Y es abierto en Y, pero no es abierto en X.
- $[0,1]$ también abierto en $Y : [0,1] = Y \cap (-1,2)$.
- $\{4\}$ también abierto en $Y : \{4\} = Y \cap (3,5)$.

◇

Note. Si $U \subset Y$ es abierto en $X \Rightarrow$ abierto en Y.

Lemma 1.17. $Y \subset X, \tau|_Y \subset \tau \Leftrightarrow Y$ es abierto en X.

Proposition 1.18. X, Y espacios topológicos, $A \subset X, B \subset Y$.

En $A \times B \to$ topología inducida desde $X \times Y$ (con topología producto)
$\to$ topología producto desde A y B (con topología inducida por X, Y respectivamente).

Estas topologías son la misma.

Proof. Elemento de topología primera: $U = U' \cap A \times B$
Elemento de topología segunda: U es unión de productos $V \times V'$ con V abierto en A, V' abierto en B. Notar que $V \times V' = (W \cap A) \times (W' \cap B) = (W \times W') \cap A \times B$. □

1.5 Clase 5 (13/08): Cerrados, clausura, puntos límites [17]

Definition 1.19 (conjunto cerrado)**.** X espacio topológico, $C \subset X$ es cerrado si $X \backslash C$ es abierto.

Lemma 1.20.

1. $X, \varnothing$ son cerrados;
2. Si $C_\alpha \subset X$ cerrados, $\alpha \in A \Rightarrow \bigcap_\alpha C_\alpha$ es cerrado;
3. Si $C_1, \ldots, C_n$ cerrados, entonces $C_1 \cup \cdots \cup C_n$ es cerrado.

Proof.

1. $X = X \backslash \varnothing, \ \varnothing = X \backslash X$;

2. $C_\alpha = \bigcap_{\alpha\in A} C_\alpha \Rightarrow X\backslash C = X\backslash \bigcap_{\alpha\in A} C_\alpha = \underbrace{\bigcup_{\alpha\in A} (\overbrace{X\backslash C_\alpha}^{\text{abto}})}_{\text{abto}}$;

3. $C = C_1\cup\cdots\cup C_n \Rightarrow X\backslash C = X\backslash(C_1\cup\cdots\cup C_n) = \underbrace{(\overbrace{X\backslash C_1}^{\text{abto}})\cap\cdots\cap(\overbrace{X\backslash C_n}^{\text{abto}})}_{\text{abto}}$.

□

Example.

1. $X = \mathbb{R}, [a,b]$ es cerrado ($\mathbb{R}\backslash[a,b] = (-\infty,a)\cup(b,\infty)$);
2. (X,d) espacio métrico (+ topología métrica) $\Rightarrow \overline{B_\varepsilon}(x)$ es cerrado. Luego, $X\backslash\overline{B_\varepsilon}(x) = \bigcup_{y\in X\backslash\overline{B_\varepsilon}(x)} B_{d(x,y)-\varepsilon}(y)$ (abierto en topología métrica);
3. X con la topología discreta $\Rightarrow$ todo subconjunto de X es abierto y cerrado!

◇

Definition 1.21 (cerrado topología inducida)**.** X espacio topológico, $Y\subset X$ (con la topología inducida), $C\subset Y$ es cerrado en Y si es cerrado en la topología inducida.

Lemma 1.22. C es cerrado en Y si y solo si $C = C'\cap Y$ con C' cerrado en X.

Proof. $C\subset Y$ es cerrado en $Y \Leftrightarrow Y\backslash C$ es abierto en Y
$\Leftrightarrow Y\backslash C = U\cap C$ con $U\subset X$ abierto
$\Leftrightarrow C = (X\backslash U)\cap Y = C'\cap Y$, con $C' = X\backslash U$ cerrado. □

Definition 1.23 (clausura e interior)**.** X espacio topológico, $A\subset X$:

1. El interior de A es $\mathring{A}$ = unión de todos los abiertos contenidos en A;
2. La clausura de A es $\overline{A}$ = intersección de todos los cerrados que contienen A.

Remark.

1. $\mathring{A}$ es abierto, $\overline{A}$ es cerrada, $\mathring{A}\subset A\subset\overline{A}$;
2. A es abierto si y solo si $\mathring{A} = A$. A es cerrado si y solo si $\overline{A} = A$;
3. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$;

4. El interior $\mathring{A}$ es el abierto mas grande contenido en A y la clausura $\overline{A}$ es el cerrado mas pequeño que contiene a A.

Proposition 1.24. X espacio topológico, $A \subset X$ cualquiera, $x \in X$.

$$
\begin{aligned}
x \in \overline{A} &\Leftrightarrow \forall U \text{ abierto conteniendo a } X\text{, se tiene } A \cap U \neq \varnothing \qquad (*) \\
&\Leftrightarrow \text{ toda vecindad de } x \text{ interseca a } A \\
&\Leftrightarrow A \text{ contiene puntos arbitrariamente cercanos a } X \text{ (según la topología).}
\end{aligned}
$$

Corollary 1.25. $C \subset X$ es cerrado si y solo si $\forall x \in X$, si toda vecindad de x contiene un punto de C, entonces $x \in X$.

Proof. (proposición 1.24)
$\boxed{\Leftarrow}$ Suponer que $x \notin \overline{A}$. Entonces $\exists C$ cerrado con $A \subset C$ y $x \notin C$. Luego, tomar $U := C \backslash C$ abierto. Entonces, $A \cap U = \varnothing$ y $x \in U$. Es decir, negamos $(*)$.
$\boxed{\Rightarrow}$ Negamos $(*) \Rightarrow \exists U$ abierto con $x \in U$ y $U \cap A = \varnothing$. Luego, $C = X \backslash U$ cerrado con $A \subset C$ y $x \notin C$. Entonces, $x \notin A$. □

Definition 1.26 (puntos de acumulación). $A \subset X$. Decimos que $x \in X$ es punto límite/de acumulación de A si $\forall U$ abierto conteniendo a x, se tiene que $U \cap (A \backslash \{x\}) \neq \varnothing$. Escribimos $A' := \{\text{puntos límite de } A\}$.

Example. En $\mathbb{R}$, tenemos lo siguiente:

A	$\mathring{A}$	$\overline{A}$	A'
(a, b)	(a, b)	$[a, b]$	$[a, b]$
$[a, b)$	(a, b)	$[a, b]$	$[a, b]$
$[a, b]$	(a, b)	$[a, b]$	$[a, b]$
$[0, 1] \cup \{2\}$	$(0, 1)$	$[0, 1] \cup \{2\}$	$(0, 1)$

Notar que 2 no es punto de acumulación. ◇