

Topología

Basado en las clases impartidas por Eduardo Oregón en el segundo
semestre del 2025

Contents

| | | |
|----------|--|----------|
| 1 | | 2 |
| 1.1 | Clase 1 (04/08): Espacios Topológicos [12] | 2 |
| 1.2 | Clase 2 (06/08): Topología, Base [12, 13] | 3 |
| 1.2.1 | Topología | 3 |
| 1.2.2 | Base de una topología | 4 |
| 1.3 | Clase 3 (08/08): Bases, Topología producto [13,15] | 5 |
| 1.3.1 | Comparación de topologías | 6 |
| 1.4 | Clase 4 (11/08): Topología producto [15] e inducida [16] | 6 |
| 1.5 | Clase 5 (13/08): Cerrados, clausura, puntos límites [17] | 8 |
| 1.6 | Clase 6 (18/08): Espacios Hausdorff, convergencia [17] | 10 |

Chapter 1

1.1 Clase 1 (04/08): Espacios Topológicos [12]

Definition 1.1 (sistema de vecindades). X conjunto no vacío. Si $x \in X$, consideramos $\mathcal{V}_x \subset 2^X$, tal que:

1. $\forall x \in X, \forall V \in \mathcal{V}_x, x \in V$;
2. $\forall x \in X, \forall V \in \mathcal{V}_x$, si $V' \supset V \Rightarrow V' \in \mathcal{V}_x$;
3. Si $V_1, V_2 \in \mathcal{V}_x \Rightarrow V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}_x$.

El sistema de vecindades es $\{\mathcal{V}_x\}_{x \in X}$. Si $V \in \mathcal{V}_x$, V es vecindad de x .

Example. 1. (X, d) espacio métrico $\mathcal{V}_x := \{V \subset X \mid \exists \varepsilon > 0 \text{ tal que } B_\varepsilon(x) \subset V\}$. Verificamos que sea sistema de vecindad.

Proof. Verificamos 1), 2) y 3):

- 1) $x \in X, V \in \mathcal{V}_x \Rightarrow x \in B_\varepsilon(x) \subset V$;
- 2) $x \in X, V \in \mathcal{V}_x, V' \supset V \Rightarrow x \in B_\varepsilon(x) \subset V \subset V' \Rightarrow V' \in \mathcal{V}_x$;
- 3) $x \in V_1 \cap V_2, V_1, V_2 \in \mathcal{V}_x \Rightarrow B_{\varepsilon_1}(x) \subset V_1, B_{\varepsilon_2}(x) \subset V_2$
 $\Rightarrow B_{\min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}}(x) \subset V_1 \cap V_2$
 $\Rightarrow V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}_x$.

□

2. X arbitrario, $\forall x \in X$, sea $\mathcal{V}_x = \{X\}$ es sistema de vecindades (vacuidad).
3. X arbitrario $\mathcal{V}_x = \{V \subset X \mid x \in V \text{ y } X \setminus V \text{ sea finito}\}$ (queda como ejercicio chequear que esto define un sistema de vecindades).

◇

Definition 1.2 (topología desde sistema de vecindades). Tenemos $X, \{\mathcal{V}_x\}_{x \in X}$ sistema de vecindades. Definimos, $\tau = \{U \subset X \mid x \in U \Rightarrow U \in \mathcal{V}_x\}$.

Lemma 1.3. τ cumple lo siguiente:

1. $\emptyset, X \in \tau$;
2. $U_\alpha \in \tau, \alpha \in A \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \tau$;
3. $U_1, \dots, U_n \in \tau \Rightarrow U_1 \cap \dots \cap U_n \in \tau$.

τ es la topología inducida por $\{\mathcal{V}_x\}$. Elementos de τ (subconjuntos de X) se llamarán abiertos.

1.2 Clase 2 (06/08): Topología, Base [12, 13]

Proof. (último lema de la clase anterior)

1. $\emptyset \in \tau$ por vacuidad.

$$\begin{aligned} X \in \tau : x \in X &\Rightarrow \exists V \in \mathcal{V}_x \quad (1)x \in V; (2)x \in V \subset X \\ &\Rightarrow X \in \mathcal{V}_x. \quad \forall x : X \in \tau \end{aligned}$$

2. Tomar $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $U_\alpha \in \tau$, $\mathcal{U} = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Si $x \in \mathcal{U} \Rightarrow x \in U_\alpha \in \mathcal{V}_x$ para algún α . Como $U_\alpha \in \tau \Rightarrow U_\alpha \in \mathcal{V}_x$. Luego, si $x \in U_\alpha \subset \mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{U} \in \mathcal{V}_x, \forall x \in \mathcal{U}$. Por lo tanto, $\mathcal{U} \in \tau$.
3. Tomamos $U_1, \dots, U_n \in \tau$, $\mathcal{U} = U_1 \cap \dots \cap U_n$ y $x \in \mathcal{U}$. Luego, $x \in U_i \quad \forall i$. Como $U_i \in \tau \Rightarrow U_i \in \mathcal{V}_x, \quad \forall i$. Por inducción (con las intersecciones), podemos afirmar que $\mathcal{U} \in \mathcal{V}_x, \forall x \in \mathcal{U}$. Por lo tanto, $\mathcal{U} \in \tau$.

□

1.2.1 Topología

Definition 1.4 (topología). X conjunto no vacío, $\tau \subset 2^X$ es una topología si cumple:

1. $\emptyset, X \in \tau$;
2. $U_\alpha \in \tau, \alpha \in A \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \tau$;
3. $U_1, \dots, U_n \in \tau \Rightarrow U_1 \cap \dots \cap U_n \in \tau$.

Remark. Se utilizará la siguiente notación:

- (X, τ) se llama espacio topológico.
- $U \in \tau \Rightarrow U$ se llama abierto (con respecto a la topología).

Lemma 1.5. τ topología en $X \Rightarrow$ Inducida por un único sistema de vecindades.

Proof. Para $x \in X$, definir $\mathcal{V}_x = \{V \subset X \mid \exists U \in \tau \text{ con } x \in U \subset V\}$.
Verificamos que $\{\mathcal{V}_x\}_x$ es sistema de vecindades:

1. La definición implica $V \in \mathcal{V}_x \Rightarrow x \in U \subset V$;
2. Si $V \in \mathcal{V}_x$ y $V' \supset V \Rightarrow (V \in \mathcal{V}_x) \Rightarrow x \in U \subset V \subset V' \Rightarrow V' \in \mathcal{V}_x$;
3. Tomar $V_1, V_2 \in \mathcal{V}_x \Rightarrow x \in U_1 \subset V_1, \quad x \in U_2 \subset V_2$ con $U_1, U_2 \in \tau$
 $\Rightarrow x \in \underbrace{U_1 \cap U_2}_{\in \tau} \subset V_1 \cap V_2 \Rightarrow V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}_x$;

(falta demostrar unicidad). □

Example (de espacios topológicos).

1. (Topología métrica): (X, d) espacio métrico. Abierto es $U \in X$ tal que $\forall x \in U, \exists \varepsilon > 0$ tal que $x \in B_\varepsilon(x) \subset U$.
 - (a) $X = \mathbb{R}^n, d((x_i), (y_i)) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$. Así, se obtiene la topología estándar.
 - (b) X arbitrario, d métrica discreta $d(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y. \end{cases}$ Así, se obtiene la topología discreta: $\tau = 2^X$.
2. (Topología indiscreta): X arbitrario, $\tau = \{\emptyset, X\}$;
3. (Topología cofinita): X arbitrario, $\tau_{cof} = \{U \subset X \mid X \setminus U \text{ es finito}\} \cup \{\emptyset\}$ (queda como ejercicio verificar que es topología).

◇

1.2.2 Base de una topología

Una base es un subconjunto "manejable" de τ que la describe completamente!

Definition 1.6 (base). X es conjunto. $\mathcal{B} \subset 2^X$ es base para alguna topología si:

1. $\forall x \in X, \exists B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$ ($\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$).
2. $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}, \forall x \in B_1 \cap B_2, \exists B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Definition 1.7 (topología inducida). La topología inducida por la base \mathcal{B} en X es:

$$\tau = \{U \subset X \mid \forall x \in U, \exists B \in \mathcal{B} \text{ tal que } x \in B \subset U\}.$$

Note. $\mathcal{B} \subset \tau$.

Lemma 1.8. τ , definido arriba, es una topología.

Example. (X, d) espacio métrico $\Rightarrow \mathcal{B} = \{B_\varepsilon(x) \mid x \in X, \varepsilon > 0\}$ es base de la topología métrica. \diamond

1.3 Clase 3 (08/08): Bases, Topología producto [13,15]

Proof. (lema 1.8)

1. $\emptyset, X \in \tau$: $\emptyset \in \tau$ por vacuidad y $X \in \tau$ por propiedad (1) de \mathcal{B} .
2. τ cerrado bajo unión: $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ colección con $U_\alpha \in \tau$, $\mathcal{U} = \bigcup_\alpha U_\alpha$.

$$\begin{aligned} \text{Si } x \in \mathcal{U} &\Rightarrow x \in U_\alpha \text{ para algún } \alpha \\ &\Rightarrow x \in B \subset U_\alpha \text{ para algún } B \in \mathcal{B} \\ &\Rightarrow x \in B \subset \mathcal{U}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathcal{U} \in \tau$.

3. τ cerrado bajo intersección finita: $U_1, \dots, U_n \in \tau$, $\mathcal{U} = U_1 \cap \dots \cap U_n$.
 Sea $x \in \mathcal{U} \Rightarrow x \in U_i \forall i$ ($U_i \in \tau$) $\Rightarrow x \in B_i \subset U_i \forall i, B_i \in \mathcal{B}$.
 Propiedad (2) implica $x \in B \subset B_1 \cap \dots \cap B_n \subset U_1 \cap \dots \cap U_n = \mathcal{U}$.
 Por lo tanto, $\mathcal{U} \in \tau$.

□

Note. Si B base genera $\tau \Rightarrow B \subset \tau$.

Definition 1.9 (topología generada). τ topología está generada por una base B sin B es base, y τ es topología generada por B .

Utilidad: Dada τ topología a estudiar, queremos encontrar base B que la describa.

Example. (X, d) espacio métrico, $\mathcal{B} = \{B_\varepsilon(x) \mid \varepsilon > 0, x \in X\}$ es base para la topología métrica. \diamond

Proof. Probamos que B es base.

1. Notar $X = \bigcup_{x \in X} B_1(x)$. Por lo tanto, $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$.
2. $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, $B_1 = B_{\varepsilon_1}(x_1)$, $B_2 = B_{\varepsilon_2}(x_2)$. Sea $x \in B_1 \cap B_2$. Queremos encontrar $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subset B_1 \cap B_2$. Por desigualdad triangular, tenemos que $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1 - d(x, x_1), \varepsilon_2 - d(x, x_2)\}$ sirve.

□

Note. 1. Una base no es necesariamente una topología ((1) y (2) pueden fallar).

2. Si B es base y τ topología, $B \subset \tau \nRightarrow \tau$ es generada por B .

Example. Topología del límite inferior en \mathbb{R} : $B_l = \{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ (se deja como ejercicio demostrar que B_l es base). \diamond

Definition 1.10 (topología del límite inferior). B_l genera la topología del límite inferior τ_l .

Remark.

1. τ_l no es τ_{std} ($[a, b)$ abierto en τ_l pero no en τ_{std})
2. $\tau_{std} \subset \tau_l$ (la demostración de esto queda como ejercicio).
3. (Intuición): Si $0 \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$ (para τ_{std} , y cerca de 0 si $|y| < \varepsilon$). Para τ_l , y cerca de 0, si $y \in [0, \varepsilon)$ ($0 \leq y < \varepsilon$ para $\varepsilon > 0$ chiquito).

1.3.1 Comparación de topologías

Definition 1.11 (topologías finas). τ, τ' topologías en X , decimos que τ' es más fina que τ si $\tau' \supset \tau$. Decimos que τ y τ' son comparables si $\tau' \supset \tau$ o $\tau \supset \tau'$.

Example. τ_l es más fina que τ' . \diamond

Example. $\forall \tau$ topología en X , $\{\emptyset, X\} \subset \tau \subset 2^X$. Donde $\{\emptyset, X\}$ es llamada la topología indiscreta (todos cercanos entre sí) y 2^X la topología discreta (todos lejanos entre sí). \diamond

En conclusión, si τ' es más fina que τ , los puntos están más lejanos respecto a τ' que a τ

1.4 Clase 4 (11/08): Topología producto [15] e inducida [16]

Lemma 1.12. $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ bases en X que generan la topología τ, τ' respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned} \tau' \supset \tau &\Leftrightarrow (\text{todo elemento de } \mathcal{B} \text{ está en } \tau'); \\ &\Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{B}, B \text{ es unión de elementos de } \mathcal{B}'; \\ &\Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{B}, \forall x \in B, \exists B' \in \mathcal{B}' \text{ tal que } x \in B' \subset B. \end{aligned}$$

Lemma 1.13. $\mathcal{B}_{X \times Y} := \{U \times U' \mid U \text{ abierto en } X, U' \text{ abierto en } Y\}$ es una base para una topología.

Definition 1.14 (topología producto). Topología producto en $X \times Y$ es la generada por $\mathcal{B}_{X \times Y}$.

Proof. (lemma 1.13.)

1. Como $X \times Y \in \mathcal{B}_{X \times Y} \Rightarrow \bigcup_{B \in \mathcal{B}_{X \times Y}} B = X \times Y$.
2. Tomar $B_1 = U_1 \times U'_1 \in \mathcal{B}_{X \times Y}, B_2 = U_2 \times U'_2 \in \mathcal{B}_{X \times Y}, (x, y) \in B_1 \cap B_2$ (U_1, U_2 abiertos en X y U'_1, U'_2 abiertos en Y). Notar que:
$$B_1 \cap B_2 = (U_1 \times U'_1) \cap (U_2 \times U'_2) = \underbrace{(U_1 \cap U_2)}_{\text{abto. en } X} \times \underbrace{(U'_1 \cap U'_2)}_{\text{abto. en } Y} \in \mathcal{B}_{X \times Y}.$$

□

Note. Misma demostración (salvo modificaciones esperables) implica que si \mathcal{B}_X es base de X , \mathcal{B}_Y base de Y , $\mathcal{B}'_{X \times Y} := \{B \times B' \mid B \in \mathcal{B}_X, B' \in \mathcal{B}_Y\}$ es base y genera la misma topología generada por $\mathcal{B}_{X \times Y}$.

Example (importante). $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Propiedad: topología estándar de \mathbb{R}^2 (métrica euclidiana) es igual a la topología producto en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (cada uno con su topología estándar).

- Topología estándar en \mathbb{R}^2 : generada por base $\mathcal{B} = \{B_\varepsilon(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2, \varepsilon > 0\}$.
- Topología producto en \mathbb{R}^2 : generada por base $\mathcal{B}' = \{(a, b) \times (c, d) \mid a < b, c < d\}$.

◇

Exercise. Verificar para \mathbb{R}^n .

Definition 1.15 (topología inducida). $\tau|_Y := \{Y \cap U \mid U \in \tau\}$ es topología en Y . La llamamos topología en Y inducida por X .

Proof. (topología inducida es topología)

1. $\emptyset = \emptyset \cap Y, Y = X \cap Y$.
2. Si $U_\alpha \in \tau|_Y, \alpha \in A \Rightarrow U_\alpha = U'_\alpha \cap Y$ con $U'_\alpha \in \tau \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} (U'_\alpha \cap Y) = \left[\bigcup_{\alpha \in A} U'_\alpha \right] \cap Y \in \tau|_Y$.
3. $U_1, \dots, U_n \in \tau|_Y, U_i = U'_i \cap Y \Rightarrow U_1 \cap \dots \cap U_n = (U'_1 \cap Y) \cap \dots \cap (U'_n \cap Y) = (U'_1 \cap \dots \cap U'_n) \cap Y \in \tau|_Y$.

□

Lemma 1.16. $\mathcal{B}|_Y := \{Y \cap B \mid B \in \mathcal{B}\}$ es base para la topología en Y inducida por X .

Remark. Cuidado: La noción de abierto depende de la topología a especificar.

Example. En $X = \mathbb{R}, Y = [0, 1] \cup (2, 3) \cup \{4\}$. Notar que:

- Y es abierto en Y , pero no es abierto en X .
- $[0, 1]$ también abierto en $Y : [0, 1] = Y \cap (-1, 2)$.
- $\{4\}$ también abierto en $Y : \{4\} = Y \cap (3, 5)$.

◇

Note. Si $U \subset Y$ es abierto en $X \Rightarrow$ abierto en Y .

Lemma 1.17. $Y \subset X, \tau|_Y \subset \tau \Leftrightarrow Y$ es abierto en X .

Proposition 1.18. X, Y espacios topológicos, $A \subset X, B \subset Y$.

En $A \times B \rightarrow$ topología inducida desde $X \times Y$ (con topología producto)
 \rightarrow topología producto desde A y B (con topología inducida
 por X, Y respectivamente).

Estas topologías son la misma.

Proof. Elemento de topología primera: $U = U' \cap A \times B$

Elemento de topología segunda: U es unión de productos $V \times V'$ con V
 abierto en A , V' abierto en B . Notar que $V \times V' = (W \cap A) \times (W' \cap B) =$
 $(W \times W') \cap A \times B$. □

1.5 Clase 5 (13/08): Cerrados, clausura, puntos límites [17]

Definition 1.19 (conjunto cerrado). X espacio topológico, $C \subset X$ es cerrado
 si $X \setminus C$ es abierto.

Lemma 1.20.

1. X, \emptyset son cerrados;
2. Si $C_\alpha \subset X$ cerrados, $\alpha \in A \Rightarrow \bigcap_\alpha C_\alpha$ es cerrado;
3. Si C_1, \dots, C_n cerrados, entonces $C_1 \cup \dots \cup C_n$ es cerrado.

Proof.

1. $X = X \setminus \emptyset$, $\emptyset = X \setminus X$;

$$\begin{aligned}
2. \quad C_\alpha &= \bigcap_{\alpha \in A} C_\alpha \Rightarrow X \setminus C = X \setminus \bigcap_{\alpha \in A} C_\alpha = \underbrace{\bigcup_{\alpha \in A} (X \setminus C_\alpha)}_{\text{abto}}; \\
3. \quad C &= C_1 \cup \dots \cup C_n \Rightarrow X \setminus C = X \setminus (C_1 \cup \dots \cup C_n) = \underbrace{(X \setminus C_1) \cap \dots \cap (X \setminus C_n)}_{\text{abto}}.
\end{aligned}$$

□

Example.

1. $X = \mathbb{R}$, $[a, b]$ es cerrado ($\mathbb{R} \setminus [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$);
2. (X, d) espacio métrico (+ topología métrica) $\Rightarrow \overline{B_\varepsilon}(x)$ es cerrado. Luego, $X \setminus \overline{B_\varepsilon}(x) = \bigcup_{y \in X \setminus \overline{B_\varepsilon}(x)} B_{d(x,y)-\varepsilon}(y)$ (abierto en topología métrica);
3. X con la topología discreta \Rightarrow todo subconjunto de X es abierto y cerrado!

◇

Definition 1.21 (cerrado topología inducida). X espacio topológico, $Y \subset X$ (con la topología inducida), $C \subset Y$ es cerrado en Y si es cerrado en la topología inducida.

Lemma 1.22. C es cerrado en Y si y solo si $C = C' \cap Y$ con C' cerrado en X .

Proof. $C \subset Y$ es cerrado en $Y \Leftrightarrow Y \setminus C$ es abierto en Y □
 $\Leftrightarrow Y \setminus C = U \cap C$ con $U \subset X$ abierto
 $\Leftrightarrow C = (X \setminus U) \cap Y = C' \cap Y$, con
 $C' = X \setminus U$ cerrado.

Definition 1.23 (clausura e interior). X espacio topológico, $A \subset X$:

1. El interior de A es $\overset{\circ}{A}$ = unión de todos los abiertos contenidos en A ;
2. La clausura de A es \overline{A} = intersección de todos los cerrados que contienen A .

Remark.

1. $\overset{\circ}{A}$ es abierto, \overline{A} es cerrada, $\overset{\circ}{A} \subset A \subset \overline{A}$;
2. A es abierto si y solo si $\overset{\circ}{A} = A$. A es cerrado si y solo si $\overline{A} = A$;
3. $\overline{\overset{\circ}{A}} = \overline{A}$, $\overset{\circ}{\overline{A}} = \overset{\circ}{A}$;

4. El interior $\overset{\circ}{A}$ es el abierto mas grande contenido en A y la clausura \overline{A} es el cerrado mas pequeño que contiene a A .

Proposition 1.24. X espacio topológico, $A \subset X$ cualquiera, $x \in X$.

$$\begin{aligned} x \in \overline{A} &\Leftrightarrow \forall U \text{ abierto conteniendo a } x, \text{ se tiene } A \cap U \neq \emptyset & (*) \\ &\Leftrightarrow \text{ toda vecindad de } x \text{ interseca a } A \\ &\Leftrightarrow A \text{ contiene puntos arbitrariamente cercanos a } x \text{ (según la topología).} \end{aligned}$$

Corollary 1.25. $C \subset X$ es cerrado si y solo si $\forall x \in X$, si toda vecindad de x contiene un punto de C , entonces $x \in C$.

Proof. (proposición 1.24)

\Leftarrow Suponer que $x \notin \overline{A}$. Entonces $\exists C$ cerrado con $A \subset C$ y $x \notin C$. Luego, tomar $U := C \setminus C$ abierto. Entonces, $A \cap U = \emptyset$ y $x \in U$. Es decir, negamos (*).

\Rightarrow Negamos (*) $\Rightarrow \exists U$ abierto con $x \in U$ y $U \cap A = \emptyset$. Luego, $C = X \setminus U$ cerrado con $A \subset C$ y $x \notin C$. Entonces, $x \notin \overline{A}$. \square

Definition 1.26 (puntos de acumulación). $A \subset X$. Decimos que $x \in X$ es punto límite/de acumulación de A si $\forall U$ abierto conteniendo a x , se tiene que $U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. Escribimos $A' := \{\text{puntos límite de } A\}$.

Example. En \mathbb{R} , tenemos lo siguiente:

| A | $\overset{\circ}{A}$ | \overline{A} | A' |
|---------------------|----------------------|---------------------|----------|
| (a, b) | (a, b) | $[a, b]$ | $[a, b]$ |
| $[a, b)$ | (a, b) | $[a, b]$ | $[a, b]$ |
| $[a, b]$ | (a, b) | $[a, b]$ | $[a, b]$ |
| $[0, 1] \cup \{2\}$ | $(0, 1)$ | $[0, 1] \cup \{2\}$ | $(0, 1)$ |

Notar que 2 no es punto de acumulación. \diamond

1.6 Clase 6 (18/08): Espacios Hausdorff, convergencia [17]

Remark. $x \in A' \Leftrightarrow x \in \overline{A \setminus \{x\}}$.

Lemma 1.27. $\forall A \subset X$, $\overline{A} = A \cup A'$.

Proof. \square Notar que $A \subset \overline{A}$. Si $x \in A' \Rightarrow x \in \overline{A \setminus \{x\}} \subset \overline{A}$ (*). Notar que $(*) A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$. Por lo tanto $A' \subset \overline{A}$. Entonces, $A \cup A' \subset \overline{A}$.
 \square $(\overline{A} \subset A \cup A', \text{ equiv: } \overline{A} \setminus A \subset A')$ Si $x \in \overline{A} \setminus A$. Entonces, $x \notin A$ y $\forall U \ni x$ abierto se tiene $A \cap U \neq \emptyset$. Como $x \notin A \Rightarrow (A \setminus \{x\}) \cap U \neq \emptyset$. Entonces, $x \in A'$. \square

Remark. A' no es necesariamente cerrado.

Example. $X = \{a, b\}$; $\tau = \{\emptyset, X\}$ (a, b indistinguibles desde el punto de vista de τ). $A = \{b\} \Rightarrow A' = \{b\}$ (no es cerrado). $a \notin A' \Leftrightarrow a \notin \overline{A \setminus \{a\}} = \emptyset = \emptyset$.
 $b \in A \Leftrightarrow b \in \overline{A \setminus \{b\}} = \{a\} = \{a, b\}$. \diamond

Problemas:

- Subconjuntos finitos no tienen topología discreta;
- Subconjuntos finitos no son cerrados.

Lemma 1.28. Si X es espacio topológico arbitrario. Son equivalentes:

1. Todos los subconjuntos finitos de X tienen la topología discreta.
2. Todos los subconjuntos finitos de X son cerrados.

Definition 1.29 (espacios T_1). Un espacio topológico X es T_1 (cumple el axioma T_1) si sus subconjuntos finitos son cerrados.

Example. X con la topología indiscreta NO es T_1 si $\#X \geq 2$. \diamond

Example. X con topología cofinita es T_1 . En la topología

$$\{\text{subconjuntos cerrados}\} = \{\text{conjuntos finitos}\}$$

\diamond

Lemma 1.30. X es T_1 , $A \subset X \Rightarrow A'$ es cerrado.

Proof. (Queremos $\overline{A'} = A'$, i.e. $\overline{A'} \setminus A' = \emptyset$) Suponer que $x \in \overline{A'}$, $x \notin A'$. Si $x \notin A'$, entonces $\exists U$ abierto con $x \in U$ y $U \cap A \subset \{x\}$. Si $x \in \overline{A'}$, entonces $A' \cap U \neq \emptyset$. Luego, $\exists y \in U \cap A' (y \neq x)$. Como X es T_1 , entonces $\{x\}$ es cerrado. Luego, $X \setminus \{x\}$ es abierto, y con ello tenemos que $U \setminus \{x\}$ es abierto. Si $V = U \setminus \{x\}$ abierto que contiene a $y (y \in A')$, entonces V contiene puntos de A , distintos de y . Luego, $\exists z \in A \cap V$. Así, $z \in A \cap U$ y $z \neq x$. Contradicción! \ast \square

Definition 1.31 (espacios T_2 o Hausdorff). Un espacio topológico X es T_2 (o Hausdorff), si $\forall x \neq y$ en X existen $U, U' \subset X$ abiertos disjuntos con $x \in U$, $y \in U'$.

Example. X con la topología cofinita, con $\#X = \infty$ es T_1 pero no es Hausdorff. Veamos que esto es así. Si $x \neq y \in X$, $x \in U$, $y \in U'$ abiertos ($X \setminus U$, $X \setminus U'$ finitos), entonces $(X \setminus U) \cup (X \setminus U')$ finito. Luego, $X \setminus (U \cap U')$ finito. Así, $U \cap U'$ infinito, por lo que $U \cap U'$ no puede ser disjunto. \diamond

Lemma 1.32. X Hausdorff $\Rightarrow X$ es T_1 .

Proof. (X es $T_1 \Leftrightarrow$ subconjuntos finitos son cerrados \Leftrightarrow singletons son cerrados) \rightarrow (veremos el último si y solo si) Sea $x \in X$, queremos que $X \setminus \{x\}$ sea abierto. Si $y \neq x$, dado que X es Hausdorff, $\exists U_y, U'_y$ abiertos disjuntos con $y \in U_y$, $x \in U'_y$. Luego, $x \notin U_y$. Por lo tanto, $X \setminus \{x\} = \bigcup_{y \neq x} U_y$ es abierto. \square

Example. (X, d) espacio métrico, X es Hausdorff con la topología métrica. \diamond

Corollary 1.33 (secreto). Existen topologías que no vienen de métricas.

Proof (del ejemplo). Para la topología métrica, bolas abiertas son abiertos. Si $x \neq y$, entonces $U = B_{\frac{d(x,y)}{2}}(x)$, $U' = B_{\frac{d(x,y)}{2}}(y)$. \square

En X con la topología cofinita, $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ infinito contable. Definimos $y_n = x_n$ con $n \geq 1$ (cada elemento de X aparece exactamente una vez). Cada abierto $\emptyset \neq U \subset X$ contiene a $y_n \forall n \geq \mathbb{N}$ (N depende de U). (próxima clase: $y_n \rightarrow x \forall x \in X$).