

Teoría de Integración

Basado en las clases impartidas por Santiago Saglietti en el
segundo semestre del 2025

Contents

1	Integral de Riemann	2
1.1	Clase 1 (04/08)	2
1.2	Clase 2 (06/08)	3
1.3	Clase 3 (07/08)	4
1.4	Clase 4 (08/08)	6
	1.4.1 Limitaciones de la integral de Riemann	6
	1.4.2 Clase 5 (18/08)	8
1.5	Clase 6 (20/08)	10
1.6	Clase 7 (22/08)	12
1.7	Clase 8 (25/08)	14
1.8	Clase 9 (27/08)	16

Chapter 1

Integral de Riemann

1.1 Clase 1 (04/08)

Definition 1.1 (partición + intervalos). Una partición de un intervalo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ es un subconjunto finito $\Pi \subseteq [a, b]$ tal que $a, b \in \Pi$. Denotaremos a las particiones como $\Pi = \{x_0, \dots, x_n\}$, donde $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Los intervalos $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$ serán llamados intervalos de la partición.

Remark. A veces, identificaremos la partición Π con $(I_i)_{i=1, \dots, n}$. En tal caso, abusando de la notación, escribiremos $I_i \in \Pi$ cuando queramos hablar de los intervalos de Π .

Definition 1.2 (norma de particiones). La norma de una partición Π como $\|\Pi\| := \max_{i=1, \dots, n} (x_i - x_{i-1}) = \max_{I_i \in \Pi} |I_i|$.

Definition 1.3 (partición marcada). Una partición marcada de $[a, b]$ es un par $\Pi^* := (\Pi, \varepsilon)$ donde:

- $\Pi = \{x_0, \dots, x_n\}$ es una partición de $[a, b]$;
- $\varepsilon = \{x_1^*, \dots, x_n^*\}$ es una colección de puntos tal que $x_i^* \in I_i$ para cada $i = 1, \dots, n$.

Remark. Dada una partición marcada $\Pi^* = (\Pi, \varepsilon)$, definimos $\|\Pi^*\| := \|\Pi\|$.

Definition 1.4 (Suma de Riemann). Sean $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada y $\Pi^* = (\Pi, \varepsilon)$ una partición marcada. Definimos la suma de Riemann de f asociada a Π^* como:

$$S_R(f; \Pi^*) := \sum_{i=1}^n f(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{I_i \in \Pi} f(x_i^*)|I_i|.$$

1.2 Clase 2 (06/08)

Definition 1.5 (Riemann integrable). Dada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada, decimos que es Riemann integrable si existe el límite $\lim_{\|\Pi^*\| \rightarrow 0} S_R(f; \Pi^*)$. Equivalentemente, $\exists L \in \mathbb{R}$, tal que dado cualquier $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que $\|\Pi^*\| < \delta \Rightarrow |S_R(f; \Pi^*) - L| < \varepsilon$.

Remark. Cuando el límite existe, lo llamamos la integral de Riemann de f en $[a, b]$ y lo notamos $\int_a^b f(x)dx$.

Definition 1.6 (Sumas superior e inferior de Darboux). Dadas $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada y $\Pi = (I_i)_{i=1, \dots, n}$ una partición de $[a, b]$, definimos

$$m_{I_i} := \inf_{x \in I_i} f(x), \quad M_{I_i} := \sup_{x \in I_i} f(x) \quad \text{y}$$

$$\underline{S}(f; \Pi) := \sum_{I_i \in \Pi} m_{I_i} |I_i|, \quad \overline{S}(f; \Pi) := \sum_{I_i \in \Pi} M_{I_i} |I_i|.$$

Llamamos a $\underline{S}(f; \Pi)$ y $\overline{S}(f; \Pi)$ las sumas inferior y superior de Darboux de f con respecto a Π , respectivamente.

Note. Como $m_{I_i} \leq f(x) \leq M_{I_i}$, $\forall x \in I_i$ para toda partición marcada $\Pi^* = (\Pi; \varepsilon)$, tenemos $\underline{S}(f; \Pi) \leq S_R(f; \Pi^*) \leq \overline{S}(f; \Pi)$.

Definition 1.7 (refinamiento). Diremos que una partición Π' de $[a, b]$ es un refinamiento de otra partición de $[a, b]$, Π , si $\Pi \subseteq \Pi'$. Equivalentemente, si para todo $J_i \in \Pi'$ existe $I_i \in \Pi$ tal que $J_i \subseteq I_i$.

Proposition 1.8. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada. Entonces,

- Si $\Pi \subseteq \Pi'$ son particiones de $[a, b]$,

$$\underline{S}(f; \Pi) \leq \underline{S}(f; \Pi'), \quad \overline{S}(f; \Pi) \geq \overline{S}(f; \Pi').$$

- Si Π_1, Π_2 son particiones de $[a, b]$ cualesquiera,

$$\underline{S}(f; \Pi_1) \leq \overline{S}(f; \Pi_2)$$

Definition 1.9. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada. Definimos:

- La integral superior (de Darboux) de f como $\int_a^b f(x)dx := \inf_{\Pi} \overline{S}(f; \Pi)$.
- La integral inferior (de Darboux) de f como $\int_a^b f(x)dx := \sup_{\Pi} \underline{S}(f; \Pi)$.

Theorem 1.10. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada. Entonces,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \underline{S}(f; \Pi) \quad \text{y} \quad \overline{\int_a^b f(x)dx} = \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \overline{S}(f; \Pi).$$

Remark. Equivalentemente, para cualquier sucesión $(\Pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de partición de $[a, b]$ tal que $\|\Pi_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, se tiene que

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}(f; \Pi_n) \quad \text{y} \quad \overline{\int_a^b f(x)dx} = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(f; \Pi_n).$$

Theorem 1.11. Dada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada, son equivalentes:

1. $\int_a^b f(x)dx = \overline{\int_a^b f(x)dx}$ (i.e., f es Darboux integrable).
2. f es Riemann integrable.
3. $\lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \overline{S}(f; \Pi) - \underline{S}(f; \Pi) = 0$.
4. $\forall (\Pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión de particiones de $[a, b]$ tal que $\|\Pi_n\| \rightarrow 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(f; \Pi_n) - \underline{S}(f; \Pi_n) = 0.$$

5. $\exists (\Pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión de particiones de $[a, b]$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(f; \Pi_n) - \underline{S}(f; \Pi_n) = 0.$$

1.3 Clase 3 (07/08)

Note. Las integrales en el sentido de Darboux y el de Riemann coinciden.

Proposition 1.12. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es monótona, entonces es Riemann integrable.

Remark. Una función monótona tiene discontinuidades numerables.

Proposition 1.13. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces es Riemann integrable.

En particular, existen funciones Riemann integrables con numerables discontinuidades. De hecho, hay ejemplos con c (cardinal del continuo) discontinuidades. No obstante, si f es integral de Riemann, su conjunto de discontinuidades tiene que ser "pequeño".

Theorem 1.14. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada. Entonces, f es integral de Riemann si y sólo si su conjunto de discontinuidades tiene medida nula.

Definition 1.15 (intervalo). Decimos que un conjunto $I \subseteq \mathbb{R} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ es un intervalo si satisface

$$x, y \in I \Rightarrow z \in I \text{ para todo } \min x, y \leq z \leq \max x, y.$$

Example. (y propiedades)

- Dados $a \leq b$ ($a, b \in \mathbb{R}$), los conjuntos (a, b) , $(a, b]$, $[a, b]$, $[a, b)$ son intervalos;
- El conjunto vacío es un intervalo ($\emptyset = (a, a)$);
- Los puntos son intervalos. $I = [\lambda, \lambda]$;
- La intersección son intervalos de intervalos.

◇

Definition 1.16 (intervalo generalizado). Decimos que un conjunto $I \subseteq \mathbb{R}^d$ es un intervalo si puede escribirse como

$$I = \prod_{k=1}^d I_k$$

donde cada I_r es un intervalo en \mathbb{R} . La medida de un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}^d$ se define como

$$|I| := \prod_{k=1}^d |I_k|.$$

Note. Los intervalos en \mathbb{R}^d heredan las mismas propiedades en \mathbb{R} :

- Intersección de intervalos en \mathbb{R}^d es intervalo.
- Si $I \subseteq J \subseteq \mathbb{R}^d$ son intervalos, entonces $|I| \leq |J|$.

Definition 1.17 (medida nula). Un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^d$ se dice de medida nula si, dado $\varepsilon > 0$, existe una sucesión $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de intervalos de \mathbb{R}^d tal que

$$E \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \quad \text{y} \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} |I_n| < \varepsilon.$$

Example. (y propiedades)

1. Todo conjunto unitario $\{x\}, (x \in \mathbb{R}^d)$ tiene medida nula;

2. Toda unión numerable de conjuntos de medida nula tiene medida nula;
3. Cualquier conjunto numerable tiene medida nula;
4. Cualquier subconjunto de un conjunto de medida nula tiene medida nula;
5. Existen conjuntos no numerables de medida nula:
 - En \mathbb{R}^d con $d \geq 2$, los ejes $\{x : x_1 = 0\}, i = 1, \dots, d$ tiene medida nula.
 - En \mathbb{R} , el conjunto de cantor tiene medida nula.
6. $E \subseteq \mathbb{R}^d$ es de medida nula, entonces $\alpha \dot{E}$ tiene medida nula $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
7. $E \subseteq \mathbb{R}^d$ es de medida nula, entonces $E + v$ tiene medida nula $\forall v \in \mathbb{R}^d$.
8. Si E contiene un intervalo no unitario, entonces no tiene medida nula.
Notar que:
 - La vuelta no es válida: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ no contiene intervalos no unitarios pero no puede tener medida nula.
 - De esto se deduce que si $E \subseteq \mathbb{R}^d$ tiene medida nula. Entonces E^c es denso (no vale la vuelta: $E^c = \mathbb{Q}$).
9. $E \subseteq \mathbb{R}^d$ tiene medida nula si y sólo si

$$|E|_e := \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} |I_n| : E \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \right\} = 0, \quad I_n \text{ intervalo } \forall n \in \mathbb{N}.$$

◇

1.4 Clase 4 (08/08)

Theorem 1.18. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada. Entonces

$$f \text{ Riemann integrable} \iff D_f = \{x \in [a, b] : f \text{ discontinua en } x\} \text{ tiene medida nula.}$$

1.4.1 Limitaciones de la integral de Riemann

1. Sólo está definida para f acotada y sobre intervalos $[a, b]$ acotados. La teoría de integrales impropias resuelve esto.
2. Propiedades del espacio $\mathcal{R}([a, b]) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ Riemann integrable}\}$:
Nos gustaría poder definir una noción de convergencia en $\mathcal{R}([a, b])$ tal que

$$f_n \rightarrow f \text{ en } \mathcal{R}([a, b]) \Rightarrow \int_a^b f_n \rightarrow \int_a^b f \quad \left(\lim \int_a^b f_n = \int_a^b \lim f_n \right).$$

Remark. La convergencia puntal NO cumple esto (punto 2).

Example (1).

- $f_n := n\chi_{(0, \frac{1}{n}]}$ es Riemann integrable en $[0, 1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
- $f_n \rightarrow f \cong 0$ puntualmente en $[0, 1]$;
- $\int_0^1 f_n = 1 \not\rightarrow 0 = \int_0^1 f$.

◇

Example (2).

- Sea $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una enumeración de $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$;
- $f_n := \chi_{\{Q_1, \dots, Q_n\}}$ es Riemann integrable en $[0, 1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
- $f_n \rightarrow f := \chi_{\mathbb{Q} \cap [0, 1]}$ puntualmente en $[0, 1]$;
- f no es Riemann integrable. $\int_0^1 f = 0 \neq 1 = \overline{\int_0^1 f}$.

◇

Remark. La convergencia uniforme SÍ cumple esto, pero es demasiado fuerte.

Exercise (Guía 1). Sean $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{R}([a, b])$ tales que $f_n \rightarrow f$ uniformemente en $[a, b]$. Entonces, $f \in \mathcal{R}([a, b])$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$.

Example (3).

- $f_n(x) := x^n$ en $[0, 1]$, $f_n \in \mathcal{R}([a, b])$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \rightarrow \chi = f$ puntualmente;
- $f \in \mathcal{R}([a, b])$ y $\int_0^1 f_n(x) dx = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 = \int_0^1$;
- f_n no converge uniformemente a f .

◇

Resulta que la noción de convergencia "óptima" (la más "débil" que cumple lo que queremos) es la de convergencia en L' :

$$f_n \xrightarrow{L'} f \text{ si } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f_n - f| = 0.$$

Esta noción de convergencia viene dada por una "norma":

- $\|f\|_{L'} := \int_a^b |f|$ (recordar que $f \in \mathcal{R}([a, b]) \Rightarrow |f| \in \mathcal{R}([a, b])$);
- $d_{L'}(f, g) := \|f - g\|_{L'} = \int_a^b |f - g|$.

Remark. $\|\cdot\|_{L'}$ no es una norma porque $\|f\|_{L'} = 0 \not\Rightarrow f = 0$. Decimos que es una *pseudo-norma* y d una *pseudo-métrica*.

Para arreglar esto, dadas $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, decimos que son *equivalentes* y lo notamos $f \sim g$ si $\{x \in [a, b] : f(x) \neq g(x)\}$ tiene medida nula. Resulta que \sim es una relación de equivalencia y, además,

$$f, g \in \mathcal{R}([a, b]), f \sim g \Rightarrow \int_a^b f = \int_a^b g.$$

Sea $\overline{\mathcal{R}}([a, b])$ el conjunto de clases de equivalencia de $\mathcal{R}([a, b])$, y denotamos por \bar{f} a la clase de equivalencia de $f \in \mathcal{R}([a, b])$. Con esto, $\|\bar{f}\|_{L'} := \int_a^b |f| dx$ define una norma en $\overline{\mathcal{R}}([a, b])$ que se llama la **norma** L' .

Remark. Hay un problema: $(\overline{\mathcal{R}}([a, b]), \|\cdot\|_{L'})$ NO ES COMPLETO!

3. **TFC:** Si $f \in \mathcal{R}([a, b])$ es continua en $x_0 \in [a, b]$, entonces $F(x) := \int_a^x f(t) dt$ es derivable en x_0 y $F'(x_0) = f(x_0)$. En particular, F es derivable en x y $F'(x) = f(x)$ para todo x salvo un conjunto de medida nula.

1.4.2 Clase 5 (18/08)

Teorema Fundamental del Cálculo: Si $f \in \mathcal{R}([a, b])$ es continua en $x_0 \in [a, b]$, entonces $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(x) := \int_a^x f(t) dt$ es derivable en $x = x_0$ y vale $F'(x_0) = f(x_0)$. En particular, $F'(x) = f(x)$ salvo quizás por un conjunto de $x \in [a, b]$ de medida nula. O sea, podemos integrar y luego derivar y esto es "casi" como no hacer nada. Pero, tenemos problemas:

1. Este "casi" no puede removerse

Theorem 1.19 (Hankel, 1871). Dado $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, existe $f \in \mathcal{R}([a, b])$ tal que $F(x) := \int_a^x f(t) dt$ no es derivable para ningún x en un subconjunto denso en $[a, b]$ (y, en particular, infinito).

2. A veces no podemos componer en el orden inverso

Theorem 1.20 (Volterra, 1881). Dado $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, existe $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivable en $[a, b]$, tal que f' es acotada en $[a, b]$ pero $f' \notin \mathcal{R}([a, b])$.

Extendiendo la integral de Riemann

Sean $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada y $\Pi = \{x_0, \dots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$. Definimos:

$$\begin{aligned} \Phi_{f, \Pi}(x) &:= m_{I_1} \chi_{[x_0, x_1]}(x) + \sum_{i=2}^n m_{I_i} \chi_{(x_{i-1}, x_i]}(x), \quad m_{I_i} = \inf_{t \in I_i} f(t) \\ &= m_{I_1} \chi_{\{x_0\}}(x) + \sum_{i=1}^n m_{I_i} \chi_{(x_{i-1}, x_i]}(x) \\ \psi_{f, \Pi} &:= M_{I_1} \chi_{\{x_0\}}(x) + \sum_{i=1}^n M_{I_i} \chi_{(x_{i-1}, x_i]}(x), \quad M_{I_i} = \sup_{t \in I_i} f(t). \end{aligned}$$

Observemos que $\Phi_{f, \Pi}(x) \leq f(x) \leq \psi_{f, \Pi}(x) \quad \forall x \in [a, b]$. Además,

$$\int_a^b \Phi_{f, \Pi}(x) dx = \underline{S}(f, \Pi) \int_a^b \psi_{f, \Pi}(x) dx = \overline{S}(f, \Pi).$$

En particular, si f es Riemann integrable,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \overline{\int_a^b f(x)dx} = \inf \left\{ \int_a^b \psi_{f,\Pi} : \Pi \text{ partición} \right\} \\ &= \underline{\int_a^b f(x)dx} = \sup \left\{ \int_a^b \Phi_{f,\Pi} : \Pi \text{ partición} \right\}.\end{aligned}$$

Definition 1.21 (función escalonada). Una función $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ se dice escalonada si existen $\Pi = \{x_0, \dots, x_n\}$ partición de $[a, b]$ y $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$\Phi|_{(x_{i-1}, x_i)} \equiv c_i \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Notemos que podemos escribir a cualquier función Φ escalonada como

$$\begin{aligned}\Phi(x) &:= \sum_{i=1}^n c_i \cdot \chi_{(x_{i-1}, x_i)}(x) + \sum_{i=0}^n \Phi(x_i) \cdot \chi_{\{x_i\}}(x) \\ &= \sum_{i=1}^k c_j \cdot \chi_{A_j}(x)..\end{aligned}$$

donde los A_j son intervalos disjuntos tales que $\biguplus_{j=1}^k A_j = [a, b]$ (se pone una "D" dentro de la unión para denotar que estamos haciendo una unión disjunta).

Si tomamos Φ de la forma $\Phi = \sum_{j=1}^k c_j \cdot \chi_{A_j}$ con $(A_j)_{j=1, \dots, k}$ disjuntos, $\biguplus_{j=1}^k A_j = [a, b]$ pero A_j no son necesariamente intervalos, diremos que Φ es una función escalonada generalizada. Como para funciones escalonadas "normales", tenemos

$$\int_a^b \Phi(x)dx = \sum_{j=1}^k c_j \cdot |A_j| \left(= \sum_{i=1}^n c_i \cdot |I_i| \right)$$

La función longitud Sea \mathcal{I} la colección de los intervalos en \mathbb{R} . Definimos la función longitud $\lambda : \mathcal{I} \rightarrow [0, \infty]$ como $\lambda(I) := |I|$.

Propiedades:

1. $\lambda(\emptyset) = 0$;
2. $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$, $I_1 \subseteq I_2 \Rightarrow \lambda(I_1) \leq \lambda(I_2)$ (Monotonía de λ);
3. (Aditividad finita de λ) Si $I \in \mathcal{I}$ es tal que $I = \biguplus_{i=1}^n J_i$ con $J_i \in \mathcal{I}$, $\forall i = 1, \dots, n$, $J_i \cap J_j = \emptyset$ sin $i \neq j$, entonces

$$\lambda(I) = \sum_{i=1}^n \lambda(J_i);$$

4. (σ -aditividad de λ) Si $I \in \mathcal{I}$ es tal que $I = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$, con $(I_i)_i \in \mathbb{N} \subseteq \mathcal{I}$ disjuntos, entonces

$$\lambda(I) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(I_i);$$

5. (σ -subaditividad de λ) Si $I \in \mathcal{I}$ verifica $I \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$, $(I_i)_{i \in \mathbb{N}}$ intervalos (no necesariamente disjuntos), entonces $\lambda(I) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(I_i)$;
6. $\lambda(I+x) = \lambda(I)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $I+x := \{a+x : a \in I\}$;
7. $\lambda(\{x\}) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

1.5 Clase 6 (20/08)

Nos gustaría extender λ a una clase más grande que \mathcal{I} . Más precisamente, nos gustaría definir una aplicación $m : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$, donde \mathcal{M} es una colección de subconjuntos de \mathbb{R} tal que $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{M}$, de manera tal que, dado $E \in \mathcal{M}$, $m(E)$ represente la "longitud" de E . Idealmente, nos gustaría que m cumpla lo siguiente:

1. $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$;
2. Si $I \in \mathcal{I}$, entonces $m(I) = |I|$;
3. m es σ -aditiva ($E, (E_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}$, $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \Rightarrow m(E) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$);

Exercise. (1) + (2) + (3) $\Rightarrow m$ es monóton, σ -subaditiva y finitamente aditiva.

- 4 Si $E \in \mathcal{M}$, entonces $E+x \in \mathcal{M}$ y $m(E+x) = m(E) \forall x \in \mathbb{R}$.

El problema es que, si asumimos el Axioma de Elección, uno puede mostrar que no existe una tal m que cumpla (1) – (2) – (3) – (4) y, de hecho, no se sabe si existe m que cumpla (1) – (2) – (3). (Si asumimos la hipótesis del continuo, entonces no existe m que cumpla (1) – (2) – (3)).

Luego, para construir m debemos debilitar alguna de las propiedades:

- Si debilitamos (1) \Rightarrow TEORÍA DE LA MEDIDA;
- Si debilitamos (3) pidiendo solo (hay dos opciones):
 - \rightarrow aditividad finita \Rightarrow "medidas finitamente aditivas";
 - \rightarrow σ -subaditividad \Rightarrow "medidas exteriores".

Vamos a optar por debilitar (1).

Una manera de extender λ es la siguiente:

- i. Si $E = \bigcup_{i=1}^n I_i$ entonces definimos $\lambda(E) := \sum_{i=1}^n \lambda(I_i)$;
- ii. Si $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ entonces definimos $\lambda(E) := \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(I_i)$;
- iii. La fórmula anterior nos permite definir $\lambda(\delta)$ para todo δ abierto en \mathbb{R} ;
- iv. Para conjuntos mas generales, "aproximar" por abiertos.

Definition 1.22 (premedida). Sea X un conjunto no vacío y \mathcal{C} una colección de subconjuntos de X tal que $\emptyset \in \mathcal{C}$. Diremos que una aplicación $\mathcal{T} : \mathcal{C} \rightarrow [0, \infty]$ es una premedida si $\mathcal{T}(\emptyset) = 0$.

Remark. El conjunto no vacío X será llamado un espacio y la colección \mathcal{C} será llamada una clase (de subconjuntos de X).

Intuitivamente, \mathcal{C} representa la colección de subconjuntos cuyo "tamaño" sabemos medir y \mathcal{T} nos da su medida.

Example.

1. **Premedida de Lebesgue:** $\mathcal{C} := \mathcal{I} := \{I \subseteq \mathbb{R} : I \text{ intervalo}\}$, $\mathcal{T}(I) := |I|$.
2. **Premedidas de Lebesgue-Stieltjes:** Sea $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monótona creciente y continua a derecha ($\lim_{x \rightarrow x_0}^+ F(x) = F(x_0)$). Una función tal se dice una función de Lebesgue-Stieltjes.

◇

Observemos que, por monotonía, existen límites

$$\left\{ \begin{array}{l} F(\infty) := \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) \\ F(-\infty) := \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) \end{array} \right\} \in \mathbb{R}$$

Sea además la clase $\tilde{\mathcal{I}}$ de intervalos de \mathbb{R} dada por

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{I}} &:= \{I(a, b) : \} \text{ donde } I(a, b) := (a, b] \cap \mathbb{R} \\ &= \{(a, b] : -\infty \leq a \leq b\} \cup \{(a, \infty) : -\infty \leq a < \infty\}. \end{aligned}$$

Definimos la premedida \mathcal{T}_F de Lebesgue-Stieltjes asociada a F como la aplicación $\mathcal{T}_F : \tilde{\mathcal{I}} \rightarrow [0, \infty]$, dada por

$$\mathcal{T}_F(I(a, b)) = F(b) - F(a).$$

Note. Observar que si $F(x) = x$ entonces \mathcal{T}_F es la premedida de Lebesgue (sobre $\tilde{\mathcal{I}}$).

3. **Premedidas de Probabilidad:** Si F es una función de L-S tal que $F(\infty) = 1$ y $F(-\infty) = 0$, decimos que F es una función de distribución (acumulada). En tal caso, la premedida \mathcal{T}_F se conoce como premedida de probabilidad o predistribución (en \mathbb{R}).

Remark. $\mathcal{T}_F(\mathbb{R}) = \mathcal{T}_F(I(-\infty, \infty)) = F(\infty) - F(-\infty) = 1 - 0 = 1$.

4. Premedida...

1.6 Clase 7 (22/08)

Definition 1.23 (semiálgebra). Sea X un espacio y \mathcal{C} una clase de subconjuntos de X . Decimos que \mathcal{C} es una semiálgebra (de subconjuntos de X) si cumple:

1. $\emptyset \in \mathcal{C}$;
2. (\mathcal{C} es cerrada por intersecciones finitas) $A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{C}$;
3. Si $A \in \mathcal{C}$, existen $C_1, \dots, C_n \in \mathcal{C}$ disjuntos tal que $A^c = \bigcup_{i=1}^n C_i$.

Example.

1. La clase \mathcal{I}_d de intervalos en \mathbb{R}^d es una semiálgebra.
2. La clase $\tilde{\mathcal{I}} := \{(a, b] \cap \mathbb{R} : -\infty \leq a \leq b \leq \infty\}$ es una semiálgebra.
3. Si X e Y son espacios y $\mathcal{C}_X, \mathcal{C}_Y$ son semiálgebras en X e Y respectivamente, entonces

$$\mathcal{C}_X \times \mathcal{C}_Y := \{F \times G : F \in \mathcal{C}_X, G \in \mathcal{C}_Y\}$$

es una semiálgebra en $X \times Y$, llamada "semiálgebra producto".

◇

Definition 1.24 (álgebra). Sean X un espacio y \mathcal{A} una clase de subconjuntos de X . Decimos que \mathcal{A} es un álgebra (de subconjuntos de X) si cumple que:

- (i) $\emptyset \in \mathcal{A}$;
- (ii) \mathcal{A} es cerrado por intersecciones finitas;
- (iii) (\mathcal{A} es cerrada por complementos) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$.

Equivalentemente, en presencia de (iii), (ii) se puede reemplazar por:

- (ii') (\mathcal{A} es cerrada por uniones finitas) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$. (**Dem:** Ejercicio!)

Example.

1. X espacio, $\mathcal{A}_1 := \{\emptyset, X\}$, $\mathcal{A}_2 := \mathcal{P}(X)$ son álgebras (donde \mathcal{A} es llamada el álgebra trivial);

2. Sea \mathcal{S} una semiálgebra de subconjuntos de un espacio X . Entonces

$$\mathcal{A} := \{E \subseteq X : \exists S_1, \dots, S_n \in \mathcal{S} \text{ disjuntos tal que } E = \bigcup_{i=1}^n S_i\}$$

es un álgebra, llamada el álgebra generada por \mathcal{S} . Notemos que $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ es el menor álgebra que contiene a \mathcal{S} :

- (i) $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ es un álgebra y $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{S})$;
- (ii) Si \mathcal{A}' es un álgebra con $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}'$ entonces $\mathcal{A}(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{A}'$.

◇

Note. Toda álgebra es una semiálgebra.

Definition 1.25 (σ -álgebra). Una clase (no vacía) \mathcal{M} de subconjuntos de un espacio X se dice una σ -álgebra si cumple:

- 1. $\emptyset \in \mathcal{M}$;
- 2. $E \in \mathcal{M} \Rightarrow E^c \in \mathcal{M}$;
- 3. $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathcal{M}$.

Llamamos al par (X, \mathcal{M}) un espacio medible y a los elementos de \mathcal{M} , conjuntos medibles.

Note.

- 1. Todo σ -álgebra es un álgebra;
- 2. Equivalentemente, en presencia de (1), (3) se puede reemplazar por

$$(iii') \quad (E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M} \Rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathcal{M}.$$

Example.

- 1. σ -álgebra \Rightarrow álgebra \Rightarrow semiálgebra (no valen las recíprocas);
- 2. $\{\emptyset, X\}, \mathcal{P}(X)$ son σ -álgebras;
- 3. Si $(\mathcal{M}_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ son σ -álgebras, entonces

$$\bigcap_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{M}_\gamma := \{E \subseteq X : E \in \mathcal{M}_\gamma, \forall \gamma \in \Gamma\}$$

es una σ -álgebra.

- 4. Si \mathcal{M} es una clase de subconjuntos de X , entonces

$$\sigma(\mathcal{M}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{M} \text{ } \sigma\text{-álgebra} \\ \mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}}} \mathcal{M}$$

es la σ -álgebra generada por \mathcal{C} . De hecho, $\sigma(\mathcal{M})$ es la menor σ -álgebra que contiene a \mathcal{C} :

- (a) $\sigma(\mathcal{C})$ es σ -álgebra y $\mathcal{C} \subseteq \sigma(\mathcal{C})$;
 - (b) Si \mathcal{F} es σ -álgebra y $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$ entonces $\sigma(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{F}$.
5. Si (X, \mathcal{T}) es un espacio topológico, $\sigma(\mathcal{T})$ se conoce como la σ -álgebra de Borel, y sus elementos se llaman Borelianos. La notamos $\beta(X)$ ($= \sigma(\mathcal{T})$).

◇

Example. $\beta(\mathbb{R})$ contiene a todos los abiertos, cerrados, intervalos, conjuntos de tipo G_δ y F_σ, \dots . De hecho, $\beta(\mathbb{R}) = \sigma(\text{cerrados}) = \sigma(\text{compactos}) = \sigma(\mathcal{I}) = \sigma(\tilde{\mathcal{I}})$.

◇

Definition 1.26. Sea \mathcal{C} una clase (no vacía) de subconjuntos de X y $\mu : \mathcal{C} \rightarrow [0, \infty]$ una función (la llamamos una función de conjuntos). Diremos que:

- (i) μ es **monótona** (en \mathcal{M}) si $A, B \in \mathcal{C}, A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$;
- (ii) μ es **finitamente aditiva** si $(A_i)_{i=1, \dots, n} \subseteq \mathcal{C}$ disjuntos $\Rightarrow \mu(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$;
- (iii) μ es **σ -aditiva** si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}$ disjuntos $\Rightarrow \mu(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) = \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i)$;
- (iv) μ es **σ -subaditiva** si $\mu(A) \leq \sum_{i=1}^\infty \mu(A_n)$, para todo $A \in \mathcal{C}$ y $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}$ tal que $A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$

1.7 Clase 8 (25/08)

Remark. Rana da una definición más débil de (4):

$$A \in \mathcal{C}, A = \bigcup_{i=1}^\infty A_i, A_i \in \mathcal{C} \forall i \Rightarrow \mu(A) \leq \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i)$$

Ambas definiciones son equivalentes si \mathcal{C} es una semiálgebra y μ es monótona (siempre será el caso para nosotros).

Definition 1.27 (premedida finita y σ -finita). Una premedida $\mathcal{T} : \mathcal{C} \rightarrow [0, \infty]$ se dice:

- 1. **finita** si $X \in \mathcal{C}$ y $\mathcal{T} < \infty$;
- 2. **σ -finita** si existen $(C_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}$ disjuntos tales que $\bigcup_{n=1}^\infty C_n = X$ y $\mathcal{T}(C_n) < \infty \forall n \in \mathbb{N}$.

Example.

1. finita $\Rightarrow \sigma$ -finita;
2. La función longitud $\lambda : \mathcal{I} \rightarrow [0, \infty]$ es σ -finita pero no finita;
3. Si F es una función de L-S, entonces $\mathcal{T}_F : \tilde{\mathcal{I}} \rightarrow [0, \infty]$ es siempre σ -finita ($\mathcal{T}_F((n, n+1]) = F(n+1) - F(n) < \infty \forall n \in \mathbb{Z}$) y es finita si y sólo si $\mathcal{T}_F(\mathbb{R}) = \mathcal{T}_F((-\infty, \infty] \cap \mathbb{R}) = F(\infty) - F(-\infty) < \infty$.

◇

Definition 1.28 (medida). Sea (X, \mathcal{M}) es un espacio medible. Diremos que $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ es una medida (en (X, \mathcal{M})) si:

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. μ es σ -subaditiva en \mathcal{M} $\left(\mu \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \right)$.

Llamamos a la terna (X, \mathcal{M}, μ) un espacio de medida.

Objetivo. Construir un espacio de medida $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, \mu)$ tal que $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{M}$ y

$$\begin{cases} \mu(I) = |I| \quad \forall I \in \mathcal{I}, \\ \mu(E+x) = \mu(E) \quad \forall E \in \mathcal{M}. \end{cases}$$

Example (Espacios de Probabilidad). Si (X, \mathcal{M}, μ) es un EdM tal que $\mu(X) = 1$, (X, \mathcal{M}, μ) recibe el nombre de espacios de probabilidad. ◇

- X recibe el nombre de espacio muestral, y se lo nota Ω (en lugar de X);
- \mathcal{M} se suele notar como \mathcal{F} (ó \mathcal{Y}). Sus elementos se dicen eventos;
- μ recibe el nombre de medida de probabilidad ó distribución y se la nota \mathbb{P} .

En probabilidad, típicamente se estudian 2 tipos de distribuciones en \mathbb{R} (o en \mathbb{R}^d).

1. **Distribuciones discretas:** $\exists S \subseteq \mathbb{R}$ numerable y $(p_x)_{x \in S} \subseteq [0, 1]$ tal que $\mathbb{P}(A) = \sum_{x \in A \cap S} p_x$.

Example. Binomial, Geométrica, Poisson,... ◇

2. **Distribuciones (absolutamente) continuas:** $\exists f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ "integrable" tal que $\mathbb{P}(A) = \int_A f(x)dx$.

Example. Uniforme, Exponencial, Normal,... ◇

Propiedades generales de una medida. Si μ es una medida sobre (X, \mathcal{M}) , entonces:

1. μ es monótona (en \mathcal{M});
2. μ es σ -subaditiva;

3. μ es **continua por debajo**: si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$ es creciente ($A_n \subseteq A_{n+1} \forall n$) entonces

$$\mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

4. μ es **continua por arriba**: si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$ es decreciente ($A_{n+1} \subseteq A_n \forall n$) y $\mu(A_{n_0}) < \infty$ para algún n_0 ($\Rightarrow \mu(A_n) < \infty \forall n \geq n_0$), entonces

$$\mu \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

(**Cuidado!** (4) puede no valer si $\mu(A_n) = \infty \forall n \in \mathbb{N}$)

Definition 1.29 (premedida extendible y unívocamente extendible). Una premedida $\mathcal{T} : \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$ definida sobre una semiálgebra de subconjunto de X , se dice:

1. **Extendible** si es
 - (E1) finitamente aditiva en \mathcal{S} ;
 - (E2) σ -subaditiva en \mathcal{S} .
2. **Unívocamente extendible** si es extendible y se cumple
 - (E3) σ -finita

Remark. Los nombres de extendible y unívocamente extendible no se encontrarán en el Rana (los puso el profe).

Theorem 1.30 (Extensión de Carathéodory). Dados un espacio X y una premedida \mathcal{T} sobre una semiálgebra \mathcal{S} de subconjuntos de X tal que \mathcal{T} es extendible, existe una extensión de \mathcal{T} a una medida $\mu_{\mathcal{T}}$ definida sobre $\sigma(\mathcal{S})$ la σ -álgebra generada por \mathcal{S} . Más aún, si \mathcal{T} es unívocamente extendible, entonces la extensión $\mu_{\mathcal{T}}$ a $\sigma(\mathcal{S})$ es única.

Por último, si \mathcal{T} es unívocamente extendible, entonces se puede extender de manera única a una medida $\overline{\mu_{\mathcal{T}}}$ sobre la $\mu_{\mathcal{T}}$ -completación de $\sigma(\mathcal{S})$, i.e. la σ -álgebra $\overline{\sigma(\mathcal{S})}$ dada por

$$\overline{\sigma(\mathcal{S})} := \{B \cup N : B \in \sigma(\mathcal{S}), \exists \tilde{N} \in \sigma(\mathcal{S}) \text{ con } N \subseteq \tilde{N} \text{ y } \mu_{\mathcal{T}}(\tilde{N}) = 0\}$$

mediante la fórmula $\overline{\mu_{\mathcal{T}}}(B \cap N) := \mu_{\mathcal{T}}(B)$.

1.8 Clase 9 (27/08)

Remark. Si $\mathcal{T} : \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$ es σ -aditiva en \mathcal{S} y \mathcal{S} es una semiálgebra, entonces \mathcal{T} es extendible.

Remark. La extensión puede no ser única si \mathcal{T} no es σ -finita.

Example. $\tilde{\mathcal{I}}_{\mathbb{Q}} := \tilde{\mathcal{I}} \cap \mathbb{Q} = \{(a, b] \cap \mathbb{Q} : -\infty \leq a \leq b \leq \infty\}$ \diamond

Note.

- $\tilde{\mathcal{I}}_{\mathbb{Q}}$ es una semiálgebra;
- $\sigma(\tilde{\mathcal{I}}_{\mathbb{Q}}) = \sigma(\tilde{\mathcal{I}} \cap \mathbb{Q}) \stackrel{\text{Ej!}}{=} \sigma(\tilde{\mathcal{I}}) \cap \mathbb{Q} = \beta(\mathbb{R}) \cap \mathbb{Q} = \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ (9.52)
- $\mathcal{T} : \tilde{\mathcal{I}}_{\mathbb{Q}} \rightarrow [0, \infty]$, dada por $\mathcal{T}(A) := \begin{cases} 0 & A = \emptyset \\ \infty & A \neq \emptyset, A \in \tilde{\mathcal{I}}_{\mathbb{Q}} \end{cases}$ (Observar que \mathcal{T} no es σ -finita)
- Para cada $r > 0$, $\mu_r : \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \rightarrow [0, \infty]$ dada por $\mu_r(A) := r(\#A)$ es una extensión de \mathcal{T} (y es una medida)

Definition 1.31 (espacio completo y conjuntos μ -nulos). Sea (X, \mathcal{M}, μ) un EdM y definamos

$$\mathcal{N}_{\mu} := \{E \subset X : \exists N \in \mathcal{M} \text{ con } E \subseteq N \text{ y } \mu(N) = 0\}$$

Los elementos de \mathcal{N}_{μ} se dicen conjuntos μ -nulos. Diremos que (X, \mathcal{M}, μ) es completo si $\mathcal{N}_{\mu} \subseteq \mathcal{M}$

Remark. $(X, \overline{\sigma(\mathcal{S})}, \overline{\mu_{\delta}})$ es completo. En efecto, $\mathcal{N}_{\overline{\mu_{\delta}}}$ corresponde al subconjunto de $\overline{\sigma(\mathcal{S})}$ que se obtiene tomando $B = \emptyset$.

Remark. Veremos más adelante que las siguientes premedidas son UE:

- (i) Premedidas de Lebesgue-Stieltjes (en particular, la función longitud λ (sobre $\tilde{\mathcal{I}}$) y las premedidas de probabilidad).
- (ii) Premedidas de Lebesgue en \mathbb{R}^d , con $d \in \mathbb{N}$.

En particular;

Corollary 1.32. Para cada función F de Lebesgue-Stieltjes, existe una σ -álgebra \mathcal{M}_F sobre \mathbb{R} y una única medida μ_F en $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_F)$ tal que

$$\mu_F(I(a, b)) = F(b) - F(a) \quad \forall -\infty \leq a \leq b \leq \infty$$

Además, $\beta(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{M}_F$. Es decir, μ_F es una medida que extiende a \mathcal{T}_F , a todo \mathcal{M}_F (y en particular, a todo $\beta(\mathbb{R})$). Además, $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_F, \mu_F)$ es un EdM completo. ($\mathcal{M}_F := \overline{\sigma(\tilde{\mathcal{I}})^F}$, $\mu_F := \overline{\mu_{\mathcal{T}_F}}$). La medida μ_F se conoce como medida de L-S asociada a F . En particular, para cualquier función de distribución F , existe una única medida de probabilidad \mathbb{P}_F en $(\mathbb{R}, \beta(\mathbb{R}))$ tal que

$$\mathbb{P}_F(I(a, b)) = F(b) - F(a) \quad \forall -\infty \leq a \leq b \leq \infty$$

(En la guía 3 veremos que $F \rightarrow \mathbb{P}_F$ es una biyección)

Note. Los β son los Borelianos y $I(a, b) = (a, b] \cap \mathbb{R}$. (super $F \rightarrow 10.26$).

Example (Importante!). Medida de Lebesgue en \mathbb{R} . Tomando $F = id$ en el Corolario anterior, obtenemos una σ -álgebra $\mathcal{L}(\mathbb{R}) := \mathcal{M}_{id}$ con $\beta(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{L}(\mathbb{R})$ y una medida μ_{id} en $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}))$ tal que $\mu_{id}(I(a, b)) = b - a \quad \forall -\infty \leq a \leq b \leq \infty$. En particular, de esto se deduce que $\mu_{id}(I) = |I| \quad \forall I \in \mathcal{I}$. Dicha medida recibe el nombre de medida de Lebesgue (en \mathbb{R}), y los elementos de $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ se dicen conjuntos medibles Lebesgue. Adoptaremos la notación $\mu_{id}(E) := \lambda(E) := |E|$. La medida μ_{id} es la extensión de la noción de longitud que buscábamos y $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ son los conjuntos cuya "longitud" podremos medir. Además, los conjuntos de medida nula (de la guía 2), son exactamente aquellos $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ tal que $\mu_{id}(A) = 0$ (lo veremos más adelante!). \diamond

Example (Medida de Lebesgue en \mathbb{R}^d). Si \mathcal{I}_d son los intervalos en \mathbb{R}^d y definimos $\mathcal{T} : \mathcal{I}_d \rightarrow [0, \infty]$ como $\mathcal{T}(I) := |I|$, entonces \mathcal{I}_d es una semiálgebra y \mathcal{T} es una premedida σ -aditiva en \mathcal{I}_d (lo veremos después). Por lo tanto, \mathcal{T} se puede extender (de manera única, pues \mathcal{T} es σ -finita) a una medida μ_δ sobre la σ -álgebra $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d) = \overline{\sigma(\mathcal{I}_d)^{\mathcal{T}}}$, llamada medida de Lebesgue en \mathbb{R}^d y $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ es la clase de conjuntos medibles Lebesgue en \mathbb{R}^d . Al igual que antes, dado $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$, notamos $|E| := \mu_\mathcal{T}(E)$. \diamond