Teoría de Integración

Basado en las clases impartidas por Santiago Saglietti en el segundo semeste del 2025

Contents

Chapter 1

Integral de Riemann

Clase 1

4 de Agosto

Definición 1.1 (partición + intervalos). Una partición de un intervalo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ es un subconjunto finito $\Pi \subseteq [a, b]$ tal que $a, b \in \Pi$. Denotaremos a las particiones como $\Pi = \{x_0, \ldots, x_n\}$, donde $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Los intervalos $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$ serán llamados intervalos de la partición.

Observación. A veces, identificaremos la partición Π con $(I_i)_{i=1,\ldots,n}$. En tal caso, abusando de la notación, escribiremos $I_i \in \Pi$ cuando queramos hablar de los intervalos de Π.

Definición 1.2 (norma de particiones). La norma de una partición Π como $\|\Pi\| := \max_{i=1,\ldots,n}(x_i - x_{i-1}) = \max_{I_i \in \Pi} |I_i|$.

Definición 1.3 (partición marcada). Una partición marcada de $[a, b]$ es un par $\Pi^* := (\Pi, \varepsilon)$ donde:

- $\Pi = \{x_0, \ldots, x_n\}$ es una partición de $[a, b]$;
- $\varepsilon = \{x_1^*, \ldots, x_n^*\}$ es una colección de puntos tal que $x_i^* \in I_i$ para cada $i = 1, \ldots, n$.

Observación. Dada una partición marcada $\Pi^* = (\Pi, \varepsilon)$, definimos $\|\Pi^*\| := \|\Pi\|$.

Definición 1.4 (Suma de Riemann). Sean $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada y $\Pi^* = (\Pi, \varepsilon)$ una partición marcada. Definimos la suma de Riemann de f asociada a Π^* como:

$$S_R(f; \Pi^*) := \sum_{n=1}^{n} f(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{I_i \in \Pi} f(x_i^*)|I_i|.$$

Clase 2

6 de Agosto

Definición 1.5 (Riemann integrable). Dada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada, decimos que es Riemann integrable si existe el límite $\lim_{\|\Pi^*\| \to 0} S_R(f; \Pi^*)$.
Equivalentemente, $\exists L \in \mathbb{R}$, tal que dado cualquier $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que $\|\Pi^*\| < \delta \Rightarrow |S_R(f; \Pi^*) - L| < \varepsilon$.

Observación. Cuando el límite existe, lo llamamos la integral de Riemann de f en $[a, b]$ y lo notamos $\int_a^b f(x)dx$.

Definición 1.6 (Sumas superior e inferior de Darboux). Dadas $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada y $\Pi = (I_i)_{i=1,\dots,n}$ una partición de $[a, b]$, definimos

$$m_{I_i} := \inf_{x \in I_i} f(x), \quad M_{I_i} := \sup_{x \in I_i} f(x) \quad \text{y}$$

$$\underline{S}(f; \Pi) := \sum_{I_i \in \Pi} m_{I_i} |I_i|, \quad \overline{S}(f; \Pi) := \sum_{I_i \in \Pi} M_{I_i} |I_i|.$$

Llamamos a $\underline{S}(f; \Pi)$ y $\overline{S}(f; \Pi)$ las sumas inferior y superior de Darboux de f con respecto a Π, respectivamente.

Nota. Como $m_{I_i} \leq f(x) \leq M_{I_i}$, $\forall x \in I_i$ para toda partición marcada $\Pi^* = (\Pi; \varepsilon)$, tenemos $\underline{S}(f; \Pi) \leq S_R(f; \Pi^*) \leq \overline{S}(f; \Pi)$.

Definición 1.7 (refinamiento). Diremos que una partición Π' de $[a, b]$ es un refinamiento de otra partición de $[a, b]$, Π, si $\Pi \subseteq \Pi'$.
Equivalentemente, si para todo $J_i \in \Pi'$ existe $I_i \in \Pi$ tal que $J_i \subseteq I_i$.

Proposición 1.8. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada. Entonces,

- Si $\Pi \subseteq \Pi'$ son particiones de $[a, b]$,

$$\underline{S}(f; \Pi) \leq \underline{S}(f; \Pi'), \quad \overline{S}(f; \Pi) \geq \overline{S}(f; \Pi').$$

- Si Π_1, Π_2 son particiones de $[a, b]$ cualesquiera,

$$\underline{S}(f; \Pi_1) \leq \overline{S}(f; \Pi_2)$$

Definición 1.9. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada. Definimos:

- La integral superior (de Darboux) de f como $\overline{\int_a^b} f(x)dx := \inf_{\Pi} \overline{S}(f; \Pi)$.
- La integral inferior (de Darboux) de f como $\underline{\int_a^b} f(x)dx := \sup_{\Pi} \underline{S}(f; \Pi)$.

Teorema 1.10. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada. Entonces,

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \lim_{\|\Pi\|\to 0} \underline{S}(f;\Pi) \quad \text{y} \quad \overline{\int_a^b} f(x)dx = \lim_{\|\Pi\|\to 0} \overline{S}(f;\Pi).$$

Observación. Equivalentemente, para cualquier sucesión $(\Pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de partición de $[a,b]$ tal que $\|\Pi_n\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$, se tiene que

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f;\Pi_n) \quad \text{y} \quad \overline{\int_a^b} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f;\Pi_n).$$

Teorema 1.11. Dada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada, son equivalentes:

1. $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$ (i.e., f es Darboux integrable).
2. f es Riemann integrable.
3. $\lim_{\|\Pi\|\to 0} \overline{S}(f;\Pi) - \underline{S}(f;\Pi) = 0$.
4. $\forall (\Pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de particiones de $[a,b]$ tal que $\|\Pi_n\| \to 0$,
$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f;\Pi_n) - \underline{S}(f;\Pi_n) = 0.$$
5. $\exists (\Pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de particiones de $[a,b]$ tal que
$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f;\Pi_n) - \underline{S}(f;\Pi_n) = 0.$$

Clase 3

7 de Agosto

Nota. Las integrales en el sentido de Darboux y el de Riemann coinciden.

Proposición 1.12. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es monótona, entonces es Riemann integrable.

Observación. Una función monótona tiene discontinuidades numerables.

Proposición 1.13. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces es Riemann integrable.

En particular, existen funciones Riemann integrables con numerables discontinuidades. De hecho, hay ejemplos con c (cardinal del continuo) discontinuidades. No obstante, si f es integral de Riemann, su conjunto de discontinuidades tiene que ser "pequeño".

Teorema 1.14. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada. Entonces, f es Riemann Integrable si y sólo si su conjunto de discontinuidades tiene medida nula.

Definición 1.15 (intervalo). Decimos que un conjunto $I \subseteq \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ es un intervalo si satisface

$$x, y \in I \Rightarrow z \in I \text{ para todo } \min x, y \leq z \leq \max x, y.$$

Ejemplo. (y propiedades)

- Dados $a \leq b$ $(a, b \in \mathbb{R})$, los conjuntos $(a, b), (a, b], [a, b], [a, b)$ son intervalos;
- El conjunto vacío es un intervalo $(\varnothing = (a, a))$;
- Los puntos son intervalos. $I = [\lambda, \lambda]$;
- La intersección de intervalos es intervalos.

Definición 1.16 (intervalo generalizado). Decimos que un conjunto $I \subseteq \mathbb{R}^d$ es un intervalo si puede escribirse como

$$I = \prod_{k=1}^{d} I_k$$

donde cada I_r es un intervalo en $\mathbb{R}$. La medida de un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}^d$ se define como

$$|I| := \prod_{k=1}^{d} |I_k|.$$

Nota. Los intervalos en $\mathbb{R}^d$ heredan las mismas pripiedades en $\mathbb{R}$:

- Intersección de intervalos en $\mathbb{R}^d$ es intervalo.
- Si $I \subseteq J \subseteq \mathbb{R}^d$ son intervalos, entonces $|I| \leq |J|$.

Definición 1.17 (medida nula). Un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^d$ se dice de medida nula si, dado $\varepsilon > 0$, existe una sucesión $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de intervalos de $\mathbb{R}^d$ tal que

$$E \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \quad \text{y} \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} |I_n| < \varepsilon.$$

Ejemplo. (y propiedades)

1. Todo conjunto unitario $\{x\}, (x \in \mathbb{R}^d)$ tiene medida nula;
2. Toda unión numerable de conjuntos de medida nula tiene medida nula;
3. Cualquier conjunto numerable tiene medida nula;
4. Cualquier subconjunto de un conjunto de medida nula tiene medida nula;
5. Existen conjuntos no numerables de medida nula:

- En $\mathbb{R}^d$ con $d \geq 2$, los ejes $\{x : x_1 = 0\}, i = 1, \dots, d$ tiene medida nula.
- En $\mathbb{R}$, el conjunto de cantor tiene medida nula.

6. $E \subseteq \mathbb{R}^d$ es de medida nula, entonces $\alpha \dot{E}$ tiene medida nula $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
7. $E \subseteq \mathbb{R}^d$ es de medida nula, entonces $E + v$ tiene medida nula $\forall v \in \mathbb{R}^d$.
8. Si E contiene un intervalo no unitario, entonces no tiene medida nula. Notar que:
   - La vuelta no es válida: $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ no contiene untervalos no unitarios pero no puede tener medida nula.
   - De esto se deduce que si $E \subseteq \mathbb{R}^d$ tiene medida nula. Entonces E^c es denso (no vale la vuelta: $E^c = \mathbb{Q}$).
9. $E \subseteq \mathbb{R}^d$ tiene medida nula si y sólo si
$$|E|_e := \inf\{\sum_{n\in\mathbb{N}} |I_n| : E \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n\} = 0, \quad I_n \text{ intervalo } \forall n \in \mathbb{N}.$$

Clase 4

8 de Agosto

Teorema 1.18. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada. Entonces
$$f \text{ Riemann integrable} \iff D_f = \{x \in [a, b] : f \text{ discontinua en } x\} \text{ tiene medida nula.}$$

1.1 Limitaciones de la integral de Riemann

1. Sólo está definida para f acotada y sobre intervalos $[a, b]$ acotados. La teoría de integrales impropias resuelve esto.
2. Propiedades del espacio $\mathcal{R}([a, b]) = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} : f \text{ Riemann integrable}\}$: Nos gustaría poder definir una noción de convergencia en $\mathcal{R}([a, b])$ tal que
$$f_n \to f \text{ en } \mathcal{R}([a, b]) \Rightarrow \int_a^b f_n \to \int_a^b f \quad \left(\lim \int_a^b f_n = \int_a^b \lim f_n\right).$$

Observación. La convergencia puntal NO cumple esto (punto 2).

Ejemplo (1).

- $f_n := n\chi_{(0,\frac{1}{n}]}$ es Riemann integrable en $[0, 1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
- $f_n \to f \cong 0$ puntualmente en $[0, 1]$;
- $\int_0^1 f_n = 1 \not\to 0 = \int_0^1 f$.

Ejemplo (2).

- Sea $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una enumeración de $\mathbb{Q}\cap[0,1]$;
- $f_n \coloneqq \chi_{\{Q_1,\ldots,Q_n\}}$ es Riemann integrable en $[0,1]$, $\forall n\in\mathbb{N}$;
- $f_n \to f \coloneqq \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ puntualmente en $[0,1]$;
- f no es Riemann integrable. $\underline{\int_0^1} f = 0 \neq 1 = \overline{\int_0^1} f$.

Observación. La convergencia uniforme SÍ cumple esto, pero es demasiado fuerte.

Ejercicio (Guía 1)**.** Sean $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}([a,b])$ tales que $f_n \to f$ uniformemente en $[a,b]$. Entonces, $f\in\mathcal{R}([a,b])$ y $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n = \int_a^b f$.

Ejemplo (3)**.**

- $f_n(x) \coloneqq x^n$ en $[0,1]$, $f_n\in\mathcal{R}([a,b])$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $f_n \to \chi = f$ puntualmente;
- $f\in\mathcal{R}([a,b])$ y $\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{1}{n+1} \to 0 = \int_0^1$;
- f_n no converge uniformemente a f.

Resulta que la noción de convergencia "óptima" (la más "débil" que cumple lo que queremos) es la de convergencia en L':

$$f_n \xrightarrow{L'} f \text{ si } \lim_{n\to\infty}\int_a^b |f_n - f| = 0.$$

Esta noción de convergencia viene dada por una "norma":

- $\|f\|_{L'} \coloneqq \int_a^b |f|$ (recordar que $f\in\mathcal{R}([a,b]) \Rightarrow |f|\in\mathcal{R}([a,b])$);
- $d_{L'}(f,g) \coloneqq \|f-g\|_{L'} = \int_a^b |f-g|$.

Observación. $\|\cdot\|_{L'}$ no es una norma porque $\|f\|_{L'} = 0 \not\Rightarrow f = 0$. Decimos que es una *pseudo-norma* y d una *pseudo-métrica.*

Para arreglar esto, dadas $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$, decimos que son *equivalentes* y lo notamos $f\sim g$ si $\{x\in[a,b] \;:\; f(x)\neq g(x)\}$ tiene medida nula. Resulta que $\sim$ es una relación de equivalencia y, además,

$$f,g\in\mathcal{R}([a,b]),\ f\sim g \Rightarrow \int_a^b f = \int_a^b g.$$

Sea $\overline{\mathcal{R}}([a,b])$ el conjunto de clases de equivalencia de $\mathcal{R}([a,b])$, y denotamos por $\overline{f}$ a la clase de equivalencia de $f\in\mathcal{R}([a,b])$. Con esto, $\|\overline{f}\|_{L'} \coloneqq \int_a^b |f|dx$ define una norma en $\overline{\mathcal{R}}([a,b])$ que se llama la **norma** L'.

Observación. Hay un problema: $(\overline{\mathcal{R}}([a,b]), \|\cdot\|_{L'})$ NO ES COMPLETO!

3. **TFC:** Si $f\in\mathcal{R}([a,b])$ es continua en $x_0\in[a,b]$, entonces $F(x) \coloneqq \int_a^x f(t)dt$ es derivable en x_0 y $F'(x_0) = f(x_0)$. En particular, F es derivable en x y $F'(x) = f(x)$ para todo x salvo un conjunto de medida nula.

Clase 5

18 de Agosto

Teorema Fundamental del Cálculo: Si $f \in \mathcal{R}([a,b])$ es continua en $x_0 \in [a,b]$, entonces $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por $F(x) := \int_a^x f(t)dt$ es derivable en $x = x_0$ y vale $F'(x_0) = f(x_0)$. En particular, $F'(x) = f(x)$ salvo quizás por un conjunto de $x \in [a,b]$ de medida nula. O sea, podemos integrar y luego derivar y esto es "casi" como no hacer nada. Pero, tenemos problemas:

1. **Este "casi" no puede removerse**

> **Teorema 1.19** (Hankel, 1871)**.** Dado $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, existe $f \in \mathcal{R}([a,b])$ tal que $F(x) := \int_a^x f(t)dt$ no es derivable para ningún x en un subconjunto denso en $[a,b]$ (y, en particular, infinito).

2. **A veces no podemos componer en el orden inverso**

> **Teorema 1.20** (Volterra, 1881)**.** Dado $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, existe $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivable en $[a,b]$, tal que f' es acotada en $[a,b]$ pero $f' \notin \mathcal{R}([a,b])$.

Extendiendo la integral de Riemann

Sean $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada y $\Pi = \{x_0, \dots, x_n\}$ una partición de $[a,b]$. Definimos:

$$\begin{aligned}
\Phi_{f,\Pi}(x) &:= m_{I_1}\chi_{[x_0,x_1]}(x) + \sum_{i=2}^{n} m_{I_i}\chi_{(x_{i-1},x_i]}(x), \quad m_{I_i} = \inf_{t\in I_i} f(t) \\
&= m_{I_1}\chi_{\{x_0\}}(x) + \sum_{i=1}^{n} m_{I_i}\chi_{(x_{i-1},x_i]}(x) \\
\psi_{f,\Pi}(x) &:= M_{I_1}\chi_{\{x_0\}}(x) + \sum_{i=1}^{n} M_{I_i}\chi_{(x_{i-1},x_i]}(x), \quad M_{I_i} = \sup_{t\in I_i} f(t).
\end{aligned}$$

Observemos que $\Phi_{f,\Pi}(x) \leq f(x) \leq \psi_{f,\Pi}(x) \quad \forall x \in [a,b]$. Además,

$$\begin{aligned}
\int_a^b \Phi_{f,\Pi}(x)dx &= \underline{S}(f,\Pi), \\
\int_a^b \psi_{f,\Pi}(x)dx &= \overline{S}(f,\Pi).
\end{aligned}$$

En particular, si f es Riemann integrable,

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx &= \inf\left\{\int_a^b \psi_{f,\Pi} \ : \ \Pi \text{ partición}\right\} \\
= \underline{\int_a^b} f(x)dx &= \sup\left\{\int_a^b \Phi_{f,\Pi} \ : \ \Pi \text{ partición}\right\}.
\end{aligned}$$

> **Definición 1.21** (función escalonada)**.** Una función $\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ se dice escalonada si existen $\Pi = \{x_0, \dots, x_n\}$ partición de $[a,b]$ y $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ tales que
> $$\Phi|_{(x_{i-1},x_i)} \equiv c_i \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Notemos que podemos escribir a cualquier función Φ escalonada como

$$\begin{aligned}\Phi(x) &:= \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \chi_{(x_{i-1},x_i)}(x) + \sum_{i=0}^{n} \Phi(x_i) \cdot \chi_{\{x_i\}}(x) \\ &= \sum_{i=1}^{k} c_j \cdot \chi_{A_j}(x).\end{aligned}$$

donde los A_j son intervalos disjuntos tales que $\biguplus_{j=1}^{k} A_j = [a,b]$ (se pone una "D" dentro de la unión para denotar que estamos haciendo una unión disjunta).

Si tomamos Φ de la forma $\Phi = \sum_{j=1}^{k} c_j \cdot \chi_{A_j}$ con $(A_j)_{j=1,\dots,k}$ disjuntos, $\biguplus_{j=1}^{k} A_j = [a,b]$ pero A_j no son necesariamente intervalos, diremos que Φ es una función escalonada generalizada. Como para funciones escalonadas "normales", tenemos

$$\int_a^b \Phi(x)dx = \sum_{j=1}^{k} c_j \cdot |A_j| \left(= \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot |I_i| \right)$$

La función longitud Sea $\mathcal{I}$ la colección de los intervalos en $\mathbb{R}$. Definimos la función longitud $\lambda : \mathcal{I} \to [0,\infty]$ como $\lambda(I) := |I|$.
Propiedades:

1. $\lambda(\varnothing) = 0$;
2. $I_1, I_2 \in \mathcal{I},\ I_1 \subseteq I_2 \Rightarrow \lambda(I_1) \leq \lambda(I_2)$ (Monotonía de λ);
3. (Aditividad finita de λ) Si $I \in \mathcal{I}$ es tal que $I = \biguplus_{i=1}^{n} J_i$ con $J_i \in \mathcal{I},\ \forall i = 1,\dots,n,\ J_i \cap J_j = \varnothing$ con $i \neq j$, entonces
$$\lambda(I) = \sum_{i=1}^{n} \lambda(J_i);$$
4. (σ-aditividad de λ) Si $I \in \mathcal{I}$ es tal que $I = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$, con $(I_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{I}$ disjuntos, entonces
$$\lambda(I) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(I_i);$$
5. (σ-subaditividad de λ) Si $I \in \mathcal{I}$ verifica $I \subseteq \displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i,\ (I_1)_{i\in\mathbb{N}})$ intervalos (no necesariamente disjuntos), entonces $\lambda(I) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(I_i)$;
6. $\lambda(I + x) = \lambda(I),\ \forall x \in \mathbb{R},\ I + x := \{a + x \ :\ a \in I\}$;
7. $\lambda(\{x\}) = 0\ \forall\ x \in \mathbb{R}$.

Clase 6

20 de Agosto

Nos gustaría extender λ a una clase más grande que $\mathcal{I}$. Más precisamente, nos gustaría definir una aplicación $m : \mathcal{M} \to [0,\infty]$, donde $\mathcal{M}$ es una coleccción de subconjuntos de $\mathbb{R}$ tal que $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{M}$, de manera tal que, dado $E \in \mathcal{M},\ m(E)$ represente la "longitud" de E. Idealmente, nos gustaría que m cumpla lo siguiente:

1. $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$;
2. Si $I \in \mathcal{I}$, entonces $m(I) = |I|$;
3. m es σ-aditiva $(E,\ (E_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M},\ E = \biguplus_{n=1}^{\infty} E_n \Rightarrow m(E) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n))$;

Ejercicio. $(1) + (2) + (3) \Rightarrow m$ es monótona, σ-subaditiva y finitamente aditiva.

4 Si $E \in \mathcal{M}$, entonces $E + x \in \mathcal{M}$ y $m(E + x) = m(E)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

El problema es que, si asumimos el Axioma de Elección, uno puede mostrar que no existe una tal m que cumpla $(1) - (2) - (3) - (4)$ y, de hecho, no se sabe si existe m que cumpla $(1) - (2) - (3)$. (Si asumimos la hipótesis del continuo, entonces no existe m que cumpla $(1) - (2) - (3)$).

Luego, para construir m debemos debilitar alguna de las propiedades:

- Si debilitamos (1) $\Rightarrow$ TEORÍA DE LA MEDIDA;
- Si debilitamos (3), tenemos dos opciones sobre lo que pedir:

  $\rightarrow$ aditividad finita $\Rightarrow$ "medidas finitamente aditivas";

  $\rightarrow$ σ-subaditividad $\Rightarrow$ "medidas exteriores".

Vamos a optar por debilitar (1).

Una manera de extender λ es la siguiente:

i. Si $E = \biguplus_{i=1}^{n} I_i$ entonces defninimos $\lambda(E) \coloneqq \sum_{i=1}^{n} \lambda(I_i)$;

ii. Si $E = \biguplus_{i=1}^{\infty} I_i$ entonces definimos $\lambda(E) \coloneqq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(I_i)$;

iii. La fórmula anterior nos permite definir $\lambda(E)$ para todo E abierto en $\mathbb{R}$;

iv. Para conjuntos mas generales, "aproximar" por abiertos.

Definición 1.22 (premedida)**.** Sea X un conjunto no vacío y $\mathscr{C}$ una colección de subconjuntos de X tal que $\varnothing \in \mathscr{C}$. Diremos que una aplicación $\tau : \mathscr{C} \to [0, \infty]$ es una premedida si $\tau(\varnothing) = 0$.

Observación. El conjunto no vacío X será llamado un espacio y la colección $\mathscr{C}$ será llamada una clase (de subconjuntos de X).

Intuitivamente, $\mathscr{C}$ representa la colección de subconjuntos cuyo "tamaño" sabemos medir y τ nos da su medida.

Ejemplo.

1. **Premedida de Lebesgue:** $\mathscr{C} \coloneqq \mathcal{I} \coloneqq \{I \subseteq \mathbb{R} \ :\ I \text{ intervalo}\},\ \tau(I) \coloneqq |I|$.
2. **Premedidas de Lebesgue-Stieltjes:** Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monótona creciente y continua a derecha $(\lim_{x\to x_0}^{+} F(x) = F(x_0))$. Una función tal se dice una función de Lebesgue-Stieltjes.

Observemos que, por monotonía, existen los límites

$$\left.\begin{cases} F(\infty) := \lim_{x\to\infty} F(x) \\ F(-\infty) := \lim_{x\to-\infty} F(x) \end{cases}\right\} \in \mathbb{R}$$

Sea además la clase $\widetilde{\mathcal{I}}$ de intervalos de $\mathbb{R}$ dada por

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{I}} &:= \{I(a,b) \ : \ -\infty \leq a \leq b \leq \infty\} \text{ donde } I(a,b) := (a,b] \cap \mathbb{R} \\ &= \{(a,b] \ : \ -\infty \leq a \leq b < \infty\} \cup \{(a,\infty) \ : \ -\infty \leq a < \infty\}. \end{aligned}$$

Definimos la premedida τ_F de Lebesgue-Stieltjes asociada a F como la aplicación $\tau_F : \widetilde{\mathcal{I}} \to [0,\infty]$, dada por

$$\tau_F(I(a,b)) = F(b) - F(a).$$

Nota. Observar que si $F(x) = x$ entonces τ_F es la premedida de Lebesgue (sobre $\widetilde{\mathcal{I}}$.

3. **Premedidas de Probabilidad:** Si F es una función de L-S tal que $F(\infty) = 1$ y $F(-\infty) = 0$, decimos que F es una función de distribución (acumulada). En tal caso, la premedida τ_F se conoce como premedida de probabilidad o predistribución (en $\mathbb{R}$).

Observación. $\tau_F(\mathbb{R}) = \tau_F(I(-\infty,\infty)) = F(\infty) - F(-\infty) = 1 - 0 = 1.$

4. **Premedida...**

Clase 7

22 de Agosto

Definición 1.23 (semiálgebra)**.** Sea X un espacio y $\mathscr{C}$ una clase de subconjuntos de X. Decimos que $\mathscr{C}$ es una semiálgebra (de subconjuntos de X) si cumple:

1. $\varnothing \in \mathscr{C}$;
2. ($\mathscr{C}$ es cerrada por intesecciones finitas) $A, B \in \mathscr{C} \Rightarrow A \cap B \in \mathscr{C}$;
3. Si $A \in \mathscr{C}$, existen $C_1, \ldots, C_n \in \mathscr{C}$ disjuntos tal que $A^c = \biguplus_{i=1}^n C_i$.

Ejemplo.

1. La clase $\mathcal{I}_d$ de intervalos en $\mathbb{R}^d$ es una semiálgebra.
2. La clase $\widetilde{\mathcal{I}} := \{(a,b] \cap \mathbb{R} \ : \ -\infty \leq a \leq b \leq \infty\}$ es una semiálgebra.
3. Si X e Y son espacios y $\mathscr{C}_X, \mathscr{C}_Y$ son semiálgebras en X e Y respectivamente, entonces

$$\mathscr{C}_X \times \mathscr{C}_Y := \{F \times G \ : \ F \in \mathscr{C}_X, \ G \in \mathscr{C}_Y\}$$

es una semiálgebra en $X \times Y$, llamada "semiálgebra producto".

Definición 1.24 (álgebra)**.** Sean X un espacio y $\mathscr{A}$ una clase de subconjuntos de X. Decimos que $\mathscr{A}$ es un álgebra (de subconjuntos de X) si cumple que:

(i) $\varnothing \in \mathscr{A}$;

(ii) $\mathscr{A}$ es cerrado por intersecciones finitas;

(iii) ($\mathscr{A}$ es cerrada por complementos) $A \in \mathscr{A} \Rightarrow A^c \in \mathscr{A}$.

Equivalentemente, en presencia de (iii), (ii) se puede reemplazar por:

(ii') ($\mathscr{A}$ es cerrada por uniones finitas) $A, B \in \mathscr{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathscr{A}$. (**Dem:** Ejercicio!)

Ejemplo.

1. X espacio, $\mathscr{A}_1 := \{\varnothing, X\}$, $\mathscr{A}_2 := \mathcal{P}(X)$ son álgebras (donde $\mathscr{A}$ es llamada el álgebra trivial);
2. Sea $\mathscr{S}$ una semiálgebra de subconjuntos de un espacio X. Entonces
$$\mathscr{A} := \left\{ E \subseteq X \ : \ \exists S_1, \ldots, S_n \in \mathscr{S} \text{ disjuntos tal que } E = \biguplus_{i=1}^{n} S_i \right\}$$
es un álgebra, llamada el álgebra generada por $\mathscr{S}$. Notemos que $\mathscr{A}(\mathscr{S})$ es el menor álgebra que contiene a $\mathscr{S}$:
   (i) $\mathscr{A}(\mathscr{S})$ es un álgebra y $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{A}(\mathscr{S})$;
   (ii) Si $\mathscr{A}'$ es un álgebra con $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{A}'$ entonces $\mathscr{A}(\mathscr{S}) \subseteq \mathscr{A}'$.

Nota. Toda álgebra es una semiálgebra.

Definición 1.25 (σ-álgebra)**.** Una clase (no vacía) $\mathscr{M}$ de subconjuntos de un espacio X se dice una σ-álgebra si cumple:

1. $\varnothing \in \mathscr{M}$;
2. $E \in \mathscr{M} \Rightarrow E^c \in \mathscr{M}$;
3. $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{M} \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathscr{M}$.

Llamamos al par $(X, \mathscr{M})$ un espacio medible y a los elementos de $\mathscr{M}$, conjuntos medibles.

Nota.

1. Todo σ-álgebra es un álgebra;
2. Equivalentemente, en presencia de (1), (3) se puede reemplazar por

   (3'.) $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{M} \Rightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathscr{M}$.

Ejemplo.

1. σ-álgebra $\Rightarrow$ álgebra $\Rightarrow$ semiálgebra (no valen las recíprocas);
2. $\{\varnothing, X\}, \mathcal{P}(X)$ son σ-álgebras;
3. Si $(\mathscr{M}_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ son σ-álgebras, entonces
$$\bigcap_{\gamma\in\Gamma} \mathscr{M}_\gamma \coloneqq \{E \subseteq X \ : \ E \in \mathscr{M}_\gamma,\ \forall \gamma \in \Gamma\}$$
es una σ-álgebra.
4. Si $\mathscr{M}$ es una clase de subconjuntos de X, entonces
$$\sigma(\mathscr{M}) \coloneqq \bigcap_{\substack{\mathscr{M}\ \sigma\text{-álgebra} \\ \mathscr{C} \subseteq \mathscr{M}}} \mathscr{M}$$
es la σ-álgebra generada por $\mathscr{M}$. De hecho, $\sigma(\mathscr{M})$ es la menor σ-álgebra que contiene a $\mathscr{C}$:
   (a) $\sigma(\mathscr{C})$ es σ-álgebra y $\mathscr{C} \subseteq \sigma(\mathscr{C})$;
   (b) Si $\mathscr{F}$ es σ-álgebra y $\mathscr{C} \subset \mathscr{F}$ entonces $\sigma(\mathscr{C}) \subseteq \mathscr{F}$.
5. Si $(X, \mathscr{T})$ es un espacio topológico, $\sigma(\mathscr{T})$ se conoce como la σ-álgebra de Borel, y sus elementos se llaman Borelianos. La notamos $\beta(X)$ (= $\sigma(\mathscr{T})$).

Ejemplo. $\beta(\mathbb{R})$ contiene a todos los abiertos, cerrados, intervalos, conjuntos de tipo G_δ y $F_\sigma, \ldots$ De hecho, $\beta(\mathbb{R}) = \sigma(\text{cerrados}) = \sigma(\text{compactos}) = \sigma(\mathcal{I}) = \sigma(\widetilde{\mathcal{I}})$.

Definición 1.26. Sea $\mathscr{C}$ una clase (no vacía) de subconjuntos de X y $\mu : \mathscr{C} \to [0, \infty]$ una función (la llamamos una función de conjuntos). Diremos que:

(i) μ **es monótona** (en $\mathscr{C}$) si $A, B \in \mathscr{C},\ A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$;

(ii) μ **es finitamente aditiva** si $(A_i)_{i=1,\ldots,n} \subseteq \mathscr{C}$, entonces
$$\mu(\biguplus_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i);$$

(iii) μ **es σ-aditiva** si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{C}$ disjuntos, entonces
$$\mu(\biguplus_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i);$$

(iv) μ **es σ-subaditiva** si $\mu(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_n)$, para todo $A \in \mathscr{C}$ y $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{C}$ tal que $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$

Clase 8

25 de Agosto

Observación. Rana da una definición más débil de (4):

$$A \in \mathscr{C},\ A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,\ A_i \in \mathscr{C}\ \forall i \Rightarrow \mu(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

Ambas definiciones son equivalentes si $\mathscr{C}$ es una semiálgebra y μ es monótona (siempre será el caso para nosotros).

Definición 1.27 (premedida finita y σ-finita)**.** Una premedida $\tau : \mathscr{C} \to [0, \infty]$ se dice:

1. **finita** si $X \in \mathscr{C}$ y $\tau < \infty$;
2. **σ-finita** si existen $(C_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{C}$ disjuntos tales que

$$\biguplus_{n=1}^{\infty} C_n = X \quad \text{y} \quad \tau(C_n) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ejemplo.

1. finita $\Rightarrow$ σ-finita;
2. La función longitud $\lambda : \mathcal{I} \to [0, \infty]$ es σ-finita pero no finita;
3. Si F es una función de L-S, entonces $\tau_F : \widetilde{\mathcal{I}} \to [0, \infty]$ es siempre σ-finita ($\tau_F((n, n+1]) = F(n+1) - F(n) < \infty\ \forall n \in \mathbb{Z}$) y es finita si y sólo si $\tau_F(\mathbb{R}) = \tau_F((-\infty, \infty] \cap \mathbb{R}) = F(\infty) - F(-\infty) < \infty$.

Definición 1.28 (medida)**.** Sea $(X, \mathscr{M})$ es un espacio medible. Diremos que $\mu : \mathscr{M} \to [0, \infty]$ es una medida (en $(X, \mathscr{M})$) si:

1. $\mu(\varnothing) = 0$;
2. μ es σ-aditiva en $\mathscr{M}$ $\left(\mu\left(\biguplus_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)\right)$.

Llamamos a la terna $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un epacio de medida.

Objetivo. Construir un espacio de medida $(\mathbb{R}, \mathscr{M}, \mu)$ tal que $\mathcal{I} \subseteq \mathscr{M}$ y

$$\begin{cases} \mu(I) = |I|\ \forall I \in \mathcal{I}, \\ \mu(E + x) = \mu(E)\ \forall E \in \mathscr{M}. \end{cases}$$

Ejemplo (Espacios de Probabilidad)**.** Si $(X, \mathscr{M}, \mu)$ es un EdM tal que $\mu(X) = 1$, $(X, \mathscr{M}, \mu)$ recibe el nombre de espacios de probabilidad.

- X recibe el nombre de espacio muestral, y se lo nota Ω (en lugar de X);
- $\mathscr{M}$ se suele notar como $\mathscr{F}$ (ó $\mathscr{Y}$). Sus elementos se dicen eventos;

- μ recibe el nombre de medida de probabilidad ó distribución y se la nota $\mathbb{P}$.

En probabilidad, típicamente se estudian 2 tipos de distribuciones en $\mathbb{R}$ (o en $\mathbb{R}^d$).

1. **Distribuciones discretas:** $\exists S \subseteq \mathbb{R}$ numerable y $(p_x)_{x\in S} \subseteq [0,1]$ tal que $\mathbb{P}(A) = \sum_{x\in A\cap S} p_x$.
   Ejemplo. Binomial, Geométrica, Poisson,...
2. **Distribuciones (absolutamente) continuas:** $\exists f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ "integrable" tal que $\mathbb{P}(A) = \int_A f(x)dx$.
   Ejemplo. Uniforme, Exponencial, Normal,...

Propiedades generales de una medida. Si μ es una medida sobre $(X, \mathscr{M})$, entonces:

1. μ es monótona (en $\mathscr{M}$);
2. μ es σ-subaditiva;
3. μ es **continua por debajo**: si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{M}$ es creciente ($A_n \subseteq A_{n+1}\ \forall n$) entonces
$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$
4. μ es **continua por arriba**: si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{M}$ es decreciente ($A_{n+1} \subseteq A_n\ \forall n$) y $\mu(A_{n_0}) < \infty$ para algún n_0 ($\Rightarrow \mu(A_n) < \infty\ \forall n \geq n_0$), entonces
$$\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

   (**Cuidado!** (4) puede no valer si $\mu(A_n) = \infty\ \forall n \in \mathbb{N}$)

Definición 1.29 (premedida extendible y unívocamente extendible)**.** Una premedida $\tau : \mathscr{S} \to [0,\infty]$ definida sobre una semiálgebra de subconjunto de X, se dice:

1. **Extendible** si es
   (E1) finitamente aditiva en $\mathscr{S}$;
   (E2) σ-subaditiva en $\mathscr{S}$.
2. **Unívocamente extendible** si es extendible y se cumple
   (E3) σ-finita

Observación. Los nombres de extendible y unívocamente extendible no se encontrarán en el Rana (los puso el profe).

Teorema 1.30 (Extensión de Carathéodory). Dados un espacio X y una premedida τ sobre una semiálgebra $\mathscr{S}$ de subconjuntos de X tal que τ es extendible, existe una extensión de τ a una medida μ_τ definida sobre $\sigma(\mathscr{S})$ la σ-álgebra generada por $\mathscr{S}$. Más aún, si τ es unívocamente extendible, entonces la extensión μ_τ a $\sigma(\mathscr{S})$ es única.
Por último, si τ es unívocamente extendible, entonces se puede extender de manera única a una medida $\overline{\mu_\tau}$ sobre la μ_τ-completación de $\sigma(\mathscr{S})$, i.e. la σ-álgebra $\overline{\sigma(\mathscr{S})}$ dada por

$$\overline{\sigma(\mathscr{S})} := \{B \cup N : B \in \sigma(\mathscr{S}), \exists \widetilde{N} \in \sigma(\mathscr{S}) \text{ con } N \subseteq \widetilde{N} \text{ y } \mu_\tau(\widetilde{N}) = 0\}$$

mediante la fórmula $\overline{\mu_\tau}(B \cap N) := \mu_\tau(B)$.

Clase 9

27 de Agosto

Observación. Si $\tau : \mathscr{S} \to [0, \infty]$ es σ-aditiva en $\mathscr{S}$ y $\mathscr{S}$ es una semiálgebra, entonces τ es extendible.

Observación. La extensión puede no ser única si τ no es σ-finita.

Ejemplo. $\widetilde{\mathcal{I}}_{\mathbb{Q}} := \widetilde{\mathcal{I}} \cap \mathbb{Q} = \{(a, b] \cap \mathbb{Q} \ : \ -\infty \leq a \leq b \leq \infty\}$

Nota.

- $\widetilde{\mathcal{I}}_{\mathbb{Q}}$ es una semiálgebra;
- $\sigma(\widetilde{\mathcal{I}}_{\mathbb{Q}}) = \sigma(\widetilde{\mathcal{I}} \cap \mathbb{Q}) \overset{\text{Ej!}}{=} \sigma(\widetilde{\mathcal{I}}) \cap \mathbb{Q} = \beta(\mathbb{R}) \cap \mathbb{Q} = \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ (9.52)
- $\tau : \widetilde{\mathcal{I}}_{\mathbb{Q}} \to [0, \infty]$, dada por $\tau(A) := \begin{cases} 0 & A = \varnothing \\ \infty & A \neq \varnothing, \ A \in \widetilde{\mathcal{I}}_{\mathbb{Q}} \end{cases}$ (Observar que τ no es σ-finita)
- Para cada $r > 0$, $\mu_r : \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \to [0, \infty]$ dada por $\mu_r(A) := r(\#A)$ es una extensión de τ (y es una medida)

Definición 1.31 (espacio completo y conjuntos μ-nulos). Sea $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un EdM y definamos

$$\mathscr{N}_\mu := \{E \subset X \ : \ \exists N \in \mathscr{M} \text{ con } E \subseteq N \text{ y } \mu(N) = 0\}$$

Los elementos de $\mathscr{N}_\mu$ se dicen conjuntos μ-nulos. Diremos que $(X, \mathscr{M}, \mu)$ es completo si $\mathscr{N}_\mu \subseteq \mathscr{M}$

Observación. $(X, \overline{\sigma(\mathscr{S})}, \overline{\mu_\delta})$ es completo. En efecto, $\mathscr{N}_{\overline{\mu_\delta}}$ corresponde al subconjunto de $\overline{\sigma(\mathscr{S})}$ que se obtiene tomando $B = \varnothing$.

Observación. Veremos más adelante que las siguientes premedidas son UE:

(i) Premedidas de Lebesgue-Stieltjes (en particular, la función longitud λ (sobre $\widetilde{\mathcal{I}}$) y las premedidas de probabilidad).

(ii) Premedidas de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$, con $d \in \mathbb{N}$.

En particular;

Corolario 1.32. Para cada función F de Lebesgue-Stieltjes, existe una σ-álgebra $\mathscr{M}_F$ sobre $\mathbb{R}$ y una única medida μ_F en $(\mathbb{R}, \mathscr{M}_F)$ tal que

$$\mu_F = (I(a,b)) = F(b) - F(a) \quad \forall -\infty \leq a \leq b \leq \infty$$

Además, $\beta(\mathbb{R}) \subseteq \mathscr{M}_F$. Es decir, μ_F es una medida que extiende a τ_F, a todo $\mathscr{M}_F$ (y en particular, a todo $\beta(\mathbb{R})$). Además, $(\mathbb{R}, \mathscr{M}_F, \mu_F)$ es un EdM completo. ($\mathscr{M}_F := \overline{\sigma(\widetilde{\mathcal{I}})^F}$, $\mu_F := \overline{\mu_{\tau_F}}$). La medida μ_F se conoce como medida de L-S asociada a F. En particular, para cualquier función de distribución F, existe una única medida de probabilidad $\mathbb{P}_F$ en $(\mathbb{R}, \beta(\mathbb{R}))$ tal que

$$\mathbb{P}_F(I(a,b)) = F(b) - F(a) \quad \forall -\infty \leq a \leq b \leq \infty$$

(En la guía 3 veremos que $F \to \mathbb{P}_F$ es una biyección)

Nota. Los β son los Borelianos y $I(a,b) = (a,b] \cap \mathbb{R}$. (super $F \to 10.26$).

Ejemplo (Importante!). **Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.** Tomando $F = id$ en el Corolario anterior, obtenemos una σ-álgebra $\mathscr{L}(\mathbb{R}) := \mathscr{M}_{id}$ con $\beta(\mathbb{R}) \subseteq \mathscr{L}(\mathbb{R})$ y una medida μ_{id} en $(\mathbb{R}, \mathscr{L}(\mathbb{R}))$ tal que $\mu_{id}(I(a,b)) = b - a \quad \forall -\infty \leq a \leq b \leq \infty$. En particular, de esto se deduce que $\mu_{id}(I) = |I| \quad \forall I \in \mathcal{I}$. Dicha medida recibe el nombre de medida de Lebesgue (en $\mathbb{R}$), y los elementos de $\mathscr{L}(\mathbb{R})$ se dicen conjuntos medibles Lebesgue. Adoptaremos la notación $\mu_{id}(E) := \lambda(E) := |E|$. La medida μ_{id} es la extensión de la noción de longitud que buscábamos y $\mathscr{L}(\mathbb{R})$ son los conjuntos cuya "longitud" podremos medir. Además, los conjuntos de medida nula (de la guía 2), son exactamente aquellos $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$ tal que $\mu_{id}(A) = 0$ (lo veremos más adelante!).

Ejemplo (Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$). Si $\mathcal{I}_d$ son los intervalos en $\mathbb{R}^d$ y definimos $\tau : \mathcal{I}_d \to [0, \infty]$ como $\tau(I) := |I|$, entonces $\mathcal{I}_d$ es una semiálgebra y τ es una premedida σ-aditiva en $\mathcal{I}_d$ (lo veremos después). Por lo tanto, τ se puede extender (de manera única, pues τ es σ-finita) a una medida μ_δ sobre la σ-álgebra $\mathscr{L}(\mathbb{R}^d) = \overline{\sigma(\mathcal{I}_d)^\tau}$, llamada medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$ y $\mathscr{L}(\mathbb{R}^d)$ es la clase de conjuntos medibles Lebesgue en $\mathbb{R}^d$. Al igual que antes, dado $E \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^d)$, notamos $|E| := \mu_\tau(E)$.

Clase 10

29 de Agosto

1.2 Demostración del teorema de extensión de Carathéodory

Paso 1: Medidas Exteriores

Proposición 1.33. Si $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo,

$$|E|_e = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \ : \ (I_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ intervalos, } E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right\}$$

Demostración.
($\geq$) Tomando $I_1 = I,\ I_{n+1} = \varnothing \quad \forall n \in \mathbb{N}$

($\leq$) Por la σ-subaditividad de λ en $\mathcal{I}$: si $I \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}$ entonces $\lambda(I) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(I_i)$. □

Definición 1.34 (Medida exterior inducida por una premedida)**.** Sea X un espacio, $\mathscr{C}$ una clase de subconjuntos de X y $\tau : \mathscr{C} \to [0, \infty]$ una premedida. Definimos la medida exterior inducida por τ como la aplicación $\mu_\tau^* : \mathscr{P}(X) \to [0, \infty]$ dada por

$$\mu_\tau^*(A) \coloneqq \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} \tau(C_i) \ : \ (C_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{C} \text{ y } A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\}$$

con la convención de que $\inf \varnothing \coloneqq \infty$.

Ejemplo. μ_λ^* = *medida exterior de Lebesgue* y la notamos $|E|_e \coloneqq \mu_\lambda^*(E)$.
Idealmente, nos gustaría que μ_τ^* cumpla

$$\begin{cases} (C1)\ \mu_{\tau^*}(C) = \tau(C) \quad \forall C \in \mathscr{C} \\ (C2)\ \mu_\tau^* \text{ es } \sigma\text{-subaditiva en } \mathscr{P}(X) \end{cases}$$

pero no tienen por qué cumplirse ninguna de la 2:

(C1) Sean $X = \{a, b\},\ \mathscr{C} = \{\varnothing, \{a\}, X\}$,

$$\tau(A) = \begin{cases} 0 & A = \varnothing \\ 2 & A = \{a\} \\ 1 & A = X \end{cases}$$

Luego, $\tau(\{a\}) = 2,\ \mu_\tau^*(\{a\}) = 1 \neq \tau(\{a\})$.

(C2) Medida exterior de Lebesgue no es σ-aditiva (lo vemos mas adelante!)

Proposición 1.35. Si τ es una premedida sobre una semiálgebra $\mathscr{S}$ que satisface

(E2) τ es σ-subaditiva en $\mathscr{S}$,

entonces $\mu_\tau^*(A) = \tau(A) \quad \forall A \in \mathscr{S}$ (i.e. μ_τ^* cumple (C1)).

Demostración. $\mu_\tau^*(A) \leq \tau(A)$. Tomando $C_1 = A \in \mathscr{S},\ C_{n+1} = \varnothing \in \mathscr{S}$. Luego $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es cubrimiento de A por elementos de $\mathscr{S}$ y luego

$$\mu_\tau^*(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \tau(C_n) = \tau(A)$$

$\tau(A) \leq \mu_\tau^*(A)$. Si $(C_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{S}$ es un cubrimiento de $A \in \mathscr{S}$ entonces por (E2), tenemos que $\tau(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \tau(C_n)$. Tomando inf sobre tales cubrimientos, resulta $\tau(A) \leq \mu_\tau^*(A)$. $\square$

Teorema 1.36. Sean X un espacio, $\mathscr{C}$ una clase de subconjuntos de X y $\tau : \mathscr{C} \to [0,\infty]$ una premedida. Entonces,

1. $\mu_\tau^*(\varnothing)$;
2. μ_τ^* es monótona ($A \subseteq B \Rightarrow \mu_\tau^*(A) \leq \mu_\tau^*(B)$);
3. μ_τ^* es σ-subaditiva ($A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \Rightarrow \mu_\tau^*(A) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu_\tau^*(A_n)$.

Demostración.
1. $\mu_\tau^*(\varnothing) \geq 0$ es por definición. Para ver que $\mu_\tau^*(\varnothing) \leq 0$, tomamos el cubrimiento $C_n = \varnothing$ y repetimos el argumento de la Proposición anterior.
2. Si $\mu_\tau^*(B) = \infty$, la desigualdad es inmediata. Si $\mu_\tau^*(B) < \infty$, entonces existen cubrimientos de B por elementos de $\mathscr{S}$. Sea $(C_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{S}$ un cubrimiento de B. Entonces, $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es también cubrimiento de A y, luego, $\mu_\tau^*(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \tau(C_n)$. Como esto es cierto para todo cubrimiento $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de B, tomando ínfimo en la desigualdad anterior sobre tales cubrimientos resulta $\mu_\tau^*(A) \leq \mu_\tau^*(B)$.
3. Dado $\varepsilon > 0$, sea $(C_i^{(n)})_{i\in\mathbb{N}}$ un cubrimiento de A_n tal que $\sum_{i=1}^\infty \tau(C_i^{(n)}) \leq \mu_\tau^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$. Luego, notando que $(C_i^{(n)} \ : \ i \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N})$ es un cubrimiento de A, obtenemos que
$$\begin{aligned}\mu_\tau^*(A) \leq \sum_{n=1}^\infty \sum_{i=1}^\infty \tau(C_i^{(n)}) &\leq \sum_{n=1}^\infty \left(\mu_\tau^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right)\\ &\leq \sum_{n=1}^\infty \mu_\tau^*(A_n) + \varepsilon \underbrace{\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^m}}_{1}\end{aligned}$$
Luego, $\mu_\tau^*(A) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu_\tau^*(A_n) + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$. Tomando $\varepsilon \to 0^+$, obtenemos la σ-subaditividad de μ_τ^*.

$\square$

Definición 1.37 (medida exterior)**.** Sea X un espacio. Decimos que $\mu^* : \mathscr{P}(X) \to [0,\infty]$ es una <u>medida exterior</u> si:

1. $\mu^*(\varnothing) = 0$;
2. $A \subseteq B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$;
3. $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \Rightarrow \mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu^*(A_n)$.

Ejemplo.

1. Medidas exteriores generadas por una premedida;

2. Si $(\mu_\gamma^*)_{\gamma\in\Gamma}$ son medidas exteriores sobre X, entonces

$$\mu^*(A) := \sup_{\gamma\in\Gamma} \mu_\gamma^*(A)$$

es una medida exterior (Ej. Guía 3).

3. **Medida exterior s-dimensional de Hausdorff en $\mathbb{R}^d$.**

- Si I es un intervalo en $\mathbb{R}^d$, entonces $|rI| = r^d|I|$;
- Si $E \subseteq \mathbb{R}^d$ es medible Lebesgue, entonces $|rE| = r^d|E|$;
- En particular, si $E = B(x,r)$, entonces

$$|E| = |B(0,r)| = |rB(0,1)| = r^d|B(0,1)| = C_d(diamE)^d, \quad C_d := \frac{|B(0,1)|}{2^d}$$

- Si $E \subseteq \mathbb{R}^d$ es "s-dimensional" y $\mathscr{H}_s$ es la medida que queremos, entonces debería valer que

$$\mathscr{H}_s(E\cap B(x,r)) = \mathscr{H}_s(\text{entorno s-dimensional}) \approx (diam\ (\text{entorno}))^s$$

Luego, si cubrimos a E por entornos pequeños $(E\cap B(x,r))_{i\in\mathbb{N}}$, entonces

$$\mathscr{H}_s(E) \approx \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathscr{H}_s(E\cap B(x_i,r_i)) \approx \sum_{i\in\mathbb{N}} (diam(E\cap B(x_i,r_i)))^s.$$

Clase 11

1 de Septiembre

Medida exterior de Hausdorff

$\mathscr{H}_s$ = medida que "mide" el tamaño de objetos s-dimensionales en $\mathbb{R}^d$.

Si E es un conjunto s-dimensional en $\mathbb{R}^d$, entonces

$$\mathscr{H}_s(E) \overset{r_1\ll 1}{\approx} \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathscr{H}_s(E\cap B(x_i,r_i)) \approx \sum_{i\in\mathbb{N}} (\text{diam}(E\cap B(x_i,r_i)))^s.$$

Teniendo esto en cuenta, dados $d \in \mathbb{N}$, $s \in [0,d]$, $\delta > 0$, definimos:

- $C_\delta := \{A \subseteq \mathbb{R}^d \ : \ \text{diam}A < \delta\}$;
- $\mathscr{H}_s^{(\delta)}(E) := \inf\{\sum_{n\in\mathbb{N}} (\text{diam}A_n)^s \ : \ (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C_\delta,\ E \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\}$. Donde $\mathscr{H}_s^{(\delta)}(E)$ es la medida exterior inducida por $\tau_s^{(\delta)}$ y $\tau_s^{(\delta)}(A) := (\text{diam}A)^s$ la δ-premedida de Hausdorff s-dimensional en $\mathbb{R}^d$ con $\tau_s^{(\delta)} : C_\delta \to [0,\infty]$.

Observar. Si $\delta' < \delta$ entonces $\mathscr{H}_s^{(\delta')}(E) \geq \mathscr{H}_s^{(\delta)}(E)$.

Luego, podemos definir

$$\mathscr{H}_s(E) := \sup_{\delta>0} \mathscr{H}_s^{(\delta)}(E) = \lim_{\delta\to 0^+} \mathscr{H}_s^{(\delta)}(E),$$

donde $\mathscr{H}_s$ es la medida exterior de Hausdorff s-dimensional en $\mathbb{R}^d$.

Definición 1.38 (conjunto μ^*-medible). Sea X un espacio y $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ medida exterior. Decimos que $E \subseteq X$ es un conjunto μ^*-medible si

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \quad \forall A \subseteq X.$$

Observar. $\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$ vale siempre (por σ-subaditividad de μ^*. Luego, para ver que R es μ^*-medible, basta ver que $\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$.

Teorema 1.39. Sea μ^* una medida exterior sobre un espacio X. Entonces:

1. $\mu^*(E) = 0 \Rightarrow E$ es μ^*-medible;
2. La clase $\mathscr{M}_{\mu^*}$ de conjuntos μ^*-medibles es una σ-álgebra;
3. La restricción μ de μ^* a $\mathscr{M}_{\mu^*}$ es una medida.

En particular, $(X, \mathscr{M}_{\mu^*}, \mu)$ es un espacio de medida completo.

Demostración.

1. Si $A \subseteq X$, $\mu^*(A \cap E) \leq \mu^*(E) = 0$. Además, por monotonía, $\mu^*(A \cap E^c) \leq \mu^*(A)$. Luego, $\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) = 0 + \mu^*(A \cap E^c) \leq \mu^*(A)$.

---

2. ($\varnothing \in \mathscr{M}_{\mu^*}$): Se sigue de (1), pues $\mu^*(\varnothing) = 0$, por definición.

   ($E \in \mathscr{M}_{\mu^*}$): Directo de la definición de $\mathscr{M}_{\mu^*}$, puesto que es simétrica en E y E^c.

   ($(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathscr{M}_{\mu^*} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathscr{M}_{\mu^*}$): Esto lo demostramos en tres pasos.

   - En primer lugar, demostramos que si $E_1, E_2 \in \mathscr{M}_{\mu^*}$, entonces $E_1 \cap E_2, E_1 \cup E_2 \in \mathscr{M}_{\mu^*}$. Si $A \subseteq X$, entonces

   $$\begin{aligned} \mu^*(A) &= \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_1^c) \\ &= \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap \overbrace{E_1^c \cap E_2}^{E_2 \setminus E_1}) + \mu^*(A \cap \underbrace{E_1^c \cap E_2^c}_{(E_1 \cup E_2)^c}) \\ &\geq \mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) + \mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)^c). \end{aligned}$$

   Notar que la primera igualdad se tiene por $E_1 \in \mathscr{M}_{\mu^*}$ y la segunda por $E_2 \in \mathscr{M}_{\mu^*}$. Esto implica que $E_1 \cap E_2 \in \mathscr{M}_{\mu^*}$. Pero entonces $E_1 \cap E_2 = ((E_1 \cap E_2)^c)^c = (\underbrace{\underbrace{E_1^c}_{\in \mathscr{M}_{\mu^*}} \cup \underbrace{E_2^c}_{\in \mathscr{M}_{\mu^*}}}_{\in \mathscr{M}_{\mu^*}})^c \in \mathscr{M}_{\mu^*}$

- Para el segundo paso, demostramos que si $E_1, \dots, E_n \in \mathscr{M}_{\mu^*}$ disjuntos, entonces

$$\mu^* \left(A \cap \left(\biguplus_{i=1}^{n} E_i \right) \right) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A \cap E_i).$$

La idea es probarlo por inducción. Basta ver el caso $n = 2$ (los otros casos salen iterando éste)

$$\begin{aligned} &\mu^*(A \cap (E_1 \uplus E_2)) \\ &= \mu^*(\underbrace{A \cap (E_1 \uplus E_2) \cap E_1}_{A \cap E_1}) + \mu^*(\underbrace{A \cap (E_1 \uplus E_2) \cap E_1^c}_{A \cap E_2}). \end{aligned}$$

pues $E_2 \subseteq E_1^c$ por ser disjuntos. Por último, vemos que si $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathscr{M}_{\mu^*}$, entonces $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathscr{M}_{\mu^*}$. Podemos suponer que los E_n son disjuntos. Si no, los cambiamos por

$$\begin{aligned} E_1' &:= E_1 \in \mathscr{M}_{\mu^*} \\ E_2' &:= E_2 \setminus E_1 = E_2 \cap E_1^c \in \mathscr{M}_{\mu^*} \\ &\vdots \\ E_{n+1}' &:= E_{n+1} \setminus \bigcup_{i=1}^{n} E_i \in \mathscr{M}_{\mu^*}, \end{aligned}$$

y

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = \biguplus_{n=1}^{\infty} E_n'.$$

Sea

$$F_n := \biguplus_{i=1}^{n} E_i \longrightarrow E := \biguplus_{n \in \mathbb{N}} E_n.$$

Notar que si $F_n \subseteq E$, entonces $E^c \subseteq F_n^c$. Luego, dado $A \subseteq X$, como $F_n \in \mathscr{M}_{\mu^*}$, se tiene

$$\begin{aligned} \mu^*(A) = &\underbrace{\mu^*(A \cap F_n)}_{= \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A \cap E_i)} + \mu^*(\underbrace{A \cap F_n^c}_{\supseteq A \cap E^c}) \\ &\geq \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A \cap E_i) + \mu^*(A \cap E^c). \end{aligned}$$

Tomando $n \to \infty$,

$$\begin{aligned}
\mu^*(A) &\geq \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A \cap E_i) + \mu^*(A \cap E^c) \\
&\geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \qquad\qquad (\mu^* \ \sigma\text{-subad.}) \\
A \cap E &= \bigcup_{i=1}^{\infty} A \cap E_i.
\end{aligned}$$

Que era lo que necesitabamos. ✓

Con esto, tenemos que $\mathscr{M}_{\mu^*}$ es, en efecto, σ-álgebra.

□

Clase 12

3 de Septiembre

Teorema 1.40. Si μ^* es una medida exterior sobre un espacio X, entonces:

1. $\mu^*(E) = 0 \Rightarrow E$ es μ^*-medible;
2. $\mathscr{M}_{\mu^*} := \{E \subseteq X \mid E \text{ es } \mu^*\text{-medible}\}$ es σ-álgebra;
3. $\mu := \mu^*\big|_{\mathscr{M}_{\mu^*}}$ es una medida y $(X, \mathscr{M}_{\mu^*}, \mu)$ es completo.

Demostración (3). Debemos ver que si $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{M}_{\mu^*}$ son disjuntos entonces

$$\mu\left(\biguplus_{n=1}^{\infty}\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n)$$

La desigualdad $(\leq)$ viene dada ya que μ^* es σ-aditiva. Entonces, basta ver la desigualdad $(\geq)$. Para esto, notamos que:

$$\mu^*\left(\biguplus_{n=1}^{\infty} E_n\right) \underset{\substack{\downarrow \\ \mu^*\text{-monótona}}}{\geq} \mu^*\left(\biguplus_{n=1}^{M} E_n\right) \underset{\substack{\downarrow \\ E_n \text{ es } \mu^*\text{-medible } \forall n}}{=} \sum_{n=1}^{M} \mu^*(E_n)$$

Si tomamos $M \longrightarrow \infty$, resulta que

$$\mu^*\left(\biguplus_{n=1}^{\infty} E_n\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n).$$

Entonces, μ es medida. Ahora, tenemos que ver que $(X, \mathscr{M}_{\mu^*}, \mu)$ es completo. Notamos que si $E \subseteq X$ es μ-nulo, es decir, $\exists N \in \mathscr{M}_{\mu^*}$ tal que $E \subseteq N$ y $\mu(N) = 0$, entonces

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(N) = 0$$

Por lo tanto, $\mu^*(E) = 0$ y, por (1), $E \in \mathscr{M}_{\mu^*}$. □

Observación. Esto muestra que si μ es finitamente aditiva ($\Rightarrow$ monótona) y σ-subaditiva, entonces es σ-aditiva (es un si y sólo si).

Proposición 1.41. Si τ es una premedida sobre la semiálgebra $\mathscr{S}$ que es extendible ($E_1 + E_2$) entonces su medida exterior asociada μ_τ^* cumple que:

C1) $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{M}_{\mu^*} \quad (\Rightarrow \sigma(\mathscr{S}) \subseteq \mathscr{M}_{\mu^*})$;

C2) $\mu_\tau^*(A) = \tau(A) \quad \forall A \in \mathscr{S} \Leftrightarrow \mu(A) = \tau(A) \quad \forall A \in \mathscr{S}$ por (C1).

Demostración. (C2) ya se ha visto antes, entonces queda demostrar (C1). Necesitamos ver que si $A \in \mathscr{S}$ entonces

$$\mu_\tau^*(F) \geq \mu_\tau^*(F \cap A) + \mu_\tau^*(F \cap A^c) \quad \forall F \subseteq X.$$

En efecto, si $\mu_\tau^*(F) = \infty$, es evidente. Si $\mu_\tau^*(F) < \infty$, dado $\varepsilon > 0$, existen $(B_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{S}$ tal que $F \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i$ y $\sum_{i\in\mathbb{N}} \leq \mu_\tau^*(F) + \varepsilon$. Por otro lado, como $A \in \mathscr{S}$, existen $S_1, \ldots, S_k$ disjuntos tales que $A^c = \biguplus_{j=1}^k S_j$. Como $B_i = \bigcup_{j=1}^k B_i \cap S_j$, donde $S_0 := A$, por (E1)

$$\tau(B_i) = \sum_{j=0}^k \tau(B_i \cap S_j).$$

Sumando en i, resulta

$$\begin{aligned}
\mu_\tau^*(F) + \varepsilon \geq \sum_{i\in\mathbb{N}} \tau(B_i) &= \sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{i=0}^k \tau(B_i \cap S_j) \\
&= \sum_{j=0}^k \sum_{i\in\mathbb{N}} \tau(B_i \cap S_j) \\
\left(\begin{smallmatrix} B_i \cap S_j \in \mathscr{S} \\ \text{y } (C2) \end{smallmatrix}\right) &= \sum_{j=0}^k \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu_\tau^*(B_i \cap S_j) \\
\left(F \cap S_j \subseteq \textstyle\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i \cap S_j \Rightarrow\right) &\geq \sum_{j=0}^k \mu_\tau^*(F \cap S_j) \\
&= \mu_\tau^*(F \cap A) + \sum_{j=1}^k \mu_\tau^*(F \cap S_j) \\
\left(F \cap S^c \subseteq \textstyle\bigcup_{j=1}^k F \cap S_j \Rightarrow\right) &\geq \mu_\tau^*(F \cap A) + \mu_\tau^*(F \cap A^c).
\end{aligned}$$

Luego, A es μ_τ^*-medible (y se cumple $(C1)$). □

Corolario 1.42 (Carathéodory hasta ahora - Versión 1)**.** Si μ^* es una medida exterior en X, entonces

$$\mathscr{M}_{\mu^*} := \{E \subseteq X \ : \ E \text{ es } \mu^*\text{-medible}\}$$

es σ-álgebra y $(X, \mathscr{M}_{\mu^*}, \mu^*\big|_{\mathscr{M}_{\mu^*}})$ es un espacio de medida completo.

Además, si τ es una premedida en una semiálgebra $\mathscr{S}$ que es extendible y μ_τ^* es su medida exterior asociada, entonces $\sigma(\mathscr{S}) \subseteq \mathscr{M}_{\mu_\tau^*}$ y $\mu_\tau := \mu_\tau^*\big|_{\mathscr{M}_{\mu^*}}$ es una medida que se extiende a τ.

Teorema 1.43. Si τ es una premedida sobre una semiálgebra $\mathscr{S}$ que es unívocamente extendible $(E1+E2+E3)$ entonces $\sigma(\mathscr{S}) \subseteq \mathscr{M}_{\mu_\tau^*}$ y además son equivalentes:

1. $A \in \mathscr{M}_{\mu_\tau^*}$;
2. $\exists B \in \sigma(\mathscr{S}),\ N_1 \in \mathscr{M}_{\mu_\tau^*}$ con $\mu_\tau^*(N_1) = 0$ tal que $A = B - N_1$;
3. $\exists C \in \sigma(\mathscr{S}),\ N_2 \in \mathscr{M}_{\mu_\tau^*}$ con $\mu_\tau^*(N_2) = 0$ tal que $A = C \cup N_2$.

Observación. $\mu_\tau^*(A) = \mu_\tau^*(B) = \mu_\tau^*(C)$ y $\mathscr{M}_{\mu_\tau^*}$ es la $\mu_\tau^*\big|_{\sigma(\mathscr{S})}$-completación.

Demostración. Que $(2) \Rightarrow (1)$ y $(3) \Rightarrow (1)$ es inmediato. Veamos que $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)$.

$\boxed{(1) \Rightarrow (2)}$ Supongamos primero que $\mu_\tau^*(A) < \infty$. Dado $\varepsilon > 0$, existen $(B_n^{(\varepsilon)})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{S}$ tal que $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n^{(\varepsilon)}$ y $\sum_{n\in\mathbb{N}} \tau(B_n^{(\varepsilon)}) \leq \mu_\tau^*(A) + \varepsilon$. En praticular,

$$\begin{aligned}
\mu_\tau^*(A) \leq \mu_\tau^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n^{(\varepsilon)}\right) &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_\tau^*(B_n^{(\varepsilon)}) \\
\left(\substack{\mu_\tau^* \text{ extiende a} \\ \tau \text{ si es extendible}}\right) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \tau(B_n^{(\varepsilon)}) \leq \mu_\tau^*(A) + \varepsilon. \qquad (*)
\end{aligned}$$

Sea $B := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n^{(\frac{1}{k})}$. Notemos que $B \in \sigma(\mathscr{S})$ y que $A \subseteq B$. Además, como $A, B \in \mathscr{M}_{\mu^*}$ por hipótesis y $\sigma(\mathscr{S}) \subseteq \mathscr{M}_{\mu^*}$ y $\mu_\tau = \mu_\tau^*\big|_{\mathscr{M}_{\mu_\tau^*}}$ es finitamente aditiva y si definimos $N_1 := B \setminus A$ y $B^{(\frac{1}{k})} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n^{(\frac{1}{k})}$, entonces $N_1 \in \mathscr{M}_{\mu_\tau^*}$, $A := B - N_2$, y para todo $k_0 \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\mu_\tau^*(N_1) = \mu_\tau^*(B - A) &= \mu_\tau^*\Big(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} (B^{(\frac{1}{k})} \setminus A)\Big) \\
&\leq \mu_\tau^*(B^{(\frac{1}{k_0})} - A).
\end{aligned}$$

Luego,
$$A \subseteq B^{(\frac{1}{k_0})} \Rightarrow \mu_\tau^*(B^{(\frac{1}{k_0})}) - \mu_\tau^*(A) \leq \frac{1}{k_0} \qquad (*)$$
Tomando $k_0 \longrightarrow \infty$, resulta (1) $\Rightarrow$ (2). $\square$

Clase 13

5 de Septiembre

Demostración (Continuación clase anterior).

$\boxed{(1) \Rightarrow (2)}$ Si $\mu_\tau^*(A) < \infty$ (LISTO!). Si $\mu_\tau^*(A) = \infty$, tomamos $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{S}$ disjuntos tal que $X = \biguplus_{n\in\mathbb{N}} E_n$ y $\tau(E_n) < \infty$. Luego, $\mu_\tau^*(A \cap E_n) \leq \mu_\tau^*(E_n) = \tau(E_n) < \infty$ (La igualdad es, pues $E_n \in \mathscr{S}, \tau$ σ-sub). Por ende, por lo ya probado, existe $B_n \in \sigma(\mathscr{S})$ tal que $A \cap E_n \subseteq B_n$ y $\mu_\tau(B_n) = \mu_\tau(A \cap E_n) < \infty$. Luego, $B := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ y $N := B - A$ cumplen lo pedido pues $A = \biguplus_{n\in\mathbb{N}} A \cap E_n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = B$ y

$$\begin{aligned}\mu_\tau(B \setminus A) = \mu_\tau\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \setminus A\right) &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_\tau(B_n \setminus A)\\ &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_\tau(B_n \setminus (A \cap E_n))\\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\mu_\tau(B_n) - \mu_\tau(A \cap E_n)}_{0} = 0.\end{aligned}$$

$\boxed{(2) \Rightarrow (3)}$ Notemos que por (2) $\Rightarrow$ (1), $A \in \mathscr{M}_{\mu_\tau^*}$ si vale (2). En particular, $A^c \in \mathscr{M}_{\mu_\tau^*}$. Luego, por (1) $\Rightarrow$ (2) para A^c, $\exists \widetilde{B} \in \sigma(\mathscr{S})$ y $N_2 \in \mathscr{M}_{\mu_\tau^*}$ con $\mu_\tau(N_2) = 0$ tal que $A^c = \widetilde{B} - N_2$. Pero entonces, tomando $C := \widetilde{B}^c$, vemos que $C \in \sigma(\mathscr{S})$ y $A = (A^c)^c = (\widetilde{B} \cap N_2^c)^c = \widetilde{B}^c \cup (N_2^c)^c = C \cup N_2$. $\square$

Observación. $\mathscr{M}_{\mu_\tau^*} = \overline{\sigma(\mathscr{S})}$ (con resp. a $\mu_\tau^*|_{\sigma(\mathscr{S})}$). En efecto, si $A \in \mathscr{M}_{\mu_\tau^*}$ entonces, por (1) $\Rightarrow$ (3), existen $C \in \sigma(\mathscr{S})$ y $N \in \mathscr{M}_{\mu_\tau^*}$ tal que $A = C \cup N$ y $\mu_\tau^*(N) = 0$. Como $N \in \mathscr{M}_{\mu^*}$, por (1) $\Rightarrow$ (2) para N, existe $\widetilde{N} \in \sigma(\mathscr{S})$ tal que $N \subseteq \widetilde{N}$ y $0 = \mu_\tau(N) = \mu_\tau(\widetilde{N})$. Luego, N resulta $\mu_\tau^*\big|_{\sigma(\mathscr{S})}$-nulo y, por lo tanto, $N \in \overline{\sigma(\mathscr{S})^{\mu_\tau^*|_{\sigma(\mathscr{S})}}}$.

Por otro lado, si $A \in \overline{\sigma(\mathscr{S})}$ (resp. a $\mu_\tau^*|_{\sigma(\mathscr{S})}$), entonces $A = B \cup N$ donde $B \in \sigma(\mathscr{S})$ y $\exists \widetilde{N} \in \sigma(\mathscr{S})$ tal que $N \subseteq \widetilde{N}$ y $\mu_\tau^*(N) = 0$, y entonces $A = B \cup N \in \mathscr{M}_{\mu_\tau^*}$ (pues $\sigma(\mathscr{S}) \subseteq \mathscr{M}_{\mu_\tau^*}$).

Observación. En particular, hemos probado:

Proposición 1.44. Si τ es una premedida UE sobre una semiálgebra $\mathscr{S}$ entonces, dado $A \subseteq X$ (no necesariamente μ_τ^*-medible),

$$\begin{aligned}\mu_\tau^*(A) &:= \min\{\mu_\tau(B) \mid B \in \sigma(\mathscr{S}),\ A \subseteq B\}\\ &= \max\{\mu_\tau(C) \mid C \in \sigma(\mathscr{S}),\ C \subseteq A\}.\end{aligned}$$

Teorema 1.45. $\beta(\mathbb{R}^d) \subsetneq \mathcal{L}(\mathbb{R}^d) \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$. De hecho, $\#\mathscr{L}(\mathbb{R}^d) = 2^c$, $\#\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)\setminus \mathscr{L}(\mathbb{R}^d) = 2^c$, $\#\beta(\mathbb{R}^d) = c$.

Teorema 1.46. Existe $V \subseteq \mathbb{R}$ no medible Lebesgue.

Lema 1.47. $|E + x|_e = |E|_e \quad \forall E \subseteq \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}$. Además, si $E \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$, entonces $E + x \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$ y $|E| = |E + x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Axioma de Elección. Si $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ es una familia de conjuntos disjuntos, no vacíos, entonces existe un conjunto A tal que $A \cap A_\gamma$ tiene exactamente 1 elemento $\forall \gamma \in \Gamma$.

Demostración (lema 1.47)**.** Definimos una relación de equivalencia $\sim$ en $[0, 1)$ decretando que $x \sim y$ si $x - y \in \mathbb{Q}$. Por el Axioma de Elección, existe un conjunto $V \subseteq \mathbb{R}$ que tiene exactamente 1 elemento de cada clase de equivalencia de $\sim$. Observemos que:

V1) $(V + Q_1) \cap (V + Q_2) = \varnothing \quad \forall Q_1, Q_2 \in \mathbb{Q}$ distintos. En efecto, si $v_1 + Q_1 = v_2 + Q_2$ con $v_1, v_2 \in V \Rightarrow v_1 - v_2 = Q_2 - Q_1 \in \mathbb{Q} \Rightarrow v_1 \sim v_2 \Rightarrow v_1 = v_2 \Rightarrow Q_1 = Q_2$.

V2) $[0, 1) \subseteq \bigcup_{Q\in\mathbb{Q}} V + Q$. Notar que dado $x \in [0, 1)$, existe un único $v \in V$ tal que $x \sim v$, i.e., $x - v = Q \in \mathbb{Q} \Rightarrow x = v + Q \in V + Q$.

Si V fuera medible, por $(V2)$ y el Lema,

$$1 == |[0, 1)| \leq \sum_{Q\in\mathbb{Q}} |V + Q| = \sum_{Q\in\mathbb{Q}} |V| \Rightarrow |V| > 0$$

Por otro lado, por $(V1)$, $\biguplus_{Q\in\mathbb{Q}\cap[0,1)} V + Q \subseteq [0, 2)$, y luego, por el Lema y como $|V| > 0$,

$$\begin{aligned}
\infty = \sum_{Q\in\mathbb{Q}\cap[0,1)} |V| &= \Big| \biguplus_{Q\in\mathbb{Q}\cap[0,1)} V + Q \Big| \\
&\leq |[0, 2)| = |[0, 1)| + |[1, 2)| \\
&= |[0, 1)| + |1 + [0, 1)| = 2|[0, 1)| \\
&= 2 < \infty,
\end{aligned}$$

lo cual es una contradicción. Luego V no es medible. □

Clase 14

8 de Septiembre

1. Construimos un conjunto $V \subseteq [0, 1)$ tal que

   (V1) $(V + Q_1) \cap (V + Q_2) = \varnothing$, tal que $Q_1, Q_2 \in \mathbb{Q}$ son distintos;

   (V2) $[0, 1) \subseteq \bigcup_{Q\in\mathbb{Q}} (V + Q)$.

Cualquier conjunto $V \subseteq [0,1)$ que cumpla V_1 y V_2 se dice un cojunto de Vitali. Ningún conjunto de Vitali es medible Lebesgue.

2. La misma demostración se puede adaptar para mostrar que:
   i. Si $|E|_e > 0$ entonces existe $\widetilde{E} \subseteq E$ no medible Lebesgue;
   ii. Si μ es una medida en $\mathbb{R}$ invariante por traslaciones definida sobre una σ-álgebra $\mathcal{F}$ tal que $V \in \mathcal{F}$ entonces
   $$\mu([0,1)) = \begin{cases} 0 & (\Rightarrow \mu \equiv 0) \\ \infty & \end{cases}$$
   En particular, la noción de longitud no puede extenderse a todo $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ (de forma invariante por traslación).
   iii. $V \times [0,1]^{d-1} \notin \mathscr{L}(\mathbb{R}^d)$ para ningún $d > 1$.

Observación. La existencia de V nos dice que $|\cdot|_e$ no es ni siquiera finitamente aditiva.

Paradoja de Banach-Tarski. Si $A = B(0,1) \subseteq \mathbb{R}^d$, existe una partición finita de A,
$$A = A_1 \uplus A_2 \uplus \cdots \uplus A_k \quad \text{(basta tomar } k = 6)$$
tal que sólo mediante rotaciones y traslaciones de los A_j (operaciones que no cambian medida) se pueden obtener 2 copias disjuntas de A.

Definición 1.48 (π-sistema). Una clase de subcontuntos $\mathcal{P}$ de un espacio X, se dice un π-sistema si es cerrado por intersecciones finitas, i.e.,
$$A, B \in \mathcal{P} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{P}$$

Ejemplo.

- Semiálgebra $\Rightarrow$ π-sistema $\not\Rightarrow$ semiálgebra;
- $\mathcal{P} = \{(-\infty, x] \ : \ x \in \mathbb{R}\}$ es un π-sistema pero no semiálgebra;
- $\mathcal{P} \subseteq \widetilde{I}$ pero $\widetilde{I}$ no es una semiálgebra generada, aunque
$$\mathcal{A}(\mathcal{P}) = \mathcal{P}(\widetilde{I}) \Rightarrow \sigma(\mathcal{P}) = \beta(\mathbb{R}).$$

Definición 1.49 (λ-sistema). Una clase $\mathscr{L}$ de subconjuntos de un espacio X se dice un λ-sistema si:

(λ_1) $X \in \mathscr{L}$;

(λ_2) $A \in \mathscr{L} \Rightarrow A^c \in \mathscr{L}$;

(λ_3) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{L}$ disjuntos $\Rightarrow \biguplus_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{L}$.

Nota. Tenemos que $\phi \in \mathscr{L}$ y que, por ende $\mathscr{L}$ es también cerrado por uniones disjuntas finitas.

Ejemplo. σ-álgebra $\Rightarrow$ λ-sistema $\not\Rightarrow$ σ-álgebra.

$$X = \{1,2,3,4\},\ \mathscr{L} := \{\varnothing, X, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}\}$$

$\mathscr{L}$ es un λ-sistema, pero $\{1,2,3\} = \{1,2\} \cup \{2,3\} \notin \mathscr{L}$ y luego, $\mathscr{L}$ no es σ-álgebra.

Teorema 1.50 ($\pi - \lambda$ de Dynkin)**.** Si $\mathscr{L}$ es un λ-sistema y $\mathcal{P}$ es un π-sistema tal que $\mathcal{P} \subseteq \mathscr{L}$, entonces $\sigma(\mathcal{P}) \subseteq \mathscr{L}$.

Lema 1.51. Todo λ-sistema que sea también π-sistema es, de hecho, una σ-álgebra.

Demostración (lema)**.** Debemos ver que si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{L}$, entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{L}$. Para ello, definimos para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$A_0 := \varnothing, \quad B_n := A_n \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}) = A_n \cap A_1^c \cap \cdots \cap A_{n-1}^c$$

Notemos que:

1. $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son disjuntos y $\biguplus_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$;
2. $B_n \in \mathscr{L} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, pues $\mathscr{L}$ es un λ-sistema y π-sistema. Pero entonces,
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} = \biguplus_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathscr{L}.$$

$\square$

Demostración (Dynkin)**.** Sea

$$\lambda(\mathcal{P}) := \bigcap_{\substack{\widetilde{\mathscr{L}}\ \lambda\text{-sistema} \\ \mathcal{P}\subseteq\widetilde{\mathscr{L}}}} \widetilde{\mathscr{L}}$$

el λ-sistema generado por $\mathcal{P}$. Observar que $\lambda(\mathcal{P})$ es el menor λ-sistema que contiene a $\mathcal{P}$. Luego, valen las inclusiones $\mathcal{P} \subseteq \lambda(\mathcal{P}) \subseteq \mathscr{L}$. $(*)$ Si mostramos que $\lambda(\mathcal{P})$ es un π-sistema, entonces, por el lema, $\lambda(\mathcal{P})$ resulta una σ-álgebra (que contiene a $\mathcal{P}$) y, por minimalidad, $\sigma(\mathcal{P}) \subseteq \lambda(\mathcal{P})$. $\square$

Clase 15

10 de Septiembre

Demostración (Dynkin, continuación)**.** Bastaba con probar que $\lambda(\mathcal{P})$ es un π-sistema. Esto es equivalente a probar que

$$\lambda(\mathcal{P}) \subseteq \mathscr{L}_A := \{B \subseteq X \ :\ A \cap B \in \lambda(\mathcal{P})\} \quad \forall A \in \lambda(\mathcal{P}).$$

A su vez, para esto basta probar que:

$$\begin{cases} (1)\ \mathscr{L}_A \text{ es un } \lambda\text{-sistema } \forall A \in \lambda(\mathcal{P}) \\ (2)\ \mathcal{P} \subseteq \mathscr{L}_A. \end{cases}$$

Veamos (1).

(λ_1) $X \in \mathscr{L}_A$: Como $A \in \lambda(\mathcal{P})$, se tiene que $A \cap X = A \in \lambda(\mathcal{P})$ $\quad (\Rightarrow X \in \mathscr{L}_A)$ ✓

(λ_2) $B \in \mathscr{L}_A \Rightarrow B^c \in \mathscr{L}_A$: Notar que

$$\begin{aligned} A \cap B^c \in \lambda(\mathcal{P}) &\Leftrightarrow (A \cap B^c)^c = A^c \cup B \in \lambda(\mathcal{P}) \\ &\Leftrightarrow A^c \cup B^c = \underbrace{A^c}_{\substack{\in\lambda(\mathcal{P}) \\ \text{pues} \\ A\in\lambda(\mathcal{P})}} \uplus \underbrace{(B \cap A)}_{\substack{\in\lambda(\mathcal{P}) \\ \text{pues} \\ B\in\mathscr{L}_A}} \in \lambda(\mathcal{P}) \ \left(\substack{\text{cierto pues } \lambda(\mathcal{P}) \\ \text{es } \lambda\text{-sistema}}\right). \end{aligned}$$

(λ_3) Si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{L}_A$ disjuntos, entonces $(A \cap B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también. Además, cada $A \cap B_n \in \lambda(\mathcal{P})$ pues $B_n \in \mathscr{L}_A$. Luego,

$$A \cap \left(\biguplus_{n\in\mathbb{N}} B_n \right) = \biguplus_{n\in\mathbb{N}} A \cap B_n \in \lambda(\mathcal{P}) \quad \left(\Rightarrow \biguplus_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathscr{L}_A \right)$$

Veamos (2). Vamos por casos

1. ($A \in \mathcal{P}$): Si $B \in \mathcal{P}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{P}$, pues $\mathcal{P}$ es un π-sistema, y entonces $A \cap B \in \mathcal{P} \subseteq \lambda(\mathcal{P})$ y así resulta $B \in \mathscr{L}_A$. Como $B \in \mathcal{P}$ era arbitrario, esto nos dice que $\mathcal{P} \subseteq \mathscr{L}_A$. En particular, por (1) resulta que $\lambda(\mathcal{P}) \subseteq \mathscr{L}_A$.

2. ($A \in \lambda(\mathcal{P})$ general): Si tomamos $B \in \mathcal{P}$, entonces $B \in \mathscr{L}_A \Leftrightarrow A \cap B \in \lambda(\mathscr{P}) \Leftrightarrow A \in \mathscr{L}_B$. Luego, lo que queremos mostrar es que, para todo $B \in \mathcal{P}$, $\lambda(\mathcal{P}) \subseteq \mathscr{L}_B$. Pero esto vale por el caso 1. ✓

$\square$

Definición 1.52 (extensión de una premedida)**.** Sean $\tau : \mathscr{S} \to [0, \infty]$ una premedida sobre $\mathscr{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una σ-álgebra. Decimos que una medida $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ es una extensión de τ (sobre $\mathcal{F}$) si:

1. $\mathscr{S} \subseteq \mathcal{F} \quad (\Rightarrow \sigma(\mathscr{S}) \subseteq \mathcal{F})$;

2. $\mu(A) = \tau(A) \quad \forall A \in \mathscr{S}$.

Teorema 1.53 (Unicidad de Extensión de Carathéodory). Sea τ una premedida definida sobre una semiálgebra $\mathscr{S}$ de subconjuntos de un espacio X. Si τ es σ-finita, entonces existe a lo sumo una extensión de μ sobre $\sigma(\mathscr{S})$. En particular, si τ es UE, entonces admite exactamente:

- una extensión sobre $\sigma(\mathscr{S})$, i.e. $\mu_\tau := \mu_\tau^*\big|_{\sigma(\mathscr{S})}$;
- una extensión sobre $\mathscr{M}_{\mu_\tau^*}$, i.e., $\mu_\tau^*\big|_{\mathscr{M}_{\mu_\tau^*}}$.

Demostración. Sean μ, μ' medidas sobre $(X, \mathscr{M})$ tal que $\mu(B) = \mu'(B) \quad \forall B \in \mathscr{S}$. Queremos ver que $\mu(A) = \mu'(A) \quad \forall A \in \mathscr{M}$ (primero cuando $\mathscr{M} = \sigma(\mathscr{S})$ y luego con $\mathscr{M} = \mathscr{M}_{\mu_\tau^*}$):

(i) $\mathscr{M} = \sigma(\mathscr{S})$: Tomamos $(E_n)_n \subseteq \mathscr{S}$ disjuntos tal que $X = \biguplus_{n\in\mathbb{N}} E_n$ y $\tau(E_n) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (podemos, pues τ es σ-finita). Observemos que, por ser μ y μ' medidas en $\sigma(\mathscr{S})$ si $A \in \sigma(\mathscr{S})$, entonces:

$$\mu(A) = \mu\left(\biguplus_{n\in\mathbb{N}} A \cap E_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A \cap E_n) \quad \text{y} \quad \mu'(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu'(A \cap E_n).$$

Luego, bastará con ver que $\mu(A \cap E_n) = \mu'(A \cap E_n) \quad \forall n \in \mathbb{N},\ A \in \sigma(\mathscr{S})$. Luego, fijemos $n \in \mathbb{N}$ y definamos

$$\xi_n := \{A \in \sigma(\mathscr{S}) \ : \ \mu(A \cap E_n) = \mu'(A \cap E_n)\}.$$

Queremos ver que $\sigma(\mathscr{S}) \subseteq \xi_n$. Para ello, como $\mathscr{S}$ es un π-sistema, por Dynkin bastará con ver que

1. ξ_n es un λ-sistema;
2. $\mathscr{S} \subseteq \xi_n$.

Veamos 1.

(λ_1) $X \in \xi_n$: Es cierto, pues $\mu(X \cap E_n) = \mu(E_n) = \tau(E_n) = \mu'(E_n) = \mu'(X \cap E_n)$;

(λ_2) $A \in \xi_n \Rightarrow A^c \in \xi_n$: $\mu(A^c \cap E) = \mu(E_n \setminus A) = \mu(E_n) - \mu(A \cap E_n)$ (la última igualdad se da pues $\mu(E_n) < \infty$). Luego, por (λ_1), esto último es igual a $\mu'(E_n) - \mu'(A \cap E_n) = \mu'(A^c \cap E_n)$;

(λ_3) Si $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \xi_n$ son disjuntos, entonces

$$\mu\left(\left(\biguplus_{k\in\mathbb{N}} A_k\right)\cap E_n\right) = \mu\left(\biguplus_{k\in\mathbb{N}} A_k \cap E_n\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k\cap E_n)$$
$$= \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu'(A_k\cap E_n)$$
$$= \mu'\left(\left(\biguplus_{k\in\mathbb{N}} A_k\right)\cap E_n\right).$$

Luego, $\biguplus_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \xi_n$

Veamos 2. Si $A \in \mathscr{S}$ entonces $A\cap E_n \in \mathscr{S}$ pues $\mathscr{S}$ es un π-sistema, y entonces $\mu(A\cap E_n) = \tau(A\cap E_n) = \mu'(A\cap E_n)$. ✓

(ii) $\mathscr{M} = \mathscr{M}_{\mu_\tau^*}$ (τ unívocamente extendible): Sea $A \in \mathscr{M}_{\mu_\tau^*}$. Como τ es σ-finita en $\mathscr{S}$, existen $B, C \in \sigma(\mathscr{S})$ tales que $C \subseteq A \subseteq B$ y $\mu_\tau^*(C) = \mu_\tau^*(A) = \mu_\tau^*(B)$. Entonces, si μ es una extensión de τ sobre $\mathscr{M}_{\mu_\tau^*}$, tenemos que

$$\mu_\tau^*(A) = \underbrace{\mu_\tau^*(C) \le \mu(C)}_{\substack{\downarrow \\ C\in\sigma(\mathscr{S}) \text{ y } \exists! \text{ ext. en } \sigma(\mathscr{S})}} \le \mu(A) \le \underbrace{\mu(B) = \mu_\tau^*(B)}_{\substack{\downarrow \\ B\in\sigma(\mathscr{S})}} = \mu_\tau^*(A)$$

de donde resulta que $\mu(A) = \mu_\tau^*(A)$ y la extensión es única. Además, satisface $\mu(A) = \mu_\tau(B) = \mu_\tau(C)$ para cualquier $C, B \in \sigma(\mathscr{S})$ tal que $C \subseteq A \subseteq B$, $N_1 = A\setminus C$ y $N_2 = B\setminus A$ son μ_τ-nulos. Luego, $\mu = \overline{\mu_\tau}$, donde $\overline{\mu_\tau}$ es la "completación" de μ_τ definida en el Teorema de Extensión de Carathéodory. □

Nota. De la demostración se deduce que si μ y ν son medidas finitas sobre $(X, \mathscr{M})$, entonces

$$\mathscr{L} := \{A \in \mathscr{M} \ : \ \mu(A) = \nu(A)\}$$

es un λ-sistema si y solo si $X \in \mathscr{L}$. En particular, si dos medidas fnitas coinciden en un π-sistema $\mathcal{P}$ que contiene a X, entonces coinciden en $\sigma(\mathcal{P})$.

Clase 16

12 de Septiembre

Comentario. Si queremos definir una medida finita sobre $(\mathbb{R}, \beta(\mathbb{R}))$, por el comentario de la vez pasada, basta predefinirla en un π-sistema $\mathcal{P}$ que genere a $\beta(\mathbb{R})$ (si queremos unicidad de la extensión a $\beta(\mathbb{R})$). Una elección natural es tomar $\mathcal{P} := \{(-\infty, x] \ : \ x\in\mathbb{R}\}$ $(\sigma(\mathcal{P}) = \beta(\mathbb{R}))$.

Luego, si μ es una medida que extiende a una premedida τ sobre $\mathcal{P}$, entonces μ queda unívocamente determinada sobre $\widetilde{\mathcal{I}}$:

- $\mu(\mathbb{R}) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(-\infty, n]\right) = \lim_{n\to\infty}\mu((-\infty, n]) = \lim_{n\to\infty}\tau((-\infty, n])$.
- $\mu((a, b]) = \mu((-\infty, b]\setminus(-\infty, b]) = \tau((-\infty, b]) - \tau((-\infty, a])$.
- $\mu((a, \infty)) = \mu(\mathbb{R} - (-\infty, a]) = \lim_{n\to\infty}\tau((-\infty, n]) - \tau((-\infty, a])$.

En conclusión, $\widetilde{\mathcal{I}}$ es la semiálgebra natural que aparece cuando buscamos extender un apremedida definida sobre $\mathcal{P}$ (y necesitamos definirla al menos sobre un π-sistema como $\mathcal{P}$ si queremos unicidad).

Luego, la idea será:

$$\begin{aligned} \tau \text{ sobre } \mathcal{P} \Rightarrow &\ \text{extensión automática a } \widetilde{\mathcal{I}} \\ \Rightarrow &\ \text{extensión a } \beta(\mathbb{R}) \text{ por Carathéodory..} \end{aligned}$$

$\tau((-\infty, x]) =: F_\tau(x)$.

Teorema 1.54. Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monótona creciente. Entonces, $\tau_F : \widetilde{\mathcal{I}} \to [0, \infty]$ dada por $\tau(I(a,b)) = F(b) - F(a)$ $(-\infty \leq a \leq b \leq \infty)$ cumple que:

E1) τ_F es finitamente aditiva;

E2) Si F es continua a derecha, τ_F es σ-subaditiva.

Es decir, si F es de L-S entonces τ_F es extendible (de hecho, es unívocamente extendible)

Demostración.
$\boxed{\text{E1.}}$ Sea $I \in \widetilde{\mathcal{I}}$. Luego, $I = I(a,b)$ para ciertos $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$ y $\tau(I) = F(b) - F(a)$. Ahora, si $I = \biguplus_{i=1}^n J_i$ entonces, eventualmente reordenando los J_i, podemos suponer que $J_i = I(a_i, b_i)$ para cada $i = 1, \ldots, n$, donde $a = a_1 \leq b_1 = a_2 \leq \cdots \leq b_{n-1} = a_n \leq b_n = b$. Luego, $\tau(I) = F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n F(b_i) - F(a_i) = \sum_{i=1}^n \tau(J_i)$.

$\boxed{\text{E2.}}$ Supongamos primero que $I = (a, b]$ con $-\infty < a < b < \infty$. Si $I \subseteq \bigcup_{i=1}^\infty J_i$ con $J_i \in \widetilde{\mathcal{I}}$, entonces $J_i = (a_i, b_i] \cap \mathbb{R}$ con $-\infty \leq a_i \leq b_i \leq \infty$. Eventualmente, cambiando $a_i \longrightarrow \max\{a, a_i\}$, $b_i \longrightarrow \min\{b, b_i\}$, puedo suponer que $-\infty < a_i \leq b_i < \infty$. Ahora, como F es continua a derecha, dado $\varepsilon > 0$, existen

- $\delta > 0$ tal que $a + \delta < b$ y $F(a + \delta) < F(a) + \varepsilon$;
- $\eta_i > 0$ tal que $F(b_i + \eta_i) < F(b_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$ para cada $i \in \mathbb{N}$.

Luego, los intervalos de la forma $((a_i, b_i + \eta_i))_{i \in \mathbb{N}}$ cubren $[a + \delta, b]$, con lo cual, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $[a+\delta, b] \subseteq \bigcup_{i=1}^N (a_i, b_i+\eta_i)$. Como $a+\delta \in [a+\delta, b]$, existe $i_1 \in \{1, \ldots, N\}$ tal que $a + \delta \in (a_i, b_i + \eta_i) =: I_1$.

1. Si $b \in I_1$, entonces

$$
\begin{aligned}
F(b) - F(a+\delta) &\leq F(b_{i_1} + \eta_{i_1}) - F(a_{i_1}) \\
&\leq F(b_{i_1}) + \frac{\varepsilon}{2^{i_1}} - F(a_{i_1}) \\
&\leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \Big(F(b_i) + \frac{\varepsilon}{2^i} - F(a_i) \Big) \\
&= \sum_{i \in \mathbb{N}} F(b_i) - F(a_i) + \varepsilon.
\end{aligned}
$$

   de modo que $F(b) - F(a) \leq F(b) - F(a+\delta) + \varepsilon \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} F(b_i) + 2\varepsilon$. Tomando $\varepsilon \longrightarrow 0^+$, resulta $\tau(I) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \tau(J_i)$. ✓

2. Si $b \notin I_1$, entonces $b_{i_1} + \eta_{i_1} \leq b$ y, luego, $b_{i_1} + \eta_{i_1} \in [a+\delta, b]$, de modo tal que existe $i_2 \in \{1, \ldots, N\} \setminus \{i_1\}$ tal que $b_{i_1} + \eta_{i_1} \in (a_{i_2}, b_{i_2} + \eta_{i_2}) = I_2$. En general, existen $m \leq N$ e $i_1, \ldots, i_m \in \{1, \ldots, N\}$ tales que:

$$
a_{i_1} < a + \delta < b_{i_1} + \eta_{i_1} < \cdots < b_{i_{m-1}} - \eta_{i_{m-1}} \leq b < b_{i_m} + \eta_{i_m}
$$

   con $b_{i_k} + \eta_{i_k} \in (a_{i_{k+1}}, b_{i_{k+1}} + \eta_{i_{k+1}}) \quad \forall k = 1, \ldots, m$. Luego,

$$
\begin{aligned}
F(b) - F(a+\delta) &\leq F(b_{i_m} + \eta_{i_m}) - F(a_{i_1}) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{m-1} F(b_{i_{k+1}} + \eta_{i_{k+1}}) - F(b_{i_k} + \eta_{i_k}) \right) \\
&\quad + F(b_{i_1} + \eta_{i_1}) - F(a_{i_1}) \\
&\leq \left(\sum_{k=1}^{m-1} F(b_{i_{k+1}} + \eta_{i_{k+1}}) - F(a_{i_{k+1}}) \right) \\
&\quad + F(b_{i_1} + \eta_{i_1}) - F(a_{i_1}) \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} F(b_i + \eta_i) - F(a_i) \\
&\leq \sum_{i \in \mathbb{N}} F(b_i) - F(a_{i_1}) + \varepsilon.
\end{aligned}
$$

   Con lo cual, $\tau(I) = F(b) - F(a) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \tau(j_i) + 2\varepsilon$. Tomando $\varepsilon \longrightarrow 0^+$, obtenemos el resultado (en el caso $-\infty < a < b < \infty$).

3. Si $a = b$ entonces $I = \varnothing$ y el resultado es inmediato.

4. Si $a = -\infty$ ó $b = \infty$ y $a \neq b$, entonces

$$
(\max\{a, -N\}, \min\{b, N\}) \subseteq I \quad \forall N \in \mathbb{N}
$$

   de modo que, si $I \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} J_i$, por el caso anterior,

$$
\tau((\max\{a, -N\}, \min\{b, N\})) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \tau(J_i) \quad \forall N \in \mathbb{N}.
$$

Notamos que la parte izquierda es igual a

$$F(\min\{b, N\}) - F(\max\{a, -N\}),$$

y si $N \longrightarrow \infty$, entonces

$$F(b) - F(a) = \tau(I)$$

$\square$

Clase 17

22 de Septiembre

Ejemplo. Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. Se obtiene tomando $F \coloneqq x$ $(x \in \mathbb{R})$. La medida μ_{id} resultante cumple $\mu_{\text{id}}((a, b]) = b - a \ \forall -\infty \leq a \leq b \leq \infty$. A partir de esta propiedad, se obtiene que μ_{id} coincide con λ en todo $\mathcal{I}$. ($\mu_{\text{id}}(I) = |I|$). En particular, es la extensión buscada.

Ejemplo (¿?). Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$.

Ejemplo. Medida de Hausdorff s-dimensional en $\mathbb{R}^d$. La restricción de $\mathscr{H}_s^*$ a los conjuntos medibles $\mathscr{H}_s^*$-medibles ($\mathscr{H}_s^*$ = medida exterior de Hausdorff s-dimensional en $\mathbb{R}^d$) es la medida $\mathscr{H}_s$ conocida como medida de Hausdorff s-dimensional en $\mathbb{R}^d$.

Datazo. Si μ_ξ es la distribución de Cantor, $\mu_\xi = \mathscr{H}_{\frac{\log 2}{\log 3}}\big|_\xi$. Notar que $\mu_\xi(A) = \mathscr{H}_{\frac{\log 2}{\log 3}}(A \cap \xi)$, donde ξ = conjunto de Cantor.

Observación. Los $\beta(\mathbb{R}^d)$ son medibles porque $\mathscr{H}_s^*$ es "medida exterior métrica" (Ejercicio guía 3).

Chapter 2

Unidad 2 - Funciones Medibles

Definición 2.1 (función medible)**.** Sean $(X, \mathscr{M})$, (Y, Σ) espacios medibles. Decimos que $f : X \to Y$ es $(\mathscr{M}, \Sigma)$-medible (o sólo medible si $\mathscr{M}$ y Σ están claros) si $f^{-1}(B) \in \mathscr{M}$ $\forall B \in \Sigma$. Si $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, decimos que:

i. f es medible Lebesgue si $f^{-1}(B) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ $\forall B \in \beta(\mathbb{R}^m)$;

ii. f es medible Borel si $f^{-1}(B) \in \beta(\mathbb{R}^n)$ $\forall B \in \beta(\mathbb{R}^m)$.

Observación. f es medible Borel implica f medible Lebesgue.

Aclaración. A veces necesitaremos trabajar con funciones $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$. Para ello dotamos a $\overline{\mathbb{R}}$ con la σ-álgebra $\beta(\overline{\mathbb{R}}) := \{A \cup B \ : \ A \in \beta(\mathbb{R}),\ B \subseteq \{-\infty, \infty\}\}$.

Lema 2.2. $\beta(\overline{\mathbb{R}})$ es una σ-álgebra y

$$\begin{aligned}\beta(\overline{\mathbb{R}}) &= \sigma((a,\infty] \ : \ a \in \mathbb{R}) = \sigma([a,\infty] \ : \ a \in \mathbb{R}) \\ &= \sigma([-\infty, b) \ : \ b \in \mathbb{R}) = \sigma([-\infty, b] \ : \ b \in \mathbb{R}).\end{aligned}$$

Demostración. Ejercicio! $\square$

Definición 2.3 (funciones medibles Lebesgue y Borel)**.** Dada $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, decimos que:

i. f es medible Lebesgue si $f^{-1}(B) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ $\forall B \in \beta(\overline{\mathbb{R}})$;

ii. f es medible Borel si $f^{-1}(B) \in \beta(\mathbb{R}^n)$ $\forall B \in \beta(\overline{\mathbb{R}})$.

Es decir, si es medible cuando tomamos $\Sigma = \beta(\overline{\mathbb{R}})$ es la definición anterior.

Proposición 2.4. Sean $(X_1, \mathscr{M})$ y $(X_2, \mathscr{M})$ espacios medibles y ξ una clase de subconjuntos de X_1 tal que $\xi \subseteq \mathscr{M}_2$ y $\sigma(\xi) = \mathscr{M}_2$. Entonces, dada $f : X_1 \to X_2$ tenemos que

$$f \text{ es } (\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2)\text{-medible} \Leftrightarrow f^{-1}(C) \in \mathscr{M}_1 \ \forall C \in \xi$$

Demostración. $\boxed{\Rightarrow}$ Inmediato de la definición de f función medible.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si definimos $f^{-1}(\mathscr{M}_2) := \{f^{-1}(B) \ : \ B \in \mathscr{M}_2\}$, debemos ver que $f^{-1}(\mathscr{M}_2) \subseteq \mathscr{M}_1$. Pero por ejercicio de la guía 3, $\{f^{-1}(C) \ : \ C \in \xi\}$.

$$f^{-1}(\mathscr{M}_2) = f^{-1}(\sigma(\xi)) = \sigma(f^{-1}(\xi)).$$

Pero $f^{-1}(\xi) \subseteq \mathscr{M}_1$ y esto es exactamente lo que queríamos ver. $\square$

Corolario 2.5. Si $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es continua, entonces es medible Borel.

Demostración. Por la proposición, basta ver que $f^{-1}(G) \in \beta(\mathbb{R}^n)$ $\forall G \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto. Pero f es continua y G abierto, entonces $f^{-1}(G)$ abierto y, en particular, Boreliano en $\mathbb{R}^n$. $\square$

Pregunta. ¿Por qué tomamos $\Sigma = \beta(\mathbb{R}^m)$ y no $\Sigma = \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ en la definición de función medible? Pues las funciones medibles son las candidatas a ser integrables en el sentido más amplio que buscamos construir. En particular, toda función continua $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ debería ser medible. Por la proposición, esto implica que f^{-1} debe ser medible $\forall B \in \beta(\mathbb{R})$. Pero si tomamos $\Sigma = \mathscr{L}(\mathbb{R})$ esto ya no sirve, i.e., existe f continua y $E \subseteq \mathscr{L}(\mathbb{R})$ tal que $f^{-1}(E) \notin \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$.

Clase 18

24 de Septiembre

Fé de erratas. Dada $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, decimos que

- f es mdeible Lebesgue si $f^{-1}(B) \in \mathscr{L}(E) \quad \forall B \in \beta(\mathbb{R}^m)$;
- f es medible Borel si $f^{-1}(B) \in \beta(E) \quad \forall B \in \beta(\mathbb{R}^m)$,

donde $\mathscr{L}(E) := \mathscr{L}(\mathbb{R}^n) \cap E := \{A \cap E \ : \ A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)\}$, $\beta(E) := \beta(\mathbb{R}^n) \cap E := \{B \cap E \ : \ B \in \beta(\mathbb{R}^n)\}$.

Observación. Si $f : X \to \mathbb{R}$ es una función, entonces por el Lema de la clase pasada,

$$\begin{aligned} f(\mathcal{F}, \beta(\mathbb{R})) - \text{medible} &\Leftrightarrow \{f > a\} \in \mathcal{F} \quad \forall a \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \{f \geq a\} \in \mathcal{F} \quad \forall a \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \{f < b\} \in \mathcal{F} \quad \forall b \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \{f \leq b\} \in \mathcal{F} \quad \forall b \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Proposición 2.6. Sea $(X, \mathscr{M})$ es un espacio medible y $f, g : X \to \mathbb{R}$ funciones medibles (i.e. $(\mathscr{M}, \beta(\mathbb{R}))$-medible). Entonces:

i) $f + g$ es medible;

ii) $\alpha \cdot f$ es medible para todo $\alpha \in \mathbb{R}$;

iii) $|f|$, $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ son medibles;

iv) $f \cdot g$ es medible;

v) Si $g(x) \neq 0$ $\forall x \in X$, $\frac{f}{g}$ es medible.

Además, si $f_n : X \to \mathbb{R}$ es medible para cada $n \in \mathbb{N}$ entonces las funciones $h_i : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $i = 1, 2, 3, 4$, dadas por

$$h_1(x) \coloneqq \sup_{n\in\mathbb{N}}(f_n(x)) \quad h_2(x) \coloneqq \inf_{n\in\mathbb{N}}(f_n(x))$$
$$h_3(x) \coloneqq \limsup_{n\to\infty}(f_n(x)) \quad h_4(x) \coloneqq \liminf_{n\to\infty}(f_n(x)).$$

son $(\mathscr{M}, \beta(\overline{\mathbb{R}}))$-medibles.

Demostración. Por la observación, para ver que $h : X \to \mathbb{R}$ es medible bastará con ver que $\{h > a\} = \{x : h(x) > a\} = h^{-1}((a, \infty]) \in \mathscr{M}$ $\forall a \in \mathbb{R}$. Veamos esto en cada caso:

i) Notamos que

$$\begin{aligned}\{x : f(x) + g(x) > a\} &= \{x : f(x) > a - g(x)\} \\ &= \bigcup_{Q\in\mathbb{Q}} \{x : f(x) > Q > a - g(x)\} \\ &= \bigcup_{Q\in\mathbb{Q}} \{x : f(x) > Q\} \cap \{x : g(x) > a - Q\}\end{aligned}$$

ii) Si $\alpha > 0$,
$$\{\alpha \cdot f > a\} = \left\{f > \frac{a}{\alpha}\right\} \in \mathscr{M}.$$
Si $\alpha < 0$,
$$\{\alpha \cdot f > a\} = \left\{f < \frac{a}{\alpha}\right\} \in \mathscr{M}.$$
Si $\alpha = 0$,
$$\{\alpha \cdot f > a\} = \{0 > a\} = \begin{cases} \varnothing & \text{si } a \geq 0 \\ X & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

iii) $\{|f| > a\} = \{-a < f < a\} = f^{-1}((-a, a)) \in \mathscr{M}$. Para ver que $\max\{f, g\}$ y $\min\{f, g\}$ son medibles, notamos que

$$\max\{f, g\} = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2}, \quad \min\{f, g\} = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2}.$$

iv) Primero, notemos que f^2 es medible pues

- si $a < 0$, $\{f^2 > a\} = X \in \mathscr{M}$,
- si $a \geq 0$, $\{f^2 > a\} = \{|f| > \sqrt{a}\} \in \mathscr{M}$.

De aquí se deduce que $f \cdot g$ es medible pues

$$f \cdot g = \frac{(f+g)^2 - f^2 - g^2}{2}$$

v) Por (iv), bastará con ver que $\frac{1}{g}$ es medible. Para esto,

$$\begin{aligned} \left\{\frac{1}{g} > a\right\} &= \left\{\frac{1}{g} > a\right\} \cap \{g > 0\} \cup \left\{\frac{1}{g} > a\right\} \cap \{g < 0\} \\ &= \{1 > ag\} \cap \{g > 0\} \cup \{1 < ag\} \cap \{g < 0\} \in \mathscr{M}. \end{aligned}$$

Por último, para ver que las h_i son medibles, notemos que

$$\{h_1 > a\} = \{x \ : \ \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) > a\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{f_n > a\} \in \mathscr{M}$$

pues f_n medible $\forall n$. Pero entonces,

$$\begin{aligned} h_2 &:= \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n = -\sup_{n \in \mathbb{N}}(-f_n) \\ h_3 &:= \limsup_{n \to \infty} f_n = \inf_{n \in \mathbb{N}}(\sup_{k \geq n} f_k) \\ h_4 &:= \liminf_{n \to \infty} f_n = -\limsup_{n \to \infty}(-f_n). \end{aligned}$$

son todas medibles.

□

Comentario Las mismas propiedades valen si f, g toman valores en $\overline{\mathbb{R}}$, excepto la (i), pues $f + g$ no está bien definida en x tales que $f(x) + g(x)$ sea $\infty - \infty$ ó $-\infty + \infty$. No obstante, $f + g$ resulta medible si la redefinimos de manera constante en donde no esté bien definida.

Proposición 2.7. Sean $(X_i, \mathscr{M}_i)$, $i = 1, 2, 3$, espacios medibles. Si $f : X_1 \to X_2$ es $(\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2)$-medible y $g : X_2 \to X_3$ es $(\mathscr{M}_2, \mathscr{M}_3)$-medible, entonces, $g \circ f : X_1 \to X_3$ es $(\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_3)$-medible.

Demostración. Si $B \in \mathscr{M}_3$, $g \circ f^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B)) \in \mathscr{M}_1$ pues f es $(\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2)$-medible y $g^{-1}(B) \in \mathscr{M}_2$ pues g es $(\mathscr{M}_2, \mathscr{M}_3)$-medible. □

Corolario 2.8. Si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones, entonces

i) f, g medibles Borel ($\mathscr{M}_1 = \mathscr{M}_2 = \mathscr{M}_3 = \beta(\mathbb{R})$) $\Rightarrow g \circ f$ medible Borel;

ii) f meible Lebesgue ($\mathscr{M}_1 = \mathscr{L}(\mathbb{R})$, $\mathscr{M}_2 = \beta(\mathbb{R})$) y g medible Borel ($\mathscr{M}_2 = \beta(\mathbb{R})$, $\mathscr{M}_3 = \beta(\mathbb{R})$) $\Rightarrow g \circ f$ es medible Lebesgue.

Observación. Si f, g son medibles Lebesgue, entonces $g \circ f$ no tiene por qué ser medible Lebesgue.

Definición 2.9. Dado un espacio de medida $(X, \mathscr{M}, \mu)$, diremos que una cierta propiedad vale en casi todo punto de X respecto a μ, o que vale μ-C.T.P (ó μ-a.e), si el subconjunto de X en donde dicha propiedad no vale es un conjunto μ-nulo.

Proposición 2.10. Si $(X, \mathscr{M}, \mu)$ es un espacio de medida completo, y $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ son funciones que coinciden μ-C.T.P, entonces

$$f \text{ medible} \Leftrightarrow g \text{ medible}.$$

Demostración. Si f es medible, entonces

$$\{g > a\} = (\{g > a\} \cap \{f = g\}) \cup (\underbrace{\{g > a\} \cap \{f \neq g\}}_{\mu\text{-nulo}})$$

Dado que este conjunto es μ-nulo junto con que el espacio es completo, entonces el conjunto pertenece a $\mathscr{M}$. Como $\{f \neq g\} \in \mathscr{M}$ por ser μ-nulo, entonces $\{f = g\} = \{f \neq g\}^c \in \mathscr{M}$. Como $\{f > a\} \in \mathscr{M}$, g resulta medible. Luego, probamos $\Rightarrow$) y la otra implicación es igual. □

Clase 19

26 de Septiembre

Observación. Si $(X, \mathscr{M}, \mu)$ no necesariamente completo, entonces si $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ es $\mathscr{M}$-medible y $N \in \mathscr{M}$ con $\mu(N) = 0$, para cualquier $C \in \overline{\mathbb{R}}$, $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & x \notin N \\ C & x \in N \end{cases}$$

es también medible. A modo de paréntesis, notemos que

$$\{g > a\} = \underbrace{\{f > a\}}_{\in \mathscr{M}} \cap \underbrace{N^c}_{\in \mathscr{M}} \cup \{C > a\} \cap N,$$

donde

$$\{C > a\} \cap N = \begin{cases} \varnothing & \text{si } C \leq a \\ N & \text{si } C > a \end{cases} \in \mathscr{M}$$

Definición 2.11 (convergencia μ-CTP)**.** Sean $(X, \mathscr{M}, \mu)$ es un espacio de medida y, para cada $n \in \mathbb{N}$, una función $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ (no necesariamente medibles). Dada otra función $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ (no necesariamente medible) decimos que f_n converge a f en μ-casi todo punto (ó μ-CTP, ó μ-ae) y lo notamos $f_n \longrightarrow f$ μ-CTP (ó $f_n \xrightarrow{\text{ae}} f$) si $\{x \in X \ : \ f_n(x) \not\longrightarrow f \text{ cuando } n \to \infty\}$ es μ-nulo.

Observación. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}},\ f : X \to \mathbb{R}$ son $\mathscr{M}$-medibles, entonces el conjunto

$$\begin{aligned}\{x \in X \ : \ f_n(x) \not\longrightarrow f(x)\} &= \bigcup_{\delta>0} \bigcap_{N\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq N} \{x \in X \ : \ |f_n(x) - f(x)| > \delta\} \\ &= \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcap_{M\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq M} \underbrace{\left\{x \in X \ : \ |f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{k}\right\}}_{\in \mathscr{M}} \\ &\Rightarrow \in \mathscr{M}\end{aligned}$$

Ver el caso en que sea $\overline{\mathbb{R}}$ en el codominio.

Definición 2.12 (convergencia en medida)**.** Sean $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un espacio de medida y $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$, funciones $\mathscr{M}$-medibles. Decimos que f_n converge en medida a f respecto a μ, y lo notamos $f_n \xrightarrow{\mu} f$, si para cada $\varepsilon > 0$ vale que

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in X \ : \ |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0$$

Comentarios.

1. La definición se puede extender a funciones medibles a valores en $\overline{\mathbb{R}}$, redefiniendo $f_n(x) - f(x) := \infty$ cuando no está bien definida.

2. $f_n \longrightarrow f$ μ-CTP $\not\Rightarrow f_n \xrightarrow{\mu} f$

   Ejemplo. $(X, \mathscr{M}, \mu) := (\mathbb{R}, \mathscr{L}, \lambda)$, donde λ es la medida de Lebesgue. $f_n(x) := \chi_{[n,\infty)}(x),\ f(x) := 0$. Entonces, $f_n(x) \longrightarrow f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$, pero si $\varepsilon \in (0, 1)$

   $$\begin{aligned}\lambda(\{x \ : \ |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) &= \lambda(\{x \ : \ f_n(x) = 1\}) \\ &= |[n, \infty)| = \infty \not\longrightarrow 0.\end{aligned}$$

3. $f_n \xrightarrow{\mu} f \not\Rightarrow f_n \longrightarrow f$ μ-CTP.

   Ejemplo. $(X, \mathscr{M}, \mu) := ([0, 1], \mathscr{L}([0, 1]), \lambda\big|_{[0,1]})$ y las funcions f_n dadas por seguir el mismo proceso (de manera inductiva) que f_1, f_2, f_3 y f_4 en los gráficos (dados en Fig 1.1 y 1.2). Entonces $f_n \xrightarrow{\mu} 0$, pero $f_n \not\longrightarrow 0$ para todo x.

Proposición 2.13. Sean $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un espacio de medida y $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ funciones medibles. Entonces, si μ es finita $(\mu(X) < \infty)$, vale la implicación

$$f_n \longrightarrow f \ \mu\text{-CTP} \Rightarrow f_n \xrightarrow{\mu} f.$$

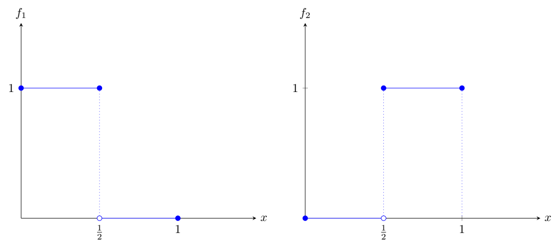

Fig. 2.1: gráficos de f_1 y f_2

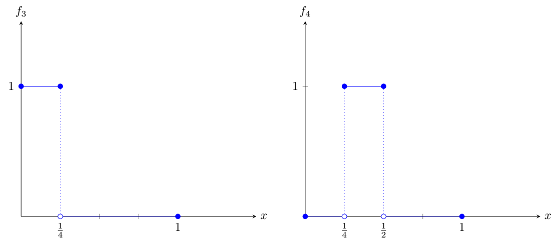

Fig. 2.2: gráficos f_3 y f_4

Demostración. Por la observación anterior, que $f_n \longrightarrow f$ μ-CTP significa que

$$\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\bigcap_{M\in\mathbb{N}}\bigcup_{n\geq M}\left\{x\in X\ :\ |f_n(x)-f(x)|>\frac{1}{k}\right\}\right)=0 \qquad (*)$$

Pero $(*)$ sucederá si y sólo si

$$\mu\left(\bigcap_{M\in\mathbb{N}}\left(\bigcup_{n\geq M}\left\{x\in X\ :\ |f_n(x)-f(x)|>\frac{1}{k}\right\}\right)\right)=0 \quad \forall k\in\mathbb{N} \qquad (**)$$

Luego, dado que es μ-finita (por ende, continua por arriba)

$$(**) \Leftrightarrow \lim_{M\to\infty}\mu\left(\bigcup_{n\geq M}\left\{x\ :\ |f_n(x)-f(x)|>\frac{1}{k}\right\}\right)=0 \quad \forall k\in\mathbb{N}$$

Como

$$\left\{x\ :\ |f_M(x)-f(x)|>\frac{1}{k}\right\}\subseteq\bigcup_{n\geq M}\left\{x\ :\ |f_n(x)-f(x)|>\frac{1}{k}\right\},$$

entonces lo anterior implica que

$$\lim_{M\to\infty}\mu\left(\left\{x\ :\ |f_M(x)-f(x)|>\frac{1}{k}\right\}\right)=0 \quad \forall k\in\mathbb{N}$$

Por lo tanto, si $\varepsilon > 0$ entonces

$$\lim_{M\to\infty} \mu(\{x \ : \ |f_M(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0$$

(tomando k tal que $\frac{1}{k} < \varepsilon$). Luego, $f_n \xrightarrow{\mu} f$. □

Observación. Probamos que si μ es finita, entonces

$$f_n \longrightarrow f \ \mu\text{-CTP} \Leftrightarrow \lim_{M\to\infty} \mu\left(\bigcup_{n\geq M} \{|f_n - f| > \varepsilon\}\right) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$$

Comparar con

$$f_n \xrightarrow{\mu} f \Leftrightarrow \lim_{M\to\infty} \mu(\{|f_M - f| > \varepsilon\} = 0 \ \forall \varepsilon > 0$$

Lema 2.14. (Borel-Cantelli) Sean $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un espacio de medida y $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{M}$. Entonces,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty \Rightarrow \mu(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$$

donde $\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k$.

Demostración. Notar que

$$\begin{aligned}\mu(\limsup_{n\to\infty} A_n) &\leq \mu\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right) \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ &\leq \sum_{k=n}^{\infty} \mu(A_k) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

si $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$. □

Clase 20

29 de Septiembre

A partir de esto, podemos extender la noción de convergencia en casi todo punto y en medida, respectivamente, reemplazando

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \text{ por } \lim_{n\to\infty} \overline{d}(f_n(x), f(x)) = 0$$

y

$$|f_n(x) - f(x)| \text{ por } \overline{d}(f_n(x), f(x)).$$

Con este cambio, los resultados que vimos la clase pasada para funcione a valores en $\mathbb{R}$, también valen si toman valores en $\overline{\mathbb{R}}$. Notar que $\overline{d}(f(x), g(x))$ es medible (como función de x) pues $\overline{d}(f(x), g(x)) = |r \circ f(x) - r \circ g(x)|$, y $r \circ f, r \circ g$ son medibles porque r es continua.

Lema 2.15. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{M}$, entonces

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) < \infty \Rightarrow \mu(\limsup A_n) = 0.$$

Aclaración ¿Qué interpretación le damos a $\limsup_{n\to\infty} A_n$?

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} A_n &= \bigcap_{M\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq M} A_n \\
&= \{x \in X \ : \ x \in A_n \text{ para infinitos valores de } n\} \\
&= \{x \in X \ : \ \exists \text{ subsucesión } (A_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \text{ tq } x \in A_{n_k} \ \forall k \in \mathbb{N}\}.
\end{aligned}$$

¿Por qué se llama límite superior? Porque $\chi_{\limsup_{n\to\infty} A_n} = \limsup_{n\to\infty} \chi_{A_n}$.

Proposición 2.16. Sean $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un espacio de medida y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}, f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ funciones medibles. Entonces, si $f_n \xrightarrow{\mu} f$, existe una subsucesión $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $f_{n_k} \longrightarrow f$ μ-CTP.

Demostración. Como $f_n \xrightarrow{\mu} f$, para cada $k \in \mathbb{N}$ podemos elegir $n_k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mu\left(\left\{\overline{d}(f_{n_k}, f) > \frac{1}{k}\right\}\right) \leq \frac{1}{2^k}$$

Si llamamos

$$A_k := \left\{\overline{d}(f_{n_k}, f) > \frac{1}{k}\right\},$$

entonces $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) < \infty$ y, luego, por el lema de Borel-Cantelli

$$\mu(\limsup_{k\to\infty} A_k) = 0.$$

Pero, por otro lado, si $x \notin \limsup_{k\to\infty} A_k$, entonces $f_{n_k}(x) \longrightarrow f(x)$. En efecto, si $x \notin \limsup_{k\to\infty} A_k = \bigcap_{M\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq M} A_k$, esto quiere decir que existe $M_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \notin \bigcup_{k\geq M_0} A_k$, i.e., $x \notin A_k$ $\forall k \geq M_0$. En particular, $\overline{d}(f_{n_k}(x), f(x)) \leq \frac{1}{k}$ $\forall k \geq M_0$. Luego, $\lim_{k\to\infty} \overline{d}(f_{n_k}(x), f(x)) = 0$ y entonces $f_{n_k}(x) \longrightarrow f(x)$. En particular, $\{x \ : \ f_{n_k}(x) \not\longrightarrow f(x)\} \subseteq \limsup_{k\to\infty} A_k$, y por lo tanto $\{x \ : \ f_{n_k}(x) \not\longrightarrow f(x)\}$ es μ-nulo, lo cual prueba que $f_{n_k} \longrightarrow f$ μ-CTP. □

Corolario 2.17. Si $(X, \mathscr{M}, \mu)$ es un espacio de medida completo y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} : X \to \overline{\mathbb{R}}$ es una sucesión de funciones medibles que convergen μ-CTP a una función límite f, entonces f es medible también.

Demostración. Basta observar que $f = \limsup_{n\to\infty} f_n$ en μ-casi todo punto, y usar que $\limsup_{n\to\infty} f_n$ es, como ya vimos, medible. □

2.0.1 Principios de Littlewood

Primer Principio (Todo conjunto medible es casi un abierto).

Teorema 2.18. Dado un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$, son equivalentes:

1. E medible Lebesgue;
2. Dado $\varepsilon > 0$, existe G abierto tal que $E \subseteq G$ y $|G - E|_e < \varepsilon$;
3. Dado $\varepsilon > 0$, existe F cerrado tal que $F \subseteq E$ y $|E - F|_e < \varepsilon$.

Además, si $|E|_e < \infty$, entonces estas afirmaciones son equivalentes a

4. Dado $\varepsilon > 0$, existen intervalos abiertos $I_1, \dots, I_n$ tal que

$$\left| E\Delta \left(\bigcup_{k=1}^{n} I_k \right) \right|_e < \varepsilon.$$

Observación. Podemos reemplazar (4) por una condición (4') en donde los intervalos puedan ser tomados semiabiertos, cerrados, disjuntos, etc.

Segundo Principio (Toda sucesión convergente de funciones medibles, es "casi" uniformemente convergente).

Teorema 2.19 (Egorov). Sean $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un espacio de medida finita y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}} : X \to \mathbb{R}$ tales que $f_n \longrightarrow f_\infty$ μ-CTP. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe $E_\varepsilon \in \mathscr{M}$ tal que $f_n \longrightarrow f$ uniformemente en E_ε y $\mu(E_\varepsilon^c) < \varepsilon$.

Tercer Principio (Toda función medible es "casi" continua).

Teorema 2.20 (Lusin). Sea $f : [a, b] \to \overline{\mathbb{R}}$ una función medible Lebesgue finita en casi todo punto (resp. de la medida de Lebesgue). Entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua tal que

$$|\{x \in [a, b] \ : \ f(x) \neq g(x)\}| < \varepsilon.$$

Clase 21

1 de Octubre

Demostración (Primer Principio, 1.72). Veamos sólo (2) $\Leftrightarrow$ (4), si $|E|_e < \infty$. El resto son ejercicios de la guía 4.

$\boxed{\Rightarrow}$ Dado $\varepsilon > 0$, sea G abierto tal que $E \subseteq G$ y $|G - E|_e < \frac{\varepsilon}{2}$. Notar que $|G|_e < \infty$, pues $|G|_e \leq |E|_e + |G - E|_e < \infty$. Como G es abierto y $\mathbb{R}$ es separable, entonces existen $(I_i)_{i\in\mathbb{N}}$ intervalos abiertos tales que $G = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} I_i$. Sea $A_n \coloneqq \bigcup_{i=1}^{n} I_i$. Notar que $A_n \nearrow G$ (i.e. $A_n \subseteq A_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = G$). Como la medida de Lebesgue es "continua inferior", $|G| = \lim_{n\to\infty} |A_n|$. Tomemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|A_{n_0}| > |G| - \frac{\varepsilon}{2}$ (puedo, pues $|G| < \infty$). Entonces, $E\Delta A_n = (E - A_n) \cup (A_n - E) \subseteq (G - A_n) \cup (G - E)$ (notar que en la inclusión estamos usando que $E, A_n \subseteq G$) de modo que, notando primero $|G - A_{n_0}|_e = |G - A_{n_0}| = |G| - |A_{n_0}| < \frac{\varepsilon}{2}$ (notar que en la útlima igualdad usamos que $A_n \subseteq G$, $|G| < \infty$), entonces

$$|E\Delta A_{n_0}|_e \leq |G - A_{n_0}|_e + |G - E|_e < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Luego, A_n es el conjunto buscado.

$\boxed{\Leftarrow}$ Dado $\varepsilon > 0$, existen abiertos $I_1, \dots, I_n$ tal que

$$\left| E\Delta \left(\bigcup_{i=1}^{n} I_i \right) \right|_e < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Por otro lado, por el ejercicio 1 de la guía 4, existe $V \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto tal que

$$E\Delta \bigcup_{i=1}^{n} I_i \subseteq V \quad \text{y} \quad |V| \leq \left| E\Delta \left(\bigcup_{i=1}^{n} I_i \right) \right|_e + \frac{\varepsilon}{4} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Luego, si tomamos $G = V \cup I_1 \cup \cdots \cup I_n$, entonces:

1. G es abierto,
2. $E \subseteq G$,
3. $G - E \subseteq V \cup (\bigcup_{i=1}^{n} I_i \setminus E) \subseteq (E\Delta \bigcup_{i=1}^{n} I_i)$,

con lo cual:

$$\begin{aligned} |G - E|_e &\leq |V|_e + \left| E\Delta \left(\bigcup_{i=1}^{n} I_i \right) \right|_e \\ &= |V| + \left| E\Delta \left(\bigcup_{i=1}^{n} I_i \right) \right|_e \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon. \end{aligned}$$

$\square$

Demostración (Segundo Principio, 1.73, Egorov)**.** Para cada $k, n \in \mathbb{N}$ definamos

$$E_n^{(k)} := \left\{ x \ : \ \overline{d}(f_n(x), f(x)) > \frac{1}{k} \right\}.$$

Observar que $\limsup_{n\to\infty} E_n^{(k)} \subseteq \{x \ : \ f_n(x) \not\to f(x)\}$. Por lo tanto, $\limsup_{n\to\infty} E_n^{(k)}$ es μ-nulo y, como f_n, f son medibles, $\limsup_{n\to\infty} E_n^{(k)}$ es medible y $\mu(\limsup_{n\to\infty} E_n^{(k)}) = 0$. Luego, definimos $B_M^{(k)} \searrow \limsup_{n\to\infty} E_n^{(k)}$ donde $M \to \infty$ ($B_{M+1}^{(k)} \subseteq B_M^{(k)}$ $\forall M$, $\bigcap_{M\in\mathbb{N}} B_M^{(k)} = \limsup_{n\to\infty} E_n^{(k)}$). Como μ es finita, μ es "continua superior" y entonces

$$\mu\left(\limsup_{n\to\infty} E_n^{(k)} \right) = \lim_{M\to\infty} \mu\left(B_M^{(k)} \right) \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

En particular, dado $\varepsilon > 0$, podemos tomar $M_k \in \mathbb{N}$ grande, de modo que

$$\mu\left(B_{M_k}^{(k)}\right) < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Luego, si definimos $E_\varepsilon \coloneqq \bigcap_{k\in\mathbb{N}}(B_{M_k}^{(k)})^c$, entonces

$$\mu\left(E_\varepsilon^c\right) = \mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_{M_k}^{(k)}\right) \le \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu\left(B_{M_k}^{(k)}\right) < \varepsilon.$$

Por otro lado, si $x \in E_\varepsilon$, entonces, dado $k \in \mathbb{N}$,

$$\overline{d}(f_n(x), f(x)) \le \frac{1}{k} \quad \forall n \ge M_k.$$

Es decir, dado $k \in \mathbb{N}$, existe $M_k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{x\in E_\varepsilon} \overline{d}(f_n(x), f(x)) \le \frac{1}{k} \quad \forall n \ge M_k.$$

Esto prueba que f_n "converge uniformemente" sobre E_ε. □

Observación (Importante!). Si las f_n, f son finitas μ-CTP, entonces la misma demostración prueba que, dado $\varepsilon > 0$, existe $E_\varepsilon \in \mathscr{M}$ tal que

$$\mu(E_\varepsilon^c) < \varepsilon \quad \text{y} \quad \sup_{x\in E_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Sólo hay que cambiar $\overline{d}$ por $d(x, y) \coloneqq |x - y|$ y trabajar en el conjunto en donde f_n, f son finitas.

Clase 22

3 de Octubre

Chapter 3

Unidad 3: Integración

Definición 3.1 (función simple)**.** Sea $(X, \mathscr{M})$ un espacio medible. Una función $\varphi : X \to \mathbb{R}$ se dice simple si existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, distintos y no nulos, y $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{M}$ disjuntos y no vacíos tales que

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i} \quad \left(\varphi(x) = \begin{cases} \alpha_i & \text{si } x \in A_i \\ 0 & \text{si } x \notin \bigcup A_i \end{cases} \right) \tag{$*$}$$

Observación.

1. φ simple $\Rightarrow \varphi$ $\mathscr{M}$-medible, pues χ_{A_i} $\mathscr{M}$-medible $\forall i$.

2. $\operatorname{Im}(\varphi) - \{0\} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ y $A_i = \varphi^{-1}(\{\alpha_i\})$ $\forall i = 1, \ldots, n$, de modo tal que la representación en $(*)$ es única salvo reordenamiento de los α_i (siempre que los α_i sean disjuntos y distintos de 0, y los A_i sean disjuntos y distintos de $\varnothing$). Llamamos a $(*)$, la representación canónica de φ (abreviado RC).

3. Si φ es $\mathscr{M}$-medible y toma finitos valores, entonces es simple. En particular, si φ es combinación linea (finita) de χ_{A_i} con $A_i \in \mathscr{M}$ (no necesariamente disjuntos, ni no vacíos), entonces es simple.

Definición 3.2. Dado un espacio de medida $(X, \mathscr{M}, \mu)$ y $\varphi : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ una función simple no negativa, definimos la integral de φ respecto a μ como:

$$\int_X \varphi d\mu := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i),$$

si φ tiene RC, $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$.

Proposición 3.3 (Propiedades de la integral para funciones simples). Si $\varphi_1, \varphi_2 : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ son simples no negativas, entonces

1. Si $\alpha \geq 0$, $\alpha \cdot \varphi$ es simple no negativa y $\int_X \alpha\varphi d\mu = \alpha \int_X \varphi d\mu$;
2. $\varphi_1 + \varphi_2$ es simple no negativa y $\int_X (\varphi_1 + \varphi_2) d\mu = \int_X \varphi_1 d\mu + \int_X \varphi_2 d\mu$;
3. Si $\varphi_1 \leq \varphi_2$ μ-CTP, entonces $\int_X \varphi_1 d\mu \leq \int_X \varphi_2 d\mu$.

Demostración. Ver Canvas □

Definición 3.4. Dados $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un espacio de medida y $f : X \to [0, \infty]$ $\mathscr{M}$-medible no negativa, definimos la integral de f con respecto a μ como

$$\int_X f d\mu := \sup \left\{ \int_X \varphi d\mu \ : \ \varphi \text{ simple}, 0 \leq \varphi \leq f \right\} \in [0, \infty].$$

Observación. Si $f : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ es simple no negativa, entonces esta definición es consistente con la anterior, pues

$\boxed{\leq}$ Si $\varphi : X \to \mathbb{R}$ es simple tal que $0 \leq \varphi \leq f$ y f tiene RC $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$ entonces por la proposición,

$$\int_X \varphi d\mu \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i).$$

Tomando supremo en φ, resulta DEF NUEVA $\leq$ DEF ORIGINAL.

$\boxed{\geq}$ Tomando $\varphi = f$ en la definición nueva, resulta DEF NUEVA $\geq$ DEF ORIGINAL.

Definición 3.5 (partes negativa y positiva de f). Dados $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un espacio de medida y $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathscr{M}$-medible, definimos:

- la parte positiva de f como $f^+ := \max\{f, 0\}$.
- la parte negativa de f como $f^- := -\min\{f, 0\}$.

Observación. Notar que f^+ y f^- son $\mathscr{M}$-medibles, no negativas y $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$.

Definición 3.6. Diremos que f es integrable con respecto a μ (o μ-integrable) si

$$\max\left\{ \int_X f^+ d\mu, \ \int_X f^- d\mu \right\} < \infty$$

y diremos que es débilmente integrable respecto a μ si

$$\min\left\{ \int_X f^+ d\mu, \ \int_X f^- d\mu \right\} < \infty.$$

Definición 3.7. Si f es (al menos) débilmente μ-integrable, definimos su integral respecto de μ como

$$\int_X f d\mu := \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu \in [-\infty, \infty]$$

Definición 3.8. Si f es débilmente μ-integrable y $E \in \mathscr{M}$, definimos

$$\int_E f d\mu := \int_X f \chi_E d\mu$$

Observación. La integral está bien definida, pues $f\chi_E$ resulta débilmente μ-integrable.

Lema 3.9. Si f es débilmente μ-integrable y $\mu(E) = 0$, entonces

$$\int_E f d\mu = 0.$$

Demostración. Supongamos primero que $f \geq 0$. En tal caso, $f\chi_E = 0$ μ-CTP. En particular, si φ es simple tal que $0 \leq \varphi \leq f\chi_E$,

$$0 \leq \int_X \varphi d\mu \leq \int_X (\max \varphi)\chi_E d\mu = (\max \varphi)\mu(E) = 0.$$

Entonces, $\int_X \varphi d\mu = 0$, lo que implica $\int_X f\chi_E = 0$. Para el caso general, usamos este caso y el hecho de que $(f\chi_E)^{\pm} = f^{\pm}\chi_E$. □

Clase 23

6 de Octubre

Recordar.

- f μ-integrable $\Leftrightarrow \int_X |f| d\mu < \infty$.
- f débilmente μ-integrable si $\int_X f^+ d\mu < \infty$ y/o $\int_X f^- d\mu < \infty$.

Teorema 3.10. Sean $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un Edm y $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ débilmente μ-integrables. Entonces, valen las siguientes

i) Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \cdot f$ es débilmente μ-integrable y $\int_X \alpha \cdot f d\mu = \alpha \int_X f d\mu$. (con la convención de que $\alpha \cdot \infty = 0$)

ii) Si $f + g$ es débilmente μ-integrable, entonces

$$\int_X (f+g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu. \qquad (*)$$

iii) (Monotonía) Si $f \leq g$ μ-CTP, entonces $\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$.

iv) (Desigualdad Triangular) $\left|\int_X f d\mu\right| \leq \int_X |f| d\mu$.

v) Si $\mu(E) = 0 \Rightarrow \int_E f d\mu = 0$.

En particular,

1. Si f, g son μ-integrables, entonces $f + g$ es μ-integrable y vale $(*)$.
2. f es μ-integrable si y sólo si $\int_X |f| d\mu < \infty$.

Nota. (i) + (ii) se conocen como la propiedad de "linealidad" de la integral.

Observación. Si f es $\mathscr{M}$-medible y no negativa, entonces es débilmente μ-integrable pue $f^- \cong 0$ y entonces $\int f^- = 0 < \infty$. Lo mismo si no es positiva. Asi que todas estas propiedades valen para funciones que no cambian de signo.

Nota. La siguiente proposición es un caso particular de (iii).

Proposición 3.11. Si $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ son débilmente μ-integrables y $f \leq g$ en todo punto, entonces $\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$.

Demostración. Si f, g son no negativas, entonces

$$\begin{aligned} \int_X f \, d\mu &= \sup\left\{\int_X \varphi \, d\mu \ : \ 0 \leq \varphi \leq f, \ \varphi \text{ simple}\right\} \\ (f \leq g \Rightarrow) &\leq \sup\left\{\int_X \varphi \, d\mu \ : \ 0 \leq \varphi \leq g, \ \varphi \text{ simple}\right\} = \int_X g \, d\mu. \end{aligned}$$

(el caso general de éste, se demuestra usando que $f^+ \leq g^+$ y $g^- \leq f^-$). □

Lema 3.12. Si $\varphi : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ es función simple no negativa, entonces la aplicación $\mu_\varphi : \mathscr{M} \to \mathbb{R}$ dada por $\mu_\varphi(E) = \int_E \varphi \, d\mu$ es una medida en $(X, \mathscr{M})$.

Demostración. 1. $\mu_\varphi(\varnothing) = \int_\varnothing \varphi \, d\mu = \int_X \varphi \chi_\varnothing \, d\mu = \int_X 0 \, d\mu = 0 \cdot \mu(X) = 0$.

2. Sean $(E_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{M}$ disjuntos y supongamos que φ tiene RC $\varphi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_{A_i}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\mu_\varphi\left(\biguplus_{i\in\mathbb{N}} E_i\right) &= \int_{\bigcup_j E_j} \varphi \, d\mu = \int_X \varphi \chi_{\bigcup_j E_j} \, d\mu \\
&= \int_X \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i} \chi_{\bigcup_j E_j} \, d\mu = \int_X \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i \cap \bigcup_i E_i} \, d\mu \\
&= \int_X \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{\biguplus_j A_i \cap E_j} \, d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_X \chi_{\biguplus_j A_i \cap E_j} \, d\mu \\
&= \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu\left(\biguplus_{j=1}^\infty A_i \cap E_j\right) d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^\infty \mu(A_i \cap E_j) \\
(\alpha > 0) &= \sum_{j=1}^\infty \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i \cap E_j) = \sum_{j=1}^\infty \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_X \chi_{A_i \cap E_j} \, d\mu \\
&= \sum_{j=1}^\infty \int_X \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i} \chi_{E_j}\right) d\mu \\
&= \sum_{j=1}^\infty \int_{E_j} \varphi \, d\mu \\
&= \sum_{j=1}^\infty \mu_\varphi(E_j).
\end{aligned}$$

□

Observación. Lo que tuvimos que demostrar fue:

$$\int_X \varphi \chi_{\biguplus_j E_j} \, d\mu = \sum_{j=1}^\infty \int_X \varphi \chi_{E_j} \, d\mu,$$

es decir

$$\int \sum_{j=1}^\infty \varphi \chi_{E_j} = \sum_{j=1}^\infty \int \varphi \chi_{E_j}.$$

Teorema 3.13 (Convergencia Monótona). Sean $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un Edm y $(f_n)_n$ una sucesión de funciones $f_n : X \to [0, \infty]$ $\mathscr{M}$-medibles no negativas tales que $f_n \leq f_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Entonces

1. $\lim_{n\to\infty} f_n$ existe y es $\mathscr{M}$-medible.
2. $\int_X (\lim_{n\to\infty} f_n) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu$.

Demostración.
1. Como $0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ $\forall x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces $f(x) \coloneqq \lim_{n\to\infty} f_n(x) \in [0, \infty]$ existe $\forall x \in X$, y es medible porque $f \cong \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$. Como $f \geq 0$, es también débil μ-integrable.

2. Notemos que por monotonía de la integral, $\left(\int_X f_n\, d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [0,\infty]$ es una sucesión creciente y, como tal, tiene límite $L \in [0,\infty]$. Queremos ver que $L = \int_X f\, d\mu$. Para ello, notemos que $f_n \leq f\ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\int_X f_n\, d\mu \leq \int_X f\, d\mu \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Tomando supremo, $L \leq \int_X f\, d\mu$. Para la otra desigualdad, sea φ simple tal que $0 \leq \varphi \leq f$. Bastará ver que $\int_X \varphi\, d\mu \leq L$. Si tomamos $\alpha \in (0,1)$ y definimos

$$E_n \coloneqq \{x\ :\ f_n(x) \geq \alpha\varphi(x)\},$$

entonces $E_n \nearrow X$ pues $f_n \longrightarrow f$ puntualmente. Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$L \geq \int_X f_n\, d\mu \geq \int_{E_n} f_n\, d\mu \geq \int_{E_n} \alpha\varphi\, d\mu = \alpha \int_{E_n} \varphi\, d\mu = \alpha\mu_\varphi(E_n).$$

Por continuidad por debajo, $\mu_\varphi(E_n) \nearrow \mu_\varphi(X) = \int_X \varphi\, d\mu$. Tomando $n \to \infty$ en la desigualdad anterior,

$$L \geq \alpha \int_X \varphi\, d\mu \quad (\forall \alpha \in (0,1)).$$

Tomando $\alpha \to 1^-$, resulta $L \geq \int_X \varphi\, d\mu$.

□

Clase 24

8 de Octubre

Aplicación. Sea $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un espacio de medida.

1. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} : X \to \overline{\mathbb{R}}$ son $\mathscr{M}$-medibles no negativas, entonces $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ es $\mathscr{M}$-medible (y, por ende, débil μ-integrable, pues es no negativa) y vale que
$$\int_X \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n\right) d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n d\mu$$
(i.e., vale integrar la serie término a término).

2. Si $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ es $\mathscr{M}$-medible no negativa, entonces $\mu_f : \mathscr{M} \to [0,\infty]$ dada por
$$\mu_f(A) \coloneqq \int_A f d\mu,$$
es una medida.

Demostración. 1. Si definimos $S_n \coloneqq \sum_{k=1}^n f_k$, entonces S_n es $\mathscr{M}$-medible $\forall n \in \mathbb{N}$ (suma finita de medibles) y $0 \leq S_n \leq S_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}$ (pues

$f_{n+1} \geq 0$). Por convergencia monótona,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n = \lim_{n\to\infty} S_n$$

es $\mathscr{M}$-medible y

$$\begin{aligned}
\int_X \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n\right) d\mu &= \int_X \left(\lim_{n\to\infty} S_n\right) d\mu \\
\text{(por C. Mon.)} &= \lim_{n\to\infty} \int_X S_n d\mu \\
\text{(por linealidad)} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_X f_n d\mu \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n d\mu.
\end{aligned}$$

2. Notar que $\mu_f(\varnothing) = \int_\varnothing f d\mu = 0$, pues $\mu(\varnothing) = 0$ y f débil μ-int. Además, si $(E_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{M}$ son disjuntos,

$$\begin{aligned}
\mu_f\left(\biguplus_{j=1}^{\infty} E_j\right) &= \int_{\biguplus_{j=1}^{\infty}} f d\mu = \int_X f\chi_{\biguplus_{j=1}^{\infty} E_j} d\mu \\
&= \int_X f\left(\sum_{j=1}^{\infty} \chi_{E_j}\right) d\mu = \int_X \left(\sum_{j=1}^{\infty} f\chi_{E_j}\right) d\mu \\
\text{(por 1.)} &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_X f\chi_{E_j} d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_f(E_j)
\end{aligned}$$

.

Luego,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j) &= \mu\left(\biguplus_{j=1}^{\infty} E_j\right) \\
&= \int_X \chi_{\biguplus_{j=1}^{\infty} E_j} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \int_X \chi_{E_j} d\mu.
\end{aligned}$$

□

Lema 3.14. Sea $f : X \to [0, \infty]$ una función no negativa. Entonces, f es $\mathscr{M}$-medible si y sólo si existe una sucesión $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones simples $\mathscr{M}$-medibles tales que

i) $0 \leq \varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x) \quad \forall x \in X,\ n \in \mathbb{N}$;

ii) $f(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) \quad \forall x \in X$.

En particular, por Convergencia Monótona,

$$\int_X f(x) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n d\mu.$$

Demostración. $\boxed{\Leftarrow}$ Inmediato, pues límite puntual de medibles es medible (ó $f = \sup \varphi_n$).

$\boxed{\Rightarrow}$ Definimos

$$\varphi_n := \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \chi_{A_k^{(n)}} + n\chi_{B^{(n)}},$$

donde

$$A_k^{(n)} := \left\{ x \ :\ \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n} \right\},\ B^{(n)} := \{x \ :\ f(x) \geq n\}$$

Observar que cada φ_n es simple y $\mathscr{M}$-medible (pues f es $\mathscr{M}$-medible) y

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{\left[2^n f(x)\right]}{2^n} & \text{si } 0 \leq f(x) < n \\ n & \text{si } f(x) \geq n, \end{cases}$$

de donde se sigue que $\varphi_n(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)\ \forall x \in X$. Por otro lado, como $A_k^{(n)} = A_{2k}^{(n+1)} \uplus A_{2k+1}^{(n+1)}$, entonces, si $x \in A_k^{(n)}$,

$$\varphi_n(x) = \frac{k}{2^n} \leq \left. \begin{cases} \frac{2k}{2^{n+1}} \ \left(= \frac{k}{2^n}\right) & \text{si } x \in A_{2k}^{(n+1)} \\ \frac{2k+1}{2^{n+1}} \ \left(= \frac{k}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}\right) & \text{si } x \in A_{2k+1}^{(n+1)} \end{cases} \right\} = \varphi_{n+1}(x).$$

Si $x \in B^{(n)}$, la demostración es similar. □

Demostración (propiedades de la integral)**.** <u>Linealidad</u> Lo vemos sólo en el caso $\alpha \geq 0$ y funciones no negativas. El caso general, se deduce de éste, trabajando con partes pos/neg. En efecto, sean $f, g : X \to [0, \infty]$ $\mathscr{M}$-medibles no negativas. Por el lema, existen $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ simples $\mathscr{M}$-medibles tales que

- $0 \leq \varphi_n \nearrow f$;
- $0 \leq \psi_n \nearrow g$.

Como $\alpha \geq 0$, tenemos que

$$\begin{cases} 0 \leq \alpha\varphi_n \nearrow \alpha f \\ 0 \leq \alpha\psi_n \nearrow \alpha g \\ 0 \leq \varphi_n + \psi_n \nearrow f + g. \end{cases}$$

Por Convergencia Monótona, y la linealidad para simples,

$$\int_X \alpha f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X \alpha\varphi_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n d\mu = \alpha \int_X f d\mu$$

y

$$\begin{aligned} \int_X (f+g) d\mu &= \lim_{n\to\infty} \int_X (\varphi_n + \psi_n) d\mu \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\int_X \varphi_n d\mu + \int_X \psi_n d\mu \right) \\ &= \int_X f d\mu + \int_X g d\mu. \end{aligned}$$

Esto prueba linealidad. En particular, vemos que

$$\int_X |f| d\mu = \int_X f^+ d\mu + \int_X f^- d\mu$$

y, por ende, f es μ-integrable si y sólo si $\int_X |f| d\mu < \infty$.

<u>Desigualdad Triangular</u> Si f es débil μ-integrable, pero $\int_X |f| d\mu = \infty$, entonces la desigualdad es inmediata. Por otro lado, si f es μ-integrable, entonces, por la desigualdad triangular en $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \left| \int_X f d\mu \right| &= \left| \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu \right| \\ &\leq \left| \int f^+ \right| + \left| \int f^- \right| \\ &= \int f^+ + \int f^- = \int |f|. \end{aligned}$$

<u>Monotonía.</u> Si $f \leq g$ μ-CTP, entonces, como $f, f\chi_{\{f\leq g\}}$ son débil μ-int. (y lo mismo para g) y $\mu(\{f > g\}) = 0$,

$$\begin{aligned} \int_X f d\mu &= \int_X f(\chi_{\{f\leq g\}} + \chi_{\{f>g\}}) d\mu \\ &= \int_X f\chi_{\{f\leq g\}} + \int_X f\chi_{\{f>g\}} \\ &= \int_{\{f\leq g\}} f \leq \int_{f\leq g} g = \int_X g d\mu \end{aligned}$$

(notar que la última desigualdad está dada por una propiedad de la clase pasada). $\square$

Clase 25

10 de Octubre

Observación. Si f es débil μ-integrable y $A, B \in \mathscr{M}$ son disjuntos, entonces

$$\int_{A \uplus B} f \; d\mu = \int_X f(\chi_A + \chi_B) d\mu = \int_A f \; d\mu + \int_B f \; d\mu.$$

En particular, si $\mu(E) = 0$, entonces

$$\int_X f \; d\mu = \int_E f \; d\mu + \int_{E^c} f \; d\mu = \int_{E^c} f \; d\mu.$$

Propiedad 3.15 (Desigualdad de Tchebychev)**.** Si f es μ-integrable, entonces, dado $\lambda > 0$,

$$\mu(\{x \ : \ |f(x)| > \lambda\}) \leq \frac{1}{\lambda} \int_{\{x \ : \ |f(x)>\lambda\}} |f| \; d\mu.$$

Demostración.

$$\int_{\{x \ : \ |f(x)|>\lambda\}} |f(x)| \; d\mu \geq \int_{\{x \ : \ |f(x)|>\lambda\}} \lambda \; d\mu = \lambda\mu(\{x \ : \ |f(x)| > \lambda\}).$$

□

Corolario 3.16. Si f es $\mathscr{M}$-medible no negativa y tal que $\int_X f \; d\mu = 0$, entonces $f = 0$ μ-CTP.

Corolario 3.17. Si $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ es μ-integrable, entonces es finita μ-CTP.

Lema 3.18 (Fatou)**.** Sea $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un espacio de medida y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} : X \to \overline{\mathbb{R}}$ funciones $\mathscr{M}$-medibles no negativas μ-CTP. Entonces,

$$\int_X \left(\liminf_{n\to\infty} f_n \right) d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \; d\mu.$$

Observación. La desigualdad puede ser estricta: En efecto, tomar $(X, \mathscr{M}, \mu) := (\mathbb{R}, \mathscr{L}(\mathbb{R}), \lambda)$, $f_n(x) := n\chi_{(0,\frac{1}{n}]}$. Entonces, $f_n \longrightarrow 0$ puntualmente, pero $\int_X f_n \; d\mu = 1 \; \forall n$ y esto es estrictamente mayor que $\int_X 0 \; d\mu = 0$. Además, tomando $g_n := -f_n$, vemos que la hipótesis de $f_n \geq 0$ μ-CTP también es necesaria.

Demostración. Sea $E := \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{x \ : \ f_k(x) < 0\}$. Notar que $E \in \mathscr{M}$ y $\mu(E) = 0$. Luego, si definimos $g_n := (\inf_{k\geq n} f_k)\chi_{E^c}$, entonces

$$0 \leq g_n \nearrow \left(\liminf_{n\to\infty} f_n \right) \chi_{E^c} = \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} g_n \right) \chi_{E^c}.$$

Luego, por Convergencia Monótona,

$$\int_{E^c} \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n \; d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \; d\mu.$$

(no podemos poner límite sólo en el lado derecho, pues no sabemos si converge). Para concluir, debemos ver que $\liminf_{n\to\infty} f_n$ es débil μ-integrable y que $\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \; d\mu = \int_{E^c} \liminf_{n\to\infty} f_n \; d\mu$. Pero esto se deduce de la observación al principio de la clase, pues $\liminf_{n\to\infty} f_n$ es débil μ-integrable, ya que $\liminf_{n\to\infty} f_n \geq 0$ μ-CTP y, por lo tanto,

$$\left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right)^- = 0 \; \mu\text{-CTP}$$

y, por lo tanto,

$$\int_X (\liminf f_n)^-) d\mu = \int_X 0 \; d\mu = 0 < \infty.$$

(notar que la igualdad está dada por la observación dada a continuación).

$\square$

Observación. Si $f = g$ μ-CTP, entonces

$$\int_X f \; d\mu = \int_{\{f=g\}} f \; d\mu = \int_{\{f=g\}} g \; d\mu = \int_X g \; d\mu.$$

(f, g son débil μ-integrables).

Teorema 3.19 (de Convergencia Dominada)**.** Sean $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un espacio de medida y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} : X \to \overline{\mathbb{R}}$ funciones $\mathscr{M}$-medibles tales que

1. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge μ-CTP a $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathscr{M}$-medible;
2. Existe $g : X \to [0, \infty]$ μ-integrable ($\Rightarrow$ $\mathscr{M}$-medbile) tal que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n| \leq g$$

μ-CTP.

Entonces, f es μ-integrable y

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \; d\mu = 0.$$

En particular,

$$\int_X f \; d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \; d\mu.$$

Observación. (2) es equivalente a que ($\sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n|$) sea μ-integrable.

Demostración. Vemos primero que f es μ-integrable. Observar que

$$|f(x)| = \liminf_{n\to\infty} |f_n(x)| \quad \forall x \in E := \{x \ : \ f_n(x) \longrightarrow f(x)\}.$$

Como $\mu(E^c) = 0$ por hipótesis, entonces

$$\int_X |f| \ d\mu = \int_E |f| \ d\mu = \int_E \left(\liminf_{n\to\infty} |f_n|\right) d\mu = \int_X \left(\liminf_{n\to\infty} |f_n|\right) d\mu.$$

Luego, por el Lema de Fatou,

$$\int_X |f| \ d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X |f_n| \ d\mu \leq \int_X g \ d\mu < \infty.$$

Luego, f es μ-integrable. En particular, como cada f_n es μ-integrable,

$$\int_X |f_n - f| \ d\mu < \infty.$$

Sea ahora $h_n := 2g - |f_n - f|$. Observar que $h_n \geq 0$ μ-CTP (pues $|f_n| \leq g$ μ-CTP $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow |f| \leq g$ μ-CTP). Por el Lema de Fatou,

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} h_n \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X h_n \ d\mu = \liminf_{n\to\infty} \left(2\int_X g \ d\mu - \int_X |f_n - f| \ d\mu\right).$$

Como $\lim_{n\to\infty} h_n = 2g$ μ-CTP,

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} h_n = \int_X 2g \ d\mu.$$

Juntando ambas cosas, tenemos que

$$2\int_X g \ d\mu \leq 2\int_X g \ d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \ d\mu.$$

Luego,

$$\limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \ d\mu \leq 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \ d\mu = 0$$

y, como,

$$\left|\int_X f_n \ d\mu - \int_X f \ d\mu\right| = \left|\int_X (f_n - f) \ d\mu\right| \leq \int_X |f_n - f| \ d\mu \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

resulta que $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \ d\mu = \int_X f \ d\mu$. $\square$

Clase 26

13 de Octubre

Observación. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ medible si $f^{-1}(B) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}) \quad \forall B \in \beta(\mathbb{R})$.

Proposición 3.20. Sean $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un espacio de medida y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} : X \to \overline{\mathbb{R}}$ funciones $\mathscr{M}$-medibles. Entonces, si $f_n \geq 0$ μ-CTP $\forall n \in \mathbb{N}$ ó $\int (\sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n|)\, d\mu < \infty$, vale que $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge μ-CTP (en $\overline{\mathbb{R}}$), es $\mathscr{M}$-medible, (definida como 0 donde no converge) y, además,

$$\int_X \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \right) \, d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n \; d\mu.$$

3.1 Integración de funciones a valores en $\mathbb{C}$

Sean $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un espacio de medida y $f : X \to \mathbb{C}$ una función. Notemos que $f = \Re(f) + i\Im(f)$ donde $\Re(f), \Im(f) : X \to \mathbb{R}$ están definidas por

$$\Re(f)(x) \coloneqq \Re(f(x)), \quad \Im(f)(x) \coloneqq \Im(f(x)).$$

Definición 3.21 (función medible)**.** Una función $f : X \to \mathbb{C}$ se dice medible si $\Re(f)$, $\Im(f)$ lo son (en el sentido usual). Decimos que f es μ-integrable si $\Re(f)$, $\Im(f)$ lo son. En ese caso, definimos

$$\int_X f \; d\mu \coloneqq \int_X \Re(f) \; d\mu + i \int_X \Im(f) \; d\mu \;\; \in \mathbb{C}.$$

Teorema 3.22. Sean $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un espacio de medida y $f, g : X \to \mathbb{C}$ funciones $\mathscr{M}$-medibles. Entonces:

1. Si f, g son μ-integrables, entonces $\alpha f + \beta g$ es μ-integrable $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ y
$$\int_X (\alpha f + \beta g) \; d\mu = \alpha \int_X f \; d\mu + \beta \int_X g \; d\mu.$$
2. f es μ-integrable (en $\mathbb{C}$) si y sólo si $|f|$ es μ-integrable (en $\mathbb{R}$) y, en tal caso,
$$\left| \int_X f \; d\mu \right| \leq \int_X |f| \; d\mu.$$
3. Si f es μ-integrable y $E \in \mathscr{M}$, entonces $f\chi_E$ es μ-integrable. En particular, si definimos $\int_E f \; d\mu \coloneqq \int_X f \cdot \chi_E \; d\mu$, entonces si $E_1, E_2 \in \mathscr{M}$ son disjuntos,
$$\int_{E_1 \uplus E_2} f \; d\mu = \int_{E_1} f \; d\mu + \int_{E_2} f \; f\mu.$$

Además, si $\mu(E) = 0$, entonces $\int_E f \; d\mu = 0$ y, por lo tanto, $\int_X f \; d\mu = \int_{E^c} f \; d\mu$.

Demostración. Teorema 8.12 del Rana. □

3.1.1 Caso particular: Integral de Lebesgue

Notación.

- $\int f(x)\ dx =$ integral de f respecto a la medida de Lebesgue.
- $\int_a^b f(x)\ dx := \int_{[a,b]} f(x)\ dx$.
- C.T.P. = C.T.P. respecto de la medida de Lebesgue.
- integrable = integrable respecto de la medida de Lebesgue.
- $\int_X f(x)\ d\mu(x)$ cuando queramos destacar la variable de integración.

Teorema 3.23. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada. Entonces,

1. f es integrable Riemann si y sólo si f es continua C.T.P.
2. Si f es integrable Riemann, entonces f es integrable Lebesgue y

$$\int_a^b f(x)\ dx(R) = \int_a^b f(x)\ dx(L).$$

Definición 3.24 (envolventes de Baire)**.** Dada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada, definimos:

1. La envolvente superior de Baire de f como $M : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$M(x) := \limsup_{y\to x} f(y) := \inf_{\delta>0}\left(\sup_{y:|y-x|<\delta} f(y)\right).$$

2. La envolvente inferior de Baire de f como $m : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$m(x) := \liminf_{y\to x} f(y) := \sup_{\delta>0}\left(\inf_{y:|y-x|<\delta} f(y)\right).$$

Lema 3.25. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es acotada, entonces:

1. $m(x) \le f(x) \le M(x) \quad \forall x \in [a,b]$.
2. f es continua en $x \Leftrightarrow m(x) = M(x)$.
3. M es semicontinua superior, i.e. $\{M < \alpha\}$ es abierto $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
4. m es semicontinua inferior, i.e. $\{m > \alpha\}$ es abierto $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

En particular, M y m son medibles Borel.

Demostración. Ver Canvas. $\square$

Lema 3.26. Sean $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada y $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de particiones de $[a,b]$ tales que $\|\pi_n\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Entonces, si definimos $\underline{s}_{\pi_n}, \overline{s}_{\pi_n} : [a,b] \to \mathbb{R}$ por

$$\underline{s}_{\pi_n} := \sum_{I\in\pi_n} m_I(f)\chi_I, \quad \overline{s}_{\pi_n} := \sum_{I\in\pi_n} M_I(f)\chi_I.$$

vale que

$$\begin{matrix} \underline{s}_{\pi_n}(x) \longrightarrow m(x) \\ \overline{s}_{\pi_n}(x) \longrightarrow M(x) \end{matrix} \quad \forall x \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \pi_n.$$

En particular, $\underline{s}_{\pi_n} \longrightarrow m$, $\overline{s}_{\pi_n} \longrightarrow M$ C.T.P.

Demostración. Dado $x_0 \in [a,b] \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \pi_n$ y $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\sup_{y:|y-x_0|<\delta} f(y) < M(x_0) + \varepsilon.$$

Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|\pi_n\| < \delta$ $\forall n \geq n_0$. Luego, para cada $n \geq n_0$, existe $I_n \in \pi_n$ tal que $x_0 \in \mathring{I}_n \subseteq B(x_0, \delta)$. En particular,

$$\overline{s}_{\pi_n}(x_0) = \sup_{y\in I_n} f(y) \leq \sup_{y:|y-x_0|<\delta} f(y) < M(x_0) + \varepsilon.$$

Por otro lado, existe $\delta^* > 0$ tal que $B(x_0, \delta^*) \subseteq I_n$, de modo que

$$\overline{s}_{\pi_n}(x_0) = \sup_{y\in I_n} f(y) \geq \sup_{y:|y-x_0|<\delta^*} f(y) \geq M(x_0).$$

Luego, $\forall n \geq n_0$, $M(x_0) \leq \overline{s}_{\pi_n}(x_0) \leq M(x_0) + \varepsilon$. Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, resulta $\lim_{n\to\infty} \overline{s}_{\pi_n}(x_0) = M(x_0)$. $\square$

Nota. La prueba para m es análoga.

Proposición 3.27. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es acotada, entonces

$$\overline{\int_a^b} f(x)\, dx(R) = \int_a^b M(x)\, dx(L), \quad \underline{\int_a^b} f(x)\, dx(R) = \int_a^b m(x)\, dx(L).$$

Demostración. Hacemos el caso de M. Sean $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ partición de $[a,b]$ tal que $\|\pi_n\| \longrightarrow 0$. Entonces

1. $\overline{s}_{\pi_n} \longrightarrow M$ C.T.P.
2. $|\overline{s}_{\pi_n}| \leq \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| := K \in [0,\infty)$ pues f es acotada.

Luego, como la función constante K es integrable en $[a,b]$ por ser simple y ser $|[a,b]| < \infty$, entonces por Convergencia Dominada,

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \overline{s}_{\pi_n}(x)\ dx(L) = \int_a^b M(x)\ dx.$$

□

Clase 27

15 de Octubre

Proposición 3.28. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es acotada, entonces

$$\overline{\int_a^b} f\ (R) = \int_a^b M\ (L) \quad \text{y} \quad \underline{\int_a^b} f\ (R) = \int_a^b m\ (L).$$

Demostración (continuación). Vemos sólo el caso de M, pues el otro es igual. Vimos ya que

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \overline{s}_{\pi_n}(x)\ dx\ (L) = \int_a^b M(x)\ dx\ (L).$$

Pero, notemos que

$$\int_a^b \overline{s}_{\pi_n}(x)\ dx = \overline{S}(f;\pi_n).$$

Luego, por resultado visto en clases, como $\|\pi_n\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f;\pi_n) = \overline{\int_a^b} f\ (R).$$

Juntando ambas cosas, por unicidad del límite,

$$\overline{\int_a^b} f\ (R) = \int_a^b M\ (L).$$

□

Demostración (Teorema 2.23).

1. f integrable Riemann $\Leftrightarrow \overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f \Leftrightarrow \int_a^b M(x)\ dx = \int_a^b m(x)\ dx \Leftrightarrow \int_a^b (M(x) - m(x))\ dx = 0 \Leftrightarrow$ (por corolario de la clase pasada) $M - m = 0$ CTP. $\Leftrightarrow M = m$ CTP. $\Leftrightarrow f$ continua CTP.

2. Si f es Riemann integrable, entonces, por (1) y el control 3, f es medible Lebesgue (o, sino, $f = M$ CTP y M es medible). Además, es integrable por ser acotada y, en consecuencia,

$$\int_a^b f(x)\,dx\ (L) = \int_a^b M(x)\,dx\ (L) = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx\ (R) = \int_a^b f(x)\,dx\ (R).$$

□

Definición 3.29 (función escalonada). Una función $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ se dice escalonada si existe una partición $\pi = \{x_0, \dots, x_n\}$ de $[a,b]$ y $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{[x_{i-1}, x_i]}(x) \quad \forall x \notin \pi.$$

Observación. Toda φ escalonada es simple y Riemann integrable.

Proposición 3.30. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Entonces

$$f \text{ Riemann integrable} \Leftrightarrow \inf_{\substack{\varphi \text{ escalonada} \\ \varphi \geq f}} \int_a^b \varphi = \sup_{\substack{\varphi \text{ escalonada} \\ \varphi \leq f}} \int_a^b \varphi,$$

y

$$f \text{ Lebesgue integrable} \Leftrightarrow \inf_{\substack{\varphi \text{ simple} \\ \varphi \geq f}} \int_a^b \varphi \ (L) = \sup_{\substack{\varphi \text{ simple} \\ \varphi \leq f}} \int_a^b \varphi \ (L).$$

Demostración. Royden (Capítulo 4, sección 2, proposición 3). □

Chapter 4

Unidad 4: Espacios Producto

Definición 4.1. Sean $(X_1, \mathscr{M}_2)$, $(X_2, \mathscr{M}_2)$ espacioes medibles. Definimos

1. La clase de rectángulos medibles en $X_1 \times X_2$ como
$$\mathcal{R} := \{A \times B \ : \ A \in \mathscr{M}_1, \ B \in \mathscr{M}_2\}.$$
2. La σ-álgebra producto $\mathscr{M}_1 \times \mathscr{M}_2$ en $X_1 \times X_2$ como $\mathscr{M}_1 \times \mathscr{M}_2 := \sigma(\mathbb{R})$.

Nota. No confundir $\mathscr{M}_1 \times \mathscr{M}_2$ con el producto cartesiano de $\mathscr{M}_1$ y $\mathscr{M}_2$!!! En efecto, notar que el el producto cartesiano entre $\mathscr{M}_1$ y $\mathscr{M}_2$ es igual a $\{(A, B) \ : \ A \in \mathscr{M}_1, \ B \in \mathscr{M}_2\}$. En cambio, los elementos de $\mathscr{M}_1 \times \mathscr{M}_2$ son subconjuntos de $X_1 \times X_2$.

Ejemplo.

- $\beta(\mathbb{R}^n) \times \beta(\mathbb{R}^m) = \beta(\mathbb{R}^{n+m}) = \sigma(I_1 \times \cdots \times I_{n+m} \ : \ I_i \subseteq \mathbb{R}$ intervalo).
- $\beta(\mathbb{R}^n) \times \beta(\mathbb{R}^m) \subsetneq \mathscr{L}(\mathbb{R}^n) \times \mathscr{L}(\mathbb{R}^m) \subsetneq \mathscr{L}(\mathbb{R}^{n+m})$.

Observación. $\mathcal{R}$ es una semiálgebra.

Teorema 4.2. Sean $(X_1, \mathscr{M}_1, \mu_1)$, $(X_2, \mathscr{M}_2, \mu_2)$ espacios de medida σ-finita. Entonces, existe una única medida $\mu_1 \times \mu_2$ en $(X_1 \times X_2, \mathscr{M}_1 \times \mathscr{M}_2)$ tal que $\mu_1 \times \mu_2(A \times B) = \mu_1(A)\mu_2(B) \quad \forall A \times B \in \mathcal{R}$.

Más aún, $\mu_1 \times \mu_2$ se puede extender de manera única a la σ-álgebra
$$\overline{\mathscr{M}_1 \times \mathscr{M}_2} := \{A \uplus N \ : \ A \in \mathscr{M}_1 \times \mathscr{M}_2, \ \exists B \in \mathscr{M}_1 \times \mathscr{M}_2 \text{ tq } N \subseteq B \text{ y } (\mu_1 \times \mu_2)(B) = 0\}.$$
Notamos a dicha extensión como $\overline{\mu_1 \times \mu_2}$ y viene dada por
$$\overline{\mu_1 \times \mu_2}(A \uplus N) = \mu_1 \times \mu_2(A).$$

Nota. La medida $\mu_1 \times \mu_2$ se llama la medida producto de μ_1 y μ_2.

Observación. Por inducción, se puede definir $\mu_1 \times \cdots \times \mu_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo. Si $(X_i, \mathscr{M}_i, \mu_i) \coloneqq (\mathbb{R}, \beta(\mathbb{R}), \lambda) \quad i = 1, \ldots, n$ entonces

$$\begin{aligned} &X_1 \times \cdots \times X_2 = \mathbb{R}^n \\ &\beta(\mathbb{R}) \times \cdots \times \beta(\mathbb{R}) = \beta(\mathbb{R}^n) \\ &\lambda \times \cdots \times \lambda = \lambda_{\mathbb{R}^n} \text{ (sobre } \beta(\mathbb{R}^n)) \end{aligned}$$

Clase 28

17 de Octubre

Demostración (Teorema 4.2). Definimos la premedida $\tau : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ por $\tau(A \times B) \coloneqq \mu_1(A)\mu_2(B)$. Como τ es σ-finita, pues μ_1 y μ_2 lo son, y por el Teorema de Carathéodory, bastará con ver que τ es σ-aditiva en $\mathcal{R}$ (implica finitamente aditiva + σ-subaditiva). A tal fin, sean $(A_n \times B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{R}$ disjuntos y $A \times B \in \mathcal{R}$ tal que $A \times B = \biguplus_{n\in\mathbb{N}} A_n \times B_n$. Debemos ver que $\mu_1(A)\mu_2(B) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_1(A_n)\mu_2(B_n)$. Para cada $x \in A$, sea $I(x) \coloneqq \{n \in \mathbb{N} \ : \ x \in A_n\}$.

Notar que, entonces, $B = \biguplus_{n\in I(x)} B_n$. En efecto,

$$\begin{aligned} y \in B &\Leftrightarrow (x, y) \in A \times B \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in A_n \times B_n \text{ para algún } n \\ &\Leftrightarrow n \in I(x), \ y \in B_n. \end{aligned}$$

Para ver que la unión es disjunta, notar que si $y \in B_n \cap B_m$ con $n, m \in I(x)$, entonces $(x, y) \in A_n \times B_n \cap A_m \times B_m \Rightarrow n = m$.

En particular, esto implica que

$$\chi_A(x)\mu_2(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}(x)\mu_2(B_n)$$

donde, además, tenemos que

$$\chi_A(x)\mu_2\left(\biguplus_{n\in I(x)} B_n\right) = \chi_A(x)\sum_{n=1}^{\infty} \mu_2(B_n)\underbrace{\chi_{I(x)}(n)}_{=\chi_{A_n}(x)}.$$

Integrando respecto a μ_1 a ambos miembros,

$$\mu_1(A)\mu_2(B) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_1(A_n)\mu_2(B_n).$$

Donde la igualdad está dada por monotonía (i.e. $\int_{X_1} \sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_{A_n}\mu_2(B_n)\, d\mu_1 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{X_1} \chi_{A_n}\mu_2(B_n)\, d\mu_1$). $\square$

Definición 4.3 (sección transversal). Dados $(X, \mathscr{M}, \mu)$, (Y, Σ, ν) y $E \subseteq X \times Y$, para cada $x \in X$ e $y \in Y$ definimos

- La sección transversal de E en x como $E_x \coloneqq \{y \in Y \ : \ (x, y) \in E\}$;
- La sección transversal de E en y como $E^y \coloneqq \{x \in X \ : \ (x, y) \in E\}$.

Propiedad 4.4.

- $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n)_x = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (E_n)_x$ y $(\biguplus_{n\in\mathbb{N}} E_n)_x = \biguplus_{n\in\mathbb{N}} (E_n)_x$.
- $E_1 \subseteq E_2 \Rightarrow (E_1)_x \subseteq (E_2)_x$.
- $E_1 \subseteq E_2 \Rightarrow (E_2 - E_1)_x = (E_2)_x - (E_1)_x$. En particular, $(E^c)_x = (E_x)^c$.
- La aplicación $y \mapsto \chi_E(x,y)$ coincide con $\chi_{E_x} : Y \to \{0,1\}$.

Vale lo mismo para secciones transversales en $y \in Y$.

Teorema 4.5 (Principio de Cavalieri). Sean $(X, \mathscr{M}, \mu)$, (Y, Σ, ν) espacios de medida σ-finita. Entonces si $E \in \mathscr{M} \times \Sigma$ $(= \sigma(\mathcal{R}))$, vale que:

i) $E_x \in \Sigma \quad \forall x \in X$

ii) $g_E(x) := \nu(E_x) = \int_Y \chi_E(x,y)\, d\nu(y)$ es $\mathscr{M}$-medible.

iii) se tienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}\mu \times \nu(E) &= \int_{X\times Y} \chi_E(x,y)\, d(\mu\times\nu)(x,y) \\ &= \int_X g_E(x)\, d\mu(x) = \int_X \left(\int_Y \chi_E(x,y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x)\end{aligned}$$

Además, vale lo mismo para secciones en y

Demostración. i) Sea $\mathscr{C} := \{E \in \mathscr{M}\times\Sigma \ : \ E_x \in \Sigma\ \forall x \in X\}$. Queremos ver que $\mathscr{M}\times\Sigma \subseteq \mathscr{C}$. Basta ver que $\mathscr{C}$ es σ-álgebra que contiene a $\mathcal{R}$. En efecto:

(a) ($\mathcal{R} \subseteq \mathscr{C}$:) si $E = A \subset B \in \mathcal{R}$ entonces

$$E_x = \begin{cases} B & x \in A \\ \varnothing & x \notin A \end{cases} \quad \in \Sigma.$$

□

Clase 29

20 de Octubre

Demostración (Principio de Cavalieri). Debíamos ver que $\mathscr{C} = \{E \in \mathscr{M} \times \Sigma \ : \ E_x \in \Sigma\ \forall x\}$ es una σ-álgebra que contiene a $\mathcal{R}$.

a) ($\mathcal{R} \subseteq \mathscr{C}$): ya lo vimos!

b) ($\mathscr{C}$ σ-álgebra):

- $X \times Y \in \mathscr{C}$ pues $X \times Y \in \mathcal{R} \subseteq \mathscr{C}$;

- $E \in \mathscr{C},\ x \in X \Rightarrow (E^c)_x = (E_x)^c \in \Sigma$;
- $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{C},\ x \in X \Rightarrow (\bigcup_{n\in\mathbb{N}})_x = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(E_n)_x \in \Sigma$.

Por minimalidad, $\mathscr{M} \times \Sigma = \sigma(\mathcal{R}) \subseteq \mathscr{C}$.

c) (ii + iii) Suponemos que μ y ν son finitas (el caso general se deduce de éste, mediante el argumento de siempre). Consideremos la clase

$$\mathscr{L} := \left\{ E \in \mathscr{M} \times \Sigma \ : \ \begin{array}{l} g_E(x) := \nu(E_x) \text{ es } \mathscr{M}\text{-medible (ii)} \\ \mu \times \nu(E) = \int_X g_E(x)\ d\mu(x) \text{ (iii)} \end{array} \right\}$$

Queremos ver que $\mathscr{M} \times \Sigma \subset \mathscr{L}$. Para ello, mostraremos que $\mathscr{L}$ es un λ-sistema que contiene a $\mathcal{R}$. Como $\mathcal{R}$ es un π-sistema por ser semiálgebra, por Dynkin obtenemos que $\mathscr{M} \times \Sigma = \sigma(\mathcal{R}) \subseteq \mathscr{L}$.

- ($\mathcal{R} \subseteq \mathscr{L}$): Si $E = A \times B \in \mathscr{L}$, entonces

$$\begin{cases} g_E(x) = \nu(B)\chi_A(x) \text{ es } \mathscr{M}\text{-medible, pues } A \in \mathscr{M}. \checkmark \\ \mu \times \nu(E) = \mu(A)\nu(B) = \int_X g_E(x)\ d\mu(x).\ \checkmark \end{cases}$$

- ($\mathscr{L}$ λ-sistema):
  - $X \times Y \in \mathscr{L}$ pues $X \times Y \in \mathcal{R} \subseteq \mathscr{L}$.
  - $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{L}$ disjuntos $\Rightarrow \biguplus_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathscr{L}$. En efecto,

$$\begin{aligned} g_{\biguplus_{n\in\mathbb{N}} E_n}(x) &= \nu\left(\left(\biguplus_{n\in\mathbb{N}} E_n\right)_x\right) \\ &= \nu\left(\biguplus_{n\in\mathbb{N}} (E_n)_x\right) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu((E_n)_x) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} g_{E_n}(x) \end{aligned}$$

es $\mathscr{M}$-medible por ser límite de las sumas parciales (que son $\mathscr{M}$-medibles)

$$\begin{aligned} \mu \times \nu\left(\biguplus_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu \times \nu(E_n) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_X g_{E_n}\ d\mu \\ &= \int_X \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} g_{E_n}\right)\ d\mu \\ &= \int_X g_{\biguplus_{n\in\mathbb{N}} E_n}\ d\mu.\ \checkmark \end{aligned}$$

– ($E \in \mathscr{L} \Rightarrow E^c \in \mathscr{L}$): En efecto,

$$\begin{aligned} g_{E^c}(x) = \nu((E^c)_x) &= \nu((E_x)^x) \\ &= \nu(Y) - \nu(E_x) \\ &= g_{X\times Y}(x) - g_E(x) \end{aligned}$$

es $\mathscr{M}$-medible.

$$\begin{aligned} \mu \times \nu(E^c) &= \mu \times \nu(X \times Y) - \mu \times \nu(E) \\ &= \int_X g_{X\times Y}\ d\mu - \int_X g_E\ d\mu \\ &= \int_{X\times Y} \underbrace{(g_{X\times Y} - g_E)}_{g_{E^c}}\ d\mu. \end{aligned}$$

□

Teorema 4.6 (Fubini)**.** Si $(X, \mathscr{M}, \mu)$, (Y, Σ, ν) son espacios de medida σ-finita y $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ es $(\mathscr{M} \times \Sigma)$-medible y débil $(\mu \times \nu)$-integrable, entonces:

i) $y \mapsto f(x, y)$ es Σ-medible $\forall x \in X$ y débil ν-integrable μ-CTP.

ii) $x \mapsto \int_Y f(x, y)\ d\nu(y)$ es $\mathscr{M}$-medible (extiendo por 0 donde no se puede integrar) y débil μ-integrable.

iii) $\int_X (\int_Y f(x, y)\ d\nu(y))\ d\mu(x) = \int_{X\times Y} f(x, y)\ d(\mu \times \nu)(x, y)$.

Además,

1. Si $f \geq 0$ entonces la débil ν-integrabilidad en (i) es en TODO punto.
2. Si f es $(\mu \times \nu)$-integrable entonces la integrabilidad débil se puede reemplazar por integrabilidad en (i), (ii).
3. Valen las mismas afirmaciones intercambiando el rol de x e y.

Demostración. Lo hacemos en 4 pasos:

1. Si $f = \chi_E$ con $E \in \mathscr{M} \times \Sigma$, el resultado se sigue del principio de Cavalieri (y la débil integrabilidad en (i) es en TODO punto).
2. Si f es simple no negativa, el resultado se sigue de (i) por linealidad.
3. Si f es no negativa, tomamos $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ simples tales que $0 \leq \varphi_n \nearrow f$. Entonces, si dada $g : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ y $x \in X$, definimos $g_x(y) := g(x, y)$, entonces:
   - $0 \leq (\varphi_n)_x \nearrow f_x$ y, por (2), f_x resulta Σ-medible. Como $f_x \geq 0$, en particular, es débil ν-integrable ($\forall x \in X$).

- Por Convergencia Monótona,

$$0 \leq h_n(x) \coloneqq \int_Y (\varphi_n)_x \; d\nu(y) \nearrow \int_Y f_x \; d\nu(y) \coloneqq h_f(x).$$

En particular, h_f es $\mathscr{M}$-medible (por ser límite de medibles) y, al ser $h \geq 0$, es también débil μ-integrable.

(iii) Por convergencia Monótona de nuevo,

$$\begin{aligned} \int_X \left(\int_Y f(x,y) \; f\nu(y) \right) \; d\mu(x) &= \int_X h_f(x) \; d\mu(x) \\ \text{(Conv. Mon.)} \quad &= \lim_{n\to\infty} \int_X h_n(x) \; d\mu(x) \\ (2) \quad &= \lim_{n\to\infty} \int_{X\times Y} \varphi_n(x,y) \; d(\mu\times\nu)(x,y) \\ \text{(Conv. Mon.)} \quad &= \int_{X\times Y} f(x,y) \; d(\mu\times\nu)(x,y) \end{aligned}$$

4. Si f cambia de signo, se obtiene el resultado a partir de f^+ y f^- utilizando el paso (3). Lo único que hay que verificar es que f_x y h_f son débilmente integrables si f lo es. Para ello, supongamos que $\int_{X\times Y} f^+ \; d(\mu\times\nu) < \infty$ (el otro caso es análogo). Luego, por el paso (3), $\int_X (\int_Y (f^+)_x \; d\nu) \; d\mu < \infty$ $(*)$. En particular, $\int_Y (f^+)_x \; d\nu(y) < \infty$ para μ-casi todo x. Esto implica que:

   a) $f_x = (f^+)_x - (f^-)_x$ es $\mathscr{M}$-medible $\forall x \in X$, y es débil ν-integrable para μ-casi todo x, pues $(f_x)^+ = (f^+)_x$.
   b) $h(x) = \int_X (f^+)_x - \int_Y (f^-)_x$ está bien definida μ-CTP. Además, es $\mathscr{M}$-medible (si la extendemos por 0 deonde no está bien definida) por ser medibles.
   c) $\int_X h_f^+(x) \; d\mu(x) \leq \int_X (\int_Y (f^+)_x(y) \; d\nu(y)) \; d\mu(y) < \infty$ por $(*)$ y luego h_f es débil μ-integrable.

$\square$

Clase 30

22 de Octubre

Demostración (Continuación Fubini)**.** Estábamos viendo el caso (4) en que f cambia de signo, pero es débil $(\mu\times\nu)$-integrable ($\int_{X\times Y} f^+ \; d(\mu\times\nu) < \infty$). Usando que $(f_x)^{\pm} = (f)^{\pm}_x$, vimos que $h_f(x) \coloneqq \int_Y f_x(y) \; d\nu(y)$ estaba bien definida para μ-casi todo x y era débil μ-integrable. Como

$$h_f(x) = \int_Y (f_x)^+ \; d\nu - \int_Y (f_x)^- \; d\nu$$

por linealidad, concluimos que

$$\begin{aligned}
\int_X h_f \, d\mu &= \int_X \left(\int_Y (f_x)^+ \, d\nu \right) \, d\mu - \int_X \left(\int_Y (f_x)^- \, d\nu \right) \, d\mu \\
&= \int_X \left(\int_Y (f^+)_x \, d\nu \right) \, d\mu - \int_X \left(\int_Y (f^-)_x \, d\nu \right) \, d\mu \\
&= \int_{X \times Y} f^+ \, d(\mu \times \nu) - \int_{X \times Y} f^- \, d(\mu \times \nu) \\
&\coloneqq \int_{X \times Y} f \, d(\mu \times \nu).
\end{aligned}$$

Por último, si f fuese $(\mu \times \nu)$-integrable, podemos repetir lo anterior para f^+ y f^- y con esto reemplazar la integrabilidad débil por integrabilidad en todos lados. □

Nota.

- El caso particular en que $f \geq 0$ se conoce como el Teorema de Tonelli (o de Fubini-Tonelli).
- Los libros suelen hacer el caso $f \geq 0$ ó f integrable.
- El argumento en 4 pasos ($\chi_E \to$ simples $\to f \geq 0 \to f$ cualquiera) se conoce como "argumento estándar".

Pregunta. ¿Qué pasa si $E \in \overline{\mathscr{M} \times \Sigma} \setminus \mathscr{M} \times \Sigma$?

Ejemplo. Si $V \subseteq [0,1)$ es un conjunto de Vitali y $E = \{0\} \times V$. Se verifica que:

1. $V \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2) = \overline{\mathscr{L}(\mathbb{R}) \times \mathscr{L}(\mathbb{R})} = \overline{\beta(\mathbb{R}) \times \beta(\mathbb{R})} = \overline{\beta(\mathbb{R}^2)}$ pues es $(\lambda \times \lambda)$-nulo.
2. $E \notin \mathscr{L}(\mathbb{R}) \times \mathscr{L}(\mathbb{R})$ y $x = 0$, entonces $E_x = V \notin \mathscr{L}(\mathbb{R})$ (absurdo, por Fubini).

Teorema 4.7 (Fubini en $\overline{\mathscr{M} \times \Sigma}$)**.** Sean $(X, \mathscr{M}, \mu)$, (Y, Σ, ν) espacios de medida σ-finita completos y $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ $(\overline{\mathscr{M} \times \Sigma})$-medible y débil $(\overline{\mu \times \nu})$-integrable. Entonces:

i) $f_x(y) \coloneqq f(x,y)$ es Σ-medible y débil ν-integrable para μ-casi todo x.

ii) $h_f(x) \coloneqq \int_Y f_x(y) \, d\nu(y)$ es $\mathscr{M}$-medible (extendiendo donde no está bien definida) y débil μ-integrable.

iii) se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_X \left(\int_Y f(x,y) \, d\nu(y) \right) \, d\mu(x) &= \int_X h_f(x) \, d\mu(x) \\
&= \int_{X \times Y} f(x,y) \, d(\overline{\mu \times \nu})(x,y)
\end{aligned}$$

Además, vale lo mismo para secciones en y.

Demostración. Por el argumento estándar, bastará con verlo para $f = \chi_E$ con $E \in \overline{\mathscr{M} \times \Sigma}$.

En tal caso, $E = B \uplus N$, donde $B \in \mathscr{M} \times \Sigma$ y N es $\mu \times \nu$-nulo, i.e. $\exists \widehat{N} \in \mathscr{M} \times \Sigma$ tal que $N \subseteq \widehat{N}$ y $\mu \times \nu(\widehat{N}) = 0$. Luego, $\chi_E = \chi_B + \chi_N$ y, como ya vimos el Teo. para $B \in \mathscr{M} \times \Sigma$, bastará con verlo para χ_N. A tal fin, notar que, para cada $x \in X$ se tiene que $(\chi_N)_x = \chi_{N_x}$. En particular, $(\chi_N)_x$ es Σ-medible si y sólo si $N_x \in \Sigma$. Veremos que $N_x \in \Sigma$ para μ-casi todo x y eso nos dará (i). Para ello, observar que por el Principio de Cavalieri

$$0 = \mu \times \nu(\widehat{N}) = \int_X \left(\int_Y \underbrace{\chi_{\widehat{N}}(x,y)}_{=(\chi_{\widehat{N}})_x} \, d\nu \right) d\mu = \int_X \underbrace{\nu(\widehat{N}_x)}_{\geq 0} \, d\mu(x).$$

Como $\nu(\widehat{N}_x) \geq 0 \ \forall x \in X$, lo anterior implica (por guía 6) que $\nu(\widehat{N}_x) = 0$ para μ-c.t.x. Entonces, como $N_x \subseteq \widehat{N}_x$, resulta que N_x es μ-nulo para μ-casi todo x. Como (Y, Σ, ν) es completo, resulta $N_x \in \Sigma$ para μ-c.t.x. □

Clase 31

24 de Octubre

Definición 4.8 (variación)**.** Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y π una partición de $[a,b]$. Definimos la variación de f en $[a,b]$ respecto a π como

$$V_a^b(f;\pi) := \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \sum_{I \in \pi} |\Delta f(I)|$$

donde $\Delta f(I) = f(\sup I) - f(\inf I)$. Observar que si $\pi \subseteq \pi'$, entonces $V_a^b(f;\pi) \leq V_a^b(f;\pi')$. Luego, definimos la variación total de f en $[a,b]$ como

$$V_a^b(f) := \sup_{\substack{\pi \text{ part.} \\ \text{de } [a,b]}} V_a^b(f;\pi) \in [0,\infty].$$

f se dice variación acotada si $V_a^b(f) < \infty$.

Ejemplo. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es monótona, entonces $V_a^b(f) = |f(b) - f(a)| \quad \forall \pi$. Luego, $V_a^b(f) = |f(b) - f(a)| < \infty$ y, por ende, f es de variación acotada.

Ejemplo. La función

$$f(x) := \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x = 0, \end{cases}$$

es continua pero no tiene variación acotada en $[0,1]$.

Observación. Existen funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas pero que no son de VA sobre ningún intervalo $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ acotado.

Teorema 4.9. Una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es de VA si y sólo si $f = f_1 - f_2$ con $f_i : [a,b] \to \mathbb{R}$ monótonas crecientes.

Demostración. $\boxed{\Leftarrow}$ Por el ejemplo, f_1 y f_2 son de variación acotada. En particular, si π es partición de $[a,b]$,

$$|\Delta f(I)| \leq |\Delta f_1(I)| + |\Delta f_2(I)|$$

y, por lo tanto,

$$V_a^b(f;\pi) \leq V_a^b(f_1;\pi) + V_a^b(f_2;\pi) \leq V_a^b(f_1) + V_a^b(f_2) < \infty,$$

es decir (tomando supremo), tenemos

$$V_a^b(f) \leq V_a^b(f_1) + V_a^b(f_2) < \infty.$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Definimos $f_1(x) \coloneqq V_a^x(f)$ y $f_2(x) \coloneqq f_1(x) - f(x)$. Por construcción, basta ver que f_1 y f_2 son crecientes (y que f_1 toma valores en $\mathbb{R}$). Si tomamos $a \leq x \leq y \leq b$ y π partición de $[a,x]$,

$$\begin{aligned} V_a^x(f;\pi_x) + |f(y) - f(x)| &= \sum_{i=1}^{n} |f(x_i - f(x_{i-1})| + |f(y) - f(x)| \\ (x_n = x \Rightarrow) \quad &= V_a^y(f;\pi_x \cup \{y\}) \\ &\leq V_a^y(f) = f_1(y) \end{aligned}$$

Tomando supremo en π_x,

$$f_1(x) + |f(y) - f(x)| \leq f_1(y).$$

En particular,

- $f_1(x) \leq f_1(y)$ (f_1 es creciente) y, como $f_1(b) < \infty$, f_1 toma valores en $\mathbb{R}$ (en $[0,\infty]$).
- $f_1(x) + f(y) - f(x) \leq f_1(y) \Rightarrow f_2(x) \leq f_2(y)$. ✓

□

Definición 4.10 (integral indefinida)**.** Dada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable, definimos su integral indefinida $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ como $F(x) \coloneqq \int_a^x f(t)\, dt$.

Teorema 4.11. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $(a_1,b_1),\ldots,(a_n,b_n)$ son intervalos disjuntos de $[a,b]$, entonces vale que:

$$\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |F(b_i) - F(a_i)| < \varepsilon.$$

Lema 4.12. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es integrable, entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tal que para todo $E \subseteq [a,b]$ medible, vale que

$$|E| < \delta \Rightarrow \int_E |f| < \varepsilon.$$

Demostración (Lema). Guía 6. $\square$

Demostración (Teorema). Si $E := \biguplus_{i=1}^n (a_i, b_i)$, entonces E es medible y $|E| = \sum_{i=1}^n (b_i - a_i)$. Si tomo δ como el dado por el Lema,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n |F(b_i) - F(a_i)| &= \sum_{i=1}^n \Big| \int_{a_i}^{b_i} f(x)\, dx \Big| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} |f|\, dx \\ &= \int_E |f|\, dx < \varepsilon.\end{aligned}$$ $\square$

Definición 4.13 (función absolutamente continua). Una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ se dice absolutamente continua si, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que para cualquier colección finita de intervalos $\{(a_i, b_i)\}_{i=1,\ldots,n}$ disjuntos, se cumple lo siguiente:

$$\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon.$$

Observación. f absolutamente continua $\Rightarrow$ f uniformemente continua ($n = 1$).

Observación. En la definición, es importante que los intervalos sean disjuntos. En efecto, si f cumple la definición para cualquier colección finita de intervalos (no necesariamente disjuntos), entonces f resulta Lipschitz (pero f absolutamente continua no implica Lipschitz) (y Lipschitz sí implica absolutamente continua).

Teorema 4.14. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es absolutamente continua, entonces es de VA en $[a,b]$.

Demostración. Si f es absolutamente continua, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que si $\{(a_i, b_i\}_{i=1,\ldots,n}$ son disjuntos tal que

$$\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \frac{b-a}{k}, \qquad (*)$$

entonces

$$\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| < 1. \qquad (**)$$

En particular, si $\pi_k = \{y_0, \dots, y_k\}$ es la partición de $[a, b]$ en k partes iguales, entonces $V_{y_{j-1}}^{y_j}(f) \leq 1 \quad j = 1, \dots, k$. En efecto, si $Q = \{x_0, \dots, x_n\}$ es una partición de el intervalo $[y_{j-1}, y_j]$, entonces los intervalos $\{(x_{i-1}, x_i)\}_{i=1,\dots,n}$ cumplen $(*)$ y, por ende, $V_{y_{j-1}}^{y_j}(f; Q) < 1$ por $(**)$. Tomando supremo en Q, resulta $V_{y_{j-1}}^{y_j}(f) \leq 1$. □

Clase 32

27 de Octubre

Demostración (continuación último teorema clase pasada)**.** Si $\pi_N := \{y_0, \dots, y_N\}$ es la partición de $[a, b]$ en N partes iguales entonces, si N es suficientemente grande, $V_{y_{j-1}}^{y_j}(f) \leq 1 \; \forall j = 1, \dots, N$. Ahora, si π es una partición cualquiera, entonces

$$\begin{aligned} V_a^b(f; \pi) \leq V_a^b(f; \pi \cup \pi_N) &:= \sum_{I \in \pi \cup \pi_N} |\Delta f(I)| \\ &= \sum_{j=1}^{N} \underbrace{\sum_{I \in [y_{j-1}, y_j]} |\Delta f(I)|}_{V_{y_{j-1}}^{y_j}(f; \pi \cup \pi_N \cap [y_{j-1}, y_j])} \\ &\leq \sum_{j=1}^{N} V_{y_{j-1}}^{y_j}(f) \\ &\leq N. \end{aligned}$$

Tomando supremo en π, resulta $V_a^b(f) \leq N < \infty$ y, así, f tiene VA. □

Corolario 4.15. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable, entonces su integral indefinida $F(x) := \int_a^x f(t)\, dt$ $(x \in [a, b])$ es resta de 2 funciones monótonas crecientes:

$$F(x) = \int_a^x f^+(t)\, dt - \int_a^x f^-(t)\, dt.$$

Teorema 4.16 (Lebsegue-Young)**.** Si $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ es monótona, entonces es derivable CTP en $[a, b]$.

Definición 4.17 (Cubrimiento de Vitali)**.** Sean $E \subseteq \mathbb{R}$ y $\mathcal{G}$ una colección de intervalos de $\mathbb{R}$ de longitud positiva. Decimos que $\mathcal{G}$ es un cubrimiento de Vitali de E si, dados $\varepsilon > 0$ y $x \in E$, existe $I \in \mathcal{G}$ tal que $x \in I$ y $|I| < \varepsilon$.

Lema 4.18 (Cubrimiento de Vitali)**.** Sean $E \subseteq \mathbb{R}$ con $|E|_e < \infty$ y $\mathcal{G}$ un cubrimiento de Vitali de E. Entonces, existen $(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{G}$ disjuntos tales que $\left|E \setminus \biguplus_{n\in\mathbb{N}}\right|_e = 0$. En particular, dado $\varepsilon > 0$, existen $I_1, \ldots, I_N \in \mathcal{G}$ disjuntos tal que $\left|E \setminus \biguplus_{i=1}^N I_i\right|_e < \varepsilon$.

Demostración. Teorema 4.4.5 del Rana. □

Definición 4.19. Dada $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, definimos

$$\overline{D}_g(x) \coloneqq \lim_{h\to 0^+}\left(\sup_{\substack{0\le|t|\le h\\ x+t\in[a,b]}} \frac{g(x+t)-g(x)}{t}\right)$$

$$\underline{D}_g(x) \coloneqq \lim_{h\to 0^+}\left(\inf_{\substack{0\le|t|\le h\\ x+t\in[a,b]}} \frac{g(x+t)-g(x)}{t}\right)$$

Observación. A priori, $\overline{D}_g$ y $\underline{D}_g$ toman valores en $\overline{\mathbb{R}}$ y no sabemos que sean medibles.

Lema 4.20. Sea $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ monótona creciente. Entonces, dado $\alpha > 0$,

$$|\{x \ : \ \overline{D}_g(x) > \alpha\}|_e \le \frac{1}{\alpha}(g(b)-g(a)).$$

Demostración. Sea $E \coloneqq \{x \in (a,b) \ : \ \overline{D}_g(x) > \alpha\}$. Definamos $\mathcal{G}$ como la colección de intervalos $[c,d] \subseteq (a,b)$ tal que $g(d) - g(c) > \alpha(d-c)$. Notar que $\mathcal{G}$ es un cubrimiento de Vitali de E. Luego, dado $\varepsilon > 0$, existen intervalos $([c_i,d_i])_{i=1,\ldots,N}$ en $\mathcal{G}$ disjuntos tales que $\left|E \setminus \biguplus_{i=1}^N [c_i,d_i]\right|_e < \varepsilon$. Luego, por σ-subaditividad,

$$\begin{aligned}
|E|_e &\le \left|\biguplus_{i=1}^N [c_i,d_i]\right|_e + \left|E \setminus \biguplus_{i=1}^N [c_i,d_i]\right|_e\\
&\le \sum_{i=1}^N (d_i - c_i) + \varepsilon\\
&\le \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^N \underbrace{g(d_i)-g(c_i)}_{\le V_a^b(g)} + \varepsilon\\
&\le \frac{1}{\alpha}(g(b)-g(a)) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Tomando $\varepsilon \longrightarrow 0$, concluimos el resultado. □

Demostración (Lebsegue-Young)**.** Sea $E \coloneqq \{x \in (a,b) \ : \ \overline{D}_g(x) > \underline{D}_g(x)\}$.

Notar que si definimos

$$E_{\alpha,\beta} \coloneqq \{x \in (a,b) \ : \ \overline{D}_g(x) > \alpha > \beta > \underline{D}_g(x)\},$$

entonces

$$E = \bigcup_{\substack{\alpha>\beta \\ \alpha,\beta\in\mathbb{Q}}} E_{\alpha,\beta}.$$

En particular, bastará con ver que $|E_{\alpha,\beta}| = 0$ para concluir que $|E| = 0$.

Como $|E_{\alpha,\beta}|_e \leq b - a < \infty$, dado $\varepsilon > 0$, podemos tomar un abierto H tal que $E_{\alpha,\beta} \subseteq H$ y $|H| \leq |E_{\alpha,\beta}|_e + \varepsilon$.

Si $x \in E_{\alpha,\beta}$, entonces $\underline{D}_g(x) < \beta$, con lo cual para cada $\varepsilon' > 0$, existe $t \in \mathbb{R}$ con $|t| < \varepsilon'$ tal que $[x, x+t] \subseteq H$ y $|g(x+t) - g(x)| < \beta|t|$. En particular,

$$\mathcal{G} \coloneqq \{[c,d] \subseteq (a,b) \ : \ [c,d] \subseteq H \text{ y } g(d) - g(c) < \beta(d-c)\}$$

es un cubrimiento de Vitali de $E_{\alpha,\beta}$. □

Clase 33

29 de Octubre

Demostración (Continuación Lebesgue-Young)**.** El primer paso era ver que $\overline{D}_g = \underline{D}_g$ C.T.P. Para eso, vimos que bastaba con ver que

$$E_{\alpha,\beta} \coloneqq \{x \in (a,b) \ : \ \overline{D}_g(x) > \alpha > \beta > \underline{D}_g(x)\}$$

tiene medida nula para todo $\alpha > \beta$.

Para eso, habíamos tomado, dado $\varepsilon > 0$, un abierto H_ε tal que $E_{\alpha,\beta} \subseteq H_\varepsilon$ y $|H_\varepsilon| \leq |E_{\alpha,\beta}|_e + \varepsilon$. Además, construimos la colección

$$\{[c,d] \ : \ [c,d] \subseteq (a,b), [c,d] \subseteq H \text{ y } g(d) - g(c) < \beta(d-c)\} \eqqcolon \mathcal{G}_{\alpha,\beta}$$

y vimos que era un cubrimiento de Vitali para $E_{\alpha,\beta}$. Por el lema de Vitali, existen $([c_i, d_i])_{i=1,\ldots,n} \subseteq \mathcal{G}_{\alpha,\beta}$ disjuntos tal que

$$\left| E_{\alpha,\beta} \setminus \biguplus_{i=1}^{n} [c_i, d_i] \right|_e < \varepsilon.$$

Notar que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} g(d_i) - g(c_i) &\leq \beta \sum_{i=1}^{n} (d_i - c_i) \\
&= \beta \left| \biguplus_{i=1}^{n} [c_i, d_i] \right| \\
&\leq \beta \left| H_\varepsilon \right|_e \\
&\leq \beta(|E_{\alpha,\beta}|_e + \varepsilon).
\end{aligned}$$

Además, por el Lema de la clase pasada,

$$\begin{aligned}|E_{\alpha,\beta} \cap [c_i, d_i]|_e &\leq |\{x \in (c_i, d_i) \ : \ \overline{D}_g(x) > \alpha\}|_e \\ &\leq \frac{1}{\alpha}(g(d_i) - g(c_i)).\end{aligned}$$

Con todo esto, resulta:

$$\begin{aligned}|E_{\alpha,\beta}|_e &\leq \sum_{i=1}^{n} |E_{\alpha,\beta} \cap [c_i, d_i]|_e + \varepsilon \\ &\leq \frac{1}{\alpha}\Big(\sum_{i=1}^{n} g(d_i) - g(c_i)\Big) + \varepsilon \\ &\leq \frac{1}{\alpha} \cdot \beta(|E_{\alpha,\beta}|_e + \varepsilon) + \varepsilon \\ &= \frac{\beta}{\alpha}|E_{\alpha,\beta}| + \frac{\beta}{\alpha}\varepsilon + \varepsilon.\end{aligned}$$

Luego, tomando $\varepsilon > 0$,

$$|E_{\alpha,\beta}|_e \leq \underbrace{\frac{\beta}{\alpha}}_{<1} |E_{\alpha,\beta}|_e \Rightarrow |E_{\alpha,\beta}|_e = 0.$$

Esto prueba que $\overline{D}_g = \underline{D}_g$ CTP.

Ahora, falta ver que $\overline{D}_g = \underline{D}_g < \infty$ CTP. Definimos

$$g'(x) \coloneqq \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

si el límite existe. Por lo que acabamos de probar, $g'(x)$ existe y toma valores en $\overline{\mathbb{R}}$ para casi todo x. En particular, como función a valores en $\overline{\mathbb{R}}$ es medible Lebesgue, pues coincide C.T.P con

$$h(x) \coloneqq \liminf_{n \to \infty} \underbrace{\frac{g\big(x + \frac{1}{n}\big) - g(x)}{\frac{1}{n}}}_{f_n}$$

que es medible (los f_n son medibles) (si $x+\frac{1}{n} \geq b$, entonces $g(x+\frac{1}{n}) \coloneqq g(b)$). Sólo resta ver que g' es finita C.T.P. Para esto, mostraremos que de hecho es integrable. Pero, por el Lema de Fatou,

$$
\begin{aligned}
\int_a^b \underbrace{g'(x)}_{\geq 0}\, dx = \int_a^b \underbrace{h(x)}_{\geq 0}\, dx
&\leq \liminf_{n\to\infty} \int_a^b \frac{g\big(x+\frac{1}{n}\big) - g(x)}{\frac{1}{n}}\, dx \\
&= \liminf_{n\to\infty} n\Big(\int_a^{b-\frac{1}{n}} g\big(x+\frac{1}{n}\big)\, dx + g(b)\cdot\frac{1}{n} - \int_a^b g(x)\, dx\Big) \\
&= \liminf_{n\to\infty} n\Big(\int_{a+\frac{1}{n}}^{b} g(y)\, dy + g(b)\cdot\frac{1}{n} - \int_a^b g(x)\, dx\Big) \\
&= \liminf_{n\to\infty} g(b) - n\int_a^{a+\frac{1}{n}} \underbrace{g(x)}_{\geq g(a)}\, dx \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} g(b) - n\int_a^{a+\frac{1}{n}} g(a)\, dx \\
&= g(b) - g(a) < \infty.
\end{aligned}
$$

□

Corolario 4.21. Si g es monótona creciente entonces $g'(x)$ existe y es finita para casi todo $x \in [a,b]$, es medible Lebesgue (extendida como sea donde no existe el límite), es integrable y cumple

$$\int_a^b g'(x)\, dx \leq g(b) - g(a). \qquad (*)$$

Observación. La desigualdad $(*)$ puede ser estricta.

Ejemplo. Si g es la función de Cantor, g cumple que:

1. g es monótona creciente y continua;
2. $g(0) = 0$ y $g(1) = 1$;
3. g es constante en cada intervalo abierto que compone $[0,1]\setminus\mathscr{C}$. En particular, $g' = 0$ en $[0,1]\setminus\mathscr{C}$ y como $|\mathscr{C}| = 0$, entonces $g' = 0$ C.T.P. Entonces, $\int_0^1 g' = 0 < 1 = g(1) - g(0)$.

Lema 4.22. Si $f, g : [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}$ son integrables y cumplen que $\int_a^c f(x)\, dx = \int_a^c g(x)\, dx \quad \forall c \in [a,b]$, entonces $f = g$ C.T.P.

Teorema 4.23 (Fundamental del Cálculo, parte 1)**.** Sea $f : [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}$ integrable y $F(x) := \int_a^x f(t)\, dt$ ($x \in [a,b]$) su integral indefinida. Entonces, F es absolutamente continua y derivable C.T.P, con $F'(x) = f(x)$ para casi todo $x \in [a,b]$.

Clase 34

30 de Octubre

Demostración (TFC-1). Que F es absolutamente continua ya lo vimos. Además,

$$F(x) = \underbrace{\int_a^x f^+(t)\ dt}_{F_1(x)} - \underbrace{\int_a^x f^-(t)\ dt}_{F_2(x)}$$

Notar que tanto F_1 como F_2 son monótonas crecientes. En particular, existen $E_1, E_2 \subseteq [a,b]$ de medida nula tal que

- F_1 es derivable si $x \notin E_1$;
- F_2 es derivable si $x \notin E_2$.

En particular, si $x \notin E_1 \cup E_2$, F es derivable en x. Como $E = E_1 \cup E_2$ tiene medida nula, F resulta derivable c.t.p.

Por un argumento sumilar, para ver que $F' = f$ c.t.p, bastará con ver que $F_1' = f^+$ c.t.p y $F_2' = f^-$ c.t.p (es decir, bastará con ver el caso en que $f \geq 0$). Luego, asumimos que $f \geq 0$. Acabamos de mostrar que, en este caso, F es monótona creciente y derivable c.t.p. Sólo queda ver que $F' = f$ c.t.p. Para ello, primero asumiremos que f es, además, acotada. Sea entonces, $M \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq f(x) \leq M\ \forall x \in [a,b]$. Definamos

$$F_n(x) := \frac{F\big(x + \frac{1}{n}\big) - F(x)}{\frac{1}{n}} \quad (x \in [a,b]).$$

Notar que cada F_n es medible (de hecho, continua) y $F_n \longrightarrow F'$ c.t.p. Además,

$$\begin{aligned} |F_n(x)| &= n\Big|\int_x^{x+\frac{1}{n}} f(t)\ dt\Big| \\ &\leq n\int_x^{x+\frac{1}{n}} M\ dt = M. \end{aligned}$$

Como $g(x) := M$ es integrable en $[a,c]$ $\forall c \in [a,b]$, por Convergencia Dominada resulta que:

$$\begin{aligned} \int_a^c &= \lim_{n\to\infty} \int_a^c F_n(t)\ dt \\ &= \lim_{n\to\infty} \Big(n\int_a^c F\big(t + \frac{1}{n}\big)\ dt - n\int_a^c F(t)\ dt\Big) \\ &= \lim_{n\to\infty} \Big(n\int_{a+\frac{1}{n}}^{c+\frac{1}{n}} F(y)\ dy - n\int_a^c F(t)\ dt\Big) \\ &= \lim_{n\to\infty} \Big(n\int_c^{c+\frac{1}{n}} F(y)\ dy - n\int_a^{a+\frac{1}{n}} F(t)\ dt\Big). \end{aligned}$$

Como F no negativa y creciente (pues $f \geq 0$),

$$F(c) \leq n \int_c^{c+\frac{1}{n}} F(t)\ dt \leq F\big(c + \frac{1}{n}\big)$$
$$F(a) \leq n \int_a^{a+\frac{1}{n}} F(t)\ dt \leq F\big(a + \frac{1}{n}\big).$$

Como F es continua, resulta

$$\int_a^c F'(t)\ dt = F(c) - \underbrace{F(a)}_{=0} = \int_a^c f(t)\ dt.$$

Concluimos que

$$\int_a^c F'(t)\ dt = \int_a^c f(t)\ dt \quad \forall c \in [a,b].$$

Luego, por el Lema de la clase pasada $F' = f$ c.t.p. Esto prueba el caso en que f es acotada.

Para f integrable general, definimos para cada $n \in \mathbb{N}$, la truncación $f_n \coloneqq \min\{f, n\}$.

Notar que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son funciones medibles acotadas (por lo tanto, integrables y acotadas) y $f_n \nearrow f$ puntualmente. Ahora, definimos

$$G_n(x) \coloneqq \int_a^x (f - f_n)(t)\ dt \quad (x \in [a,b]).$$

Notar que $f - f_n \geq 0$, entonces G_n es no negativa y creciente. En particular, $G_n'(x) \geq 0$ para casi todo $x \in [a,b]$. Además,

$$F(x) = G_n(x) + \int_a^x f_n(t)\ dt \quad (x \in [a,b]).$$

Luego, por el caso anterior, tenemos que

$$F'(x) = \underbrace{G_n'(x)}_{\geq 0} + f_n(x)$$

para casi todo $x \in [a,b]$. En particular, $F'(x) \geq f_n(x)$ para casi todo $x \in [a,b]$. Tomando límite con $n \longrightarrow \infty$, resulta $F'(x) \geq f(x)$ c.t.p.

Por último,

$$\int_a^b F'(x)\ dx \leq F(b) - F(a) = F(b) = \int_a^b f(t)\ dt.$$

Luego,

$$\int_a^b (F'(t) - f(t))\,dt \leq 0 \Rightarrow \int_a^b (F'(t) - f(t))\,dt = 0$$
$$\Rightarrow F'(x) - f(x) \text{ c.t.p}$$
$$\Rightarrow F' = f \text{ c.t.p.} \qquad \square$$

Definición 4.24 (función singular)**.** Decimos que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es singular si $f' = 0$ c.t.p.

Clase 35

5 de Noviembre

Lema 4.25. Si $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ es absolutamente continua y singular ($\varphi' = 0$ C.T.P), entonces es constante.

Demostración. Vamos a ver que $\varphi(c) = \varphi(a)$ $\forall c \in (a,b]$. Sea

$$E := \{x \in (a,c) \ : \ \varphi'(x) = 0\}.$$

Notemos que, por hipótesis, $|E| = c - a$.

Tomemos $\eta > 0$ y, observemos que, dado $x \in E$ y $\varepsilon > 0$, existe $h \in (0,\varepsilon)$ tal que $[x, x+h] \in (a,c)$ y $|\varphi(x+h) - \varphi(x)| < \eta|h|$. Luego,

$$\mathscr{C} := \{[x, x+h] \subset (a,c) \ : \ h > 0 \text{ y } |\varphi(x+h) - \varphi(x)| < \eta|h|\},$$

es un cubrimiento de Vitali de E.

Por el Lema del cubrimiento de Vitali, dado $\delta > 0$, existen intervalos $([x_i, x_i + h_i])_{i=1,\ldots,n} \subseteq \mathscr{C}$ disjuntos tal que

$$\left| E \setminus \biguplus_{i=1}^{n} [x_i, x_i + h_i] \right| < \delta$$

y

$$\biguplus_{i=1}^{n} [x_i, x_i + h_i] \subseteq (a,c)$$

y

$$|\varphi(x_i + h_i) - \varphi(x_i)| < \eta|h_i| \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que

$$x_0 + h_0 := a < x_1 < x_1 + h_1 < x_2 < x_2 + h_2 < \cdots < x_n + h_n < c =: x_{n+1}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(x_{k+1}-(x_k+h_k)) &= c-\sum_{k=1}^{n}(x_k+h_k-x_k-a\\ &= |E|-\sum_{k=1}^{n}|[x_k,x_k+h_k]|\\ &\leq \left|E\setminus \bigcup_{k=1}^{n}{}^{\mathrm{D}}[x_k,x_k+h_k]\right|<\delta. \qquad (*)\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}|\varphi(c)-\varphi(a)| &= |\varphi(x_{n+1}-\varphi(x_0+h_0)|\\ &= \left|\sum_{k=0}^{n}(\varphi(x_{k+1})-\varphi(x_k+h_k))+\sum_{k=1}^{n}(\varphi(x_k+h_k)-\varphi(x_k))\right|\\ &\leq \sum_{k=0}^{n}|\varphi(x_{k+1})-\varphi(x_k+h_k)|+\sum_{k=1}^{n}|\varphi(x_k+h_k)-\varphi(x_k)|\\ &\leq \sum_{k=0}^{n}|\varphi(x_{k+1})-\varphi(x_k+h_k)|+\eta\underbrace{\sum_{k=1}^{n}|h_k|}_{\leq(b-a)}.\end{aligned}$$

Si elegimos δ dado por la absoluta continuidad de φ para $\varepsilon=\eta$, entonces, por $(*)$,

$$\sum_{k=0}^{n}|\varphi(x_{k+1})-\varphi(x_k+h_k)|<\eta.$$

Como $\eta>0$ era arbitrario, tomando $\eta\longrightarrow 0$, concluimos que $\varphi(c)=\varphi(a)$. □

Teorema 4.26 (TFC - Parte 2)**.** Sea $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ absolutamente continua. Entonces, $F'(x)$ existe para casi todo x, F' es integrable en $[a,b]$ (extendida como sea donde F' no esté bien definida) y

$$F(y)-F(x)=\int_x^y F'(t)\,dt \quad \forall a\leq x\leq y\leq b.$$

Demostración. Como F es absolutamente continua, es de variación acotada y, por lo tanto, $F=F_1-F_2$ con F_1,F_2 monótonas crecientes.

Como F_1,F_2 son derivables C.T.P por Lebesgue-Young, se sigue que F' existe C.T.P y coincide con $F_1'-F_2'$ en casi todo punto.

Además, como F_1,F_2 son crecientes, vimos que F_1',F_2' son integrables y que además valía,

$$\int_a^x F_i'(t)\ dt \leq F_i(x) - F_i(a) \quad \forall x \in [a,b],\ i = 1, 2.$$

En particular F' es integrable (pues $F' = F_1' - F_2'$ C.T.P, con F_i' integrable).

Sea

$$G(x) := \int_a^x F'(x)\ dt.$$

Entonces, G es absolutamente continua, derivable C.T.P y $G' = F'$ C.T.P (por el TFC - Parte 1).

Luego, $H := F - G$ es absolutamente continua (porque es resta de absolutamente continuas) y singular. Por el Lema, H es constante. Es decir, $F(y) - G(y) = H(y) = H(x) = F(x) - G(x)$ $\forall a \leq x \leq y \leq b$. Esto implica que

$$F(y) - F(x) = G(y) - G(x) = \int_x^y F'(t)\ dt. \qquad \square$$

Ambas partes del TFC se pueden combinar para dar:

Teorema 4.27 (Fundamental del Cálculo)**.** Sea $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función. Son equivalentes:

(i) F absolutamente continua;

(ii) $\exists f : [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}$ integrable tal que

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\ dt \quad \forall x \in [a,b];$$

(iii) F es derivable C.T.P, F' es integrable y se cumple

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)\ dt \quad \forall x \in [a,b].$$

Además, si vale (ii), entonces $f = F'$ C.T.P.

Definición 4.28 (Espacio L^1)**.** Dadas $f, g : [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}$ medibles, decimos que son equivalentes, y lo notamos $f \sim g$, si $f = g$ C.T.P. La relación $\sim$ es de equivalencia, lo cual nos permite definir

$$L^1([a,b]) := \{[f] \mid f : [a,b] \to \overline{\mathbb{R}} \text{ integrable Lebesgue}\}.$$

Observación. Si definimos

$$D : \mathrm{AC}_0([a,b]) \to L^1([a,b]) \text{ tal que } F \mapsto F',$$
$$\mathcal{I} : L^1([a,b]) \to \mathrm{AC}_0([a,b]) \text{ tal que } f \mapsto F(x) := \int_a^x f(t)\ dt,$$

donde $\mathrm{AC}_0([a,b]) := \{F : [a,b] \to \mathbb{R} \mid F \text{ absolutamente continua y } F(a) = 0\}$ entonces, el TFC implica que $D = \mathcal{I}^{-1}$.

Clase 36

7 de Noviembre

Teorema 4.29 (Descomposición de Lebesgue). Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es de variación acotada, entonces f se puede escribir como $f = g + h$, donde g es absolutamente cotinua y h es singular. Más aún, g y h son únicas salvo constantes aditivas (i.e. $\widetilde{g} = g + C$ y $\widetilde{h} = h - C$ cumplen lo mismo $\forall C$).

Demostración. Como f es derivable C.T.P,

$$g(x) := \int_a^x f'(t)\, dt \text{ y } h(x) := f(x) - g(x)$$

cumplen lo pedido.

Si $f = \widetilde{g} + \widetilde{h}$ es otra descomposición, entonces

$$g + h = \widetilde{g} + \widetilde{h} \Leftrightarrow \underbrace{g - \widetilde{g}}_{\text{AC}} = \underbrace{\widetilde{h} - h}_{\text{singular}} \overset{\text{Lema}}{\Rightarrow} g - \widetilde{g} = h - \widetilde{h} = C$$

para algún $C \in \mathbb{R}$. $\square$

Corolario 4.30 (Integración por partes). Si $F, G : [a,b] \to \mathbb{R}$ son absolutamente continuas, entonces $F.G'$ y $F'.G$ son integrables y se tiene que

$$F(b)G(b) - F(a)G(a) = \int_a^b (F'G)(t)\, dt + \int_a^b (FG')(t)\, dt.$$

Demostración. Corolario 6.3.9 del Rana. $\square$

Corolario 4.31 (Fórmula de Sustitución). Sean $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ absolutamente continua y $f : [c,d] \to \overline{\mathbb{R}}$ integrable tal que $(f \circ \varphi)\varphi'$ es integrable en $[a,b]$. Entonces, para todo $\alpha, \beta \in [a,b]$,

$$\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(x)\varphi'(x)\, dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(y)\, dy.$$

Además, si φ es creciente y sobreyectiva entonces $(f \circ \varphi)\varphi'$ integrable $\Leftrightarrow f$ integrable.

Observación. Cuidado! Es posible que $\alpha > \beta$ y $\varphi(\alpha) > \varphi(\beta)$ (similar a como se ha visto en otros cursos, basta con poner un menos y dar vuelta los valores).

Demostración. Corolario 6.3.18 y Ejercicio 6.3.19 del Rana. Sino, ver Canvas. $\square$

Chapter 5

Espacios L^p

Para lo que siguie, $(X, \mathscr{M}, \mu)$, será un espacio de medida σ-finita completo.

Definición 5.1 (Espacio L^p)**.** Sea $p \in (0, \infty)$. Definimos $L^p(\mu) := L^p(X, \mathscr{M}, \mu)$ como

$$L^p(X, \mathscr{M}, \mu) := \{[f] \mid f : X \to \mathbb{C} \ \mathscr{M}\text{-medibles tal que } \int_X |f|^p \, d\mu < \infty\}$$

donde $[f]$ denota a la clase de f bajo la relación de equivalencia dada por $f \sim g \Leftrightarrow f = g$ μ-C.T.P.

Definición 5.2 (norma p)**.** Sea $p \in (0, \infty)$ y $f \in L^p(X, \mathscr{M}, \mu)$. Definimos la "norma p" de f como

$$\|f\|_p = \|f\|_{L^p(\mu)} := \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

Definición 5.3 (función escencialmente acotada)**.** Una función medible $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ó $\mathbb{C}$ se dice esencialmente acotada si existe $M > 0$ tal que $|f| \leq M$ μ-C.T.P.

Definición 5.4 (L^∞)**.** Definimos

$$L^\infty(X, \mathscr{M}, \mu) := \{[f] \ : \ f : X \to \mathbb{C} \ \mathscr{M}\text{-medible esencialmente acotada}\}$$

y

$$\|f\|_\infty := \inf\{M > 0 \ : \mu(\{x \ : \ |f(x)| > M\}) = 0\}.$$

Llamamos a $\|f\|_\infty$ el supremo esencial de f.

Ejemplo.

1. Si $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible Lebesgue, $L^p(E) := L^p(E, \mathscr{L}(\mathbb{R}^n) \cap E, \lambda|_E)$.
2. $L^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), c_\mathbb{N}) = l_p$, con $c_\mathbb{N} =$ medida de contar.

Nota. $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n) \cap E \coloneqq \{A \cap E \ : \ A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)\}$.

Proposición 5.5. $L^p(X, \mathscr{M}, \mu)$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial.

Demostración. Si $f, g \in L^p(X, \mathscr{M}, \mu)$ entonces:

1. $\alpha \cdot f$ es $\mathscr{M}$-medible y $\|\alpha \cdot f\|_p = |\alpha| \cdot \|f\|_p < \infty \ \forall \alpha \in \mathbb{C}$.
2. $f + g$ es $\mathscr{M}$-medible y $f + g \in L^p(X, \mathscr{M}, \mu)$, pues

$$\begin{aligned} |f+g|^p \leq (|f| + |g|)^p &\leq (2 \max\{|f|, |g|\})^p \\ &= 2^p \max\{|f|^p, |g|^p\} \\ &\leq 2^p (|f|^p + |g|^p) \end{aligned}$$

y, por lo tanto,

$$\int |f+g|^p \ d\mu \leq 2^p \Big(\int |f|^p \ d\mu + \int |g|^p \ d\mu \Big) < \infty.$$

Si $p = \infty$,

$$\|\alpha \cdot f\|_\infty = \inf\{M > 0 \ : \ \mu(\{|\alpha f| > M\}) = 0\}.$$

Si $\alpha \neq 0$,

$$\inf\{M > 0 \ : \ \mu(\{|f| > \frac{M}{|\alpha|}\}) = 0\} = |\alpha| \cdot \|f\|_\infty < \infty.$$

Si $\alpha = 0$, $\|\alpha f\|_\infty = \|0\|_\infty = 0$. □

Clase 37

10 de Noviembre

Demostración (continuación clase anterior)**.** Si $p = \infty$, vimos que $\|\alpha f\|_\infty = |\alpha| \|f\|_\infty \ \forall \alpha \in \mathbb{C}$. Más aún,

$$\|f + g\|_\infty = \inf\{M > 0 \ : \ \mu(\{|f+g| > M\}) = 0\}.$$

En particular, si $M > \|f\|_\infty + \|g\|_\infty + 2\varepsilon$ (suponiendo $\|f\|_\infty, \|g\|_\infty < \infty$),

$$\mu(\{|f+g| > M\}) \leq \underbrace{\mu(\{|f| > \|f\|_\infty + \varepsilon\})}_{=0} + \underbrace{\mu(\{|g| > \|g\|_\infty + \varepsilon\})}_{=0}.$$

Entonces $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty + 2\varepsilon$. Tomando $\varepsilon \longrightarrow 0$, resulta $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ (y esto vale, en realidad, para cualquier f, g, no necesriamente en L^∞). □

Pregunta. ¿Es $\|\cdot\|_p$ es una norma?

Definición 5.6 (función convexa). Decimos que $\varphi : \mathbb{R} \to (-\infty, \infty)$ es convexa si

$$\varphi(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R},\ \lambda \in [0,1]$$

Lema 5.7. Si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es convexa, entonces

$$h \longrightarrow \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}$$

resulta:

- decreciente cuando $h \longrightarrow 0^+$;
- creciente cuando $h \longrightarrow 0^-$.

Además,

$$-\infty < L^- := \sup_{h<0} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} \leq \inf_{h>0} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} =: L^+ < \infty.$$

En particular,

(C1) φ es continua (y, por ende, medible Borel);

(C2) $\exists c \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(y) \geq c(y-x) + \varphi(x) \quad \forall y \in \mathbb{R}$.

Teorema 5.8 (Desigualdad de Jensen). Sean $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexa y $f \in L^1(X, \mathscr{M}, \mu)$ con μ-finita. Si definimos el promedio de f como

$$\langle f \rangle := \frac{1}{\mu(X)} \int_X f \, d\mu,$$

entonces:

i. $(\varphi \circ f)^- \in L^1(X, \mathscr{M}, \mu)$ ($\Rightarrow \varphi \circ f$ débilmente μ-integrable);

ii. $\varphi(\langle f \rangle) \leq \langle \varphi(f) \rangle$.

Demostración. Sea $x := \langle f \rangle$ e $y := f(t)$. Por (C2),

$$\varphi(f(t)) \geq c(f(t) - \langle f \rangle) + \varphi(\langle f \rangle). \qquad (*)$$

Luego, si $(\varphi \circ f)^-(t) \neq 0$, lo anterior se puede reescribir como

$$-(\varphi \circ f)^-(t) \geq \varphi(\langle f \rangle) + c(f(t) - \langle f \rangle),$$

de donde se deduce que

$$|(\varphi \circ f)^-(t)| \leq |\varphi(\langle f \rangle)| + |c||f(t)| + |c||\langle f \rangle|.$$

Como μ es finita, el lado derecho es integrable y, por lo tanto, $(\varphi \circ f)^- \in L^1(X, \mathscr{M}, \mu)$.

Integrando $(*)$, resulta

$$\begin{aligned}\int \varphi \circ f \; d\mu &\geq c \int f \; d\mu + (-c\langle f \rangle + \varphi(\langle f \rangle) \; \mu(X) \\ &= c\langle f \rangle \mu(X) - x\langle f \rangle \mu(X) + \varphi(\langle f \rangle)\mu(X) \\ &= \varphi(\langle f \rangle)\mu(X).\end{aligned}$$

□

Definición 5.9 (exponentes conjugados). Decimos que $p, p' \in [1, \infty]$ son exponentes conjugados si

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Observación. $p = 1 \Leftrightarrow p' = \infty, \; p = 2 \Leftrightarrow p' = 2$.

Teorema 5.10. Sea $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un espacio de medida y $p, p' \in [1, \infty]$ conjugados. Sean $f, g : X \to \mathbb{C}$ $\mathscr{M}$-medibles. Entonces:

1. (Desigualdad de Hölder) $\int_X |fg| \; d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$.
2. (Desigualdad de Minkowski) $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

Lema 5.11. Si $f \in L^\infty(X, \mathscr{M}, \mu)$ entonces $|f| \leq \|f\|_\infty$ μ-c.t.p.

Demostración. Notar que

$$\{|f| > \|f\|_\infty\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ |f| > \|f\|_\infty + \frac{1}{n} \right\}$$

es unión numerable de conjuntos de medida μ-nula. □

Demostración (Teorema). (i) $\boxed{p = 1}$ $(\Rightarrow p' = \infty)$ Notar que

$$\int_X |f \cdot g| \; d\mu \leq \int_X |f| \|g\|_\infty \; d\mu = \|g\|_\infty \int_X |f| \; d\mu = \|g\|_\infty \|f\|_1$$

Por simetría, tenemos también el caso $p = \infty$ $(\Rightarrow p' = 1)$.

$\boxed{p \in (1, \infty)}$ $(\Rightarrow p' \in (1, \infty))$ Definimos

$$F := \frac{|f|}{\|f\|_p} \text{ y } G := \frac{|g|}{\|g\|_p}.$$

(Si $\|f\|_p \|g\|_{p'} = 0, \; f = 0$ μ-c.t.p ó $g = 0$ μ-c.t.p, en ese caso, la desigualdad es inmediata).

Como la función $-\log(x)$ es convexa, (notando que en la primera desigualdad se asume que $F(x), G(x) \neq 0$)

$$\begin{aligned}
-\log\Big(\frac{1}{p}F^p + \frac{1}{p'}G^{p'}\Big) &\leq \frac{1}{p}(-\log F^p) + \frac{1}{p'}(-\log G^{p'}) \\
&= -\log F - \log G \\
&= -\log F.G.
\end{aligned}$$

Lo cual implica que,

$$F.G \leq \frac{1}{p}F^p + \frac{1}{p'}G^{p'}$$

(notar que la desigualdad vale si $F(x)$ ó $G(x)$ son 0). Integrando a ambos miembros, resulta

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\|f\|_p\|g\|_{p'}}\int |f\cdot g|\ d\mu &= \int F.G\ d\mu \\
&\leq \frac{1}{p}\underbrace{\int F^p\ d\mu}_{1} + \frac{1}{p'}\underbrace{\int G^{p'}\ d\mu}_{1} \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.\checkmark
\end{aligned}$$

(ii) Por convexidad de x^p ($p \in (1,\infty)$),

$$\Big(\frac{1}{2}|f(x)| + \frac{1}{2}|g(x)|\Big)^p \leq \frac{1}{2}|f(x)|^p + \frac{1}{2}|g(x)|^p.$$

Luego, si $f, g \in L^p$, entonces $f + g \in L^p$, pues

$$\frac{1}{2}|f+g| \leq \frac{1}{2}|f| + \frac{1}{2}|g|.$$

Ahora, escribimos

$$\begin{aligned}
|f+g|^p &\leq (|f|+|g|)^p \\
&= (|f|+|g|)^{p-1}(|f|+|g|) \\
&= |f|(|f|+|g|)^{p-1} + |g|(|f|+|g|)^{p-1}.
\end{aligned}$$

Por Hölder,

$$\begin{aligned}
\int_X |f|(|f|+|g|)^{p-1}\ d\mu &\leq \|f\|_p\Big(\int_X ((|f|+|g|)^{p-1})^{p'}\Big)^{\frac{1}{p'}} \\
&= \|f\|_p\Big(\int_X (|f|+|g|)^p\Big)^{\frac{p-1}{p}}.
\end{aligned}$$

Si hacemos lo mismo con el segundo sumando y sumamos, nos queda

$$\int (|f|+|g|)^p \leq (\|f\|_p + \|g\|_p)\Big(\int (|f|+|g|)^p\Big)^{\frac{p-1}{p}},$$

lo que implica
$$\left(\int_X (|f|+|g|)^p\right)^{1-\frac{1}{p'}} \leq \|f\|_p + \|g\|_p. \qquad \square$$

Clase 38

12 de Noviembre

Comentario:

- Como $\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f = 0$ μ-c.t.p ($\Rightarrow [f] = [0]$) y $\|\alpha f\|_p = |\alpha|\|f\|_p$ $\forall \alpha \in \mathbb{C}$, hemos probado que $(L^p, \|\cdot\|_p)$ es un espacio normado si $p \in [1, \infty]$.
- Si $p \in (0,1)$, $\|\cdot\|_p$ **NO** es una norma (falla la D.T.)! Pero, si definimos $d_p(f,g) := (\|f-g\|_p)^p$, entonces d_p es una métrica $\forall p \in (0, \infty]$. Por este motivo, los espacios L^p con $p \in (0,1)$ no serán de interés.

Pregunta. ¿Es L^p completo?

Teorema 5.12 (Riesz-Fischer). Si $(X, \mathscr{M}, \mu)$ es un espacio de medida completo y $p \in [1, \infty]$, entonces $L^p(\mu)$ es un espacio de Banach (y, si $p \in (0,1)$, (L^p, d_p) es completo).

Demostración. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p(\mu)$ una sucesión de Cauchy. Debemos ver que existe $f \in L^p(\mu)$ tal que $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$.

Sea $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que
$$\|f_m - f_{n_1}\|_p \leq \frac{1}{2} \quad \forall m \geq n_1.$$

Dado $n_k \in \mathbb{N}$ con $k \in \mathbb{N}$, tomamos $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ de forma tal que

- $n_{k+1} > n_k$;
- $\|f_m - f_{n_{k+1}}\|_p \leq \frac{1}{2^{k+1}} \quad \forall m \geq n_{k+1}$.

Observar que, entonces, $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión tal que
$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq \frac{1}{2^k} \quad \forall k.$$

Sea ahora,
$$g_N(x) := \sum_{k=1}^{N} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|$$
y
$$g(x) := \lim_{N\to\infty} g_N(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|.$$

Notar que $g \in L^p$. En efecto, g es $\mathscr{M}$-medible y:

- Si $p = \infty$, tenemos

$$\begin{aligned} |g| &= \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|}_{\substack{\le \|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|_\infty \\ \mu-\text{c.t.p}}} \\ &\le \sum_{k=1}^{\infty} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| < \infty \ \mu\text{-c.t.p.} \end{aligned}$$

Luego, $\|g\|_\infty \le \sum_{k=1}^{\infty} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_\infty < \infty$ y, así, $g \in L^\infty$.

- Si $p \in [1, \infty)$, tenemos

$$\begin{aligned} \|g\|_p &\coloneqq \Big(\int_X |g|^p \ d\mu \Big)^{\frac{1}{p}} \\ \text{(monótona)} \ &= \lim_{N\to\infty} \Big(\int_X |g_N|^p \ d\mu \Big)^{\frac{1}{p}} \quad (= \lim_{N\to\infty} \|g_n\|_p) \\ &= \lim_{N\to\infty} \Big\| \sum_{k=1}^{N} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \Big\|_p \\ &\le \limsup_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < \infty \ \checkmark. \end{aligned}$$

En particular, g es finita μ-c.t.p.

Ahora, como $f_{n_k} = f_{n_1} + \sum_{j=1}^{k-1} f_{n_{j+1}} - f_{n_j}$, tenemos que $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge μ-c.t.p, pues la serie de arriba converge absolutamente μ-c.t.p.

Si llamamos $f(x) \coloneqq \liminf_{k\to\infty} f_{n_k}(x)$, entonces f es $\mathscr{M}$-medible. Ahora, si fijamos $\varepsilon > 0$, existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_{n_k} f_m\|_p < \varepsilon$ si $n_k, m \ge N_\varepsilon$. En particular,

$$\liminf_{k\to\infty} \|f_{n_k} - f_m\| \le \varepsilon.$$

De hecho, es un límite μ-c.t.p. Luego, si $p \in [1, \infty]$,

$$\begin{aligned} \|f - f_m\|_p &= \Big(\int_X |\lim_{k\to\infty} (f_{n_k} - f_m)|^p \ d\mu \Big)^{\frac{1}{p}} \\ &= \Big(\int_X \lim_{k\to\infty} |f_{n_k} - f_m|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \\ &\le \Big(\underbrace{\liminf_{k\to\infty} \underbrace{\int_X |f_{n_k} - f_m|^p \ d\mu}_{(\|f_{n_k} - f_m\|_p)^p}}_{\le \varepsilon^p} \Big)^{\frac{1}{p}} \le \varepsilon. \end{aligned}$$

En conclusión, $\|f - f_m\|_p \le \varepsilon$ si $m \ge N_\varepsilon$.

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, esto prueba que $\lim_{m\to\infty} \|f - f_m\|_p = 0$.

Además

$$\|f\|_p \leq \|f_m\|_p + \|f - f_m\| \leq \|f_m\|_p + \varepsilon < \infty$$

si $m \geq N_\varepsilon$. Por último, si $p = \infty$,

$$\begin{aligned} |f - f_m| &= |\lim_{k\to\infty} f_{n_k} - f_m| \quad (\mu\text{-c.t.p}) \\ (|\cdot| \text{ continuo}) \quad &= \lim_{k\to\infty} |f_{n_k} - f_m| \\ &\leq \liminf_{k\to\infty} \|f_{n_k} - f_m\|_\infty \\ &\leq \varepsilon \ (\mu\text{-c.t.p}) \text{ si } m \geq N_\varepsilon. \end{aligned}$$

(Notar que la primera desigualdad está dada por ($|f_{n_k} - f_m| \leq \|f_{n_k} - f_m\|_\infty$ μ-c.t.p)). Por lo tanto, $\|f - f_m\|_\infty \leq \varepsilon$ si $m \geq N_\varepsilon$.

El resto sigue igual. □

Definición 5.13 (convergencia en L^p). Dado $p \in [1, \infty]$, decimos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p(X, \mathscr{M}, \mu)$ converge en L^p a $f \in L^p(X, \mathscr{M}, \mu)$, y lo notamos $f_n \xrightarrow{L^p} f$, si $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$.

Propiedad 5.14.

- $f_n \xrightarrow{L^p} f \Rightarrow \|f_n\|_p \longrightarrow \|f\|_p \not\Rightarrow f_n \xrightarrow{L^p} f$.
- $f_n \xrightarrow{L^p} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{\mu} f \not\Rightarrow f_n \xrightarrow{L^p} f$.
- $f_n \xrightarrow{L^p} f \overset{p\neq\infty}{\not\Rightarrow} f_n \longrightarrow f$ μ-c.t.p $\not\Rightarrow f_n \xrightarrow{L^p} f$.

Clase 39

13 de Noviembre

5.1 Subsespacios densos en L^p

$(X, \mathscr{M}, \mu) =$ EdM σ-finito completo.

Definición 5.15 (función simple en $\mathbb{C}$). Una función $s : X \to \mathbb{C}$ se dice simple si $\Re(s)$ e $\Im(s)$ lo son.

Teorema 5.16. Si $p \in [1, \infty]$, entonces, dada $f \in L^p(X, \mathscr{M}, \mu)$ y $\varepsilon > 0$, existe φ simple tal que $|\varphi| \leq |f|$ y $\|f - \varphi\|_p < \varepsilon$.

En particular,

$$S_p(X, \mathscr{M}, \mu) := \{\varphi : X \to \mathbb{C} \mid \varphi \text{ simple}, \varphi \in L^p(X, \mathscr{M}, \mu)\}$$

es denso en $L^p(X, \mathscr{M}, \mu)$.

Demostración. Supongamos primero que f es no negativa. Entonces, existen $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} : X \to \mathbb{R}$ simples tal que $0 \leq \varphi_n \nearrow f$ y, además, $|\varphi_n - f| \leq 2^{-n}$ sobre $\{x \ : \ f(x) \leq n\}$.

En particular, si $p \neq \infty$, entonces $0 \leq |f - \varphi_n|^p \leq |f|^p \in L^1$, y por lo tanto, como $|\varphi - f|^p \overset{n\to\infty}{\longrightarrow}$ μ-c.t.p (pues f es finita μ-c.t.p), resulta que $\|\varphi_n - f\|_p \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ por Teorema de Convergencia Dominada.

Si $p = \infty$, entonces si tomamos $n > \|f\|_\infty$ $(< \infty)$, vale que $\|\varphi_n - f\|_\infty \leq 2^{-n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

En particular, esto implica el resultado si $f \geq 0$.

Para el caso general, escribimos

$$f = \underbrace{(\Re(f))^+}_{f_1} - \underbrace{(\Re(f))^-}_{f_2} + i(\underbrace{(\Im(f))^+}_{f_3} - \underbrace{(\Im(f))^-}_{f_4}).$$

Como cada f_i es no negativa, existe φ_i simple tal que

$$\|\varphi_i - f_i\| < \frac{\varepsilon}{4} \text{ y } |\varphi_i| \leq |f_i| \quad \forall i = 1, \dots, 4.$$

(de hecho, $0 \leq \varphi_i \leq f_i$.) Luego, si definimos $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 + i(\varphi_3 - \varphi_4)$, φ resulta simple y, además,

$$\begin{aligned}\|\varphi - f\|_p &= \|(\varphi_1 - f_1) + (\varphi_2 - f_2) + i(\varphi_3 - f_3) + i(\varphi_4 - f_4)\|_p \\ &\leq \sum_{i=1}^{4} \|\varphi_i - f_i\|_p < \varepsilon \checkmark.\end{aligned}$$

Notar que

$$\begin{aligned}|\varphi|^2 &= (\varphi_1 - \varphi_2)^2 + (\varphi_3 - \varphi_4)^2 \\ &= \varphi_1^2 + \varphi_2^2 - \underbrace{2\varphi_1\varphi_2}_{0 \leq \cdot \leq f_1 f_2 = 0} + \varphi_3^2\varphi_4^2 - \underbrace{2\varphi_3\varphi_4}_{0} \\ &= \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 + \varphi_4^2 \\ &\leq f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + f_4^2 = |f|^2.\end{aligned}$$

□

Ahora, nos concentramos en la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$.

Definición 5.17 (soporte)**.** Dada $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, definimos su soporte como

$$\operatorname{supp}(f) := \overline{\{x \ : \ f(x) \neq 0\}}.$$

Además, definimos

$$C_c(\mathbb{R}^n) := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \mid f \text{ es continua y } \operatorname{supp}(f) \text{ es compacto}\}.$$

Teorema 5.18. Si $p \in [1, \infty)$ entonces $C_c(\mathbb{R}^n)) \subseteq L^p(\mathbb{R}^n)$ es denso.

Observación. Si $p = \infty$, el resultado **NO** es cierto.

Lema 5.19 (Urysohn). Si (X, d) es un espacio métrico, entonces, dado $F \subseteq X$ cerrado y $G \subseteq X$ abierto con $F \subseteq G$, existe $g : X \to [0, 1]$ continua tal que $\chi_F \leq g \leq \chi_G$.

Demostración. Notar que

$$g(x) := \frac{d(x, G^c}{d(x, G^c) + d(x, F)}$$

sirve, pues $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y) \quad \forall A \subseteq X$. □

Demostración (Teorema). Primero veamos que $C_c(\mathbb{R}^n) \subseteq L^p(\mathbb{R}^n)$.

Sea $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$. Si $K_g := \mathrm{supp}(g)$, entonces, como g es continua, vale que $\sup_{x \in K_g} |g(x)| =: S_g < \infty$. Por lo tanto,

$$|g|^p \leq (S_g)^p \chi_{K_g} \in L^1,$$

pues $|K_g| < \infty$ por ser acotado. Luego, $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Para ver que $C_c(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$, debemos ver que, dado $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $\varepsilon > 0$, existe $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|g - f\|_p < \varepsilon$.

Ahora,

1. Como las funciones simples en L^p son densas en $L^p(\mathbb{R}^n)$, basta verlo para el caso en que $f \in L^p$ es simple.

2. Como las simples en L^p son combinaciones lineales de características de conjuntos de medida finita, basta verlo para el caso en que $f = \chi_E$ con E medible y $|E| < \infty$.

3. Como $\chi_{E \cap B(0,N)} \xrightarrow{L^p} \chi_E$, pues $\lim_{N \to \infty} |E \cap B(0, N)| = |E| < \infty$, de manera tal que $(\|\chi_E - \chi_{E \cap B(0,N)}\|_p)^p = |E \setminus (E \cap B(0, N))| \longrightarrow 0$, basta probar que el resultado para $f = \chi_E$ con E medible y acotado.

En este caso, como la medida de Lebesgue es regular, dado $\varepsilon > 0$, existen K compacto y G abierto acotado tales que

$$K \subseteq E \subseteq G \text{ y } |G \setminus K| < \varepsilon^p.$$

Por el lema de Urysohn, existe $g : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ continua tal que $\chi_K \leq g \leq \chi_G$. Luego, g cumple que:

i. $\mathrm{supp}(g) \subseteq \overline{G}$ y como G es acotado, resulta que $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$;

ii. $\chi_E - g \leq \chi_G - g \leq \chi_G - \chi_K = \chi_{G \setminus K}$;

iii. $\chi_E - g \geq \chi_E - \chi_G \geq \chi_K - \chi_G = -\chi_{G \setminus K}$.

Combinando (ii) y (iii), resulta $|\chi_E - g| \le \chi_{G\setminus K}$. Por lo tanto

$$\|f-g\|_p = \Big(\int |\chi_E - g|^p\Big)^p = (|G\setminus K|)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Esto concluye la demostración. $\square$

Clase 40

14 de Noviembre

Aclaración: En la demostración que $C_c(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$, asumimos, implícitamente, que f tomaba valores en $\mathbb{R}$ (y no en $\mathbb{C}$). Pero basta con hacer este caso.

Corolario 5.20. $C_{\mathbb{R}}([a,b])$ es denso en $L^1_{\mathbb{R}}([a,b])$. En particular, $\overline{\mathcal{R}([a,b])} = L^1_{\mathbb{R}}([a,b])$ con la métrica d_{L^1}, donde $\mathcal{R}([a,b]) := \{[f] \mid f : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ integrable Riemann}\}$.

Demostración. Dada $f \in L^1_{\mathbb{R}}([a,b])$, la extendemos por 0 en $\mathbb{R}\setminus[a,b]$, obteniendo $\widetilde{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Por densidad de $C_c(\mathbb{R})$, dado $\varepsilon > 0$, existe $g \in C_c(\mathbb{R})$ tal que $\|\widetilde{f} - g\| < \varepsilon$.

Luego, $\widetilde{g} := g|_{[a,b]}$ cumple que:

i. $\widetilde{g} \in C_{\mathbb{R}}([a,b])$;

ii. $\|f-\widetilde{g}\|_{L^1_{\mathbb{R}}([a,b])} = \int_a^b |f-\widetilde{g}| = \int_a^b |\widetilde{f} - g| \le \|\widetilde{f} - g\|_1 < \varepsilon$.

Esto prueba el resultado. $\square$

Corolario 5.21. Si $p \in [1,\infty)$ y, dada $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, definimos $f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ como $f_h(x) := f(x+h)$, entonces $f_h \xrightarrow{L^p} f$ (cuando $h \longrightarrow 0$).

5.2 Convolución y regularización de funciones

Ejemplo. Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ y $h > 0$. Definimos $T_h(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ por

$$T_h(f)(x) := \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)\, dt.$$

$T_h(f)$ se conoce como el promedio móvil simétrico. Puede verificarse que T_hf está bien definida.

Vamos a ver que T_hf es uniformemente continua (de hecho, es absolutamente continua).

Además, por ejercicio de la Guía 9, $T_hf \xrightarrow{L^1} f$ (cuando $h \longrightarrow 0$). Luego, $(T_hf)_{h>0}$ es una familia de aproximaciones continuas de $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Definición 5.22 (convolución). Sean $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ funciones medibles. para $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)g(y)|\ dy < \infty$, se define

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\ dy.$$

$(f * g)$ se conoce como la convolución de f con g.

Ejemplo. Se puede ver que

$$T_h f(x) = \Big(\frac{1}{2h}\chi_{[-h,h]} * f\Big)(x).$$

Observación. La función $\varphi_x(y) := f(x-y)g(y)$ es medible $\forall x \in \mathbb{R}^n$ (Ej. 10 - Guía 7), así que podemos integrarla.

Teorema 5.23. Sean $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ medible. Entonces,

i. $f * g(x)$ existe si y sólo si $g * f(x)$ existe y, en este caso, coinciden;

ii. Si $f \in L^p$ y $g \in L^{p'}$ con $p \in [1, \infty]$, entonces $|f * g(x)| \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$ $\forall x$. i.e. $f * g$ existe y es acotada. Además, es uniformemente continua;

iii. Si $f, g \in C_c(\mathbb{R}^n)$, entonces $f * g$ también;

iv. $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

Demostración. i. Si tomamos un cambio de variables $z = y - x$ (Guía 4)

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)|\ dy = \int_{\mathbb{R}^n} |f(-z)g(z+x)|\ dz.$$

Tomando otro cambio de variables $t = -z$, tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(-z)g(z+x)|\ dz = \int_{\mathbb{R}^n} |f(t)g(x-t)|\ dt.$$

Esto prueba que $f * g(x)$ existe si y sólo si $g * f(x)$ existe y que, en este caso, coinciden se prueba igual.

ii. Se tiene que, si $p \neq \infty$

$$\begin{aligned} |f * g(x)| &\leq \int |f(x-y)||g(y)|\ dy \\ \text{(Hölder)} \quad &\leq \Big(\int |f(x-y)|^p\ dy\Big)^{\frac{1}{p}} \|g\|_{p'} \\ &\leq \|f\|_p \|g\|_{p'}. \end{aligned}$$

Si $p = \infty$,

$$|f * g(x)| \le \int \|f\|_\infty |g(y)| \, dy = \|f\|_\infty \|g\|_1.$$

Además,

$$|f * g(x+h) - f * g(x)| \le \int |f(x+h-y) - f(x-y)||g(y)| \, dy = (*).$$

Si $p < \infty$, por Hölder,

$$(*) \le \|f_n f\|_p \|g\|_{p'} \overset{h \to 0^+}{\longrightarrow} 0.$$

Luego,

$$\sup_x |f * g(x+h) - f * g(x)| \le \|f_n - f\|_p \|g\|_{p'} \overset{h \to 0^+}{\longrightarrow} 0$$

y, por lo tanto, $f * g$ es uniformemente continua.

Si $p = \infty$, entonces $p' = 1 < \infty$ y, por el caso anterior, $g * f$ es uniformemente continua. Como $g * f = f * g$, concluimos la continuidad unifrme si $p = \infty$.

iii. La continuidad se suige de (ii) y el hecho de que $f, g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ y, por ende, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$.

Para ver que $f * g$ tiene soporte compacto, sean $K_f := \operatorname{supp}(f)$, $K_g := \operatorname{supp}(g)$. Entonces, $f(x-y)g(y) = 0$ si $y \notin K_g$ ó $x - y \notin K_f$. En particular, $f(x-y)g(y) = 0 \ \forall y \in \mathbb{R}^n$ si $x \notin K_f + K_g$. Por lo tanto, $\operatorname{supp}(f * g) \subseteq K_f + K_g$ (que está acotado).

Esto implica que es compacto.

iv. Se tiene que

$$\begin{aligned}
\|f * g\|_1 &= \int |f * g(x)| \, dx \\
&\le \int \int |f(x-y)g(y)| \, dydx \\
\text{(por Tonelli)} \quad &= \int \int |f(x-y)||g(y)| \, dxdy \\
&= \int |g(y)| \Big(\int |f(x-y)| \, dx \Big) \, dy \\
&= \int |g(y)| \|f\|_1 \, dy = \|f\|_1 \|g\|_1.
\end{aligned}$$

$\square$

Propiedad 5.24. Si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces

i. $f * (g \pm h) = f * g \pm f * h$;

ii. $f * (g * h) = (f * g) * h$.

Definición 5.25 (álgebra de Banach)**.** Sea X un espacio de Banach sobre $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. Decimos que X es un álgebra de Banach, si existe una operación $X \times X \to X$ tal que $(x, y) \mapsto xy$, que verifica: si $x, y, z \in X$,

i. $x(yz) = (xy)z$;

ii. $x(y+z) = xy + xz$ e $(y+z)x = yx + zx$;

iii. $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$;

iv. $\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$.

El álgebra de Banach se dice:

i. *conmutativa:* si $xy = yx \quad \forall x, y \in X$;

ii. *con unidad:* si existe $e \in X$ tal que $ex = xe = x \; \forall x \in X$.

Observación. $(L^1(\mathbb{R}^n), \| \cdot \|_1, *)$ es un álgebra de Banach conmutativa pero sin unidad.

Clase 41

17 de Noviembre

Observación. $(L^1, \| \cdot \|, *)$ es un álgebra de Banach conmutativa, pero no tiene unidad!

En efecto, no existe $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $g * f = f \quad \forall f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Por ejemplo, si $n = 1$, supongamos que existe tal g.

Entonces, podemos elegir $\delta > 0$ suficientemente pequeño tal que

$$\int_{-2\delta}^{2\delta} |g(x)| \, dx < 1$$

por la absoluta continuidad de la integral.

Por otro lado, si tomamos $f := \chi_{[-\delta,\delta]} \in L^1(\mathbb{R})$ y, si $g * f = f$, entonces

$$f(x) = g * f(x) = \int_{x-\delta}^{x+\delta} g(y) \, dy$$

debería ser cierto para c.t-x.

En particular, existe $x_0 \in [-\delta, \delta]$ tal que $f(x_0) = g * f(x_0)$. Luego,

$$\begin{aligned} 1 = f(x_0) = g * f(x_0) &= \Big| \int_{x-\delta}^{x+\delta} g(y) \, dy \\ &\leq \int_{x-\delta}^{x+\delta} |g(y)| \, dy \\ &\leq \int_{-2\delta}^{2\delta} |g(y)| \, dy < 1, \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción.

Notemos que, si g es no negativa,

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\ dy = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\ d\mu_g(y),$$

donde μ_g es la medida en $\mathbb{R}$ dada por

$$\mu_g(E) \coloneqq \int_E g(y)\ dy.$$

Esto nos sugiere cómo definir la convolución contra una medida. Es decir, si μ es una medida y $f \in L^1(\mu)$, definimos

$$f * \mu(x) \coloneqq \int f(x-y)\ d\mu(y).$$

Observar que, con esta definición,

$$(f * \delta_0)(x) = \int f(x-y)\ d\delta_0 = f(x-0) = f(x).$$

Luego, podemos ver a δ_0 como la unidad con respecto a la convolución, $*$! En particular, δ_0 no es μ_g para ninguna $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Definición 5.26. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $f : U \to \mathbb{R}$. Decimos que f es de clase C^∞ en U, y lo notamos $f \in C^\infty(U)$, si f tiene derivadas parciales continuas de todos los órdenes en todo punto de U.

Definimos además $C_c^\infty(U)$ como el subconjunto de funciones $f \in C^\infty(U)$ con soporte compacto (contenido en U).

Si f toma valores en $\mathbb{C}$, diremos que $f \in C^\infty(U)$ (ó $f \in C_c^\infty(U)$), si $\Re(f), \Im(f) \in C^\infty(U)$ (ó $\in C_c^\infty(U)$).

Lema 5.27. Existe $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ no negativa tal que $\phi(x) = 0$ si $|x| > 1$.

Demostración. *Idea:* Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) \coloneqq \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & \text{si } |x| < 1, \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Es decir, $f(x) = \psi(1-x^2)$, donde

$$\psi(x) \coloneqq \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x > 0, \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

Como $\psi \in C^\infty$, f es de clase C^∞ también, y $\operatorname{supp}(f) = [-1, 1]$.

Luego, $\phi(x) \coloneqq f(|x|)$ cumple que:

- $0 \leq \phi \leq 1$;
- $\operatorname{supp}(f) = \overline{B_{\mathbb{R}^n}(0,1)}$;

- ϕ es $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. □

Definición 5.28 (localmente integrable)**.** Sea $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ (o $\mathbb{C}$) medible. Decimos que f es localmente integrable si es integrable sobre cada compacto de $\mathbb{R}^n$. Denotaremos al espacio de tales funciones por $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 5.29. Sea $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ no negativa tal que

$$\begin{cases} \phi(x) = 0 \quad \text{si } |x| > 1, \\ \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\ dx = 1. \end{cases}$$

Dado $\varepsilon > 0$, definamos

$$\phi_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n}\phi\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big).$$

Valen las siguientes:

i. ϕ_ε es no-negativa de tipo $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, con

$$\begin{cases} \operatorname{supp}(\phi_\varepsilon) \subseteq \overline{B_{\mathbb{R}^n}(0,\varepsilon)}, \\ \|\phi_\varepsilon\|_1 = \int |\phi_\varepsilon(x)|\ dx = 1. \end{cases}$$

ii. Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, entonces $f_\varepsilon := \phi_\varepsilon * f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Si f es uniformemente continuna, enotnces $f_\varepsilon \longrightarrow f$ uniformemente cuando $\varepsilon \longrightarrow 0$.

iii. Si $f \in L^p$ ($p \in [1,\infty]$), entonces $f_\varepsilon \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Además, si $p \neq \infty$, $f_\varepsilon \xrightarrow{L^p} f$.

Las funciones f_ε se llaman regularizaciones (ó molificaciones) de f. Las funciones ϕ_ε se llaman aproximaciones de la unidad (ó de la identidad, ó molificadores).

Demostración. En el Rana. □

Corolario 5.30. $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$ si $p \in [1,\infty)$.

Observación. No vale que $f_\varepsilon \xrightarrow{L^p} f$ si $f \in L^\infty$ (en general, $C^\infty \cap L^\infty$ no es denso en L^∞).

Chapter 6

Espacios de Hilbert

Definición 6.1. Sea H un espacio vectoria sobre $\mathbb{R}$ (ó $\mathbb{C}$). Decimos que una aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{R}$ (ó $\mathbb{C}$) es un producto interno en H si:

i. $\langle f, f \rangle \geq 0 \quad \forall f \in H$ y vale la igualdad si y sólo si $f = 0$;

ii. $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$;

iii. $\langle \alpha f + \beta g, h \rangle = \alpha \langle f, h \rangle + \beta \langle g, h \rangle$;

iv. $\langle f, \alpha g + \beta h \rangle = \overline{\alpha} \langle f, g \rangle + \overline{\beta} \langle f, h \rangle$.

El par $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se dice un espacio vectorial con producto interno.

Ejemplo. $(X, \mathscr{M}, \mu)$ espacio de medida completo.

$$H := L^2(X, \mathscr{M}, \mu) \text{ y } \langle f, g \rangle := \int_X f \cdot \overline{g} \, d\mu.$$

Proposición 6.2. Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un $\mathbb{C}$-E.V con producto interno. Si para cada $h \in H$ definimos $\|h\| := \sqrt{\langle h, h \rangle}$, enotnces

1. $\|h\| \geq 0 \quad \forall h \in H$ y vale igual si y sólo si $h = 0$;
2. $\|\alpha h\| = |\alpha| \|h\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$;
3. (Cauchy-Schwarz) $|\langle h_1, h_2 \rangle| \leq \|h_1\| \|h_2\|$;
4. (Desigualdad Triangular) $\|h_1 + h_2\| \leq \|h_1\| + \|h_2\|$;
5. (Identidad del Paralelogramo) $\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2$.

En particular, $\| \cdot \|$ es una norma.

Definición 6.3 (Espacio de Hilbert). Si $(H, \| \cdot \|)$ es completo, decimos que $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio de Hilbert.

Corolario 6.4. La aplicación $(h_1, h_2) \mapsto \langle h_1, h_2 \rangle$ es continua en $H \times H$ con $(\|\cdot\| \times \|\cdot\|)$.

Demostración. Notar que

$$\begin{aligned} |\langle h_1, h_2 \rangle - \langle \widetilde{h}_1, \widetilde{h}_2 \rangle| &= |\langle h_1 - \widetilde{h}_1 + \widetilde{h}_1, h_2 \rangle - \langle \widetilde{h}_1, \widetilde{h}_2 \rangle| \\ &= |\langle h_1 - \widetilde{h}_1, h_2 \rangle + \langle \widetilde{h}_1, h_2 - \widetilde{h}_2 \rangle| \\ &\leq \|h_1 - \widetilde{h}_1\| \underbrace{\|h_2\|}_{\text{acotado}} + \underbrace{\|\widetilde{h}_1\|}_{\text{acotado}} \|h_2 - \widetilde{h}_2\|, \end{aligned}$$

de donde se sigue la continuidad. $\square$

Clase 42

19 de Noviembre

Definición 6.5. Dado un subconjunto $S \subseteq H$ no vacío, definimos el complemento ortogonal de S como

$$S^\perp := \{u \in H \ : \ \langle u, h \rangle = 0 \quad \forall h \in S\}.$$

Si $\langle u, h \rangle = 0$, decimos que u y h son ortogonales. Diremos que $u \perp S$ si $\langle u, s \rangle = 0 \quad \forall s \in S$.

Proposición 6.6. Si $S \subseteq H$ es un subconjunto no vacío, entonces $S^\perp$ es un subespacio vectorial cerrado (bajo $\|\cdot\|_H$) de H.

Demostración. Notar que:

- $S^\perp$ es subespacio:

$$\langle \alpha u_1 + \beta u_2, h \rangle = \alpha \langle u, h \rangle + \beta \langle u_2, h \rangle = 0 \quad \forall u_1, u_2 \in S^\perp, \ \alpha, \beta \in \mathbb{K}$$

- $S^\perp$ es cerrado: Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq S^\perp$ tal que $u_n \longrightarrow u_\infty \in H$, entonces, dado $s \in S$

$$\langle u_\infty, s \rangle = \lim_{n \to \infty} \rangle u_n, s \rangle = 0 \quad \forall s \in S \Rightarrow u_\infty \in S^\perp$$

(notar que la igualdad está dada, pues $\langle \cdot, s \rangle$ es continua). $\square$

Teorema 6.7. Sea $f \in H$ y S un subespacio vectorial cerrado de H. Sea

$$\alpha := \inf\{\|f - s\| \ : \ s \in S\}.$$

Entonces, existe un único $f_0 \in S$ tal que $\alpha \|f - f_0\|$. Además, si $f \notin S$, entonces $f - f_0 \perp S$ (y $f - f_0 \neq 0$). f_0 se dice la proyección ortogonal de f sobre S.

Demostración. Primero vemos que f_0 es único.

Supongamos que $f_0, f_1 \in S$ son tales que

$$\|f - f_0\| = \|f - f_1\| = \alpha.$$

Entonces, como S es subespacio vectorial, $\frac{f_0+f_1}{2} \in S$ y, por lo tanto,

$$\begin{aligned}\alpha &\leq \left\| f - \frac{(f_0 - f_1)}{2} \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{2}(2f - f_0 - f_1) \right\| \\ &= \frac{1}{2}\|f - f_0 + f - f_1\|.\end{aligned}$$

Ahora, por la identidad del paralelogramo,

$$\begin{aligned}\|f_1 - f_0\|^2 &= \|(f_1 - f) - (f_0 - f)\|^2 \\ &= 2\underbrace{\|f_1 - f\|^2}_{\alpha^2} + 2\underbrace{\|f - f_0\|^2}_{\alpha^2} - \underbrace{\|f_1 + f_0 - 2f\|^2}_{\geq (2\alpha)^2} \\ &\leq 2\alpha^2 + 2\alpha^2 - (2\alpha)^2 = 0.\end{aligned}$$

Entonces, $\|f_1 - f_0\| = 0 \Rightarrow f_1 = f_0$ ✓.

Veamos ahora que existe tal $f_0 \in S$:

Por definición de α, existen $g_n \in S$ tal que $\|g_n - f\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha$. Como $\frac{g_n+g_m}{2} \in S$ $\forall n, m$, tenemos que

$$\left\| \frac{g_n + g_m}{2} - f \right\| \geq \alpha.$$

Luego, por la identidad de l paralelogramo

$$\begin{aligned}\|g_n - g_m\|^2 &= 2\|g_n - f\|^2 + \|g_m - f\|^2 - \left\| 2\left(\frac{g_n + g_m}{2} - f\right) \right\|^2 \\ &= 2(\|g_n - f\|^2 + \|g_m - f\|^2) - 4\left\| \frac{g_n + g_m}{2} - f \right\|^2 \\ &\leq 2(\|g_n - f\|^2 + \|g_m - f\|^2 - 2\alpha^2) \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Esto prueba que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy en H (que es completo). Luego, existe $f_0 \in H$ tal que $g_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f_0$.

Como S es cerrado y $g_n \in S$ $\forall n \in \mathbb{N}$, vale que $f_0 \in S$. Más aún, por la continuidad de la norma, $\|f - f_0\| = \lim_{n\to\infty} \|f - g_n\| = \alpha$. Luego, f_0 cumple lo que queremos.

Por último, que $f - f_0 \perp S$ si $f \notin S$, se demuestra como en Álgebra Lineal (Teorema 8.9.14 del Rana). $\square$

Teorema 6.8. Sean S_1, S_2 subconjuntos de H. Entonces:

i. $S_1^\perp$ es un subespacio vectorial cerrado de H y $S_1 \cap S_1^\perp \subseteq \{0\}$. Si S_1 es subespacio, entonces $S_1 \cap S_1^\perp = \{0\}$.

ii. $S_2 \subseteq S_1 \Rightarrow S_1^\perp \subseteq S_2^\perp$.

iii. $(S_1^\perp)^\perp \supseteq S_1$ y vale la igualdad si S_1 es un subespacio cerrado.

iv. Si S_1 es subespacio cerrado, entonces $S_1 \cap S_1^\perp = \{0\}$ y $H = S_1 \oplus S_1^\perp$. En particular, dado $f \in H$, existen únicos $g \in S_1$ y $h \in S_1^\perp$ tal que $f = g + h$.

Demostración. Vemos (iii) y (iv).

$\boxed{\text{iii.}}$ Claramente $S_1 \subseteq (S_1^\perp)^\perp$. Supongamos que S_1 es subespacio cerrado y sea $f \in (S_1^\perp)^\perp$.

Por el Teorema anterior, existe $f_0 \in S_1$ tal que $f - f_0 \in S_1^\perp$ (f_0 es la proyección de f en S_1). Como $f_0 \in S_1 \subseteq (S_1^\perp)^\perp$ y $f \in (S_1^\perp)^\perp$ (por elección), resulta que $f - f_0 \in (S_1^\perp)^\perp$.

Luego, $f - f_0 \in (S_1^\perp) \cap (S_1^\perp)^\perp = \{0\}$ y, así, $f = f_0 \in S_1$.

$\boxed{\text{iv.}}$ Como para cualquier $f \in H$ se tiene que $f = f_0 + (f - f_0)$, con $f_0 \in S_1$ y $f - f_0 \in S_1^\perp$, vemos que $H \subset S_1 + S_1^\perp$. La otra inclusión vale siempre y esto prueba que $H = S_1 + S_1^\perp$.

Que es suma directa se sigue de (i). □

Definición 6.9. Una aplicación $T\colon H \to \mathbb{K}$ se dice un funcional lineal acotado si:

1. T es una transformación lineal;
2. Existe $M > 0$ tal que $|T(h)| \leq M\|h\| \quad \forall h \in H$.

Proposición 6.10. Sea $T\colon H \to \mathbb{K}$ una transformación lineal. Entonces, son equivalentes:

1. T es un funcional lineal acotado.
2. T es continuo.
3. T es continuo en $h = 0$.

Ejemplo. Dado $h \in H$, la aplicación $T_h\colon H \to \mathbb{K}$ tal que $g \mapsto \langle g, h\rangle$, es un funcional lineal acotado:

i. T_h es transformación lineal se sigue de las propiedades de $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

ii. T_h es continuo por continuidad del producto interno.

Además, si dado un funcional lineal acotado T, definimos

$$\|T\| := \inf\{M > 0 \ : \ |T(h)| \leq M\|h\| \quad \forall h \in H\},$$

entonces $\|T_h\| = \|h\|$.

En efecto:

1. $|T_h(g)| = |\langle g, h\rangle| \leq \|g\| \cdot \|h\| \quad \forall g \in H$. Entonces, $\|T_h\| \leq \|h\|$.
2. $|T_h(h)| = |\langle h, h\rangle| = \|h\|^2 = \|h\| \cdot \|h\| \Rightarrow \|h\| \leq \|T_h\|$.

Teorema 6.11 (Representación de Riesz)**.** Si H es un espacio de Hilbert y T es un funcional lineal acotado, entonces existe un único $h \in H$ tal que $T = T_h$.

Demostración. $\boxed{\text{Unicidad:}}$ Si $T(x) = \langle x, h_1\rangle = \langle x, h_2\rangle \quad \forall x \in H$. Entonces $\langle x, h_1 - h_2\rangle = 0 \quad \forall x \in H$.

Tomando $x = h_1 - h_2$, resulta $\|h_1 - h_2\|^2 = \langle h_1 - h_2, h_1 - h_2\rangle = 0$ y luego, $h_1 = h_2$. □

Clase 43

21 de Noviembre

Teorema 6.12 (Representación de Riesz)**.** Si $T\colon H \to \mathbb{K}$ es un funcional lineal acotado, entonces existe un único $h \in H$ tal que $T = T_h$ (i.e. $T(f) = \langle f, h\rangle \quad \forall f$).

Demostración. $\boxed{\text{Existencia}}$ Si $T \equiv 0$, entonces $T = T_0$ (i.e. $h = 0$).

Luego, podemos suponer que $T \not\equiv 0$. Sea $S = \ker T = T^{-1}(\{0\})$. Tenemos que S es un subespacio vectorial cerrado, pues T es continua. Además, S es propio ($S \neq H$) pues $T \neq 0$. Luego, como $H = S \oplus S^{\perp}$ y $S \neq H$, existe $h_0 \in S^{\perp}$, tal que $h_0 \neq 0$. Sea $h := \frac{h_0}{\|h_0\|}$.

Veamos que $T = T_{\overline{(T(h)}\cdot h}$. A tal fin, consideremos el funcional lineal

$$u(x) := \underbrace{T(h)}_{\in\mathbb{K}} \cdot x - \underbrace{T(x)}_{\in\mathbb{K}} \cdot h.$$

Notemos que $\mathrm{Im}(u) \subseteq S$. En efecto,

$$\begin{aligned} &T(u(x)) = T(h) \cdot T(x) - T(x) \cdot T(h) = 0 \\ &\Rightarrow \mathcal{U}(x) \in S \quad \forall x \in H. \end{aligned}$$

En particular, $\langle u(x), h\rangle = 0 \quad \forall x \in H$, lo cual implica que

$$\begin{aligned} &\langle T(h)x, h\rangle = \langle T(x)h, h\rangle \\ \Leftrightarrow\ &T(h)\langle x, h\rangle = T(x)\|h\|^2 \\ \Leftrightarrow\ &T(x) = \langle x\overline{T(h)} \cdot h\rangle \quad \forall x \in H. \end{aligned}$$

□

Nota. • Si definimos $H' := \{\varphi\colon H \to \mathbb{K} \mid \varphi \text{ F.L.A.}\}$, (lo que se conoce como el dual de H), entonces el Teorema nos dice que la aplicación $\phi\colon H \to H'$

tal que $h \mapsto T_h$, es una biyección.

- Además, ϕ es una isometría, pues vimos que $\|T_h\| = \|h\|$.
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, entonces ϕ es lineal: $\phi(h_1 + h_2) = T_{h_1+h_2} = T_{h_1} + T_{h_2}$ y $\phi(\alpha h) = T_{\alpha h} = \alpha T_h = \alpha\phi(h)$. Decimos entonces que ϕ es un isomorfismo (lineal) isométrico y que H, H' son isométricamente isomorfos.
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, ϕ es antilineal: $\phi(h_1 + \alpha h_2) = \phi(h_1) + \overline{\alpha}\phi(h_2)$. Esto se puede arreglar: Si $H = L^2(X, \mathscr{M}, \mu)$, entonces $\psi \colon H \to H'$ tal que $g \mapsto T_{\overline{g}}$ ($T_{\overline{g}}(h) = \int h \cdot g \; d\mu$), es un isomorfismo isométrico.
- En general, ψ es un isomorfismo isométrico entre $L^{p'}$ y $(L^p)'$, i.e. $(L^p)' = L^{p'} \quad \forall p \in (1, \infty)$.

Definición 6.13. Sean μ, ν medidas en $(X, \mathscr{M})$. Decimos que ν es absolutamente continua con respecto a μ, y lo notamos $\nu \ll \mu$, si:

$$\mu(E) = 0 \Rightarrow \nu(E) = 0.$$

Ejemplo.

1. Si $(X, \mathscr{M}, \mu)$ es un espacio de medida y f es una función no negativa μ-integrable, entonces $\nu := \mu_f$ definida por $\nu(E) = \int_E f \; d\mu$, cumple que $\nu \ll \mu$.
2. Si $\mu :=$ medida de contar en $(\mathbb{R}, \mathscr{L}(\mathbb{R}))$ y $\nu :=$ medida de Lebesgue en $(\mathbb{R}, \mathscr{L}(\mathbb{R}))$, entonces $\nu \ll \mu$.

Teorema 6.14. Sean μ, ν medidas en $(X, \mathscr{M})$. Entonces:

1. Si ν es finita y $\nu \ll \mu$, entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tal que vale la implicación $(\mu(E) < \delta \Rightarrow \nu(E) < \varepsilon)$.

   Como caso particular de $\nu = \mu_f$ con $f \in L^1(\mu)$, tenemos la absoluta continuidad de la integral.
2. Si, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que vale la implicación

   $$\mu(E) < \delta \Rightarrow \nu(E) < \varepsilon,$$

   entonces $\nu \ll \mu$.

Definición 6.15. Dos medidas μ, ν en $(X, \mathscr{M})$ se dicen equivalentes si $\mu \ll \nu$ y $\nu \ll \mu$. Lo notaremos como $\mu \sim \nu$.

Propiedad 6.16. Valen las siguientes:

i) $\mu \ll (\mu + \nu)$;

ii) Si $\mu_1 \ll \mu_2$ y $\mu_2 \ll \mu_3 \Rightarrow \mu_1 \ll \mu_3$;

iii) Si $\nu_1 \ll \mu$ y $\nu_2 \ll \mu \Rightarrow \nu_1 + \nu_2 \ll \mu$.

Definición 6.17. Sean μ, ν medidas en $(X, \mathscr{M})$. Decimos que ν es singular respecto a μ, y lo notamos $\nu \perp \mu$, si existe $E \in \mathscr{M}$ tal que

$$\nu(E^c) = \mu(E) = 0.$$

Propiedad 6.18. Valen las siguientes

i) $\nu \perp \mu \Leftrightarrow \mu \perp \nu$;

ii) $\nu_1, \nu_2 \perp \mu \Rightarrow \alpha\nu_1 + \beta\nu_2 \perp \mu \quad \forall \alpha, \beta \geq 0$;

iii) $\nu \ll \mu,\ \nu \perp \mu \Rightarrow \nu = 0$.

Teorema 6.19 (von Neumann)**.** Sean ν, μ medidas σ-finitas en un EdM $(X, \mathscr{M})$. Entonces, existen 3 conjuntos disjuntos $X_1, X_2, X_3 \in \mathscr{M}$ tales que:

i) $X = X_1 \uplus X_2 \uplus X_3$;

ii) $\nu(X_3) = 0 = \mu(X_1)$;

iii) $\exists g\colon X \to \mathbb{R}$ $\mathscr{M}$-medible no negativa tal que $g(x) > 0 \quad \forall x \in X_2$ y

$$\nu(E \cap X_2) = \int_{E \cap X_2} g \, d\mu \quad \forall E \in \mathscr{M}.$$

En otras palabras:

- $\mu|_{X_3} \perp \nu$;
- $\nu|_{X_1} \perp \mu$;
- $\nu|_{X_2} \ll \mu|_{X_2}$ (de la demostración se desprende que $\mu|_{X_2} \ll \nu_{X_2}$, o sea que $\nu|_{X_2} \sim \mu|_{X_2}$).