

Topología

Basado en las clases impartidas por Eduardo Reyes en el segundo semestre del 2025

Contents

1 Munkres	2
1.1 Espacios Topológicos (12)	2
1.2 Topología, Base (12, 13)	3
1.2.1 Topología	3
1.2.2 Base de una topología	4
1.3 Bases, Topología producto (13,15)	5
1.3.1 Comparación de topologías	6
1.4 Topología producto (15) e inducida (16)	6
1.5 Cerrados, clausura, puntos límites (17)	8
1.6 Espacios Hausdorff, convergencia (17)	10
1.7 Continuidad, homeomorfismos (18)	13
1.7.1 Observaciones clase pasada	13
1.7.2 Clase 8	14
1.8 Homemomorfismos, Productos infinitos (18, 19)	15
1.8.1 Productos cartesianos arbitrarios	16
1.8.2 Topologías en $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$	17
1.9 Topología producto, Topología cuociente (19, 22)	17
1.10 Grupos Topológicos (pp 145, Lee pp 77)	21
1.11 Acciones Topológicas (Lee p.77)	23
1.12 Acciones topológicas/continuas (Lee p.77)	24
1.13 Conexidad (23, 24)	26
1.14 Arcoconexidad (23, 24)	28
1.14.1 Arcoconexidad (conexidad por caminos)	28
1.15 (Arco)conexidad local, Componentes (25)	29
1.16 Compacidad (26)	30
1.17 Espacios localmente compactos y compactificación por un punto	35
1.18 Compacidad secuencial (28), Teorema de Tychonoff (37)	37
1.18.1 Compacidad Secuencial	37
1.19 Teorema de Tychonoff (37)	38
1.19.1 Demostración Tychonoff	38
1.20 Axiomas de Numerabilidad/Contabilidad (30)	40
1.21 Espacios Normales (32)	43
1.21.1 Criterios para garantizar T4	43
1.22 Lema de Urysonhn (33)	45
1.23 Teorema de Extensión de Tietze (34)	47
1.24 Variedades Topológicas	49
1.25 Particiones de Unidad (36)	53

Chapter 1

Munkres

Clase 1

4 de Agosto

1.1 Espacios Topológicos (12)

Definición 1.1 (sistema de vecindades). X conjunto no vacío. Si $x \in X$, consideramos $\mathcal{V}_x \subset 2^X$, tal que:

1. $\forall x \in X, \forall V \in \mathcal{V}_x, x \in V;$
2. $\forall x \in X, \forall V \in \mathcal{V}, \text{ si } V' \supset V \Rightarrow V' \in \mathcal{V}_x;$
3. Si $V_1, V_2 \in \mathcal{V} \Rightarrow V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}_x.$

El sistema de vecindades es $\{\mathcal{V}_x\}_{x \in X}$. Si $V \in \mathcal{V}_x$, V es vecindad de x .

Ejemplo. 1. (X, d) espacio métrico $\mathcal{V}_x := \{V \subset X \mid \exists \varepsilon > 0 \text{ tal que } B_\varepsilon(x) \subset V\}$. Verificamos que sea sistema de vecindad.

Demostración. Verificamos 1), 2) y 3):

- 1) $x \in X, V \in \mathcal{V}_x \Rightarrow x \in B_\varepsilon(x) \subset V;$
- 2) $x \in X, V \in \mathcal{V}_x, V' \supset V \Rightarrow x \in B_\varepsilon(x) \subset V \subset V' \Rightarrow V' \in \mathcal{V}_x;$
- 3) $x \in V_1 \cap V_2, V_1, V_2 \in \mathcal{V}_x \Rightarrow B_{\varepsilon_1}(x) \subset V_1, B_{\varepsilon_2}(x) \subset V_2$
 $\Rightarrow B_{\min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}}(x) \subset V_1 \cap V_2$
 $\Rightarrow V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}_x.$

□

2. X arbitrario, $\forall x \in X$, sea $\mathcal{V}_x = \{X\}$ es sistema de vecindades (vacuidad).
3. X arbitrario $\mathcal{V}_x = \{V \subset X \mid x \in V \text{ y } X \setminus V \text{ sea finito}\}$ (queda como ejercicio chequear que esto define un sistema de vecindades).

Definición 1.2 (topología desde sistema de vecindades). Tenemos $X, \{\mathcal{V}_x\}_{x \in X}$ sistema de vecindades. Definimos, $\tau = \{U \subset X \mid x \in U \Rightarrow U \in \mathcal{V}_x\}$.

Lema 1.3. τ cumple lo siguiente:

1. $\emptyset, X \in \tau$;
2. $U_\alpha \in \tau, \alpha \in A \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \tau$;
3. $U_1, \dots, U_n \in \tau \Rightarrow U_1 \cap \dots \cap U_n \in \tau$.

τ es la topología inducida por $\{\mathcal{V}_x\}$. Elementos de τ (subconjuntos de X) se llamarán abiertos.

Clase 2

6 de Agosto

1.2 Topología, Base (12, 13)

Demostración. (último lema de la clase anterior)

1. $\emptyset \in \tau$ por vacuidad.

$$\begin{aligned} X \in \tau : x \in X &\Rightarrow \exists V \in \mathcal{V}_x \quad (1) x \in V; (2) x \in V \subset X \\ &\Rightarrow X \in \mathcal{V}_x. \quad \forall x : X \in \tau \end{aligned}$$

2. Tomar $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}, U_\alpha \in \tau, \mathcal{U} = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Si $x \in \mathcal{U} \Rightarrow x \in U_\alpha \in \mathcal{V}_x$ para algún α . Como $U_\alpha \in \tau \Rightarrow U_\alpha \in \mathcal{V}_x$. Luego, si $x \in U_\alpha \subset \mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{U} \in \mathcal{V}_x, \forall x \in \mathcal{U}$. Por lo tanto, $\mathcal{U} \in \tau$.
3. Tomamos $U_1, \dots, U_n \in \tau, \mathcal{U} = U_1 \cap \dots \cap U_n$ y $x \in \mathcal{U}$. Luego, $x \in U_i \quad \forall i$. Como $U_i \in \tau \Rightarrow U_i \in \mathcal{V}_x, \forall i$. Por inducción (con las intersecciones), podemos afirmar que $\mathcal{U} \in \mathcal{V}_x, \forall x \in \mathcal{U}$. Por lo tanto, $\mathcal{U} \in \tau$.

□

1.2.1 Topología

Definición 1.4 (topología). X conjunto no vacío, $\tau \subset 2^X$ es una topología si cumple:

1. $\emptyset, X \in \tau$;
2. $U_\alpha \in \tau, \alpha \in A \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \tau$;
3. $U_1, \dots, U_n \in \tau \Rightarrow U_1 \cap \dots \cap U_n \in \tau$.

Observación. Se utilizará la siguiente notación:

- (X, τ) se llama espacio topológico.

- $U \in \tau \Rightarrow U$ se llama abierto (con respecto a la topología).

Lema 1.5. τ topología en $X \Rightarrow$ Inducida por un único sistema de vecindades.

Demuestra. Para $x \in X$, definir $\mathcal{V}_x = \{V \subset X \mid \exists U \in \tau \text{ con } x \in U \subset V\}$. Verificamos que $\{\mathcal{V}_x\}_x$ es sistema de vecindades:

1. La definición implica $V \in \mathcal{V}_x \Rightarrow x (\in U \subset) \in V$;
2. Si $V \in \mathcal{V}_x$ y $V' \supset V \Rightarrow (V \in \mathcal{V}_x) x \in U \subset (U \in \tau)$
 $\Rightarrow x \in U \subset V' \Rightarrow V' \in \mathcal{V}_x$;
3. Tomar $V_1, V_2 \in \mathcal{V}_x \Rightarrow x \in U_1 \subset V_1, x \in U_2 \subset V_2$ con $U_1, U_2 \in \tau$
 $\Rightarrow x \in \underbrace{U_1 \cap U_2}_{\in \tau} \subset V_1 \cap V_2 \Rightarrow V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}_x$;

(falta demostrar unicidad). □

Ejemplo (de espacios topológicos).

1. (Topología métrica): (X, d) espacio métrico. Abierto es $U \in X$ tal que $\forall x \in U, \exists \varepsilon > 0$ tal que $x \in B_\varepsilon(x) \subset U$.
 - (a) $X = \mathbb{R}^n$, $d((x_i), (y_i)) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$. Así, se obtiene la topología estándar.
 - (b) X arbitrario, d métrica discreta $d(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y. \end{cases}$ Así, se obtiene la topología discreta: $\tau = 2^X$.
2. (Topología indiscreta): X arbitrario, $\tau = \{\emptyset, X\}$;
3. (Topología cofinita): X arbitrario, $\tau_{cof} = \{U \subset X \mid X \setminus U \text{ es finito}\} \cup \{\emptyset\}$ (queda como ejercicio verificar que es topología).

1.2.2 Base de una topología

Una base es un subconjunto "manejable" de τ que la describe completamente!

Definición 1.6 (base). X es conjunto. $\mathcal{B} \subset 2^X$ es base para alguna topología si:

1. $\forall x \in X, \exists B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$ ($\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$).
2. $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}, \forall x \in B_1 \cap B_2, \exists B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Definición 1.7 (topología inducida). La topología inducida por la base \mathcal{B} en X es:

$$\tau = \{U \subset X \mid \forall x \in U, \exists B \in \mathcal{B} \text{ tal que } x \in B \subset U\}.$$

Nota. $\mathcal{B} \subset \tau$.

Lema 1.8. τ , definido arriba, es una topología.

Ejemplo. (X, d) espacio métrico $\Rightarrow \mathcal{B} = \{B_\varepsilon(x) \mid x \in X, \varepsilon > 0\}$ es base de la topología métrica.

Clase 3

8 de Agosto

1.3 Bases, Topología producto (13,15)

Demostración. (lema 1.8)

1. $\emptyset, X \in \tau : \emptyset \in \tau$ por vacuidad y $X \in \tau$ por propiedad (1) de \mathcal{B} .
2. τ cerrado bajo unión: $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ colección con $U_\alpha \in \tau$, $\mathcal{U} = \bigcup_{\alpha} U_\alpha$.

$$\begin{aligned} \text{Si } x \in \mathcal{U} &\Rightarrow x \in U_\alpha \text{ para algún } \alpha \\ &\Rightarrow x \in B \subset U_\alpha \text{ para algún } B \in \mathcal{B} \\ &\Rightarrow x \in B \subset \mathcal{U}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathcal{U} \in \tau$.

3. τ cerrado bajo intersección finita: $U_1, \dots, U_n \in \tau, \mathcal{U} = U_1 \cap \dots \cap U_n$.
Sea $x \in \mathcal{U} \Rightarrow x \in U_i \ \forall i$ ($U_i \in \tau$) $\Rightarrow x \in B_i \subset U_i \ \forall i, B_i \in \mathcal{B}$.
Propiedad (2) implica $x \in B \subset B_1 \cap \dots \cap B_n \subset U_1 \cap \dots \cap U_n = \mathcal{U}$.
Por lo tanto, $\mathcal{U} \in \tau$.

□

Nota. Si B base genera $\tau \Rightarrow B \subset \tau$.

Definición 1.9 (topología generada). τ topología está generada por una base B sin B es base, y τ es topología generada por B .

Utilidad: Dada τ topología a estudiar, queremos encontrar base B que la describa.

Ejemplo. (X, d) espacio métrico, $\mathcal{B} = \{B_\varepsilon(x) \mid \varepsilon > 0, x \in X\}$ es base para la topología métrica.

Demostración. Probamos que B es base.

1. Notar $X = \bigcup_{x \in X} B_1(x)$. Por lo tanto, $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$.

2. $B_1, B_2 \in \mathcal{B}, B_1 = B_{\varepsilon_1}(x_1), B_2 = B_{\varepsilon_2}(x_2)$. Sea $x \in B_1 \cap B_2$. Queremos encontrar $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subset B_1 \cap B_2$. Por desigualdad triangular, tenemos que $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1 - d(x, x_1), \varepsilon_2 - d(x, x_2)\}$ sirve.

□

Nota. 1. Una base no es necesariamente una topología ((1) y (2) pueden fallar).

2. Si B es base y τ topología, $B \subset \tau \Leftrightarrow \tau$ es generada por B .

Ejemplo. Topología del límite inferior en \mathbb{R} : $B_l = \{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ (se deja como ejercicio demostrar que B_l es base).

Definición 1.10 (topología del límite inferior). B_l genera la topología del límite inferior τ_l .

Observación.

1. τ_l no es τ_{std} ($[a, b)$ abierto en τ_l pero no en τ_{std})
2. $\tau_{std} \subset \tau_l$ (la demostración de esto queda como ejercicio).
3. (Intuición): Si $0 \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$ (para τ_{std} , y cerca de 0 si $|y| < \varepsilon$). Para τ_l , y cerca de 0, si $y \in [0, \varepsilon]$ ($0 \leq y < \varepsilon$ para $\varepsilon > 0$ chiquito).

1.3.1 Comparación de topologías

Definición 1.11 (topologías finas). τ, τ' topologías en X , decimos que τ' es más fina que τ si $\tau' \supset \tau$. Decimos que τ y τ' son comparables si $\tau' \supset \tau$ o $\tau \supset \tau'$.

Ejemplo. τ_l es más fina que τ' .

Ejemplo. $\forall \tau$ topología en X , $\{\emptyset, X\} \subset \tau \subset 2^X$. Donde $\{\emptyset, X\}$ es llamada la topología indiscreta (todos cercanos entre sí) y 2^X la topología discreta (todos lejanos entre sí).

En conclusión, si τ' es más fina que τ , los puntos están más lejanos respecto a τ' que a τ

Clase 4

11 de Agosto

1.4 Topología producto (15) e inducida (16)

Lema 1.12. $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ bases en X que generan la topología τ, τ' respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned} \tau' \supset \tau &\Leftrightarrow (\text{todo elemento de } \mathcal{B} \text{ está en } \tau'); \\ &\Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{B}, B \text{ es unión de elementos de } \mathcal{B}'; \\ &\Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{B}, \forall x \in B, \exists B' \in \mathcal{B}' \text{ tal que } x \in B' \subset B. \end{aligned}$$

Lema 1.13. $\mathcal{B}_{X \times Y} := \{U \times U' \mid U \text{ abierto en } X, U' \text{ abierto en } Y\}$ es una base para una topología.

Definición 1.14 (topología producto). Topología producto en $X \times Y$ es la generada por $\mathcal{B}_{X \times Y}$.

Demostración. (lemma 1.13.)

1. Como $X \times Y \in \mathcal{B}_{X \times Y} \Rightarrow \bigcup_{B \in \mathcal{B}_{X \times Y}} B = X \times Y$.
2. Tomar $B_1 = U_1 \times U'_1 \in \mathcal{B}_{X \times Y}, B_2 = U_2 \times U'_2 \in \mathcal{B}_{X \times Y}, (x, y) \in B_1 \cap B_2$ (U_1, U_2 abiertos en X y U'_1, U'_2 abiertos en Y). Notar que:

$$B_1 \cap B_2 = (U_1 \times U'_1) \cap (U_2 \times U'_2) = \underbrace{(U_1 \cap U_2)}_{\text{abto. en } X} \times \underbrace{(U'_1 \cap U'_2)}_{\text{abto. en } Y} \in \mathcal{B}_{X \times Y}.$$

□

Nota. Misma demostración (salvo modificaciones esperables) implica que si \mathcal{B}_X es base de X , \mathcal{B}_Y base de Y , $\mathcal{B}'_{X \times Y} := \{B \times B' \mid B \in \mathcal{B}_X, B' \in \mathcal{B}_Y\}$ es base y genera la misma topología generada por $\mathcal{B}_{X \times Y}$.

Ejemplo (importante). $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Propiedad: topología estándar de \mathbb{R}^2 (métrica euclíadiana) es igual a la topología producto en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (cada uno con su topología estándar).

- Topología estándar en \mathbb{R}^2 : generada por base $\mathcal{B} = \{B_\varepsilon(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2, \varepsilon > 0\}$.
- Topología producto en \mathbb{R}^2 : generada por base $\mathcal{B}' = \{(a, b) \times (c, d) \mid a < b, c < d\}$.

Ejercicio. Verificar para \mathbb{R}^n .

Definición 1.15 (topología inducida). $\tau|_Y := \{Y \cap U \mid U \in \tau\}$ es topología en Y . La llamamos topología en Y inducida por X .

Demostración. (topología inducida es topología)

1. $\emptyset = \emptyset \cap Y, Y = X \cap Y$.
2. Si $U_\alpha \in \tau|_Y, \alpha \in A \Rightarrow U_\alpha = U'_\alpha \cap Y$ con $U'_\alpha \in \tau \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} (U'_\alpha \cap Y) = [\bigcup_{\alpha \in A} U'_\alpha] \times Y \in \tau|_Y$.
3. $U_1, \dots, U_n \in \tau|_Y, U_i = U'_i \cap Y \Rightarrow U_1 \cap \dots \cap U_n = (U'_1 \cap Y) \cap \dots \cap (U'_n \cap Y) = (U'_1 \cap \dots \cap U'_n) \cap Y \in \tau|_Y$.

□

Lema 1.16. $\mathcal{B}|_Y := \{Y \cap B \mid B \in \mathcal{B}\}$ es base para la topología en Y inducida por X .

Observación. Cuidado: La noción de abierto depende de la topología a especificar.

Ejemplo. En $X = \mathbb{R}$, $Y = [0, 1] \cup (2, 3) \cup \{4\}$. Notar que:

- Y es abierto en Y , pero no es abierto en X .
- $[0, 1]$ también abierto en Y : $[0, 1] = Y \cap (-1, 2)$.
- $\{4\}$ también abierto en Y : $\{4\} = Y \cap (3, 5)$.

Nota. Si $U \subset Y$ es abierto en $X \Rightarrow$ abierto en Y .

Lema 1.17. $Y \subset X, \tau|_Y \subset \tau \Leftrightarrow Y$ es abierto en X .

Proposición 1.18. X, Y espacios topológicos, $A \subset X, B \subset Y$.

En $A \times B \rightarrow$ topología inducida desde $X \times Y$ (con topología producto)
 \rightarrow topología producto desde A y B (con topología inducida por X, Y respectivamente).

Estas topologías son la misma.

Demostración. Elemento de topología primera: $U = U' \cap A \times B$
Elemento de topología segunda: U es unión de productos $V \times V'$ con V abierto en A , V' abierto en B . Notar que $V \times V' = (W \cap A) \times (W' \cap B) = (W \times W') \cap A \times B$. \square

Clase 5

13 de Agosto

1.5 Cerrados, clausura, puntos límites (17)

Definición 1.19 (conjunto cerrado). X espacio topológico, $C \subset X$ es cerrado si $X \setminus C$ es abierto.

Lema 1.20.

1. X, \emptyset son cerrados;
2. Si $C_\alpha \subset X$ cerrados, $\alpha \in A \Rightarrow \bigcap_\alpha C_\alpha$ es cerrado;
3. Si C_1, \dots, C_n cerrados, entonces $C_1 \cup \dots \cup C_n$ es cerrado.

Demostración.

$$1. X = X \setminus \emptyset, \emptyset = X \setminus X;$$

$$2. C_\alpha = \bigcap_{\alpha \in A} C_\alpha \Rightarrow X \setminus C = X \setminus \bigcap_{\alpha \in A} C_\alpha = \underbrace{\bigcup_{\alpha \in A} (X \setminus C_\alpha)}_{\text{abto}};$$

$$3. C = C_1 \cup \dots \cup C_n \Rightarrow X \setminus C = X \setminus (C_1 \cup \dots \cup C_n) = \underbrace{(X \setminus C_1)}_{\text{abto}} \cap \dots \cap \underbrace{(X \setminus C_n)}_{\text{abto}}.$$

□

Ejemplo.

1. $X = \mathbb{R}, [a, b]$ es cerrado ($\mathbb{R} \setminus [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$);
2. (X, d) espacio métrico (+ topología métrica) $\Rightarrow \overline{B_\varepsilon}(x)$ es cerrado. Luego, $X \setminus \overline{B_\varepsilon}(x) = \bigcup_{y \in X \setminus \overline{B_\varepsilon}(x)} B_{d(x,y)-\varepsilon}(y)$ (abierto en topología métrica);
3. X con la topología discreta \Rightarrow todo subconjunto de X es abierto y cerrado!

Definición 1.21 (cerrado topología inducida). X espacio topológico, $Y \subset X$ (con la topología inducida), $C \subset Y$ es cerrado en Y si es cerrado en la topología inducida.

Lema 1.22. C es cerrado en Y si y solo si $C = C' \cap Y$ con C' cerrado en X .

Demostración. $C \subset Y$ es cerrado en $Y \Leftrightarrow Y \setminus C$ es abierto en Y
 $\Leftrightarrow Y \setminus C = U \cap C$ con $U \subset X$ abierto
 $\Leftrightarrow C = (X \setminus U) \cap Y = C' \cap Y$, con
 $C' = X \setminus U$ cerrado.

□

Definición 1.23 (clausura e interior). X espacio topológico, $A \subset X$:

1. El interior de A es \mathring{A} = unión de todos los abiertos contenidos en A ;
2. La clausura de A es \overline{A} = intersección de todos los cerrados que contienen A .

Observación.

1. \mathring{A} es abierto, \overline{A} es cerrada, $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$;
2. A es abierto si y solo si $\mathring{A} = A$. A es cerrado si y solo si $\overline{A} = A$;

3. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, $\overset{\circ}{\overline{A}} = \overset{\circ}{A}$;
4. El interior $\overset{\circ}{A}$ es el abierto más grande contenido en A y la clausura \overline{A} es el cerrado más pequeño que contiene a A .

Proposición 1.24. X espacio topológico, $A \subset X$ cualquiera, $x \in X$.

$$\begin{aligned} x \in \overline{A} &\Leftrightarrow \forall U \text{ abierto conteniendo a } x, \text{ se tiene } A \cap U \neq \emptyset & (*) \\ &\Leftrightarrow \text{toda vecindad de } x \text{ interseca a } A \\ &\Leftrightarrow A \text{ contiene puntos arbitrariamente cercanos a } x \text{ (según la topología).} \end{aligned}$$

Corolario 1.25. $C \subset X$ es cerrado si y solo si $\forall x \in X$, si toda vecindad de x contiene un punto de C , entonces $x \in C$.

Demostración. (proposición 1.24)

\Leftarrow Suponer que $x \notin \overline{C}$. Entonces $\exists U$ abierto con $C \subset U$ y $x \notin U$. Luego, tomar $V := C \setminus U$ abierto. Entonces, $C \cap V = \emptyset$ y $x \in V$. Es decir, negamos (*).

\Rightarrow Negamos (*) $\Rightarrow \exists U$ abierto con $x \in U$ y $U \cap C = \emptyset$. Luego, $C = X \setminus U$ cerrado con $C \subset U$ y $x \notin C$. Entonces, $x \notin C$. \square

Definición 1.26 (puntos de acumulación). $A \subset X$. Decimos que $x \in X$ es punto límite/de acumulación de A si $\forall U$ abierto conteniendo a x , se tiene que $U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. Escribimos $A' := \{\text{puntos límite de } A\}$.

Ejemplo. En \mathbb{R} , tenemos lo siguiente:

A	$\overset{\circ}{A}$	\overline{A}	A'
(a, b)	(a, b)	$[a, b]$	$[a, b]$
$[a, b)$	(a, b)	$[a, b]$	$[a, b]$
$[a, b]$	(a, b)	$[a, b]$	$[a, b]$
$[0, 1] \cup \{2\}$	$(0, 1)$	$[0, 1] \cup \{2\}$	$(0, 1)$

Notar que 2 no es punto de acumulación.

Clase 6

18 de Agosto

1.6 Espacios Hausdorff, convergencia (17)

Observación. $x \in A' \Leftrightarrow x \in \overline{A \setminus \{x\}}$.

Lema 1.27. $\forall A \subset X$, $\overline{A} = A \cup A'$.

Demostración. $\boxed{\supseteq}$ Notar que $A \subset \overline{A}$. Si $x \in A' \Rightarrow x \in \overline{A \setminus \{x\}} \subset \overline{A}$ (*). Notar que (*) $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$. Por lo tanto $A' \subset \overline{A}$. Entonces, $A \cup A' \subset \overline{A}$.

$\boxed{\subset}$ ($\bar{A} \subset A \cup A'$, equiv: $\bar{A} \setminus A \subset A'$) Si $x \in \bar{A} \setminus A$. Entonces, $x \notin A$ y $\forall U \ni x$ abierto se tiene $A \cap U \neq \emptyset$. Como $x \notin A \Rightarrow (A \setminus \{x\}) \cap U \neq \emptyset$. Entonces, $x \in A'$. \square

Observación. A' no es necesariamente cerrado.

Ejemplo. $X = \{a, b\}; \tau = \{\emptyset, X\}$ (a, b indistinguibles desde el punto de vista de τ). $A = \{b\} \Rightarrow A' = \{b\}$ (no es cerrado). $a \notin A' \Leftrightarrow a \notin \overline{A \setminus \{a\}} = \overline{\emptyset} = \emptyset$. $b \in A \Leftrightarrow b \in \overline{A \setminus \{b\}} = \overline{\{a\}} = \{a, b\}$.

Problemas:

- Subconjuntos finitos no tienen topología discreta;
- Subconjuntos finitos no son cerrados.

Lema 1.28. Si X es espacio topológico arbitrario. Son equivalentes:

1. Todos los subconjuntos finitos de X tienen la topología discreta.
2. Todos los subconjuntos finitos de X son cerrados.

Definición 1.29 (espacios T_1 o Frechet). Un espacio topológico X es T_1 (cumple el axioma T_1) si sus subconjuntos finitos son cerrados.

Ejemplo. X con la topología indiscreta NO es T_1 si $\#X \geq 2$.

Ejemplo. X con topología cofinita es T_1 . En la topología

$$\{\text{subconjuntos cerrados}\} = \{\text{conjuntos finitos}\}$$

Lema 1.30. X es T_1 , $A \subset X \Rightarrow A'$ es cerrado.

Demostración. (Queremos $\overline{A'} = A'$, i.e. $\overline{A'} \setminus A' = \emptyset$) Suponer que $x \in \overline{A'}, x \notin A'$. Si $x \notin A'$, entonces $\exists U$ abierto con $x \in U$ y $U \cap A \subset \{x\}$. Si $x \in \overline{A'}$, entonces $A' \cap U \neq \emptyset$. Luego, $\exists y \in U \cap A' (y \neq x)$. Como X es T_1 , entonces $\{x\}$ es cerrado. Luego, $X \setminus \{x\}$ es abierto, y con ello tenemos que $U \setminus \{x\}$ es abierto. Si $V = U \setminus \{x\}$ abierto que contiene a $y (y \in A')$, entonces V contiene puntos de A , distintos de y . Luego, $\exists z \in A \cap V$. Así, $z \in A \cap U$ y $z \neq x$. Contradicción! \ast \square

Definición 1.31 (espacios T_2 o Hausdorff). Un espacio topológico X es T_2 (o Hausdorff), si $\forall x \neq y$ en X existen $U, U' \subset X$ abiertos disjuntos con $x \in U, y \in U'$.

Ejemplo. X con la topología cofinita, con $\#X = \infty$ es T_1 pero no es Hausdorff. Veamos que esto es así. Si $x \neq y \in X$, $x \in U$, $y \in U'$ abiertos ($X \setminus U$, $X \setminus U'$ finitos), entonces $(X \setminus U) \cup (X \setminus U')$ finito. Luego, $X \setminus (U \cap U')$ finito. Así, $U \cap U'$ infinito, por lo que $U \cap U'$ no puede ser disjunto.

Lema 1.32. X Hausdorff $\Rightarrow X$ es T_1 .

kk

Demuestra. (X es $T_1 \Leftrightarrow$ subconjuntos finitos son cerrados \Leftrightarrow singletons son cerrados) \rightarrow (veremos el último si y solo si) Sea $x \in X$, queremos que $X \setminus \{x\}$ sea abierto. Si $y \neq x$, dado que X es Hausdorff, $\exists U_y, U'_y$ abiertos disjuntos con $y \in U_y, x \in U'_y$. Luego, $x \notin U_y$. Por lo tanto,

$$X \setminus \{x\} = \bigcup_{y \neq x} U_y \text{ es abierto.} \quad \square$$

Ejemplo. (X, d) espacio métrico, X es Hausdorff con la topología métrica.

Corolario 1.33 (secreto). Existen topologías que no vienen de métricas.

Demuestra (del ejemplo). Para la topología métrica, bolas abiertas son abiertos. Si $x \neq y$, entonces $U = B_{\frac{d(x,y)}{2}}(x)$, $U' = B_{\frac{d(x,y)}{2}}(y)$. \square

En X con la topología cofinita, $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ infinito contable. Definimos $y_n = x_n$ con $n \geq 1$ (cada elemento de X aparece exactamente una vez). Cada abierto $\emptyset \neq U \subset X$ contiene a $y_n \forall n \geq N$ (N depende de U). (próxima clase: $y_n \rightarrow x \forall x \in X$).

Clase 7

20 de Agosto

Observación. $\mathcal{B} \subset \tau \Rightarrow$ quizás $\tau_{\mathcal{B}} \neq \tau$. Solo es cierto $\tau_{\mathcal{B}} \subset \tau$.

Observación. Existe una noción más débil (T_0): $\forall x \neq y \in X, \exists U$ abierto tal que, o bien $x \in U, y \notin U$ o $y \in U, x \notin U$. Se puede demostrar que $T_1 \Rightarrow T_0$. Además, $\exists X, T_0$, no T_1 , tal que 1.30 se cumple.

Definición 1.34 (convergencia de sucesiones). X espacio topológico, $(X_n)_n$ sucesión en X , $x \in X$. Decimos que x_n converge a x (con respecto a la topología) $[x_n \rightarrow x]$ si: $\forall U$ abierto con $x \in U$ existe N tal que $n \geq N$ implica $x_n \in U$.

Nota. Si \mathcal{B} base para topología en X , $x_n \rightarrow x$ equivale a: $\forall B \in \mathcal{B}$ con $x \in B$, $\exists N$ tal que $n \geq N$ se tiene $x_n \in B$.

Ejemplo. (X, d) espacio métrico. $x_n \rightarrow x$ (topología métrica) $\longleftrightarrow x_n \rightarrow x$ (análisis real): $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ tal que $n \geq N \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$ ($x_n \in B_{\varepsilon}(x)$).

Ejemplo. X con la topología indiscreta ($\tau = \{\emptyset, X\}$). Entonces, para cualquier sucesión $(x_n)_n$, para cualquier $x \in X$, $x_n \rightarrow x$ (solo se debe verificar $U = X$).

Ejemplo. X con la topología discreta, entonces $(x_n \rightarrow x) \longleftrightarrow x_n = x$ para todo $n \gg 0$ [Caso $U = \{x\}$].

Ejemplo. X infinito contable con topología cofinita [T_1 , no T_2], $X = \{a_1, a_2, \dots\}$. Si $x_n = a_n \Rightarrow x_n \rightarrow x$ para todo $x \in X$ [Si U abierto, $x \in U \nRightarrow U = X \setminus \{a_{i_1}, \dots, a_{i_k}\}$ ($i_1 < \dots < i_k$) $\Rightarrow n \geq N = i_k + 1$ implica $x_n \rightarrow x$].

Lema 1.35. Si T_2 , $(x_n)_n$ sucesión con $x_n \rightarrow x$, $x_n \rightarrow y$, entonces $x = y$.

Democión. Si $x \neq y$, dado que es T_2 , entonces existen U , U' abiertos disjuntos con $x \in U$, $y \in U'$. Si $x_n \rightarrow x$, entonces existe N_1 tal que $n \geq N_1$ implica $x_n \in U$. Si $x_n \rightarrow y$, entonces existe N_2 tal que $n \geq N_2$ implica $x_n \in U'$. Por lo tanto $n \geq N_1$ y $n \geq N_2$, entonces $x_n \in U \cap U'$. Contradicción! \square

Continuidad: $f : X \rightarrow Y$, X, Y espacios topológicos.

- [No Def]: Si $x_n \rightarrow x$ en $X \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x)$ en Y .

Definición 1.36 (continuidad). f es continua si $\forall U \subset Y$ abierto, se tiene $f^{-1}(U)$ es abierto en X .

Ejemplo. Si (X, d) , (Y, d') son espacios métricos, entonces $f : X \rightarrow Y$ continua (respecto a topologías métricas) $\iff f(\varepsilon - \delta)$ continua: $\forall x \in X$, $\forall \varepsilon > 0$; $\exists \delta > 0$ tal que $d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Observación. $d(x, y) < \delta$ es lo mismo que pedir $y \in B_\delta(x)$. Similarmente $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$ es lo mismo que $f(y) \in B_\varepsilon(f(x))$, $y \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$.

Lema 1.37. $X \xrightarrow{f} Y$, \mathcal{B}' base de Y , \mathcal{B} base de X . Entonces

$$\begin{aligned} f \text{ continua} &\Leftrightarrow [\text{Si } B' \in \mathcal{B}' \Rightarrow f^{-1}(B') \text{ es abierto}] \\ &\Leftrightarrow \text{Si } B' \in \mathcal{B}', \forall y \in f^{-1}(B'), \text{ existe } B \in \mathcal{B} \text{ con } y \in B \subset f^{-1}(B'). \end{aligned}$$

Lema 1.38 (continuidad secuencial). Si $f : X \rightarrow Y$ continua (hay top. dadas). Entonces, si $x_n \rightarrow x$ en $X \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x)$ en Y .

Democión. Suponer $x_n \rightarrow x$ en X . Queremos que $f(x_n) \rightarrow f(x)$ en Y . Tomar $U \subset Y$ abierto con $f(x) \in U$. Luego, f continua implica que $f^{-1}(U)$ abierto con $x \in f^{-1}(U)$. Si $x_n \rightarrow x$, entonces existe N tal que $n \geq N$ implica $x_n \in f^{-1}(U)$. Entonces, existe N tal que $n \geq N$ implica $f(x_n) \in U$. Por lo tanto, $f(x_n) \rightarrow f(x)$. \square

Clase 8

22 de Agosto

1.7 Continuidad, homeomorfismos (18)

1.7.1 Observaciones clase pasada

Observación.

- $f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in I} f^{-1}(A_\alpha);$

$$\bullet \quad f^{-1} \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}(A_\alpha).$$

Estas identidades no son necesariamente ciertas si se ocupa f en vez de f^{-1} .

Observación (Tarea 2). Continuidad secuencial $\not\Rightarrow$ Continuidad.

1.7.2 Clase 8

Lema 1.39. $f : X \rightarrow Y$, X , Y espacios topológicos.

$$f \text{ continua} \Leftrightarrow \forall C \subset Y \text{ cerrado, se tiene } f^{-1}(C) \text{ cerrado en } X$$

Demuestra \Rightarrow Suponer que f continua. Tomamos $C \subset Y$ cerrado [queremos $X \setminus f^{-1}(C)$ abierto]. Notar que

$$\begin{aligned} X \setminus f^{-1}(C) &= \{x \in X : x \notin f^{-1}(C)\} = \{x \in X : f(x) \in Y \setminus C\} \\ &= \underbrace{f^{-1}(Y \setminus C)}_{\substack{\text{abierto en } X \\ \text{abierto en } X \text{ pq } f \text{ continua}}} . \end{aligned}$$

\Leftarrow Análogo. \square

Ejemplo. Si $f : X \rightarrow Y$, X , Y espacios topológicos

1. Si Y con topología indiscreta ($\{\emptyset, Y\}$) $\Rightarrow f$ automáticamente continua. Notar que $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $f^{-1}(Y) = X$.
2. Si X tiene topología discreta (2^X) $\Rightarrow f$ continua. Notar que $f^{-1}(U)$ es abierto para todo subconjunto $U \subset Y$.
3. Si $A \subset X$ y f continua. Entonces $f|_A : A \rightarrow Y$ también es continua [A co top. inducida]. Notar que $U \subset Y$ abierto, entonces

$$\begin{aligned} (f|_A)^{-1}(U) &= \{x \in A \mid f|_A(x) = f(x) \in U\} \\ &= A \cap \underbrace{f^{-1}(U)}_{\substack{\text{abierto en } X \\ \text{abierto en } A}} \end{aligned}$$

4. Si X_1, X_2 espacios topológicos, entonces $\pi_1 : X_1 \times X_2 \rightarrow X_1$ es continua. Notar que si $U \subset X_1$ abierto, entonces $\pi_1^{-1}(U) = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in U\} = U \times X_2$ abierto en $X_1 \times X_2$.

Propiedades. X, Y, Z espacios topológicos

1. Fijar $y_0 \in Y$. $f : X \rightarrow Y$, $f(x) = y_0 \forall x$, es continua. Notar que $U \subset Y$ abierto, entonces

$$f^{-1}(U) = \begin{cases} X & \text{si } y_0 \in U \\ \emptyset & \text{si } y_0 \notin U \end{cases}$$

2. Si $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ continuas, entonces $g \circ f : X \rightarrow Z$ continuas.

Notar que $V \subset Z$ abierto, entonces $(g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(\underbrace{g^{-1}(V)}_{\substack{\text{abierto en } Y \\ \text{abierto en } X}})$

3. Si $f : X \rightarrow Y$ continua y $f(X) \subset Z \subset Y$, entonces $f : X \rightarrow Z$ continua.

Notar que $U \subset Z$ abierto en Z , entonces $U = Z \cap V$, $V \subset Y$ abierto. Dado que $f(X) \subset Z$, tenemos que $f^{-1}(U) = f^{-1}(V)$ abierto en X [$f : X \rightarrow Y$ continua]. Luego, $f^{-1}(U)$ abierto en X .

4. (Continuidad es propiedad local): Si $f : X \rightarrow Y$, $(B_\alpha)_{\alpha \in I}$ abiertos en X tal que $\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \stackrel{(*)}{=} X$. Entonces

$$f \text{ continua} \Leftrightarrow f|_{B_\alpha} \rightarrow Y \text{ es continua para todo } \alpha$$

\Leftarrow Tomamos $U \subset Y$ abierto (queremos $f^{-1}(U)$ abierto en X). Usar $f^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in I} (f|_{B_\alpha})^{-1}(U)$. Vamos a demostrar esta igualdad:

$\boxed{\subset}$ $x \in f^{-1}(U)$ y $x \in B_\alpha$, entonces $x \in (f|_{B_\alpha})^{-1}(U)$.

$\boxed{\supset}$ Hacer!

Luego, tenemos que $(f|_{B_\alpha})^{-1}(U)$ es abierto en B_α y que B_α es abierto, entonces $(f|_{B_\alpha})^{-1}(U)$ abierto en $X \forall \alpha$. Por (*), tenemos que $f^{-1}(U)$ es abierto en X .

Nota. Si se reemplaza " B_α abiertos" por " B_α cerrados", 4. igual se cumple + I finito (cjto. de indices de la unión) [Lema del pegado en Munkres]

Definición 1.40 (homeomorfismo). X , Y espacios topológicos. $f : X \rightarrow Y$ es homeomorfismo si

1. f es continua;
2. f es biyectiva (existe $f^{-1} : Y \rightarrow X$);
3. f^{-1} es continua.

Observación. Propiedades topológicas (como T_1 , Hausdorff, etc...) son invariantes por homeomorfismos.

Clase 9

25 de Agosto

1.8 Homemomorfismos, Productos infinitos (18, 19)

Ejemplo.

1. $f : (-1, 1) \rightarrow (-\infty, \infty)$, $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ es homeomorfismo. La inversa es $g(y) = \frac{2y}{1+(1+4y^2)^{1/2}}$. Notar que f y g son $\varepsilon - \delta$ continuas (i.e. con topologías métricas). Observamos que (X, d) espacio métrico, $Y \subset X$ subconjunto, entonces la topología inducida en Y es igual a la topología métrica dada por $d|_Y$.

2. $id : (\mathbb{R}, \tau_{\text{discr}}) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_{\text{std}})$ continuo. $(id)^{-1} = id : (\mathbb{R}, \tau_{\text{std}}) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_{\text{discr}})$ no es continua. Si tomamos $U = \{0\}$, es abierto en τ_{discr} , pero no abierto en τ_{std} . Moral: f continua y biyectiva $\not\Rightarrow f^{-1}$ continua.

Observación. $id : (X, \tau) \rightarrow (X, \tau')$ es continua si y sólo si $\tau' \subset \tau$ (τ más fina que τ').

3. $X = [0, 2\pi]$, $Y = \mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, $f : X \rightarrow Y$, $t \mapsto (\cos t, \sin t)$. f es continua (es $\varepsilon - \delta$ continua) y biyectiva. Si f^{-1} no es continua, queremos $U \subset X$ tal que $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$ no es abierto en Y . Notar que un intervalo de la forma $U = [0, t)$ es abierto en X , pero $f(U)$ no es abierto en Y (el punto $(1, 0) \in f(U)$ no está en el interior). Moral: "despegar/cortar" no es operación continua.

1.8.1 Productos cartesianos arbitrarios

Recuerdo. X, Y espacios topológicos, en $X \times Y$ tenemos topología producto con base $\mathcal{B} = \{U \times U' \mid U \subset X, U' \subset Y \text{ abiertos}\}$. En general, si X_1, \dots, X_n (finitos) espacios topológicos, la topología producto en $X_1 \times \dots \times X_n$ tiene base

$$\mathcal{B} = \{U_1 \times \dots \times U_n \mid U_i \subset X_i \text{ abierto para cada } i\}.$$

Lema 1.41. Topología producto en $X_1 \times \dots \times X_n$ es la menor topología tal que $\pi_i : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow X_i$ tal que $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$, es continua para cada i .
 (Menor: si τ' topología en $X_1 \times \dots \times X_n$ tal que π_i continua $\forall i$, entonces $\tau' \supseteq \tau$ = topología producto)

Demuestra. Si τ' topología en \underline{X} tal que $\pi_i : \underline{X} \rightarrow X_i$ continuas, entonces $\forall 1 \leq i \leq n$, si $U_i \subset X_i$ abierto. Luego $\pi_i^{-1}(U_i)$ abierto en τ' , donde $\pi_i^{-1} = X_1 \times \dots \times X_{i-1} \times U_i \times X_{i+1} \times \dots \times X_n$. Si queremos $\tau \subset \tau'$, basta que $\mathcal{B} \subset \tau'$. Si $U_1 \subset X_1, \dots, U_n \subset X_n$ son abiertos, entonces $\mathcal{B} \ni U_1 \times \dots \times U_n = \pi_1^{-1}(U_1) \cap \pi_2^{-1}(U_2) \cap \dots \cap \pi_n^{-1}(U_n)$ es abierto en τ' (usamos que n es finito!!!). \square

Definición 1.42 (producto). Una familia indexada de conjuntos es $\{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$. Si $\underline{X} \bigcup_{\alpha \in J} X_\alpha$, el producto cartesiano es $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ es el conjunto de funciones $x : J \rightarrow \underline{X}$ tal que para $\alpha \in J$, $x_\alpha := x(\alpha) \in X_\alpha$ [x_α es la α -coordenada de x]

Ejemplo.

- Si $J = \{1, \dots, n\} \Rightarrow \prod_{\alpha \in J} X_\alpha = X_1 \times \dots \times X_n$;
- Si $X_\alpha = X$ para todo $\alpha \Rightarrow \prod_{\alpha \in J} X_\alpha = X^J = \{\text{funciones } f : J \rightarrow X\}$;
- Si $J = \mathbb{Z}_{>0}$, $X_\alpha = X \forall \alpha \Rightarrow \prod_{\alpha \in J} X_\alpha = \{\text{sucesiones } x = (x_1, x_2, \dots) \text{ en } X\}$

1.8.2 Topologías en $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$

Definición 1.43 (Topología de cajas). Topología con base

$$\mathcal{B} = \left\{ \prod_{\alpha \in J} U_\alpha \mid U_\alpha \subset X_\alpha \text{ es abierto para cada } \alpha \right\}$$

Definición 1.44 (Topología producto). Es la menor topología tal que las proyecciones $\pi_\beta : \prod_{\alpha \in J} X_\alpha \rightarrow X_\beta$, $x = (x_\alpha)_{\alpha \in J} \mapsto x_\beta$ sean continuas para cada $\beta \in J$.

Observación. Si \underline{X} conjunto, $f_\alpha : \underline{X} \rightarrow X_\alpha$ espacios topológicos, entonces existe una menor topología tal que f_α continua para todo α . Es la menor topología tal que $f_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ sea abierta para cada $U_\alpha \subset X_\alpha$ abierto, para cada $\alpha \in J$ (existe por tarea 1).

Observación. Para $\overline{X} = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ una base es $\mathcal{B}' = \{\prod_{\alpha \in J} U_\alpha \mid U_\alpha \subset X_\alpha \text{ abierto, y } U_\alpha = X_\alpha \text{ salvo en un conjunto finito de índices } \alpha\}$.

Corolario 1.45. $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$, por lo tanto $\tau_{\text{prod}} \subset \tau_{\text{cajas}}$.

Corolario 1.46. Para topología de cajas, proyecciones π_α también son continuas.

Ejemplo (Próxima clase).

1. $\underline{X} = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}_{>0}}$ y $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{Z}_{>0}}$ tal que $t \mapsto (t, t, t, t, \dots)$. Se puede ver que f continua para la topología producto, pero no es continua para la topología de cajas.
2. $\underline{X} = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}_{>0}}$. En \underline{X} con topología de cajas, es la topología discreta. \underline{X} es homeomorfo al conjunto de Cantor con la topología producto.

Clase 10

27 de Agosto

1.9 Topología producto, Topología cuociente (19, 22)

Observación.

1. $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$;
2. Si J es finito, topología de cajas = topología producto;
3. Si J es infinito, en general esto no es cierto.

Ejemplo. Si $J = \mathbb{Z}^+$, $X_n = \mathbb{R} \forall n$, $Z = \prod_{n \geq 1} \mathbb{R} = \mathbb{R}^\omega$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^\omega$, $t \mapsto (t, t, t, \dots)$.

Propiedad. Si $Z = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$, $f : Y \rightarrow Z \Rightarrow f$ está dada por $f(y) = (f_\alpha(y))_{\alpha \in J}$ con $f_\alpha : Y \rightarrow X_\alpha$. Con la topología producto, f es continua \Leftrightarrow

cada f_α es continua.

Antes de probar la propiedad, veremos que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^\omega$ no es continua para la topología de cajas: Tomar $B = \prod_{n \geq 1} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ es abierto para topología de cajas y $(0, 0, 0, \dots) = f(0) \in B$. Luego, $f^{-1}(B) = \{0\}$ no es abierto en \mathbb{R} . Por lo tanto, f no es continua.

Demuestra (Propiedad). \Rightarrow Notar que $f_\alpha = \pi_\alpha \circ f$ (con π_α la proyección: $Z \rightarrow X_\alpha$, $(x_\beta)_\beta \mapsto x_\alpha$) es composición de funciones continuas. Por lo tanto, es continua.

\Leftarrow Tomar $B = \prod_{\alpha \in J} U_\alpha$ en base de topología producto. Luego, notamos

$$\begin{aligned} \prod_{\alpha \in J} U_\alpha &= U_{i_1} \times \cdots \times U_{i_n} \times \prod_{\alpha \in J \setminus \{i_1, \dots, i_n\}} X_\alpha \subset Z \\ &= \bigcap_{j=1}^n \pi_{ij}^{-1}(U_{ij}) \end{aligned}$$

Por lo tanto, suficiente probar que $\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ abierto para cada α , $\forall U_\alpha \subset X_\alpha$. Luego, $f^{-1}(\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)) = f_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ es abierto porque f_α continua. \square

Ejemplo. $Z = \{0, 1\}^\omega = \{\text{sucesiones } (x_1, x_2, \dots) \text{ con } x_i \in \{0, 1\}\}$.

Lema 1.47. Si $Z = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ donde cada X_α tiene topología discreta. Entonces, topología de cajas en Z es la topología discreta.

Demuestra. Queremos $\{(x_\alpha)_\alpha\}$ abierto en Z . Notar que $\{(x_\alpha)_\alpha\} = \prod_\alpha \{x_\alpha\}$ es abierto en Z con topología de cajas. \square

Con topología producto, Z es homeomorfo al conjunto de Cantor.

Recuerdo. En $[0, 1]$, $E_n = \cup_{i_1 \dots i_n} B_{i_1 \dots i_n}$ con $i_n \in \{0, 1\}$ tal que, inductivamente, si $B_{i_1 \dots i_n} = [a, b]$, entonces

$$B_{i_1 \dots i_n 0} = \left[a, a + \frac{1}{3^{n+1}} \right], \quad B_{i_1 \dots i_n 1} = \left[b - \frac{1}{3^{n+1}}, b \right]$$

Luego, $\mathcal{C} = \bigcap_{n \geq 1} E_n$ (Cantor) (cerrado en \mathbb{R} , de interior vacío). Construir $f : \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^+} \rightarrow \mathcal{C}$, $(x_n)_{n \geq 1} \mapsto \sum_{n \geq 1} \frac{2x_n}{3^n}$, esto es biyección.

Veamos que f es continua: Notar que una base del \mathcal{C} es el conjunto

$$\mathcal{B} = \bigcup_{n \geq 1} \{B_{i_1 \dots i_n} \cap \mathcal{C} \mid i_1, \dots, i_n \in \{0, 1\}\}$$

Luego,

$$\begin{aligned} f^{-1}(B_{i_1 \dots i_n} \cap \mathcal{C}) &= \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots) \mid x_1 = i_1, x_2 = i_2, \dots, x_n = i_n\} \\ &= \underbrace{\{i_1\} \times \{i_2\} \times \dots \times \{i_n\} \times \{0, 1\}^{\mathbb{Z}_{>n}}}_{\text{abierto para topología producto}} \end{aligned}$$

Propiedades. $Z = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ espacio topológico.

1. Si cada X_α es Hausdorff $\Rightarrow Z$ Hausdorff (Z con topología producto ó con topología de cajas)
2. Si $A_\alpha \subset X_\alpha$, donde $A = \prod_{\alpha \in J} A_\alpha \subset \prod_{\alpha \in J} X_\alpha = Z$. La topología producto en A es la inducida por la producto en Z . Por otro lado, la topología de cajas de A es la inducida por la topología de cajas de Z (demostrar!).

Clase 11

29 de Agosto

Contexto. $p : X \rightarrow A$ sobreyectiva, X espacio topológico. Uno quiere dar una topología "natural" a A tal que p sea continua.

Ejemplo (estándar). Si \sim relación de equivalencia en X , con $X \setminus \sim = \text{conjunto de clases de equivalencia}$

$$\rho : X \rightarrow X \setminus \sim, \quad x \mapsto [x]_\sim$$

Ejemplo (1.). Colapsar subespacios. $Y \subset X$. Luego, \sim en X tal que todos los puntos de Y son equivalentes (y nada más). Entonces, $X \setminus Y = X \setminus \sim$.

Ejemplo (1.1). $X = [0, 1]$, $Y = \{0, 1\}$

Ejemplo (1.2). $X = D^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1\}$, $Y = \mathbb{S}^1 = \{x \mid |x| = 1\}$.

Ejemplo (2.). Acciones de grupo. Γ grupo, X espacio. Acción es $\rho : \Gamma \times X \rightarrow X$ (notación $\rho(g, x) = g \cdot x$) tal que

1. $\rho(1_\Gamma, x) = x \quad \forall x \in X;$
2. $\rho(gh, x) = \rho(g, \rho(h, x)).$

Observar. ρ es mismo dato de un homomorfismo

$$\Gamma \rightarrow \text{Bi}(X), \quad g \mapsto (x \mapsto \rho(g, x))$$

Ejemplo. $\mathbb{Z}^2 \curvearrowright \mathbb{R}^2$, $(m, n) \cdot (x, y) = (x + m, y + n)$.

Notar que si tenemos $\Gamma \curvearrowright X$ acción, nos da \sim_Γ tal que $x \sim_\Gamma y$ si y sólo si $y = g \cdot x$ para algún $g \in \Gamma$ (x, y en la misma órbita). Además, $X \setminus \Gamma := X \setminus \sim_\Gamma$ espacio de órbitas, o cociente de X por la acción de Γ .

Contexto. $p : X \rightarrow A$ sobreyectiva, X espacio topológico.

Definición 1.48 (topología cociente en A).

$$\tau = \{U \subset A \mid p^{-1}(U) \text{ es abierto en } X\}$$

Esto es topología: Viene de que

$$\begin{aligned} p^{-1}\left(\bigcup_{\alpha} U_{\alpha}\right) &= \bigcup_{\alpha} p^{-1}(U_{\alpha}) \\ p^{-1}\left(\bigcap_{\alpha} U_{\alpha}\right) &= \bigcap_{\alpha} p^{-1}(U_{\alpha}). \end{aligned}$$

Observar.

1. p es continua si A tiene topología cociente;
2. Se cumple algo más fuerte

$$U \subset A \text{ abierto} \Leftrightarrow p^{-1}(U) \subset X \text{ abierto} \quad (*)$$

[top. cociente es topología más grande tal que p es continua]

Definición 1.49 (mapa cociente). Si X, A son espacios topológicos $p : X \rightarrow A$ es mapa cociente si es sbore y se cumple (*).

Observar. $X \xrightarrow{p} A$ con topología cociente

1. Si p es continua respecto a τ' otra topología en A , entonces $\tau' \subset \tau_{\text{coc}}$;
2. p es mapa cociente con respecto a τ_{coc} . Si p es mapa cociente con respecto a topología τ en A , entonces $\tau = \tau_{\text{coc}}$.

[$X \xrightarrow{p}$ mapa cociente $\equiv X \xrightarrow{p} A$ sobre y A tiene top. cociente.]

Propiedad 1.50. Suponer que $p : X \rightarrow A$ mapa cociente, Y espacio topológico, $f : A \rightarrow Y$. Sea $g = f \circ p : X \rightarrow Y$. Luego,

$$f \text{ es continua} \Leftrightarrow g \text{ es continua}$$

Demostración. \square Si $U \subset Y$ abierto (queremos $f^{-1}(U) \subset A$ abierto). Luego, g continua implica que $g^{-1}(U) \subset X$ abierto. Notar que $g^{-1}(U) = (f \circ g)^{-1}(U) = p^{-1}(f^{-1}(U)) \subset X$ abierto. Dado que p es mapa cociente, entonces $f^{-1}(U) \subset A$ abierto. \square

Ejemplo. $g : [0, 2\pi] = X \rightarrow \mathbb{S}^1 = \{|z| = 1\}, \quad t \mapsto (\cos t, \sin t)$.

- $A = [0, 2\pi] \setminus \{0, 2\pi\}$;
- $p : X \rightarrow A$.

(g cumple $(*)$) \Rightarrow hay una función $f : A \rightarrow \mathbb{S}^1$ tal que

$$\begin{array}{ccc} [0, 2\pi] & & \\ p \downarrow & \searrow g \text{ (continua sobre } y) & \\ A & \xrightarrow{\text{biyección}} & \mathbb{S}^1 \end{array}$$

Propiedad anterior $\Rightarrow f$ continua (y biyectiva)

Clave. f^{-1} es continua! $\rightsquigarrow [U \subset A \text{ abierto} \Rightarrow f(U) \text{ abierto en } \mathbb{S}^1]$

Democión. Suponer U que contiene a $p(0) = p(2\pi) \Rightarrow p^{-1}(U)$ abierto que contiene a 0 y a 2π . Entonces, U contiene a $[0, \varepsilon) \cup (2\pi - \varepsilon, 2\pi]$ para algún ε chiquito. Luego $g(U)$ contiene vecindad de $g(p(0))$. \square

Clase 12

1 de Septiembre

1.10 Grupos Topológicos (pp 145, Lee pp 77)

Propiedad 1.51 (clase pasada). Si $f : X \rightarrow Y$ continua tal que $p(x) = p(y) \Rightarrow f(x) = f(y)$ (con p mapa cociente). Además, junto con el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ p \downarrow & \searrow f & \\ A & \dashrightarrow_g & Y \end{array}$$

afirmamos que $\exists! g : A \rightarrow Y$ continua tal que $g \circ p = f$

Ejemplo. Cociente de Hausdorff no tiene que ser Hausdorff.

$$X = \mathbb{R}, A = \{0, 1\}, p : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}, p(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0 \\ 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Topología en $A : p^{-1}(\emptyset) = \emptyset, p^{-1}(\{0, 1\}) = \mathbb{R}, p^{-1}(\{0\}) = (-\infty, 0), p^{-1}(\{1\}) = [0, \infty)$ (notar que este último no es abierto). Luego, $\tau_{\text{coc}} = \{\emptyset, \{0, 1\}, \{0\}\} \rightsquigarrow$ No es Hausdorff (ni T1).

Definición 1.52 (grupo topológico). Un grupo topológico es un grupo Γ con una topología tal que $v : \Gamma \rightarrow \Gamma$ y $* : \Gamma \times \Gamma \rightarrow \Gamma$ sean continuas.

Observar. En la definición, el dominio de $*$, $\Gamma \times \Gamma$ viene con la topología producto respecto a la topología en Γ .

Ejemplo.

- $(\mathbb{R}, +)$ es un grupo topológico con la topología estándar ($v(x) = -x, *(x, y) = x + y$);

- $(\mathbb{R}^n, +)$ es un grupo topológico con la topología estándar (cualquier isomorfismo \mathbb{R} -lineal es homeomorfismo);
- Γ cualquiera con la topología discreta. Decimos que Γ es grupo discreto;
- Grupo lineal: $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in \underbrace{\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})}_{\cong \mathbb{R}^{n^2}} \mid \det A \neq 0\}$;
- \mathbb{R}^{n^2} nos da una topología de subespacio desde \mathbb{R}^{n^2} . Si usamos el isomorfismo $[a_{i,j}]_{i,j} \mapsto (a_{i,j})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n^2}$. ¿Cómo se ven v y $*$? $\rightsquigarrow v : A \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj}(A)$ (matriz con cada entrada un polinomio en coef de A). Por lo tanto, $*$ es función racional y por ende, continua. Luego, $* : (A, B) \rightarrow AB$ (cada entrada es un polinomio en las entradas de A y B);
- $SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\} < GL_n(\mathbb{R})$.

Propiedad 1.53. Γ grupo topológico y $H < \Gamma$ subgrupo. Entonces, H es grupo topológico con topología inducida.

Notar que, si Γ cualquiera con topología profinita (topología con base $\mathcal{B} = \{a\Gamma' \mid \Gamma' \triangleleft \Gamma$ subgrupo normal de índice finito, $a \in \Gamma\}$).

- v es continua (basta $v^{-1}(a\Gamma')$ abierto): $v^{-1}(a\Gamma') = \{x^{-1} \mid x \in a\Gamma'\} = \{(ag)^{-1} \mid g \in \Gamma'\} = \{g^{-1}a^{-1} \mid g \in \Gamma'\} = \Gamma'a^{-1} \stackrel{\Gamma' \triangleleft}{=} a^{-1}\Gamma' \in \mathcal{B}$.
- Si $a \in \Gamma$, $L_a : \Gamma \rightarrow \Gamma$, $g \mapsto ag$ es continua: si $a'\Gamma'$ elemento arbitrario de \mathcal{B} , entonces $(L_a)^{-1}(a'\Gamma') = (L_{a^{-1}})(a'\Gamma') = a^{-1}a'\Gamma' \ni \mathcal{B}$ (#).

Observar. (#) es más débil que probar que $* : \Gamma \times \Gamma \rightarrow \Gamma$, $(g, h) \mapsto gh$ es continua.

Propiedad 1.54. Γ, Γ' grupos topológicos.

1. $\Gamma \times \Gamma'$ es grupo topológico von la topología producto.

Ejemplo (1.1). $\mathbb{S}^{-1} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ es un grupo topológico con producto usual y topología inducida;

Ejemplo (1.2). $\Pi^n = \underbrace{\mathbb{S}^{-1} \times \cdots \times \mathbb{S}^{-1}}_{n-\text{veces}}$ n -toro es grupo topológico.

2. $H \triangleleft \Gamma$ subgrupo normal. Entonces, $\overline{\Gamma} := \Gamma/H$ grupo cociente y $p : \Gamma \rightarrow \overline{\Gamma}$ homomorfismo cociente.

- (a) p es abierta ($U \subset \Gamma \Rightarrow p(U)$ es abierto en $\overline{\Gamma}$ con la topología cociente);
- (b) $\overline{\Gamma}$ es grupo topológico;
- (c) $\overline{\Gamma}$ es Hausdorff ssi $H < \Gamma$ cerrado.

Ejemplo (2.1). \mathbb{R}/\mathbb{Z} es Hausdorff con la topología cociente (\mathbb{R} con la topología estándar).

Clase 13

3 de Septiembre

1.11 Acciones Topológicas (Lee p.77)

Ejemplo (última propiedad clase pasada, punto 2). Sea $\Gamma = \mathbb{R}$, $H = \mathbb{Q} \leadsto \bar{\Gamma} = \mathbb{R}/\mathbb{Q}$. Como \mathbb{Q} no es cerrado en \mathbb{R} , entonces \mathbb{R}/\mathbb{Q} no es Hausdorff. Además, veremos que la topología cociente en \mathbb{R}/\mathbb{Q} es la indiscreta. Notar que $U \subset \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ es abierto no vacío $\Leftrightarrow p^{-1}(U) \subset \mathbb{R}$ abierto no vacío. Tomar $U \subset \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ no vacío, $\exists[x] = p(x) \in U (x \in \mathbb{R}) \Rightarrow p^{-1}(U)$ contiene a x, y ; y de hecho contiene a x tal que $\forall q \in \mathbb{Q} (p(x+q) = p(x))$. Por lo tanto, $p^{-1}(U)$ abierto (en \mathbb{R}) y $x + \mathbb{Q} \subset p^{-1}(U)$ (denso). $p^{-1}(U)$ es invariante por trasladar por \mathbb{Q} : si $y \in p^{-1}(U)$, $q \in \mathbb{Q} \Rightarrow y + q \in p^{-1}(U)$. Como $x \in p^{-1}(U)$ abierto, entonces $\exists \varepsilon > 0$ tal que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset p^{-1}(U)$. Luego, $(x - \varepsilon + q, x + \varepsilon + q) \subset p^{-1}(U) \forall q \in \mathbb{Q}$. En conclusión, $p^{-1}(U) = \mathbb{R}$ y $U = \mathbb{R}/\mathbb{Q}$, \therefore la topología en \mathbb{R}/\mathbb{Q} es $\{\emptyset, \mathbb{R}/\mathbb{Q}\}$.

Ejemplo (Furstenberg). Se puede probar que existen infinitos primos de manera puramente topológica (usando topología profinita en \mathbb{Z}).

Demuestración. Base: $\mathcal{B} = \underbrace{\{a\mathbb{Z} + b\}}_{b\bar{\Gamma}'} \mid a \neq 0, b \in \mathbb{Z}\}$. Observar que, cada $a\mathbb{Z} + b$ es infinito. Esto implica que cada abierto con la topología profinita es o bien vacío, o infinito. En \mathbb{Z} , todo número no primo es o bien 1 o -1 , o $p \cdot a$ con p primo y $a \in \mathbb{Z}$. Entonces,

$$\mathbb{Z} = \{-1, 1\} \sqcup \bigcup_{p \text{ primo}} p\mathbb{Z} \quad (*)$$

Notar que cada $p\mathbb{Z}$ es cerrado:

$$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \bigcup_{1 \leq i \leq p-1} (p\mathbb{Z} + i)$$

Si hubiera finitos primos, entonces la unión de los $p\mathbb{Z}$ en (*) sería cerrado. Así, $\{-1, 1\} \subset \mathbb{Z}$ abierto, lo que es una contradicción! \square

Acciones topológicas

Recuerdo. $\Gamma \curvearrowright X : \Gamma \times X \rightarrow X$ tal que $(g, x) \mapsto g \cdot x$ y se cumple (i) $1 \cdot x = x$; (ii) $h \cdot (g \cdot x) = (hg) \cdot x$.

Definición 1.55 (acción continua). Una acción $\Gamma \curvearrowright X$ (Γ grupo topológico, gX espacio topológico) es continua si:

$$\begin{aligned} \Gamma \times X &\rightarrow X \\ (g, x) &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

es continuo.

Lema 1.56. Γ, X grupos topológicos y $\Gamma \curvearrowright X$ acción.

1. Si $\Gamma \curvearrowright X$ continua, entonces $L_g : X \rightarrow X$, con $x \mapsto g \cdot x$, es homeomorfismo para cada $g \in \Gamma$,
2. Si Γ es grupo discreto y cada L_g es homeomorfismo, entonces $\Gamma \curvearrowright X$ es continua.

Demostración.

1. Dado $g \in \Gamma$:

$$\begin{aligned} X \rightarrow \{g\} \times X &\leftrightarrow \Gamma \times X \rightarrow X \\ x \mapsto (g, x) &\mapsto (g, x) \mapsto g \cdot x. \end{aligned}$$

2. Tomar $U \subset X$ abierto. Notar que

$$\begin{aligned} p^{-1} &= \{(g, x) \mid g \cdot x \in U\} \\ &= \{(g, x) \mid L_g(x) \in U\} \\ &= \{(g, x) \mid x \in L_g^{-1}(U)\} \\ &= \{(g, x) \mid x \in L_g^{-1}(U)\} \\ &= \bigcup_{g \in \Gamma} \{g\} \times L_g^{-1}(U). \end{aligned}$$

Donde $\{g\}$ es abierto en Γ (topología discreta) y $L_g^{-1}(U)$ es abierto en X (L_g homeo). Así, la unión es un abierto en $\Gamma \times X$.

□

Ejemplo. $GL_n(\mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{R}^n$, $A \cdot v = A(v)$ (multiplicación usual). Esta acción es continua!

$$\begin{aligned} Mat_{n \times n}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \quad [(A, v) \mapsto A(v)] \\ \cup \\ GL_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (A, v) &\mapsto A(v). \end{aligned}$$

Clase 14

5 de Septiembre

1.12 Acciones topológicas/continuas (Lee p.77)

Recuerdo. $\Gamma \curvearrowright X$ acción $\sim \sim_\Gamma$ en X : $x \sim_\Gamma y$ si $p : X \rightarrow X/\Gamma := X/\sim_\Gamma$ espacio de órbitas (con top. cociente). $x \in \Gamma$, su órbita (denotada) $\Gamma \cdot x$ es $\{g \cdot x \mid g \in \Gamma\}$.

Ejemplo.

1. $\mathbb{R}^+ \curvearrowright \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $(t, x) \mapsto tx$ es continua! Luego, cociente $(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})/\mathbb{R}^+ \approx \mathbb{S}^{n-1} := \{z \in \mathbb{R}^n \mid |z| = 1\}$ n -esfera! (el \approx es de homeomorfo)

2. $\mathbb{R} \setminus \{0\} \curvearrowright \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $(t, x) \mapsto tx$. Luego, cociente es el espacio proyectivo $\mathbb{R}P^{n-1}$.

3. Γ grupo topológico arbitrario, $H < \Gamma$ subgrupo (no necesariamente normal). Entonces, hay dos acciones topológicas $H \curvearrowright \Gamma$

- i) $(h, g) \mapsto hg$.
- ii) $(h, g) \mapsto hgh^{-1}$.

Continuo porque $(g_1, g_2) \mapsto g_1g_2$ y $g \mapsto g^{-1}$ continuo en Γ . Estas acciones son distintas: (i) $H \cdot 1 = H$, (ii) $H \cdot 1 = \{1\}$.

Convención. Γ/H = espacio de órbitas de $H \curvearrowright \Gamma$, $h \cdot g = hg$.

3*. $(GL_n(\mathbb{R}) > SL_n(\mathbb{R}) >) SO(n) := \{A \in SL_n(\mathbb{R}) \mid A^t A = \mathbf{1}\}$ grupo ortogonal especial. Notar que $SL_2(\mathbb{R})/SO(2) \approx \mathbb{R}^2$ plano hiperbólico ($n \geq 3$: espacios simétricos de tipo no compacto).

Observación. $SO(n) < SL_n(\mathbb{R})$ es cerrado.

Criterio para X/Γ Hausdorff

Proposición 1.57. $\Gamma \curvearrowright X$ continua si

$$\Delta = \{(x, g \cdot x) \mid x \in X, g \in \Gamma\} \subset X \times X$$

es cerrado en $X \times X$, entonces X/Γ Hausdorff.

Ejemplo. Γ grupo topológico arbitrario, $H < \Gamma$ subgrupo (no necesariamente normal). Si $H \subset \Gamma$ es cerrado, entonces Γ/H es Hausdorff.

Demostración (ejemplo). Queremos

$$\Delta = \{(g, \underbrace{hg}_{g'}) \mid g \in \Gamma, h \in H\} \subset \Gamma \times \Gamma$$

Luego, $\Delta = \{(g, g') \mid g'g^{-1} \in H\}$. Si llamamos $f(g, g') = g'g^{-1}$, entonces $f : \Gamma \times \Gamma \rightarrow \Gamma$ continua. Luego

$$\Delta = \{(g, g') \mid f(g, g') \in H\} = f^{-1}(H)$$

Por lo tanto, Δ es cerrado si H es cerrado. Así, podemos aplicar la proposición. \square

Lema 1.58. $\Gamma \curvearrowright X$ acción continua ($p : X \rightarrow X/\Gamma$). Entonces, p es función abierta; i.e. si $U \subset X$ abierto $\Rightarrow p(U)$ abierto en X/Γ .

Demostración (lema). $U \subset X$ abierto (queremos $p(U) \subset X/\Gamma$ abierto).

Luego, $p(U) \subset X/\Gamma$ abierto $\leftrightarrow p^{-1}(p(U)) \subset X$ abierto.

$$\begin{aligned} p^{-1}(p(U)) &= \{x \in X \mid p(x) \in p(U)\} \\ &= \{x \in X \mid g \cdot x \in U \text{ para algún } g \in \Gamma\} \\ &= \{x \in X \mid x \in g^{-1} \cdot U \text{ para } g \in \Gamma\}, \quad (g \cdot U = \{g \cdot y \mid y \in U\}) \\ &= \underbrace{\bigcup_{\substack{g \in \Gamma \\ \text{abiertos.}}} g^{-1} \cdot U}_{\text{abierto!}} := \Gamma \cdot U. \end{aligned}$$

□

Demuestra (proposición). Queremos $p(x) \neq p(y)$ en $X/\Gamma \Rightarrow \exists \hat{U}, \hat{U}' \subset X/\Gamma$ abiertos disjuntos tal que $p(x) \in \hat{U}$, $p(y) \in \hat{U}'$. En efecto, asumamos que $\Delta \subset X \times X$ cerrado. Notar que $p(x) \neq p(y) \Rightarrow (x, y) \in X \times X \setminus \Delta$ abierto! Por la definición de topología producto, $\exists U, U' \subset X$ abiertos tal que $(x, y) \in U \times U' \times X \times X \setminus \Delta$ (donde $U \times U'$ es un elemento de la base). Por el lema, $p(x) \in p(U) := \hat{U}$, $p(y) \in p(U') := \hat{U}'$, abiertos en X/Γ . Solo falta verificar que $p(U), p(U')$ disjuntos: (usar que $U \times U' \cap \Delta = \emptyset$) Si $z \in p(U) \cap p(U') \Rightarrow z = p(u) = p(u')$, $u \in U$, $u' \in U' \Rightarrow u' = g \cdot u$, $g \in \Gamma \Rightarrow (u, u') \in U \times U' \cap \Delta$, lo que es una contradicción! □

Clase 15

8 de Septiembre

1.13 Conexidad (23, 24)

Recuerdo (TVI). $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Si $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, entonces $f(c) = 0$ para algún $c \in [a, b]$.

Conexidad. Es una condición topológica en X tal que $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ cumple versión esperable del TVI!

Definición 1.59 (separación y conexidad). X espacio topológico.

- i. Una separación de X es $X = U \cup V$, con $U, V \subset X$ abiertos disjuntos, no vacíos;
- ii. X es conexo si no tiene separación. Equivalentemente, $X = U \cup V$, $U, V \subset X$ abiertos disjuntos, entonces $\emptyset \in \{U, V\}$.

Ejemplo (i.). $X = [0, 1] \cup [2, 3] \cup \{5\} \rightsquigarrow U = [0, 1]$, $V = [2, 3] \cup \{5\}$ es separación.

Ejemplo (ii.). $[0, 1]$ es conexo!!! (Magia del axioma del supremo)

Observación. $X = U \cup V$ separación $\longleftrightarrow U \neq \emptyset$ clopen (abierto + cerrado) y $X \setminus U \neq \emptyset$.

Lema 1.60. X espacio topológico. X conexo $\iff \forall f : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) > 0, f(y) < 0$ para algún $x, y \in X \Rightarrow f(z) = 0$ para algún $z \in X$.

Propiedad ganadora. Si $f : X \rightarrow Y$ continua. X conexo $\Rightarrow f(X)$ conexo (respecto a la topología inducida).

Corolario 1.61. Si $p : X \rightarrow A$ mapa cociente, X conexo $\Rightarrow A$ conexo.

Corolario 1.62. X, Y espacios homeomorfos. X conexo $\iff Y$ conexo.

Demarcación (propiedad ganadora). Queremos $f(X)$ conexo (no hay separación). Suponer que $f(X) = U \cup V$ separación ($U, V \subset f(X)$ abiertos, disjuntos y no vacíos). Luego, $X = f^{-1}(f(X)) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$ separación. Pero esto es una contradicción, pues X es conexo! \square

Nota. Se utilizó que la preimagen de abierto es abierto y que siguen siendo disjuntos los abiertos bajo la preimagen.

Lema 1.63. $Y \subset X$ espacios topológicos. Y conexo $\iff \forall A, B \subset X$ abiertos tales que:

- i. $Y \subset A \cup B$;
 - ii. $Y \cap A \cap B = \emptyset$;
- $\Rightarrow Y \subset A$ ó $Y \subset B$.

Criterio 1.64 (Conexidad). $(Y_\alpha)_{\alpha \in J}$ familia de subespacios de X tal que:

1. Cada Y_α conexo;
 2. $\bigcap_{\alpha \in J} Y_\alpha \neq \emptyset$;
- $\Rightarrow Z = \bigcup_{\alpha \in J} Y_\alpha$ conexo.

Observación. $\bigcap_{\alpha \in J} Y_\alpha$ no necesariamente conexa si cada Y_α conexo.

Ejemplo.

1. $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$ conexo. En efecto, si $v \in \mathbb{S}^{n-1} \rightsquigarrow Y_v = \{tv + (1-t)(-v) \mid t \in [0, 1]\} \approx [0, 1]$. Por lo tanto, cada Y_v es conexo. Luego, $0 \in Y_v, \forall v \in \mathbb{S}^{n-1} \Rightarrow B = \bigcup_{v \in \mathbb{S}^{n-1}} Y_v$ conexo;
2. \mathbb{R} es conexo. $\mathbb{R} = \bigcup_{\varepsilon > 0} [-\varepsilon, \varepsilon], 0 \in [-\varepsilon, \varepsilon] \quad \forall \varepsilon < 0$;
3. \mathbb{S}^{n-1} conexo si $n \geq 2$ ($\mathbb{S}^0 = \{-1, 1\}$ no conexo (disconexo)). Para $n = 2$, recordar que $[0, 1]/\sim \rightsquigarrow \mathbb{S}^1$ homeomorfismo. Por lo tanto, \mathbb{S}^1 conexo. Para n arbitrario, sean $X = [0, 1]^n$, $Y = \partial X \rightsquigarrow X/Y \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^n$ homeomorfismo. Otra forma: sea $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ tal que $v \mapsto \frac{v}{|v|}$ continua y sobre. Luego, es suficiente probar que $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ conexo si $n \geq 2$.

Clase 16

10 de Septiembre

1.14 Arcocconexidad (23, 24)

Demostración (criterio conexidad clase pasada). Sean $A, B \subset X$ abiertos con $Z \subset A \cup B$. Queremos $Z \subset A$ o $Z \subset B$. Fijando $\alpha_0 \in J$, se tiene $X_{\alpha_0} \subset A \cup B$. Dado que X_{α_0} es conexo, podemos suponer que $X_{\alpha_0} \subset A$. Tomar $\alpha \in J$, $\alpha \neq \alpha_0$, queremos $X_\alpha \subset A$, y si no pasa, $X_\alpha \subset B$. En efecto, como X_α , $X_{\alpha_0} \subset Z$, $Z \cap A \cap B = \emptyset$, entonces $X_\alpha \cap X_{\alpha_0} = \emptyset$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $X_\alpha \subset A \quad \forall \alpha$. Luego, $Z \subset A$. \square

Lema 1.65. Si X, Y conexos, entonces $X \times Y$ conexo.

Observar. Si $X \times Y$ conexo, entonces $X = \prod_X (X \times Y)$ conexo.

Observar. Si X_α conexo, entonces $\prod_\alpha X_\alpha$ conexo con la topología producto (tarea 3).

Demostración (lema). Dado $(x, y) \in X \times Y$, definimos $T_{(x,y)} = \{x\} \times Y \cup X \times \{y\}$. Si X, Y conexos, entonces $T_{(x,y)}$ conexo $\forall (x, y) \in X \times Y$. Notar que $T_{(a,y)} \cap T_{(x,y)} \neq \emptyset \quad \forall a, x \in X$. Por el criterio, tenemos que $\bigcup_{x \in X} T_{(x,y)}$ conexo para cada y fijo, pero $\bigcup_{x \in X} T_{(x,y)} = X \times Y$. \square

1.14.1 Arcocconexidad (conexidad por caminos)

Definición 1.66 (curva). X espacio topológico es arcocconexo si $\forall x, y \in X$, existe una función continua $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ tal que $\alpha(0) = x$, $\alpha(1) = y$. Llamaremos curva con extremos $\alpha(0)$ y $\alpha(1)$ a α .

Ejemplo.

- $[0, 1]$ arcocconexo
- \mathbb{S}^{n-1} , $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ arcocconexo si $n \geq 2$.

Proposición 1.67. Si X arcocconexo, entonces X conexo.

Demostración. Sea X arcocconexo. Procedemos por contradicción. Supongamos que X no es conexo. Entonces, existe separación $X = U \sqcup V$, con U, V abiertos no vacíos. Tomamos $x \in U$, $y \in V$. Luego, existe una curva $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ tal que $0 \mapsto x$ y $1 \mapsto y$. Tomar $g : X \rightarrow \{-1, 1\} \subset \mathbb{R}$ tal que

$$g(w) = \begin{cases} -1, & w \in U \\ 1, & w \in V \end{cases}$$

es continua. Entonces $f = g \circ \alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $f(0) =$

$-1, f(1) = 1$, pero no existe $c \in [0, 1]$ con $f(c) = 0$, lo que contradice el TVI! \square

Clase 17

12 de Septiembre

1.15 (Arco)conexidad local, Componentes (25)

Observar. Conexidad \neq Arcoconexidad.

Ejemplo. $Y = \{(t, \sin(\frac{1}{t}) \mid t > 0\} \subset \mathbb{R}^2$ arcoconexo. $X = \overline{Y}$ conexo! Pero no es arcoconexo!

Lema 1.68. $Y \subset A$ espacios topológicos tal que $Y \subset X \subset \overline{Y}$. Si Y es conexo $\Rightarrow X$ conexo.

Nota. El A es simplemente porque Y tiene que estar dentro de un espacio para poder tomar su clausura.

Componentes

Definición 1.69 (componentes conexa y arcoconexa). Sea X espacio topológico, $C \subset X$ es componente conexa (resp. arcoconexa) si:

1. C es conexo (resp. arcoconexo);
2. C es maximal respecto a (1): Si C' es (arco)conexo y $C \subset C' \Rightarrow C = C'$.

Observar.

1. Componentes existen: Si $x \in X$

$$C_x := \bigcup \{C \subset X \mid C \text{ conexo, } x \in C\}$$

(C_x componente de x en X). Esto es conexo (criterio) y maximal.

2. Lo mismo vale para arcoconexidad (Existe versión del criterio).
3. Componentes conexas forman una partición de X . Si $C_x \neq C_y \Rightarrow C_x \cap C_y = \emptyset$. En efecto, si $C_x \cap C_y \neq \emptyset$, $C_x \neq C_y \Rightarrow C_x \cup C_y$ es conexo aún más grande.
4. Si $C \subset X$ componente conexa $\Rightarrow C$ es cerrado $\Rightarrow C = \overline{C}$ (\overline{C} conexo + C conexo maximal) (esto es falso si se reemplaza por componente arcoconexa).

Ejemplo.

1. X es (arco)conexo si X es componente (arco)conexa;
2. En $X = \mathbb{Q}$ con topología inducida de \mathbb{R} , componentes son los singleton. En particular, notar que componentes no son abiertas;

3. $X = [0, 1] \cup (2, 3) \cup \{4\}$ (y es claro que $[0, 1]$, $(2, 3)$ y $\{4\}$ son componentes) (aquí componentes son abiertas);

4. Subconjuntos conexos de \mathbb{R}

- $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$, (a, b) $a < b$;
- $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$, (b, ∞) , $[b, \infty)$;
- \mathbb{R} ;
- $\{x\}$.

(todos arcoconexos!!!)

5. $X = \overline{Y} \subset \mathbb{R}^2$. Componentes conexas de X : es sólo X . Componentes arcoconexas de X : Y , $\{0\} \times [-1, 1]$.

Definición 1.70 (localmente (arco)conexo). X espacio topológico es localmente (arco)conexo si $\forall x \in X$, para todo abierto $U \subset X$ tal que $x \in U$, va a existir $V \subset U$ abierto (arco)conexo con $x \in V$.

Criterio 1.71. X localmente (arco)conexo si y sólo si $\forall U \subset X$ abierto, componentes (arco)conexas de U (respecto a la topología inducida) son abiertos en X .

Corolario 1.72.

1. Si X es localmente arcoconexo, componentes conexas son igual a componentes arcoconexas y viceversa;
2. X localmente arcoconexo y conexo $\Rightarrow X$ es arcoconexo.

Clase 18

22 de Septiembre

1.16 Compacidad (26)

Moral. Los conjuntos compactos se comportan como conjuntos finitos.

Definición 1.73 (cubrimientos). Sean X espacio topológico y $C \subset X$.

1. Un cubriente de C (por subconjuntos de X) es un conjunto de subconjuntos de X tal que su unión contiene a C . Si \mathcal{A} es cubriente, se pide $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \supseteq C$.
2. Si cada elemento de \mathcal{A} es abierto en X decimos que \mathcal{A} es cubrimiento de C por abiertos de X .
3. Si $C = X$, simplemente decimos que \mathcal{A} es cubriente (abierto) de X .

Ejemplo. $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{A}_1 = \{(-n, n) \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ es cubriente abierto y $\mathcal{A}_2 = \{(n, n+2) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ es cubriente abierto.

Ejemplo. Toda base de X es cubriente abierto.

Definición 1.74 (compacidad). X espacio topológico es compacto si para cada cubriente abierto \mathcal{A} existe un subconjunto $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ que también es cubriente (decimos que \mathcal{A}' es subcubriente) y tal que \mathcal{A}' es finito.

Ejemplo. \mathbb{R} no es compacto!

Ejemplo (Axioma). $[0, 1]$ es compacto!!! (Notar que $\forall f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f([0, 1])$ alcanza su supremo)

Ejemplo. Todo conjunto finito es compacto (todo cubriente es finito)

Criterio 1.75. Si X espacio topológico, $C \subset X$. C es compacto (con topología inducida) \Leftrightarrow para todo cubriente \mathcal{A} de C por abiertos de X , \mathcal{A} tiene un subconjunto dinito cuya unión contiene a C .

Propiedad 1.76 (ganadora). Si X compacto y $f : X \rightarrow Y$ continua, entonces $f(X)$ compacto.

Corolario 1.77. $P : X \rightarrow A$ mapa cociente, X compacto. Entonces, A es compacto.

Ejemplo. \mathbb{S}^1 es compacto (homeomorfo a $[0, 1]/\sim$, con $0 \sim 1$)

Demostración (propiedad ganadora). Tomamos \mathcal{A} cubriente de $f(X)$ por abiertos de Y (i.e. $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \supset f(X)$.) Queremos encontrar $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ finito con $\bigcup_{A \in \mathcal{A}'} A \supset f(X)$. Definimos $\mathcal{B} = \{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$ esto es un conjunto de abiertos de X . De hecho, $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} f^{-1}(A) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$ (porque $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \subset f(X)$). Por lo tanto \mathcal{B} es cubriente abierto de X . Luego, X compacto implica que existe subconjunto finito $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$.

$$\mathcal{B}' = \{f^{-1}(A_1), \dots, f^{-1}(A_n)\}$$

con $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$. Luego, como \mathcal{B}' cubriente, entonces $X = f^{-1}(A_1) \cup \dots \cup f^{-1}(A_n)$. Entonces

$$f(X) = f(f^{-1}(A_1)) \cup \dots \cup f(f^{-1}(A_n)) \subset A \cup \dots \cup A_n.$$

Por lo tanto, $\mathcal{A}' = \{A_1, \dots, A_n\}$ subcubriente finito de \mathcal{A} . □

Ejemplo. $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ es compacto. En efecto, si \mathcal{A} es cubriente de X por abiertos de \mathbb{R} , entonces existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $0 \in A$. Esto implica que $\exists \varepsilon > 0$ tal que $0 \in (-\varepsilon, \varepsilon) \subset A$. Luego, si $N > \frac{1}{\varepsilon}$, entonces $\frac{1}{n} \in (-\varepsilon, \varepsilon) \subset A \ \forall n \geq N$. Entonces, A contiene todo salvo finitos puntos x_1, \dots, x_m de X . Luego, existen $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ con $x_i \in A_i$. Con esto, $\mathcal{A}' = \{A_1, \dots, A_n\}$ es subconjunto finito.

Proposición 1.78. X compacto, $C \subset X$ cerrado, entonces C compacto.

Ejemplo. El conjunto de Cantor es compacto! En efecto, $\mathcal{C} = \bigcap_{n \geq 1} E_n$, con cada E_n cerrado. Por lo tanto \mathcal{C} es cerrado en $[0, 1]$. Entonces, \mathcal{C} es compacto!

Clase 19

24 de Septiembre

Proposición 1.79. Subespacios cerrados de espacios compactos son compactos.

Demuestra. Sean X espacio topológico compacto y $A \subset X$ cerrado. Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una cubierta de A . Entonces, por definición de subespacio, existe $V_\alpha \subset X$ abierto tal que $V_\alpha \cap A = U_\alpha$. Como A es cerrado, $X \setminus A$ es abierto. Luego, $\{X \setminus A, \{V_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}\}$ es una cubierta abierta de X . Entonces existen $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ tal que

$$X \setminus A \cup V_{\alpha_1} \cup \dots \cup V_{\alpha_r} = X$$

Luego, intersectando con A ,

$$U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_r} = A$$

□

Proposición 1.80. Sean X, Y espacios topológicos. $X \times Y$ es compacto si y sólo si X e Y son compactos.

Demuestra. \Rightarrow Ejercicio.

\Leftarrow X, Y compactos. Queremos demostrar que $X \times Y$ compacto. Sea $\{W_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ cubierta abierta de $X \times Y$.

Paso 1. $\forall (x, y) \in X \times Y, \exists \alpha(x, y) \in \Lambda$ y $(x, y) \in W_{\alpha(x, y)}$. Entonces, existe una caja $(x, y) \in U_{(x, y)} \times V_{(x, y)} \subset W_{\alpha(x, y)}$.

Paso 2. $\forall x \in X, \{V_{(x, y)}\}_{y \in Y}$ es una cubierta de Y . Por compacidad de Y , existen $y_1(x), y_2(x), \dots, y_r(x) \in Y$ tales que

$$\begin{aligned} V_{(x, y_1(x))} \cup \dots \cup V_{(x, y_r(x))} &= Y, \\ U_{(x, y_1(x))} \cap \dots \cap U_{(x, y_r(x))} &:= U_x, \end{aligned}$$

donde U_x es abierto en X .

Paso 3. Como X es compacto, existen x_1, \dots, x_n tal que

$$U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n} = X.$$

Por construcción, $\{W_{\lambda(x_i, y_j(x_i))}\}$ tal que $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq r_i$ es subcubierta abierta finita de $\{W_\alpha\}$. Entonces, $X \times Y$ es compacto.

□

Corolario 1.81. $X_1 \times \cdots \times X_n$ es compacto si y sólo si X_i es compacto $\forall i = 1, \dots, n$.

Teorema 1.82 (Tychonoff). $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ es compacto (con topología producto) si y sólo si X_λ es compacto $\forall \lambda$.

Lema 1.83 (útil). Sean X espacio Hausdorff y $A \subset X$ subespacio compacto. Entonces, A es cerrado.

Demucción. Queremos demostrar que $X \setminus A$ es abierto. Sea $x \in X \setminus A$ y $p \in A$. Como X es Hausdorff, existen U_p abierto en X , $x \in U_p$, y V_p abierto en X , $p \in V_p$, tal que $U_p \cap V_p = \emptyset$. Entonces $\{V_p \cap A\}_{p \in A}$ es cubierta abierta de A . Luego, por la compacidad de A , $\exists p_1, \dots, p_r$ tal que

$$(V_{p_1} \cap A) \cup \cdots \cup (V_{p_r} \cap A) = A$$

Entonces,

$$U = U_{p_1} \cap \cdots \cap U_{p_r}$$

es abierto tal que $x \in U$ y $U \cap A = \emptyset$. \square

Corolario 1.84. i. $a \in \mathbb{R}_+$, $I_a := [-a, a]$ es compacto. $I_a^n = I_a \times \cdots \times I_a$ es compacto (prop 1.70);
ii. $X \subset \mathbb{R}^n$ cerrado y acotado. Entonces, X es compacto;
iii. $X \subset \mathbb{R}^n$ compacto. Entonces, X es cerrado y acotado.

Demucción. (ii) Al ser acotado, entonces $\exists a$ tal que $X \subset I_a^n \subset \mathbb{R}^n$. Como X es cerrado e I_a^n es compacto, entonces X es compacto.

(iii) \mathbb{R}^n Hausdorff, implica X cerrado por ser compacto (lema útil). Para ver acotado, notamos que $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ es continua. Entonces, es localmente acotada y, por compacidad, es acotada. \square

Observación.

- (ii) y (iii) es el Teorema de Heine-Borel.
- (iii) es un argumento "local \rightarrow global"

Ejemplo. $O(n) = \{A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid A^T A = \text{Id}\}$. $O(n) \subset \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ es cerrado y acotado, y por lo tanto, compacto.

Clase 20

26 de Septiembre

Ejemplo (en línea con el último ejemplo de la clase pasada). $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ compacto.

Ejemplo. X discreto y compacto, entonces X es finito.

Demostración. Sea $\{\{x\}\}_{x \in X}$ cubierta abierta de X . Luego, $\exists \{x_1\}, \dots, \{x_r\}$ tal que $X = \bigcup_{i=1}^r \{x_i\}$. Entonces, X es finito. \square

Aplicación de Compacidad a homeomorfismos

Contexto.

- Álgebra lineal: Sea $f : X \rightarrow Y$ biyección lineal, entonces f^{-1} es lineal.
- Grupos, Anillos: $f : X \rightarrow Y$ homomorfismo biyectivo, entonces f^{-1} es homomorfismo.
- ¿Espaces Topológicos: $f : X \rightarrow Y$ biyección continua, entonces f^{-1} es continua? ¡NO! Por ejemplo, si $X \neq \emptyset$, X^δ con topología discreta, X^i con topología indiscreta. Entonces, $X^\delta \xrightarrow{\text{id}} X^i$ es continua biyectiva pero id^{-1} no es continua. Otro ejemplo es $f : [0, 1] \rightarrow S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ tal que $t \mapsto e^{2\pi it}$. f biyección continua, pero f^{-1} no es continua porque $[0, 1]$ no es compacto y S^1 sí.

Teorema 1.85. X compacto, Y Hausdorff, $f : X \rightarrow Y$ biyección continua. Entonces, f es homeomorfismo.

Demostración. Queremos ver que f^{-1} es continua. Basta con ver que f es una función cerrada. En efecto, $A \subset X$ cerrado implica que A es compacto (por prop. 1 clase pasada). Luego, $f(A) \subset Y$ compacto (por continuidad). Entonces, $f(A)$ es cerrado (por prop. 2 clase pasada). \square

Ejemplo. $f : [0, 1] \rightarrow S^1$, $f(t) = e^{2\pi it}$. $\bar{f}[t] = e^{2\pi it}$ es biyección continua. $[0, 1]/(0 \sim 1)$ es compacto, S^1 es Hausdorff. Entonces, \bar{f} es homeomorfismo. (ver foto)

Ejemplo. Existen funciones continuas sobrejetivas $[0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$. Estas curvas (de Peano) (o curvas que cubren) no pueden ser inyectivas porque de lo contrario, $[0, 1]$ sería homeomorfo a $[0, 1] \times [0, 1]$, pero esto es imposible (se puede ver por un argumento por conexidad).

Ejemplo. Pensar en $O(2)$ como subgrupo de $O(3)$, mediante el homomorfismo inyectivo $O(2) \xrightarrow{O} (3)$ tal que $A \mapsto$ (hacer la matriz).

- $O(3)/O(2) =$ clases laterales izquierdas.

La sobrección $O(3) \rightarrow O(3)/O(2)$ tal que $A \mapsto A \cdot O(2)$, hace de $O(3)/O(2)$ en un espacio cociente. Como $O(3)$ es compacto, entonces $O(3)/O(2)$ es compacto. ¿Quién es $O(3)/O(2)$?

$$f : O(3) \rightarrow S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

f es continua: es restricción de $\text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ (la proyección es continua, por lo que es restricción de continua). Notar que si $A \in O(3)$, $B \in O(2)$, $f(AB) = f(A)$. Entonces, f "desciende" al cociente. $\bar{f} : O(3)/O(2) \rightarrow S^2$ tal que $A \cdot O(2) \mapsto f(A)$.

- \bar{f} es sobre por Gram-Schmidt.
- \bar{f} es inyectiva: $\bar{f}(A \cdot O(2)) = \bar{f}(B \cdot O(2))$.
- Por el teorema, $\bar{f} : O(3)/O(2) \rightarrow S^2$ es homeomorfismo.
- En general, $O(n)/O(n-1) \cong S^{n-1}$

Ejemplo (pensar).

1. $\mathbb{R}P^1 \cong S^1$;
2. $\mathbb{R}P^n \cong S^n / (\vec{x} \sim -\vec{x})$;
3. $\mathbb{R}P^3 \cong SO(3)$;
4. $S^3 \cong SU(2)$;
5. $D^n / \partial D^n \cong S^n$.

Clase 21

29 de Septiembre

1.17 Espacios localmente compactos y compactificación por un punto

El ejemplo clave: La esfera de Riemann.

Recordar (Proyección estereográfica). $\pi : S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{C}$ (donde N es el polo norte) es un homeomorfismo (ejercicio).

Pregunta. ¿Cómo extender π a S^2 ?

Idea. Agregamos un "punto al infinito a \mathbb{C}

$$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Declaramos $\pi(N) = \infty$.

Pregunta. ¿Qué topología le damos a $\hat{\mathbb{C}}$ de modo que $\pi : S^2 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ sea un homeomorfismo?

- i. Como $\pi : S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{C}$ es homeomorfismo. Los abiertos de \mathbb{C} deben ser abiertos de $\hat{\mathbb{C}}$.
- ii. $\hat{\mathbb{C}} \setminus K (= \mathbb{C} \setminus K \cup \{\infty\})$ con K compacto en \mathbb{C} .

Proposición 1.86. Los subconjuntos de $\hat{\mathbb{C}}$ de la forma:

- U abierto en \mathbb{C} , ó
- $\hat{\mathbb{C}} \setminus K$ con K compacto en \mathbb{C} .

forman una topología para $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Con esta topología $\hat{\mathbb{C}}$ es compacto, Hausdorff y contiene a \mathbb{C} como subespacio.

Demostración. Veamos que es topología:

1. $\hat{\mathbb{C}} = \hat{\mathbb{C}} \setminus \emptyset$ y \emptyset es abierto en \mathbb{C}
2. \cap cerrados: Vamos por casos
 - U_1, U_2 abiertos en \mathbb{C} , $U_1 \cap U_2$ abierto en \mathbb{C} ;
 - U_1 abierto en \mathbb{C} , $U_2 = \hat{\mathbb{C}} \setminus K$, K compacto en \mathbb{C} , entonces $U_1 \cap U_2 = U_1 \setminus K$ y K es compacto;
 - $(\hat{\mathbb{C}} \setminus K_1) \cap (\hat{\mathbb{C}} \setminus K_2) = \hat{\mathbb{C}} \setminus (K_1 \cup K_2)$ y $K_1 \cup K_2$ es compacto.
3. \cup abiertos: $U = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$ unión de abiertos en $\hat{\mathbb{C}}$. Notemos que:
 - Si todos los U_α son abiertos en \mathbb{C} , U es abierto en \mathbb{C} ;
 - Si hay al menos un $U_\beta = \hat{\mathbb{C}} \setminus K$, $K \subset \mathbb{C}$ compacto. Entonces, $\hat{\mathbb{C}} \setminus U = \bigcap_\alpha (\mathbb{C} \setminus U_\alpha) = K \cap (\bigcap_{\alpha \neq \beta} (\mathbb{C} \setminus U_\alpha))$ es cerrado en K . Luego, $\hat{\mathbb{C}} \setminus U$ es compacto. Así, $\hat{\mathbb{C}} \setminus (\hat{\mathbb{C}} \setminus U) = U$ es abierto en $\hat{\mathbb{C}}$.

Para ver Hausdorff: Sea $z \in \mathbb{C}$. Veamos que existen abiertos disjuntos U y V en $\hat{\mathbb{C}}$ con $z \in U$, $\infty \in V$. Sea $U = B_\varepsilon(z)$ y $V = \hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{B_\varepsilon(z)}$. Entonces, U y V satisfacen $U \cap V = \emptyset$, $z \in U$ e $\infty \in V$.

Para ver compacidad: $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ cubierta de $\hat{\mathbb{C}}$. Luego, $\infty \in U_\beta$ para algún $\beta \in \Lambda$. Así, $\hat{\mathbb{C}} \setminus U_\beta$ es compacto en \mathbb{C} . Entonces, existen finitos $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ tal que

$$U_1 \cup \dots \cup U_{\alpha_r} = \hat{\mathbb{C}} \setminus U_\beta$$

Y entonces, $\{U_1, \dots, U_{\alpha_r}, U_\beta\}$ es cubierta abierta de $\hat{\mathbb{C}}$. □

Definición 1.87 (localmente compacto). Un espacio topológico X es localmente compacto si $\forall x \in X$ y todo abierto U que contiene a x , existe abierto V tal que $x \in V \subset \overline{V} \subset U$ y \overline{V} compacto (i.e. V es precompacto).

Ejemplo.

1. $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^n, \mathbb{N}, \mathbb{Z}$ son localmente compactos;
2. Compactos + Hausdorff son localmente compactos;
3. $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ no es localmente compacto;
4. $\{0\} \cup H = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$ no localmente compacto.

Teorema 1.88. Sea X un espacio Hausdorff localmente compacto. Escribimos $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$, $\infty \notin X$. Definimos abiertos en \hat{X} como, o un abierto de X , o un $\hat{X} \setminus K$ con K compacto en X . Entonces, esto define una topología para \hat{X} con la cual es Hausdorff y compacto. Además, contiene a X como subespacio.

Definición 1.89 (compactificación por un punto). X Hausdorff y localmente compacto. \hat{X} se llama la compactificación de X por un punto (o de Alexandrov).

Teorema 1.90. $f : X \rightarrow Y$ es un homeomorfismo entre espacios Hausdorff y localmente compactos, entonces $\hat{f} : \hat{X} \rightarrow \hat{Y}$, dada por $\hat{f}(x) = f(x)$ si $x \in X$ y $\hat{f}(\infty_X) = \infty_Y$, es un homeomorfismo

Ejemplo.

1. $\widehat{\mathbb{R}} \cong S^1$;
2. $\widehat{\mathbb{R}^n} \cong S^n$;
3. $(\widehat{S^1 \subset \mathbb{R}}) \cong S^1 \vee S^2$;
4. X compacto, entonces en $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$, X y $\{\infty\}$ son clopens;
5. $\widehat{\mathbb{N}} \cong \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\} \subset \mathbb{R}$ (y \mathbb{N} con la topología discreta).

Clase 22

1 de Octubre

1.18 Compacidad secuencial (28), Teorema de Tychonoff (37)

Vimos

Teorema 1.91 (Tychonoff). $(X_\alpha)_{\alpha \in J}$ familia indexada de espacios compactos. Entonces, $Z = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ es compacto (con la topología producto).

Definición 1.92 (compactificación de un punto). X localmente compacto Hausdorff $\rightsquigarrow \hat{X} = X \cup \{\infty\}$

- \hat{X} compacto tal que $X \hookrightarrow \hat{X}$ es continua;
- Si X no es compacto $\Rightarrow X$ es denso en \hat{X} .

1.18.1 Compacidad Secuencial

Definición 1.93 (espacio secuencialmente compacto). X espacio topológico es secuencialmente compacto si cada sucesión $(x_n)_n$ en X tiene subsucesión convergente.

Teorema 1.94. X espacio métrico con topología métrica. X compacto $\Leftrightarrow X$ secuencialmente compacto.

Observación. En general, compacidad $\not\Rightarrow$ compacidad secuencial. Similiarmente, compacidad secuencial $\not\Rightarrow$ compacidad.

Ejemplo (Compacto, no secuencialmente compacto). $X = [0, 1]^{[0,1]} = \{\text{funciones } x : [0, 1] \rightarrow [0, 1]\}$. El $[0, 1]^{[0,1]}$ con la topología producto. Es compacto por Tychonoff. No es secuencialmente compacto. En efecto, considerar la siguiente construcción de la sucesión $(x_n)_n$ sin subsucesión convergente. $(x_n(\alpha))_{\alpha \in [0,1]}$ tal que $x_n(\alpha) = n$ -ésimo valor en expansión binaria de α ; $\alpha = 0.b_1b_2\dots b_n\dots$; $x_n(\alpha) = b_n$ sin subsucesión convergente.

Ejemplo (Secuencialmente compacto, no compacto). $X = \omega_1 \times [0, 1]$, ω_1 primer ordinal incontable con topología del orden lexicográfico (diccionario).

Preliminar (a Tychonoff): (propiedad de intersección finita (PIF))

Definición 1.95 (PIF). X espacio topológico, \mathcal{C} colección de subconjuntos de X . \mathcal{C} tiene la propiedad de intersección finita si

$$C_1, \dots, C_n \in \mathcal{C} \Rightarrow C_1 \cap \dots \cap C_n \neq \emptyset.$$

Ejemplo. Si $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \neq \emptyset \Rightarrow \mathcal{C}$ tiene PIF.

Lema 1.96. X espacio topológico. X compacto \Leftrightarrow si \mathcal{C} colección arbitraria de cerrados de X con PIF $\Rightarrow \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \neq \emptyset$.

Ejemplo. Si $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_n, \dots\}$ tal que

- Cada C_n cerrado no vacío,
- $C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \dots \supset C_n$,

entonces tiene PIF. Si X es compacto, el lema implica que $\bigcap_{n \geq 1} C_n$ es no vacía.

Clase 23

3 de Octubre

1.19 Teorema de Tychonoff (37)

Demostración (lema clase anterior). \rightarrow Sea \mathcal{C} colección arbitraria de cerrados en X con PIF. Queremos $\bigcap \mathcal{C} := \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \neq \emptyset$. Sea $\mathcal{A} = \{X \setminus C \mid C \in \mathcal{C}\}$ colección de abiertos. Si $\bigcap \mathcal{C} = \emptyset$, entonces $\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} (X \setminus C) = (\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C)^c = X$. Es decir, \mathcal{A} cubriendo abierto de X . Como X es compacto, entonces existen $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ con $A_1 \cup \dots \cup A_n = X$. Luego, existen $C_1, \dots, C_n = \emptyset$ ($C_i = X \setminus A_i$) con $C_1 \cap \dots \cap C_n = \emptyset$. Pero esto contradice que \mathcal{C} tenga la PIF.

\leftarrow Análogo. \square

1.19.1 Demostración Tychonoff

Teorema 1.97 (Tychonoff). $Z = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ producto arbitrario de espacios compactos. Entonces Z compacto.

Fijamos \mathcal{C} colección arbitraria de cerrados en Z con PIF.

Objetivo 1: Encontrar x en Z tal que $x \in C$ para cada $C \in \mathcal{C}$.

Suposición: Existe colección \mathcal{D} de subconjuntos de Z tal que:

- i. $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$;
- ii. \mathcal{D} tenga PIF;
- iii. \mathcal{D} es maximal respecto a ii. (es decir, si $\mathcal{D}' \supset \mathcal{D}$ y \mathcal{D}' tiene PIF, entonces $\mathcal{D}' = \mathcal{D}$).

Observación.

1. Existencia de \mathcal{D} proviene del lema de Zorn (equivalente al axioma de elección).
2. En ZF, teorema de Tychonoff es equivalente al axioma de elección.
3. No pedimos que conjuntos de \mathcal{D} sean cerrados.

Objetivo 2: Encontrar x en Z tal que $x \in \overline{\mathcal{D}} \forall D \in \mathcal{D}$ (notar que Objetivo 2 \Rightarrow Objetivo 1)

Lema 1.98.

- a. \mathcal{D} es cerrado bajo intersección finita.
- b. Si $A \subset Z$ tal que $A \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$ para cada D en \mathcal{D} , entonces $A \in \mathcal{D}$.

Demostación (lema).

- a. Sea $D = D_1 \cap \dots \cap D_n$, tal que $D_1, \dots, D_n \in \mathcal{D}$ y sea $\mathcal{D}' = \mathcal{D} \cup \{D\}$. Notamos que \mathcal{D}' tiene PIF. Si $C_1, \dots, C_m \in \mathcal{D}$, entonces

$$D \cap C_1 \cap \dots \cap C_m = D_1 \cap \dots \cap D_n \cap C_1 \cap \dots \cap C_m \neq \emptyset$$

(\mathcal{D} tiene la PIF). Luego, como \mathcal{D} es maximal, $\mathcal{D}' = \mathcal{D}$. Entonces, $D \in \mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$.

- b. Sea $\mathcal{D}' = \mathcal{D} \cup \{A\}$. Parte a) + hipótesis, implica que \mathcal{D}' tiene la PIF. Por maximalidad, tenemos que $\mathcal{D}' = \mathcal{D} \Rightarrow A \in \mathcal{D}$.

□

Demostación (Objetivo 2). Encontrar candidato x : En coordenada α , sea $\mathcal{D}_\alpha := \{\overline{\pi_\alpha(D)} \mid D \in \mathcal{D}\} \Rightarrow \mathcal{D}_\alpha$ tiene PIF (viene de \mathcal{D} con PIF) y colección de cerrados. X_α compacto + lema \Rightarrow existe x_α en $\overline{\pi_\alpha(D)}$ $\forall D \in \mathcal{D}$. Definimos $x = (x_\alpha)_{\alpha \in J} \in Z$. Dado U abierto en que contiene a X (U en base de topología producto en Z), queremos $U \cap D \neq \emptyset$ para cada $D \in \mathcal{D}$ (*). (esto implica Objetivo 2 al mover U y fijar $D \in \mathcal{D}$). Nos basta probar que $U \in \mathcal{D}$ (luego (*) sigue por PIF de \mathcal{D}).

Recuerdo. $U = \bigcap_{\beta \in K} \pi_\beta^{-1}(U_\beta)$ (" = " $\prod_{\beta \in K} U_\beta \times \prod_{\alpha \notin K} X_\alpha$), $K \subset J$ finito y $\bigcup_\beta \subset X_\beta$ abierto que contiene a x_β .

Luego, $x_\beta \in \overline{\pi_\beta(D)} \Rightarrow \pi_\beta(D) \cap U_\beta \neq \emptyset \Rightarrow D \cap \pi_\beta^{-1}(U_\beta) \neq \emptyset \forall D \in \mathcal{D}$.

Ahora, lema b) $\Rightarrow \pi_\beta^{-1}(U_\beta) \in \mathcal{D}$. Luego, por lema a), $U = \bigcap_{\beta \in K} \pi_\beta^{-1}(U_\beta) \in \mathcal{D}$. \square

Demostración (Tychonoff). Objetivo 2 \Rightarrow Objetivo 1 \Rightarrow Tychonoff. \square

Clase 24

6 de Octubre

1.20 Axiomas de Numerabilidad/Contabilidad (30)

Axiomas de numerabilidad: Buscamos codificar la topología con información contable. Además, la topología estará "caracterizada" por convergencia de sucesiones.

Definición 1.99 (base de un punto). X espacio topológico. Una base de el punto $x \in X$ es un conjunto \mathcal{B}_x de abiertos, tal que $x \in B \forall B \in \mathcal{B}_x$ y tal que si U abierto con $x \in U$, existe $B \in \mathcal{B}_x$ con $x \in B \subset U$.

Ejemplo. Si \mathcal{B} base de la topología, entonces podemos tomar $\mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B} \mid x \in B\}$ base en x .

Definición 1.100 (espacio primer contable). X cumple el 1er axioma de numerabilidad (X es 1er contable/numerable) si para cada $x \in X$ existe una base contable en x .

Ejemplo. X espacio métrico (con topología métrica). Luego, $\forall x \in X \rightsquigarrow \mathcal{B}_x = \{B_\varepsilon(x) \mid \varepsilon \in \mathbb{Q}^+\}$, por lo que X es 1er contable.

Lema 1.101. X es 1er contable.

- a) $A \subset X$. Si $x \in \overline{A} \Rightarrow$ existe sucesión $(x_n)_n$ en A si $x_n \rightarrow x$.
- b) $f : X \rightarrow Y$ es continua $\leftrightarrow [x_n \rightarrow x \text{ en } X \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x) \text{ en } Y]$

Demostración. a) Sea $x \in \overline{A}$, sea $\mathcal{B}_x = \{B_1, B_2, \dots\}$ base numerable en $x \in X$. Tomar $C_i = B_1 \cap \dots \cap B_i$ (notar que $C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \dots$). Así, $x \in \overline{A} \Rightarrow \forall i, A \cap C_i \neq \emptyset$. Luego, existe $x_i \in A \cap C_i$. Falta ver que $x_i \rightarrow x$. Sea U abierto con $x \in U$. Existe N con $x \in B_N \in U$. Si $n \geq N \Rightarrow x_n \in C_n \subset C_N \subset B_N \subset U$. Por lo tanto, $x_n \in U$ para $n \geq N$.

b) Asumir f secuencialmente continua. Podemos utilizar el siguiente criterio: f continua si y sólo si $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} \forall A \subset X$ (su demostración queda como ejercicio, aunque también está en el Munkres). Tomamos $A \subset X$ (queremos $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$). Tomamos $x \in \overline{A}$ (queremos $f(x) \in \overline{f(A)}$). Por a., existe $(x_n)_n$ en A con $x_n \rightarrow x$. f secuencialmente continua: $f(x_n) \rightarrow f(x)$; donde $f(x_n) \in f(A)$ y $f(x) \in \overline{f(A)}$. \square

Observación. El converso en la parte a. del lema también es cierto.

Corolario 1.102. X no-numerable con topología co-numerable (abiertos no vacíos son complementos de numerables). Entonces, X no es 1er contable (viene de la Tarea 1).

Definición 1.103 (espacio segundo contable). X es 2do contable/numerable, si posee una base numerable.

Observación. 2do contable \Rightarrow 1ro contable.

Definición 1.104 (subconjunto denso y espacio separable).

- 1) $A \subset X$ es denso si $\overline{A} = X$.
- 2) X es separable si posee un subconjunto numerable y denso.

Lema 1.105. X 2do contable $\Rightarrow X$ separable.

Demuestración. Sea $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots\}$ base numerable de X . Tomamos $x_n \in B_n \forall n$, definimos $A = \{x_1, x_2, \dots\}$. Queremos probar que A es denso. Dado $x \in X$, queremos $x \in \overline{A}$. Dado $U \subset X$ abierto con $x \in U$, U es unión de elementos de \mathcal{B} . Luego, $B_n \subset U$ para algún n . Luego, $x_n \in B_n \subset U$, por lo que $U \cap A \neq \emptyset \forall U$ abierto. Por lo tanto, $x \in \overline{A}$. \square

Ejemplo.

- \mathbb{R}^n es 2do contable. En efecto, $\mathcal{B} = \{B_\varepsilon(x) \mid \varepsilon \text{ racional positivo, } x \in \mathbb{Q}^n\}$ es base numerable.
- X separable + 1er contable \Rightarrow 2do contable (queda como ejercicio).

Proposición 1.106.

- 1) X 1er (2do) contable, $A \subset X \Rightarrow A$ 1er (2do) contable.
- 2) Si $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ espacios 1er (2do) contables $\Rightarrow Z = \prod_{n \geq 1} X_n$ es 1er (2do) contable.

Demuestración. 1) (para 2do) \mathcal{B} base de $X \Rightarrow \mathcal{B}|_A = \{B \cap A \mid B \in \mathcal{B}\} \setminus \{\emptyset\}$ base de A (numerable).

2) (para 2do) Sea \mathcal{B}_n base numerable de $X_n \forall n$. Base para la topología producto es

$$B = \left\{ \prod_{i \geq 1} B_i \mid B_i \in \mathcal{B}_i \cup \{X_i\}, \text{ tq } B_i = X_i \text{ para todos salvo finitos } i \right\}$$

Se tiene que

$$\mathcal{B} = \bigcup_{F \subset Z^+ \text{ finito}} \left\{ \prod_{i \in F} B_i \times \prod_{i \notin F} X_i \mid B_i \in \mathcal{B}_i \right\}$$

□

Observación. Axiomas de numerabilidad no se preservan bajo productos no numerables.

Clase 25

8 de Octubre

Axiomas de separación. permite distinguir subconjuntos usando topología.

Definición 1.107 (espacio T3 y T4). Suponer que X es T1.

- X es T3 (o Regular), si $\forall x \in X, \forall A \subset X$ cerrado con $x \notin A, \exists U, V$ abiertos disjuntos con $x \in U, A \subset V$.
- X es T4 (o Normal), si $\forall A, B \subset X$ cerrados disjuntos, existen U, V abiertos disjuntos con $A \subset U, B \subset V$.

Nuestro objetivo ahora es el lema de Urysohn.

Lema 1.108 (Urysonhn). X espacio normal, $A, B \subset X$ cerrados disjuntos $\Rightarrow \exists f : X \rightarrow [0, 1]$ continua con $f(A) = \{0\}, f(B) = \{1\}$.

Observación. T4 \rightarrow T3 \rightarrow T2 \rightarrow T1, pero ningun converso es cierto.

Ejemplo.

1. **T1, no Hausdorff:** X infinito con la topología cofinita (cerrado \leftrightarrow finito)
2. **Hausdorff, no Regular:** \mathbb{R}_K, \mathbb{R} con topología de base $\{(a, b), (a, b) \setminus \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}\}$.
 - \mathbb{R}_K no regular: $K = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ es cerrado pero K no se puede "separar" de un punto.
 - \mathbb{R}_K Hausdorff: contiene a la topología estándar.
3. **Regular, no Normal:** Plano de Sorgenfrey \mathbb{R}_l^2 , $\mathbb{R}_l^2 = \mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$, con \mathbb{R}_l con topología del límite inferior (base = $\{[a, b)\}$). (\mathbb{R}_l es regular).

Propiedad 1.109.

- a) X regular, $A \subset X \Rightarrow A$ regular.
- b) $Z = \prod_\alpha X_\alpha$, cada X_α regular $\Rightarrow Z$ regular.

Observación. b) es falso si se reemplaza regular por normal.

Lema 1.110. Suponer que X es T1

- a) X regular si y sólo si $\forall x \in X$, $[\forall U \subset X$ abierto con $x \in U]$ (si $[\dots]$ se cumple, decimos que U es vecindad de x), $\exists V$ vecindad de x con $x \in V \subset \overline{V} \subset U$.
- b) X normal si y sólo si $\forall A \subset X$ cerrado, $\forall U \subset X$ abierto con $A \subset U$, $\exists V$ abierto con $A \subset V \subset \overline{V} \subset U$.

Demostración. Probamos sólo a), pues b) es similar.

\Rightarrow Sea $x \in X$, U vecindad de x . Sea $B = X \setminus U$ ($\Rightarrow B$ cerrado y $x \notin B$). X regular $\Rightarrow \exists V_1, V_2$ abiertos disjuntos con $x \in V_1$, $B \subset V_2$. Consideramos $V = V_1$ (queremos $\overline{V} \subset U$). V_1, V_2 disjuntos $\Rightarrow V_1 \subset X \setminus V_2 \subset X \setminus B = U$.

\Leftarrow Sean $x \in X$, $B \subset X$ cerrado con $x \notin B$. Si $U = X \setminus B \Rightarrow U$ vecindad de x . Por hipótesis, nos da vecindad V de x con $x \in V \subset \overline{V} \subset U$. Si $\widehat{V} = X \setminus \overline{V} \Rightarrow V \cap \widehat{V} = \emptyset$, $x \in V$, $B = X \setminus U \subset X \setminus \overline{V} = \widehat{V}$ (con V, \widehat{V} abiertos). \square

Demostración (propiedades). a) X regular, $A \subset X$. (notar que X T1 $\Rightarrow A$ T1). Sea $x \in A$, $B \subset A$ cerrado (en A!!!) con $x \notin B$. Notar que $B = C \cap A$ con C cerrado en X . Luego, X regular \Rightarrow existen $U, V \subset X$ abiertos disjuntos con $x \in U$, $C \subset V$. Tomamos $\widehat{U} = U \cap A$, $\widehat{V} = V \cap A$, abiertos disjuntos de A con $x \in \widehat{U}$, $B \subset \widehat{V}$.

b) Sea $Z = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$, con cada X_α regular. Queremos usar lema previo. Para ello, sea $x = (x_\alpha)_\alpha$, $U \subset Z$ abierto con $x \in U$ (queremos V abierto con $x \in V \subset \overline{V} \subset U$). No perdemos generalidad en asumir que U es abierto en la base. Es decir, $U = \prod_{\alpha \in J} U_\alpha$, y $K \subset J$ finito con $U_\alpha = X_\alpha$ si $\alpha \notin K$. Dado $\alpha \in K$, $x_\alpha \in U_\alpha$. Luego, X_α regular + lema, nos da $V_\alpha \subset X_\alpha$ abierto con (*) $x_\alpha \in V_\alpha \subset \overline{V_\alpha} \subset U_\alpha$ ($\forall \alpha \in K$). Sea $V = \prod_{\alpha \in J} V_\alpha$, donde V_α dado por (*) si $\alpha \in K$ y $V_\alpha = X_\alpha$ si $\alpha \notin K$. Luego, $x \in V \subset \overline{V}$. Además,

$$\overline{V} = \overline{\prod_{\alpha} V_\alpha} = \prod_{\alpha} \overline{V_\alpha} \subset \prod_{\alpha} U_\alpha = U$$

(la segunda igualdad se vió en la ayudantía 3). \square

Observación. La demostración de a) no cumple si se reemplaza regular por normal.

Clase 26

10 de Octubre

1.21 Espacios Normales (32)

1.21.1 Criterios para garantizar T4

Proposición 1.111. X compacto y Hausdorff, entonces X es normal.

Proposición 1.112. X es regular + 2do contable, entonces X es normal.

Lema 1.113. X regular, $x \in X$, $B \subset X$ cerrado tal que $x \notin B$. Entonces, $\exists U$ vecindad de x con $\overline{U} \cap B = \emptyset$. Además, si \mathcal{B} es base de X , podemos elegir $U \in \mathcal{B}$.

Demuestra (Lema). X regular nos da V vecindad de x con $V \cap B = \emptyset$. Por lema de la clase pasada, $\exists U$ vecindad de x con $x \in U_0 \subset \overline{U}_0 \subset V$. Luego, $\overline{U}_0 \cap B = \emptyset$. Si \mathcal{B} es base de X , existe $U \in \mathcal{B}$ con $x \in U \subset U_0$. Así, $\overline{U} \subset \overline{U}_0 \Rightarrow \overline{U} \cap B = \emptyset$. \square

Demuestra (proposición 2). X es regular, \mathcal{B} base numerable. Queremos fijar $A, B \subset X$ cerrados disjuntos y encontrar U, V abiertos disjuntos con $A \subset U$, $B \subset V$ (notar que X ya es T1 por ser regular). En efecto, dado $a \in A$, el lema previo implica que existe $U_a \in \mathcal{B}$ vecindad de a y tal que $\overline{U}_a \cap B = \emptyset$. Esto nos da $\mathcal{U} = \{U_a \mid a \in A\} \subset \mathcal{B}$ cubriendo por abiertos de X tal que $(\bigcup_{a \in A} \overline{U}_a) \cap B = \emptyset$. El mismo proceso nos da $\mathcal{V} = \{V_b \mid b \in B\} \subset \mathcal{B}$ cubriendo de B por abiertos de X tal que $(\bigcup_{b \in B} \overline{V}_b) \cap A = \emptyset$. Hasta ahora, tenemos $\widehat{U} := \bigcup_{a \in A} U_a$, $\widehat{V} := \bigcup_{b \in B} V_b \subset X$ abiertos tales que $A \subset \widehat{U}$, $B \subset \widehat{V}$. Falta achicar \widehat{U}, \widehat{V} para que sean disjuntos. Como $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subset \mathcal{B}$ son numerables, tenemos

$$\mathcal{U} = \{U_1, U_2, U_3, \dots\}, \quad \mathcal{V} = \{V_1, V_2, V_3, \dots\}.$$

Redefinimos:

$$\begin{aligned}\widehat{U}_1 &:= U_1 \setminus \overline{V}_1, \\ \widehat{U}_2 &:= U_2 \setminus (\overline{V}_1 \cup \overline{V}_2), \\ \widehat{U}_n &:= U_n \setminus (\overline{V}_1 \cup \overline{V}_2 \cup \dots \cup \overline{V}_n).\end{aligned}$$

Definimos $U := \bigcup_{i \geq 1} \widehat{U}_i$, $V := \bigcup_{i \geq 1} \widehat{V}_i$. Notar que $A \subset U$, $B \subset V$ (se ocupa que $\overline{U}_i \cap B = \overline{V}_i \cap A = \emptyset$). Notar que $U \cap V = \emptyset$. En efecto, si $x \in U \cap V \Rightarrow x \in \widehat{U}_m, x \in \overline{V}_n$ para ciertos $m \geq n$. Luego, $x \in \widehat{V}_n \Rightarrow x \in V_n$, y $x \in \widehat{U}_m$ ($m \geq n$) $\Rightarrow x \notin \overline{V}_n \Rightarrow x \notin V_n$, lo que es una contradicción! \square

Definición 1.114 (espacio metrizable). X espacio topológico es metrizable si su topología es topología métrica para alguna distancia en X .

Proposición 1.115. X es metrizable, entonces X es normal.

Teorema 1.116 (de Metrización de Urysohn). X normal y 2do contable $\Rightarrow X$ es metrizable.

Nota. Este teorema no se va a evaluar (la demostración está en el Munkres).

Demostración (proposición). Sea (X, d) espacio métrico. X métrico \Rightarrow Hausdorff \Rightarrow T1. Tomamos $A, B \subset X$ cerrados disjuntos, queremos $U, V \subset X$ abiertos disjuntoas con $A \subset U, B \subset V$. En efecto, recordar que si $S \subset X$ con X espacio métrico cualquiera $\Rightarrow S = \{x \in X \mid \inf_{s \in S} d(x, s) = 0\}$. Por lo tanto, S cerrado y $x \notin S \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ tal que $d(x, s) \geq \varepsilon \forall s \in S$ (i.e. $B_\varepsilon(x) \cap S = \emptyset$). Luego, $\forall a \in A, \exists \varepsilon_a > 0$ tal que $B_{\varepsilon_a}(a) \cap B = \emptyset$. Esto nos da $\{B_{\varepsilon_a}(a) \mid a \in A\}$. Similarmente, obtenemos $b \mapsto \varepsilon_b > 0$ tal que $b \in B, B_{\varepsilon_b}(b) \cap A = \emptyset$. Esto nos da $\widehat{U} = \bigcup_{a \in A} B_{\varepsilon_a}(a) \supset A, \widehat{V} = \bigcup_{b \in B} B_{\varepsilon_b}(b) \supset B$. Mejor tomamos $U = \bigcup_{a \in A} B_{\frac{\varepsilon_a}{2}}(a)$ y $V = \bigcup_{b \in B} B_{\frac{\varepsilon_b}{2}}(b)$. Luego, U, V abiertos con $A \subset U, B \subset V$. Si $x \in U \cap V \Rightarrow \exists a \in A, b \in B$ tal que $d(x, a) < \frac{\varepsilon_a}{2}, d(x, b) < \frac{\varepsilon_b}{2}$. Entonces,

$$\begin{aligned} d(a, b) &\leq d(a, x) + d(x, b) \\ &< \frac{\varepsilon_a}{2} + \frac{\varepsilon_b}{2} \leq \varepsilon_a. \end{aligned}$$

Luego, $d(a, b) < \varepsilon_a$ es una contradicción. \square

Corolario 1.117. Subespacios de espacios metrizables son normales.

Corolario 1.118. Producto numerable de metrizables es normal.

Observación. $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ no es normal.

Clase 27

13 de Octubre

1.22 Lema de Urysonhn (33)

Aclaración. Separable + 1er contable $\not\Rightarrow$ 2do contable.

Ejemplo. $\mathbb{R}_l = \mathbb{R} +$ topología del límite inferior.

Lema 1.119 (de Urysonhn). X normal, $A, B \subset X$ cerrados disjuntos. Entonces, existe $f : X \rightarrow [0, 1]$ continua tal que $f(A) = \{0\}, f(B) = \{1\}$.

Observación. Si X es metrizable (distancia d), entonces $f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$ cumple.

Idea de demostración. [X normal, $A, B \subset X$ cerrados disjuntos]

1. Construir "conjuntos de subnivel" $U_p \subset X$ abiertos indexados por $p \in \mathbb{Q}$ tal que $p < q \Rightarrow \overline{U}_p \subset U_q$ [” $U_p = \{x \mid f(x) < p\}$ ”].
2. Usar $\{U_p\}_{p \in \mathbb{Q}}$ para construir f .

3. Verificar que f cumple lo que queremos.

Lema 1.120 (se utilizará en la demostración). X normal, $C \subset V$, C cerrado, V abierto. Entonces, $\exists W$ abierto con $C \subset W \subset \overline{W} \subset V$.

Lema 1.121. $y \in X$

- a) $y \in U_p \Rightarrow f(y) \leq p$
- b) $y \notin U_p \Rightarrow f(y) \geq p$.

Democión. a) $y \in \overline{U}_p \Rightarrow y \in U_q \ \forall q > p \Rightarrow f(y) \leq p$.

b) $y \notin U_p \Rightarrow y \notin U_q \ \forall q < p \Rightarrow f(y) \geq p$. □

Democión (Urysohn). (1) Sea $P = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$, ordenado tal que $P = \{1, 0, p_3, p_4, \dots\}$. Definimos $P \ni p \mapsto U_p$ inductivamente. Sea $U_1 := X \setminus B$. Usamos que X es normal + lema para encontrar $U_0 \subset X$ abierto tal que $A \subset U_0 \subset \overline{U}_0 \subset U_1$. Por inducción, asumimos que hemos encontrado U_p para $p \in \{p_1, \dots, p_n\}$ y que cumplen $p < q \Rightarrow \overline{U}_p \subset U_q$ (*) en este conjunto. Dado $p_{n+1} \in P$ ($n \geq 2$, i.e. $p_{n+1} \neq 0, 1$), sea s el predecesor de p_{n+1} en $\{p_1, \dots, p_n\}$ y t el sucesor de p_{n+1} en $\{p_1, \dots, p_{n+1}\}$, entonces $\overline{U}_s \subset U_t$. Usando lema + X normal + $\overline{U}_s \subset U_t$, encontramos $U_{p_{n+1}} \subset X$ abierto con $\overline{U}_s \subset U_{p_{n+1}} \subset \overline{U}_{p_{n+1}} \subset U_t$. Verificar: (*) se sigue cumpliendo para p, q en $\{p_1, \dots, p_{n+1}\}$.

(1.5) Extender construcción para $p \in \mathbb{Q}$:

$$U_p = \begin{cases} \emptyset & \text{si } p < 0 \\ X & \text{si } p > 1 \end{cases}$$

y (*) ahora se cumple para todo $p, q \in \mathbb{Q}$.

(2) Construir f . Dado $x \in X$, sea $\mathbb{Q}(x) = \{p \mid x \in U_p\} \Rightarrow \mathbb{Q}(x)$ es no vacío y acotado por abajo ($1000 \in \mathbb{Q}(X)$, y $p \notin \mathbb{Q}(x)$ para $p < 0$). Definimos $f(x) := \inf \mathbb{Q}(x) = \inf \{p \in \mathbb{Q} \mid x \in U_p\}$.

(3) Ver que f funciona:

- i. $(f(A) = \{0\})$ Si $x \in A \subset U_0$, (*) $\Rightarrow x \in U_p \ \forall p \geq 0$, $x \notin U_p \ \forall p < 0 \Rightarrow f(x) = 0$.
- ii. $(f(B) = \{1\})$ Si $x \in B \Rightarrow x \notin U_1 \Rightarrow x \notin U_p, \ \forall p < 1 \ \& \ x \in U_p \ \forall p > 1 \Rightarrow f(x) = 1$.
- iii. $(f(X) \subset [0, 1])$ Si $x \in X \ \& \ U_p = X$ para $p > 1 \Rightarrow p \in \mathbb{Q}(x) \ \forall p \in \mathbb{Q}_{>1} \Rightarrow f(x) \leq 1 \ \& \ U_p = \emptyset$ para $p < 0 \Rightarrow p \notin \mathbb{Q}(x) \ \forall p \in \mathbb{Q}_{<0} \Rightarrow f(x) \geq 0$.

- iv. (f continua) Verificar que f continua en $x_0 \forall x_0 \in X$. Dado $V \subset \mathbb{R}$ abierto que contiene a $f(x_0)$, queremos U vecindad de x_0 tal que $f(U) \subset V$. En efecto, asumir que $V = (c, d)$ (i.e. tomamos $c < f(x_0) < d$). Sean $p, q \in \mathbb{Q}$ tal que $c < p < f(x_0) < q < d$. Por lema (2) tenemos $p < f(x_0) \Rightarrow x_0 \notin \overline{U}_p$ y $q > f(x_0) \Rightarrow x_0 \in U_q$. Por lo tanto, $x_0 \in U_q \setminus \overline{U}_p$ (esto es abierto). Definimos $V = U_q \setminus \overline{U}_p$, vecindad de x_0 . Queremos $f(V) \subset (c, d)$. En efecto, sea $y \in V$. Entonces $y \in U_q \subset \overline{U}_q \Rightarrow f(y) \leq q$ (lema parte a.) y $y \notin \overline{U}_p \supset U_p \Rightarrow f(y) \geq p$ (lema parte b.). En conclusión, $c < p \leq f(y) \leq q < d$. Por lo tanto, $f(y) \in (c, d) \forall y \in V$.

□

Clase 28

15 de Octubre

1.23 Teorema de Extensión de Tietze (34)

Teorema 1.122 (Extensión de Tietze). X normal, $A \subset X$ cerrado

- a) Si $f : A \rightarrow [a, b]$ continua $\Rightarrow f$ tiene extensión continua $g : X \rightarrow [a, b]$ (i.e. g continua y $g|_A = f$).
- b) Si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ continua $\Rightarrow f$ tiene extensión continua $g : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Notación. Si $F : X$ (o en A) $\rightarrow \mathbb{R}$,

$$\|F\|_X = \sup_{x \in X} |F(x)| \quad \text{o} \quad \|F\|_A = \sup_{a \in A} |F(a)|.$$

Idea de prueba. $f : A \rightarrow [-1, 1]$ continua, $A \subset X$ (con X normal y A cerrado). Encontrar sucesión $(g_n) : X \rightarrow [-1, 1]$ de funciones continuas tal que

- i) $\|g_n\|_X \leq \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$;
- ii) $\|f - g_1 - \cdots - g_n\|_A \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Luego, $g := \sum_{n \geq 1} g_n$ va a ser la extensión continua de f .

Lema 1.123. X normal, $A \subset X$ cerrado, $r > 0$, $F : A \rightarrow [-r, r]$. Entonces, existe $G : X \rightarrow \mathbb{R}$ continua, con

- i) $\|G\|_X \leq \frac{r}{3}$;
- ii) $\|F - G\|_A \leq \frac{2r}{3}$.

Demostración (Lema). Dividir $[-r, r]$ en

$$\underbrace{\left[-r, -\frac{r}{3}\right]}_{I_1} \cup \underbrace{\left[-\frac{r}{3}, \frac{r}{3}\right]}_{I_2} \cup \underbrace{\left[\frac{r}{3}, r\right]}_{I_3}$$

y sean $B = F^{-1}(I_1)$, $C = F^{-1}(I_3)$. Notar que B, C son cerrados (disjuntos) en A y por lo tanto cerrados en X . El lema de Urysohn $\Rightarrow \exists G : X \rightarrow [-\frac{r}{3}, \frac{r}{3}]$ continua tal que $G(B) = \{-\frac{r}{3}\}$ y $G(C) = \{\frac{r}{3}\}$. Luego, viendo por casos, dependiendo si $a \in B$, $a \in C$ o $a \in A \setminus (C \cup B)$, entonces $|F(a) - G(a)| \leq \frac{2r}{3}$ (ii. ✓). \square

Democión (Tietze, parte a.). Sean X normal, $A \subset X$ cerrado y $f : A \rightarrow [-1, 1]$ continua (queremos encontrar $g : X \rightarrow [-1, 1]$ extensión continua de f). Lema anterior (con $F = f$, $G = g_1$, $r = 1$) $\Rightarrow \exists g_1 : X \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que

- i) $\|g_1\|_X \leq \frac{1}{3}$;
- ii) $\|f - g_1\|_A \leq \frac{2}{3}$.

Similarmente, el lema (con $F = f - g_1$, $G = g_2$, $r = \frac{2}{3}$) $\Rightarrow \exists g_2 : X \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que

- i) $\|g_2\|_X \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}$;
- ii) $\|(f - g_1) - g_2\|_A \leq (\frac{2}{3})^2$.

Inductivamente, encontramos $g_1, \dots, g_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ continuas tal que

- i) $\|g_{n+1}\|_X \leq \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n$;
- ii) $\|(f - g_1 - \dots - g_n) - g_{n+1}\|_A \leq (\frac{2}{3})^{n+1}$.

Hemos encontrado $(g_n)_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ continuas con

- i) $\|g_n\|_X \leq \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{n-1}$;
- ii) $\|f - (g_1 + \dots + g_n)\|_A \leq (\frac{2}{3})^n$,

$\forall n \geq 1$. Definimos $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $x \mapsto \sum_{n \geq 1} g_n(x)$. Nos falta probar que g está bien definida, g extiende a f , que g es continua y $g : X \rightarrow [-1, 1]$.

- (g bien definida:) $\forall x \in X$, la serie $\sum_{n \geq 1} g_n(x)$ converge absolutamente porque está dominada por $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n$ (criterio de comparación de series).

- (g extiende a f :) $a \in A$,

$$|f(a) - g(a)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |f(a) - g_1(a) - \dots - g_n(a)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

donde la desigualdad está dada por ii).

- (g continua:) $s_n = g_1 + \dots + g_n$ converge a g uniformemente ($\|g - s_n\|_X \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$). Esto implica que g continua si cada s_n continua. Luego

$$\begin{aligned}\|g - s_n\|_X &= \|g_{n+1} + g_{n+2} + \dots\|_X \\ &\leq \sum_{m \geq n+1} \|g_m\|_X \\ &\leq \sum_{m \geq n+1} \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{m-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.\end{aligned}$$

- Basta ver que

$$\|g\|_X \leq \sum_{n \geq 1} \|g_n\|_X \stackrel{i)}{\leq} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 1.$$

□

Demarcación (Tietze, parte b.). Partir de $f : A \rightarrow (-1, 1)$ (homeomorfo a \mathbb{R}). Queremos extensión continua $g : X \rightarrow (-1, 1)$. Parte a) $\rightsquigarrow \exists h : X \rightarrow [-1, 1]$ extensión continua de f . Tomamos $B = h^{-1}(\{1\})$ y $C = h^{-1}(\{-1\})$. Entonces, $B \cup C$ cerrado de X disjunto de A . Urysohn $\Rightarrow \phi : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $\phi(B \cup C) = \{0\}$, $\phi(A) = \{1\}$. Luego, $g := \phi h$ sirve. □

Clase 29

17 de Octubre

1.24 Variedades Topológicas

Definición 1.124 (espacio localmente Euclídeo). X espacio topológico es localmente Euclídeo de dimensión n (localmente \mathbb{R}^n) si todo punto $x \in X$ posee una vecindad homeomorfa a un abierto de \mathbb{R}^n .

Definición 1.125 (variedad topológica). X es variedad topológica (manifold) de dimensión n (n -variedad) si X es

- Localmente \mathbb{R}^n ;
- Hausdorff;
- 2do contable.

Observación. Estas tres condiciones van a implicar que X normal, por lo que vamos a tener Lema de Urysohn, Extensión de Tietze y Partición de unidad (queremos que hayan muchas funciones continuas $X \rightarrow \mathbb{R}$).

Ejemplo.

- \mathbb{R}^n es n -variedad, y cualquier abierto no vacío de \mathbb{R}^n es n -variedad (subespacios de Hausdorff/2do contables son Hausdorff/2do contables).

2. $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ es 2-variedad (superficies). En general, si M es n -variedad y $U \subset M$ abierto no vacío $\Rightarrow U$ es n -variedad.
3. M es 0-variedad ($\mathbb{R}^0 = \{0\}$) si y sólo si M contable con topología discreta. M es localmente $\mathbb{R}^0 \Leftrightarrow$ cada singleton es abierto $\Leftrightarrow M$ tiene topología discreta. Además, M con topología discreta es 2do contable $\Leftrightarrow M$ contable.

Propiedad 1.126 (Tarea 5). M m -variedad, N n -variedad $\Rightarrow M \times N$ es $(m+n)$ -variedad.

Recordar. \exists proyección estereográfica, donde obtenemos un homeomorfismo $\pi : S^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$, con N el polo norte ($= (0, \dots, 0, 1)$)

Ejemplo. $S^n = \{z \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |z| = 1\}$ es n -variedad (compacta). En efecto, S^n es T2 + 2do contable porque \mathbb{R}^{n+1} es T2 y 2do contable. Luego, $S^n \setminus \{N\}$ abierto de S^n en \mathbb{R}^n (esto nos sirve para todos los puntos, salvo para N). Para N , tomemos $r : S^n \rightarrow S^n$ tal que $(x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \dots, -x_{n+1})$, homeomorfismo ($r^{-1} = r$). Entonces, $V = r(S^n \setminus \{N\}) = S^n \setminus \{-N\}$ es abierto de S^n vecindad de N , homeomorfo a \mathbb{R}^n .

Ejemplo. Complementos de nudos en S^3 (viven en $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\} = S^3$) $\Rightarrow S^3 \setminus K$ es 3-variedad.

Teorema 1.127. Si $S^3 \setminus K_1$, $S^3 \setminus K_2$ son dos complementos de nudos. Si $K_1 \sim K_2$ homeomorfo vía un homeomorfismo de todo $\mathbb{R}^3 \Leftrightarrow S^3 \setminus K_1 \approx S^3 \setminus K_2$.

Recordar. $\Gamma \rightarrow X$ acción por homeomorfismos $\Rightarrow p : X \rightarrow X/\Gamma$ es abierto.

Ejemplo. $\mathbb{T} = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ es 2-variedad (superficie) (\mathbb{T} es el toro). Notar que es Hausdorff, pues \mathbb{Z}^2 es subgrupo cerrado de \mathbb{R}^2 ($H < \Gamma$ grupo topológico $\Rightarrow \Gamma/H$ Hausdorff $\Leftrightarrow H$ cerrado). Es 2do contable, pues si \mathcal{B} es base contable de \mathbb{R}^2 ($p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$) $\Rightarrow \{p(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$ es base contable de \mathbb{T}^2 . Por último, es localmente \mathbb{R}^2 : en efecto, si $z = p(x, y)$, queremos encontrar una vecindad U de (x, y) tal que $p|_U : U \rightarrow \mathbb{T}^2$ sea inyectiva. Luego, $p(U)$ es homeomorfo a U y abierto en \mathbb{T}^2 (es abierto por el recuerdo anterior). $p|_U : U \rightarrow p(U)$ es biyección continua + abierto y, por lo tanto, es homeomorfismo. Sirve $U = (x - \frac{1}{4}, x + \frac{1}{4}) \times (y - \frac{1}{4}, y + \frac{1}{4})$.

Observación. Esto igual prueba $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ es n -variedad.

Clase 30

20 de Octubre

Definición 1.128 (acción propiamente discontinua). Γ grupo, X espacio topológico, $\Gamma \curvearrowright X$ acción continua. Esta acción es propiamente discontinua si $\forall x \in X$, existe U vecindad de x tal que $U \cap (g \cdot U) = \emptyset \forall g \neq 1$.

Ejemplo. $\mathbb{Z}^n \curvearrowright \mathbb{R}^n$ es propiamente discontinua.

Observación. $\Gamma \curvearrowright X$ propiamente discontinua \Rightarrow Acción es libre (i.e. $x \in X$, $g \neq 1$ en $\Gamma \Rightarrow g \cdot x \neq x$).

Ejemplo.

1. $\mathbb{Q} \curvearrowright \mathbb{R}$ es libre, pero no es propiamente discontinua.
2. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{1, -1\} \curvearrowright \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $1 \cdot v = v$ y $(-1) \cdot v = -v$ no es libre ($(-1) \cdot 0 = 0$). Pero acción restringida $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \curvearrowright S^n$ es libre $\rightsquigarrow \mathbb{R}P^n = S^n / (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ espacio proyectivo.
3. $\Gamma = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \{0, \dots, p-1\} \pmod{p}$, q coprimo con $p \rightarrow \Gamma \curvearrowright S^3 \subset \mathbb{C}^2 (= \mathbb{R}^4)$ tal que

$$(n \pmod{p}) \cdot (z, w) = \left(e^{\frac{2\pi i n}{p}} z, e^{\frac{2\pi i n q}{p}} w \right).$$

Esta acción es libre. $\rightarrow L(p, q) = S^3 / (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ espacio de Lens.

Teorema 1.129 (A). M n -variedad, $\Gamma \curvearrowright M$ acción continua y propiamente discontinua con M/Γ Hausdorff $\Rightarrow M/\Gamma$ es n -variedad.

Teorema 1.130 (B). M n -variedad, Γ grupo finito con acción libre $\Gamma \curvearrowright M \Rightarrow$ Acción es propiamente discontinua y M/Γ Hausdorff (y por lo tanto M/Γ n -variedad).

Corolario 1.131.

1. $\mathbb{R}P^n$ son n -variedades (compactas).
2. $L(p, q)$ son 3-variedades (compactas).

Recordar. $\Gamma \curvearrowright X$ acción continua, $p : X \rightarrow X/\Gamma$.

1. p es abierto;
2. \mathcal{B} base de $X \Rightarrow \{p(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$ es base de X/Γ (y, por lo tanto, X 2do contable $\Rightarrow X/\Gamma$ 2do contable) (Ejercicio).

Democión (Teorema A). M n -variedad, $\Gamma \curvearrowright M$ propiamente discontinua, continua. Sabemos que M/Γ (hipótesis). Además, M 2do contable $\Rightarrow M/\Gamma$ 2do contable (recuerdo 2.). Falta ver que: dado $\bar{x} = p(x)$ en M/Γ , encontrar una vecindad de \bar{x} homeomorfa a un abierto de \mathbb{R}^n . En efecto, $\Gamma \curvearrowright M$ propiamente discontinua $\Rightarrow \exists U$ vecindad de x tal que $U \cap (g \cdot U) = \emptyset \forall g \in \Gamma, g \neq 1$. Luego, p mapa abierto $\Rightarrow p(U)$ es vecindad de \bar{x} . Así, $* \Rightarrow p|_U : U \rightarrow p(U)$ es intyectivo $[y_1, y_2 \in U, p(y_1) = p(y_2) \Rightarrow y_2 = g \cdot y_1]$ para $g \in \Gamma \Rightarrow y_2 \in U \cap (g \cdot U) \Rightarrow g = 1$ y $y_1 = y_2$.

Ojo: U no es necesariamente homeomorfo a un abierto de \mathbb{R}^n , pero si V vecindad de x homeomorfa a abierto de $\mathbb{R}^n \Rightarrow U \cap V$ es vecindad de x , homeomorfa a abierto de \mathbb{R}^n .

Por último, debemos verificar que $p|_{U \cap V} : U \cap V \rightarrow p(U \cap V)$ es homeomorfismo. Como $p(U \cap V)$ es vecindad de \bar{x} homeomorfa a $U \cap V$, luego a un abierto de \mathbb{R} . Luego, $p|_{U \cap V}$ es homeomorfismo porque es

- continuo,
- biyectivo,
- abierto (i.e. $(p|_{U \cap V})^{-1}$ continua)

□

Aclaración: $U \cap V$ homeomorfo a abierto de \mathbb{R}^n . En efecto, $\exists \phi : V \rightarrow \hat{V} \subset \mathbb{R}^n$ homeomorfismo, \hat{V} abierto. Luego, $U \cap V$ es abierto de $V \Rightarrow \phi|_{U \cap V} : U \cap V \rightarrow \phi(U \cap V)$ homeomorfismo. Luego, $\phi(U \cap V)$ abierto en $\phi(V) = \hat{V}$ abierto de $\mathbb{R}^n \Rightarrow \phi(U \cap V)$ abierto en \mathbb{R}^n .

Recordar. M/Γ Hausdorff ssi

$$\Delta = \{(x, g \cdot x) \mid x \in M, g \in \Gamma\}$$

cerrado en $M \times M$. Notar que

$$\begin{aligned} \{(x, g \cdot x) \mid x \in M, g \in \Gamma\} &= \bigcup_{g \in \Gamma} \{(x, g \cdot x) \mid x \in M\} \\ &= \underbrace{\bigcup_{\substack{g \in \Gamma \\ \text{finito}}} L_g(\underbrace{\{(x, x) \mid x \in M\}}_{\text{cerrado!}})}. \end{aligned}$$

con $L_g : M \times M \rightarrow M \times M$ tal que $(x, y) \mapsto (x, g \cdot y)$ homeomorfismos. Δ cerrado por que $\{(x, x) \in M \times M\}$ cerrado en $M \times M$ (ejercicio: equivalente a M Hausdorff).

Demostración (Teorema B). M n -variedad, $\Gamma \curvearrowright M$ acción libre con Γ finito. Queremos:

- i) M/Γ Hausdorff;
- ii) $\Gamma \curvearrowright M$ propiamente discontinua.

Observar que en el recuerdo se probó que $\Gamma \curvearrowright X$ acción por homeomorfismos y Γ finito, X/Γ Hausdorff $\Rightarrow X/\Gamma$ Hausdorff.

Luego, queremos probar que $\Gamma \curvearrowright M$ propiamente discontinua. Dado $x \in M$, queremos U vecindad tal que $U \cap (g \cdot U) = \emptyset$ si $g \neq 1$. En efecto, si $\Gamma = \{1, g_1, \dots, g_r\} \Rightarrow \{x, g_1 \cdot x, \dots, g_r \cdot x\}$ todos distintos (pues es acción libre). Luego, M Hausdorff $\Rightarrow g \neq 1 \Rightarrow \exists U_g, V_g$ abiertos disjuntos con $x \in U_g, g \cdot x \in V_g$. Luego, $U_{g_1}, \dots, U_{g_r}, g_1^{-1}V_{g_1}, \dots, g_r^{-1}V_{g_r}$ vecindades de x . Sea $U = \bigcap_{i=1}^r (U_{g_i} \cap g_i^{-1}V_{g_i})$ vecindad de x . Falta ver que $U_{g_i} \cap V_{g_i} = \emptyset \forall i = 1, \dots, r \Rightarrow U \cap g \cdot U = \emptyset \forall g \neq 1$ en Γ . □

Clase 31

22 de Octubre

Teorema 1.132 (A). M n -variedad compacta $\Rightarrow \exists$ incrustación $f : M \rightarrow \mathbb{R}^N$ para algún N (f inyección continua y $f : M \rightarrow f(M)$ es homeomorfismo).

Definición 1.133 (Soporte). X espacio topológico, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. El soporte de f es

$$\text{supp } f = \overline{\{x \in X \mid |f(x)| \neq 0\}}.$$

Definición 1.134 (partición de la unidad). X espacio top., $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$ cubriente abierto finito. Una partición de la unidad dominada por \mathcal{U} es una colección de funciones continuas $\phi_1, \dots, \phi_n : X \rightarrow [0, 1]$ tales que

1. $\text{supp } \phi_i \subset U_i \quad \forall i = 1, \dots, n;$
2. $\sum_{i=1}^n \phi_i(x) = 1 \quad \forall x \in X.$

Teorema 1.135 (B). X normal, \mathcal{U} cubriente abierto finito de $X \Rightarrow \exists$ partición de unidad dominada por \mathcal{U} .

Proposición 1.136. M es variedad topológica $\Rightarrow M$ es normal.

Demostración. Recordar que Regular + 2do contable \Rightarrow Normal. Luego, basta con probar que M es regular. También, recordar que si Y localmente compacto Hausdorff $\Rightarrow Y \subset Y^*$ compactificación de un punto tal que Y^* compacto y Hausdorff. Luego, basta probar que M es localmente compacto. Esto tiene dos caminos válidos:

1. $M \subset M^*$ compacto Hausdorff $\Rightarrow M^*$ Normal $\Rightarrow M^*$ regular $\Rightarrow M$ regular.
2. M localmente compacto Hausdorff $\Rightarrow \forall x \in M, \forall U$ vecindad de $x, \exists V$ vecindad de x con $\overline{V} \subset U$ y \overline{V} compacto.

Para ello, notar que M es localmente compacto porque es localmente \mathbb{R}^n . Si $x \in M, U$ vecindad de $x \Rightarrow \exists \widehat{U}$ vecindad de x con $\widehat{U} \subset U$ y \widehat{U} homeomorfa a abierto en \mathbb{R}^n . Luego, en \widehat{U} hay vecindad V de x con $\overline{V} \subset \widehat{U} \subset U$ y \overline{V} compacto (\mathbb{R}^n es localmente compacto Hausdorff). \square

Clase 32

24 de Octubre

1.25 Particiones de Unidad (36)

Demostración (Teorema A, clase pasada, asumiendo B). Si $x \in M, \exists U_x \subset M$, vecindad de x y homeomorfo a abierto de \mathbb{R}^n . $\{U_x \mid x \in M\}$ cubriente abierto de $M \Rightarrow \exists$ subcubriente abierto $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_m\}$ tal que $\forall i = 1, \dots, m, \exists g_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ (continua, inyectiva, homeo en su imagen, imagen es abierto). Teorema B $\Rightarrow \exists \phi_1, \dots, \phi_m : M \rightarrow [0, 1]$ continuas, con

- i) $\text{supp } \phi_i \subset U_i,$

$$\text{ii)} \sum_{i=1}^n \phi_i(x) = 1 \quad \forall x \in M.$$

Dado $i = 1, \dots, m$, definimos

$$h_i : M \rightarrow \mathbb{R}^N$$

$$x \mapsto \begin{cases} \phi_i(x)g_i(x) & \text{si } x \in U_i \\ \vec{0} & \text{si } x \notin U_i \end{cases}.$$

Luego, h_i es continua!!! Definimos

$$F : M \rightarrow \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^N$$

$$x \mapsto (h_1(x), \dots, h_m(x), \phi_1(x), \dots, \phi_m(x)).$$

es continua! (cada coordenada es continua) ($N = m(n+1)$). Falta ver que F es inyectiva: Tomemos $x, y \in M$ con $F(x) = F(y)$. Como $\sum \phi_i \equiv 1$, existe i con $\phi_i(x) = \phi_i(y) > 0 \Rightarrow x, y \in U_i$. Sabemos $h_i(x) = h_i(y) \Rightarrow \phi_i(x)g_i(x) = \phi_i(y)g_i(y) \Rightarrow g_i(x) = g_i(y) (\in \mathbb{R}^n)$ (g_i es inyectiva en U_i) $\Rightarrow x = y$. \square

Demarcación (Teorema B(i)). X normal, $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_m\}$ cubriendo abierto (Queremos construir $\phi_1, \dots, \phi_m : X \rightarrow [0, 1]$). Notar que $f_1 : X \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ tal que $\text{supp } f_1 \subset U_1$ es equivalente a $f_1(X \setminus U_1) = \{0\}$ (notar que $X \setminus U_1$ cerrado). Por lo tanto, queremos C_1 cerrado con $C_1 \subset U_1$ ($C_1 \cap (X \setminus U_1) = \emptyset$).

Digamos que tenemos cerrados C_1, \dots, C_m tal que $C_i \subset U_i \quad \forall i \Rightarrow$ Urysohn nos da $f_i : X \rightarrow [0, 1]$ con $f_i(C_i) = \{1\}$ y $f_i(X \setminus U_i) = \{0\}$ ($\rightsquigarrow \text{supp } f_i \subset U_i$). Queremos C_i tales que $C_1 \cup \cdots \cup C_m = X$. Basta tomar $C_i = \overline{V}_i$ con $\{V_1, \dots, V_m\}$ cubriendo abierto de X tal que $V_i \subset U_i \quad i = 1, \dots, m$. Si esto pasara, $\sum_{i=1}^m f_i(x) > 0 \quad \forall x \in X \Rightarrow$ definimos $\phi_i : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $x \mapsto \frac{f_i(x)}{\sum_{j=1}^m f_j(x)}$ ($\Rightarrow \sum \phi_i = 1$, $\text{supp } \phi_i \subset U_i$). Falta encontrar los abiertos V_1, \dots, V_m . Si definimos $B_1 = X \setminus (U_2 \cup \cdots \cup U_m)$ cerrado con $B_1 \subset U_1$ ($U_1 \cup \cdots \cup U_m$ cubre X). Luego, X normal $\Rightarrow \exists V_1$ abierto con $B_1 \subset V_1 \subset \overline{V}_1 \subset U_1$ (se sigue por inducción). \square