Topología

Basado en las clases impartidas por Eduardo Oregón en el segundo semeste del 2025

Contents

Chapter 1

Munkres

1.1 Clase 1 (04/08): Espacios Topológicos [12]

Definición 1.1 (sistema de vecindades)**.** X conjunto no vacío. Si $x \in X$, consideramos $\mathcal{V}_x \subset 2^X$, tal que:

1. $\forall x \in X$, $\forall V \in \mathcal{V}_x$, $x \in \mathcal{V}_x$;
2. $\forall x \in X$, $\forall V \in \mathcal{V}$, si $V' \supset V \Rightarrow V' \in \mathcal{V}_x$;
3. Si $V_1, V_2 \in \mathcal{V} \Rightarrow V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}_x$.

El sistema de vecindades es $\{\mathcal{V}_x\}_{x \in X}$. Si $V \in \mathcal{V}_x$, V es vecindad de x.

Ejemplo.

1. (X, d) espacio métrico $\mathcal{V}_x \coloneqq \{V \subset X | \exists \varepsilon > 0 \text{ tal que } B_\varepsilon(x) \subset V\}$. Verificamos que sea sistema de vecindad.

   Demostración. Verificamos 1), 2) y 3):

   1) $x \in X$, $V \in \mathcal{V}_x \Rightarrow x \in B_\varepsilon(x) \subset V$;
   2) X $x \in X$, $V \in \mathcal{V}_x$, $V' \supset V \Rightarrow x \in B_\varepsilon(x) \subset V \subset V' \Rightarrow V' \in \mathcal{V}_x$;
   3) $$\begin{aligned} x \in V_1 \cap V_2, V_1, V_2 \in \mathcal{V}_x &\Rightarrow B_{\varepsilon_1}(x) \subset V_1, B_{\varepsilon_2}(x) \subset V_2 \\ &\Rightarrow B_{\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}}(x) \subset V_1 \cap V_2 \\ &\Rightarrow V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}_x. \end{aligned}$$

   □

2. X arbitrario, $\forall x \in X$, sea $\mathcal{V}_x = \{X\}$ es sistema de vecindades (vacuidad).
3. X arbitrario $\mathcal{V}_x = \{V \subset X \mid x \in V \text{ y } X \setminus V \text{ sea finito}\}$ (queda como ejercicio chequear que esto define un sistema de vecindades).

◇

Definición 1.2 (topología desde sistema de vecindades). Tenemos X, $\{\mathcal{V}_x\}_{x\in X}$ sistema de vecindades. Definimos, $\tau = \{U \subset X \mid x \in U \Rightarrow U \in \mathcal{V}_x\}$.

Lema 1.3. τ cumple lo siguiente:

1. $\varnothing, X \in \tau$;
2. $U_\alpha \in \tau, \alpha \in A \Rightarrow \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha \in \tau$;
3. $U_1, \ldots, U_n \in \tau \Rightarrow U_1 \cap \cdots \cap U_n \in \tau$.

τ es la topología inducida por $\{\mathcal{V}_x\}$. Elementos de τ (subconjuntos de X) se llamarán abiertos.

1.2 Clase 2 (06/08): Topología, Base [12, 13]

Demostración. (último lema de la clase anterior)

1. $\varnothing \in \tau$ por vacuidad.

$$\begin{aligned} X \in \tau : x \in X &\Rightarrow \exists V \in \mathcal{V}_x \quad (1) x \in V; (2) x \in V \subset X \\ &\Rightarrow X \in \mathcal{V}_x. \quad \forall x : X \in \tau \end{aligned}$$

2. Tomar $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$, $U_\alpha \in \tau$, $\mathcal{U} = \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$. Si $x \in \mathcal{U} \Rightarrow x \in U_\alpha \in \mathcal{V}_x$ para algún α. Como $U_\alpha \in \tau \Rightarrow U_\alpha \in \mathcal{V}_x$. Luego, si $x \in U_\alpha \subset \mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{U} \in \mathcal{V}_x$, $\forall x \in \mathcal{U}$. Por lo tanto, $\mathcal{U} \in \tau$.
3. Tomamos $U_1, \ldots, U_n \in \tau$, $\mathcal{U} = U_1 \cap \cdots \cap U_n$ y $x \in \mathcal{U}$. Luego, $x \in U_i \quad \forall i$. Como $U_i \in \tau \Rightarrow U_i \in \mathcal{V}_x, \quad \forall i$. Por inducción (con las intersecciones), podemos afirmar que $\mathcal{U} \in \mathcal{V}_x$, $\forall x \in \mathcal{U}$. Por lo tanto, $\mathcal{U} \in \tau$.

□

1.2.1 Topología

Definición 1.4 (topología). X conjunto no vacío, $\tau \subset 2^X$ es una topología si cumple:

1. $\varnothing, X \in \tau$;
2. $U_\alpha \in \tau,\ \alpha \in A \Rightarrow \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha \in \tau$;
3. $U_1, \ldots, U_n \in \tau \Rightarrow U_1 \cap \cdots \cap U_n \in \tau$.

Observación. Se utilizará la siguiente notación:

- (X, τ) se llama espacio topológico.
- $U \in \tau \Rightarrow U$ se llama abierto (con respecto a la topología).

Lema 1.5. τ topología en $X \Rightarrow$ Inducida por un único sistema de vecindades.

Demostración. Para $x \in X$, definir $\mathcal{V}_x = \{V \subset X \mid \exists U \in \tau \text{ con } x \in U \subset V\}$. Verificamos que $\{\mathcal{V}_x\}_x$ es sistema de vecindades:

1. La definición implica $V \in \mathcal{V}_x \Rightarrow x \ (\in U \subset) \ \in V$;
2. Si $V \in \mathcal{V}_x$ y $V' \supset V \Rightarrow (V \in \mathcal{V}_x) \ x \in U \subset \ (U \in \tau)$
$$\Rightarrow x \in U \subset V' \Rightarrow V' \in \mathcal{V}_x;$$
3. Tomar $V_1, V_2 \in \mathcal{V}_x \Rightarrow x \in U_1 \subset V_1, \quad x \in U_2 \subset V_2$ con $U_1, U_2 \in \tau$
$$\Rightarrow x \in \underbrace{U_1 \cap U_2}_{\in \tau} \subset V_1 \cap V_2 \Rightarrow V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}_x;$$

(falta demostrar unicidad). □

Ejemplo (de espacios topológicos)**.**

1. (Topología métrica): (X, d) espacio métrico. Abierto es $U \in X$ tal que $\forall x \in U, \exists \varepsilon > 0$ tal que $x \in B_\varepsilon(x) \subset U$.
   (a) $X = \mathbb{R}^n$, $d((x_i),(y_i)) = \sqrt{sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$. Así, se obtiene la topología estándar.
   (b) X arbitrario, d métrica discreta $d(x,y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y. \end{cases}$ Así, se obtiene la topología discreta: $\tau = 2^X$.
2. (Topología indiscreta): X arbitrario, $\tau = \{\varnothing, X\}$;
3. (Topología cofinita): X arbitrario, $\tau_{cof} = \{U \subset X \mid X \setminus U \text{ es finito}\} \cap \{\varnothing\}$ (queda como ejercicio verificar que es topología).

◇

1.2.2 Base de una topología

Una base es un subconjunto "manejable" de τ que la describe completamente!

Definición 1.6 (base)**.** X es conjunto. $\mathcal{B} \subset 2^X$ es base para alguna topología si:

1. $\forall x \in X, \exists B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$ $\left(\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X\right)$.
2. $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}, \forall x \in B_1 \cap B_2, \exists B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Definición 1.7 (topología inducida)**.** La topología inducida por la base $\mathcal{B}$ en X es:

$$\tau = \{U \subset X \mid \forall x \in U, \exists B \in \mathcal{B} \text{ tal que } x \in B \subset U\}.$$

Nota. $\mathcal{B} \subset \tau$.

Lema 1.8. τ, definido arriba, es una topología.

Ejemplo. (X, d) espacio métrico $\Rightarrow \mathcal{B} = \{B_\varepsilon(x) \mid x \in X, \varepsilon > 0\}$ es base de la topología métrica. ◇

1.3 Clase 3 (08/08): Bases, Topología producto [13,15]

Demostración. (lema 1.8)

1. $\varnothing, X \in \tau$: $\varnothing \in \tau$ por vacuidad y $X \in \tau$ por propiedad (1) de $\mathcal{B}$.
2. τ cerrado bajo unión: $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ colección con $U_\alpha \in \tau$, $\mathcal{U} = \bigcup_\alpha U_\alpha$.

$$\begin{aligned} \text{Si } x \in \mathcal{U} &\Rightarrow x \in U_\alpha \text{ para algún } \alpha \\ &\Rightarrow x \in B \subset U_\alpha \text{ para algún } B \in \mathcal{B} \\ &\Rightarrow x \in B \subset \mathcal{U}. \end{aligned}$$

   Por lo tanto, $\mathcal{U} \in \tau$.
3. τ cerrado bajo intersección finita: $U_1, \ldots, U_n \in \tau, \mathcal{U} = U_1 \cap \cdots \cap U_n$. Sea $x \in \mathcal{U} \Rightarrow x \in U_i \ \forall i \ (U_i \in \tau) \Rightarrow x \in B_i \subset U_i \ \forall\, i, B_i \in \mathcal{B}$. Propiedad (2) implica $x \in B \subset B_1 \cap \cdots \cap B_n \subset U_1 \cap \cdots \cap U_n = \mathcal{U}$. Por lo tanto, $\mathcal{U} \in \tau$.

□

Nota. Si B base genera $\tau \Rightarrow B \subset \tau$.

Definición 1.9 (topología generada)**.** τ topología está generada por una base B sin B es base, y τ es topología generada por B.

Utilidad: Dada τ topología a estudiar, queremos encontrar base B que la describa.

Ejemplo. (X, d) espacio métrico, $\mathcal{B} = \{B_\varepsilon(x) \mid \varepsilon > 0, x \in X\}$ es base para la topología métrica. ◇

Demostración. Probamos que B es base.

1. Notar $X = \bigcup_{x \in X} B_1(x)$. Por lo tanto, $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$.

2. $B_1, B_2 \in \mathcal{B}, B_1 = B_{\varepsilon_1}(x_1), B_2 = B_{\varepsilon_2}(x_2)$. Sea $x \in B_1 \cap B_2$. Queremos encontrar $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subset B_1 \cap B_2$. Por desigualdad triangular, tenemos que $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1 - d(x, x_1), \varepsilon_2 - d(x, x_2)\}$ sirve.

□

Nota. 1. Una base no es necesariamente una topología ((1) y (2) pueden fallar).

2. Si B es base y τ topología, $B \subset \tau \not\Rightarrow \tau$ es generada por B.

Ejemplo. Topología del límite inferior en $\mathbb{R}$: $B_l = \{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ (se deja como ejercicio demostrar que B_l es base). ◇

Definición 1.10 (topología del límite inferior). B_l genera la topología del límite inferior τ_l.

Observación.

1. τ_l no es τ_{std} ($[a, b)$ abierto en τ_l pero no en τ_{std}
2. $\tau_{std} \subset \tau_l$ (la demostración de esto queda como ejercicio).
3. (Intuición): Si $0 \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$ (para τ_{std}, y cerda de 0 si $|y| < \varepsilon$). Para τ_l, y cerca de 0, si $y \in [0, \varepsilon)$ ($0 \leq y < \varepsilon$ para $\varepsilon > 0$ chiquito).

1.3.1 Comparación de topologías

Definición 1.11 (topologías finas). τ, τ' topologías en X, decimos que τ' es más fina que τ si $\tau' \supset \tau$. Decimos que τ y τ' son comparables si $\tau' \supset \tau$ o $\tau \supset \tau'$.

Ejemplo. τ_l es más fina que τ'. ◇

Ejemplo. $\forall \tau$ topología en X, $\{\varnothing, X\} \subset \tau \subset 2^X$. Donde $\{\varnothing, X\}$ es llamada la topología indiscreta (todos cercanos entre sí) y 2^X la topología discreta (todos lejanos entre sí). ◇

En conclusión, si τ' es más fina que τ, los puntos están más lejanos respecto a τ' que a τ

1.4 Clase 4 (11/08): Topología producto [15] e inducida [16]

Lema 1.12. $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ bases en X que generan la topología τ, τ' respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned} \tau' \supset \tau &\Leftrightarrow \text{(todo elemento de } \mathcal{B} \text{ está en } \tau'); \\ &\Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{B}, B \text{ es unión de elementos de } \mathcal{B}'; \\ &\Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{B}, \forall x \in B, \exists B' \in \mathcal{B}' \text{ tal que } x \in B' \subset B. \end{aligned}$$

Lema 1.13. $\mathcal{B}_{X\times Y} := \{U \times U' \mid U \text{ abierto en } X, U' \text{ abierto en } Y\}$ es una base para una topología.

Definición 1.14 (topología producto)**.** Topología producto en $X \times Y$ es la generada por $\mathcal{B}_{X\times Y}$.

Demostración. (lemma 1.13.)

1. Como $X \times Y \in \mathcal{B}_{X\times Y} \Rightarrow \bigcup_{B\in\mathcal{B}_{X\times Y}} B = X \times Y$.
2. Tomar $B_1 = U_1 \times U_1' \in \mathcal{B}_{X\times Y}, B_2 = U_2 \times U_2' \in \mathcal{B}_{X\times Y}, (x,y) \in B_1 \cap B_2$ (U_1, U_2 abiertos en X y U_1', U_2' abiertos en Y). Notar que:

$$B_1 \cap B_2 = (U_1 \times U_1') \cap (U_2 \times U_2') = \underbrace{(U_1 \cap U_2)}_{\text{abto. en } X} \times \underbrace{(U_1' \cap U_2')}_{\text{abto. en } Y} \in \mathcal{B}_{X\times Y}.$$

□

Nota. Misma demostración (salvo modificaciones esperables) implica que si $\mathcal{B}_X$ es base de X, $\mathcal{B}_Y$ base de Y, $\mathcal{B}'_{X\times Y} := \{B \times B' \mid B \in \mathcal{B}_X, B' \in \mathcal{B}_Y\}$ es base y genera la misma topología generada por $\mathcal{B}_{X\times Y}$.

Ejemplo (importante)**.** $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Propiedad: topología estándar de $\mathbb{R}^2$ (métrica euclidiana) es igual a la topología producto en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (cada uno con su topología estándar).

- Topología estándar en $\mathbb{R}^2$: generada por base $\mathcal{B} = \{B_\varepsilon(x,y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2, \varepsilon > 0\}$.
- Topología producto en $\mathbb{R}^2$: generada por base $\mathcal{B}' = \{(a,b) \times (c,d) \mid a < b, c < d\}$.

◇

Ejercicio. Verificar para $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.15 (topología inducida)**.** $\tau|_Y := \{Y \cap U \mid U \in \tau\}$ es topología en Y. La llamamos topología en Y inducida por X.

Demostración. (topología inducida es topología)

1. $\varnothing = \varnothing \cap Y, Y = X \cap Y$.
2. Si $U_\alpha \in \tau|_Y, \alpha \in A \Rightarrow U_\alpha = U_\alpha' \cap Y$ con $U_\alpha' \in \tau \Rightarrow \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha = \bigcup_{\alpha\in A}(U_{\alpha\in A} \cap Y) = \left[\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha\right] \times Y \in \tau|_Y$.
3. $U_1, \dots, U_n \in \tau|_Y, U_i = U_i' \cap Y \Rightarrow U_1 \cap \dots \cap U_n = (U_1' \cap Y) \cap \dots \cap (U_n' \cap Y) = (U_1' \cap \dots \cap U_n') \cap Y \in \tau|_Y$.

□

Lema 1.16. $\mathcal{B}|_Y := \{Y \cap B \mid B \in \mathcal{B}\}$ es base para la topología en Y inducida por X.

Observación. Cuidado: La noción de abierto depende de la topología a especificar.

Ejemplo. En $X = \mathbb{R}, Y = [0,1] \cup (2,3) \cup \{4\}$. Notar que:

- Y es abierto en Y, pero no es abierto en X.
- $[0,1]$ también abierto en $Y : [0,1] = Y \cap (-1,2)$.
- $\{4\}$ también abierto en $Y : \{4\} = Y \cap (3,5)$.

◇

Nota. Si $U \subset Y$ es abierto en $X \Rightarrow$ abierto en Y.

Lema 1.17. $Y \subset X, \tau|_Y \subset \tau \Leftrightarrow Y$ es abierto en X.

Proposición 1.18. X, Y espacios topológicos, $A \subset X, B \subset Y$.

En $A \times B \to$ topología inducida desde $X \times Y$ (con topología producto)
$\to$ topología producto desde A y B (con topología inducida por X, Y respectivamente).

Estas topologías son la misma.

Demostración. Elemento de topología primera: $U = U' \cap A \times B$
Elemento de topología segunda: U es unión de productos $V \times V'$ con V abierto en A, V' abierto en B. Notar que $V \times V' = (W \cap A) \times (W' \cap B) = (W \times W') \cap A \times B$. □

1.5 Clase 5 (13/08): Cerrados, clausura, puntos límites [17]

Definición 1.19 (conjunto cerrado)**.** X espacio topológico, $C \subset X$ es cerrado si $X \backslash C$ es abierto.

Lema 1.20.

1. $X, \varnothing$ son cerrados;
2. Si $C_\alpha \subset X$ cerrados, $\alpha \in A \Rightarrow \bigcap_\alpha C_\alpha$ es cerrado;
3. Si $C_1, \dots, C_n$ cerrados, entonces $C_1 \cup \cdots \cup C_n$ es cerrado.

Demostración.

1. $X = X \setminus \varnothing,\ \varnothing = X \setminus X$;
2. $C_\alpha = \bigcap_{\alpha \in A} C_\alpha \Rightarrow X \setminus C = X \setminus \bigcap_{\alpha \in A} C_\alpha = \underbrace{\bigcup_{\alpha \in A} (\overbrace{X \setminus C_\alpha}^{\text{abto}})}_{\text{abto}}$;
3. $C = C_1 \cup \cdots \cup C_n \Rightarrow X \setminus C = X \setminus (C_1 \cup \cdots \cup C_n) = \underbrace{(\overbrace{X \setminus C_1}^{\text{abto}}) \cap \cdots \cap (\overbrace{X \setminus C_n}^{\text{abto}})}_{\text{abto}}$.

$\square$

Ejemplo.

1. $X = \mathbb{R}, [a, b]$ es cerrado $(\mathbb{R} \setminus [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, \infty))$;
2. (X, d) espacio métrico (+ topología métrica) $\Rightarrow \overline{B_\varepsilon}(x)$ es cerrado. Luego, $X \setminus \overline{B_\varepsilon}(x) = \bigcup_{y \in X \setminus \overline{B_\varepsilon}(x)} B_{d(x,y)-\varepsilon}(y)$ (abierto en topología métrica);
3. X con la topología discreta $\Rightarrow$ todo subconjunto de X es abierto y cerrado!

$\diamond$

Definición 1.21 (cerrado topología inducida)**.** X espacio topológico, $Y \subset X$ (con la topología inducida), $C \subset Y$ es cerrado en Y si es cerrado en la topología inducida.

Lema 1.22. C es cerrado en Y si y solo si $C = C' \cap Y$ con C' cerrado en X.

Demostración. $C \subset Y$ es cerrado en $Y \Leftrightarrow Y \setminus C$ es abierto en Y

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow Y \setminus C = U \cap C \text{ con } U \subset X \text{ abierto} \\ &\Leftrightarrow C = (X \setminus U) \cap Y = C' \cap Y, \text{ con} \\ &\quad C' = X \setminus U \text{ cerrado.} \end{aligned}$$

$\square$

Definición 1.23 (clausura e interior). X espacio topológico, $A \subset X$:

1. El interior de A es $\mathring{A}$ = unión de todos los abiertos contenidos en A;
2. La clausura de A es $\overline{A}$ = intersección de todos los cerrados que contienen A.

Observación.

1. $\mathring{A}$ es abierto, $\overline{A}$ es cerrada, $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$;
2. A es abierto si y solo si $\mathring{A} = A$. A es cerrado si y solo si $\overline{A} = A$;
3. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$;
4. El interior $\mathring{A}$ es el abierto mas grande contenido en A y la clausura $\overline{A}$ es el cerrado mas pequeño que contiene a A.

Proposición 1.24. X espacio topológico, $A \subset X$ cualquiera, $x \in X$.

$x \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall U$ abierto conteniendo a X, se tiene $A \cap U \neq \varnothing$ $\quad (*)$
$\Leftrightarrow$ toda vecindad de x interseca a A
$\Leftrightarrow$ A contiene puntos arbitrariamente cercanos a X (según la topología).

Corolario 1.25. $C \subset X$ es cerrado si y solo si $\forall x \in X$, si toda vecindad de x contiene un punto de C, entonces $x \in X$.

Demostración. (proposición 1.24)
$\boxed{\Leftarrow}$ Suponer que $x \notin \overline{A}$. Entonces $\exists C$ cerrado con $A \subset C$ y $x \notin C$. Luego, tomar $U := C \backslash C$ abierto. Entonces, $A \cap U = \varnothing$ y $x \in U$. Es decir, negamos $(*)$.
$\boxed{\Rightarrow}$ Negamos $(*) \Rightarrow \exists U$ abierto con $x \in U$ y $U \cap A = \varnothing$. Luego, $C = X \backslash U$ cerrado con $A \subset C$ y $x \notin C$. Entonces, $x \notin A$. ☐

Definición 1.26 (puntos de acumulación). $A \subset X$. Decimos que $x \in X$ es punto límite/de acumulación de A si $\forall\ U$ abierto conteniendo a x, se tiene que $U \cap (A \backslash \{x\}) \neq \varnothing$. Escribimos $A' := \{$puntos límite de $A\}$.

Ejemplo. En $\mathbb{R}$, tenemos lo siguiente:

A	$\mathring{A}$	$\overline{A}$	A'
(a,b)	(a,b)	$[a,b]$	$[a,b]$
$[a,b)$	(a,b)	$[a,b]$	$[a,b]$
$[a,b]$	(a,b)	$[a,b]$	$[a,b]$
$[0,1] \cup \{2\}$	$(0,1)$	$[0,1] \cup \{2\}$	$(0,1)$

Notar que 2 no es punto de acumulación. ◇

1.6 Clase 6 (18/08): Espacios Hausdorff, convergencia [17]

Observación. $x \in A' \Leftrightarrow x \in \overline{A \setminus \{x\}}$.

Lema 1.27. $\forall\ A \subset X,\ \overline{A} = A \cup A'$.

Demostración. $\boxed{\supset}$ Notar que $A \subset \overline{A}$. Si $x \in A' \Rightarrow x \in \overline{A \setminus \{x\}} \subset \overline{A}$ $(*)$. Notar que $(*) A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$. Por lo tanto $A' \subset \overline{A}$. Entonces, $A \cup A' \subset \overline{A}$. $\boxed{\subset}$ $(\overline{A} \subset A \cup A'$, equiv: $\overline{A} \setminus A \subset A')$ Si $x \in \overline{A} \setminus A$. Entonces, $x \notin A$ y $\forall\ U \ni x$ abierto se tiene $A \cap U \neq \varnothing$. Como $x \notin A \Rightarrow (A \setminus \{x\}) \cap U \neq \varnothing$. Entonces, $x \in A'$. □

Observación. A' no es necesariamente cerrado.

Ejemplo. $X = \{a, b\}$; $\tau = \{\varnothing, X\}$ (a, b indistinguibles desde el punto de vista de τ). $A = \{b\} \Rightarrow A' = \{b\}$ (no es cerrado). $a \notin A' \Leftrightarrow a \notin \overline{A \setminus \{a\}} = \overline{\varnothing} = \varnothing$. $b \in A \Leftrightarrow b \in \overline{A \setminus \{b\}} = \overline{\{a\}} = \{a, b\}$. ◇

Problemas:

- Subconjuntos finitos no tienen topología discreta;
- Subconjuntos finitos no son cerrados.

Lema 1.28. Si X es espacio topológico arbitrario. Son equivalentes:

1. Todos los subconjuntos finitos de X tienen la topología discreta.
2. Todos los subconjuntos finitos de X son cerrados.

Definición 1.29 (espacios T_1 o Frechet)**.** Un espacio topológico X es T_1 (cumple el axioma T_1) si sus subconjuntos finitos son cerrados.

Ejemplo. X con la topología indiscreta NO es T_1 si $\#X \geq 2$. ◇

Ejemplo. X con topología cofinita es T_1. En la topología

$$\{\text{subconjuntos cerrados}\} = \{\text{conjuntos finitos}\}$$

◇

Lema 1.30. X es $T_1,\ A \subset X \Rightarrow A'$ es cerrado.

Demostración. (Queremos $\overline{A'} = A'$, i.e. $\overline{A'} \setminus A' = \varnothing$) Suponer que $x \in \overline{A'}$, $x \notin A'$. Si $x \notin A'$, entonces $\exists\ U$ abierto con $x \in U$ y $U \cap A \subset \{x\}$. Si $x \in \overline{A'}$, entonces $A' \cap U \neq \varnothing$. Luego, $\exists\ y \in U \cap A'$ $(y \neq x)$. Como X es T_1, entonces $\{x\}$ es cerrado. Luego, $X \setminus \{x\}$ es abierto, y con ello tenemos que $U \setminus \{x\}$ es abierto. Si $V = U \setminus \{x\}$ abierto que contiene a y ($y \in A'$), entonces V contiene puntos de A, distintos de y. Luego, $\exists\ z \in A \cap V$. Así, $z \in A \cap U$ y $z \neq x$. Contradicción! ⋇ $\square$

Definición 1.31 (espacios T_2 o Haussdorff)**.** Un espacio topológico X es T_2 (o Hausdorff), si $\forall\ x \neq y$ en X existen $U, U' \subset X$ abiertos <u>disjuntos</u> con $x \in U,\ y \in U'$.

Ejemplo. X con la topología cofinita, con $\#X = \infty$ es T_1 pero no es Hausdorff. Veamos que esto es así. Si $x \neq y \in X,\ x \in U,\ y \in U'$ abiertos ($X \setminus U,\ X \setminus U'$ finitos), entonces $(X \setminus U) \cup (X \setminus U')$ finito. Luego, $X \setminus (U \cap U')$ finito. Así, $U \cap U'$ infinito, por lo que $U \cap U'$ no puede ser disjunto. $\diamond$

Lema 1.32. X Hausdorff $\Rightarrow X$ es T_1.

kk

Demostración. (X es $T_1 \Leftrightarrow$ subconjuntos finitos son cerrados $\Leftrightarrow$ singlietons son cerrados) $\to$ (veremos el último si y solo si) Sea $x \in X$, queremos que $X \setminus \{x\}$ sea abierto. Si $y \neq x$, dado que X es Hausdorff, $\exists\ U_y, U'_y$ abiertos disjuntos con $y \in U_y,\ x \in U'_y$. Luego, $x \notin U_y$. Por lo tanto, $X \setminus \{x\} = \bigcup_{y \neq x} U_y$ es abierto. $\square$

Ejemplo. (X, d) espacio métrico, X es Hausdorff con la topología métrica. $\diamond$

Corolario 1.33 (secreto)**.** Existen topologías que no vienen de métricas.

Demostración (del ejemplo)**.** Para la topología métrica, bolas abiertas son abiertos. Si $x \neq y$, entonces $U = B_{\frac{d(x,y)}{2}}(x),\ U' = B_{\frac{d(x,y)}{2}}(y)$. $\square$

En X con la topología cofinita, $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ infinito contable. Definimos $y_n = x_n$ con $n \geq 1$ (cada elemento de X aparece exactamente una vez). Cada abierto $\varnothing \neq U \subset X$ contiene a $y_n\ \forall n \geq \mathbb{N}$ (N depende de U). (próxima clase: $y_n \to x\ \forall x \in X$).

1.7 Clase 7 (20/08):

Observación. $\mathcal{B} \subset \tau \Rightarrow$ quizás $\tau_{\mathcal{B}} \neq \tau$. Solo es cierto $\tau_{\mathcal{B}} \subset \tau$.

Observación. Existe una noción más débil (T_0): $\forall\ x \neq y \in X,\ \exists\ U$ abierto tal que, o bien $x \in U,\ y \notin U$ o $y \in U,\ x \notin U$. Se puede demostrar que $T_1 \Rightarrow T_0$. Además, $\exists\ X,\ T_0$, no T_1, tal que 1.30 se cumple.

Definición 1.34 (convergencia de suceciones). X espacio topológico, $(X_n)_n$ sucesión en X, $x \in X$. Decimos que x_n converge a x (con respecto a la topología) $[x_n \to x]$ si: $\forall\ U$ abierto con $x \in U$ existe N tal que $n \geq N$ implica $x_n \in U$.

Nota. Si $\mathcal{B}$ base para topología en X, $x_n \to x$ equivale a: $\forall B \in \mathcal{B}$ con $x \in B$, $\exists N$ tal que $n \geq N$ se tiene $x_n \in B$.

Ejemplo. (X,d) espacio métrico. $x_n \to x$ (topología métrica) $\longleftrightarrow x_n \to x$ (análisis real): $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ tal que $n \geq N \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$ $(x_n \in B_\varepsilon(x))$. $\diamond$

Ejemplo. X con la topología indiscreta ($\tau = \{\varnothing, X\}$). Entonces, para cualquier suceción $(x_n)_n$, para cualquier $x \in X$, $x_n \to x$ (solo se debe verificar $U = X$). $\diamond$

Ejemplo. X con la topología discreta, entonces $(x_n \to x) \longleftrightarrow x_n = x$ para todo $n \gg 0$ [Caso $U = \{x\}$]. $\diamond$

Ejemplo. X infinito contable con topología cofinita [T_1, no T_2], $X = \{a_1, a_2, \dots\}$. Si $x_n = a_n \Rightarrow x_n \to x$ para todo $x \in X$ [Si U abierto, $x \in U \not\Rightarrow U = X \setminus \{a_{i_1}, \dots, a_{i_k}\}(i_1 < \cdots < i_k) \Rightarrow n \geq N = i_k + 1$ implica $x_n \to x$]. $\diamond$

Lema 1.35. Si T_2, $(x_n)_n$ sucesión con $x_n \to x$, $x_n \to y$, entonces $x = y$.

Demostración. Si $x \neq y$, dado que es T_2, entonces existen U, U' abiertos disjuntos con $x \in U$, $y \in U'$. Si $x_n \to x$, entonces existe N_1 tal que $n \geq N_1$ implica $x_n \in U$. Si $x_n \to y$, entonces existe N_2 tal que $n \geq N_2$ implica $x_n \in U$. Por lo tanto $n \geq N_1$ y $n \geq N_2$, entonces $x_n \in U \cap U'$. Contradicción! ※ $\square$

Continuidad: $f : X \to Y$, X, Y espacios topológicos.

- [No Def]: Si $x_n \to x$ en $X \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$ en Y.

Definición 1.36 (continuidad). f es continua si $\forall\ U \subset Y$ abierto, se tiene $f^{-1}(U)$ es abierto en X.

Ejemplo. Si (X,d), (Y,d') son espacios métricos, entonces $f : X \to Y$ continua (respecto a topologías métricas) $\longleftrightarrow f(\varepsilon - \delta)$ continua: $\forall\ x \in X$, $\forall\ \varepsilon > 0$; $\exists\ \delta > 0$ tal que $d(x,y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$. $\diamond$

Observación. $d(x,y) < \delta$ es lo mismo que pedir $y \in B_\delta(x)$. Similarmente $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$ es lo mismo que $\delta(y) \in B_\varepsilon(f(x))$, $y \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(x))$.

Lema 1.37. $X \xrightarrow{f} Y$, $\mathcal{B}'$ base de Y, $\mathcal{B}$ base de X. Entonces

$$\begin{aligned} f \text{ continua} &\Leftrightarrow [\text{Si } B' \in \mathcal{B}' \Rightarrow f^{-1}(B') \text{ es abierto} \\ &\Leftrightarrow \text{Si } B' \in \mathcal{B}',\ \forall\ y \in f^{-1}(B'),\ \text{existe } B \in \mathcal{B} \text{ con } y \in B \subset f^{-1}(B'). \end{aligned}$$

Lema 1.38 (continuidad secuencial)**.** Si $f : X \to Y$ continua (hay top. dadas). Entonces, si $x_n \to x$ en $X \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$ en Y.

Demostración. Suponer $x_n \to x$ en X. Queremos que $f(x_n) \to f(x)$ en Y. Tomar $U \subset Y$ abierto con $f(x) \in U$. Luego, f continua implica que $f^{-1}(U)$ abierto con $x \in f^{-1}(U)$. Si $x_n \to x$, entonces existe N tal que $n \geq N$ implica $x_n \in f^{-1}(U)$. Entonces, existe N tal que $n \geq N$ implica $f(x_n) \in U$. Por lo tanto, $f(x_n) \to f(x)$. □

1.8 Clase 8 (22/08): Continuidad, homeomorfismos [18]

1.8.1 Observaciones clase pasada

Observación.

- $f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in I} f^{-1}(A_\alpha)$;
- $f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}(A_\alpha)$.

Estas identidades no son necesariamente ciertas si se ocupa f en vez de f^{-1}.

Observación (Tarea 2)**.** Coninuidad secuencial $\not\Rightarrow$ Continuidad.

1.8.2 Clase 8

Lema 1.39. $f : X \to Y,\ X,\ Y$ espacios topológicos.

$$f \text{ continua } \Leftrightarrow \forall C \subset Y \text{ cerrado, se tiene } f^{-1}(C) \text{ cerrado en } X$$

Demostración. $\boxed{\Rightarrow}$ Suponer que f continua. Tomamos $C \subset Y$ cerrado [queremos $X \setminus f^{-1}(C)$ abierto]. Notar que

$$\begin{aligned} X \setminus f^{-1}(C) = \{x \in X \ : \ x \notin f^{-1}(C)\} &= \{x \in X \ : \ f(x) \in Y \setminus C\} \\ &= \underbrace{f^{-1}\ \underbrace{(Y \setminus C)}_{\text{abierto en } X}}_{\text{abierto en } X \text{ pq } f \text{ continua}} . \end{aligned}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Análogo. □

Ejemplo. Si $f : X \to Y,\ X,\ Y$ espacios topológicos

1. Si Y con topología indiscreta ($\{\varnothing, Y\}$) $\Rightarrow f$ automáticamente continua. Notar que $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing,\ f^{-1}(Y) = X$.

2. Si X tiene topología discreta (2^X) $\Rightarrow f$ continua. Notar que $f^{-1}(U)$ es abierto para todo subconjunto $U \subset Y$.

3. Si $A \subset X$ y f continua. Entonces $f|_A : A \to Y$ también es continua [A co top. inducida]. Notar que $U \subset Y$ abierto, entonces

$$\begin{aligned}(f|_A)^{-1}(U) &= \{x \in A \mid f|_A(x) = f(x) \in U\} \\ &= \underbrace{A \cap \underbrace{f^{-1}(U)}_{\text{abierto en } X}}_{\text{abierto en} A}\end{aligned}$$

4. Si X_1, X_2 espacios topológicos, entonces $\pi_1 : X_1 \times X_2 \to X_1$ es continua. Notar que si $U \subset X_1$ abierto, entonces $\pi_1^{-1}(U) = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in U\} = U \times X_2$ abierto en $X_1 \times X_2$.

$\diamond$

Propiedades. X, Y, Z espacios topológicos

1. Fijar $y_0 \in Y$. $f : X \to Y,\ f(x) = y_0\ \forall x$, es continua. Notar que $U \subset Y$ abierto, entonces

$$f^{-1}(U) = \begin{cases} X \text{ si } y_0 \in U \\ \varnothing \text{ si } y_0 \notin U \end{cases}$$

2. Si $f : X \to Y,\ g : Y \to Z$ continuas, entonces $g \circ f : X \to Z$ continuas. Notar que $V \subset Z$ abierto, entonces $(g \circ f)^{-1}(V) = \underbrace{f^{-1}\ \underbrace{(g^{-1}(V))}_{\text{abierto en } Y}}_{\text{abierto en } X}$

3. Si $f : X \to Y$ continua y $f(X) \subset Z \subset Y$, entonces $f : X \to Z$ continua. Notar que $U \subset Z$ abierto en Z, entonces $U = Z \cap V,\ V \subset Y$ abierto. Dado que $f(X) \subset Z$, tenemos que $f^{-1}(U) = f^{-1}(V)$ abierto en X [$f : X \to Y$ continua]. Luego, $f^{-1}(U)$ abierto en X.

4. (Continuidad es propiedad local): Si $f : X \to Y,\ (B_\alpha)_{\alpha \in I}$ abiertos en X tal que $\displaystyle\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \overset{(*)}{=} X$. Entonces

$$f \text{ continua} \Leftrightarrow f|_{B_\alpha} \to Y \text{ es continua para todo } \alpha$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Tomamos $U \subset Y$ abierto (queremos $f^{-1}(U)$ abierto en X). Usar $f^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in I} (f|_{B_\alpha})^{-1}(U)$. Vamos a demostrar esta igualdad:

$\boxed{\subset}$ $x \in f^{-1}(U)$ y $x \in B_\alpha$, entonces $x \in (f|_{B_\alpha})^{-1}(U)$.

$\boxed{\supset}$ Hacer!

Luego, tenemos que $(f|_{B_\alpha})^{-1}(U)$ es abierto en B_α y que B_α es abierto, entonces $(f|_{B_\alpha})^{-1}(U)$ abierto en X $\forall \alpha$. Por $(*)$, tenemos que $f^{-1}(U)$ es abierto en X.

Nota. Si se reemplaza "B_α abiertos" por "B_α cerrados", 4. igual se cumple + I finito (cjto. de indices de la unión) [Lema del pegado en Munkres]

Definición 1.40 (homeomorfismo)**.** X, Y espacios topológicos. $f : X \to Y$ es homeomorfismo si

1. f es continua;
2. f es biyectiva (existe $f^{-1} : Y \to X$);
3. f^{-1} es continua.

Observación. Propiedades topológicas (como T_1, Hausdorff, etc...) son invariantes por homeomorfismos.

1.9 Clase 9: Homemomorfismos, Productos infinitos [18, 19]

Ejemplo.

1. $f : (-1, 1) \to (-\infty, \infty)$, $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ es homeomorfismo. La inversa es $g(y) = \frac{2y}{1+(1+4y^2)^{1/2}}$. Notar que f y g son $\varepsilon - \delta$ continuas (i.e. con topologías métricas). Observamos que (X, d) espacio métrico, $Y \subset X$ subconjunto, entonces la topología inducida en Y es igual a la topología métrica dada por $d|_Y$.

2. $id : (\mathbb{R}, \tau_{\text{discr}}) \to (\mathbb{R}, \tau_{\text{std}})$ continuo. $(id)^{-1} = id : (\mathbb{R}, \tau_{\text{std}}) \to (\mathbb{R}, \tau_{\text{discr}})$ no es continua. Si tomamos $U = \{0\}$, es abierto en τ_{discr}, pero no abierto en τ_{std}. Moral: f continua y biyectiva $\not\Rightarrow$ f^{-1} continua.

   Observación. $id : (X, \tau) \to (X, \tau')$ es continua si y sólo si $\tau' \subset \tau$ (τ más fina que τ').

3. $X = [0, 2\pi]$, $Y = \mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, $f : X \to Y$, $t \mapsto (\cos t, \sin t)$. f es continua (es $\varepsilon - \delta$ continua) y biyectiva. Si f^{-1} no es continua, queremos $U \subset X$ tal que $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$ no es abierto en Y. Notar que un intervalo de la forma $U = [0, t)$ es abierto en X, pero $f(U)$ no es abierto en Y (el punto $(1, 0) \in f(U)$ no está en el interior). Moral: "despegar/cortar" no es operación continua.

$\diamond$

1.9.1 Productios cartesianos arbitrarios

Recuerdo. X, Y espacios topológicos, en $X \times Y$ tenemos topología producto con base $\mathcal{B} = \{U \times U' \mid U \subset X,\ U' \subset Y \text{ abiertos}\}$. En general, si $X_1, dots, X_n$ (finitos) espacios topológicos, la topología producto en $X_1 \times \cdots \times X_n$ tiene base

$$\mathcal{B} = \{U_1 \times \cdots \times U_n \mid U_i \subset X_i \text{ abierto para cada } i\}.$$

Lema 1.41. Topología producto en $X_1 \times \cdots \times X_n$ es la menor topología tal que $\pi_i : X_1 \times \cdots \times X_n \to X_i$ tal que $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i$, es continua para cada i.
(Menor: si τ' topología en $X_1 \times \cdots \times X_n$ tal que π_i continua $\forall i$, entonces $\tau' \supset \tau$ =topología producto)

Demostración. Si τ' topología en $\underline{X}$ tal que $\pi_i : \underline{X} \to X_i$ continuas, entonces $\forall 1 \leq i \leq n$, si $U_i \subset X_i$ abierto. Luego $\pi_i^{-1}(U_i)$ abierto en τ', donde $\pi_i^{-1} = X_1 \times \cdots \times X_{i-1} \times U_i \times X_{i+1} \times \cdots \times X_n$. Si queremos $\tau \subset \tau'$, basta que $\mathcal{B} \subset \tau'$. Si $U_1 \subset X_1, \ldots, U_n \subset X_n$ son abiertos, entonces $\mathcal{B} \ni U_1 \times \cdots \times U_n = \pi_1^{-1}(U_1) \cap \pi_2^{-1}(U_2) \cap \cdots \cap \pi_n^{-1}(U_n)$ es abierto en τ' (usamos que n es finito!!!). □

Definición 1.42 (producto)**.** Una familia indexada de conjuntos es $\{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$. Si $\underline{X} \bigcup_{\alpha \in J} X_\alpha$, el producto cartesiano es $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ es el conjunto de funciones $x : J \to \underline{X}$ tal que para $\alpha \in J$, $x_\alpha \coloneqq x(\alpha) \in X_\alpha$ [x_α es la α-coordenada de x]

Ejemplo.

- Si $J = \{1, \ldots, n\} \Rightarrow \prod_{\alpha \in J} X_\alpha = X_1 \times \cdots \times X_n$;
- Si $X_\alpha = X$ para todo $\alpha \Rightarrow \prod_{\alpha \in J} X_\alpha = X^J = \{\text{funciones } f : J \to X\}$;
- Si $J = \mathbb{Z}_{>0}$, $X_\alpha = X \; \forall \alpha \Rightarrow \prod_{\alpha \in J} X_\alpha = \{\text{sucesiones } x = (x_1, x_2, \ldots) \text{ en } X\}$

◇

1.9.2 Topologías en $\Pi_{\alpha \in J} X_\alpha$

Definición 1.43 (Topología de cajas)**.** Topología con base

$$\mathcal{B} = \{\prod_{\alpha \in J} U_\alpha \mid U_\alpha \subset X_\alpha \text{ es abierto para cada } \alpha\}$$

Definición 1.44 (Topología producto)**.** Es la menor topología tal que las proyecciones $\pi_\beta : \prod_{\alpha \in J} X_\alpha \to X_\beta$, $x = (x_\alpha)_{\alpha \in J} \mapsto x_\beta$ sean continuas para cada $\beta \in J$.

Observación. Si $\underline{X}$ conjunto, $f_\alpha : \underline{X} \to X_\alpha$ espacios topológicos, entonces existe una menor topología tal que f_α continua para todo α. Es la menor topología tal que $f_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ sea abierta para cada $U_\alpha \subset X_\alpha$ abierto, para cada $\alpha \in J$ (existe por tarea 1).

Observación. Para $\underline{X} = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ una base es $\mathcal{B}' = \{\prod_{\alpha \in J} U_\alpha \mid U_\alpha \subset X_\alpha$ abierto, y $U_\alpha = X_\alpha$ salvo en un conjunto finito de índices $\alpha\}$.

Corolario 1.45. $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$, por lo tanto $\tau_{\text{prod}} \subset \tau_{\text{cajas}}$.

Corolario 1.46. Para topología de cajas, proyecciones π_α también son continuas.

Ejemplo (Próxima clase).

1. $\underline{X} = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}_{>0}}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\mathbb{Z}_{>0}}$ tal que $t \mapsto (t, t, t, t, \dots)$. Se puede ver que f continua para la topología producto, pero no es continua para la topología de cajas.
2. $\underline{X} = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}_{>0}}$. En $\underline{X}$ con topología de cajas, es la topología discreta. $\underline{X}$ es homeomorfo al conjunto de Cantor con la topología producto.

◇

1.10 Clase 10 (27/08): Topología producto, Topología cuociente [19, 22]

Observación.

1. $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$;
2. Si J es finito, topología de cajas = topología producto;
3. Si J es infinito, en general esto no es cierto.

Ejemplo. Si $J = \mathbb{Z}^+$, $X_n = \mathbb{R}\ \forall n$, $Z = \prod_{n \geq 1} \mathbb{R} = \mathbb{R}^\omega$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\omega$, $t \mapsto (t, t, t, \dots)$. ◇

Propiedad. Si $Z = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$, $f : Y \to Z \Rightarrow f$ está dada por $f(y) = (f_\alpha(y))_{\alpha \in J}$ con $f_\alpha : Y \to X_\alpha$. Con la topología producto, f es continua $\Leftrightarrow$ cada f_α es continua.

Antes de probar la propiedad, veremos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\omega$ no es continua para la topología de cajas: Tomar $B = \prod_{n \geq 1} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ es abierto para topología de cajas y $(0, 0, 0, \dots) = f(0) \in B$. Luego, $f^{-1}(B) = \{0\}$ no es abierto en $\mathbb{R}$. Por lo tanto, f no es continua.

Demostración (Propiedad). $\boxed{\Rightarrow}$ Notar que $f_\alpha = \pi_\alpha \circ f$ (con π_α la proyección: $Z \to X_\alpha$, $(x_\beta)_\beta \mapsto x_\alpha$) es composición de funciones continuas. Por lo tanto, es continua.

$\boxed{\Leftarrow}$ Tomar $B = \prod_{\alpha\in J} U_\alpha$ en base de topología producto. Luego, notamos

$$\begin{aligned}\prod_{\alpha\in J} U_\alpha &= U_{i_1}\times\cdots\times U_{i_n}\times \prod_{\alpha\in J\setminus\{i_1,\ldots,i_n\}} X_\alpha \quad \subset Z\\ &= \bigcap_{j=1}^{n} \pi_{ij}^{-1}(U_{ij})\end{aligned}$$

Por lo tanto, suficiente probar que $f^{-1}(\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha))$ abierto para cada α, $\forall U_\alpha \subset X_\alpha$. Luego, $f^{-1}(\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)) = f_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ es abierto porque f_α continua. □

Ejemplo. $Z = \{0,1\}^\omega = \{\text{sucesiones } (x_1, x_2, \dots) \text{ con } x_i \in \{0,1\}\}$. ◇

Lema 1.47. Si $Z = \prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ donde cada X_α tiene topología discreta. Entonces, topología de cajas en Z es la topología discreta.

Demostración. Queremos $\{(x_\alpha)_\alpha\}$ abierto en Z. Notar que $\{(x_\alpha)_\alpha\} = \prod_\alpha \{x_\alpha\}$ es abierto en Z con topología de cajas. □

Con topología producto, Z es homeomorfo al conjunto de Cantor.

Recuerdo. En $[0,1]$, E_n = unión de intervalos $B_{i_1\dots i_n}$ con $i_n \in \{0,1\}$ tal que, inductivamente, si $B_{i_{i_1\dots i_n}} = [a,b]$, entonces

$$B_{i_1\dots i_n 0} = \left[a, a+\frac{1}{3^{n+1}}\right], \quad B_{i_1\dots i_n 1} = \left[b-\frac{1}{3^{n+1}}, b\right]$$

Luego, $\mathcal{C} = \bigcap_{n\geq 1} E_n$ (Cantor) (cerrado en $\mathbb{R}$, de interior vacío). Construir $f : \{0,1\}^{\mathbb{Z}^+} \to \mathcal{C}$, $(x_n)_{n\geq 1} \mapsto \sum_{n\geq 1} \frac{2x_n}{3^n}$, esto es biyección.

Veamos que f es continua: Notar que una base del $\mathcal{C}$ es el conjunto

$$\mathcal{B} = \bigcup_{n\geq 1} \{B_{i_1\dots i_n} \cap \mathcal{C} \mid i_1, \dots, i_n \in \{0,1\}\}$$

Luego,

$$\begin{aligned}f^{-1}(B_{i_1\dots i_n}\cap\mathcal{C}) &= \{(x_1,\dots,x_n,x_{n+1},\dots) \mid x_1 = i_1,\ x_2 = i_2, \dots, x_n = i_n\}\\ &= \underbrace{\{i_1\}\times\{i_2\}\times\cdots\times\{i_n\}\times\{0,1\}^{\mathbb{Z}_{>n}}}_{\text{abierto para topología producto}}\end{aligned}$$

Propiedades. $Z = \prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ espacio topológico.

1. Si cada X_α es Hausdorff $\Rightarrow$ Z Hausdorff (Z con topología producto ó con topología de cajas)
2. Si $A_\alpha \subset X_\alpha$, donde $A = \prod_{\alpha\in J} A_\alpha \subset \prod_{\alpha\in J} X_\alpha = Z$. La topología producto en A es la inducida por la producto en Z. Por otro lado, la topología de cajas de A es la inducida por la topologia de cajas de Z (demostrar!).

1.11 Clase 11 (29/08)

Contexto. $p : X \to A$ sobreyectiva, X espacio topológico. Uno quiere dar una topología "natural" a A tal que ρ sea continua.

Ejemplo (estándar). Si $\sim$ relación de equivalencia en X, con $X\backslash\sim =$ *conjunto de clases de equivalencia*

$$\rho : X \to X\backslash\sim, \quad x \mapsto [x]_\sim$$

$\diamond$

Ejemplo (1.). **Colapsar subespacios.** $Y \subset X$. Luego, $\sim$ en X tal que todos los puntos de Y son equivalentes (y nada más). Entonces, $X \setminus Y = X\backslash\sim$.

$\diamond$

Ejemplo (1.1). $X = [0,1],\ Y = \{0,1\}$

$\diamond$

Ejemplo (1.2). $X = D^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \le 1\},\ Y = \mathbb{S}^1 = \{x \mid |x| = 1\}$.

$\diamond$

Ejemplo (2.). **Acciones de grupo.** Γ grupo, X espacio. Acción es $\rho : \Gamma \times X \to X$ (notación $\rho(g,x) = g \cdot x$) tal que

1. $\rho(1_\Gamma, x) = x \quad \forall x \in X$;
2. $\rho(gh, x) = \rho(g, \rho(h,x))$.

$\diamond$

Observar. ρ es mismo dato de un homomorfismo

$$\Gamma \to Biy(X), \quad g \mapsto (x \mapsto \rho(g,x))$$

Ejemplo. $\mathbb{Z}^2 \curvearrowright \mathbb{R}^2,\ (m,n)\cdot(x,y) = (x+m, y+n)$. $\diamond$

Notar que si tenemos $\Gamma \curvearrowright X$ acción, nos da $\sim_\Gamma$ tal que $x \sim_\Gamma y$ si y sólo si $y = g \cdot x$ para algún $g \in \Gamma$ (x, y en la misma órbita). Además, $X \setminus \Gamma := X\backslash\sim_\Gamma$ espacio de órbitas, o cociente de X por la acción de Γ.

Contexto. $p : X \to A$ sobreyectiva, X espacio topológico.

Definición 1.48 (topología cociente en A).

$$\tau = \{U \subset A \mid p^{-1}(U) \text{ es abierto en } X\}$$

Esto es topología: Viene de que

$$p^{-1}\left(\bigcup_\alpha U_\alpha\right) = \bigcup_\alpha p^{-1}(U_\alpha)$$
$$p^{-1}\left(\bigcap_\alpha U_\alpha\right) = \bigcap_\alpha p^{-1}(U_\alpha).$$

Observar.

1. p es continua si A tiene topología cociente;
2. Se cumple algo más fuerte
$$U \subset A \text{ abierto} \Leftrightarrow p^{-1}(U) \subset X \text{ abierto} \tag{$*$}$$
[top. cociente es topología más grande tal que p es continua]

> **Definición 1.49** (mapa cociente). Si X, A son espacios topológicos $p : X \to A$ es <u>mapa cociente</u> si es sbore y se cumple $(*)$.

Observar. $X \overset{p}{\twoheadrightarrow}$, A con topología cociente

1. Si p es continua respecto a τ' otra topología en A, entonces $\tau' \subset \tau_{\text{coc}}$;
2. p es mapa cociente con respecto a τ_{coc}. Si p es mapa cociente con respecto a topología τ en A, entonces $\tau = \tau_{\text{coc}}$.

[$X \overset{p}{\to}$ mapa cociente $\equiv X \overset{p}{\to} A$ sobre y A tiene top. cociente.]

Propiedad. Suponer que $p : X \to A$ mapa cociente, Y espacio topológico, $f : A \to Y$. Sea $g = f \circ p : X \to Y$. Luego,
$$f \text{ es continua} \Leftrightarrow g \text{ es continua}$$

> **Demostración.** $\boxed{\Leftarrow}$ Si $U \subset Y$ abierto (queremos $f^{-1}(U) \subset A$ abierto). Luego, g continua implica que $g^{-1}(U) \subset X$ abierto. Notar que $g^{-1}(U) = (f \circ g)^{-1}(U) = p^{-1}(f^{-1}(U)) \subset X$ abierto. Dado que p es mapa cociente, entonces $f^{-1}(U) \subset A$ abierto. $\square$

Ejemplo. $g : [0, 2\pi] = X \to \mathbb{S}^1 = \{|z| = 1\}, \quad t \mapsto (\cos t, \sin t)$.

- $A = [0, 2\pi] \setminus \{0, 2\pi\}$;
- $p : X \to A$.

(g cumple $(*)$) $\Rightarrow$ hay una función $f : A \to \mathbb{S}^1$ tal que
$$\begin{tikzcd}
{[0,2\pi]} \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "g \text{ (continua sobre } y)"] & \\
A \arrow[r, "\text{biyección}"'] & \mathbb{S}^1
\end{tikzcd}$$
$\diamond$

Propiedad anterior $\Rightarrow f$ continua (y biyectiva)

Clave. f^{-1} es continua! $\rightsquigarrow$ [$U \subset A$ abierto $\Rightarrow f(U)$ abierto en $\mathbb{S}^1$]

Demostración. Suponer U que contiene a $p(0) = p(2\pi) \Rightarrow p^{-1}(U)$ abierto que contiene a 0 y a 2π. Entonces, U contiene a $[0, \varepsilon) \cup (2\pi - \varepsilon, 2\pi]$ para algún ε chiquito. Luego $g(U)$ contiene vecindad de $g(p(0))$. $\square$

1.12 Clase 12 (01/09): Grupos Topológicos (pp 145, Lee pp 77)

Propiedad (clase pasada). Si $f : X \to Y$ continua tal que $p(x) = p(y) \Rightarrow f(x) = f(y)$ (con p mapa cociente). Además, junto con el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "f"] & \\ A \arrow[r, dashed, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

afirmamos que $\exists! g : A \to Y$ continua tal que $g \circ p = f$

Ejemplo. Cociente de Hausdorff no tiene que ser Hausdorff.

$$X = \mathbb{R},\ A = \{0, 1\},\ p : \mathbb{R} \to \{0, 1\},\ p(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0 \\ 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Topología en $A :$ $p^{-1}(\varnothing) = \varnothing$, $p^{-1}(\{0, 1\}) = \mathbb{R}$, $p^{-1}(\{0\}) = (-\infty, 0)$, $p^{-1}(\{1\}) = [0, \infty)$ (notar que este último no es abierto). Luego, $\tau_{\text{coc}} = \{\varnothing, \{0, 1\}, \{0\}\} \rightsquigarrow$ No es Hausdorff (ni $T1$). $\diamond$

Definición 1.50 (grupo topológico)**.** Un grupo topológico es un grupo Γ con una topología tal que $v : \Gamma \to \Gamma$ y $* : \Gamma \times \Gamma \to \Gamma$ sean continuas.

Observar. En la definición, el dominio de $*$, $\Gamma \times \Gamma$ viene con la topología producto respecto a la topología en Γ.

Ejemplo.

- $(\mathbb{R}, +)$ es un grupo topológico con la topología estándar ($v(x) = -x$, $*(x, y) = x + y$);
- $(\mathbb{R}^n, +)$ es un grupo topológico con la topología estándar (cualquier isomorfismo $\mathbb{R}$-lineal es homeomorfismo);
- Γ cualquiera con la topología discreta. Decimos que Γ es grupo discreto;
- Grupo lineal: $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in \underbrace{\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})}_{\cong \mathbb{R}^{n^2}} \mid \det A \neq 0\}$;
- $\mathbb{R}^{n^2}$ nos da una topología de subespacio desde $\mathbb{R}^{n^2}$. Si usamos el isomorfismo $[a_{i,j}]_{i,j} \mapsto (a_{i,j})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n^2}$. ¿Cómo se ven v y $*$? $\rightsquigarrow v : A \to A^{-1} =$

$\frac{1}{\det A}\mathrm{adj}(A)$ (matriz con cada entrada un polonomio en coef de A). Por lo tanto, $*$ es función racional y por ende, continua. Luego, $* : (A,B) \to AB$ (cada entrada es un polinomio en las entradas de A y B);

- $SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\} < GL_n(\mathbb{R})$.

$\diamond$

Propiedad. Γ grupo topológico y $H < \Gamma$ subgrupo. Entonces, H es grupo topológico con topología inducida.

Notar que, si Γ cualquiera con topología profinita (topología con base $\mathcal{B} = \{a\Gamma' \mid \Gamma' \lhd \Gamma$ subgrupo normal de índice finito, $a \in \Gamma\}$).

- v es continua (basta $v^{-1}(a\gamma')$ abierto): $v^{-1}(a\Gamma') = \{x^{-1} \mid x \in a\Gamma'\} = \{(ag)^{-1} \mid g \in \Gamma'\} = \{g^{-1}a^{-1} \mid g \in \Gamma'\} = \Gamma' a^{-1} \overset{\Gamma'\lhd}{=} a^{-1}\Gamma' \in \mathcal{B}$.
- Si $a \in \Gamma,\ L_a : \Gamma \to \Gamma,\ g \mapsto ag$ es continua: si $a'\Gamma'$ elemento arbitrario de $\mathcal{B}$, entonces $(L_a)^{-1}(a'\Gamma') = (L_{a^{-1}})(a'\Gamma') = a^{-1}a\Gamma' \ni \mathcal{B}$ (#).

Observar. (#) es más débil que probar que $* : \Gamma \times \Gamma \to \Gamma,\ (g,h) \mapsto gh$ es continua.

Propiedad. Γ, Γ' grupos topológicos.

1. $\Gamma \times \Gamma'$ es grupo topológico von la topología producto.
   Ejemplo (1.1). $\mathbb{S}^{-1} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ es un grupo topológico con producto usual y topología inducida; $\diamond$
   Ejemplo (1.2). $\Pi^n = \underbrace{\mathbb{S}^{-1} \times \cdots \times \mathbb{S}^{-1}}_{n-\text{veces}}$ n-toro es grupo topológico. $\diamond$

2. $H \lhd \Gamma$ subgrupo normal. Entonces, $\overline{\Gamma} := \Gamma/H$ grupo cociente y $p : \Gamma \to \overline{\Gamma}$ homomorfismo cociente.
   (a) p es abierta ($U \subset \Gamma \Rightarrow p(U)$ es abierto en $\overline{\Gamma}$ con la topología cociente);
   (b) $\overline{\Gamma}$ es grupo topológico;
   (c) $\overline{\Gamma}$ es Hausforff ssi $H < \Gamma$ cerrado.
   Ejemplo (2.1). $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ es Hausdorff con la topología cociente ($\mathbb{R}$ con la topología estándar). $\diamond$

1.13 Clase 13 (03/09): Acciones Topológicas (Lee p.77)

Ejemplo (última propiedad clase pasada, punto 2). Sea $\Gamma = \mathbb{R},\ H = \mathbb{Q} \rightsquigarrow \overline{\Gamma} = \mathbb{R}/\mathbb{Q}$. Como $\mathbb{Q}$ no es cerrado en $\mathbb{R}$, entonces $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ no es Hausdorff. Además, veremos que la topología cociente en $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ es la indiscreta. Notar que $U \subset \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ es abierto no vacío $\Leftrightarrow p^{-1}(U) \subset \mathbb{R}$ abierto no vacío. Tomar $U \subset \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ no vacío, $\exists [x] = p(x) \in U (x \in \mathbb{R}) \Rightarrow p^{-1}(U)$ contiene a x, y; y de hecho contiene a x tal que $\forall q \in \mathbb{Q}\ (p(x+q) = p(x))$. Por lo tanto, $p^{-1}(U)$ abierto (en $\mathbb{R}$)

y $x+\mathbb{Q} \subset p^{-1}(U)$ (denso). $p^{-1}(U)$ es invariante por trasladar por $\mathbb{Q}$: si $y \in p^{-1}(U)$, $q \in \mathbb{Q} \Rightarrow y+q \in p^{-1}(U)$. Como $x \in p^{-1}(U)$ abierto, entonces $\exists \varepsilon > 0$ tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset p^{-1}(U)$. Luego, $(x-\varepsilon+q, x+\varepsilon+q) \subset p^{-1}(U)$ $\forall q \in \mathbb{Q}$. En conclusión, $p^{-1}(U) = \mathbb{R}$ y $U = \mathbb{R}/\mathbb{Q}$, $\therefore$ la topología en $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ es $\{\varnothing, \mathbb{R}/\mathbb{Q}\}$. $\diamond$

Ejemplo (Furstenberg)**.** Se puede probar que existen infinitos primos de manera puramente topológica (usando topología profinita en $\mathbb{Z}$). $\diamond$

Demostración. Base: $\mathcal{B} = \{\underbrace{\overbrace{a\mathbb{Z}}^{\Gamma'} + b}_{b\Gamma'} \mid a \neq 0,\ b \in \mathbb{Z}\}$. Observar que, cada $a\mathbb{Z}+b$ es infinito. Esto implica que cada abierto con la topología profinita es o bien vacío, o infinito. En $\mathbb{Z}$, todo número no primo es o bien 1 o -1, o $p \cdot a$ con p primo y $a \in \mathbb{Z}$. Entonces,

$$\mathbb{Z} = \{-1, 1\} \sqcup \bigcup_{p \text{ primo}} p\mathbb{Z} \qquad (*)$$

Notar que cada $p\mathbb{Z}$ es cerrado:

$$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \bigcup_{1 \leq i \leq p-1} (p\mathbb{Z}+i)$$

Si hubiera finitos primos, entonces la unión de los $p\mathbb{Z}$ en $(*)$ sería cerrado. Así, $\{-1,1\} \subset \mathbb{Z}$ abierto, lo que es una contradicción! $\square$

Acciones topológicas

Recuerdo. $\Gamma \curvearrowright X$: $\Gamma \times X \to X$ tal que $(g,x) \mapsto g \cdot x$ y se cumple (i) $1 \cdot x = x$; (ii) $h \cdot (g \cdot x) = (hg) \cdot x$.

Definición 1.51 (acción continua)**.** Una acción $\Gamma \curvearrowright X$ (Γ grupo topológico, gX espacio topológico) es continua si:

$$\begin{aligned} \Gamma \times X &\to X \\ (g,x) &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

es continuo.

Lema 1.52. Γ, X grupos topológicos y $\Gamma \curvearrowright X$ acción.

1. Si $\Gamma \curvearrowright X$ continua, entonces $L_g : X \to X$, con $x \mapsto g \cdot x$, es homeomorfismo para cada $g \in \Gamma$,
2. Si Γ es grupo discreto y cada L_g es homeomorfismo, entonces $\Gamma \curvearrowright X$ es continua.

Demostración.

1. Dado $g \in \Gamma$:

$$\begin{aligned} X &\to \{g\} \times X \hookrightarrow \Gamma \times X \to X \\ x &\mapsto \ (g,x) \quad \mapsto (g,x) \ \mapsto g \cdot x. \end{aligned}$$

2. Tomar $U \subset X$ abierto. Notar que

$$\begin{aligned} p^{-1} &= \{(g,x) \mid g \cdot x \in U\} \\ &= \{(g,x) \mid L_g(x) \in U\} \\ &= \{(g,x) \mid x \in L_g^{-1}(U)\} \\ &= \{(g,x) \mid x \in L_g^{-1}(U)\} \\ &= \bigcup_{g \in \Gamma} \{g\} \times L_g^{-1}(U). \end{aligned}$$

   Donde $\{g\}$ es abierto en Γ (topología discreta) y $L_g^{-1}(U)$ es abierto en X (L_g homeo). Así, la unión es un abierto en $\Gamma \times X$.

□

Ejemplo. $GL_n(\mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{R}^n$, $A \cdot v = A(v)$ (multiplicación usual). Esta acción es continua!

$$\begin{aligned} &Mat_{n\times n}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad [(A,v) \mapsto A(v)] \\ &\quad \cup \\ &\quad GL_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ &\qquad\qquad (A,v) \mapsto A(v). \end{aligned}$$

◇