Ayudantía Teoría de Integración

September 16, 2025

Contents

Chapter 1

1.1 Ayudantia 14 de Agosto

1.1.1 Ejercicio 11 (Guia) (i)

Demostración. (A) Para ver que C es cerrado, veremos que cada C_n lo se. Notamos que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f(x) := frac13x$ y $g(x) := frac23 + frac13$ son continuas y $C_n = f(C_{n-1}) \cup g(C_{n-1}) \Rightarrow C_n$ es compacto $\Rightarrow$ es cerrado, $\forall n$

(B) Para ver que es no numerable, vamos a construir una inyeccion $\Phi : X \to X$ con X no numerable. Sea entonces $X := 0, 2^{\mathbb{N}}$ y dado $w \in X$, definimos:

$$C_n(w) := \frac{C_0}{3^n} + \sum_{k=1} n \frac{w_k}{3^k}$$

Si $n = 2$: $C_2(w) = [0, \frac{1}{9}] + \frac{w_1}{3} + \frac{w_2}{9} = \begin{cases} [0, \frac{1}{9}] \\ [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \\ [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \\ [\frac{8}{9}, 1] \end{cases}$

Basicamente, $C_n(w)$ referencia siempre a alguno de los 2^n intervalos de C_n. Luego, es claro que para w fijo, $C_{n+1}(w) \subseteq C_n(w) \subseteq C_n(*)$ y $diam(C_n(w)) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Por el Teorema de interseccion de Cantor: $| \cap_{n\in\mathbb{N}}$ $C_n(w)| = 1$. Sea $C(w)$ tal elemento. Luego, por $(*)$, $C(w) \in C$.

Sea entonces $\Phi : 0, 2^{\mathbb{N}} \to C$ tal que $\Phi(w) := C(w)$ y Φ es inyectiva (basta ver que pasa si $w^{(1)}, w^{(2)}$ difieren en una coordenada). Como $|0, 2^{\mathbb{N}}| = C$, se concluye.

(C) Si suponemos que existe $(a, b) \subset C$. SPG, $a = 0$. Consideremos $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande.

$$3^{-n} < b \Rightarrow (0, b) \nsubseteq [0, \frac{1}{3^n}] \cup [\frac{2}{3^n}, \frac{3}{3^n}] \subseteq C_n$$

Luego, $\exists z \in (0, b) : z \notin C_n$, para algun $n \Rightarrow z \notin C$ (Contradiccion). $\square$

1.1.2 Ejercicio 11 (Guia) (ii)

1.1.3 Ejercicio 11 (Guia) (iii)

Ahora, para la integral superior:

1.2 Ayudantía 21/08

1. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Probar que su gráfico en $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{G}\colon \{(x, f(x)) \ : \ x \in [a, b]\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

tiene medida nula.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, debemos contruir una familia de cuadrados en $\mathbb{R}^2$ que verifique $\mathcal{G} \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} Q_i$ y $\sum_{i\in\mathbb{N}} |Q_i| < \varepsilon$. Como $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces f es uniformemente continnua. Así. si ε, $\exists \delta > 0 \ : \ \text{si } |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Sin pérdida de generalidad, sea $S \leq 1$ y empezamos a particionar $[a, b]$. Sea $n := \lceil \frac{b-a}{\delta} \rceil$ y consideramos la partición $\{I_j\}_{j=1}^n$ tales que $I_j := [x_j, x_{j+1}]$ con $x_0 = a,\ x_n = b$ y $0 < x_{j+1} - x_j \leq \delta$. Con esto, tenemos que:

(a) Por construcción, $diam(I_j) \leq \delta,\ \forall 0 \leq j \leq n$;

(b) En particular, si $x \in I_j \Rightarrow I_j \subseteq B(x, \delta),\ \forall j \in \{1, \ldots, n\}$. Luego, en cada $j \in \{1, \ldots, n\}$ elegimos $x_j \in I_j$ y cumple que $I_j \subseteq B(x_j, \delta)$. Además, $f(I_j) \subseteq B(f(x_j), \varepsilon)$.

Ahora definimos los cuadrados: Dado $(x, f(x)) \in \mathcal{G} \Rightarrow x \in I_j \subseteq B(x_j, \delta)$, para algún j y $f(x) \in B(f(x_j), \varepsilon)$. Por lo tanto, $(x, f(x)) \in B(x_j, \delta) \times B(f(x), \varepsilon)$. Luego, $\mathcal{G} \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, \delta) \times B(f(x_j), \varepsilon)$. Además:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} |B(x_j, \delta) \times B(f(x_j), \varepsilon)| &= n(2\delta)(2\varepsilon) = 4\varepsilon n\delta \\
&= 4\varepsilon \lceil \frac{b-a}{\delta} \rceil \delta \\
&\leq 4\varepsilon \left(\frac{b-a}{\delta} + 1 \right) \delta \\
&= 4\varepsilon([b-a] + \delta) \\
&\underbrace{\leq}_{\delta \leq 1} 4\varepsilon(b - 1 + 1).
\end{aligned}$$

$\square$

2. Sean $\alpha \in (0, 1]$ y $C_0 := [0, 1]$. Para cada $n \geq 1$, defina recursivamente, el conjunto C_n que resulta de retirar el intervalo central de largo $\alpha 3^{-n}$ a C_{n-1}. Por ejemplo, $C_1 := \left[0, \frac{3-2}{6}\right] \cup \left[\frac{3+2}{6}, 1\right]$. Defina $C_\alpha := \bigcap_{n \geq 0} C_n$.

(a) Pruebe que C_α tiene medida nula $\Leftrightarrow \alpha = 1$. [Con esto (y mas resultados) χ_{C_α} es R-integrable $\Leftrightarrow \alpha = 1$.]

Demostración. Primero, estudiemos un poco mas de la construcción de los C_α. Para construir C_n, debemos retirar 2^{n-1} intevalos de largo $\alpha 3^{-n}$. Así, si sumamos los largos de los intervalos retirados hasta n obtenemos:

$$\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}(\alpha 3^{-k}) = \frac{\alpha}{2}\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{2}{3}\right)^k \frac{\alpha}{2}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^k - 1\right).$$

Por lo tanto, el largo neto al sustraer todos los intervalos es

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}(\alpha 3^{-k}) = \frac{\alpha}{2}\lceil\frac{1}{1-\frac{2}{3}} - 1\rceil = \alpha.$$

Supongamos que $\alpha < 1$. Supongamos que $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\{I_j\}_{j=1}^{\infty}$ tal que $C_\alpha \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$ y $\sum_{j=1}^{\infty}|I_j| < \varepsilon$ (i.e., C_α tiene medida nula). En particular, si consideramos $\varepsilon := 1\alpha > 0$, obtenemos un cubrimiento de C_α, $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}} \ : \ \sum_{k=1}^{\infty}|I_k| < 1-\alpha$. Si ahora añadimos a esta colección todos los inrevalos sustraidos, entonces puedo cubrir $[0,1]$. Como el largo es numerablemente sub-aditivo, entonces $1 = |[0,1]| = |I_k \cup \{\text{lo que quite}\}| < (1-\alpha)+\alpha = 1$. $\square$

1.3 Ayudantía 28 de Agosto

Ejercicio N°1

Sea μ una medida sobre (X,β) (β una σ-álgebra). Pruebe que:

1. Si $A, B \in \beta \ : \ A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)/$
2. Si $(A_n)_n \subseteq \beta$ y $A \in \beta$ tales que $A \subseteq \bigcup_n A_n \Rightarrow \mu(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}}\mu(A_n)$
3. Sea $(A_n)_n \subseteq \beta$ tal que $A_n \subseteq A_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Luego:
$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \lim_{n\to\infty}\mu(A_n)$$
4. Si $(A_n)_n \subseteq \beta$ cumple que $A_{n+1} \subseteq A_n$ $\forall n$, entonces:
$$\mu\left(\bigcap_n A_n\right) = \lim_{n\to\infty}\mu(A_n) \quad \text{si } \exists n_0 \in \mathbb{N} \ : \ \mu(A_{n_0}) < \infty$$

Demostración (1.). Basta notar que:

$$B = A \uplus (B \setminus A) \Rightarrow \mu(B) = \mu(A) + \underbrace{\mu(B \setminus A)}_{\geq 0}$$
$$\geq \mu(A).$$

□

Demostración (2.). Por (1.) tenemos que $\mu(A) \leq \mu\left(\bigcup_n A_n\right)$. ¿$\mu\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n \mu(A_n)$?

Idea. Descomponer $\bigcup_n A_n$ en otra unión que sea disjunta y que permita acotar?

Sea $B_1 \coloneqq A_1,\ B_2 \coloneqq A_2 \setminus A_1 = A_2 \setminus B_1, \ldots,\ B_n \coloneqq A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} B_k$. Luego, $(B_n)_n$ es disjunta y $\bigcup_n A_n = \biguplus_n B_n$. Finalmente:

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \mu\left(\biguplus_n B_n\right) = \sum_n \mu(B_n) \leq \sum_n \mu(A_n)$$

Notar que la última desigualdad es por (1.) y $B_n \subseteq A_n$. □

Demostración (3.). Nuevamente, vamos a apelar a una descomposición disjunta: Sean

$$B_1 \coloneqq A_1,\ B_2 \coloneqq A_2 \setminus A_1, \ldots,\ B_n \coloneqq A_n \setminus A_{n-1}$$

Como la sucesión es creciente, $\bigcup_n A_n = \biguplus_n B_n$. Luego,

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_n A_n\right) &= \mu\left(\biguplus_n B_n\right) = \sum_n \mu(B_n) \\
&= \mu(B_1) + \sum_{n\geq 2} \mu(B_n) \\
&= \mu(A_1) + \sum_{n\geq 2} [\mu(A_n) - \mu(A_{n-1})] \qquad (*) \\
&= \mu(A_1) + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \mu(A_k) - \mu(A_{k-1}) \\
&= \mu(A_1) + \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) - \mu(A_1) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)
\end{aligned}$$

Donde $(*)$ es cierto, pues $B_n \coloneqq A_n \setminus A_{n-1}$ cumple que $A_n = A_{n-1} \uplus B_n$. Queda como ejercicio probar la continuidad si el espacio es σ-finito □

Demostración (4.). Notamos primero que como $A_{n+1} \subseteq A_n \overset{(i)}{\Rightarrow} \mu(A_{n+1}) \leq \mu(A_n) \Rightarrow (\mu(A_n))_n \subset \mathbb{R}$ es monótona decreciente y acotada por abajo. Entonces, es convergente. Notemos que, siendo n fijo

$$\begin{aligned}
\mu(A_n) - \mu\left(\bigcap_{k\geq 1} A_k\right) &= \mu\left(A_n \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) \\
&= \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (A_n \setminus A_k)\right) \\
&= \mu\left(\bigcup_{k\geq n+1} \underbrace{(A_n \setminus A+k)}_{\text{creciente en } k}\right) \\
&= \lim_{k\to\infty} \mu(A_n \setminus A_k) \\
&= \lim_{k\to\infty} \mu(A_n) - \mu(A_k).
\end{aligned}$$

y esto concluye. $\square$

Ejercicio N°2

Pruebe que la medida de LEbesgue del triángulo en $\mathbb{R}^2$ coincide con el area usual.

Demostración. (0) **Los triángulos son Lebesgue medibles:** Como los triángulos son cerrados, entonces son Borelianos y por lo tanto Lebesgue.

(1) Tomar $P_n = (0 < \frac{a}{n} < \frac{2a}{n} < \cdots < \frac{(n-1)a}{n} < a)$ para una suma de Riemann y luego utilizar los rectángulos, que sabemos, son medibles, para llegar a la conclusión (¿¡?!). Como f (funcion que parametriza a un triángulo con vértices $(0,0),(a,0),(c,d)$) es Riemann Integrable:

$$A(T) = \int_0^{\infty} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f;P_n) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f;P_n)$$

Además, es claro que:

$$\overline{S_n}(f;P_n) = \lambda\left(\bigcup_{i=0}^{n-1} \left[\frac{ia}{n}, \frac{(i+1)a}{n}\right] \times \left[0, \sup_{x\in I_i} f(x)\right]\right) \geq \lambda(T)$$

$\square$