

Topología

Basado en las clases impartidas por Eduardo Oregón en el segundo
semestre del 2025

Contents

1	Munkres	2
1.1	Clase 15 (08/09): Conexidad (23, 24)	2
1.2	Clase 17 (12/09): (Arco)conexidad local, Componentes (25) . . .	3

Chapter 1

Munkres

1.1 Clase 15 (08/09): Conexidad (23, 24)

Recuerdo (TVI). $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Si $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, entonces $f(c) = 0$ para algún $c \in [a, b]$.

Conexidad. Es una condición topológica en X tal que $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ cumple versión esperable del TVI!

Definición 1.1 (separación y conexidad). X espacio topológico.

- i. Una separación de X es $X = U \cup V$, con $U, V \subset X$ abiertos disjuntos, no vacíos;
- ii. X es conexo si no tiene separación. Equivalentemente, $X = U \cup V$, $U, V \subset X$ abiertos disjuntos, entonces $\emptyset \in \{U, V\}$.

Ejemplo (i.). $X = [0, 1] \cup [2, 3] \cup \{5\} \rightsquigarrow U = [0, 1]$, $V = [2, 3] \cup \{5\}$ es separación. \diamond

Ejemplo (ii.). $[0, 1]$ es conexo!!! (Magia del axioma del supremo) \diamond

Observar. $X = U \cup V$ separación $\longleftrightarrow U \neq \emptyset$ clopen (abierto + cerrado) y $X \setminus U \neq \emptyset$.

Lema 1.2. X espacio topológico. X conexo $\longleftrightarrow \forall f : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) > 0$, $f(y) < 0$ para algún $x, y \in X \Rightarrow f(z) = 0$ para algún $z \in X$.

Propiedad ganadora. Si $f : X \rightarrow Y$ continua. X conexo $\Rightarrow f(X)$ conexo (respecto a la topología inducida).

Corolario 1.3. Si $p : X \rightarrow A$ mapa cociente, X conexo $\Rightarrow A$ conexo.

Corolario 1.4. X, Y espacios homeomorfos. X conexo $\longleftrightarrow Y$ conexo.

Demostración (propiedad ganadora). Queremos $f(X)$ conexo (no hay separación). Suponer que $f(X) = U \cup V$ separación ($U, V \subset f(X)$ abiertos, disjuntos y no vacíos). Luego, $X = f^{-1}(f(X)) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$ separación. Pero esto es una contradicción, pues X es conexo! \square

Nota. Se utilizó que la preimagen de abierto es abierto y que siguen siendo disjuntos los abiertos bajo la preimagen.

Lema 1.5. $Y \subset X$ espacios topológicos. Y conexo $\longleftrightarrow \forall A, B \subset X$ abiertos tales que:

- i. $Y \subset A \cup B$;
 - ii. $Y \cap A \cap B = \emptyset$;
- $\Rightarrow Y \subset A$ ó $Y \subset B$.

Criterio Conexidad. $(Y_\alpha)_{\alpha \in J}$ familia de subespacios de X tal que:

- 1. Cada Y_α conexo;
- 2. $\bigcap_{\alpha \in J} Y_\alpha \neq \emptyset$;

$\Rightarrow Z = \bigcup_{\alpha \in J} Y_\alpha$ conexo.

Observar. $\bigcap_{\alpha \in J} Y_\alpha$ no necesariamente conexa si cada Y_α conexo.

Ejemplo.

- 1. $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$ conexo. En efecto, si $v \in \mathbb{S}^{n-1} \rightsquigarrow Y_v = \{tv + (1-t)(-v) \mid t \in [0, 1]\} \approx [0, 1]$. Por lo tanto, cada Y_v es conexo. Luego, $0 \in Y_v, \forall v \in \mathbb{S}^{n-1} \Rightarrow B = \bigcup_{v \in \mathbb{S}^{n-1}} Y_v$ conexo;
- 2. \mathbb{R} es conexo. $\mathbb{R} = \bigcup_{\varepsilon > 0} [-\varepsilon, \varepsilon], 0 \in [-\varepsilon, \varepsilon] \forall \varepsilon < 0$;
- 3. \mathbb{S}^{n-1} conexo si $n \geq 2$ ($\mathbb{S}^0 = \{-1, 1\}$ no conexo (disconexo)). Para $n = 2$, recordar que $[0, 1] / \sim \rightarrow \mathbb{S}^1$ homeomorfismo. Por lo tanto, \mathbb{S}^1 conexo. Para n arbitrario, sean $X = [0, 1]^n, Y = \partial X \rightsquigarrow X/Y \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^n$ homeomorfismo. Otra forma: sea $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ tal que $v \mapsto \frac{v}{|v|}$ continua y sobre. Luego, es suficiente probar que $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ conexo si $n \geq 2$.

\diamond

1.2 Clase 17 (12/09): (Arco)conexidad local, Componentes (25)

Observar. Conexidad \nRightarrow Arcoconexidad.

Ejemplo. $Y = \{(t, \sin(\frac{1}{t})) \mid t > 0\} \subset \mathbb{R}^2$ arcoconexo. $X = \overline{Y}$ conexo! Pero no es arcoconexo! \diamond

Lema 1.6. $Y \subset A$ espacios topológicos tal que $Y \subset X \subset \overline{Y}$. Si Y es conexo $\Rightarrow X$ conexo.

Nota. El A es simplemente porque Y tiene que estar dentro de un espacio para poder tomar su clausura.

Componentes

Definición 1.7 (componentes conexas y arcoconexas). Sea X espacio topológico, $C \subset X$ es componente conexas (resp. arcoconexas) si:

1. C es conexo (resp. arcoconexo);
2. C es maximal respecto a (1): Si C' es (arco)conexo y $C \subset C' \Rightarrow C = C'$.

Observar.

1. Componentes existen: Si $x \in X$

$$C_x := \bigcup \{C \subset X \mid C \text{ conexo}, x \in C\}$$

(C_x componente de x en X). Esto es conexo (criterio) y maximal.

2. Lo mismo vale para arcoconexidad (Existe versión del criterio).
3. Componentes conexas forman una partición de X . Si $C_x \neq C_y \Rightarrow C_x \cap C_y = \emptyset$. En efecto, si $C_x \cap C_y \neq \emptyset$, $C_x \neq C_y \Rightarrow C_x \cup C_y$ es conexo aún más grande.
4. Si $C \subset X$ componente conexas $\Rightarrow C$ es cerrado $\Rightarrow C = \overline{C}$ (\overline{C} conexo + C conexo maximal) (esto es falso si se reemplaza por componente arcoconexas).

Ejemplo.

1. X es (arco)conexo si X es componente (arco)conexas;
2. En $X = \mathbb{Q}$ con topología inducida de \mathbb{R} , componentes son los singleton. En particular, notar que componentes no son abiertas;
3. $X = [0, 1] \cup (2, 3) \cup \{4\}$ (y es claro que $[0, 1]$, $(2, 3)$ y $\{4\}$ son componentes) (aquí componentes son abiertas);
4. Subconjuntos conexos de \mathbb{R}
 - $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$, (a, b) $a < b$;
 - $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$, (b, ∞) , $[b, \infty)$;
 - \mathbb{R} ;

- $\{x\}$.

(todos arcoconexos!!!)

5. $X = \overline{Y} \subset \mathbb{R}^2$. Componentes conexas de X : es sólo X . Componentes arcoconexas de X : Y , $\{0\} \times [-1, 1]$.

◇

Definición 1.8 (localmente (arco)conexo). X espacio topológico es localmente (arco)conexo si $\forall x \in X$, para todo abierto $U \subset X$ tal que $x \in U$, va a existir $V \subset U$ abierto (arco)conexo con $x \in V$.

Criterio. X localmente (arco)conexo si y sólo si $\forall U \subset X$ abierto, componentes (arco)conexas de U (respecto a la topología inducida) son abiertos en X .

Corolario 1.9.

1. Si X es localmente arcoconexo, componentes conexas son igual a componentes arcoconexas y viceversa;
2. X localmente arcoconexo y conexo $\Rightarrow X$ es arcoconexo.