Topología

Basado en las clases impartidas por Eduardo Reyes en el segundo semeste del 2025

Contents

Chapter 1

Munkres

Clase 1

4 de Agosto

1.1 Espacios Topológicos (12)

Definición 1.1 (sistema de vecindades). X conjunto no vacío. Si $x \in X$, consideramos $\mathcal{V}_x \subset 2^X$, tal que:

1. $\forall x \in X$, $\forall V \in \mathcal{V}_x$, $x \in \mathcal{V}_x$;
2. $\forall x \in X$, $\forall V \in \mathcal{V}$, si $V' \supset V \Rightarrow V' \in \mathcal{V}_x$;
3. Si $V_1, V_2 \in \mathcal{V} \Rightarrow V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}_x$.

El sistema de vecindades es $\{\mathcal{V}_x\}_{x \in X}$. Si $V \in \mathcal{V}_x$, V es vecindad de x.

Ejemplo.

1. (X, d) espacio métrico $\mathcal{V}_x \coloneqq \{V \subset X | \exists \varepsilon > 0 \text{ tal que } B_\varepsilon(x) \subset V\}$. Verificamos que sea sistema de vecindad.

   Demostración. Verificamos 1), 2) y 3):

   1) $x \in X$, $V \in \mathcal{V}_x \Rightarrow x \in B_\varepsilon(x) \subset V$;
   2) X $x \in X$, $V \in \mathcal{V}_x$, $V' \supset V \Rightarrow x \in B_\varepsilon(x) \subset V \subset V' \Rightarrow V' \in \mathcal{V}_x$;
   3) $$\begin{aligned} x \in V_1 \cap V_2, V_1, V_2 \in \mathcal{V}_x &\Rightarrow B_{\varepsilon_1}(x) \subset V_1, B_{\varepsilon_2}(x) \subset V_2 \\ &\Rightarrow B_{\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}}(x) \subset V_1 \cap V_2 \\ &\Rightarrow V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}_x. \end{aligned}$$

   □

2. X arbitrario, $\forall x \in X$, sea $\mathcal{V}_x = \{X\}$ es sistema de vecindades (vacuidad).
3. X arbitrario $\mathcal{V}_x = \{V \subset X \mid x \in V \text{ y } X \setminus V \text{ sea finito}\}$ (queda como ejercicio chequear que esto define un sistema de vecindades).

Definición 1.2 (topología desde sistema de vecindades)**.** Tenemos X, $\{\mathcal{V}_x\}_{x\in X}$ sistema de vecindades. Definimos, $\tau = \{U \subset X \mid x \in U \Rightarrow U \in \mathcal{V}_x\}$.

Lema 1.3. τ cumple lo siguiente:

1. $\varnothing, X \in \tau$;
2. $U_\alpha \in \tau, \alpha \in A \Rightarrow \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha \in \tau$;
3. $U_1, \ldots, U_n \in \tau \Rightarrow U_1 \cap \cdots \cap U_n \in \tau$.

τ es la topología inducida por $\{\mathcal{V}_x\}$. Elementos de τ (subconjuntos de X) se llamarán abiertos.

Clase 2 6 de Agosto

1.2 Topología, Base (12, 13)

Demostración. (último lema de la clase anterior)

1. $\varnothing \in \tau$ por vacuidad.

$$\begin{aligned} X \in \tau : x \in X &\Rightarrow \exists V \in \mathcal{V}_x \quad (1) x \in V; (2) x \in V \subset X \\ &\Rightarrow X \in \mathcal{V}_x. \quad \forall x : X \in \tau \end{aligned}$$

2. Tomar $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$, $U_\alpha \in \tau$, $\mathcal{U} = \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$. Si $x \in \mathcal{U} \Rightarrow x \in U_\alpha \in \mathcal{V}_x$ para algún α. Como $U_\alpha \in \tau \Rightarrow U_\alpha \in \mathcal{V}_x$. Luego, si $x \in U_\alpha \subset \mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{U} \in \mathcal{V}_x$, $\forall x \in \mathcal{U}$. Por lo tanto, $\mathcal{U} \in \tau$.
3. Tomamos $U_1, \ldots, U_n \in \tau$, $\mathcal{U} = U_1 \cap \cdots \cap U_n$ y $x \in \mathcal{U}$. Luego, $x \in U_i \quad \forall i$. Como $U_i \in \tau \Rightarrow U_i \in \mathcal{V}_x, \quad \forall i$. Por inducción (con las intersecciones), podemos afirmar que $\mathcal{U} \in \mathcal{V}_x$, $\forall x \in \mathcal{U}$. Por lo tanto, $\mathcal{U} \in \tau$.

□

1.2.1 Topología

Definición 1.4 (topología)**.** X conjunto no vacío, $\tau \subset 2^X$ es una topología si cumple:

1. $\varnothing, X \in \tau$;
2. $U_\alpha \in \tau,\ \alpha \in A \Rightarrow \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha \in \tau$;
3. $U_1, \ldots, U_n \in \tau \Rightarrow U_1 \cap \cdots \cap U_n \in \tau$.

Observación. Se utilizará la siguiente notación:

- (X, τ) se llama espacio topológico.

- $U \in \tau \Rightarrow U$ se llama abierto (con respecto a la topología).

Lema 1.5. τ topología en X $\Rightarrow$ Inducida por un único sistema de vecindades.

Demostración. Para $x \in X$, definir $\mathcal{V}_x = \{V \subset X \mid \exists U \in \tau \text{ con } x \in U \subset V\}$. Verificamos que $\{\mathcal{V}_x\}_x$ es sistema de vecindades:

1. La definición implica $V \in \mathcal{V}_x \Rightarrow x\ (\in U \subset)\ \in V$;
2. Si $V \in \mathcal{V}_x$ y $V' \supset V \Rightarrow (V \in \mathcal{V}_x)\ x \in U \subset\ (U \in \tau)$
$$\Rightarrow x \in U \subset V' \Rightarrow V' \in \mathcal{V}_x;$$
3. Tomar $V_1, V_2 \in \mathcal{V}_x \Rightarrow x \in U_1 \subset V_1, \quad x \in U_2 \subset V_2$ con $U_1, U_2 \in \tau$
$$\Rightarrow x \in \underbrace{U_1 \cap U_2}_{\in \tau} \subset V_1 \cap V_2 \Rightarrow V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}_x;$$

(falta demostrar unicidad). □

Ejemplo (de espacios topológicos)**.**

1. (Topología métrica): (X, d) espacio métrico. Abierto es $U \in X$ tal que $\forall x \in U, \exists \varepsilon > 0$ tal que $x \in B_\varepsilon(x) \subset U$.
   (a) $X = \mathbb{R}^n$, $d((x_i),(y_i)) = \sqrt{sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$. Así, se obtiene la topología estándar.
   (b) X arbitrario, d métrica discreta $d(x,y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y. \end{cases}$ Así, se obtiene la topología discreta: $\tau = 2^X$.
2. (Topología indiscreta): X arbitrario, $\tau = \{\varnothing, X\}$;
3. (Topología cofinita): X arbitrario, $\tau_{cof} = \{U \subset X \mid X \setminus U \text{ es finito}\} \cap \{\varnothing\}$ (queda como ejercicio verificar que es topología).

1.2.2 Base de una topología

Una base es un subconjunto "manejable" de τ que la describe completamente!

Definición 1.6 (base)**.** X es conjunto. $\mathcal{B} \subset 2^X$ es base para alguna topología si:

1. $\forall x \in X, \exists B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$ $\left(\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X\right)$.
2. $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}, \forall x \in B_1 \cap B_2, \exists B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Definición 1.7 (topología inducida). La topología inducida por la base $\mathcal{B}$ en X es:

$$\tau = \{U \subset X \mid \forall x \in U, \exists B \in \mathcal{B} \text{ tal que } x \in B \subset U\}.$$

Nota. $\mathcal{B} \subset \tau$.

Lema 1.8. τ, definido arriba, es una topología.

Ejemplo. (X, d) espacio métrico $\Rightarrow \mathcal{B} = \{B_\varepsilon(x) \mid x \in X, \varepsilon > 0\}$ es base de la topología métrica.

Clase 3

8 de Agosto

1.3 Bases, Topología producto (13,15)

Demostración. (lema 1.8)

1. $\varnothing, X \in \tau$: $\varnothing \in \tau$ por vacuidad y $X \in \tau$ por propiedad (1) de $\mathcal{B}$.
2. τ cerrado bajo unión: $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ colección con $U_\alpha \in \tau$, $\mathcal{U} = \bigcup_\alpha U_\alpha$.

$$\begin{aligned} \text{Si } x \in \mathcal{U} &\Rightarrow x \in U_\alpha \text{ para algún } \alpha \\ &\Rightarrow x \in B \subset U_\alpha \text{ para algún } B \in \mathcal{B} \\ &\Rightarrow x \in B \subset \mathcal{U}. \end{aligned}$$

   Por lo tanto, $\mathcal{U} \in \tau$.
3. τ cerrado bajo intersección finita: $U_1, \ldots, U_n \in \tau, \mathcal{U} = U_1 \cap \cdots \cap U_n$. Sea $x \in \mathcal{U} \Rightarrow x \in U_i \ \forall i \ (U_i \in \tau) \Rightarrow x \in B_i \subset U_i \ \forall\, i, B_i \in \mathcal{B}$. Propiedad (2) implica $x \in B \subset B_1 \cap \cdots \cap B_n \subset U_1 \cap \cdots \cap U_n = \mathcal{U}$. Por lo tanto, $\mathcal{U} \in \tau$.

□

Nota. Si B base genera $\tau \Rightarrow B \subset \tau$.

Definición 1.9 (topología generada). τ topología está generada por una base B sin B es base, y τ es topología generada por B.

Utilidad: Dada τ topología a estudiar, queremos encontrar base B que la describa.

Ejemplo. (X, d) espacio métrico, $\mathcal{B} = \{B_\varepsilon(x) \mid \varepsilon > 0, x \in X\}$ es base para la topología métrica.

Demostración. Probamos que B es base.

1. Notar $X = \bigcup_{x \in X} B_1(x)$. Por lo tanto, $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$.

2. $B_1, B_2 \in \mathcal{B}, B_1 = B_{\varepsilon_1}(x_1), B_2 = B_{\varepsilon_2}(x_2)$. Sea $x \in B_1 \cap B_2$. Queremos encontrar $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subset B_1 \cap B_2$. Por desigualdad triangular, tenemos que $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1 - d(x, x_1), \varepsilon_2 - d(x, x_2)\}$ sirve.

$\square$

Nota. 1. Una base no es necesariamente una topología ((1) y (2) pueden fallar).

2. Si B es base y τ topología, $B \subset \tau \not\Rightarrow \tau$ es generada por B.

Ejemplo. Topología del límite inferior en $\mathbb{R} : B_l = \{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ (se deja como ejercicio demostrar que B_l es base).

Definición 1.10 (topología del límite inferior). B_l genera la topología del límite inferior τ_l.

Observación.

1. τ_l no es τ_{std} ($[a, b)$ abierto en τ_l pero no en τ_{std}
2. $\tau_{std} \subset \tau_l$ (la demostración de esto queda como ejercicio).
3. (Intuición): Si $0 \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$ (para τ_{std}, y cerda de 0 si $|y| < \varepsilon$). Para τ_l, y cerca de 0, si $y \in [0, \varepsilon)$ ($0 \leq y < \varepsilon$ para $\varepsilon > 0$ chiquito).

1.3.1 Comparación de topologías

Definición 1.11 (topologías finas). τ, τ' topologías en X, decimos que τ' es más fina que τ si $\tau' \supset \tau$. Decimos que τ y τ' son comparables si $\tau' \supset \tau$ o $\tau \supset \tau'$.

Ejemplo. τ_l es más fina que τ'.

Ejemplo. $\forall \tau$ topología en X, $\{\varnothing, X\} \subset \tau \subset 2^X$. Donde $\{\varnothing, X\}$ es llamada la topología indiscreta (todos cercanos entre sí) y 2^X la topología discreta (todos lejanos entre sí).

En conclusión, si τ' es más fina que τ, los puntos están más lejanos respecto a τ' que a τ

Clase 4

11 de Agosto

1.4 Topología producto (15) e inducida (16)

Lema 1.12. $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ bases en X que generan la topología τ, τ' respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned}\tau' \supset \tau &\Leftrightarrow \text{(todo elemento de } \mathcal{B} \text{ está en } \tau');\\ &\Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{B}, B \text{ es unión de elementos de } \mathcal{B}';\\ &\Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{B}, \forall x \in B, \exists B' \in \mathcal{B}' \text{ tal que } x \in B' \subset B.\end{aligned}$$

Lema 1.13. $\mathcal{B}_{X\times Y} \coloneqq \{U \times U' \mid U \text{ abierto en } X, U' \text{ abierto en } Y\}$ es una base para una topología.

Definición 1.14 (topología producto)**.** Topología producto en $X \times Y$ es la generada por $\mathcal{B}_{X\times Y}$.

Demostración. (lemma 1.13.)

1. Como $X \times Y \in \mathcal{B}_{X\times Y} \Rightarrow \bigcup_{B\in\mathcal{B}_{X\times Y}} B = X \times Y$.
2. Tomar $B_1 = U_1 \times U_1' \in \mathcal{B}_{X\times Y}, B_2 = U_2 \times U_2' \in \mathcal{B}_{X\times Y}, (x,y) \in B_1 \cap B_2$ (U_1, U_2 abiertos en X y U_1', U_2' abiertos en Y). Notar que:

$$B_1 \cap B_2 = (U_1 \times U_1') \cap (U_2 \times U_2') = \underbrace{(U_1 \cap U_2)}_{\text{abto. en } X} \times \underbrace{(U_1' \cap U_2')}_{\text{abto. en } Y} \in \mathcal{B}_{X\times Y}.$$

□

Nota. Misma demostración (salvo modificaciones esperables) implica que si $\mathcal{B}_X$ es base de X, $\mathcal{B}_Y$ base de Y, $\mathcal{B}'_{X\times Y} \coloneqq \{B \times B' \mid B \in \mathcal{B}_X, B' \in \mathcal{B}_Y\}$ es base y genera la misma topología generada por $\mathcal{B}_{X\times Y}$.

Ejemplo (importante)**.** $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Propiedad: topología estándar de $\mathbb{R}^2$ (métrica euclidiana) es igual a la topología producto en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (cada uno con su topología estándar).

- Topología estándar en $\mathbb{R}^2$: generada por base $\mathcal{B} = \{B_\varepsilon(x,y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2, \varepsilon > 0\}$.
- Topología producto en $\mathbb{R}^2$: generada por base $\mathcal{B}' = \{(a,b) \times (c,d) \mid a < b, c < d\}$.

Ejercicio. Verificar para $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.15 (topología inducida)**.** $\tau|_Y \coloneqq \{Y \cap U \mid U \in \tau\}$ es topología en Y. La llamamos topología en Y inducida por X.

Demostración. (topología inducida es topología)

1. $\varnothing = \varnothing \cap Y, Y = X \cap Y$.
2. Si $U_\alpha \in \tau|_Y, \alpha \in A \Rightarrow U_\alpha = U_\alpha' \cap Y$ con $U_\alpha' \in \tau \Rightarrow \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha = \bigcup_{\alpha\in A}(U_{\alpha\in A} \cap Y) = \left[\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha\right] \times Y \in \tau|_Y$.
3. $U_1, \ldots, U_n \in \tau|_Y, U_i = U_i' \cap Y \Rightarrow U_1 \cap \cdots \cap U_n = (U_1' \cap Y) \cap \cdots \cap (U_n' \cap Y) = (U_1' \cap \cdots \cap U_n') \cap Y \in \tau|_Y$.

□

Lema 1.16. $\mathcal{B}|_Y := \{Y \cap B \mid B \in \mathcal{B}\}$ es base para la topología en Y inducida por X.

Observación. Cuidado: La noción de abierto depende de la topología a especificar.

Ejemplo. En $X = \mathbb{R}, Y = [0,1] \cup (2,3) \cup \{4\}$. Notar que:

- Y es abierto en Y, pero no es abierto en X.
- $[0,1]$ también abierto en $Y : [0,1] = Y \cap (-1,2)$.
- $\{4\}$ también abierto en $Y : \{4\} = Y \cap (3,5)$.

Nota. Si $U \subset Y$ es abierto en $X \Rightarrow$ abierto en Y.

Lema 1.17. $Y \subset X, \tau|_Y \subset \tau \Leftrightarrow Y$ es abierto en X.

Proposición 1.18. X, Y espacios topológicos, $A \subset X, B \subset Y$.

En $A \times B \to$ topología inducida desde $X \times Y$ (con topología producto)
$\to$ topología producto desde A y B (con topología inducida por X, Y respectivamente).

Estas topologías son la misma.

Demostración. Elemento de topología primera: $U = U' \cap A \times B$
Elemento de topología segunda: U es unión de productos $V \times V'$ con V abierto en A, V' abierto en B. Notar que $V \times V' = (W \cap A) \times (W' \cap B) = (W \times W') \cap A \times B$. $\square$

Clase 5

13 de Agosto

1.5 Cerrados, clausura, puntos límites (17)

Definición 1.19 (conjunto cerrado)**.** X espacio topológico, $C \subset X$ es cerrado si $X \backslash C$ es abierto.

Lema 1.20.

1. $X, \varnothing$ son cerrados;
2. Si $C_\alpha \subset X$ cerrados, $\alpha \in A \Rightarrow \bigcap_\alpha C_\alpha$ es cerrado;
3. Si $C_1, \ldots, C_n$ cerrados, entonces $C_1 \cup \cdots \cup C_n$ es cerrado.

Demostración.

1. $X = X \setminus \varnothing,\ \varnothing = X \setminus X$;

2. $C_\alpha = \bigcap_{\alpha \in A} C_\alpha \Rightarrow X \setminus C = X \setminus \bigcap_{\alpha \in A} C_\alpha = \underbrace{\bigcup_{\alpha \in A} (\overbrace{X \setminus C_\alpha}^{\text{abto}})}_{\text{abto}}$;

3. $C = C_1 \cup \cdots \cup C_n \Rightarrow X \setminus C = X \setminus (C_1 \cup \cdots \cup C_n) = \underbrace{(\overbrace{X \setminus C_1}^{\text{abto}}) \cap \cdots \cap (\overbrace{X \setminus C_n}^{\text{abto}})}_{\text{abto}}$.

$\square$

Ejemplo.

1. $X = \mathbb{R}$, $[a, b]$ es cerrado ($\mathbb{R} \setminus [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$);
2. (X, d) espacio métrico (+ topología métrica) $\Rightarrow \overline{B_\varepsilon}(x)$ es cerrado. Luego, $X \setminus \overline{B_\varepsilon}(x) = \bigcup_{y \in X \setminus \overline{B_\varepsilon}(x)} B_{d(x,y)-\varepsilon}(y)$ (abierto en topología métrica);
3. X con la topología discreta $\Rightarrow$ todo subconjunto de X es abierto y cerrado!

Definición 1.21 (cerrado topología inducida). X espacio topológico, $Y \subset X$ (con la topología inducida), $C \subset Y$ es cerrado en Y si es cerrado en la topología inducida.

Lema 1.22. *C es cerrado en Y si y solo si $C = C' \cap Y$ con C' cerrado en X.*

Demostración. $C \subset Y$ es cerrado en $Y \Leftrightarrow Y \setminus C$ es abierto en Y

$\Leftrightarrow Y \setminus C = U \cap C$ con $U \subset X$ abierto

$\Leftrightarrow C = (X \setminus U) \cap Y = C' \cap Y$, con $C' = X \setminus U$ cerrado.

$\square$

Definición 1.23 (clausura e interior). X espacio topológico, $A \subset X$:

1. El interior de A es $\mathring{A}$ = unión de todos los abiertos contenidos en A;
2. La clausura de A es $\overline{A}$ = intersección de todos los cerrados que contienen A.

Observación.

1. $\mathring{A}$ es abierto, $\overline{A}$ es cerrada, $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$;
2. A es abierto si y solo si $\mathring{A} = A$. A es cerrado si y solo si $\overline{A} = A$;

3. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$;
4. El interior $\mathring{A}$ es el abierto mas grande contenido en A y la clausura $\overline{A}$ es el cerrado mas pequeño que contiene a A.

Proposición 1.24. X espacio topológico, $A \subset X$ cualquiera, $x \in X$.

$$\begin{aligned} x \in \overline{A} &\Leftrightarrow \forall U \text{ abierto conteniendo a } X \text{, se tiene } A \cap U \neq \varnothing \qquad (*) \\ &\Leftrightarrow \text{ toda vecindad de } x \text{ interseca a } A \\ &\Leftrightarrow A \text{ contiene puntos arbitrariamente cercanos a } X \text{ (según la topología).} \end{aligned}$$

Corolario 1.25. $C \subset X$ es cerrado si y solo si $\forall x \in X$, si toda vecindad de x contiene un punto de C, entonces $x \in X$.

Demostración. (proposición 1.24)
$\boxed{\Leftarrow}$ Suponer que $x \notin \overline{A}$. Entonces $\exists C$ cerrado con $A \subset C$ y $x \notin C$. Luego, tomar $U := C \backslash C$ abierto. Entonces, $A \cap U = \varnothing$ y $x \in U$. Es decir, negamos $(*)$.
$\boxed{\Rightarrow}$ Negamos $(*) \Rightarrow \exists U$ abierto con $x \in U$ y $U \cap A = \varnothing$. Luego, $C = X \backslash U$ cerrado con $A \subset C$ y $x \notin C$. Entonces, $x \notin A$. $\square$

Definición 1.26 (puntos de acumulación)**.** $A \subset X$. Decimos que $x \in X$ es punto límite/de acumulación de A si $\forall$ U abierto conteniendo a x, se tiene que $U \cap (A \backslash \{x\}) \neq \varnothing$. Escribimos $A' := \{\text{puntos límite de } A\}$.

Ejemplo. En $\mathbb{R}$, tenemos lo siguiente:

A	$\mathring{A}$	$\overline{A}$	A'
(a, b)	(a, b)	$[a, b]$	$[a, b]$
$[a, b)$	(a, b)	$[a, b]$	$[a, b]$
$[a, b]$	(a, b)	$[a, b]$	$[a, b]$
$[0, 1] \cup \{2\}$	$(0, 1)$	$[0, 1] \cup \{2\}$	$(0, 1)$

Notar que 2 no es punto de acumulación.

Clase 6

18 de Agosto

1.6 Espacios Hausdorff, convergencia (17)

Observación. $x \in A' \Leftrightarrow x \in \overline{A \setminus \{x\}}$.

Lema 1.27. $\forall$ $A \subset X$, $\overline{A} = A \cup A'$.

Demostración. $\boxed{\supset}$ Notar que $A \subset \overline{A}$. Si $x \in A' \Rightarrow x \in \overline{A \setminus \{x\}} \subset \overline{A}$ $(*)$. Notar que $(*) A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$. Por lo tanto $A' \subset \overline{A}$. Entonces, $A \cup A' \subset \overline{A}$.

$\boxed{\subset}$ $(\overline{A} \subset A \cup A'$, equiv: $\overline{A} \setminus A \subset A')$ Si $x \in \overline{A} \setminus A$. Entonces, $x \notin A$ y $\forall\, U \ni x$ abierto se tiene $A \cap U \neq \varnothing$. Como $x \notin A \Rightarrow (A \setminus \{x\}) \cap U \neq \varnothing$. Entonces, $x \in A'$. □

Observación. A' no es necesariamente cerrado.

Ejemplo. $X = \{a, b\}$; $\tau = \{\varnothing, X\}$ (a, b indistinguibles desde el punto de vista de τ). $A = \{b\} \Rightarrow A' = \{b\}$ (no es cerrado). $a \notin A' \Leftrightarrow a \notin \overline{A \setminus \{a\}} = \overline{\varnothing} = \varnothing$. $b \in A \Leftrightarrow b \in \overline{A \setminus \{b\}} = \overline{\{a\}} = \{a, b\}$.

Problemas:

- Subconjuntos finitos no tienen topología discreta;
- Subconjuntos finitos no son cerrados.

Lema 1.28. Si X es espacio topológico arbitrario. Son equivalentes:

1. Todos los subconjuntos finitos de X tienen la topología discreta.
2. Todos los subconjuntos finitos de X son cerrados.

Definición 1.29 (espacios T_1 o Frechet)**.** Un espacio topológico X es T_1 (cumple el axioma T_1) si sus subconjuntos finitos son cerrados.

Ejemplo. X con la topología indiscreta NO es T_1 si $\#X \geq 2$.

Ejemplo. X con topología cofinita es T_1. En la topología

$$\{\text{subconjuntos cerrados}\} = \{\text{conjuntos finitos}\}$$

Lema 1.30. X es T_1, $A \subset X \Rightarrow A'$ es cerrado.

Demostración. (Queremos $\overline{A'} = A'$, i.e. $\overline{A'} \setminus A' = \varnothing$) Suponer que $x \in \overline{A'}$, $x \notin A'$. Si $x \notin A'$, entonces $\exists\, U$ abierto con $x \in U$ y $U \cap A \subset \{x\}$. Si $x \in \overline{A'}$, entonces $A' \cap U \neq \varnothing$. Luego, $\exists\, y \in U \cap A'$ $(y \neq x)$. Como X es T_1, entonces $\{x\}$ es cerrado. Luego, $X \setminus \{x\}$ es abierto, y con ello tenemos que $U \setminus \{x\}$ es abierto. Si $V = U \setminus \{x\}$ abierto que contiene a y $(y \in A')$, entonces V contiene puntos de A, distintos de y. Luego, $\exists\, z \in A \cap V$. Así, $z \in A \cap U$ y $z \neq x$. Contradicción! ※ □

Definición 1.31 (espacios T_2 o Haussdorff)**.** Un espacio topológico X es T_2 (o Hausdorff), si $\forall\, x \neq y$ en X existen $U, U' \subset X$ abiertos disjuntos con $x \in U$, $y \in U'$.

Ejemplo. X con la topología cofinita, con $\#X = \infty$ es T_1 pero no es Hausdorff. Veamos que esto es así. Si $x \neq y \in X$, $x \in U$, $y \in U'$ abiertos ($X \setminus U$, $X \setminus U'$ finitos), entonces $(X \setminus U) \cup (X \setminus U')$ finito. Luego, $X \setminus (U \cap U')$ finito. Así, $U \cap U'$ infinito, por lo que $U \cap U'$ no puede ser disjunto.

Lema 1.32. X Hausdorff $\Rightarrow X$ es T_1.

kk

Demostración. (X es $T_1 \Leftrightarrow$ subconjuntos finitos son cerrados $\Leftrightarrow$ singlietons son cerrados) $\to$ (veremos el último si y solo si) Sea $x \in X$, queremos que $X \setminus \{x\}$ sea abierto. Si $y \neq x$, dado que X es Hausdorff, $\exists\ U_y, U'_y$ abiertos disjuntos con $y \in U_y,\ x \in U'_y$. Luego, $x \notin U_y$. Por lo tanto, $X \setminus \{x\} = \bigcup_{y \neq x} U_y$ es abierto. $\square$

Ejemplo. (X, d) espacio métrico, X es Hausdorff con la topología métrica.

Corolario 1.33 (secreto)**.** Existen topologías que no vienen de métricas.

Demostración (del ejemplo)**.** Para la topología métrica, bolas abiertas son abiertos. Si $x \neq y$, entonces $U = B_{\frac{d(x,y)}{2}}(x),\ U' = B_{\frac{d(x,y)}{2}}(y)$. $\square$

En X con la topología cofinita, $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ infinito contable. Definimos $y_n = x_n$ con $n \geq 1$ (cada elemento de X aparece exactamente una vez). Cada abierto $\varnothing \neq U \subset X$ contiene a $y_n\ \forall n \geq \mathbb{N}$ (N depende de U). (próxima clase: $y_n \to x\ \forall x \in X$).

Clase 7

20 de Agosto

Observación. $\mathcal{B} \subset \tau \Rightarrow$ quizás $\tau_{\mathcal{B}} \neq \tau$. Solo es cierto $\tau_{\mathcal{B}} \subset \tau$.

Observación. Existe una noción más débil (T_0): $\forall\ x \neq y \in X,\ \exists\ U$ abierto tal que, o bien $x \in U,\ y \notin U$ o $y \in U,\ x \notin U$. Se puede demostrar que $T_1 \Rightarrow T_0$. Además, $\exists\ X,\ T_0$, no T_1, tal que 1.30 se cumple.

Definición 1.34 (convergencia de suceciones)**.** X espacio topológico, $(X_n)_n$ sucesión en $X,\ x \in X$. Decimos que x_n converge a x (con respecto a la topología) $[x_n \to x]$ si: $\forall\ U$ abierto con $x \in U$ existe N tal que $n \geq N$ implica $x_n \in U$.

Nota. Si $\mathcal{B}$ base para topología en X, $x_n \to x$ equivale a: $\forall B \in \mathcal{B}$ con $x \in B$, $\exists N$ tal que $n \geq N$ se tiene $x_n \in B$.

Ejemplo. (X, d) espacio métrico. $x_n \to x$ (topología métrica) $\longleftrightarrow x_n \to x$ (análisis real): $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N$ tal que $n \geq N \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$ ($x_n \in B_\varepsilon(x)$).

Ejemplo. X con la topología indiscreta ($\tau = \{\varnothing, X\}$). Entonces, para cualquier suceción $(x_n)_n$, para cualquier $x \in X,\ x_n \to x$ (solo se debe verificar $U = X$).

Ejemplo. X con la topología discreta, entonces $(x_n \to x) \longleftrightarrow x_n = x$ para todo $n \gg 0$ [Caso $U = \{x\}$].

Ejemplo. X infinito contable con topología cofinita [T_1, no T_2], $X = \{a_1, a_2, \dots\}$. Si $x_n = a_n \Rightarrow x_n \to x$ para todo $x \in X$ [Si U abierto, $x \in U \not\Rightarrow U = X \setminus \{a_{i_1}, \dots, a_{i_k}\}(i_1 < \dots < i_k) \Rightarrow n \geq N = i_k + 1$ implica $x_n \to x$].

Lema 1.35. Si T_2, $(x_n)_n$ sucesión con $x_n \to x$, $x_n \to y$, entonces $x = y$.

Demostración. Si $x \neq y$, dado que es T_2, entonces existen U, U' abiertos disjuntos con $x \in U$, $y \in U'$. Si $x_n \to x$, entonces existe N_1 tal que $n \geq N_1$ implica $x_n \in U$. Si $x_n \to y$, entonces existe N_2 tal que $n \geq N_2$ implica $x_n \in U$. Por lo tanto $n \geq N_1$ y $n \geq N_2$, entonces $x_n \in U \cap U'$. Contradicción! ※ $\square$

Continuidad: $f : X \to Y$, X, Y espacios topológicos.

- [No Def]: Si $x_n \to x$ en $X \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$ en Y.

Definición 1.36 (continuidad). f es continua si $\forall\ U \subset Y$ abierto, se tiene $f^{-1}(U)$ es abierto en X.

Ejemplo. Si (X, d), (Y, d') son espacios métricos, entonces $f : X \to Y$ continua (respecto a topologías métricas) $\longleftrightarrow f(\varepsilon - \delta)$ continua: $\forall\, x \in X$, $\forall\, \varepsilon > 0$; $\exists\, \delta > 0$ tal que $d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Observación. $d(x, y) < \delta$ es lo mismo que pedir $y \in B_\delta(x)$. Similarmente $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$ es lo mismo que $\delta(y) \in B_\varepsilon(f(x))$, $y \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(x))$.

Lema 1.37. $X \xrightarrow{f} Y$, $\mathcal{B}'$ base de Y, $\mathcal{B}$ base de X. Entonces

$$\begin{aligned} f \text{ continua} &\Leftrightarrow [\text{Si } B' \in \mathcal{B}' \Rightarrow f^{-1}(B') \text{ es abierto} \\ &\Leftrightarrow \text{Si } B' \in \mathcal{B}',\ \forall\, y \in f^{-1}(B'),\ \text{existe } B \in \mathcal{B} \text{ con } y \in B \subset f^{-1}(B'). \end{aligned}$$

Lema 1.38 (continuidad secuencial). Si $f : X \to Y$ continua (hay top. dadas). Entonces, si $x_n \to x$ en $X \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$ en Y.

Demostración. Suponer $x_n \to x$ en X. Queremos que $f(x_n) \to f(x)$ en Y. Tomar $U \subset Y$ abierto con $f(x) \in U$. Luego, f continua implica que $f^{-1}(U)$ abierto con $x \in f^{-1}(U)$. Si $x_n \to x$, entonces existe N tal que $n \geq N$ implica $x_n \in f^{-1}(U)$. Entonces, existe N tal que $n \geq N$ implica $f(x_n) \in U$. Por lo tanto, $f(x_n) \to f(x)$. $\square$

Clase 8

22 de Agosto

1.7 Continuidad, homeomorfismos (18)

1.7.1 Observaciones clase pasada

Observación.

- $f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in I} f^{-1}(A_\alpha)$;

- $f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in I} f^{-1}(A_\alpha)$.

Estas identidades no son necesariamente ciertas si se ocupa f en vez de f^{-1}.

Observación (Tarea 2)**.** Coninuidad secuencial $\not\Rightarrow$ Continuidad.

1.7.2 Clase 8

Lema 1.39. $f : X \to Y,\ X,\ Y$ espacios topológicos.

$$f \text{ continua } \Leftrightarrow \forall C \subset Y \text{ cerrado, se tiene } f^{-1}(C) \text{ cerrado en } X$$

Demostración. $\boxed{\Rightarrow}$ Suponer que f continua. Tomamos $C \subset Y$ cerrado [queremos $X \setminus f^{-1}(C)$ abierto]. Notar que

$$\begin{aligned} X \setminus f^{-1}(C) &= \{x \in X \ :\ x \notin f^{-1}(C)\} = \{x \in X \ :\ f(x) \in Y \setminus C\} \\ &= \underbrace{f^{-1}\ \underbrace{(Y \setminus C)}_{\text{abierto en } X}}_{\text{abierto en } X \text{ pq } f \text{ continua}} . \end{aligned}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Análogo. □

Ejemplo. Si $f : X \to Y,\ X,\ Y$ espacios topológicos

1. Si Y con topología indiscreta ($\{\varnothing, Y\}$) $\Rightarrow$ f automáticamente continua. Notar que $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing,\ f^{-1}(Y) = X$.
2. Si X tiene topología discreta (2^X) $\Rightarrow$ f continua. Notar que $f^{-1}(U)$ es abierto para todo subconjunto $U \subset Y$.
3. Si $A \subset X$ y f continua. Entonces $f|_A : A \to Y$ también es continua [A co top. inducida]. Notar que $U \subset Y$ abierto, entonces
$$\begin{aligned} (f|_A)^{-1}(U) &= \{x \in A \mid f|_A(x) = f(x) \in U\} \\ &= \underbrace{A \cap \underbrace{f^{-1}(U)}_{\text{abierto en } X}}_{\text{abierto en} A} \end{aligned}$$
4. Si X_1, X_2 espacios topológicos, entonces $\pi_1 : X_1 \times X_2 \to X_1$ es continua. Notar que si $U \subset X_1$ abierto, entonces $\pi_1^{-1}(U) = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in U\} = U \times X_2$ abierto en $X_1 \times X_2$.

Propiedades. X, Y, Z espacios topológicos

1. Fijar $y_0 \in Y$. $f : X \to Y,\ f(x) = y_0\ \forall x$, es continua. Notar que $U \subset Y$ abierto, entonces
$$f^{-1}(U) = \begin{cases} X \text{ si } y_0 \in U \\ \varnothing \text{ si } y_0 \notin U \end{cases}$$

2. Si $f : X \to Y,\ g : Y \to Z$ continuas, entonces $g \circ f : X \to Z$ continuas. Notar que $V \subset Z$ abierto, entonces $(g \circ f)^{-1}(V) = \underbrace{f^{-1}\ \underbrace{(g^{-1}(V))}_{\text{abierto en } Y}}_{\text{abierto en } X}$

3. Si $f : X \to Y$ continua y $f(X) \subset Z \subset Y$, entonces $f : X \to Z$ continua. Notar que $U \subset Z$ abierto en Z, entonces $U = Z \cap V,\ V \subset Y$ abierto. Dado que $f(X) \subset Z$, tenemos que $f^{-1}(U) = f^{-1}(V)$ abierto en X [$f : X \to Y$ continua]. Luego, $f^{-1}(U)$ abierto en X.

4. (Continuidad es propiedad local): Si $f : X \to Y,\ (B_\alpha)_{\alpha \in I}$ abiertos en X tal que $\bigcup\limits_{\alpha \in I} B_\alpha \overset{(*)}{=} X$. Entonces

   $$f \text{ continua} \Leftrightarrow f|_{B_\alpha} \to Y \text{ es continua para todo } \alpha$$

   $\boxed{\Leftarrow}$ Tomamos $U \subset Y$ abierto (queremos $f^{-1}(U)$ abierto en X). Usar $f^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in I} (f|_{B_\alpha})^{-1}(U)$. Vamos a demostrar esta igualdad:

   $\boxed{\subset}$ $x \in f^{-1}(U)$ y $x \in B_\alpha$, entonces $x \in (f|_{B_\alpha})^{-1}(U)$.

   $\boxed{\supset}$ Hacer!

   Luego, tenemos que $(f|_{B_\alpha})^{-1}(U)$ es abierto en B_α y que B_α es abierto, entonces $(f|_{B_\alpha})^{-1}(U)$ abierto en X $\forall \alpha$. Por $(*)$, tenemos que $f^{-1}(U)$ es abierto en X.

Nota. Si se reemplaza "B_α abiertos" por "B_α cerrados", 4. igual se cumple + I finito (cjto. de indices de la unión) [Lema del pegado en Munkres]

> **Definición 1.40** (homeomorfismo)**.** $X,\ Y$ espacios topológicos. $f : X \to Y$ es homeomorfismo si
>
> 1. f es continua;
> 2. f es biyectiva (existe $f^{-1} : Y \to X$);
> 3. f^{-1} es continua.

Observación. Propiedades topológicas (como T_1, Hausdorff, etc...) son invariantes por homeomorfismos.

Clase 9

25 de Agosto

1.8 Homemomorfismos, Productos infinitos (18, 19)

Ejemplo.

1. $f : (-1, 1) \to (-\infty, \infty),\ f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ es homeomorfismo. La inversa es $g(y) = \frac{2y}{1+(1+4y^2)^{1/2}}$. Notar que f y g son $\varepsilon - \delta$ continuas (i.e. con topologías métricas). Observamos que (X, d) espacio métrico, $Y \subset X$ subconjunto, entonces la topología inducida en Y es igual a la topología métrica dada por $d|_Y$.

2. $id : (\mathbb{R}, \tau_{\text{discr}}) \to (\mathbb{R}, \tau_{\text{std}})$ continuo. $(id)^{-1} = id : (\mathbb{R}, \tau_{\text{std}}) \to (\mathbb{R}, \tau_{\text{discr}})$ no es continua. Si tomamos $U = \{0\}$, es abierto en τ_{discr}, pero no abierto en τ_{std}. Moral: f continua y biyectiva $\not\Rightarrow f^{-1}$ continua.

   Observación. $id : (X, \tau) \to (X, \tau')$ es continua si y sólo si $\tau' \subset \tau$ (τ más fina que τ').

3. $X = [0, 2\pi]$, $Y = \mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, $f : X \to Y$, $t \mapsto (\cos t, \sin t)$. f es continua (es $\varepsilon - \delta$ continua) y biyectiva. Si f^{-1} no es continua, queremos $U \subset X$ tal que $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$ no es abierto en Y. Notar que un intervalo de la forma $U = [0, t)$ es abierto en X, pero $f(U)$ no es abierto en Y (el punto $(1, 0) \in f(U)$ no está en el interior). Moral: "despegar/cortar" no es operación continua.

1.8.1 Productios cartesianos arbitrarios

Recuerdo. X, Y espacios topológicos, en $X \times Y$ tenemos <u>topología producto</u> con base $\mathcal{B} = \{U \times U' \mid U \subset X,\ U' \subset Y \text{ abiertos}\}$. En general, si $X_1, dots, X_n$ (finitos) espacios topológicos, la <u>topología producto</u> en $X_1 \times \cdots \times X_n$ tiene base

$$\mathcal{B} = \{U_1 \times \cdots \times U_n \mid U_i \subset X_i \text{ abierto para cada } i\}.$$

Lema 1.41. Topología producto en $X_1 \times \cdots \times X_n$ es la <u>menor</u> topología tal que $\pi_i : X_1 \times \cdots \times X_n \to X_i$ tal que $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i$, es continua para cada i.
(Menor: si τ' topología en $X_1 \times \cdots \times X_n$ tal que π_i continua $\forall i$, entonces $\tau' \supset \tau$ =topología producto)

Demostración. Si τ' topología en $\underline{X}$ tal que $\pi_i : \underline{X} \to X_i$ continuas, entonces $\forall 1 \leq i \leq n$, si $U_i \subset X_i$ abierto. Luego $\pi_i^{-1}(U_i)$ abierto en τ', donde $\pi_i^{-1} = X_1 \times \cdots \times X_{i-1} \times U_i \times X_{i+1} \times \cdots \times X_n$. Si queremos $\tau \subset \tau'$, basta que $\mathcal{B} \subset \tau'$. Si $U_1 \subset X_1, \ldots, U_n \subset X_n$ son abiertos, entonces $\mathcal{B} \ni U_1 \times \cdots \times U_n = \pi_1^{-1}(U_1) \cap \pi_2^{-1}(U_2) \cap \cdots \cap \pi_n^{-1}(U_n)$ es abierto en τ' (usamos que n es finito!!!). ☐

Definición 1.42 (producto)**.** Una familia indexada de conjuntos es $\{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$. Si $\underline{X} \bigcup_{\alpha \in J} X_\alpha$, el producto cartesiano es $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ es el conjunto de funciones $x : J \to \underline{X}$ tal que para $\alpha \in J$, $x_\alpha \coloneqq x(\alpha) \in X_\alpha$ [x_α es la α-coordenada de x]

Ejemplo.

- Si $J = \{1, \ldots, n\} \Rightarrow \prod_{\alpha \in J} X_\alpha = X_1 \times \cdots \times X_n$;
- Si $X_\alpha = X$ para todo $\alpha \Rightarrow \prod_{\alpha \in J} X_\alpha = X^J = \{\text{funciones } f : J \to X\}$;
- Si $J = \mathbb{Z}_{>0}$, $X_\alpha = X\ \forall \alpha \Rightarrow \prod_{\alpha \in J} X_\alpha = \{\text{sucesiones } x = (x_1, x_2, \ldots) \text{ en } X\}$

1.8.2 Topologías en $\Pi_{\alpha\in J}X_\alpha$

Definición 1.43 (Topología de cajas). Topología con base

$$\mathcal{B} = \{\prod_{\alpha\in J} U_\alpha \mid U_\alpha \subset X_\alpha \text{ es abierto para cada } \alpha\}$$

Definición 1.44 (Topología producto). Es la <u>menor</u> topología tal que las proyecciones $\pi_\beta : \prod_{\alpha\in J} X_\alpha \to X_\beta,\ x = (x_\alpha)_{\alpha\in J} \mapsto x_\beta$ sean continuas para cada $\beta \in J$.

Observación. Si $\underline{X}$ conjunto, $f_\alpha : \underline{X} \to X_\alpha$ espacios topológicos, entonces existe una menor topología tal que f_α continua para todo α. Es la menor topología tal que $f_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ sea abierta para cada $U_\alpha \subset X_\alpha$ abierto, para cada $\alpha \in J$ (existe por tarea 1).

Observación. Para $\underline{X} = \prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ una base es $\mathcal{B}' = \{\prod_{\alpha\in J} U_\alpha \mid U_\alpha \subset X_\alpha$ abierto, y $U_\alpha = X_\alpha$ salvo en un conjunto finito de índices $\alpha\}$.

Corolario 1.45. $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$, por lo tanto $\tau_{\text{prod}} \subset \tau_{\text{cajas}}$.

Corolario 1.46. Para topología de cajas, proyecciones π_α también son continuas.

Ejemplo (Próxima clase).

1. $\underline{X} = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}_{>0}}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\mathbb{Z}_{>0}}$ tal que $t \mapsto (t, t, t, t, \dots)$. Se puede ver que f continua para la topología producto, pero no es continua para la topología de cajas.
2. $\underline{X} = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}_{>0}}$. En $\underline{X}$ con topología de cajas, es la topología discreta. $\underline{X}$ es homeomorfo al conjunto de Cantor con la topología producto.

Clase 10

27 de Agosto

1.9 Topología producto, Topología cuociente (19, 22)

Observación.

1. $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$;
2. Si J es finito, topología de cajas = topología producto;
3. Si J es infinito, en general esto no es cierto.

Ejemplo. Si $J = \mathbb{Z}^+,\ X_n = \mathbb{R}\ \forall n,\ Z = \prod_{n\geq 1}\mathbb{R} = \mathbb{R}^\omega,\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\omega,\ t \mapsto (t, t, t, \dots)$.

Propiedad. Si $Z = \prod_{\alpha\in J} X_\alpha,\ f : Y \to Z \Rightarrow f$ está dada por $f(y) = (f_\alpha(y))_{\alpha\in J}$ con $f_\alpha : Y \to X_\alpha$. Con la topología producto, f es continua $\Leftrightarrow$

cada f_α es continua.

Antes de probar la propiedad, veremos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\omega$ no es continua para la topología de cajas: Tomar $B = \prod_{n\geq 1} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ es abierto para topología de cajas y $(0,0,0,\dots) = f(0) \in B$. Luego, $f^{-1}(B) = \{0\}$ no es abierto en $\mathbb{R}$. Por lo tanto, f no es continua.

Demostración (Propiedad). $\boxed{\Rightarrow}$ Notar que $f_\alpha = \pi_\alpha \circ f$ (con π_α la proyección: $Z \to X_\alpha,\ (x_\beta)_\beta \mapsto x_\alpha$) es composición de funciones continuas. Por lo tanto, es continua.

$\boxed{\Leftarrow}$ Tomar $B = \prod_{\alpha\in J} U_\alpha$ en base de topología producto. Luego, notamos

$$\begin{aligned}\prod_{\alpha\in J} U_\alpha &= U_{i_1} \times \cdots \times U_{i_n} \times \prod_{\alpha\in J\setminus\{i_1,\dots,i_n\}} X_\alpha \quad \subset Z\\ &= \bigcap_{j=1}^{n} \pi_{ij}^{-1}(U_{ij})\end{aligned}$$

Por lo tanto, suficiente probar que $f^{-1}(\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha))$ abierto para cada α, $\forall U_\alpha \subset X_\alpha$. Luego, $f^{-1}(\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)) = f_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ es abierto porque f_α continua. □

Ejemplo. $Z = \{0,1\}^\omega = \{\text{sucesiones } (x_1, x_2, \dots) \text{ con } x_i \in \{0,1\}\}$.

Lema 1.47. Si $Z = \prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ donde cada X_α tiene topología discreta. Entonces, topología de cajas en Z es la topología discreta.

Demostración. Queremos $\{(x_\alpha)_\alpha\}$ abierto en Z. Notar que $\{(x_\alpha)_\alpha\} = \prod_\alpha \{x_\alpha\}$ es abierto en Z con topología de cajas. □

Con topología producto, Z es <u>homeomorfo</u> al conjunto de Cantor.

Recuerdo. En $[0,1]$, E_n = unión de intervalos $B_{i_1\dots i_n}$ con $i_n \in \{0,1\}$ tal que, inductivamente, si $B_{i_{i_1\dots i_n}} = [a,b]$, entonces

$$B_{i_1\dots i_n 0} = \left[a, a + \frac{1}{3^{n+1}}\right], \quad B_{i_1\dots i_n 1} = \left[b - \frac{1}{3^{n+1}}, b\right]$$

Luego, $\mathcal{C} = \bigcap_{n\geq 1} E_n$ (Cantor) (cerrado en $\mathbb{R}$, de interior vacío). Construir $f : \{0,1\}^{\mathbb{Z}^+} \to \mathcal{C},\ (x_n)_{n\geq 1} \mapsto \sum_{n\geq 1} \frac{2x_n}{3^n}$, esto es biyección.

Veamos que f es continua: Notar que una base del $\mathcal{C}$ es el conjunto

$$\mathcal{B} = \bigcup_{n\geq 1} \{B_{i_1\dots i_n} \cap \mathcal{C} \mid i_1, \dots, i_n \in \{0,1\}\}$$

Luego,

$$\begin{aligned} f^{-1}(B_{i_1\dots i_n}\cap \mathcal{C}) &= \{(x_1,\dots,x_n,x_{n+1},\dots)\ \big|\ x_1=i_1,\ x_2=i_2,\dots,x_n=i_n\} \\ &= \underbrace{\{i_1\}\times\{i_2\}\times\cdots\times\{i_n\}\times\{0,1\}^{\mathbb{Z}_{>n}}}_{\text{abierto para topología producto}} \end{aligned}$$

Propiedades. $Z=\prod_{\alpha\in J}X_\alpha$ espacio topológico.

1. Si cada X_α es Hausdorff $\Rightarrow Z$ Hausdorff (Z con topología producto ó con topología de cajas)
2. Si $A_\alpha\subset X_\alpha$, donde $A=\prod_{\alpha\in J}A_\alpha\subset\prod_{\alpha\in J}X_\alpha=Z$. La topología producto en A es la inducida por la producto en Z. Por otro lado, la topología de cajas de A es la inducida por la topologia de cajas de Z (demostrar!).

Clase 11

29 de Agosto

Contexto. $p:X\to A$ sobreyectiva, X espacio topológico. Uno quiere dar una topología "natural" a A tal que ρ sea continua.

Ejemplo (estándar). Si $\sim$ relación de equivalencia en X, con $X\backslash\sim=$ *conjunto de clases de equivalencia*

$$\rho:X\to X\backslash\sim,\quad x\mapsto[x]_\sim$$

Ejemplo (1.). **Colapsar subespacios.** $Y\subset X$. Luego, $\sim$ en X tal que todos los puntos de Y son equivalentes (y nada más). Entonces, $X\setminus Y=X\backslash\sim$.

Ejemplo (1.1). $X=[0,1],\ Y=\{0,1\}$

Ejemplo (1.2). $X=D^2=\{x\in\mathbb{R}^2\ \big|\ |x|\le 1\},\ Y=\mathbb{S}^1=\{x\ \big|\ |x|=1\}$.

Ejemplo (2.). **Acciones de grupo.** Γ grupo, X espacio. Acción es $\rho:\Gamma\times X\to X$ (notación $\rho(g,x)=g\cdot x$) tal que

1. $\rho(1_\Gamma,x)=x\quad\forall x\in X$;
2. $\rho(gh,x)=\rho(g,\rho(h,x))$.

Observar. ρ es mismo dato de un homomorfismo

$$\Gamma\to Biy(X),\quad g\mapsto(x\mapsto\rho(g,x))$$

Ejemplo. $\mathbb{Z}^2\curvearrowright\mathbb{R}^2,\ (m,n)\cdot(x,y)=(x+m,y+n)$.

Notar que si tenemos $\Gamma\curvearrowright X$ acción, nos da $\sim_\Gamma$ tal que $x\sim_\Gamma y$ si y sólo si $y=g\cdot x$ para algún $g\in\Gamma$ (x,y en la misma órbita). Además, $X\setminus\Gamma:=X\backslash\sim_\Gamma$ espacio de órbitas, o cociente de X por la acción de Γ.

Contexto. $p:X\to A$ sobreyectiva, X espacio topológico.

Definición 1.48 (topología cociente en A).

$$\tau = \{U \subset A \mid p^{-1}(U) \text{ es abierto en } X\}$$

Esto es topología: Viene de que

$$p^{-1}\left(\bigcup_\alpha U_\alpha\right) = \bigcup_\alpha p^{-1}(U_\alpha)$$
$$p^{-1}\left(\bigcap_\alpha U_\alpha\right) = \bigcap_\alpha p^{-1}(U_\alpha).$$

Observar.

1. p es continua si A tiene topología cociente;
2. Se cumple algo más fuerte

$$U \subset A \text{ abierto} \Leftrightarrow p^{-1}(U) \subset X \text{ abierto} \qquad (*)$$

[top. cociente es topología más grande tal que p es continua]

Definición 1.49 (mapa cociente). Si X, A son espacios topológicos $p : X \to A$ es mapa cociente si es sbore y se cumple $(*)$.

Observar. $X \overset{p}{\twoheadrightarrow}$, A con topología cociente

1. Si p es continua respecto a τ' otra topología en A, entonces $\tau' \subset \tau_{\text{coc}}$;
2. p es mapa cociente con respecto a τ_{coc}. Si p es mapa cociente con respecto a topología τ en A, entonces $\tau = \tau_{\text{coc}}$.

[$X \overset{p}{\to}$ mapa cociente $\equiv X \overset{p}{\to} A$ sobre y A tiene top. cociente.]

Propiedad 1.50. Suponer que $p : X \to A$ mapa cociente, Y espacio topológico, $f : A \to Y$. Sea $g = f \circ p : X \to Y$. Luego,

$$f \text{ es continua} \Leftrightarrow g \text{ es continua}$$

Demostración. $\boxed{\Leftarrow}$ Si $U \subset Y$ abierto (queremos $f^{-1}(U) \subset A$ abierto). Luego, g continua implica que $g^{-1}(U) \subset X$ abierto. Notar que $g^{-1}(U) = (f \circ g)^{-1}(U) = p^{-1}(f^{-1}(U)) \subset X$ abierto. Dado que p es mapa cociente, entonces $f^{-1}(U) \subset A$ abierto. $\square$

Ejemplo. $g : [0, 2\pi] = X \to \mathbb{S}^1 = \{|z| = 1\}, \quad t \mapsto (\cos t, \sin t)$.

- $A = [0, 2\pi] \setminus \{0, 2\pi\}$;
- $p : X \to A$.

(g cumple $(*)$) $\Rightarrow$ hay una función $f : A \to \mathbb{S}^1$ tal que

$$\begin{tikzcd} {[0,2\pi]} \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "g \text{ (continua sobre } y)"] & \\ A \arrow[r, "\text{biyección}"'] & \mathbb{S}^1 \end{tikzcd}$$

Propiedad anterior $\Rightarrow$ f continua (y biyectiva)

Clave. f^{-1} es continua! $\rightsquigarrow$ $[U \subset A$ abierto $\Rightarrow f(U)$ abierto en $\mathbb{S}^1]$

> **Demostración.** Suponer U que contiene a $p(0) = p(2\pi) \Rightarrow p^{-1}(U)$ abierto que contiene a 0 y a 2π. Entonces, U contiene a $[0, \varepsilon) \cup (2\pi - \varepsilon, 2\pi]$ para algún ε chiquito. Luego $g(U)$ contiene vecindad de $g(p(0))$. $\square$

Clase 12

1 de Septiembre

1.10 Grupos Topológicos (pp 145, Lee pp 77)

Propiedad 1.51 (clase pasada). Si $f : X \to Y$ continua tal que $p(x) = p(y) \Rightarrow f(x) = f(y)$ (con p mapa cociente). Además, junto con el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "f"] & \\ A \arrow[r, dashed, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

afirmamos que $\exists! g : A \to Y$ continua tal que $g \circ p = f$

Ejemplo. Cociente de Hausdorff no tiene que ser Hausdorff.

$$X = \mathbb{R},\ A = \{0,1\},\ p : \mathbb{R} \to \{0,1\},\ p(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0 \\ 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Topología en $A :\ p^{-1}(\varnothing) = \varnothing,\ p^{-1}(\{0,1\}) = \mathbb{R},\ p^{-1}(\{0\}) = (-\infty, 0),\ p^{-1}(\{1\}) = [0, \infty)$ (notar que este último no es abierto). Luego, $\tau_{\text{coc}} = \{\varnothing, \{0,1\}, \{0\}\} \rightsquigarrow$ No es Hausdorff (ni $T1$).

Definición 1.52 (grupo topológico). Un grupo topológico es un grupo Γ con una topología tal que $v : \Gamma \to \Gamma$ y $* : \Gamma \times \Gamma \to \Gamma$ sean continuas.

Observar. En la definición, el dominio de $*$, $\Gamma \times \Gamma$ viene con la topología producto respecto a la topología en Γ.

Ejemplo.

- $(\mathbb{R}, +)$ es un grupo topológico con la topología estándar ($v(x) = -x$, $*(x, y) = x + y$);

- $(\mathbb{R}^n, +)$ es un grupo topológico con la topología estándar (cualquier isomorfismo $\mathbb{R}$-lineal es homeomorfismo);
- Γ cualquiera con la topología discreta. Decimos que Γ es grupo discreto;
- Grupo lineal: $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in \underbrace{\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})}_{\cong \mathbb{R}^{n^2}} \mid \det A \neq 0\}$;
- $\mathbb{R}^{n^2}$ nos da una topología de subespacio desde $\mathbb{R}^{n^2}$. Si usamos el isomorfismo $[a_{i,j}]_{i,j} \mapsto (a_{i,j})_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{R}^{n^2}$. ¿Cómo se ven v y $*$? $\rightsquigarrow v : A \to A^{-1} = \frac{1}{\det A}\mathrm{adj}(A)$ (matriz con cada entrada un polonomio en coef de A). Por lo tanto, $*$ es función racional y por ende, continua. Luego, $* : (A, B) \to AB$ (cada entrada es un polinomio en las entradas de A y B);
- $SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \bigm| \det A = 1\} < GL_n(\mathbb{R})$.

Propiedad 1.53. Γ grupo topológico y $H < \Gamma$ subgrupo. Entonces, H es grupo topológico con topología inducida.

Notar que, si Γ cualquiera con topología profinita (topología con base $\mathcal{B} = \{a\Gamma' \bigm| \Gamma' \lhd \Gamma \text{ subgrupo normal de índice finito}, a \in \Gamma\}$).

- v es continua (basta $v^{-1}(a\gamma')$ abierto): $v^{-1}(a\Gamma') = \{x^{-1} \bigm| x \in a\Gamma'\} = \{(ag)^{-1} \bigm| g \in \Gamma'\} = \{g^{-1}a^{-1} \bigm| g \in \Gamma'\} = \Gamma' a^{-1} \overset{\Gamma' \lhd}{=} a^{-1}\Gamma' \in \mathcal{B}$.
- Si $a \in \Gamma,\ L_a : \Gamma \to \Gamma,\ g \mapsto ag$ es continua: si $a'\Gamma'$ elemento arbitrario de $\mathcal{B}$, entonces $(L_a)^{-1}(a'\Gamma') = (L_{a^{-1}})(a'\Gamma') = a^{-1}a\Gamma' \ni \mathcal{B}$ (#).

Observar. (#) es más débil que probar que $* : \Gamma \times \Gamma \to \Gamma,\ (g, h) \mapsto gh$ es continua.

Propiedad 1.54. Γ, Γ' grupos topológicos.

1. $\Gamma \times \Gamma'$ es grupo topológico von la topología producto.

   Ejemplo (1.1)**.** $\mathbb{S}^{-1} = \{z \in \mathbb{C} \bigm| |z| = 1\}$ es un grupo topológico con producto usual y topología inducida;

   Ejemplo (1.2)**.** $\Pi^n = \underbrace{\mathbb{S}^{-1} \times \cdots \times \mathbb{S}^{-1}}_{n-\text{veces}}$ n-toro es grupo topológico.

2. $H \lhd \Gamma$ subgrupo normal. Entonces, $\overline{\Gamma} \coloneqq \Gamma/H$ grupo cociente y $p : \Gamma \to \overline{\Gamma}$ homomorfismo cociente.

   (a) p es abierta ($U \subset \Gamma \Rightarrow p(U)$ es abierto en $\overline{\Gamma}$ con la topología cociente);

   (b) $\overline{\Gamma}$ es grupo topológico;

   (c) $\overline{\Gamma}$ es Hausforff ssi $H < \Gamma$ cerrado.

   Ejemplo (2.1)**.** $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ es Hausdorff con la topología cociente ($\mathbb{R}$ con la topología estándar).

Clase 13

3 de Septiembre

1.11 Acciones Topológicas (Lee p.77)

Ejemplo (última propiedad clase pasada, punto 2). Sea $\Gamma = \mathbb{R}$, $H = \mathbb{Q} \rightsquigarrow \overline{\Gamma} = \mathbb{R}/\mathbb{Q}$. Como $\mathbb{Q}$ no es cerrado en $\mathbb{R}$, entonces $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ no es Hausdorff. Además, veremos que la topología cociente en $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ es la indiscreta. Notar que $U \subset \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ es abierto no vacío $\Leftrightarrow$ $p^{-1}(U) \subset \mathbb{R}$ abierto no vacío. Tomar $U \subset \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ no vacío, $\exists [x] = p(x) \in U (x \in \mathbb{R}) \Rightarrow p^{-1}(U)$ contiene a x, y; y de hecho contiene a x tal que $\forall q \in \mathbb{Q}$ $(p(x+q) = p(x))$. Por lo tanto, $p^{-1}(U)$ abierto (en $\mathbb{R}$) y $x + \mathbb{Q} \subset p^{-1}(U)$ (denso). $p^{-1}(U)$ es invariante por trasladar por $\mathbb{Q}$: si $y \in p^{-1}(U)$, $q \in \mathbb{Q} \Rightarrow y + q \in p^{-1}(U)$. Como $x \in p^{-1}(U)$ abierto, entonces $\exists \varepsilon > 0$ tal que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset p^{-1}(U)$. Luego, $(x - \varepsilon + q, x + \varepsilon + q) \subset p^{-1}(U)$ $\forall q \in \mathbb{Q}$. En conclusión, $p^{-1}(U) = \mathbb{R}$ y $U = \mathbb{R}/\mathbb{Q}$, $\therefore$ la topología en $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ es $\{\varnothing, \mathbb{R}/\mathbb{Q}\}$.

Ejemplo (Furstenberg). Se puede probar que existen infinitos primos de manera puramente topológica (usando topología profinita en $\mathbb{Z}$).

Demostración. Base: $\mathcal{B} = \{ \underbrace{\overbrace{a\mathbb{Z}}^{\Gamma'} + b}_{b\Gamma'} \mid a \neq 0,\ b \in \mathbb{Z}\}$. Observar que, cada $a\mathbb{Z} + b$ es infinito. Esto implica que cada abierto con la topología profinita es o bien vacío, o infinito. En $\mathbb{Z}$, todo número no primo es o bien 1 o -1, o $p \cdot a$ con p primo y $a \in \mathbb{Z}$. Entonces,

$$\mathbb{Z} = \{-1, 1\} \sqcup \bigcup_{p \text{ primo}} p\mathbb{Z} \qquad (*)$$

Notar que cada $p\mathbb{Z}$ es cerrado:

$$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \bigcup_{1 \leq i \leq p-1} (p\mathbb{Z} + i)$$

Si hubiera finitos primos, entonces la unión de los $p\mathbb{Z}$ en $(*)$ sería cerrado. Así, $\{-1, 1\} \subset \mathbb{Z}$ abierto, lo que es una contradicción! $\square$

Acciones topológicas

Recuerdo. $\Gamma \curvearrowright X$: $\Gamma \times X \to X$ tal que $(g, x) \mapsto g \cdot x$ y se cumple (i) $1 \cdot x = x$; (ii) $h \cdot (g \cdot x) = (hg) \cdot x$.

Definición 1.55 (acción continua). Una acción $\Gamma \curvearrowright X$ (Γ grupo topológico, gX espacio topológico) es continua si:

$$\begin{aligned} \Gamma \times X &\to X \\ (g, x) &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

es continuo.

Lema 1.56. Γ, X grupos topológicos y $\Gamma \curvearrowright X$ acción.

1. Si $\Gamma \curvearrowright X$ continua, entonces $L_g : X \to X$, con $x \mapsto g \cdot x$, es homeomorfismo para cada $g \in \Gamma$,
2. Si Γ es grupo discreto y cada L_g es homeomorfismo, entonces $\Gamma \curvearrowright X$ es continua.

Demostración.

1. Dado $g \in \Gamma$:

$$\begin{aligned} X &\to \{g\} \times X \hookrightarrow \Gamma \times X \to X \\ x &\mapsto \ (g, x) \quad \ \mapsto (g, x) \ \mapsto g \cdot x. \end{aligned}$$

2. Tomar $U \subset X$ abierto. Notar que

$$\begin{aligned} p^{-1} &= \{(g, x) \mid g \cdot x \in U\} \\ &= \{(g, x) \mid L_g(x) \in U\} \\ &= \{(g, x) \mid x \in L_g^{-1}(U)\} \\ &= \{(g, x) \mid x \in L_g^{-1}(U)\} \\ &= \bigcup_{g \in \Gamma} \{g\} \times L_g^{-1}(U). \end{aligned}$$

   Donde $\{g\}$ es abierto en Γ (topología discreta) y $L_g^{-1}(U)$ es abierto en X (L_g homeo). Así, la unión es un abierto en $\Gamma \times X$.

$\square$

Ejemplo. $GL_n(\mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{R}^n$, $A \cdot v = A(v)$ (multiplicación usual). Esta acción es continua!

$$\begin{aligned} &Mat_{n\times n}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad [(A, v) \mapsto A(v)] \\ &\quad \cup \\ &GL_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ &\qquad (A, v) \mapsto A(v). \end{aligned}$$

Clase 14

5 de Septiembre

1.12 Acciones topológicas/continuas (Lee p.77)

Recuerdo. $\Gamma \curvearrowright X$ acción $\rightsquigarrow \sim_\Gamma$ en X : $x \sim_\Gamma y$ si $p : X \to X/\Gamma := X/\sim_\Gamma$ espacio de órbitas (con top. cociente). $x \in \Gamma$, su órbita (denotada) $\Gamma \cdot x$ es $\{g \cdot x \mid g \in \Gamma\}$.

Ejemplo.

1. $\mathbb{R}^+ \curvearrowright \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $(t, x) \mapsto tx$ es continua! Luego, cociente $(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})/\mathbb{R}^+ \approx \mathbb{S}^{n-1} := \{z \in \mathbb{R}^n \mid |z| = 1\}$ n-esfera! (el $\approx$ es de homeomorfo)

2. $\mathbb{R} \setminus \{0\} \curvearrowright \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $(t, x) \mapsto tx$. Luego, cociente es el espacio proyectivo $\mathbb{R}P^{n-1}$.

3. Γ grupo topológico arbitrario, $H < \Gamma$ subgrupo (no necesariamente normal). Entonces, hay dos acciones topológicas $H \curvearrowright \Gamma$

   i) $(h, g) \mapsto hg$.

   ii) $(h, g) \mapsto hgh^{-1}$.

   Continuo porque $(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2$ y $g \mapsto g^{-1}$ continuo en Γ. Estas acciones son distintas: (i) $H \cdot 1 = H$, (ii) $H \cdot 1 = \{1\}$.

Convención. $\Gamma/H =$ espacio de órbitas de $H \curvearrowright \Gamma$, $h \cdot g = hg$.

3*. $(GL_n(\mathbb{R}) > SL_n(\mathbb{R}) >)$ $SO(n) := \{A \in SL_n(\mathbb{R}) \mid A^t A = \mathbb{1}\}$ grupo ortogonal especial. Notar que $SL_2(\mathbb{R})/SO(2) \approx \mathbb{R}^2$ plano hiperbólico ($n \geq 3$: espacios simétricos de tipo no compacto.

Observación. $SO(n) < SL_n(\mathbb{R})$ es cerrado.

Criterio para X/Γ Hausdorff

Proposición 1.57. $\Gamma \curvearrowright X$ continua si

$$\Delta = \{(x, g \cdot x) \mid x \in X,\ g \in \Gamma\} \subset X \times X$$

es cerrado en $X \times X$, entonces X/Γ Hausdorff.

Ejemplo. Γ grupo topológico arbitrario, $H < \Gamma$ subgrupo (no necesariamente normal). Si $H \subset \Gamma$ es cerrado, entonces Γ/H es Hausdorff.

Demostración (ejemplo). Queremos

$$\Delta = \{(g, \underbrace{hg}_{g'}) \mid g \in \Gamma, h \in H\} \subset \Gamma \times \Gamma$$

Luego, $\Delta = \{(g, g') \mid g' g^{-1} \in H\}$. Si llamamos $f(g, g') = g' g^{-1}$, entonces $f : \Gamma \times \Gamma \to \Gamma$ continua. Luego

$$\Delta = \{(g, g') \mid f(g, g') \in H\} = f^{-1}(H)$$

Por lo tanto, Δ es cerrado si H es cerrado. Así, podemos aplicar la proposición. $\square$

Lema 1.58. $\Gamma \curvearrowright X$ acción continua ($p : X \to X/\Gamma$). Entonces, p es función abierta; i.e. si $U \subset X$ abierto $\Rightarrow p(U)$ abierto en X/Γ.

Demostración (lema). $U \subset X$ abierto (queremos $p(U) \subset X/\Gamma$ abierto).

Luego, $p(U) \subset X/\Gamma$ abierto $\leftrightarrow p^{-1}(p(U)) \subset X$ abierto.

$$
\begin{aligned}
p^{-1}(p(U)) &= \{x \in X \mid p(x) \in p(U)\} \\
&= \{x \in X \mid g \cdot x \in U \text{ para algún } g \in \Gamma\} \\
&= \{x \in X \mid x \in g^{-1} \cdot U \text{ para } g \in \Gamma\}, \quad (g \cdot U = \{g \cdot y \mid y \in U\}) \\
&= \underbrace{\bigcup_{g \in \Gamma} \underbrace{g^{-1} \cdot U}_{\text{abiertos.}}}_{\text{abierto!}} := \Gamma \cdot U.
\end{aligned}
$$

□

Demostración (proposición). Queremos $p(x) \neq p(y)$ en $X/\Gamma \Rightarrow \exists \hat{U}, \hat{U}' \subset X/\Gamma$ abiertos disjuntos tal que $p(x) \in \hat{U},\ p(y) \in \hat{U}'$. En efecto, asumamos que $\Delta \subset X \times X$ cerrado. Notar que $p(x) \neq p(y) \Rightarrow (x, y) \in X \times X \setminus \Delta$ abierto! Por la definición de topología producto, $\exists U, U' \subset X$ abiertos tal que $(x, y) \in U \times U' \times X \times X \setminus \Delta$ (donde $U \times U'$ es un elemento de la base). Por el lema, $p(x) \in p(U) := \hat{U},\ p(y) \in p(U') := \hat{U}'$, abiertos en X/Γ. Solo falta verificar que $p(U), p(U)$ disjuntos: (usar que $U \times U' \cap \Delta = \varnothing$) Si $z \in p(U) \cap p(U') \Rightarrow z = p(u) = p(u'),\ u \in U,\ u' \in U' \Rightarrow u' = g \cdot u,\ g \in \Gamma \Rightarrow (u, u') \in U \times U' \cap \Delta$, lo que es una contradicción! □

Clase 15

8 de Septiembre

1.13 Conexidad (23, 24)

Recuerdo (TVI). $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Si $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, entonces $f(c) = 0$ para algún $c \in [a, b]$.

Conexidad. Es una condición topológica en X tal que $f : X \to \mathbb{R}$ cumple versión esperable del TVI!

Definición 1.59 (separación y conexidad). X espacio topológico.

i. Una separación de X es $X = U \cup V$, con $U, V \subset X$ abiertos disjuntos, no vacíos;

ii. X es conexo si no tiene separación. Equivalentemente, $X = U \cup V,\ U, V \subset X$ abiertos disjuntos, entonces $\varnothing \in \{U, V\}$.

Ejemplo (i.). $X = [0, 1] \cup [2, 3] \cup \{5\} \rightsquigarrow U = [0, 1],\ V = [2, 3] \cup \{5\}$ es separación.

Ejemplo (ii.). $[0, 1]$ es conexo!!! (Magia del axioma del supremo)

Observación. $X = U \cup V$ separación $\longleftrightarrow U \neq \varnothing$ clopen (abierto + cerrado) y $X \setminus U \neq \varnothing$.

Lema 1.60. X espacio topológico. X conexo $\longleftrightarrow \forall f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) > 0,\ f(y) < 0$ para algún $x, y \in X \Rightarrow f(z) = 0$ para algún $z \in X$.

Propiedad ganadora. Si $f : X \to Y$ continua. X conexo $\Rightarrow f(X)$ conexo (respecto a la topología inducida).

Corolario 1.61. Si $p : X \to A$ mapa cociente, X conexo $\Rightarrow A$ conexo.

Corolario 1.62. X, Y espacios homeomorfos. X conexo $\longleftrightarrow Y$ conexo.

Demostración (propiedad ganadora)**.** Quremos $f(X)$ conexo (no hay separación). Suponer que $f(X) = U \cup V$ separación ($U, V \subset f(X)$ abiertos, disjuntos y no vacíos). Luego, $X = f^{-1}(f(X)) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$ separación. Pero esto es una contradicción, pues X es conexo! $\square$

Nota. Se utilizó que la preimagen de abierto es abierto y que siguien siendo disjuntos los abiertos bajo la preimagen.

Lema 1.63. $Y \subset X$ espacios topológicos. Y conexo $\longleftrightarrow \forall A, B \subset X$ abiertos tales que:

i. $Y \subset A \cup B$;

ii. $Y \cap A \cap B = \varnothing$;

$\Rightarrow Y \subset A$ ó $Y \subset B$.

Criterio 1.64 (Conexidad)**.** $(Y_\alpha)_{\alpha \in J}$ familia de subespacioes de X tal que:

1. Cada Y_α conexo;
2. $\bigcap_{\alpha \in J} Y_\alpha \neq \varnothing$;

$\Rightarrow Z = \bigcup_{\alpha \in J} Y_\alpha$ conexo.

Observación. $\bigcap_{\alpha \in J} Y_\alpha$ no necesariamente conexa si cada Y_α conexo.

Ejemplo.

1. $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$ conexo. En efecto, si $v \in \mathbb{S}^{n-1} \rightsquigarrow Y_v = \{tv + (1-t)(-v) \mid t \in [0,1]\} \approx [0,1]$. Por lo tanto, cada Y_v es conexo. Luego, $0 \in Y_v, \quad \forall v \in \mathbb{S}^{n-1} \Rightarrow B = \bigcup_{v \in \mathbb{S}^{n-1}} Y_v$ conexo;
2. $\mathbb{R}$ es conexo. $\mathbb{R} = \bigcup_{\varepsilon > 0} [-\varepsilon, \varepsilon],\ 0 \in [-\varepsilon, \varepsilon] \quad \forall \varepsilon < 0$;
3. $\mathbb{S}^{n-1}$ conexo si $n \geq 2$ ($\mathbb{S}^0 = \{-1, 1\}$ no conexo (disconexo)). Para $n = 2$, recordar que $[0,1]/\sim \to \mathbb{S}^1$ homeomorfismo. Por lo tanto, $\mathbb{S}^1$ conexo. Para n arbitrario, sean $X = [0,1]^n,\ Y = \partial X \rightsquigarrow X/Y \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^n$ homeomorfismo. Otra forma: sea $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{S}^{n-1}$ tal que $v \mapsto \frac{v}{|v|}$ continua y sobre. Luego, es suficiente probar que $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ conexo si $n \geq 2$.

Clase 16

10 de Septiembre

1.14 Arcoconexidad (23, 24)

Demostración (criterio conexidad clase pasada)**.** Sean $A, B \subset X$ abiertos con $Z \subset A \cup B$. Queremos $Z \subset A$ o $Z \subset B$. Fijando $\alpha_0 \in J$, se tiene $X_{\alpha_0} \subset A \cup B$. Dado que X_{α_0} es conexo, podemos suponer que $X_{\alpha_0} \subset A$. Tomar $\alpha \in J$, $\alpha \neq \alpha_0$, queremos $X_\alpha \subset A$, y si no pasa, $X_\alpha \subset B$. En efecto, como X_α, $X_{\alpha_0} \subset Z$, $Z \cap A \cap B = \varnothing$, entonces $X_\alpha \cap X_{\alpha_0} = \varnothing$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $X_\alpha \subset A \quad \forall \alpha$. Luego, $Z \subset A$. □

Lema 1.65. Si X, Y conexos, entonces $X \times Y$ conexo.

Observar. Si $X \times Y$ conexo, entonces $X = \prod_X (X \times Y)$ conexo.

Observar. Si X_α conexo, entonces $\prod_\alpha X_\alpha$ conexo con la topología producto (tarea 3).

Demostración (lema)**.** Dado $(x, y) \in X \times Y$, definimos $T_{(x,y)} = \{x\} \times Y \cup X \times \{y\}$. Si X, Y conexos, entonces $T_{(x,y)}$ conexo $\forall (x, y) \in X \times Y$. Notar que $T_{(a,y)} \cap T_{(x,y)} \neq \varnothing \quad \forall a, x \in X$. Por el criterio, tenemos que $\bigcup_{x \in X} T_{(x,y)}$ conexo para cada y fijo, pero $\bigcup_{x \in X} T_{(x,y)} = X \times Y$. □

1.14.1 Arcoconexidad (conexidad por caminos)

Definición 1.66 (curva)**.** X espacio topológico es arcoconexo si $\forall x, y \in X$, existe una función continua $\alpha : [0, 1] \to X$ tal que $\alpha(0) = x$, $\alpha(1) = y$. Llamaremos <u>curva</u> con extremos $\alpha(0)$ y $\alpha(1)$ a α.

Ejemplo.

- $[0, 1]$ arcoconexo
- $\mathbb{S}^{n-1}$, $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ arcoconexo si $n \geq 2$.

Proposición 1.67. Si X arcoconexo, entonces X conexo.

Demostración. Sea X arcoconexo. Procedemos por contradicción. Supongamos que X no es conexo. Entonces, existe separación $X = U \sqcup V$, con U, V abiertos no vacíos. Tomamos $x \in U$, $y \in V$. Luego, existe una curva $\alpha : [0, 1] \to X$ tal que $0 \mapsto x$ y $1 \mapsto y$. Tomar $g : X \to \{-1, 1\} \subset \mathbb{R}$ tal que

$$g(w) = \begin{cases} -1, & w \in U \\ 1, & w \in V \end{cases}$$

es continua. Entonces $f = g \circ \alpha : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continua tal que $f(0) =$

-1, $f(1) = 1$, pero no existe $c \in [0,1]$ con $f(c) = 0$, lo que contradice el TVI! $\square$

Clase 17

12 de Septiembre

1.15 (Arco)conexidad local, Componentes (25)

Observar. Conexidad $\not\Rightarrow$ Arcoconexidad.

Ejemplo. $Y = \{(t, \sin(\frac{1}{t}) \mid t > 0\} \subset \mathbb{R}^2$ arcoconexo. $X = \overline{Y}$ conexo! Pero no es arcoconexo!

Lema 1.68. $Y \subset A$ espacios topológicos tal que $Y \subset X \subset \overline{Y}$. Si Y es conexo $\Rightarrow X$ conexo.

Nota. El A es simplemente porque Y tiene que estar dentro de un espacio para poder tomar su clausura.

Componentes

Definición 1.69 (componentes conexa y arcoconexa)**.** Sea X espacio topológico, $C \subset X$ es componente conexa (resp. arcoconexa) si:

1. C es conexo (resp. arcoconexo);
2. C es maximal respecto a (1): Si C' es (arco)conexo y $C \subset C' \Rightarrow C = C'$.

Observar.

1. Componentes existen: Si $x \in X$
$$C_x := \bigcup \{C \subset X \mid C \text{ conexo}, x \in C\}$$
(C_x componente de x en X). Esto es conexo (criterio) y maximal.
2. Lo mismo vale para arcoconexidad (Existe versión del criterio).
3. Componentes conexas forman una partición de X. Si $C_x \neq C_y \Rightarrow C_x \cap C_y = \varnothing$. En efecto, si $C_x \cap C_y \neq \varnothing$, $C_x \neq C_y \Rightarrow C_x \cup C_y$ es conexo aún más grande.
4. Si $C \subset X$ componente conexa $\Rightarrow C$ es cerrado $\Rightarrow C = \overline{C}$ ($\overline{C}$ conexo + C conexo maximal) (esto es falso si se reemplaza por componente arcoconexa).

Ejemplo.

1. X es (arco)conexo si X es componente (arco)conexa;
2. En $X = \mathbb{Q}$ con topología inducida de $\mathbb{R}$, componentes son los singleton. En particular, notar que componentes no son abiertas;

3. $X = [0,1] \cup (2,3) \cup \{4\}$ (y es claro que $[0,1]$, $(2,3)$ y $\{4\}$ son componentes) (aquí componentes son abiertas);
4. Subconjuntos conexos de $\mathbb{R}$
   - $[a,b],\ (a,b],\ [a,b),\ (a,b) \qquad a < b$;
   - $(-\infty,a),\ (-\infty,a],\ (b,\infty),\ [b,\infty)$;
   - $\mathbb{R}$;
   - $\{x\}$.

   (todos arcoconexos!!!)
5. $X = \overline{Y} \subset \mathbb{R}^2$. Componentes conexas de X: es sólo X. Componentes arcoconexas de X: Y, $\{0\} \times [-1,1]$.

Definición 1.70 (localmente (arco)conexo)**.** X espacio topológico es localmente (arco)conexo si $\forall x \in X$, para todo abierto $U \subset X$ tal que $x \in U$, va a existir $V \subset U$ abierto (arco)conexo con $x \in V$.

Criterio 1.71. X localmente (arco)conexo si y sólo si $\forall U \subset X$ abierto, componentes (arco)conexas de U (respecto a la topología inducida) son abiertos en X.

Corolario 1.72.

1. Si X es localmente arcoconexo, componentes conexas son igual a componentes arcoconexas y viceversa;
2. X localmente arcoconexo y conexo $\Rightarrow$ X es arcoconexo.

Clase 18

22 de Septiembre

1.16 Compacidad (26)

Moral. Los conjuntos compactos se comportan como conjuntos finitos.

Definición 1.73 (cubrimientos)**.** Sean X espacio topológico y $C \subset X$.

1. Un cubriente de C (por subconjuntos de X) es un conjunto de subconjuntos de X tal que su unión contiene a C. Si $\mathcal{A}$ es cubriente, se pide $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \supset C$.
2. Si cada elemento de $\mathcal{A}$ es abierto en X decimos que $\mathcal{A}$ es cubrimiento de C por abiertos de X.
3. Si $C = X$, simplemente decimos que $\mathcal{A}$ es cubriente (abierto) de X.

Ejemplo. $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{A}_1 = \{(-n,n) \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ es cubriente abierto y $\mathcal{A}_2 = \{(n,n+2) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ es cubriente abierto.

Ejemplo. Toda base de X es cubriente abierto.

Definición 1.74 (compacidad)**.** X espacio topológico es compacto si para cada cubriente abierto $\mathcal{A}$ existe un subconjunto $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ que también es cubriente (decimos que $\mathcal{A}'$ es subcubriente) y tal que $\mathcal{A}'$ es finito.

Ejemplo. $\mathbb{R}$ no es compacto!

Ejemplo (Axioma)**.** $[0,1]$ es compacto!!! (Notar que $\forall f : [0,1] \to \mathbb{R},\ f([0,1])$ alcanza su supremo)

Ejemplo. Todo conjunto finito es compacto (todo cubriente es finito)

Criterio 1.75. Si X espacio topológico, $C \subset X$. C es compacto (con topología inducida) $\Leftrightarrow$ para todo cubriente $\mathcal{A}$ de C por abiertos de X, $\mathcal{A}$ tiene un subconjunto dinito cuya unión contiene a C.

Propiedad 1.76 (ganadora)**.** Si X compacto y $f : X \to Y$ continua, entonces $f(X)$ compacto.

Corolario 1.77. $P : X \to A$ mapa cociente, X compacto. Entonces, A es compacto.

Ejemplo. $\mathbb{S}^1$ es compacto (homeomorfo a $[0,1]/\sim$, con $0 \sim 1$)

Demostración (propiedad ganadora)**.** Tomamos $\mathcal{A}$ cubriente de $f(X)$ por abiertos de Y (i.e. $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A \supset f(X)$.) Queremos encontrar $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ finito con $\bigcup_{A\in\mathcal{A}'} A \supset f(X)$. Definimos $\mathcal{B} = \{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$ esto es un conjunto de abiertos de X. De hecho, $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} f^{-1}(A) = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B = X$ (porque $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A \subset f(X)$). Por lo tanto $\mathcal{B}$ es cubriente abierto de X. Luego, X compacto implica que existe subconjunto finito $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$.

$$\mathcal{B}' = \{f^{-1}(A_1), \dots, f^{-1}(A_n)\}$$

con $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$. Luego, como $\mathcal{B}'$ cubriente, entonces $X = f^{-1}(A_1) \cup \dots \cup f^{-1}(A_n)$. Entonces

$$f(X) = f(f^{-1}(A_1)) \cup \dots \cup f(f^{-1}(A_n)) \subset A \cup \dots \cup A_n.$$

Por lo tanto, $\mathcal{A}' = \{A_1, \dots, A_n\}$ subcubriente finito de $\mathcal{A}$. $\square$

Ejemplo. $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ es compacto. En efecto, si $\mathcal{A}$ es cubriente de X por abiertos de $\mathbb{R}$, entonces existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $0 \in A$. Esto implica que $\exists \varepsilon > 0$ tal que $0 \in (-\varepsilon, \varepsilon) \subset A$. Luego, si $N > \frac{1}{\varepsilon}$, entonces $\frac{1}{n} \in (-\varepsilon, \varepsilon) \subset A\ \forall n \geq N$. Entonces, A contiene todo salvo finitos puntos $x_1, \dots, x_m$ de X. Luego, existen $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ con $x_i \in A_i$. Con esto, $\mathcal{A}' = \{A_1, \dots, A_n\}$ es subconjunto finito.

Proposición 1.78. X compacto, $C \subset X$ cerrado, entonces C compacto.

Ejemplo. El conjunto de Cantor es compacto! En efecto, $\mathcal{C} = \bigcap_{n \geq 1} E_n$, con cada E_n cerrado. Por lo tanto $\mathcal{C}$ es cerrado en $[0,1]$. Entonces, $\mathcal{C}$ es compacto!

Clase 19

24 de Septiembre

Proposición 1.79. Subespacios cerrados de espacios compactos son compactos.

Demostración. Sean X espacio topológico compacto y $A \subset X$ cerrado. Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una cubierta de A. Entonces, por definición de subespacio, existe $V_\alpha \subset X$ abierto tal que $V_\alpha \cap A = U_\alpha$. Como A es cerrado, $X \setminus A$ es abierto. Luego, $\{X \setminus A,\ \{V_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}\}$ es una cubierta abierta de X. Entonces existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ tal que

$$X \setminus A \cup V_{\alpha_1} \cup \cdots \cup V_{\alpha_r} = X$$

Luego, intersectando con A,

$$U_{\alpha_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_r} = A \qquad \square$$

Proposición 1.80. Sean X, Y espacios topológicos. $X \times Y$ es compacto si y sólo si X e Y son compactos.

Demostración. $\boxed{\Rightarrow}$ Ejercicio.

$\boxed{\Leftarrow}$ X, Y compactos. Queremos demostrar que $X \times Y$ compacto. Sea $\{W_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ cubierta abierta de $X \times Y$.

Paso 1. $\forall (x,y) \in X \times Y$, $\exists \alpha(x,y) \in \Lambda$ y $(x,y) \in W_{\alpha(x,y)}$. Entonces, existe una caja $(x,y) \in U_{(x,y)} \times V_{(x,y)} \subset W_{\alpha(x,y)}$.

Paso 2. $\forall x \in X$, $\{V_{(x,y)}\}_{y \in Y}$ es una cubierta de Y. Por compacidad de Y, existen $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_r(x) \in Y$ tales que

$$V_{(x,y_1(x))} \cup \cdots \cup V_{(x,y_r(x))} = Y,$$
$$U_{(x,y_1(x))} \cap \cdots \cup U_{(x,y_r(x))} \coloneqq U_x,$$

donde U_x es abierto en X.

Paso 3. Como X es compacto, existen $x_1, \ldots, x_n$ tal que

$$U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n} = X.$$

Por construcción, $\{W_{\lambda(x_i, y_j(x_i))}\}$ tal que $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq r_i$ es subcubierta abierta finita de $\{W_\alpha\}$. Entonces, $X \times Y$ es compacto. $\square$

Corolario 1.81. $X_1 \times \cdots \times X_n$ es compacto si y sólo si X_i es compacto $\forall i = 1, \ldots, n$.

Teorema 1.82 (Tychonoff)**.** $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ es compacto (con topología producto) si y sólo si X_λ es compacto $\forall \lambda$.

Lema 1.83 (útil)**.** Sean X espacio Hausdorff y $A \subset X$ subespacio compacto. Entonces, A es cerrado.

Demostración. Queremos demostrar que $X \setminus A$ es abierto. Sea $x \in X \setminus A$ y $p \in A$. Como X es Hausdorff, existen U_p abierto en X, $x \in U_p$, y V_p abierto en X, $p \in V_p$, tal que $U_p \cap V_p = \varnothing$. Entonces $\{V_p \cap A\}_{p \in A}$ es cubierta abierta de A. Luego, por la compacidad de A, $\exists p_1, \ldots, p_r$ tal que

$$(V_{p_1} \cap A) \cup \cdots \cup (V_{p_r} \cap A) = A$$

Entonces,

$$U = U_{p_1} \cap \cdots \cap U_{p_r}$$

es abierto tal que $x \in U$ y $U \cap A = \varnothing$. □

Corolario 1.84. i. $a \in \mathbb{R}_+$, $I_a \coloneqq [-a, a]$ es compacto. $I_a^n = I_a \times \cdots \times I_a$ es compacto (prop 1.70);

ii. $X \subset \mathbb{R}^n$ cerrado y acotado. Entonces, X es compacto;

iii. $X \subset \mathbb{R}^n$ compacto. Entonces, X es cerrado y acotado.

Demostración. (ii) Al ser acotado, entonces $\exists a$ tal que $X \subset I_a^n \subset \mathbb{R}^n$. Como X es cerrado e I_a^n es compacto, entonces X es compacto.

(iii) $\mathbb{R}^n$ Hausdorff, implica X cerrado por ser compacto (lema útil). Para ver acotado, notamos que $\| \cdot \| : X \to \mathbb{R}$ es continua. Entonces, es localmente acotada y, por compacidad, es acotada.

□

Observación.

- (ii) y (iii) es el Teorema de Heine-Borel.
- (iii) es un argumento "local $\to$ global"

Ejemplo. $O(n) = \{A \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid A^T A = \mathrm{Id}\}$. $O(n) \subset \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ es cerrado y acotado, y por lo tanto, compacto.

Clase 20

26 de Septiembre

Ejemplo (en línea con el último ejemplo de la clase pasada)**.** $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ compacto.

Ejemplo. X discreto y compacto, entonces X es finito.

Demostración. Sea $\{\{x\}\}_{x\in X}$ cubierta abierta de X. Luego, $\exists\{x_1\},\ldots,\{x_r\}$ tal que $X=\bigcup_{i=1}^{r}\{x_i\}$. Entonces, X es finito. $\square$

Aplicación de Compacidad a homeomorfismos

Contexto.

- Álgebra lineal: Sea $f:X\to Y$ biyección lineal, entonces f^{-1} es lineal.
- Grupos, Anillos: $f:X\to Y$ homomorfismo biyectivo, entonces f^{-1} es homomorfismo.
- ¿Espacios Topológicos: $f:X\to Y$ biyección continua, entonces f^{-1} es continua? ¡NO! Por ejemplo, si $X\neq\varnothing$, X^{δ} con topología discreta, X^{i} con topología indiscreta. Entonces, $X^{\delta}\xrightarrow{\text{id}}X^{i}$ es continua biyectiva pero id^{-1} no es continua. Otro ejemplo es $f:[0,1)\to S^1=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=1\}$ tal que $t\mapsto e^{2\pi it}$. f biyección continua, pero f^{-1} no es continua porque $[0,1)$ no es compacto y S^1 sí.

Teorema 1.85. X compacto, Y Hausdorff, $f:X\to Y$ biyección continua. Entonces, f es homeomorfismo.

Demostración. Queremos ver que f^{-1} es continua. Basta con ver que f es una función cerrada. En efecto, $A\subset X$ cerrado implica que A es compacto (por prop. 1 clase pasada). Luego, $f(A)\subset Y$ compacto (por continuidad). Entonces, $f(A)$ es cerrado (por prop. 2 clase pasada). $\square$

Ejemplo. $f:[0,1]\to S^1$, $f(t)=e^{2\pi it}$. $\overline{f}[t]=e^{2\pi it}$ es biyección continua. $[0,1]/(0\sim 1)$ es compacto, S^1 es Hausdorff. Entonces, $\overline{f}$ es homeomorfismo. (ver foto)

Ejemplo. Existen funciones continuas sobreyectivas $[0,1]\to[0,1]\times[0,1]$. Estas curvas (de Peano) (o curvas que cubren) no pueden ser inyectivas porque de lo contrario, $[0,1]$ sería homeomorfo a $[0,1]\times[0,1]$, pero esto es imposible (se puede ver por un argumento por conexidad).

Ejemplo. Pensar en $O(2)$ como subgrupo de $O(3)$, mediante el homomorfismo inyectivo $O(2)\overset{O}{\hookrightarrow}(3)$ tal que $A\mapsto$ (hacer la matriz).

- $O(3)/O(2)=$ clases laterales izquierdas.

La sobreyección $O(3)\twoheadrightarrow O(3)/O(2)$ tal que $A\mapsto A\cdot O(2)$, hace de $O(3)/O(2)$ en un espacio cociente. Como $O(3)$ es compacto, entonces $O(3)/O(2)$ es compacto. ¿Quién es $O(3)/O(2)$?

$$f:O(3)\to S^2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x^2+y^2+z^2=1\}$$

f es continua: es restricción de $\text{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})\to\mathbb{R}^3$ (la proyección es continua, por lo que es restricción de continua). Notar que si $A\in O(3)$, $B\in O(2)$, $f(AB)=f(A)$. Entonces, f "desciende" al cociente. $\overline{f}:O(3)/O(2)\to S^2$ tal que $A\cdot O(2)\mapsto f(A)$.

- $\overline{f}$ es sobre por Gram-Schmidt.
- $\overline{f}$ es inyectiva: $\overline{f}(A \cdot O(2)) = \overline{f}(B \cdot O(2))$.
- Por el teorema, $\overline{f} : O(3)/O(2) \to S^2$ es homeromorfismo.
- En general, $O(n)/O(n-1) \cong S^{n-1}$

Ejemplo (pensar)**.**

1. $\mathbb{R}P^1 \cong S^1$;
2. $\mathbb{R}P^n \cong S^n/(\vec{x} \sim -\vec{x})$;
3. $\mathbb{R}P^3 \cong SO(3)$;
4. $S^3 \cong SU(2)$;
5. $D^n/\partial D^n \cong S^n$.

Clase 21

29 de Septiembre

1.17 Espacios localmente compactos y compactificación por un punto

El ejemplo clave: La esfera de Riemann.

Recordar (Proyección estereográfica)**.** $\pi : S^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{C}$ (donde N es el polo norte) es un homeomorfismo (ejercicio).

Pregunta. ¿Cómo extender π a S^2?

Idea. Agregamos un "punto al infinito a $\mathbb{C}$

$$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Declaramos $\pi(N) = \infty$.

Pregunta. ¿Qué topología le damos a $\hat{\mathbb{C}}$ de modo que $\pi : S^2 \to \hat{\mathbb{C}}$ sea un homeomorfismo?

i. Como $\pi : S^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{C}$ es homeomorfism. Los abiertos de $\mathbb{C}$ deben ser abiertos de $\hat{\mathbb{C}}$.

ii. $\hat{\mathbb{C}} \setminus K$ $(= \mathbb{C} \setminus K \cup \{\infty\})$ con K compacto en $\mathbb{C}$.

Proposición 1.86. Los subconjuntos de $\hat{\mathbb{C}}$ de la forma:

- U abierto en $\mathbb{C}$, ó
- $\hat{\mathbb{C}} \setminus K$ con K compacto en $\mathbb{C}$.

forman una topología para $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Con esta topología $\hat{\mathbb{C}}$ es compacto, Hausdorff y contiene a $\mathbb{C}$ como subsepacio.

Demostración. Veamos que es topología:

1. $\hat{\mathbb{C}} = \hat{\mathbb{C}} \setminus \varnothing$ y $\varnothing$ es abierto en $\mathbb{C}$
2. $\bigcap$ cerrados: Vamos por casos
   - U_1, U_2 abiertos $\mathbb{C}$, $U_1 \cap U_2$ abierto en $\mathbb{C}$;
   - U_1 abierto en $\mathbb{C}$, $U_2 = \hat{\mathbb{C}} \setminus K$, K compacto en $\mathbb{C}$, entonces $U_1 \cap U_2 = U_1 \setminus K$ y K es compacto;
   - $(\hat{\mathbb{C}} \setminus K_1) \cap (\hat{\mathbb{C}} \setminus K_2) = \hat{\mathbb{C}} \setminus K_1 \cup K_2$ y $K_1 \cup K_2$ es compacto.
3. $\bigcup$ abiertos: $U = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha$ unión de abiertos en $\hat{\mathbb{C}}$. Notemos que:
   - Si todos los U_α son abiertos en $\mathbb{C}$, U es abierto en $\mathbb{C}$;
   - Si hay al menos un $U_\beta = \hat{\mathbb{C}} \setminus K$, $K \subset \mathbb{C}$ compacto. Entonces, $\hat{\mathbb{C}} \setminus U = \bigcap_\alpha (\mathbb{C} \setminus U_\alpha) = K \cap (\bigcap_{\alpha\neq\beta}(\mathbb{C} \setminus U_\alpha))$ es cerrado en K. Luego, $\hat{\mathbb{C}} \setminus U$ es compacto. Así, $\hat{\mathbb{C}} \setminus (\hat{\mathbb{C}} \setminus U) = U$ es abierto en $\hat{\mathbb{C}}$.

Para ver Hausdorff: Sea $z \in \mathbb{C}$. Veamos que existen abiertos disjuntos U y V en $\hat{\mathbb{C}}$ con $z \in U$, $\infty \in V$. Sea $U = B_\varepsilon(z)$ y $V = \hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{B_\varepsilon(z)}$. Entonces, U y V satisfacen $U \cap V = \varnothing$, $z \in U$ e $\infty \in V$.

Para ver compacidad: $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ cubierta de $\hat{\mathbb{C}}$. Luego, $\infty \in U_\beta$ para algún $\beta \in \Lambda$. Así, $\hat{\mathbb{C}} \setminus U_\beta$ es compacto en $\mathbb{C}$. Entonces, existen finitos $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ tal que

$$U_1 \cup \cdots \cup U_{\alpha_r} = \hat{\mathbb{C}} \setminus U_\beta$$

Y entonces, $\{U_1, \ldots, U_{\alpha_r}, U_\beta\}$ es cubierta abierta de $\hat{\mathbb{C}}$. □

Definición 1.87 (localmente compacto)**.** Un espacio topológico X es localmente compacto si $\forall x \in X$ y todo abierto U que contiene a x, existe abierto V tal que $x \in V \subset \overline{V} \subset U$ y $\overline{V}$ compacto (i.e. V es precompacto).

Ejemplo.

1. $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^n, \mathbb{N}, \mathbb{Z}$ son localmente compactos;
2. Compactos + Hausdorff son localmente compactos;
3. $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ no es localmente compacto;
4. $\{0\} \cup H = \{z \in \mathbb{C} \ : \ \Im(z) > 0\}$ no localmente compacto.

Teorema 1.88. Sea X un espacio Hausdorff localmente compacto. Escribimos $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$, $\infty \notin X$. Definimos abiertos en $\hat{X}$ como, o un abierto de X, o un $\hat{X} \setminus K$ con K compacto en X. Entonces, esto define una topología para $\hat{X}$ con la cual es Hausdorff y compacto. Además, contiene a X como subespacio.

Definición 1.89 (compactificación por un punto). X Hausdorff y localmente compacto. $\hat{X}$ se llama la compactificación de X por un punto (o de Alexandrov).

Teorema 1.90. $f : X \to Y$ es un homeomorfismo entre espacios Hausdorff y localmente compactos, entonces $\hat{f} : \hat{X} \to \hat{Y}$, dada por $\hat{f}(x) = f(x)$ si $x \in X$ y $\hat{f}(\infty_X) = \infty_Y$, es un homeomorfismo

Ejemplo.

1. $\widehat{\mathbb{R}} \cong S^1$;
2. $\widehat{\mathbb{R}^n} \cong S^n$;
3. $(\widehat{S^1 \subset \mathbb{R}}) \cong S^1 \vee S^2$;
4. X compacto, entonces en $\widehat{X} = X \cup \{\infty\}$, X y $\{\infty\}$ son clopens;
5. $\widehat{\mathbb{N}} \cong \left\{\frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\} \subset \mathbb{R}$ (y $\mathbb{N}$ con la topología discreta).

Clase 22

1 de Octubre

1.18 Compacidad secuencial (28), Teorema de Tychonoff (37)

Vimos

Teorema 1.91 (Tychonoff). $(X_\alpha)_{\alpha \in J}$ familia indexada de espacios compactos. Entonces, $Z = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ es compacto (con la topología producto).

Definición 1.92 (compactificación de un punto). X localmente compacto Hausdorff $\rightsquigarrow \hat{X} = X \cup \{\infty\}$

- $\hat{X}$ compacto tal que $X \hookrightarrow \hat{X}$ es continua;
- Si X no es compacto $\Rightarrow X$ es denso en $\hat{X}$.

1.18.1 Compacidad Secuencial

Definición 1.93 (espacio secuencialmente compacto). X espacio topológico es secuencialmente compacto si cada sucesión $(x_n)_n$ en X tiene subsucesión convergente.

Teorema 1.94. X espacio métrico con topología métrica. X compacto $\Leftrightarrow X$ secuencialmente compacto.

Observación. En general, compacidad $\not\Rightarrow$ compacidad secuencial. Similiarmente, compacidad secuencial $\not\Rightarrow$ compacidad.

Ejemplo (Compacto, no secuencialmente compacto). $X = [0,1]^{[0,1]} = \{\text{funciones } x : [0,1] \to [0,1]\}$. El $[0,1]^{[0,1]}$ con la topología producto. Es compacto por Tychonoff. No es secuencialmente compacto. En efecto, considerar la siguiente construcción de la sucesión $(x_n)_n$ sin subsucesion convergente. $(x_n(\alpha))_{\alpha\in[0,1]}$ tal que $x_n(\alpha) = n$-ésimo valor en expansión binaria de α; $\alpha = 0.b_1b_2\ldots b_n\ldots$; $x_n(\alpha) = b_n$ sin subsucesion convergente.

Ejemplo (Secuencialmente compacto, no compacto). $X = \omega_1 \times [0,1)$, ω_1 primer ordinal incontable con topología del orden lexicográfico (diccionario).

Preliminar (a Tychonoff): (propiedad de intersección finita (PIF))

Definición 1.95 (PIF). X espacio topológico, $\mathcal{C}$ colección de subconjuntos de X. $\mathcal{C}$ tiene la propiedad de intersección finita si

$$C_1,\ldots,C_n \in \mathcal{C} \Rightarrow C_1 \cap \cdots \cap C_n \neq \varnothing.$$

Ejemplo. Si $\bigcap_{C\in\mathcal{C}} C \neq \varnothing \Rightarrow \mathcal{C}$ tiene PIF.

Lema 1.96. X espacio topológico. X compacto $\leftrightarrow$ si $\mathcal{C}$ colección arbitraria de cerrados de X con PIF $\Rightarrow \bigcap_{C\in\mathcal{C}} C \neq \varnothing$.

Ejemplo. Si $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots\}$ tal que

- Cada C_n cerrado no vacío,
- $C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \cdots \supset C_n$,

entonces tiene PIF. Si X es compacto, el lema implica que $\bigcap_{n\geq 1} C_n$ es no vacía.

Clase 23

3 de Octubre

1.19 Teorema de Tychonoff (37)

Demostración (lema clase anterior). $\boxed{\rightarrow}$ Sea $\mathcal{C}$ colección arbitraria de cerrados en X con PIF. Queremos $\bigcap \mathcal{C} := \bigcap_{C\in\mathcal{C}} C \neq \varnothing$. Sea $\mathcal{A} = \{X \backslash C \mid C \in \mathcal{C}\}$ colección de abiertos. Si $\bigcap \mathcal{C} = \varnothing$, entonces $\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A = \bigcup_{C\in\mathcal{C}} (X \setminus C) = (\bigcap_{C\in\mathcal{C}} C)^c = X$. Es decir, $\mathcal{A}$ cubriente abierto de X. Como X es compacto, etnonces existen $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ con $A_1 \cup \cdots \cup A_n = X$. Luego, existen $C_1, \ldots, C_n = \varnothing$ $(C_i = X \setminus A_i)$ con $C_1 \cap \cdots \cap C_n = \varnothing$. Pero esto contradice que $\mathcal{C}$ tenga la PIF.

$\boxed{\leftarrow}$ Análogo. □

1.19.1 Demostración Tychonoff

Teorema 1.97 (Tychonoff). $Z = \prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ producto arbitrario de espacios compactos. Entonces Z compacto.

Fijamos $\mathcal{C}$ colección arbitraria de cerrados en X con PIF.

Objetivo 1: Encontrar x en Z tal que $x \in C$ para cada $C \in \mathcal{C}$.

Suposición: Existe colección $\mathcal{D}$ de subconjuntos de X tal que:

i. $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$;

ii. $\mathcal{D}$ tenga PIF;

iii. $\mathcal{D}$ es maximal respecto a *ii*. (es decir, si $\mathcal{D}' \supset \mathcal{D}$ y $\mathcal{D}'$ tiene PIF, entonces $\mathcal{D}' = \mathcal{D}$).

Observación.

1. Existencia de $\mathcal{D}$ proviene del lema de Zorn (equivalente al axioma de elección).
2. En ZF, teorema de Tychonoff es equivalente al axioma de elección.
3. No pedimos que conjuntos de $\mathcal{D}$ sean cerrados.

Objetivo 2: Encontrar x en Z tal que $x \in \overline{D}$ $\forall D \in \mathcal{D}$ (notar que Objetivo 2 $\Rightarrow$ Objetivo 1)

Lema 1.98.

a. $\mathcal{D}$ es cerrado bajo intersección finita.

b. Si $A \subset Z$ tal que $A \cap \mathcal{D} \neq \varnothing$ para cada D en $\mathcal{D}$, entonces $A \in \mathcal{D}$.

Demostración (lema)**.**

a. Sea $D = D_1 \cap \cdots \cap D_n$, tal que $D_1, \ldots, D_n \in \mathcal{D}$ y sea $\mathcal{D}' = \mathcal{D} \cup \{D\}$. Notamos que $\mathcal{D}'$ tiene PIF. Si $C_1, \ldots, C_m \in \mathcal{D}$, entonces

$$D \cap C_1 \cap \cdots \cap C_m = D_1 \cap \cdots \cap D_n \cap C_1 \cap \cdots \cap C_m \neq \varnothing$$

($\mathcal{D}$ tiene la PIF). Luego, como $\mathcal{D}$ es maximal, $\mathcal{D}' = \mathcal{D}$. Entonces, $D \in \mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$.

b. Sea $\mathcal{D}' = \mathcal{D} \cup \{A\}$. Parte a) + hipótesis, implica que $\mathcal{D}'$ tiene la PIF. Por maximalidad, tenemos que $\mathcal{D}' = \mathcal{D} \Rightarrow A \in \mathcal{D}$.

$\square$

Demostración (Objetivo 2)**.** Encontrar candidato x: En coordenada α, sea $\mathcal{D}_\alpha := \{\overline{\pi_\alpha(D)} \mid D \in \mathcal{D}\} \Rightarrow D_\alpha$ tiene PIF (viene de $\mathcal{D}$ con PIF) y colección de cerrados. $X_\alpha$compacto + lema $\Rightarrow$ existe x_α en $\overline{\pi_\alpha(D)}$ $\forall D \in \mathcal{D}$. Definimos $x = (x_\alpha)_{\alpha \in J} \in Z$. Dado U abierto en que contiene a X (U en base de topología producto en Z), queremos $U \cap D \neq \varnothing$ para cada $D \in \mathcal{D}$ $(*)$. (esto implica Objetivo 2 al mover U y fijar $D \in \mathcal{D}$). Nos basta probar que $U \in \mathcal{D}$ (luego $(*)$ sigue por PIF de $\mathcal{D}$).

Recuerdo. $U = \bigcap_{\beta \in K} \pi_\beta^{-1}(U_\beta)$ (" = " $\prod_{\beta \in K} U_\beta \times \prod_{\alpha \notin K} X_\alpha$), $K \subset J$ finito y $\bigcup_\beta \subset X_\beta$ abierto que contiene a x_β.

Luego, $x_\beta \in \overline{\pi_\beta(D)} \Rightarrow \pi_\beta(D) \cap U_\beta \neq \varnothing \Rightarrow D \cap \pi_\beta^{-1}(U_\beta) \neq \varnothing$ $\forall D \in \mathcal{D}$.

Ahora, lema b) $\Rightarrow \pi_\beta^{-1}(U_\beta) \in \mathcal{D}$. Luego, por lema a), $U = \bigcap_{\beta \in K} \pi_\beta^{-1}(U_\beta) \in \mathcal{D}$. □

Demostración (Tychonoff). Objetivo 2 $\Rightarrow$ Objetivo 1 $\Rightarrow$ Tychonoff. □

Clase 24

6 de Octubre

1.20 Axiomas de Numerabilidad/Contabilidad (30)

Axiomas de numerabilidad: Buscamos codificar la topología con información contable. Además, la topología estará "caracterizada" por convergencia de sucesiones.

Definición 1.99 (base de un punto). X espacio topológico. Una base de el punto $x \in X$ es un conjunto $\mathcal{B}_x$ de abiertos, tal que $x \in B$ $\forall B \in \mathcal{B}_x$ y tal que si U abierto con $x \in U$, existe $B \in \mathcal{B}_x$ con $x \in B \subset U$.

Ejemplo. Si $\mathcal{B}$ base de la topología, entonces podemos tomar $\mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B} \mid x \in B\}$ base en x.

Definición 1.100 (espacio primer contable). X cumple el 1er axioma de numerabilidad (X es 1er contable/numerable) si para cada $x \in X$ existe una base contable en x.

Ejemplo. X espacio métrico (con topología métrica). Luego, $\forall x \in X \rightsquigarrow \mathcal{B}_x = \{B_\varepsilon(x) \mid \varepsilon \in \mathbb{Q}^+\}$, por lo que X es 1er contable.

Lema 1.101. X es 1er contable.

a) $A \subset X$. Si $x \in \overline{A} \Rightarrow$ existe sucesión $(x_n)_n$ en A si $x_n \longrightarrow x$.

b) $f : X \to Y$ es continua $\leftrightarrow \left[x_n \longrightarrow x \text{ en } X \Rightarrow f(x_n) \longrightarrow f(x) \text{ en } Y\right]$

Demostración. a) Sea $x \in \overline{A}$, sea $\mathcal{B}_x = \{B_1, B_2, \dots\}$ base numerable en $x \in X$. Tomar $C_i = B_1 \cap \dots \cap B_i$ (notar que $C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \cdots$). Así, $x \in \overline{A} \Rightarrow \forall i,\ A \cap C_i \neq \varnothing$. Luego, existe $x_i \in A \cap C_i$. Falta ver que $x_i \longrightarrow x$. Sea U abierto con $x \in U$. Existe N con $x \in B_N \in U$. Si $n \geq N \Rightarrow x_n \in C_n \subset C_N \subset B_N \subset U$. Por lo tanto, $x_n \in U$ para $n \geq N$.

b) Asumir f secuencialmente continua. Podemos utilizar el siguiente criterio: f continua si y sólo si $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ $\forall A \subset X$ (su demostración queda como ejericio, aunque también está en el Munkres). Tomamos $A \subset X$ (queremos $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$). Tomamos $x \in \overline{A}$ (queremos $f(x) \in \overline{f(A)}$). Por a., existe $(x_n)_n$ en A con $x_n \longrightarrow x$. f secuencialmente continua: $f(x_n) \longrightarrow f(x)$; donde $f(x_n) \in f(A)$ y $f(x) \in \overline{f(A)}$.

□

Observación. El converso en la parte a. del lema también es cierto.

Corolario 1.102. X no-numerable con topología co-numerable (abiertos no vacíos son complementos de numerables). Entonces, X no es 1er contable (viene de la Tarea 1).

Definición 1.103 (espacio segundo contable)**.** X es 2do contable/numerable, si posee una base numerable.

Observación. 2do contable $\Rightarrow$ 1ro contable.

Definición 1.104 (subconjunto denso y espacio separable)**.**

1) $A \subset X$ es denso si $\overline{A} = X$.

2) X es separable si posee un subconjunto numerable y denso.

Lema 1.105. X 2do contable $\Rightarrow$ X separable.

Demostración. Sea $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots\}$ base numerable de X. Tomamos $x_n \in B_n \; \forall n$, definimos $A = \{x_1, x_2, \dots\}$. Queremos probar que A es denso. Dado $x \in X$, queremos $x \in \overline{A}$. Dado $U \subset X$ abierto con $x \in U$, U es unión de elementos de $\mathcal{B}$. Luego, $B_n \subset U$ para algún n. Luego, $x_n \in B_n \subset U$, por lo que $U \cap A \neq \varnothing \; \forall U$ abierto. Por lo tanto, $x \in \overline{A}$. $\square$

Ejemplo.

- $\mathbb{R}^n$ es 2do contable. En efecto, $\mathcal{B} = \{B_\varepsilon(x) \mid \varepsilon \text{ racional positivo}, x \in \mathbb{Q}^n\}$ es base numerable.
- X separable + 1er contable $\Rightarrow$ 2do contable (queda como ejericio).

Proposición 1.106.

1) X 1er (2do) contable, $A \subset X \Rightarrow A$ 1er (2do) contable.

2) Si $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ espacioes 1er (2do) contables $\Rightarrow Z = \prod_{n \geq 1} X_n$ es 1er (2do) contable.

Demostración. 1) (para 2do) $\mathcal{B}$ base de $X \Rightarrow \mathcal{B}\big|_A = \{B \cap A \mid B \in \mathcal{B}\} \setminus \{\varnothing\}$ base de A (numerable).

2) (para 2do) Sea $\mathcal{B}_n$ base numerable de $X_n \; \forall n$. Base para la topología producto es

$$B = \left\{ \prod_{i \geq 1} B_i \;\middle|\; B_i \in \mathcal{B}_i \cup \{X_i\}, \text{ tq } B_i = X_i \text{ para todos salvo finitos } i \right\}$$

Se tiene que

$$\mathcal{B} = \bigcup_{F \subset Z^+ \text{ finito}} \left\{ \text{"} \prod_{i \in F} B_i \text{"} \times \prod_{i \notin F} X_i \mid B_i \in \mathcal{B}_i \right\}$$

□

Observación. Axiomas de numerabilidad no se preservan bajo productos no numerables.

Clase 25

8 de Octubre

Axiomas de separación. permite distinguir subconjuntos usando topología.

Definición 1.107 (espacio T3 y T4)**.** Suponer que X es T1.

- X es T3 (o Regular), si $\forall x \in X,\ \forall A \subset X$ cerrado con $x \notin A,\ \exists U, V$ abiertos disjuntos con $x \in U,\ A \subset V$.
- X es T4 (o Normal), si $\forall A, B \subset X$ cerrados disjuntos, existen U, V abiertos disjuntos con $A \subset U,\ B \subset V$.

Nuestro objetivo ahora es el lema de Urysohn.

Lema 1.108 (Urysonhn)**.** X espacio normal, $A, B \subset X$ cerrados disjuntos $\Rightarrow \exists f : X \to [0,1]$ continua con $f(A) = \{0\}, f(B) = \{1\}$.

Observación. T4 $\to$ T3 $\to$ T2 $\to$ T1, pero ningun converso es cierto.

Ejemplo.

1. **T1, no Hausdorff:** X infinito con la topología cofinita (cerrado $\leftrightarrow$ finito)
2. **Hausdorff, no Regular:** $\mathbb{R}_K, \mathbb{R}$ con topologíade base $\{(a,b), (a,b) \setminus \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}\}$.
   - $\mathbb{R}_K$ no regular: $K = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ es cerrado pero K no se puede "separar" de un punto.
   - R_K Hausdorff: contiene a la topología estándar.
3. **Regular, no Normal:** Plano de Sorgenfrey $\mathbb{R}_l^2$, $\mathbb{R}_l^2 = \mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$, con $\mathbb{R}_l$ con topología del límite inferior (base $= \{[a,b)\}$). ($\mathbb{R}_l$ es regular).

Propiedad 1.109.

a) X regular, $A \subset X \Rightarrow A$ regular.

b) $Z = \prod_\alpha X_\alpha$, cada X_α regular $\Rightarrow Z$ regular.

Observación. b) es falso si se reemplaza regular por normal.

Lema 1.110. Suponer que X es T1

a) X regular si y sólo si $\forall x \in X$, $\big[\forall U \subset X$ abierto con $x \in U\,\big]$ (si $[\cdots]$ se cumple, decimos que U es vecindad de x), $\exists V$ vecindad de x con $x \in V \subset \overline{V} \subset U$.

b) X normal si y sólo si $\forall A \subset X$ cerrado, $\forall U \subset X$ abierto con $A \subset U$, $\exists V$ abierto con $A \subset V \subset \overline{V} \subset U$.

Demostración. Probamos sólo a), pues b) es similar.

$\boxed{\Rightarrow}$ Sea $x \in X$, U vecindad de x. Sea $B = X \setminus U$ ($\Rightarrow B$ cerrado y $x \notin B$). X regular $\Rightarrow \exists V_1, V_2$ abiertos disjuntos con $x \in V_1$, $B \subset V_2$. Consideramos $V = V_1$ (queremos $\overline{V} \subset U$). V_1, V_2 disjutos $\Rightarrow V_1 \subset X \setminus V_2 \subset X \setminus B = U$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Sean $x \in X$, $B \subset X$ cerrado con $x \notin B$. Si $U = X \setminus B \Rightarrow U$ vecindad de x. Por hipótesis, nos da vecindad V de x con $x \in V \subset \overline{V} \subset U$. Si $\widehat{V} = X \setminus \overline{V} \Rightarrow V \cap \widehat{V} = \varnothing$, $x \in V$, $B = X \setminus U \subset X \setminus \overline{V} = \widehat{V}$ (con $V, \widehat{V}$ abiertos). □

Demostración (propiedades)**.** a) X regular, $A \subset X$. (notar que X T1 $\Rightarrow A$ T1). Sea $x \in A$, $B \subset A$ cerrado (en A!!!) con $x \notin B$. Notar que $B = C \cap A$ con C cerrado en X. Luego, X regular $\Rightarrow$ existen $U, V \subset X$ abiertos disjuntos con $x \in U$, $C \subset V$. Tomamos $\widehat{U} = U \cap A$, $\widehat{V} = V \cap A$, abiertos disjuntos de A con $x \in \widehat{U}$, $B \subset \widehat{V}$.

b) Sea $Z = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$, con cada X_α regular. Queremos usar lema previo. Para ello, sea $x = (x_\alpha)_\alpha$, $U \subset Z$ abierto con $x \in U$ (queremos V abierto con $x \in V \subset \overline{V} \subset U$). No perdemos generalidad en asumir que U es abierto en la base. Es decir, $U = \prod_{\alpha \in J} U_\alpha$, y $K \subset J$ finito con $U_\alpha = X_\alpha$ si $\alpha \notin K$. Dado $\alpha \in K$, $x_\alpha \in U_\alpha$. Luego, X_α regular + lema, nos da $V_\alpha \subset X_\alpha$ abierto con $(*)$ $x_\alpha \in V_\alpha \subset \overline{V_\alpha} \subset U_\alpha$ ($\forall \alpha \in K$). Sea $V = \prod_{\alpha \in J} V_\alpha$, donde V_α dado por $(*)$ si $\alpha \in K$ y $V_\alpha = X_\alpha$ si $\alpha \notin K$. Luego, $x \in V \subset \overline{V}$. Además,

$$\overline{V} = \overline{\prod_\alpha V_\alpha} = \prod \overline{V_\alpha} \subset \prod U_\alpha = U$$

(la segunda igualdad se vió en la ayudantía 3).

□

Observación. La demostración de a) no cumple si se reemplaza regular por normal.

Clase 26

10 de Octubre

1.21 Espacios Normales (32)

1.21.1 Criterios para garantizar T4

Proposición 1.111. X compacto y Hausdorff, entonces X es normal.

Proposición 1.112. X es regular + 2do contable, entonces X es normal.

Lema 1.113. X regular, $x \in X$, $B \subset X$ cerrado tal que $x \notin B$. Entonces, $\exists U$ vecindad de x con $\overline{U} \cap B = \varnothing$. Además, si $\mathcal{B}$ es base de X, podemos elegir $U \in \mathcal{B}$.

Demostración (Lema). X regular nos da V vecindad de x con $V \cap B = \varnothing$. Por lema de la clase pasada, $\exists U$ vecindad de x con $x \in U_0 \subset \overline{U}_0 \subset V$. Luego, $\overline{U}_0 \cap B = \varnothing$. Si $\mathcal{B}$ es base de X, existe $U \in \mathcal{B}$ con $x \in U \subset U_0$. Así, $\overline{U} \subset \overline{U}_0 \Rightarrow \overline{U} \cap B = \varnothing$. □

Demostración (proposición 2). X es regular, $\mathcal{B}$ base numerable. Queremos fijar $A, B \subset X$ cerrados disjuntos y encontrar U, V abiertos disjuntos con $A \subset U$, $B \subset V$ (notar que X ya es T1 por ser regular). En efecto, dado $a \in A$, el lema previo implica que existe $U_a \in \mathcal{B}$ vecindad de a y tal que $\overline{U}_a \cap B = \varnothing$. Esto nos da $\mathcal{U} = \{U_a \mid a \in A\} \subset \mathcal{B}$ cubriente por abiertos de X tal que $(\bigcup_{a\in A} \overline{U}_a) \cap B = \varnothing$. El mismo proceso nos da $\mathcal{V} = \{V_b \mid b \in B\} \subset \mathcal{B}$ cubriente de B por abiertos de X tal que $(\bigcup_{b\in B} \overline{V}_b) \cap A = \varnothing$. Hasta ahora, tenemos $\widehat{U} \coloneqq \bigcup_{a\in A} U_a$, $\widehat{V} \coloneqq \bigcup_{b\in B} V_b \subset X$ abiertos tales que $A \subset \widehat{U}$, $B \subset \widehat{V}$. Falta achicar $\widehat{U}, \widehat{V}$ para que sean disjuntos. Como $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subset \mathcal{B}$ son numerables, tenemos

$$\mathcal{U} = \{U_1, U_2, U_3, \dots\}, \quad \mathcal{V} = \{V_1, V_2, V_3, \dots\}.$$

Redefinimos:

$$\begin{aligned} \widehat{U}_1 &\coloneqq U_1 \setminus \overline{V}_1, \\ \widehat{U}_2 &\coloneqq U_2 \setminus (\overline{V}_1 \cup \overline{V}_2), \\ \widehat{U}_n &\coloneqq U_n \setminus (\overline{V}_1 \cup \overline{V}_2 \cup \dots \cup \overline{V}_n). \end{aligned}$$

Definimos $U \coloneqq \bigcup_{i\geq 1} \widehat{U}_i$, $V \coloneqq \bigcup_{i\geq 1} \widehat{V}_i$. Notar que $A \subset U$, $B \subset V$ (se ocupa que $\overline{U}_i \cap B = \overline{V}_i \cap A = \varnothing$). Notar que $U \cap V = \varnothing$. En efecto, si $x \in U \cap V \Rightarrow x \in \widehat{U}_m, x \in \overline{V}_n$ para ciertos $m \geq n$. Luego, $x \in \widehat{V}_n \Rightarrow x \in V_n$, y $x \in \widehat{U}_m$ $(m \geq n) \Rightarrow x \notin \overline{V}_n \Rightarrow x \notin V_n$, lo que es una contradicción! □

Definición 1.114 (espacio metrizable). X espacio topológico es metrizable si su topología es topología métrica para alguna distancia en X.

Proposición 1.115. X es metrizable, entonces X es normal.

Teorema 1.116 (de Metrización de Urysohn). X normal y 2do contable $\Rightarrow X$ es metrizable.

Nota. Este teorema no se va a evaluar (la demostración está en el Munkres).

Demostración (proposición). Sea (X, d) espacio métrico. X métrico $\Rightarrow$ Hausdorff $\Rightarrow$ T1. Tomamos $A, B \subset X$ cerrados disjuntos, queremos $U, V \times X$ abiertos disjuntoas con $A \subset U,\ B \subset V$. En efecto, recordar que si $S \subset X$ con X espacio métrico cualquiera $\Rightarrow \overline{S} = \{x \in X \mid \inf_{s \in S} d(x, s) = 0\}$. Por lo tanto, S cerrado y $x \notin S \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ tal que $d(x, s) \geq \varepsilon\ \forall s \in S$ (i.e. $B_\varepsilon(x) \cap S = \varnothing$). Luego, $\forall a \in A,\ \exists \varepsilon_a > 0$ tal que $B_{\varepsilon_a}(a) \cap B = \varnothing$. Esto nos da $\{B_{\varepsilon_a}(a) \mid a \in A\}$. Similarmente, obtenemos $b \mapsto \varepsilon_b > 0$ tal que $b \in B,\ B_{\varepsilon_b}(b) \cap A = \varnothing$. Esto nos da $\widehat{U} = \bigcup_{a \in A} B_{\varepsilon_a}(a) \supset A,\ \widehat{V} = \bigcup_{b \in B} B_{\varepsilon_b}(b) \supset B$. Mejor tomamos $U = \bigcup_{a \in A} B_{\frac{\varepsilon_a}{2}}(a)$ y $V = \bigcup_{b \in B} B_{\frac{\varepsilon_b}{2}}(b)$. Luego, U, V abiertos con $A \subset U,\ B \subset V$. Si $x \in U \cap V \Rightarrow \exists a \in A,\ b \in B$ tal que $d(x, a) < \frac{\varepsilon_a}{2},\ d(x, b) < \frac{\varepsilon_b}{2}$. Entonces,

$$\begin{aligned} d(a, b) &\leq d(a, x) + d(x, b) \\ &< \frac{\varepsilon_a}{2} + \frac{\varepsilon_b}{2} \leq \varepsilon_a. \end{aligned}$$

Luego, $d(a, b) < \varepsilon_a$ es una contradicción. □

Corolario 1.117. Subespacios de espacios metrizables son normales.

Corolario 1.118. Producto numerable de metrizables es normal.

Observación. $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ no es normal.

Clase 27

13 de Octubre

1.22 Lema de Urysonhn (33)

Aclaración. Separable + 1er contable $\not\Rightarrow$ 2do contable.

Ejemplo. $\mathbb{R}_l = \mathbb{R}$ + topología del límite inferior.

Lema 1.119 (de Urysonhn). X normal, $A, B \subset X$ cerrados disjuntos. Entonces, existe $f : X \to [0, 1]$ continua tal que $f(A) = \{0\},\ f(B) = \{1\}$.

Observación. Si X es metrizable (distancia d), entonces $f(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)}$ cumple.

Idea de demostración. $\left[X \text{ normal, } A, B \subset X \text{ cerrados disjuntos}\right]$

1. Construir "conjuntos de subnivel" $U_p \subset X$ abiertos indexados por $p \in \mathbb{Q}$ tal que $p < q \Rightarrow \overline{U}_p \subset U_q$ $\left[\text{"}U_p = \{x \mid f(x) < p\}\text{"}\right]$.
2. Usar $\{U_p\}_{p \in \mathbb{Q}}$ para construir f.

3. Verificar que f cumple lo que queremos.

Lema 1.120 (se utilizará en la demostración)**.** X normal, $C \subset V$, C cerrado, V abierto. Entonces, $\exists W$ abierto con $C \subset W \subset \overline{W} \subset V$.

Lema 1.121. $y \in X$

a) $y \in U_p \Rightarrow f(y) \leq p$

b) $y \notin U_p \Rightarrow f(y) \geq p$.

Demostración. a) $y \in \overline{U}_p \Rightarrow y \in U_q\ \forall q > p \Rightarrow f(y) \leq p$.

b) $y \notin U_p \Rightarrow y \notin U_q\ \forall q < p \Rightarrow f(y) \geq p$.

□

Demostración (Urysohn)**.** (1) Sea $P = \mathbb{Q} \cap [0,1]$, ordenado tal que $P = \{1, 0, p_3, p_4, \dots\}$. Definimos $P \ni p \mapsto U_p$ inductivamente. Sea $U_1 := X \setminus B$. Usamos que X es normal + lema para encontrar $U_0 \subset X$ abierto tal que $A \subset U_0 \subset \overline{U}_0 \subset U_1$. Por inducción, asumimos que hemos encontrado U_p para $p \in \{p_1, \dots, p_n\}$ y que cumplen $p < q \Rightarrow \overline{U}_p \subset U_q$ $(*)$ en este conjunto. Dado $p_{n+1} \in P$ ($n \geq 2$, i.e. $p_{n+1} \neq 0, 1$), sea s el predecesor de p_{n+1} en $\{p_1, \dots, p_n\}$ y t el sucesor de p_{n+1} en $\{p_1, \dots, p_{n+1}\}$, entonces $\overline{U}_s \subset U_t$. Usando lema + X normal + $\overline{U}_s \subset U_t$, encontramos $U_{p_{n+1}} \subset X$ abierto con $\overline{U}_s \subset U_{p_{n+1}} \subset \overline{U}_{p_{n+1}} \subset U_t$. Verificar: $(*)$ se sigue compliendo para p, q en $\{p_1, \dots, p_{n+1}\}$.

(1.5) Extender construcción para $p \in \mathbb{Q}$:

$$U_p = \begin{cases} \varnothing & \text{si} p < 0 \\ X & \text{si} p > 1 \end{cases}$$

y $(*)$ ahora se cumple para todo $p, q \in \mathbb{Q}$.

(2) Construir f. Dado $x \in X$, sea $\mathbb{Q}(x) = \{p \mid x \in U_p\} \Rightarrow \mathbb{Q}(x)$ es no vacío y acotado por abajo ($1000 \in \mathbb{Q}(X)$, y $p \notin \mathbb{Q}(x)$ para $p < 0$). Definimos $f(x) := \inf \mathbb{Q}(x) = \inf\{p \in \mathbb{Q} \mid x \in U_p\}$.

(3) Ver que f funciona:

i. ($f(A) = \{0\}$) Si $x \in A \subset U_0$, $(*) \Rightarrow x \in U_p\ \forall p \geq 0$, $x \notin U_p\ \forall p < 0 \Rightarrow f(x) = 0$.

ii. ($f(B) = \{1\}$) Si $x \in B \Rightarrow x \notin U_1 \Rightarrow x \notin U_p$, $\forall p < 1$ & $x \in U_p\ \forall p > 1 \Rightarrow f(x) = 1$.

iii. ($f(X) \subset [0,1]$) Si $x \in X$ & $U_p = X$ para $p > 1 \Rightarrow p \in \mathbb{Q}(x)\ \forall p \in \mathbb{Q}_{>1} \Rightarrow f(x) \leq 1$ & $U_p = \varnothing$ para $p < 0 \Rightarrow p \notin \mathbb{Q}(x)\ \forall p \in \mathbb{Q}_{<0} \Rightarrow f(x) \geq 0$.

iv. (f continua) Verificar que f continua en x_0 $\forall x_0 \in X$. Dado $V \subset \mathbb{R}$ abierto que contiene a $f(x_0)$, queremos U vecindad de x_0 tal que $f(U) \subset V$. En efecto, asumir que $V = (c, d)$ (i.e. tomamos $c < f(x_0) < d$). Sean $p, q \in \mathbb{Q}$ tal que $c < p < f(x_0) < q < d$. Por lema (2) tenemos $p < f(x_0) \Rightarrow x_0 \notin \overline{U}_p$ y $q > f(x_0) \Rightarrow x_0 \in U_q$. Por lo tanto, $x_0 \in U_q \setminus \overline{U}_p$ (esto es abierto). Definimos $V = U_q \setminus \overline{U}_p$, vecindad de x_0. Queremos $f(V) \subset (c, d)$. En efecto, sea $y \in V$. Entonces $y \in U_q \subset \overline{U}_q \Rightarrow f(y) \leq q$ (lema parte a.) y $y \notin \overline{U}_p \supset U_p \Rightarrow f(y) \geq p$ (lema parte b.). En conclusión, $c < p \leq f(y) \leq q < d$. Por lo tanto, $f(y) \in (c, d)$ $\forall y \in V$.

□

Clase 28

15 de Octubre

1.23 Teorema de Extensión de Tietze (34)

Teorema 1.122 (Extensión de Tietze)**.** X normal, $A \subset X$ cerrado

a) Si $f : A \to [a, b]$ continua $\Rightarrow$ f tiene extensión continua $g : X \to [a, b]$ (i.e. g continua y $g\big|_A = f$).

b) Si $f : A \to \mathbb{R}$ continua $\Rightarrow$ f tiene extensión continua $g : X \to \mathbb{R}$.

Notación. Si $F : X$ (o en A) $\to \mathbb{R}$,

$$\|F\|_X = \sup_{x \in X} |F(x)| \quad \text{ó} \quad \|F\|_A = \sup_{a \in A} |F(a)|.$$

Idea de prueba. $f : A \to [-1, 1]$ continua, $A \subset X$ (con X normal y A cerrado). Encontrar sucesión $(g_n) : X \to [-1, 1]$ de funciones continuas tal que

i) $\|g_n\|_X \leq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$;

ii) $\|f - g_1 - \cdots - g_n\|_A \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Luego, $g := \sum_{n \geq 1} g_n$ va a ser la extensión continua de f.

Lema 1.123. X normal, $A \subset X$ cerrado, $r > 0$, $F : A \to [-r, r]$. Entonces, existe $G : X \to \mathbb{R}$ continua, con

i) $\|G\|_X \leq \frac{r}{3}$;

ii) $\|F - G\|_A \leq \frac{2r}{3}$.

Demostración (Lema)**.** Dividir $[-r, r]$ en

$$\underbrace{\left[-r, -\frac{r}{3}\right]}_{I_1} \cup \underbrace{\left[-\frac{r}{3}, \frac{r}{3}\right]}_{I_2} \cup \underbrace{\left[\frac{r}{3}, r\right]}_{I_3}$$

y sean $B = F^{-1}(I_1),\ C = F^{-1}(I_3)$. Notar que B, C son cerrados (disjuntos) en A y por lo tanto cerrados en X. El lema de Urysohn $\Rightarrow \exists G : X \to \left[-\frac{r}{3}, \frac{r}{3}\right]$ continua tal que $G(B) = \left\{-\frac{r}{3}\right\}$ y $G(C) = \left\{\frac{r}{3}\right\}$. Luego, viendo por casos, dependiendo si $a \in B,\ a \in C$ o $a \in A \setminus (C \cup B)$, entonces $|F(a) - G(a)| \leq \frac{2r}{3}$ $(ii. \checkmark)$. $\square$

Demostración (Tietze, parte a.). Sean X normal, $A \subset X$ cerrado y $f : A \to [-1, 1]$ continua (queremos encontrar $g : X \to [-1, 1]$ extensión continua de f). Lema anterior (con $F = f,\ G = g_1,\ r = 1$) $\Rightarrow \exists g_1 : X \to \mathbb{R}$ continua tal que

i) $\|g_1\|_X \leq \frac{1}{3}$;

ii) $\|f - g_1\|_A \leq \frac{2}{3}$.

Similarmente, el lema (con $F = f - g_1,\ G = g_2,\ r = \frac{2}{3}$) $\Rightarrow \exists g_2 : X \to \mathbb{R}$ continua tal que

i) $\|g_2\|_X \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}$;

ii) $\|(f - g_1) - g_2\|_A \leq \left(\frac{2}{3}\right)^2$.

Inductivamente, encontramos $g_1, \ldots, g_n : X \to \mathbb{R}$ continuas tal que

i) $\|g_{n+1}\|_X \leq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$;

ii) $\|(f - g_1 - \cdots - g_n) - g_{n+1}\|_A \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$.

Hemos encontrado $(g_n)_n : X \to \mathbb{R}$ continuas con

i) $\|g_n\|_X \leq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$;

ii) $\|f - (g_1 + \cdots + g_n)\|_A \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$,

$\forall n \geq 1$. Definimos $g : X \to \mathbb{R}$ tal que $x \mapsto \sum_{n \geq 1} g_n(x)$. Nos falta probar que g está bien definida, g extiende a f, que g es continua y $g : X \to [-1, 1]$.

- (g bien definida:) $\forall x \in X$, la serie $\sum_{n \geq 1} g_n(x)$ converge absolutamente porque está dominada por $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ (criterio de comparación de series).
- (g extiende a f:) $a \in A$,

$$|f(a) - g(a)| = \lim_{n \to \infty} |f(a) - g_1(a) - \cdots - g_n(a)| \leq \lim_{n \to \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

donde la desigualdad está dada por ii).

- (g continua:) $s_n = g_1 + \cdots + g_n$ converge a g uniformemente ($\|g - s_n\|_X \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$). Esto implica que g continua si cada s_n continua. Luego

$$\begin{aligned}\|g - s_n\|_X &= \|g_{n+1} + g_{n+2} + \cdots\|_X \\ &\leq \sum_{m\geq n+1} \|g_m\|_X \\ &\leq \sum_{m\geq n+1} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{m-1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

- Basta ver que

$$\|g\|_X \leq \sum_{n\geq 1} \|g_n\|_X \overset{i)}{\leq} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 1.$$

□

Demostración (Tietze, parte b.)**.** Partir de $f : A \to (-1,1)$ (homeomorfo a $\mathbb{R}$). Queremos extensión continua $g : X \to (-1,1)$. Parte a) $\rightsquigarrow \exists h : X \to [-1,1]$ extensión continua de f. Tomamos $B = h^{-1}(\{1\})$ y $C = h^{-1}(\{-1\})$. Entonces, $B \cup C$ cerrado de X disjunto de A. Urysohn $\Rightarrow \phi : X \to [0,1]$ tal que $\phi(B \cup C) = \{0\}$, $\phi(A) = \{1\}$. Luego, $g \coloneqq \phi h$ sirve. □