

Teoría de Integración

Basado en las clases impartidas por Santiago Saglietti en el
segundo semestre del 2025

Contents

1	Integral de Riemann	2
1.1	Limitaciones de la integral de Riemann	6
1.2	Demostración del teorema de extensión de Carathéodory	17

Chapter 1

Integral de Riemann

Clase 1

4 de Agosto

Definición 1.1 (partición + intervalos). Una partición de un intervalo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ es un subconjunto finito $\Pi \subseteq [a, b]$ tal que $a, b \in \Pi$. Denotaremos a las particiones como $\Pi = \{x_0, \dots, x_n\}$, donde $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Los intervalos $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$ serán llamados intervalos de la partición.

Observación. A veces, identificaremos la partición Π con $(I_i)_{i=1, \dots, n}$. En tal caso, abusando de la notación, escribiremos $I_i \in \Pi$ cuando queramos hablar de los intervalos de Π .

Definición 1.2 (norma de particiones). La norma de una partición Π como $\|\Pi\| := \max_{i=1, \dots, n} (x_i - x_{i-1}) = \max_{I_i \in \Pi} |I_i|$.

Definición 1.3 (partición marcada). Una partición marcada de $[a, b]$ es un par $\Pi^* := (\Pi, \varepsilon)$ donde:

- $\Pi = \{x_0, \dots, x_n\}$ es una partición de $[a, b]$;
- $\varepsilon = \{x_1^*, \dots, x_n^*\}$ es una colección de puntos tal que $x_i^* \in I_i$ para cada $i = 1, \dots, n$.

Observación. Dada una partición marcada $\Pi^* = (\Pi, \varepsilon)$, definimos $\|\Pi^*\| := \|\Pi\|$.

Definición 1.4 (Suma de Riemann). Sean $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada y $\Pi^* = (\Pi, \varepsilon)$ una partición marcada. Definimos la suma de Riemann de f asociada a Π^* como:

$$S_R(f; \Pi^*) := \sum_{n=1}^n f(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{I_i \in \Pi} f(x_i^*)|I_i|.$$

Clase 2

6 de Agosto

Definición 1.5 (Riemann integrable). Dada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada, decimos que es Riemann integrable si existe el límite $\lim_{\|\Pi^*\| \rightarrow 0} S_R(f; \Pi^*)$. Equivalentemente, $\exists L \in \mathbb{R}$, tal que dado cualquier $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que $\|\Pi^*\| < \delta \Rightarrow |S_R(f; \Pi^*) - L| < \varepsilon$.

Observación. Cuando el límite existe, lo llamamos la integral de Riemann de f en $[a, b]$ y lo notamos $\int_a^b f(x)dx$.

Definición 1.6 (Sumas superior e inferior de Darboux). Dadas $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada y $\Pi = (I_i)_{i=1, \dots, n}$ una partición de $[a, b]$, definimos

$$m_{I_i} := \inf_{x \in I_i} f(x), \quad M_{I_i} := \sup_{x \in I_i} f(x) \quad \text{y}$$

$$\underline{S}(f; \Pi) := \sum_{I_i \in \Pi} m_{I_i} |I_i|, \quad \bar{S}(f; \Pi) := \sum_{I_i \in \Pi} M_{I_i} |I_i|.$$

Llamamos a $\underline{S}(f; \Pi)$ y $\bar{S}(f; \Pi)$ las sumas inferior y superior de Darboux de f con respecto a Π , respectivamente.

Nota. Como $m_{I_i} \leq f(x) \leq M_{I_i}, \forall x \in I_i$ para toda partición marcada $\Pi^* = (\Pi; \varepsilon)$, tenemos $\underline{S}(f; \Pi) \leq S_R(f; \Pi^*) \leq \bar{S}(f; \Pi)$.

Definición 1.7 (refinamiento). Diremos que una partición Π' de $[a, b]$ es un refinamiento de otra partición de $[a, b]$, Π , si $\Pi \subseteq \Pi'$. Equivalentemente, si para todo $J_i \in \Pi'$ existe $I_i \in \Pi$ tal que $J_i \subseteq I_i$.

Proposición 1.8. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada. Entonces,

- Si $\Pi \subseteq \Pi'$ son particiones de $[a, b]$,

$$\underline{S}(f; \Pi) \leq \underline{S}(f; \Pi'), \quad \bar{S}(f; \Pi) \geq \bar{S}(f; \Pi').$$

- Si Π_1, Π_2 son particiones de $[a, b]$ cualesquiera,

$$\underline{S}(f; \Pi_1) \leq \bar{S}(f; \Pi_2)$$

Definición 1.9. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada. Definimos:

- La integral superior (de Darboux) de f como $\int_a^b f(x)dx := \inf_{\Pi} \bar{S}(f; \Pi)$.
- La integral inferior (de Darboux) de f como $\int_a^b f(x)dx := \sup_{\Pi} \underline{S}(f; \Pi)$.

Teorema 1.10. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada. Entonces,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \underline{S}(f; \Pi) \quad \text{y} \quad \int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \overline{S}(f; \Pi).$$

Observación. Equivalentemente, para cualquier sucesión $(\Pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de partición de $[a, b]$ tal que $\|\Pi_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, se tiene que

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}(f; \Pi_n) \quad \text{y} \quad \int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(f; \Pi_n).$$

Teorema 1.11. Dada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada, son equivalentes:

1. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ (i.e., f es Darboux integrable).
2. f es Riemann integrable.
3. $\lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \overline{S}(f; \Pi) - \underline{S}(f; \Pi) = 0$.
4. $\forall (\Pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión de particiones de $[a, b]$ tal que $\|\Pi_n\| \rightarrow 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(f; \Pi_n) - \underline{S}(f; \Pi_n) = 0.$$

5. $\exists (\Pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión de particiones de $[a, b]$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(f; \Pi_n) - \underline{S}(f; \Pi_n) = 0.$$

Clase 3

7 de Agosto

Nota. Las integrales en el sentido de Darboux y el de Riemann coinciden.

Proposición 1.12. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es monótona, entonces es Riemann integrable.

Observación. Una función monótona tiene discontinuidades numerables.

Proposición 1.13. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces es Riemann integrable.

En particular, existen funciones Riemann integrables con numerables discontinuidades. De hecho, hay ejemplos con c (cardinal del continuo) discontinuidades. No obstante, si f es integral de Riemann, su conjunto de discontinuidades tiene que ser "pequeño".

Teorema 1.14. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada. Entonces, f es Riemann Integrable si y sólo si su conjunto de discontinuidades tiene medida nula.

Definición 1.15 (intervalo). Decimos que un conjunto $I \subseteq \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ es un intervalo si satisface

$$x, y \in I \Rightarrow z \in I \text{ para todo } \min x, y \leq z \leq \max x, y.$$

Ejemplo. (y propiedades)

- Dados $a \leq b$ ($a, b \in \mathbb{R}$), los conjuntos (a, b) , $(a, b]$, $[a, b]$, $[a, b)$ son intervalos;
- El conjunto vacío es un intervalo ($\emptyset = (a, a)$);
- Los puntos son intervalos. $I = [\lambda, \lambda]$;
- La intersección de intervalos es intervalos.

Definición 1.16 (intervalo generalizado). Decimos que un conjunto $I \subseteq \mathbb{R}^d$ es un intervalo si puede escribirse como

$$I = \prod_{k=1}^d I_k$$

donde cada I_r es un intervalo en \mathbb{R} . La medida de un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}^d$ se define como

$$|I| := \prod_{k=1}^d |I_k|.$$

Nota. Los intervalos en \mathbb{R}^d heredan las mismas propiedades en \mathbb{R} :

- Intersección de intervalos en \mathbb{R}^d es intervalo.
- Si $I \subseteq J \subseteq \mathbb{R}^d$ son intervalos, entonces $|I| \leq |J|$.

Definición 1.17 (medida nula). Un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^d$ se dice de medida nula si, dado $\varepsilon > 0$, existe una sucesión $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de intervalos de \mathbb{R}^d tal que

$$E \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \quad \text{y} \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} |I_n| < \varepsilon.$$

Ejemplo. (y propiedades)

1. Todo conjunto unitario $\{x\}$, ($x \in \mathbb{R}^d$) tiene medida nula;
2. Toda unión numerable de conjuntos de medida nula tiene medida nula;
3. Cualquier conjunto numerable tiene medida nula;
4. Cualquier subconjunto de un conjunto de medida nula tiene medida nula;
5. Existen conjuntos no numerables de medida nula:

- En \mathbb{R}^d con $d \geq 2$, los ejes $\{x : x_1 = 0\}, i = 1, \dots, d$ tiene medida nula.
 - En \mathbb{R} , el conjunto de cantor tiene medida nula.
6. $E \subseteq \mathbb{R}^d$ es de medida nula, entonces αE tiene medida nula $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
 7. $E \subseteq \mathbb{R}^d$ es de medida nula, entonces $E + v$ tiene medida nula $\forall v \in \mathbb{R}^d$.
 8. Si E contiene un intervalo no unitario, entonces no tiene medida nula. Notar que:
 - La vuelta no es válida: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ no contiene intervalos no unitarios pero no puede tener medida nula.
 - De esto se deduce que si $E \subseteq \mathbb{R}^d$ tiene medida nula. Entonces E^c es denso (no vale la vuelta: $E^c = \mathbb{Q}$).
 9. $E \subseteq \mathbb{R}^d$ tiene medida nula si y sólo si

$$|E|_e := \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} |I_n| : E \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \right\} = 0, \quad I_n \text{ intervalo } \forall n \in \mathbb{N}.$$

Clase 4

8 de Agosto

Teorema 1.18. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada. Entonces

$$f \text{ Riemann integrable} \iff D_f = \{x \in [a, b] : f \text{ discontinua en } x\} \text{ tiene medida nula.}$$

1.1 Limitaciones de la integral de Riemann

1. Sólo está definida para f acotada y sobre intervalos $[a, b]$ acotados. La teoría de integrales impropias resuelve esto.
2. Propiedades del espacio $\mathcal{R}([a, b]) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ Riemann integrable}\}$: Nos gustaría poder definir una noción de convergencia en $\mathcal{R}([a, b])$ tal que

$$f_n \rightarrow f \text{ en } \mathcal{R}([a, b]) \Rightarrow \int_a^b f_n \rightarrow \int_a^b f \quad \left(\lim \int_a^b f_n = \int_a^b \lim f_n \right).$$

Observación. La convergencia puntal NO cumple esto (punto 2).

Ejemplo (1).

- $f_n := n\chi_{(0, \frac{1}{n}]}$ es Riemann integrable en $[0, 1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
- $f_n \rightarrow f \cong 0$ puntualmente en $[0, 1]$;
- $\int_0^1 f_n = 1 \not\rightarrow 0 = \int_0^1 f$.

Ejemplo (2).

- Sea $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una enumeración de $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$;
- $f_n := \chi_{\{Q_1, \dots, Q_n\}}$ es Riemann integrable en $[0, 1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
- $f_n \rightarrow f := \chi_{\mathbb{Q} \cap [0, 1]}$ puntualmente en $[0, 1]$;
- f no es Riemann integrable. $\int_0^1 f = 0 \neq 1 = \overline{\int_0^1 f}$.

Observación. La convergencia uniforme SÍ cumple esto, pero es demasiado fuerte.

Ejercicio (Guía 1). Sean $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{R}([a, b])$ tales que $f_n \rightarrow f$ uniformemente en $[a, b]$. Entonces, $f \in \mathcal{R}([a, b])$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$.

Ejemplo (3).

- $f_n(x) := x^n$ en $[0, 1]$, $f_n \in \mathcal{R}([a, b])$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \rightarrow \chi = f$ puntualmente;
- $f \in \mathcal{R}([a, b])$ y $\int_0^1 f_n(x) dx = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 = \int_0^1 f$;
- f_n no converge uniformemente a f .

Resulta que la noción de convergencia "óptima" (la más "débil" que cumple lo que queremos) es la de convergencia en L' :

$$f_n \xrightarrow{L'} f \text{ si } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f_n - f| = 0.$$

Esta noción de convergencia viene dada por una "norma":

- $\|f\|_{L'} := \int_a^b |f|$ (recordar que $f \in \mathcal{R}([a, b]) \Rightarrow |f| \in \mathcal{R}([a, b])$);
- $d_{L'}(f, g) := \|f - g\|_{L'} = \int_a^b |f - g|$.

Observación. $\|\cdot\|_{L'}$ no es una norma porque $\|f\|_{L'} = 0 \nRightarrow f = 0$. Decimos que es una *pseudo-norma* y d una *pseudo-métrica*.

Para arreglar esto, dadas $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, decimos que son *equivalentes* y lo notamos $f \sim g$ si $\{x \in [a, b] : f(x) \neq g(x)\}$ tiene medida nula. Resulta que \sim es una relación de equivalencia y, además,

$$f, g \in \mathcal{R}([a, b]), f \sim g \Rightarrow \int_a^b f = \int_a^b g.$$

Sea $\overline{\mathcal{R}}([a, b])$ el conjunto de clases de equivalencia de $\mathcal{R}([a, b])$, y denotamos por \bar{f} a la clase de equivalencia de $f \in \mathcal{R}([a, b])$. Con esto, $\|\bar{f}\|_{L'} := \int_a^b |f| dx$ define una norma en $\overline{\mathcal{R}}([a, b])$ que se llama la **norma** L' .

Observación. Hay un problema: $(\overline{\mathcal{R}}([a, b]), \|\cdot\|_{L'})$ NO ES COMPLETO!

3. **TFC:** Si $f \in \mathcal{R}([a, b])$ es continua en $x_0 \in [a, b]$, entonces $F(x) := \int_a^x f(t) dt$ es derivable en x_0 y $F'(x_0) = f(x_0)$. En particular, F es derivable en x y $F'(x) = f(x)$ para todo x salvo un conjunto de medida nula.

Clase 5

18 de Agosto

Teorema Fundamental del Cálculo: Si $f \in \mathcal{R}([a, b])$ es continua en $x_0 \in [a, b]$, entonces $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(x) := \int_a^x f(t)dt$ es derivable en $x = x_0$ y vale $F'(x_0) = f(x_0)$. En particular, $F'(x) = f(x)$ salvo quizás por un conjunto de $x \in [a, b]$ de medida nula. O sea, podemos integrar y luego derivar y esto es "casi" como no hacer nada. Pero, tenemos problemas:

1. Este "casi" no puede removerse

Teorema 1.19 (Hankel, 1871). Dado $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, existe $f \in \mathcal{R}([a, b])$ tal que $F(x) := \int_a^x f(t)dt$ no es derivable para ningún x en un subconjunto denso en $[a, b]$ (y, en particular, infinito).

2. A veces no podemos componer en el orden inverso

Teorema 1.20 (Volterra, 1881). Dado $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, existe $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivable en $[a, b]$, tal que f' es acotada en $[a, b]$ pero $f' \notin \mathcal{R}([a, b])$.

Extendiendo la integral de Riemann

Sean $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada y $\Pi = \{x_0, \dots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$. Definimos:

$$\begin{aligned}\Phi_{f,\Pi}(x) &:= m_{I_1}\chi_{[x_0, x_1]}(x) + \sum_{i=2}^n m_{I_i}\chi_{(x_{i-1}, x_i]}(x), \quad m_{I_i} = \inf_{t \in I_i} f(t) \\ &= m_{I_1}\chi_{\{x_0\}}(x) + \sum_{i=1}^n m_{I_i}\chi_{(x_{i-1}, x_i]}(x) \\ \psi_{f,\Pi}(x) &:= M_{I_1}\chi_{\{x_0\}}(x) + \sum_{i=1}^n M_{I_i}\chi_{(x_{i-1}, x_i]}(x), \quad M_{I_i} = \sup_{t \in I_i} f(t).\end{aligned}$$

Observemos que $\Phi_{f,\Pi}(x) \leq f(x) \leq \psi_{f,\Pi}(x) \quad \forall x \in [a, b]$. Además,

$$\begin{aligned}\int_a^b \Phi_{f,\Pi}(x)dx &= \underline{S}(f, \Pi), \\ \int_a^b \psi_{f,\Pi}(x)dx &= \overline{S}(f, \Pi).\end{aligned}$$

En particular, si f es Riemann integrable,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \overline{\int_a^b f(x)dx} = \inf \left\{ \int_a^b \psi_{f,\Pi} : \Pi \text{ partición} \right\} \\ &= \underline{\int_a^b f(x)dx} = \sup \left\{ \int_a^b \Phi_{f,\Pi} : \Pi \text{ partición} \right\}.\end{aligned}$$

Definición 1.21 (función escalonada). Una función $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ se dice escalonada si existen $\Pi = \{x_0, \dots, x_n\}$ partición de $[a, b]$ y $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$\Phi|_{(x_{i-1}, x_i)} \equiv c_i \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Notemos que podemos escribir a cualquier función Φ escalonada como

$$\begin{aligned}\Phi(x) &:= \sum_{i=1}^n c_i \cdot \chi_{(x_{i-1}, x_i)}(x) + \sum_{i=0}^n \Phi(x_i) \cdot \chi_{\{x_i\}}(x) \\ &= \sum_{i=1}^k c_j \cdot \chi_{A_j}(x).\end{aligned}$$

donde los A_j son intervalos disjuntos tales que $\bigsqcup_{j=1}^k A_j = [a, b]$ (se pone una "D" dentro de la unión para denotar que estamos haciendo una unión disjunta).

Si tomamos Φ de la forma $\Phi = \sum_{j=1}^k c_j \cdot \chi_{A_j}$ con $(A_j)_{j=1, \dots, k}$ disjuntos, $\bigsqcup_{j=1}^k A_j = [a, b]$ pero A_j no son necesariamente intervalos, diremos que Φ es una función escalonada generalizada. Como para funciones escalonadas "normales", tenemos

$$\int_a^b \Phi(x) dx = \sum_{j=1}^k c_j \cdot |A_j| \left(= \sum_{i=1}^n c_i \cdot |I_i| \right)$$

La función longitud Sea \mathcal{I} la colección de los intervalos en \mathbb{R} . Definimos la función longitud $\lambda : \mathcal{I} \rightarrow [0, \infty]$ como $\lambda(I) := |I|$.

Propiedades:

1. $\lambda(\emptyset) = 0$;
2. $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$, $I_1 \subseteq I_2 \Rightarrow \lambda(I_1) \leq \lambda(I_2)$ (Monotonía de λ);
3. (Aditividad finita de λ) Si $I \in \mathcal{I}$ es tal que $I = \bigsqcup_{i=1}^n J_i$ con $J_i \in \mathcal{I}$, $\forall i = 1, \dots, n$, $J_i \cap J_j = \emptyset$ con $i \neq j$, entonces

$$\lambda(I) = \sum_{i=1}^n \lambda(J_i);$$

4. (σ -aditividad de λ) Si $I \in \mathcal{I}$ es tal que $I = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$, con $(I_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{I}$ disjuntos, entonces

$$\lambda(I) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(I_i);$$

5. (σ -subaditividad de λ) Si $I \in \mathcal{I}$ verifica $I \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$, $(I_i)_{i \in \mathbb{N}}$ intervalos (no necesariamente disjuntos), entonces $\lambda(I) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(I_i)$;
6. $\lambda(I+x) = \lambda(I)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $I+x := \{a+x : a \in I\}$;
7. $\lambda(\{x\}) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

Clase 6

20 de Agosto

Nos gustaría extender λ a una clase más grande que \mathcal{I} . Más precisamente, nos gustaría definir una aplicación $m : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$, donde \mathcal{M} es una colección de subconjuntos de \mathbb{R} tal que $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{M}$, de manera tal que, dado $E \in \mathcal{M}$, $m(E)$ represente la "longitud" de E . Idealmente, nos gustaría que m cumpla lo siguiente:

1. $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$;
2. Si $I \in \mathcal{I}$, entonces $m(I) = |I|$;
3. m es σ -aditiva ($E, (E_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}, E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \Rightarrow m(E) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$);

Ejercicio. (1) + (2) + (3) $\Rightarrow m$ es monótona, σ -subaditiva y finitamente aditiva.

- 4 Si $E \in \mathcal{M}$, entonces $E + x \in \mathcal{M}$ y $m(E + x) = m(E) \forall x \in \mathbb{R}$.

El problema es que, si asumimos el Axioma de Elección, uno puede mostrar que no existe una tal m que cumpla (1) – (2) – (3) – (4) y, de hecho, no se sabe si existe m que cumpla (1) – (2) – (3). (Si asumimos la hipótesis del continuo, entonces no existe m que cumpla (1) – (2) – (3)).

Luego, para construir m debemos debilitar alguna de las propiedades:

- Si debilitamos (1) \Rightarrow TEORÍA DE LA MEDIDA;
- Si debilitamos (3), tenemos dos opciones sobre lo que pedir:
 - \rightarrow aditividad finita \Rightarrow "medidas finitamente aditivas";
 - \rightarrow σ -subaditividad \Rightarrow "medidas exteriores".

Vamos a optar por debilitar (1).

Una manera de extender λ es la siguiente:

- i. Si $E = \bigcup_{i=1}^n I_i$ entonces definimos $\lambda(E) := \sum_{i=1}^n \lambda(I_i)$;
- ii. Si $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ entonces definimos $\lambda(E) := \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(I_i)$;
- iii. La fórmula anterior nos permite definir $\lambda(E)$ para todo E abierto en \mathbb{R} ;
- iv. Para conjuntos mas generales, "aproximar" por abiertos.

Definición 1.22 (premedida). Sea X un conjunto no vacío y \mathcal{C} una colección de subconjuntos de X tal que $\emptyset \in \mathcal{C}$. Diremos que una aplicación $\tau : \mathcal{C} \rightarrow [0, \infty]$ es una premedida si $\tau(\emptyset) = 0$.

Observación. El conjunto no vacío X será llamado un espacio y la colección \mathcal{C} será llamada una clase (de subconjuntos de X).

Intuitivamente, \mathcal{C} representa la colección de subconjuntos cuyo "tamaño" sabemos medir y τ nos da su medida.

Ejemplo.

1. **Premedida de Lebesgue:** $\mathcal{C} := \mathcal{I} := \{I \subseteq \mathbb{R} : I \text{ intervalo}\}$, $\tau(I) := |I|$.
2. **Premedidas de Lebesgue-Stieltjes:** Sea $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monótona creciente y continua a derecha ($\lim_{x \rightarrow x_0}^+ F(x) = F(x_0)$). Una función tal se dice una función de Lebesgue-Stieltjes.

Observemos que, por monotonía, existen los límites

$$\left\{ \begin{array}{l} F(\infty) := \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) \\ F(-\infty) := \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) \end{array} \right\} \in \mathbb{R}$$

Sea además la clase $\tilde{\mathcal{I}}$ de intervalos de \mathbb{R} dada por

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{I}} &:= \{I(a, b) : -\infty \leq a \leq b \leq \infty\} \text{ donde } I(a, b) := (a, b] \cap \mathbb{R} \\ &= \{(a, b] : -\infty \leq a \leq b < \infty\} \cup \{(a, \infty) : -\infty \leq a < \infty\}. \end{aligned}$$

Definimos la premedida τ_F de Lebesgue-Stieltjes asociada a F como la aplicación $\tau_F : \tilde{\mathcal{I}} \rightarrow [0, \infty]$, dada por

$$\tau_F(I(a, b)) = F(b) - F(a).$$

Nota. Observar que si $F(x) = x$ entonces τ_F es la premedida de Lebesgue (sobre $\tilde{\mathcal{I}}$).

3. **Premedidas de Probabilidad:** Si F es una función de L-S tal que $F(\infty) = 1$ y $F(-\infty) = 0$, decimos que F es una función de distribución (acumulada). En tal caso, la premedida τ_F se conoce como premedida de probabilidad o predistribución (en \mathbb{R}).

Observación. $\tau_F(\mathbb{R}) = \tau_F(I(-\infty, \infty)) = F(\infty) - F(-\infty) = 1 - 0 = 1$.

4. Premedida...

Clase 7

22 de Agosto

Definición 1.23 (semiálgebra). Sea X un espacio y \mathcal{C} una clase de subconjuntos de X . Decimos que \mathcal{C} es una semiálgebra (de subconjuntos de X) si cumple:

1. $\emptyset \in \mathcal{C}$;
2. (\mathcal{C} es cerrada por intesecciones finitas) $A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{C}$;
3. Si $A \in \mathcal{C}$, existen $C_1, \dots, C_n \in \mathcal{C}$ disjuntos tal que $A^c = \bigcup_{i=1}^n C_i$.

Ejemplo.

1. La clase \mathcal{I}_d de intervalos en \mathbb{R}^d es una semiálgebra.
2. La clase $\tilde{\mathcal{I}} := \{(a, b] \cap \mathbb{R} : -\infty \leq a \leq b \leq \infty\}$ es una semiálgebra.
3. Si X e Y son espacios y $\mathcal{C}_X, \mathcal{C}_Y$ son semiálgebras en X e Y respectivamente, entonces

$$\mathcal{C}_X \times \mathcal{C}_Y := \{F \times G : F \in \mathcal{C}_X, G \in \mathcal{C}_Y\}$$

es una semiálgebra en $X \times Y$, llamada "semiálgebra producto".

Definición 1.24 (álgebra). Sean X un espacio y \mathcal{A} una clase de subconjuntos de X . Decimos que \mathcal{A} es un álgebra (de subconjuntos de X) si cumple que:

- (i) $\emptyset \in \mathcal{A}$;
- (ii) \mathcal{A} es cerrado por intersecciones finitas;
- (iii) (\mathcal{A} es cerrada por complementos) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$.

Equivalentemente, en presencia de (iii), (ii) se puede reemplazar por:

- (ii') (\mathcal{A} es cerrada por uniones finitas) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$. (**Dem:** Ejercicio!)

Ejemplo.

1. X espacio, $\mathcal{A}_1 := \{\emptyset, X\}$, $\mathcal{A}_2 := \mathcal{P}(X)$ son álgebras (donde \mathcal{A} es llamada el álgebra trivial);
2. Sea \mathcal{S} una semiálgebra de subconjuntos de un espacio X . Entonces

$$\mathcal{A} := \left\{ E \subseteq X : \exists S_1, \dots, S_n \in \mathcal{S} \text{ disjuntos tal que } E = \bigcup_{i=1}^n S_i \right\}$$

es un álgebra, llamada el álgebra generada por \mathcal{S} . Notemos que $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ es el menor álgebra que contiene a \mathcal{S} :

- (i) $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ es un álgebra y $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{S})$;
- (ii) Si \mathcal{A}' es un álgebra con $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}'$ entonces $\mathcal{A}(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{A}'$.

Nota. Toda álgebra es una semiálgebra.

Definición 1.25 (σ -álgebra). Una clase (no vacía) \mathcal{M} de subconjuntos de un espacio X se dice una σ -álgebra si cumple:

1. $\emptyset \in \mathcal{M}$;
2. $E \in \mathcal{M} \Rightarrow E^c \in \mathcal{M}$;
3. $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathcal{M}$.

Llamamos al par (X, \mathcal{M}) un espacio medible y a los elementos de \mathcal{M} , conjuntos medibles.

Nota.

1. Todo σ -álgebra es un álgebra;
 2. Equivalentemente, en presencia de (1), (3) se puede reemplazar por
- $$(3'.) (E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M} \Rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathcal{M}.$$

Ejemplo.

1. σ -álgebra \Rightarrow álgebra \Rightarrow semiálgebra (no valen las recíprocas);
2. $\{\emptyset, X\}, \mathcal{P}(X)$ son σ -álgebras;
3. Si $(\mathcal{M}_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ son σ -álgebras, entonces

$$\bigcap_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{M}_\gamma := \{E \subseteq X : E \in \mathcal{M}_\gamma, \forall \gamma \in \Gamma\}$$

es una σ -álgebra.

4. Si \mathcal{M} es una clase de subconjuntos de X , entonces

$$\sigma(\mathcal{M}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{M} \text{ } \sigma\text{-álgebra} \\ \mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}}} \mathcal{M}$$

es la σ -álgebra generada por \mathcal{M} . De hecho, $\sigma(\mathcal{M})$ es la menor σ -álgebra que contiene a \mathcal{C} :

- (a) $\sigma(\mathcal{C})$ es σ -álgebra y $\mathcal{C} \subseteq \sigma(\mathcal{C})$;
 - (b) Si \mathcal{F} es σ -álgebra y $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$ entonces $\sigma(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{F}$.
5. Si (X, \mathcal{T}) es un espacio topológico, $\sigma(\mathcal{T})$ se conoce como la σ -álgebra de Borel, y sus elementos se llaman Borelianos. La notamos $\beta(X) (= \sigma(\mathcal{T}))$.

Ejemplo. $\beta(\mathbb{R})$ contiene a todos los abiertos, cerrados, intervalos, conjuntos de tipo G_δ y F_σ, \dots . De hecho, $\beta(\mathbb{R}) = \sigma(\text{cerrados}) = \sigma(\text{compactos}) = \sigma(\mathcal{I}) = \sigma(\tilde{\mathcal{I}})$.

Definición 1.26. Sea \mathcal{C} una clase (no vacía) de subconjuntos de X y $\mu : \mathcal{C} \rightarrow [0, \infty]$ una función (la llamamos una función de conjuntos). Diremos que:

- (i) μ es **monótona** (en \mathcal{C}) si $A, B \in \mathcal{C}, A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$;
- (ii) μ es **finitamente aditiva** si $(A_i)_{i=1, \dots, n} \subseteq \mathcal{C}$, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i);$$

- (iii) μ es **σ -aditiva** si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}$ disjuntos, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i);$$

- (iv) μ es **σ -subaditiva** si $\mu(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_n)$, para todo $A \in \mathcal{C}$ y $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}$ tal que $A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$

Clase 8

25 de Agosto

Observación. Rana da una definición más débil de (4):

$$A \in \mathcal{C}, A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, A_i \in \mathcal{C} \forall i \Rightarrow \mu(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

Ambas definiciones son equivalentes si \mathcal{C} es una semiálgebra y μ es monótona (siempre será el caso para nosotros).

Definición 1.27 (premedida finita y σ -finita). Una premedida $\tau : \mathcal{C} \rightarrow [0, \infty]$ se dice:

1. **finita** si $X \in \mathcal{C}$ y $\tau < \infty$;
2. **σ -finita** si existen $(C_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}$ disjuntos tales que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = X \quad \text{y} \quad \tau(C_n) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ejemplo.

1. finita $\Rightarrow \sigma$ -finita;
2. La función longitud $\lambda : \mathcal{I} \rightarrow [0, \infty]$ es σ -finita pero no finita;
3. Si F es una función de L-S, entonces $\tau_F : \tilde{\mathcal{I}} \rightarrow [0, \infty]$ es siempre σ -finita ($\tau_F((n, n+1]) = F(n+1) - F(n) < \infty \forall n \in \mathbb{Z}$) y es finita si y sólo si $\tau_F(\mathbb{R}) = \tau_F((-\infty, \infty] \cap \mathbb{R}) = F(\infty) - F(-\infty) < \infty$.

Definición 1.28 (medida). Sea (X, \mathcal{M}) es un espacio medible. Diremos que $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ es una medida (en (X, \mathcal{M})) si:

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. μ es σ -aditiva en \mathcal{M} ($\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$).

Llamamos a la terna (X, \mathcal{M}, μ) un espacio de medida.

Objetivo. Construir un espacio de medida $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, \mu)$ tal que $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{M}$ y

$$\begin{cases} \mu(I) = |I| \quad \forall I \in \mathcal{I}, \\ \mu(E+x) = \mu(E) \quad \forall E \in \mathcal{M}. \end{cases}$$

Ejemplo (Espacios de Probabilidad). Si (X, \mathcal{M}, μ) es un EdM tal que $\mu(X) = 1$, (X, \mathcal{M}, μ) recibe el nombre de espacios de probabilidad.

- X recibe el nombre de espacio muestral, y se lo nota Ω (en lugar de X);
- \mathcal{M} se suele notar como \mathcal{F} (ó \mathcal{Y}). Sus elementos se dicen eventos;

- μ recibe el nombre de medida de probabilidad ó distribución y se la nota \mathbb{P} .

En probabilidad, típicamente se estudian 2 tipos de distribuciones en \mathbb{R} (o en \mathbb{R}^d).

1. **Distribuciones discretas:** $\exists S \subseteq \mathbb{R}$ numerable y $(p_x)_{x \in S} \subseteq [0, 1]$ tal que $\mathbb{P}(A) = \sum_{x \in A \cap S} p_x$.

Ejemplo. Binomial, Geométrica, Poisson,...

2. **Distribuciones (absolutamente) continuas:** $\exists f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ "integrable" tal que $\mathbb{P}(A) = \int_A f(x)dx$.

Ejemplo. Uniforme, Exponencial, Normal,...

Propiedades generales de una medida. Si μ es una medida sobre (X, \mathcal{M}) , entonces:

1. μ es monótona (en \mathcal{M});
2. μ es σ -subaditiva;
3. μ es **continua por debajo:** si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$ es creciente ($A_n \subseteq A_{n+1} \forall n$) entonces

$$\mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

4. μ es **continua por arriba:** si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$ es decreciente ($A_{n+1} \subseteq A_n \forall n$) y $\mu(A_{n_0}) < \infty$ para algún n_0 ($\Rightarrow \mu(A_n) < \infty \forall n \geq n_0$), entonces

$$\mu \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

(**Cuidado!** (4) puede no valer si $\mu(A_n) = \infty \forall n \in \mathbb{N}$)

Definición 1.29 (premedida extendible y unívocamente extendible). Una premedida $\tau : \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$ definida sobre una semiálgebra de subconjunto de X , se dice:

1. **Extendible** si es
 - (E1) finitamente aditiva en \mathcal{S} ;
 - (E2) σ -subaditiva en \mathcal{S} .
2. **Unívocamente extendible** si es extendible y se cumple
 - (E3) σ -finita

Observación. Los nombres de extendible y unívocamente extendible no se encontrarán en el Rana (los puso el profe).

Teorema 1.30 (Extensión de Carathéodory). Dados un espacio X y una premedida τ sobre una semiálgebra \mathcal{S} de subconjuntos de X tal que τ es extendible, existe una extensión de τ a una medida μ_τ definida sobre $\sigma(\mathcal{S})$ la σ -álgebra generada por \mathcal{S} . Más aún, si τ es unívocamente extendible, entonces la extensión μ_τ a $\sigma(\mathcal{S})$ es única.

Por último, si τ es unívocamente extendible, entonces se puede extender de manera única a una medida $\overline{\mu_\tau}$ sobre la μ_τ -completación de $\sigma(\mathcal{S})$, i.e. la σ -álgebra $\overline{\sigma(\mathcal{S})}$ dada por

$$\overline{\sigma(\mathcal{S})} := \{B \cup N : B \in \sigma(\mathcal{S}), \exists \tilde{N} \in \sigma(\mathcal{S}) \text{ con } N \subseteq \tilde{N} \text{ y } \mu_\tau(\tilde{N}) = 0\}$$

mediante la fórmula $\overline{\mu_\tau}(B \cup N) := \mu_\tau(B)$.

Clase 9

27 de Agosto

Observación. Si $\tau : \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$ es σ -aditiva en \mathcal{S} y \mathcal{S} es una semiálgebra, entonces τ es extendible.

Observación. La extensión puede no ser única si τ no es σ -finita.

Ejemplo. $\tilde{\mathcal{I}}_{\mathbb{Q}} := \tilde{\mathcal{I}} \cap \mathbb{Q} = \{(a, b] \cap \mathbb{Q} : -\infty \leq a \leq b \leq \infty\}$

Nota.

- $\tilde{\mathcal{I}}_{\mathbb{Q}}$ es una semiálgebra;
- $\sigma(\tilde{\mathcal{I}}_{\mathbb{Q}}) = \sigma(\tilde{\mathcal{I}} \cap \mathbb{Q}) \stackrel{\text{Ej!}}{=} \sigma(\tilde{\mathcal{I}}) \cap \mathbb{Q} = \beta(\mathbb{R}) \cap \mathbb{Q} = \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ (9.52)
- $\tau : \tilde{\mathcal{I}}_{\mathbb{Q}} \rightarrow [0, \infty]$, dada por $\tau(A) := \begin{cases} 0 & A = \emptyset \\ \infty & A \neq \emptyset, A \in \tilde{\mathcal{I}}_{\mathbb{Q}} \end{cases}$ (Observar que τ no es σ -finita)
- Para cada $r > 0$, $\mu_r : \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \rightarrow [0, \infty]$ dada por $\mu_r(A) := r(\#A)$ es una extensión de τ (y es una medida)

Definición 1.31 (espacio completo y conjuntos μ -nulos). Sea (X, \mathcal{M}, μ) un EdM y definamos

$$\mathcal{N}_\mu := \{E \subset X : \exists N \in \mathcal{M} \text{ con } E \subseteq N \text{ y } \mu(N) = 0\}$$

Los elementos de \mathcal{N}_μ se dicen conjuntos μ -nulos. Diremos que (X, \mathcal{M}, μ) es completo si $\mathcal{N}_\mu \subseteq \mathcal{M}$

Observación. $(X, \overline{\sigma(\mathcal{S})}, \overline{\mu_\tau})$ es completo. En efecto, $\mathcal{N}_{\overline{\mu_\tau}}$ corresponde al subconjunto de $\overline{\sigma(\mathcal{S})}$ que se obtiene tomando $B = \emptyset$.

Observación. Veremos más adelante que las siguientes premedidas son UE:

- Premedidas de Lebesgue-Stieltjes (en particular, la función longitud λ (sobre $\tilde{\mathcal{I}}$) y las premedidas de probabilidad).
- Premedidas de Lebesgue en \mathbb{R}^d , con $d \in \mathbb{N}$.

En particular;

Corolario 1.32. Para cada función F de Lebesgue-Stieltjes, existe una σ -álgebra \mathcal{M}_F sobre \mathbb{R} y una única medida μ_F en $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_F)$ tal que

$$\mu_F(I(a, b)) = F(b) - F(a) \quad \forall -\infty \leq a \leq b \leq \infty$$

Además, $\beta(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{M}_F$. Es decir, μ_F es una medida que extiende a τ_F , a todo \mathcal{M}_F (y en particular, a todo $\beta(\mathbb{R})$). Además, $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_F, \mu_F)$ es un EdM completo. ($\mathcal{M}_F := \sigma(\tilde{\mathcal{I}})^F$, $\mu_F := \overline{\mu_{\tau_F}}$). La medida μ_F se conoce como medida de L-S asociada a F . En particular, para cualquier función de distribución F , existe una única medida de probabilidad \mathbb{P}_F en $(\mathbb{R}, \beta(\mathbb{R}))$ tal que

$$\mathbb{P}_F(I(a, b)) = F(b) - F(a) \quad \forall -\infty \leq a \leq b \leq \infty$$

(En la guía 3 veremos que $F \rightarrow \mathbb{P}_F$ es una biyección)

Nota. Los β son los Borelianos y $I(a, b) = (a, b] \cap \mathbb{R}$. (super $F \rightarrow 10.26$).

Ejemplo (Importante!). Medida de Lebesgue en \mathbb{R} . Tomando $F = id$ en el Corolario anterior, obtenemos una σ -álgebra $\mathcal{L}(\mathbb{R}) := \mathcal{M}_{id}$ con $\beta(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{L}(\mathbb{R})$ y una medida μ_{id} en $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}))$ tal que $\mu_{id}(I(a, b)) = b - a \quad \forall -\infty \leq a \leq b \leq \infty$. En particular, de esto se deduce que $\mu_{id}(I) = |I| \quad \forall I \in \mathcal{I}$. Dicha medida recibe el nombre de medida de Lebesgue (en \mathbb{R}), y los elementos de $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ se dicen conjuntos medibles Lebesgue. Adoptaremos la notación $\mu_{id}(E) := \lambda(E) := |E|$. La medida μ_{id} es la extensión de la noción de longitud que buscábamos y $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ son los conjuntos cuya "longitud" podremos medir. Además, los conjuntos de medida nula (de la guía 2), son exactamente aquellos $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ tal que $\mu_{id}(A) = 0$ (lo veremos más adelante!).

Ejemplo (Medida de Lebesgue en \mathbb{R}^d). Si \mathcal{I}_d son los intervalos en \mathbb{R}^d y definimos $\tau : \mathcal{I}_d \rightarrow [0, \infty]$ como $\tau(I) := |I|$, entonces \mathcal{I}_d es una semiálgebra y τ es una premedida σ -aditiva en \mathcal{I}_d (lo veremos después). Por lo tanto, τ se puede extender (de manera única, pues τ es σ -finita) a una medida μ_τ sobre la σ -álgebra $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d) = \sigma(\mathcal{I}_d)^\tau$, llamada medida de Lebesgue en \mathbb{R}^d y $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ es la clase de conjuntos medibles Lebesgue en \mathbb{R}^d . Al igual que antes, dado $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$, notamos $|E| := \mu_\tau(E)$.

Clase 10

29 de Agosto

1.2 Demostración del teorema de extensión de Carathéodory

Paso 1: Medidas Exteriores

Proposición 1.33. Si $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo,

$$|E|_e = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| : (I_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ intervalos, } E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right\}$$

Demostración.

(\geq) Tomando $I_1 = I$, $I_{n+1} = \emptyset \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(\leq) Por la σ -subaditividad de λ en \mathcal{I} : si $I \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ entonces $\lambda(I) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(I_i)$. \square

Definición 1.34 (Medida exterior inducida por una premedida). Sea X un espacio, \mathcal{C} una clase de subconjuntos de X y $\tau : \mathcal{C} \rightarrow [0, \infty]$ una premedida. Definimos la medida exterior inducida por τ como la aplicación $\mu_{\tau}^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ dada por

$$\mu_{\tau}^*(A) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \tau(C_i) : (C_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C} \text{ y } A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \right\}$$

con la convención de que $\inf \emptyset := \infty$.

Ejemplo. $\mu_{\lambda}^* = \text{medida exterior de Lebesgue}$ y la notamos $|E|_e := \mu_{\lambda}^*(E)$.

Idealmente, nos gustaría que μ_{τ}^* cumpla

$$\begin{cases} (C1) \mu_{\tau}^*(C) = \tau(C) \quad \forall C \in \mathcal{C} \\ (C2) \mu_{\tau}^* \text{ es } \sigma\text{-subaditiva en } \mathcal{P}(X) \end{cases}$$

pero no tienen por qué cumplirse ninguna de la 2:

(C1) Sean $X = \{a, b\}$, $\mathcal{C} = \{\emptyset, \{a\}, X\}$,

$$\tau(A) = \begin{cases} 0 & A = \emptyset \\ 2 & A = \{a\} \\ 1 & A = X \end{cases}$$

Luego, $\tau(\{a\}) = 2$, $\mu_{\tau}^*(\{a\}) = 1 \neq \tau(\{a\})$.

(C2) Medida exterior de Lebesgue no es σ -aditiva (lo vemos mas adelante!)

Proposición 1.35. Si τ es una premedida sobre una semiálgebra \mathcal{S} que satisface

(E2) τ es σ -subaditiva en \mathcal{S} ,

entonces $\mu_{\tau}^*(A) = \tau(A) \quad \forall A \in \mathcal{S}$ (i.e. μ_{τ}^* cumple (C1)).

Demostración. $\mu_{\tau}^*(A) \leq \tau(A)$. Tomando $C_1 = A \in \mathcal{S}$, $C_{n+1} = \emptyset \in \mathcal{S}$. Luego $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es cubrimiento de A por elementos de \mathcal{S} y luego

$$\mu_{\tau}^*(A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \tau(C_n) = \tau(A)$$

$\tau(A) \leq \mu_{\tau}^*(A)$. Si $(C_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}$ es un cubrimiento de $A \in \mathcal{S}$ entonces por (E2), tenemos que $\tau(A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \tau(C_n)$. Tomando \inf sobre tales

cubrimientos, resulta $\tau(A) \leq \mu_\tau^*(A)$. \square

Teorema 1.36. Sean X un espacio, \mathcal{C} una clase de subconjuntos de X y $\tau : \mathcal{C} \rightarrow [0, \infty]$ una premedida. Entonces,

1. $\mu_\tau^*(\emptyset)$;
2. μ_τ^* es monótona ($A \subseteq B \Rightarrow \mu_\tau^*(A) \leq \mu_\tau^*(B)$);
3. μ_τ^* es σ -subaditiva ($A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \Rightarrow \mu_\tau^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_\tau^*(A_n)$).

Demostración. 1. $\mu_\tau^*(\emptyset) \geq 0$ es por definición. Para ver que $\mu_\tau^*(\emptyset) \leq 0$, tomamos el cubrimiento $C_n = \emptyset$ y repetimos el argumento de la Proposición anterior.

2. Si $\mu_\tau^*(B) = \infty$, la desigualdad es inmediata. Si $\mu_\tau^*(B) < \infty$, entonces existen cubrimientos de B por elementos de \mathcal{S} . Sea $(C_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}$ un cubrimiento de B . Entonces, $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es también cubrimiento de A y, luego, $\mu_\tau^*(A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \tau(C_n)$. Como esto es cierto para todo cubrimiento $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de B , tomando ínfimo en la desigualdad anterior sobre tales cubrimientos resulta $\mu_\tau^*(A) \leq \mu_\tau^*(B)$.
3. Dado $\varepsilon > 0$, sea $(C_i^{(n)})_{i \in \mathbb{N}}$ un cubrimiento de A_n tal que $\sum_{i=1}^{\infty} \tau(C_i^{(n)}) \leq \mu_\tau^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$. Luego, notando que $(C_i^{(n)}) : i \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$ es un cubrimiento de A , obtenemos que

$$\begin{aligned} \mu_\tau^*(A) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \tau(C_i^{(n)}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu_\tau^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \right) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_\tau^*(A_n) + \varepsilon \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}}_1 \end{aligned}$$

Luego, $\mu_\tau^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_\tau^*(A_n) + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$. Tomando $\varepsilon \rightarrow 0^+$, obtenemos la σ -subaditividad de μ_τ^* . \square

Definición 1.37 (medida exterior). Sea X un espacio. Decimos que $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ es una medida exterior si:

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$;
2. $A \subseteq B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$;
3. $A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \Rightarrow \mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$.

Ejemplo.

1. Medidas exteriores generadas por una premedida;

2. Si $(\mu_\gamma^*)_{\gamma \in \Gamma}$ son medidas exteriores sobre X , entonces

$$\mu^*(A) := \sup_{\gamma \in \Gamma} \mu_\gamma^*(A)$$

es una medida exterior (Ej. Guía 3).

3. **Medida exterior s -dimensional de Hausdorff en \mathbb{R}^d .**

- Si I es un intervalo en \mathbb{R}^d , entonces $|rI| = r^d|I|$;
- Si $E \subseteq \mathbb{R}^d$ es medible Lebesgue, entonces $|rE| = r^d|E|$;
- En particular, si $E = B(x, r)$, entonces

$$|E| = |B(0, r)| = |rB(0, 1)| = r^d|B(0, 1)| = C_d(\text{diam} E)^d, \quad C_d := \frac{|B(0, 1)|}{2^d}$$

- Si $E \subseteq \mathbb{R}^d$ es "s-dimensional" y \mathcal{H}_s es la medida que queremos, entonces debería valer que

$$\mathcal{H}_s(E \cap B(x, r)) = \mathcal{H}_s(\text{entorno s-dimensional}) \approx (\text{diam}(\text{entorno}))^s$$

Luego, si cubrimos a E por entornos pequeños $(E \cap B(x_i, r_i))_{i \in \mathbb{N}}$, entonces

$$\mathcal{H}_s(E) \approx \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_s(E \cap B(x_i, r_i)) \approx \sum_{i \in \mathbb{N}} (\text{diam}(E \cap B(x_i, r_i)))^s.$$

Clase 11

1 de Septiembre

Medida exterior de Hausdorff

\mathcal{H}_s = medida que "mide" el tamaño de objetos s-dimensionales en \mathbb{R}^d .

Si E es un conjunto s-dimensional en \mathbb{R}^d , entonces

$$\mathcal{H}_s(E) \stackrel{r_1 \leq 1}{\approx} \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_s(E \cap B(x_i, r_i)) \approx \sum_{i \in \mathbb{N}} (\text{diam}(E \cap B(x_i, r_i)))^s.$$

Teniendo esto en cuenta, dados $d \in \mathbb{N}$, $s \in [0, d]$, $\delta > 0$, definimos:

- $C_\delta := \{A \subseteq \mathbb{R}^d : \text{diam} A < \delta\}$;
- $\mathcal{H}_s^{(\delta)}(E) := \inf\{\sum_{n \in \mathbb{N}} (\text{diam} A_n)^s : (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq C_\delta, E \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\}$.
Donde $\mathcal{H}_s^{(\delta)}(E)$ es la medida exterior inducida por $\tau_s^{(\delta)}$ y $\tau_s^{(\delta)}(A) := (\text{diam} A)^s$ la δ -premedida de Hausdorff s-dimensional en \mathbb{R}^d con $\tau_s^{(\delta)} : C_\delta \rightarrow [0, \infty]$.

Observar. Si $\delta' < \delta$ entonces $\mathcal{H}_s^{(\delta')}(E) \geq \mathcal{H}_s^{(\delta)}(E)$.

Luego, podemos definir

$$\mathcal{H}_s(E) := \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_s^{(\delta)}(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mathcal{H}_s^{(\delta)}(E),$$

donde \mathcal{H}_s es la medida exterior de Hausdorff s-dimensional en \mathbb{R}^d .

Definición 1.38 (conjunto μ^* -medible). Sea X un espacio y $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ medida exterior. Decimos que $E \subseteq X$ es un conjunto μ^* -medible si

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \quad \forall A \subseteq X.$$

Observar. $\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$ vale siempre (por σ -subaditividad de μ^*). Luego, para ver que E es μ^* -medible, basta ver que $\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$.

Teorema 1.39. Sea μ^* una medida exterior sobre un espacio X . Entonces:

1. $\mu^*(E) = 0 \Rightarrow E$ es μ^* -medible;
2. La clase \mathcal{M}_{μ^*} de conjuntos μ^* -medibles es una σ -álgebra;
3. La restricción μ de μ^* a \mathcal{M}_{μ^*} es una medida.

En particular, $(X, \mathcal{M}_{\mu^*}, \mu)$ es un espacio de medida completo.

Demostración.

1. Si $A \subseteq X$, $\mu^*(A \cap E) \leq \mu^*(E) = 0$. Además, por monotonía, $\mu^*(A \cap E^c) \leq \mu^*(A)$. Luego, $\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) = 0 + \mu^*(A \cap E^c) \leq \mu^*(A)$.

2. ($\emptyset \in \mathcal{M}_{\mu^*}$): Se sigue de (1), pues $\mu^*(\emptyset) = 0$, por definición.

($E \in \mathcal{M}_{\mu^*}$): Directo de la definición de \mathcal{M}_{μ^*} , puesto que es simétrica en E y E^c .

(($E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}_{\mu^*} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathcal{M}_{\mu^*}$): Esto lo demostramos en tres pasos.

- En primer lugar, demostramos que si $E_1, E_2 \in \mathcal{M}_{\mu^*}$, entonces $E_1 \cap E_2, E_1 \cup E_2 \in \mathcal{M}_{\mu^*}$. Si $A \subseteq X$, entonces

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &= \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_1^c) \\ &= \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap \overbrace{E_1^c \cap E_2}^{E_2 \setminus E_1}) + \mu^*(A \cap \underbrace{E_1^c \cap E_2^c}_{(E_1 \cup E_2)^c}) \\ &\geq \mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) + \mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)^c). \end{aligned}$$

Notar que la primera igualdad se tiene por $E_1 \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ y la segunda por $E_2 \in \mathcal{M}_{\mu^*}$. Esto implica que $E_1 \cap E_2 \in \mathcal{M}_{\mu^*}$. Pero entonces $E_1 \cap E_2 = ((E_1 \cap E_2)^c)^c = (\underbrace{E_1^c}_{\in \mathcal{M}_{\mu^*}} \cup \underbrace{E_2^c}_{\in \mathcal{M}_{\mu^*}})^c \in \mathcal{M}_{\mu^*}$.

- Para el segundo paso, demostramos que si $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ disjuntos, entonces

$$\mu^* \left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^n E_i \right) \right) = \sum_{i=1}^n \mu^*(A \cap E_i).$$

La idea es probarlo por inducción. Basta ver el caso $n = 2$ (los otros casos salen iterando éste)

$$\begin{aligned} & \mu^*(A \cap (E_1 \uplus E_2)) \\ &= \mu^* \underbrace{(A \cap (E_1 \uplus E_2) \cap E_1)}_{A \cap E_1} + \mu^* \underbrace{(A \cap (E_1 \uplus E_2) \cap E_1^c)}_{A \cap E_2}. \end{aligned}$$

pues $E_2 \subseteq E_1^c$ por ser disjuntos. Por último, vemos que si $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}_{\mu^*}$, entonces $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathcal{M}_{\mu^*}$. Podemos suponer que los E_n son disjuntos. Si no, los cambiamos por

$$\begin{aligned} E'_1 &:= E_1 \in \mathcal{M}_{\mu^*} \\ E'_2 &:= E_2 \setminus E_1 = E_2 \cap E_1^c \in \mathcal{M}_{\mu^*} \\ &\vdots \\ E'_{n+1} &:= E_{n+1} \setminus \bigcup_{i=1}^n E_i \in \mathcal{M}_{\mu^*}, \end{aligned}$$

y

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E'_n.$$

Sea

$$F_n := \bigcup_{i=1}^n E_i \longrightarrow E := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n.$$

Notar que si $F_n \subseteq E$, entonces $E^c \subseteq F_n^c$. Luego, dado $A \subseteq X$, como $F_n \in \mathcal{M}_{\mu^*}$, se tiene

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &= \underbrace{\mu^*(A \cap F_n)}_{= \sum_{i=1}^n \mu^*(A \cap E_i)} + \underbrace{\mu^*(A \cap F_n^c)}_{\subseteq A \cap E^c} \\ &\geq \sum_{i=1}^n \mu^*(A \cap E_i) + \mu^*(A \cap E^c). \end{aligned}$$

Tomando $n \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned}\mu^*(A) &\geq \sum_{i=1}^n \mu^*(A \cap E_i) + \mu^*(A \cap E^c) \\ &\geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \quad (\mu^* \text{ } \sigma\text{-subad.}) \\ A \cap E &= \bigcup_{i=1}^{\infty} A \cap E_i.\end{aligned}$$

Que era lo que necesitabamos. ✓

Con esto, tenemos que \mathcal{M}_{μ^*} es, en efecto, σ -álgebra.

□

Clase 12

3 de Septiembre

Teorema 1.40. Si μ^* es una medida exterior sobre un espacio X , entonces:

1. $\mu^*(E) = 0 \Rightarrow E$ es μ^* -medible;
2. $\mathcal{M}_{\mu^*} := \{E \subseteq X \mid E \text{ es } \mu^*\text{-medible}\}$ es σ -álgebra;
3. $\mu := \mu^*|_{\mathcal{M}_{\mu^*}}$ es una medida y $(X, \mathcal{M}_{\mu^*}, \mu)$ es completo.

Demostración (3). Debemos ver que si $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}_{\mu^*}$ son disjuntos entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n)$$

La desigualdad (\leq) viene dada ya que μ^* es σ -aditiva. Entonces, basta ver la desigualdad (\geq). Para esto, notamos que:

$$\begin{array}{ccc} \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) & \geq & \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^M E_n\right) = \sum_{n=1}^M \mu^*(E_n) \\ & \downarrow & \downarrow \\ & \mu^*\text{-monótona} & E_n \text{ es } \mu^*\text{-medible } \forall n \end{array}$$

Si tomamos $M \rightarrow \infty$, resulta que

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n).$$

Entonces, μ es medida. Ahora, tenemos que ver que $(X, \mathcal{M}_{\mu^*}, \mu)$ es completo. Notamos que si $E \subseteq X$ es μ -nulo, es decir, $\exists N \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ tal que $E \subseteq N$ y $\mu(N) = 0$, entonces

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(N) = 0$$

Por lo tanto, $\mu^*(E) = 0$ y, por (1), $E \in \mathcal{M}_{\mu^*}$.

□

Observación. Esto muestra que si μ es finitamente aditiva (\Rightarrow monótona) y σ -subaditiva, entonces es σ -aditiva (es un si y sólo si).

Proposición 1.41. Si τ es una premedida sobre la semiálgebra \mathcal{S} que es extendible ($E_1 + E_2$) entonces su medida exterior asociada μ_τ^* cumple que:

$$(C1) \quad \mathcal{S} \subseteq \mathcal{M}_{\mu^*} \quad (\Rightarrow \sigma(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{M}_{\mu^*});$$

$$(C2) \quad \mu_\tau^*(A) = \tau(A) \quad \forall A \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \mu(A) = \tau(A) \quad \forall A \in \mathcal{S} \text{ por (C1)}.$$

Demostración. (C2) ya se ha visto antes, entonces queda demostrar (C1). Necesitamos ver que si $A \in \mathcal{S}$ entonces

$$\mu_\tau^*(F) \geq \mu_\tau^*(F \cap A) + \mu_\tau^*(F \cap A^c) \quad \forall F \subseteq X.$$

En efecto, si $\mu_\tau^*(F) = \infty$, es evidente. Si $\mu_\tau^*(F) < \infty$, dado $\varepsilon > 0$, existen $(B_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}$ tal que $F \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i$ y $\sum_{i \in \mathbb{N}} \tau(B_i) \leq \mu_\tau^*(F) + \varepsilon$. Por otro lado, como $A \in \mathcal{S}$, existen S_1, \dots, S_k disjuntos tales que $A^c = \biguplus_{j=1}^k S_j$. Como $B_i = \bigcup_{j=1}^k B_i \cap S_j$, donde $S_0 := A$, por (E1)

$$\tau(B_i) = \sum_{j=0}^k \tau(B_i \cap S_j).$$

Sumando en i , resulta

$$\begin{aligned} \mu_\tau^*(F) + \varepsilon &\geq \sum_{i \in \mathbb{N}} \tau(B_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j=0}^k \tau(B_i \cap S_j) \\ &= \sum_{j=0}^k \sum_{i \in \mathbb{N}} \tau(B_i \cap S_j) \\ &\stackrel{\left(\begin{smallmatrix} B_i \cap S_j \in \mathcal{S} \\ \text{y (C2)} \end{smallmatrix} \right)}{=} \sum_{j=0}^k \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu_\tau^*(B_i \cap S_j) \\ (F \cap S_j \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i \cap S_j \Rightarrow) &\geq \sum_{j=0}^k \mu_\tau^*(F \cap S_j) \\ &= \mu_\tau^*(F \cap A) + \sum_{j=1}^k \mu_\tau^*(F \cap S_j) \\ (F \cap S^c \subseteq \biguplus_{j=1}^k F \cap S_j \Rightarrow) &\geq \mu_\tau^*(F \cap A) + \mu_\tau^*(F \cap A^c). \end{aligned}$$

Luego, A es μ_τ^* -medible (y se cumple (C1)). \square

Corolario 1.42 (Carathéodory hasta ahora - Versión 1). Si μ^* es una medida exterior en X , entonces

$$\mathcal{M}_{\mu^*} := \{E \subseteq X : E \text{ es } \mu^* \text{-medible}\}$$

es σ -álgebra y $(X, \mathcal{M}_{\mu^*}, \mu^*|_{\mathcal{M}_{\mu^*}})$ es un espacio de medida completo.

Además, si τ es una premedida en una semiálgebra \mathcal{S} que es extendible y μ_τ^* es su medida exterior asociada, entonces $\sigma(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{M}_{\mu_\tau^*}$ y $\mu_\tau := \mu_\tau^*|_{\mathcal{M}_{\mu_\tau^*}}$ es una medida que se extiende a τ .

Teorema 1.43. Si τ es una premedida sobre una semiálgebra \mathcal{S} que es unívocamente extendible ($E1 + E2 + E3$) entonces $\sigma(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{M}_{\mu_\tau^*}$ y además son equivalentes:

1. $A \in \mathcal{M}_{\mu_\tau^*}$;
2. $\exists B \in \sigma(\mathcal{S}), N_1 \in \mathcal{M}_{\mu_\tau^*}$ con $\mu_\tau^*(N_1) = 0$ tal que $A = B - N_1$;
3. $\exists C \in \sigma(\mathcal{S}), N_2 \in \mathcal{M}_{\mu_\tau^*}$ con $\mu_\tau^*(N_2) = 0$ tal que $A = C \cup N_2$.

Observación. $\mu_\tau^*(A) = \mu_\tau^*(B) = \mu_\tau^*(C)$ y $\mathcal{M}_{\mu_\tau^*}$ es la $\mu_\tau^*|_{\sigma(\mathcal{S})}$ -completación.

Demostración. Que (2) \Rightarrow (1) y (3) \Rightarrow (1) es inmediato. Veamos que (1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3).

(1) \Rightarrow (2) Supongamos primero que $\mu_\tau^*(A) < \infty$. Dado $\varepsilon > 0$, existen $(B_n^{(\varepsilon)})_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}$ tal que $A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n^{(\varepsilon)}$ y $\sum_{n \in \mathbb{N}} \tau(B_n^{(\varepsilon)}) \leq \mu_\tau^*(A) + \varepsilon$. En particular,

$$\begin{aligned} \mu_\tau^*(A) &\leq \mu_\tau^*\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n^{(\varepsilon)}\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_\tau^*(B_n^{(\varepsilon)}) \\ \left(\begin{array}{l} \mu_\tau^* \text{ extiende a } \\ \tau \text{ si es extendible} \end{array}\right) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \tau(B_n^{(\varepsilon)}) \leq \mu_\tau^*(A) + \varepsilon. \end{aligned} \quad (*)$$

Sea $B := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n^{(\frac{1}{k})}$. Notemos que $B \in \sigma(\mathcal{S})$ y que $A \subseteq B$. Además, como $A, B \in \mathcal{M}_{\mu_\tau^*}$ por hipótesis y $\sigma(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{M}_{\mu_\tau^*}$ y $\mu_\tau = \mu_\tau^*|_{\mathcal{M}_{\mu_\tau^*}}$ es finitamente aditiva y si definimos $N_1 := B \setminus A$ y $B^{(\frac{1}{k})} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n^{(\frac{1}{k})}$, entonces $N_1 \in \mathcal{M}_{\mu_\tau^*}$, $A := B - N_1$, y para todo $k_0 \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \mu_\tau^*(N_1) &= \mu_\tau^*(B - A) = \mu_\tau^*\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} (B^{(\frac{1}{k})} \setminus A)\right) \\ &\leq \mu_\tau^*(B^{(\frac{1}{k_0})} - A). \end{aligned}$$

Luego,

$$A \subseteq B^{(\frac{1}{k_0})} \Rightarrow \mu_\tau^*(B^{(\frac{1}{k_0})}) - \mu_\tau^*(A) \leq \frac{1}{k_0} \quad (*)$$

Tomando $k_0 \rightarrow \infty$, resulta $(1) \Rightarrow (2)$.

□

Clase 13

5 de Septiembre

Demostración (Continuación clase anterior).

$(1) \Rightarrow (2)$ Si $\mu_\tau^*(A) < \infty$ (LISTO!). Si $\mu_\tau^*(A) = \infty$, tomamos $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}$ disjuntos tal que $X = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ y $\tau(E_n) < \infty$. Luego, $\mu_\tau^*(A \cap E_n) \leq \mu_\tau^*(E_n) = \tau(E_n) < \infty$ (La igualdad es, pues $E_n \in \mathcal{S}, \tau$ σ -sub). Por ende, por lo ya probado, existe $B_n \in \sigma(\mathcal{S})$ tal que $A \cap E_n \subseteq B_n$ y $\mu_\tau(B_n) = \mu_\tau(A \cap E_n) < \infty$. Luego, $B := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ y $N := B - A$ cumplen lo pedido pues $A = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A \cap E_n \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = B$ y

$$\begin{aligned} \mu_\tau(B \setminus A) &= \mu_\tau\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \setminus A\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_\tau(B_n \setminus A) \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_\tau(B_n \setminus (A \cap E_n)) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\mu_\tau(B_n) - \mu_\tau(A \cap E_n)}_0 = 0. \end{aligned}$$

$(2) \Rightarrow (3)$ Notemos que por $(2) \Rightarrow (1)$, $A \in \mathcal{M}_{\mu_\tau^*}$ si vale (2). En particular, $A^c \in \mathcal{M}_{\mu_\tau^*}$. Luego, por $(1) \Rightarrow (2)$ para A^c , $\exists \tilde{B} \in \sigma(\mathcal{S})$ y $N_2 \in \mathcal{M}_{\mu_\tau^*}$ con $\mu_\tau(N_2) = 0$ tal que $A^c = \tilde{B} - N_2$. Pero entonces, tomando $C := \tilde{B}^c$, vemos que $C \in \sigma(\mathcal{S})$ y $A = (A^c)^c = (\tilde{B} \cap N_2^c)^c = \tilde{B}^c \cup (N_2^c)^c = C \cup N_2$. □

Observación. $\mathcal{M}_{\mu_\tau^*} = \overline{\sigma(\mathcal{S})}$ (con resp. a $\mu_\tau^*|_{\sigma(\mathcal{S})}$). En efecto, si $A \in \mathcal{M}_{\mu_\tau^*}$ entonces, por $(1) \Rightarrow (3)$, existen $C \in \sigma(\mathcal{S})$ y $N \in \mathcal{M}_{\mu_\tau^*}$ tal que $A = C \cup N$ y $\mu_\tau^*(N) = 0$. Como $N \in \mathcal{M}_{\mu_\tau^*}$, por $(1) \Rightarrow (2)$ para N , existe $\tilde{N} \in \sigma(\mathcal{S})$ tal que $N \subseteq \tilde{N}$ y $0 = \mu_\tau(N) = \mu_\tau(\tilde{N})$. Luego, N resulta $\mu_\tau^*|_{\sigma(\mathcal{S})}$ -nulo y, por lo tanto, $N \in \overline{\sigma(\mathcal{S})}^{\mu_\tau^*|_{\sigma(\mathcal{S})}}$.

Por otro lado, si $A \in \overline{\sigma(\mathcal{S})}$ (resp. a $\mu_\tau^*|_{\sigma(\mathcal{S})}$), entonces $A = B \cup N$ donde $B \in \sigma(\mathcal{S})$ y $\exists \tilde{N} \in \sigma(\mathcal{S})$ tal que $N \subseteq \tilde{N}$ y $\mu_\tau^*(N) = 0$, y entonces $A = B \cup N \in \mathcal{M}_{\mu_\tau^*}$ (pues $\sigma(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{M}_{\mu_\tau^*}$).

Observación. En particular, hemos probado:

Proposición 1.44. Si τ es una premedida UE sobre una semiálgebra \mathcal{S} entonces, dado $A \subseteq X$ (no necesariamente μ_τ^* -medible),

$$\begin{aligned}\mu_\tau^*(A) &:= \min\{\mu_\tau(B) \mid B \in \sigma(\mathcal{S}), A \subseteq B\} \\ &= \max\{\mu_\tau(C) \mid C \in \sigma(\mathcal{S}), C \subseteq A\}.\end{aligned}$$

Teorema 1.45. $\beta(\mathbb{R}^d) \subsetneq \mathcal{L}(\mathbb{R}^d) \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$. De hecho, $\#\mathcal{L}(\mathbb{R}^d) = 2^c$, $\#\mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \setminus \mathcal{L}(\mathbb{R}^d) = 2^c$, $\#\beta(\mathbb{R}^d) = c$.

Teorema 1.46. Existe $V \subseteq \mathbb{R}$ no medible Lebesgue.

Lema 1.47. $|E + x|_e = |E|_e \quad \forall E \subseteq \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$. Además, si $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, entonces $E + x \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ y $|E| = |E + x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Axioma de Elección. Si $(A_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ es una familia de conjuntos disjuntos, no vacíos, entonces existe un conjunto A tal que $A \cap A_\gamma$ tiene exactamente 1 elemento $\forall \gamma \in \Gamma$.

Demostración (lema 1.47). Definimos una relación de equivalencia \sim en $[0, 1)$ decretando que $x \sim y$ si $x - y \in \mathbb{Q}$. Por el Axioma de Elección, existe un conjunto $V \subseteq \mathbb{R}$ que tiene exactamente 1 elemento de cada clase de equivalencia de \sim . Observemos que:

V1) $(V + Q_1) \cap (V + Q_2) = \emptyset \quad \forall Q_1, Q_2 \in \mathbb{Q}$ distintos. En efecto, si $v_1 + Q_1 = v_2 + Q_2$ con $v_1, v_2 \in V \Rightarrow v_1 - v_2 = Q_2 - Q_1 \in \mathbb{Q} \Rightarrow v_1 \sim v_2 \Rightarrow v_1 = v_2 \Rightarrow Q_1 = Q_2$.

V2) $[0, 1) \subseteq \bigcup_{Q \in \mathbb{Q}} V + Q$. Notar que dado $x \in [0, 1)$, existe un único $v \in V$ tal que $x \sim v$, i.e., $x - v = Q \in \mathbb{Q} \Rightarrow x = v + Q \in V + Q$.

Si V fuera medible, por (V2) y el Lema,

$$1 = |[0, 1)| \leq \sum_{Q \in \mathbb{Q}} |V + Q| = \sum_{Q \in \mathbb{Q}} |V| \Rightarrow |V| > 0$$

Por otro lado, por (V1), $\bigcup_{Q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)} V + Q \subseteq [0, 2)$, y luego, por el Lema y como $|V| > 0$,

$$\begin{aligned}\infty &= \sum_{Q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)} |V| = \left| \bigcup_{Q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)} V + Q \right| \\ &\leq |[0, 2)| = |[0, 1)| + |[1, 2)| \\ &= |[0, 1)| + |1 + [0, 1)| = 2|[0, 1)| \\ &= 2 < \infty,\end{aligned}$$

lo cual es una contradicción. Luego V no es medible. \square

Clase 15

10 de Septiembre

Teorema 1.48 (Dynkin). Si \mathcal{L} es un λ -sistema que contiene un π -sistema \mathcal{P} entonces $\sigma(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{L}$

Demostración (continuación). Bastaba con probar que $\lambda(\mathcal{P})$ es un π -sistema. Esto es equivalente a probar que

$$\lambda(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{L}_A := \{B \subseteq X : A \cap B \in \lambda(\mathcal{P})\} \quad \forall A \in \lambda(\mathcal{P}).$$

A su vez, para esto basta probar que:

$$\begin{cases} (1) \mathcal{L}_A \text{ es un } \lambda\text{-sistema } \forall A \in \lambda(\mathcal{P}) \\ (2) \mathcal{P} \subseteq \mathcal{L}_A. \end{cases}$$

Veamos (1).

(λ_1) $X \in \mathcal{L}_A$: Como $A \in \lambda(\mathcal{P})$, se tiene que $A \cap X = A \in \lambda(\mathcal{P})$ ($\Rightarrow X \in \mathcal{L}_A$) ✓

(λ_2) $B \in \mathcal{L}_A \Rightarrow B^c \in \mathcal{L}_A$: Notar que

$$\begin{aligned} A \cap B^c \in \lambda(\mathcal{P}) &\Leftrightarrow (A \cap B^c)^c = A^c \cup B \in \lambda(\mathcal{P}) \\ &\Leftrightarrow A^c \cup B = \underbrace{A^c}_{\substack{\in \lambda(\mathcal{P}) \\ \text{pues} \\ A \in \lambda(\mathcal{P})}} \cup \underbrace{B}_{\substack{\in \lambda(\mathcal{P}) \\ \text{pues} \\ B \in \mathcal{L}_A}} \in \lambda(\mathcal{P}) \quad \left(\begin{array}{l} \text{cierto pues } \lambda(\mathcal{P}) \\ \text{es } \lambda\text{-sistema} \end{array} \right). \end{aligned}$$

(λ_3) Si $(B_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}_A$ disjuntos, entonces $(A \cap B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ también. Además, cada $A \cap B_n \in \lambda(\mathcal{P})$ pues $B_n \in \mathcal{L}_A$. Luego,

$$A \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A \cap B_n \in \lambda(\mathcal{P}) \quad \left(\Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{L}_A \right)$$

Veamos (2). Vamos por casos

1. ($A \in \mathcal{P}$): Si $B \in \mathcal{P}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{P}$, pues \mathcal{P} es un π -sistema, y entonces $A \cap B \in \mathcal{P} \subseteq \lambda(\mathcal{P})$ y así resulta $B \in \mathcal{L}_A$. Como $B \in \mathcal{P}$ era arbitrario, esto nos dice que $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{L}_A$. En particular, por (1) resulta que $\lambda(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{L}_A$.
2. ($A \in \lambda(\mathcal{P})$ general): Si tomamos $B \in \mathcal{P}$, entonces $B \in \mathcal{L}_A \Leftrightarrow A \cap B \in \lambda(\mathcal{P}) \Leftrightarrow A \in \mathcal{L}_B$. Luego, lo que queremos mostrar es que, para todo $B \in \mathcal{P}$, $\lambda(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{L}_B$. Pero esto vale por el caso 1. ✓

□

Definición 1.49 (extensión de una premedida). Sean $\tau : \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$ una premedida sobre $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una σ -álgebra. Decimos que una medida $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$ es una extensión de τ (sobre \mathcal{F}) si:

1. $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{F} \quad (\Rightarrow \sigma(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{F})$;
2. $\mu(A) = \tau(A) \quad \forall A \in \mathcal{S}$.

Teorema 1.50 (Unicidad de Extensión de Carathéodory). Sea τ una premedida definida sobre una semiálgebra \mathcal{S} de subconjuntos de un espacio X . Si τ es σ -finita, entonces existe a lo sumo una extensión de μ sobre $\sigma(\mathcal{S})$. En particular, si τ es UE, entonces admite exactamente:

- una extensión sobre $\sigma(\mathcal{S})$, i.e. $\mu_\tau := \mu_\tau^*|_{\sigma(\mathcal{S})}$;
- una extensión sobre $\mathcal{M}_{\mu_\tau^*}$, i.e., $\mu_\tau^*|_{\mathcal{M}_{\mu_\tau^*}}$.

Demostración. Sean μ, μ' medidas sobre (X, \mathcal{M}) tal que $\mu(B) = \mu'(B) \quad \forall B \in \mathcal{S}$. Queremos ver que $\mu(A) = \mu'(A) \quad \forall A \in \mathcal{M}$ (primero cuando $\mathcal{M} = \sigma(\mathcal{S})$ y luego con $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\mu_\tau^*}$):

(i) $\mathcal{M} = \sigma(\mathcal{S})$: Tomamos $(E_n)_n \subseteq \mathcal{S}$ disjuntos tal que $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ y $\tau(E_n) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (podemos, pues τ es σ -finita). Observemos que, por ser μ y μ' medidas en $\sigma(\mathcal{S})$ si $A \in \sigma(\mathcal{S})$, entonces:

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A \cap E_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A \cap E_n) \quad \text{y} \quad \mu'(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu'(A \cap E_n).$$

Luego, bastará con ver que $\mu(A \cap E_n) = \mu'(A \cap E_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}, A \in \sigma(\mathcal{S})$. Luego, fijemos $n \in \mathbb{N}$ y definamos

$$\xi_n := \{A \in \sigma(\mathcal{S}) : \mu(A \cap E_n) = \mu'(A \cap E_n)\}.$$

Queremos ver que $\sigma(\mathcal{S}) \subseteq \xi_n$. Para ello, como \mathcal{S} es un π -sistema, por Dynkin bastará con ver que

1. ξ_n es un λ -sistema;
2. $\mathcal{S} \subseteq \xi_n$.

Veamos 1.

(λ_1) $X \in \xi_n$: Es cierto, pues $\mu(X \cap E_n) = \mu(E_n) = \tau(E_n) = \mu'(E_n) = \mu'(X \cap E_n)$;

(λ_2) $A \in \xi_n \Rightarrow A^c \in \xi_n$: $\mu(A^c \cap E) = \mu(E_n \setminus A) = \mu(E_n) - \mu(A \cap E_n)$ (la última igualdad se da pues $\mu(E_n) < \infty$). Luego, por (λ_1), esto último es igual a $\mu'(E_n) - \mu'(A \cap E_n) = \mu'(A^c \cap E_n)$;

(λ_3) Si $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \xi_n$ son disjuntos, entonces

$$\begin{aligned} \mu \left(\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \right) \cap E_n \right) &= \mu \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \cap E_n \right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k \cap E_n) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu'(A_k \cap E_n) \\ &= \mu' \left(\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \right) \cap E_n \right). \end{aligned}$$

Luego, $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \xi_n$

Veamos 2. Si $A \in \mathcal{S}$ entonces $A \cap E_n \in \mathcal{S}$ pues \mathcal{S} es un π -sistema, y entonces $\mu(A \cap E_n) = \tau(A \cap E_n) = \mu'(A \cap E_n)$. ✓

(ii) $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\mu_\tau^*}$ (τ unívocamente extendible): Sea $A \in \mathcal{M}_{\mu_\tau^*}$. Como τ es σ -finita en \mathcal{S} , existen $B, C \in \sigma(\mathcal{S})$ tales que $C \subseteq A \subseteq B$ y $\mu_\tau^*(C) = \mu_\tau^*(A) = \mu_\tau^*(B)$. Entonces, si μ es una extensión de τ sobre $\mathcal{M}_{\mu_\tau^*}$, tenemos que

$$\begin{array}{ccc} \mu_\tau^*(A) = \mu_\tau^*(C) \leq \mu(C) \leq \mu(A) \leq \mu(B) = \mu_\tau^*(B) = \mu_\tau^*(A) \\ \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\ C \in \sigma(\mathcal{S}) \text{ y } \exists! \text{ ext. en } \sigma(\mathcal{S}) & & B \in \sigma(\mathcal{S}) \end{array}$$

de donde resulta que $\mu(A) = \mu_\tau^*(A)$ y la extensión es única. Además, satisface $\mu(A) = \mu_\tau(B) = \mu_\tau(C)$ para cualquier $C, B \in \sigma(\mathcal{S})$ tal que $C \subseteq A \subseteq B$, $N_1 = A \setminus C$ y $N_2 = B \setminus A$ son μ_τ -nulos. Luego, $\mu = \overline{\mu_\tau}$, donde $\overline{\mu_\tau}$ es la "completación" de μ_τ definida en el Teorema de Extensión de Carathéodory. \square

Nota. De la demostración se deduce que si μ y ν son medidas finitas sobre (X, \mathcal{M}) , entonces

$$\mathcal{L} := \{A \in \mathcal{M} : \mu(A) = \nu(A)\}$$

es un λ -sistema si y solo si $X \in \mathcal{L}$. En particular, si dos medidas finitas coinciden en un π -sistema \mathcal{P} que contiene a X , entonces coinciden en $\sigma(\mathcal{P})$.

Clase 16

12 de Septiembre

Comentario. Si queremos definir una medida finita sobre $(\mathbb{R}, \beta(\mathbb{R}))$, por el comentario de la vez pasada, basta predefinirla en un π -sistema \mathcal{P} que genere a $\beta(\mathbb{R})$ (si queremos unicidad de la extensión a $\beta(\mathbb{R})$). Una elección natural es tomar $\mathcal{P} := \{(-\infty, x] : x \in \mathbb{R}\}$ ($\sigma(\mathcal{P}) = \beta(\mathbb{R})$).

Luego, si μ es una medida que extiende a una premedida τ sobre \mathcal{P} , entonces μ queda unívocamente determinada sobre $\tilde{\mathcal{I}}$:

- $\mu(\mathbb{R}) = \mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-\infty, n] \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu((-\infty, n]) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau((-\infty, n])$.
- $\mu((a, b]) = \mu((-\infty, b] \setminus (-\infty, a]) = \tau((-\infty, b]) - \tau((-\infty, a])$.
- $\mu((a, \infty)) = \mu(\mathbb{R} - (-\infty, a]) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau((-\infty, n]) - \tau((-\infty, a])$.

En conclusión, $\tilde{\mathcal{I}}$ es la semiálgebra natural que aparece cuando buscamos extender un apremida definida sobre \mathcal{P} (y necesitamos definirla al menos sobre un π -sistema como \mathcal{P} si queremos unicidad).

Luego, la idea será:

$$\begin{aligned} \tau \text{ sobre } \mathcal{P} &\Rightarrow \text{extensión automática a } \tilde{\mathcal{I}} \\ &\Rightarrow \text{extensión a } \beta(\mathbb{R}) \text{ por Carathéodory.} \end{aligned}$$

$$\tau((-\infty, x]) =: F_\tau(x).$$

Teorema 1.51. Sea $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monótona creciente. Entonces, $\tau_F : \tilde{\mathcal{I}} \rightarrow [0, \infty]$ dada por $\tau(I(a, b)) = F(b) - F(a)$ ($-\infty \leq a \leq b \leq \infty$) cumple que:

- E1) τ_F es finitamente aditiva;
- E2) Si F es continua a derecha, τ_F es σ -subaditiva.

Es decir, si F es de L-S entonces τ_F es extendible (de hecho, es unívocamente extendible)

Demostración.

E1. Sea $I \in \tilde{\mathcal{I}}$. Luego, $I = I(a, b)$ para ciertos $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$ y $\tau(I) = F(b) - F(a)$. Ahora, si $I = \bigsqcup_{i=1}^n J_i$ entonces, eventualmente reordenando los J_i , podemos suponer que $J_i = I(a_i, b_i)$ para cada $i = 1, \dots, n$, donde $a = a_1 \leq b_1 = a_2 \leq \dots \leq b_{n-1} = a_n \leq b_n = b$. Luego, $\tau(I) = F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n F(b_i) - F(a_i) = \sum_{i=1}^n \tau(J_i)$.

E2. Supongamos primero que $I = (a, b]$ con $-\infty < a < b < \infty$. Si $I \subseteq \bigcup_{i=1}^\infty J_i$ con $J_i \in \tilde{\mathcal{I}}$, entonces $J_i = (a_i, b_i] \cap \mathbb{R}$ con $-\infty \leq a_i \leq b_i \leq \infty$. Eventualmente, cambiando $a_i \rightarrow \max\{a, a_i\}$, $b_i \rightarrow \min\{b, b_i\}$, puedo suponer que $-\infty < a_i \leq b_i < \infty$. Ahora, como F es continua a derecha, dado $\varepsilon > 0$, existen

- $\delta > 0$ tal que $a + \delta < b$ y $F(a + \delta) < F(a) + \varepsilon$;
- $\eta_i > 0$ tal que $F(b_i + \eta_i) < F(b_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$ para cada $i \in \mathbb{N}$.

Luego, los intervalos de la forma $((a_i, b_i + \eta_i))_{i \in \mathbb{N}}$ cubren $[a + \delta, b]$, con lo cual, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $[a + \delta, b] \subseteq \bigcup_{i=1}^N (a_i, b_i + \eta_i)$. Como $a + \delta \in [a + \delta, b]$, existe $i_1 \in \{1, \dots, N\}$ tal que $a + \delta \in (a_{i_1}, b_{i_1} + \eta_{i_1}) =: I_1$.

1. Si $b \in I_1$, entonces

$$\begin{aligned}
 F(b) - F(a + \delta) &\leq F(b_{i_1} + \eta_{i_1}) - F(a_{i_1}) \\
 &\leq F(b_{i_1}) + \frac{\varepsilon}{2^{i_1}} - F(a_{i_1}) \\
 &\leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \left(F(b_i) + \frac{\varepsilon}{2^i} - F(a_i) \right) \\
 &= \sum_{i \in \mathbb{N}} F(b_i) - F(a_i) + \varepsilon.
 \end{aligned}$$

de modo que $F(b) - F(a) \leq F(b) - F(a + \delta) + \varepsilon \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} F(b_i) + 2\varepsilon$. Tomando $\varepsilon \rightarrow 0^+$, resulta $\tau(I) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \tau(J_i)$. ✓

2. Si $b \notin I_1$, entonces $b_{i_1} + \eta_{i_1} \leq b$ y, luego, $b_{i_1} + \eta_{i_1} \in [a + \delta, b]$, de modo tal que existe $i_2 \in \{1, \dots, N\} \setminus \{i_1\}$ tal que $b_{i_1} + \eta_{i_1} \in (a_{i_2}, b_{i_2} + \eta_{i_2}) = I_2$. En general, existen $m \leq N$ e $i_1, \dots, i_m \in \{1, \dots, N\}$ tales que:

$$a_{i_1} < a + \delta < b_{i_1} + \eta_{i_1} < \dots < b_{i_{m-1}} + \eta_{i_{m-1}} \leq b < b_{i_m} + \eta_{i_m}$$

con $b_{i_k} + \eta_{i_k} \in (a_{i_{k+1}}, b_{i_{k+1}} + \eta_{i_{k+1}}) \quad \forall k = 1, \dots, m$. Luego,

$$\begin{aligned}
 F(b) - F(a + \delta) &\leq F(b_{i_m} + \eta_{i_m}) - F(a_{i_1}) \\
 &= \left(\sum_{k=1}^{m-1} F(b_{i_{k+1}} + \eta_{i_{k+1}}) - F(b_{i_k} + \eta_{i_k}) \right) \\
 &\quad + F(b_{i_1} + \eta_{i_1}) - F(a_{i_1}) \\
 &\leq \left(\sum_{k=1}^{m-1} F(b_{i_{k+1}} + \eta_{i_{k+1}}) - F(a_{i_{k+1}}) \right) \\
 &\quad + F(b_{i_1} + \eta_{i_1}) - F(a_{i_1}) \\
 &\leq \sum_{i=1}^{\infty} F(b_i + \eta_i) - F(a_i) \\
 &\leq \sum_{i \in \mathbb{N}} F(b_i) - F(a_{i_1}) + \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Con lo cual, $\tau(I) = F(b) - F(a) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \tau(J_i) + 2\varepsilon$. Tomando $\varepsilon \rightarrow 0^+$, obtenemos el resultado (en el caso $-\infty < a < b < \infty$).

3. Si $a = b$ entonces $I = \emptyset$ y el resultado es inmediato.
 4. Si $a = -\infty$ ó $b = \infty$ y $a \neq b$, entonces

$$(\max\{a, -N\}, \min\{b, N\}) \subseteq I \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

de modo que, si $I \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} J_i$, por el caso anterior,

$$\tau((\max\{a, -N\}, \min\{b, N\})) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \tau(J_i) \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Notamos que la parte izquierda es igual a

$$F(\min\{b, N\}) - F(\max\{a, -N\}),$$

y si $N \rightarrow \infty$, entonces

$$F(b) - F(a) = \tau(I)$$

□