Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Basado en las clases impartidas por - en el segundo semeste del 2025

Chapter 1

1.1 Introducción a las EDO´s

1.1.1 Generalidades y Definiciones

Definición 1.1. Una ecuación diferencial ordinaria (EDO) de orden $k \in \mathbb{N}$ es una relación funcional entre la variable real $t \in I$ (donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo abierto), una función $y : I \to \mathbb{R}^m$, y sus derivadas $y', y'', \ldots, y^{(k)}$. Esta relación se expresa a través de la fórmula:

$$F(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(k)}(t)) = 0, \quad \forall t \in I \quad (*)$$

donde $F : J \times \mathbb{R}^m \times \cdots \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es una función dada.

Definición 1.2. Una solución de la EDO $(*)$ es una función $\phi \in C^k(I; \mathbb{R}^m)$ tal que $F(t, \phi(t), \phi'(t), \ldots, \phi^{(k)}(t)) = 0$ para todo $t \in I$.

Se asume que la EDO se puede "resolver" con respecto a la derivada de mayor orden $y^{(k)}$, resultando en la forma canónica:

$$y^{(k)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(k-1)}(t)), \quad \forall t \in I$$

donde $f \in C(I \times \mathbb{R}^m \times \cdots \times \mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m)$. Esto es una hipótesis razonable por el Teorema de la Función Implícita, asumiendo que $\frac{\partial F}{\partial y^{(k)}} \neq 0$.

Definición 1.3. Una EDO en su forma canónica se dice lineal cuando tiene la forma:

$$y^{(k)}(t) = \sum_{j=0}^{k-1} a_j(t) y^{(j)}(t) + g(t), \quad \forall t \in I$$

donde $a_j \in C(I, M_{m \times m}(\mathbb{R}))$ y $g \in C(I; \mathbb{R}^m)$ son funciones dadas.

Observación. Un sistema lineal es:

- Homogéneo si $g(t) \equiv 0$.
- Autónomo si f no depende de $t \in I$.

1.1.2 Curiosidades y Reducción de Orden

1. Las funciones $\phi_1(t) = e^{-2t}$ y $\phi_2(t) = e^{-3t}$ son soluciones de la EDO $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 0$. Por el principio de superposición, cualquier combinación lineal $c_1\phi_1(t)+c_2\phi_2(t)$ también es una solución, lo que implica infinitas soluciones.

2. La única solución real de la EDO $(y(t))^2 + (y'(t))^2 = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ es la función idénticamente nula.

3. Invariancia por traslación: Si ϕ es una solución de un sistema autónomo, entonces $\overline{\phi}(t) = \phi(t-t_0)$ también es una solución para cualquier constante t_0.

4. Reducción a un sistema autónomo de primer orden: Cualquier sistema de EDOs se puede reducir a un sistema autónomo del primer orden. Para un sistema de orden $k \geq 2$, se definen nuevas variables $u_0 = y, u_1 = y', \ldots, u_{k-1} = y^{(k-1)}$. Esto lleva a un sistema de primer orden. Si se introduce una variable adicional $u_k = t$, se puede obtener un sistema de primer orden autónomo.

1.2 Problemas de Cauchy

Definición 1.4 (Problema de Cauchy (PC)). Un problema de Cauchy para un sistema de EDOs de primer orden es un problema de valor inicial que se expresa como:

$$(PC) \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & \forall t \in I \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

donde $t_0 \in I$ es el punto inicial y $y_0 \in \mathbb{R}^m$ es el valor inicial. Para que la solución sea única, se necesita agregar una condición inicial.

Para EDOs de orden superior, el problema de Cauchy incluye condiciones iniciales para la función y sus primeras $k-1$ derivadas.

$$\begin{cases} y^{(k)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(k-1)}(t)) & \forall t \in I \\ y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_1, \ldots, y^{(k-1)}(t_0) = y_{k-1} \end{cases}$$

1.3 Resolución para EDOs de Primer Orden

1.3.1 Variables Separables

Una EDO de variables separables tiene la forma $y' = g(t)/h(y)$, donde g y h son funciones continuas y $h(y) \neq 0$. La solución se encuentra al separar las variables e integrar:

$$h(\phi(t))\phi'(t) = g(t) \Rightarrow \int h(y)dy = \int g(t)dt + C$$

Esto da una representación implícita de la solución.

1.3.2 EDOs Lineales de Primer Orden

Una EDO lineal de primer orden tiene la forma $y'(t) + p(t)y(t) = f(t)$. El método de resolución implica dos pasos:

1. Resolver la ecuación homogénea asociada: $y'(t)+p(t)y(t) = 0$. La solución homogénea es $y_h(t) = Ce^{-\int p(t)dt}$.
2. Encontrar una solución particular: Una solución particular $y_p(t)$ se encuentra multiplicando la ecuación no-homogénea por el factor integrante $e^{\int p(t)dt}$ y luego integrando. La solución general es la suma de las soluciones homogénea y particular: $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$.

1.4 Soluciones de EDOs Autónomas de Primer Orden

Para una EDO autónoma de primer orden de la forma $y'(t) = f(y(t))$ con una condición inicial $y(0) = y_0$. Si $f(y_0) \neq 0$, se puede encontrar una solución única al integrar la ecuación $\frac{y'(t)}{f(y(t))} = 1$. Esto lleva a la expresión $\int_{y_0}^{y(t)} \frac{du}{f(u)} = t$. Si $\psi(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{du}{f(u)}$, la solución es $\phi(t) = \psi^{-1}(t)$.

Proposición 1.5. Si $f : I \to \mathbb{R}$ es continua y $y_0 \in I$ tal que $f(y_0) \neq 0$, la solución al problema de valor inicial es monótona en su intervalo de definición.

1.4.1 Intervalo Maximal de Existencia

El intervalo de existencia de la solución puede ser finito. Por ejemplo, en el caso de $y' = y^2$ con $y(0) = y_0 > 0$, la solución es $\phi(t) = \frac{y_0}{1-y_0 t}$, que solo existe en el intervalo $(-\infty, 1/y_0)$ y "explota" en $t = 1/y_0$. Este es un ejemplo de una solución maximal.

Es importante notar que las soluciones pueden no ser únicas si $f(y_0) = 0$ en la condición inicial.

1.5 Clase (20/08)

1.5.1 Algunas ecuaciones no-lineales

Ejemplo. Considere la EDO:

$$y' = -\frac{t^2 + y^2}{t^2 - ty} = -\frac{M(t, y)}{N(t, y)}, \quad t > 0$$

Sean $M(t, y) = t^2 + y^2$ y $N(t, y) = t^2 - ty, \quad \forall (t, y) \in \mathbb{R}^2$, y así:

$$M(st, sy) = s^2 M(t, y) \text{ y } N(st, sy) = s^2 N(t, y), \quad s, t, y \in \mathbb{R}.$$

En tal caso, conviene introductir el cambio de variable $y = ty$, y así:

$$u + tu' = -\frac{t^2 + t^2u^2}{t^2 - t^2u} = -\frac{1 + u^2}{1 - u},$$

y así

$$\begin{aligned} u' = -\frac{1}{t}\cdot\frac{1+u}{1-u} &\Leftrightarrow \frac{du}{dt} = -\frac{1}{t}\cdot\frac{1+u}{1-u} \\ &\Leftrightarrow \frac{1-u}{1+u}du = -\frac{1}{t}dt \\ &\Leftrightarrow log((1+u)^2) - u = -log(t) + C \\ &\Leftrightarrow (1+u)^2 = \frac{C}{t}e^u \\ &\Leftrightarrow (t+y(t))^2 = Cte^{y(t)/t} \quad \text{(solución definida implícitamente).} \end{aligned}$$

En general, si $M, N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son dos funciones tales que

$$M(st, sy) = s^\alpha M(t,y) \text{ y } N(st,sy) = s^\alpha N(t,y), \quad \forall s,t,y \in \mathbb{R},$$

para cierto $\alpha > 0$, se sugiere utilizar el cambio de variable $y = tu$.

Ecuación de Bernoulli: tiene la forma

$$y'(t) + P(t)y(t) = f(t)(y(t))^n \quad \text{con } n \in \mathbb{N}$$

Nota. los casos $n = 0$ y $n = 1$ ya han sido estudiados.
Para $n \geq 2$ conviene utilizar el cambio de variable $u = y^{1-n}$. Luego, $u' = (1-n)y^{-n}y'$, es decir: $y' = \frac{1}{1-n}y^n u'$, y así:

$$\begin{aligned} \frac{y^n}{1-n}u' + P(t)y(t) = f(t)(y(t))^n &\Leftrightarrow \frac{1}{1-n}u' + P(t)y^{1-n} = f(t) \\ &\Leftrightarrow u'(t) + (1-n)P(t)u(t) = (1-n)f(t) \\ &\quad\ \text{(se resuelve con factor integrante).} \end{aligned}$$

Ecuación de Ricatti: es de la forma

$$y' = P(t) + Q(t)y(t) + R(t)(y(t))^2$$

Supongamos que se conoce una solución $y_1(t)$ de esta EDO, es decir:

$$y_1'(t) - P(t) - Q(t)y_1(t) - R(t)(y_1(t))^2 = 0$$

Luego, definimos $z(t) = y(t) - y_1(t)$, y así:

$$\begin{aligned} &y'(t) = z'(t) + y_1'(t) = P(t) + Q(t)(z(t) + y_1(t)) + R(t)(z(t) + y_1(t))^2 \\ \Leftrightarrow\ &z'(t) - [Q(t) + 2y_1(t)R(t)]z(t) = R(t)(z(t))^2 \text{ (ecuación de bernoulli con } n = 2) \end{aligned}$$

Ejemplo. Resolver la EDO:

$$y'(t) = 6 + 5y(t) + (y(t))^2$$

Corresponde a una ecuación de Ricatti con:

$$P(t) = 6, \quad Q(t) = 5, \quad R(t) = 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Nótese que $y_1(t) = -2, \ \forall t \in \mathbb{R}$ es solución. Luego, definimos:

$$\begin{aligned} z(t) &= y(t) - y_1(t) = y(t) + 2 \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow & z'(t) - z(t) = (z(t))^2. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} u'(t) + u(t) = -1 \Rightarrow u(t) &= Ce^{-t} - 1 \quad \forall t \in \mathbb{R} \ (C \in \mathbb{R}) \\ \Rightarrow z(t) &= \frac{1}{u(t)} = \frac{1}{Ce^{-t} - 1} \\ \Rightarrow y(t) &= z(t) - 2 = \frac{1}{Ce^{-t} - 1} - 2. \end{aligned}$$

Nota. Si $C > 0$, la solución "explota" cuando $t = \log(C)$.

1.5.2 III. Problema de Cauchy: existencia y unicidad

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un conjunto abierto, que por lo general será de la forma $\Omega = I \times \widetilde{\Omega}$, con $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto y $\widetilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Dada una función

$$f \in C(\Omega; \mathbb{R}^n)$$

consideramos nuevamente el problema de Cauchy

$$(PC) \ \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & \forall x \in I \text{ con } \quad x_0 \in I \text{ y} \\ y(x_0) = y_0, & \qquad\qquad\qquad\quad y \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

El (PC) puede ser formulado de manera equivalente, pero "relativamente" más débil:

Lema 1.6. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un conjunto abierto de la forma $\Omega = I \times \widetilde{\Omega}, \ I \subset \mathbb{R}$ intervalo abierto y $\widetilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ conjunto abierto. Dados $x_0 \in I, \ y_0 \in \mathbb{R}^n$ y $f \in C(\Omega; \mathbb{R}^n)$, una función $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ es solución de (PC) si y sólo si:

(i) $\varphi \in C(I; \mathbb{R}^n)$;

(ii) $(x, \varphi(x)) \in \Omega \quad \forall x \in I$;

(iii) $\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s)) ds \quad \forall x \in I$.

(i, ii y iii es formulación integral del (PC)).

Observación. La formulación integral nos permite estudiar el (PC) desde una perspectiva más abstracta. Supongamos por ahora que

$$\Omega = \mathbb{R}^{n+1}, \ I = \mathbb{R}, \ \widetilde{\Omega} = \mathbb{R}^n \text{ y } f \in C(\mathbb{R}^{n+1}; \mathbb{R}^n).$$

Dados $y_0 \in \mathbb{R}^n$ y $x_0 \in \mathbb{R}$, consideramos la aplicación $T : C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n) \to C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$.

$$T(\varphi)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s)) ds \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Por el lema precedente, es evidente que $\varphi \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ es solución de (PC) si y sólo si $T(\varphi) \equiv \varphi$ (i.e., φ es punto fijo de T).

1.6 Clase (22/08)

$\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}, \ \Omega = I \times \widetilde{\Omega}$ con $I \subset \mathbb{R}$ intervalo abierto y $\widetilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ conjunto abierto.

$$(PC) \ \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \quad \forall x \in I, \\ y(x_0) = y_0 \quad (x_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}^n) \end{cases}$$

(i) Resolver localmente el problema (PC) corresponde a encontrar un intervalo $J \subset I$ y una función $\varphi \in C^1(J; \mathbb{R}^n)$ tales que:

$$x_0 \in J, \ (x, \varphi(x)) \in \Omega \ \forall x \in J, \ \varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \ \forall x \in J;$$

(ii) Si $J_1, \ J_2 \subset I$ son intervalos abiertos que contienen a x_0, y $\phi_1 \in C^1(J_1; \mathbb{R}^n)$ y $\phi_2 \in C^1(J_2; \mathbb{R}^n)$ son soluciones locales de (PC), decimos que ϕ_2 extiende a ϕ_1 es una restricción de ϕ_2;

(iii) Una solución es maximal cuando no admite extensiones;

(iv) Una solución local, definida sobre $J \subset I$, es global si $J = I$.

Recuerdo. Dados $a < b$ números reales, el espaacio vectorial

$$C([a, b]; \mathbb{R}^n)$$

dotado de la norma $\|\varphi\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |\varphi(x)| \quad \forall \varphi \in C([a, b]; \mathbb{R}^n)$, es un espacio de Banach.

- Todo sub-conjunto cerradeo de $(C([a, b]; \mathbb{R}^n); \| \cdot \|_\infty)$ es un espacio métrico completo.
- Todo sub-conjunto vectorial cerrado de $(C([a, b]; \mathbb{R}^n); \| \cdot \|_\infty)$ es un espacio de Banach.

1.6.1 Aplicaciones contractivas: teorema del punto fijo de Baanch

Definición 1.7 (aplicación contractiva)**.** Sea (X, d) un espacio métrico completo. Decimos que una aplicación $T : X \to X$ es contractiva si existe $\alpha \in [0, 1)$ tal que

$$d(T(x), T(y)) \leq \alpha d(x, y) \quad \forall x, y \in X$$

Teorema 1.8 (punto fijo de Banach)**.** Sea (X, d) un espacio métrico completo y $T : X \to X$ una aplicación contractiva. Entonces, existe un único $\hat{x} \in X$ tal que $T(\hat{x}) = \hat{x}$.

1.6.2 Funciones Lipschitz

Nota. $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}, \ (x, y) \in \Omega, \ x \in \mathbb{R}$, y $y \in \mathbb{R}^n$

Definición 1.9 (función globalmente Lipschitz). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ abierto, y $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ una función. Decimos que f es globalmente Lipschitz respecto a la variable y en Ω si existe una constante $L > 0$ tal que

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad \forall (x, y_1), (x, y_2) \in \Omega$$

Nota. $\mathrm{Lip}(y; \Omega)$ denota el espacio vectorial de todas las funciones $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ que son globalmente Lipschitz respecto a y en Ω.

Definición 1.10 (función localmente Lipschitz). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Se dice que una función $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ es localmente Lipschitz respecto a la variable y en Ω si: para cualquier punto $(\overline{x}, \overline{y}) \in \Omega$, existe $\varepsilon > 0$ y una constante $L > 0$ tales que $B((\overline{x}, \overline{y}), \varepsilon) \subset \Omega$, y

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad \forall (x, y_1), (x, y_2) \in B((\overline{x}, \overline{y}, \varepsilon).$$

Nota. $\mathrm{Lip}_{loc}(y; \Omega)$.

Proposición 1.11.

(A) Si $f \in \mathrm{Lip}(y; \Omega)$, entonces f es uniformemente continua respecto a y en Ω: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall (x, y_1), (x, y_2) \in \Omega,$

$$|y_1 - y_2| \leq \delta \Rightarrow |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq \varepsilon$$

(B) Si $f \in \mathrm{Lip}_{loc}(y; \Omega)$, entonces f es continua respecto a la variable y en Ω: para todo $(\overline{x}, \overline{y}) \in \Omega$:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) \ |y - \overline{y}| \leq \delta \Rightarrow (\overline{x}, \overline{y}) \in \Omega \text{ y } |f(\overline{x}, \overline{y}) - f(\overline{x}, y)| \leq \varepsilon$$

Observación. En general, $\mathrm{Lip}(y; \Omega) \not\subseteq C(\Omega; \mathbb{R}^n)$. Por ejemplo,

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ y \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

pertenece a $\mathrm{Lip}(y; \mathbb{R}^2)$, pero es discontinua en el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$. Recíprocamente, la continuidad ("en pareja") de una función no implica ningún tipo de Lipschitzianidad (local o global).

Ejemplo. $\hat{f}(x, y) = \sqrt{|y|} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Vemos que no es localmente Lipszhitz: $\hat{f} \notin \mathrm{Lip}_{loc}(y; \mathbb{R}^2)$: por contradicción, debiese existir $\varepsilon > 0$ tal que $f \in \mathrm{Lip}(y; B((0, 0), \varepsilon))$. Por ende, existe una constante $L > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \left| f(0, 0) - f\left(0, \frac{\varepsilon}{n}\right) \right| &\leq L \cdot \frac{\varepsilon}{n} \quad \forall n \geq 2, \\ &\Leftrightarrow \sqrt{\frac{\varepsilon}{n}} \leq \frac{L\varepsilon}{n} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{n} \leq L\sqrt{\varepsilon} \quad \forall n \geq 2, \end{aligned}$$

lo cual es absurdo!

Teorema 1.12. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un conjunto abierto y

$$f = (f_1, f_2, \dots, f_n) : \ \Omega \to \mathbb{R}^n$$

una función tal que las derivadas parciales $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$ existen y son continuas en Ω. Entonces:

(A) $f \in \mathrm{Lip}_{loc}(y; \Omega)$;

(B) Si, además, Ω es convexo, $f \in \mathrm{Lip}(y; \Omega)$ si y sólo si

$$\sup_{(x,y)\in\Omega} \left| \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x, y) \right| < \infty \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$$

1.7 Clase (25/08)

Observación. Consideramos las funciones $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definidos por:

$$f_1(x, y) = \frac{1}{1 + y^2}, \ f_2(x, y) = \frac{x}{1 + y^2}, \ f_3(x, y) = \begin{cases} xy & \text{si } x > 0; \\ y & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Se puede demostrar que:

(i) $f_1 \in \mathrm{Lip}(y; \mathbb{R}^2)$;

(ii) $f_2 \in \mathrm{Lip}(y; \mathbb{R}^2)$, pero $f_2 \in \mathrm{Lip}(y; \Omega)$ para cualquir dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ que sea acorada en al dirección de x;

(iii) $f_3 \in \mathrm{Lip}(y; \mathbb{R}^2)$ y $f_3 \in \mathrm{Lip}(y; \Omega)$ para cualquier dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ que sea acotado en la dirección de x. No obstante, $\frac{\partial f_3}{\partial y}$ no es continua en $\mathbb{R}^2$.

Teorema 1.13. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un conjunto abierto. Si $f \in \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(y; \Omega)$ y $K \subset \Omega$ es un conjunto compacto tal que $\sup_{(x,y)\in K} |f(x, y)| < \infty$, entonces $f \in \mathrm{Lip}(y; K)$.

Teorema 1.14 (Picard-Lindelöf)**.** Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un conjunto abierto y $f \in C(\Omega; \mathbb{R}^n) \cap \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(y; \Omega)$. Entonces, para cada $(x_0, y_0) \in \Omega$, existe un $\delta > 0$ tal que, si denotamos

$$I_\delta = [x_0 - \delta, x_0 + \delta],$$

el problema de Cauchy

$$(PC) \ \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & \forall x \in I_\delta, \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

admite una única solución.

Demostración. Como Ω es abierto y $(x_0, y_0) \in \Omega$, existen $a_0 > 0$ y $b_0 > 0$ tal que, si ponemos

$$R = [x_0 - a_0, x_0 - a_0] \times \overline{B(y_0, b_0)},$$

entonces $R \subset \Omega$ y $f \in \mathrm{Lip}(y; R)$.

- Sea $L > 0$ una constante de Lipschitsz para f en R (respecto a y):

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad \forall (x, y_1), (x, y_2) \in R.$$

- Denotemos por $M = \max_{(x,y)\in R} |f(x, y)|$.

Fijemos un número $\delta > 0$ tal que

$$0 < \delta < \min \left\{ a_0, \frac{b_0}{M}, \frac{1}{L} \right\}$$

y consideremos el conjunto:

$$X = \{\varphi \in C(I_\delta; \mathbb{R}^n) \bigm| |\varphi(x) - y_0| \leq b_0 \quad \forall x \in I_\delta\}$$

donde (X, d) es un espacio métrico completo con la distancia usual en $C(I_\delta, \mathbb{R}^n)$.
Definimos la aplicación $T : X \to C(I_\delta; \mathbb{R}^n)$ por

$$T(\varphi)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s))ds \quad \forall \varphi \in X,\ \forall x \in I_\delta.$$

Notemos que, dado $\varphi \in X$, φ es solución de (PC) en I_δ si y sólo si φ es un punto fijo de la aplicación T en X.

$$\varphi \in C(I_\delta; \mathbb{R}^n) \ : \ (x, \varphi(x)) \in \Omega \quad \forall x \in I_\delta; \ \varphi(x_0) = y_0$$

PDQ: $|\varphi(x) - y_0| \leq b_0 \quad \forall x \in I_\delta$.

Demostración. Por contradicción, supongamos que $\exists \hat{x} \in I_\delta : \; |\varphi(x) - y_0| > b_0$. Por continuidad, existe $\hat{x}_0 \in I_\delta$ tal que

$$|\varphi(\hat{x}_0 - y_0| = b_0 \text{ y } |\varphi(x) - y_0 \quad x \in (x_0, \hat{x}_0).$$

$$\begin{aligned} b_0 &= |\varphi(\hat{x}_0) - y_0| \\ &= \left| \int_{x_0}^{\hat{x}_0} f(s, \varphi(s)) ds \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^{\hat{x}_0} |f(s, \varphi(s))| ds \right| \\ &\leq M|\hat{x}_0 - x_0| \leq M\delta < b_0. \end{aligned}$$

□

Dada $\varphi \in X$, ciertamente $T(\varphi) \in C(I_\delta; \mathbb{R}^n)$. Además, $\forall x \in I_\delta$,

$$\begin{aligned} |T(\varphi)(x) - y_0| &= \left| \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s)) ds \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^{x} |f(s, \varphi(s)) ds| \right| \\ &\leq M|x - x_0| \leq M\delta < b_0. \end{aligned}$$

entonces, $T(\varphi) \in X$. Demostremos ahora que T es una contracción: dados $\varphi, \psi \in X$,

$$\begin{aligned} |T(\varphi)(x) - T(\psi)(x)| &= \left| \int_{x_0}^{x} (f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s))) ds \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^{x} |f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s))| ds \right| \\ &\leq L \left| \int_{x_0}^{x} |\varphi(s) - \psi(s)| ds \right| \\ &\leq L|x - x_0| \|\varphi - \psi_0\|_\infty \leq L\delta \|\varphi - \psi\|_\infty, \end{aligned}$$

con $L\delta < 1$. Luego, $T : X \to X$ es una contracción, y entonces admite un único punto fijo $\hat{\varphi} \in X$, que constituye la única solución del (PC) en I_δ. □

1.8 Clase (27/08)

Teorema 1.15 (Picard-Lindelöf para EDOs de orden superior). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un conjunto abierto y $g \in C(\Omega;\mathbb{R}) \cap lip_{loc}(y, y', \cdots, y^{n-1}; \mathbb{R})$. dado cualquier punto $(x_0, y_0, y_0', \cdots, y_0^{n-1}) \in \Omega$, existe $\delta > 0$ tal que, si ponemos $I_\delta = [x_i - \delta, x_0 + \delta]$, el problema de Cauchy

$$\begin{cases} y^m(x) = g(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{n-1}(x)) & \forall x \in I_\delta \\ y(x_0) = y_0, y'(x_o) = y_o', \ldots, y^{n-1}(x_o) = y_0^{n-1}, \end{cases}$$

admite una única solución.

Ejemplo (Ecuaciones integrales). Sea $a < b$ números reales, $I = [a, b], f \in C(I;\mathbb{R}), k \in C(I \times I : \mathbb{R})$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ elementos dados. El problema de Volterra (de segunda especie) consiste en hallar una función $\varphi_\lambda \in C(I;\mathbb{R})$ tal que

$$\varphi_\lambda(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi_\lambda(t)dt. \quad \forall x \in [a, b].$$

Un poco más de análisis Funcional. Recordamos que en cualquier espacio métrico, un sub-conjunto es compacto si y sólo si es secuecialmente compacto.

Definición 1.16. Sean $a < b$ números reales, $I = [a, b]$ Dada una familia de funciones $F \subset C(I;\mathbb{R})$, decimos que

1. F es relativamente compacto si $\overline{F}$ es compacto, vale decir para cualquier sucesión $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F$, existen $\varphi \in C(I;\mathbb{R})$ y una sub-sucesión $(\varphi_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tales que $\varphi_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} \varphi$ es $C(I;\mathbb{R})$
2. F es equicontinua si $(\forall \varepsilon > 9)(\exists \delta > 0)(\forall x_1, x_2 \in I) \quad |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |\varphi(x_1) - \Phi(x_2)| < \varepsilon \forall \varphi \in F$
3. F es acotada si $\sup_{\varphi \in F} |\varphi|_\infty < \infty$

Teorema 1.17 (Arzela-Ascoli). Sean $a < b$ números reales y $I = [a, b]$. Dada una familia $F \subset C(I;\mathbb{R})$, se tiene que F es relativamente compacto si y sólo si F es equicontinua y acotada.

Teorema 1.18 (Punto fijo de Brower). Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto, conexo y no-vácio. Sea $T : K \to K$ una aplicación continua. Entonces existe, al menos, un punto fijo de T en K

Teorema 1.19 (Punto fijo de Schauder). Sea $\mathcal{X}$ un espacio de Banach sobre $\mathbb{R}$, y $K \subset \mathcal{X}$ un conjunto conexo, cerrado, acotado y no vacío. Consideremos una aplicación $T : K \to K$ continua y tal que $T(K)$ es relativamente compacto, entonces existe, al menos, un punto fijo de T en K.

Observación. $T(k)$ es relativamente compactio si y sólo si $\overline{T(K)}$ es compacto, si y sólo si cualquier sucesión $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{X}$ resulta que $(T(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ admite una sub-sucesión convergente (a un límite que no necesariamente pertenece a $T(K)$).

Teorema 1.20 (Peano). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un conjunto abierto y $f \in C(\Omega; \mathbb{R}^n)$. Entonces, para cualquier $(x_0, y_0) \in \Omega$, existe $\delta > 0$ tal que, si ponemos $I_\delta = [x_o - \delta, x_o + \delta]$, el problema de Cauchy

$$\begin{cases} y(x) = f(x, y(z)) & x \in I_\delta \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

admite (al menos) una solución.

Demostración. Como Ω es abierto, existen $a_0 > 0$ y $b_0 > 0$ tales que, si denotamos $R = [x_0 - a_0, x_0 + a_0] \times \overline{B(y_0, b_0)}$, entonces $R \subset \Omega$. Sea $M = \max_{(x,y)\in\mathbb{R}} |f(x, y)|$ y tomamos $\delta > 0$ tales que $0 < \delta < \min\left\{a_0, \frac{b_0}{M}\right\}$. Definamos

$$K = \{\varphi \in C(I_\delta; \mathbb{R}^n) | \varphi(x_0) = y_0; \quad |\varphi(x) - y_0| \leq b_o \quad \forall x \in I_\delta\}$$

que es no vacío, conexo, conexo y acotado. Definamos ahroa la aplicación $T : K \to C(I_\delta; \mathbb{R}^n)$ mediante la fórmula

$$T(\varphi)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s))ds \quad \forall \varphi \in K, \quad \forall x \in I_\delta$$

Notamos que $T(\varphi) \in C(I_\delta; \mathbb{R}^n) \quad \forall \varphi \in K$. Además, si $\varphi \in K$, se tiene que $(x, \varphi(x) \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in I_\delta$ y así:

$$|T(\varphi)(x) - y_0| \leq \left| \int_{x_0}^{x} |f(s, \varphi(s))| ds \right| \leq M|x - x_0| \leq M\delta - b_0 \quad \forall x \in I_\delta$$

y como $T(\varphi)(x_0) = y_0$, entonces $T(\varphi) \in K \quad \forall \varphi \in K.$. Ahora, afirmamos que $T : K \to K$ es continua, sea $\varepsilon > 0$. Como f es uniformemente continua en $\mathbb{R}$, exite $\delta_0 > 0$ tal que : $\forall (s, y_1),)(s, y_2) \in \mathbb{R}$,

$$|y_1 - y_2| \leq \delta_0 \Rightarrow |f(s, y_1) - f(s, y_2)| \leq \frac{\varepsilon}{\delta}$$

Por ende, si $\varphi_1, \varphi_2 \in K$ son tales que $|\varphi_1, \varphi_2|_\infty \leq \delta_0$, entonces $|\varphi_1(s) - \varphi_2(s)| \leq \delta_0 \quad \forall s \in I_\delta$. Entonces

$$|f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))| \leq \frac{\varepsilon}{\delta} \quad \forall s \in I_\delta$$

Luego,

$$|t(\varphi_1)(x) - T(\varphi_2)(x)| \leq \left| \int_{x_0}^{x} |f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))| \right| \leq \frac{\varepsilon}{\delta}|x - x_0| \leq \varepsilon \quad \forall x \in I_\delta$$

Entonces $||T(\varphi_1) - T(\varphi_2)||_\infty \leq \varepsilon \quad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in K$ tales que $||\varphi_1 - \varphi_2||_\infty \leq \delta_0$ aprovechamos para demostrar que la familia $T(K) \subset C(I_\delta; \mathbb{R}^n)$ es equicontinua... $\square$

1.9 Clase (03/09)

Ejemplo (N°2).

$$(PC)\ \begin{cases} y'(t) = \frac{t+2}{t^2+(y(t))^2} & \forall t \in I \subset \mathbb{R}, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Sea $\Omega = \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$ y $f(x,y) = \frac{x+2}{x^2+y^2}$ $\forall (x,y) \in \Omega$. Como $f \in C^\infty(\Omega) \Rightarrow f \in \text{Lip}_{loc}(y;\Omega)$, y así, existe $\delta > 0$ tal que (PC) admite una única solución en $I_\delta = [-\delta, \delta]$, que denotamos por $\varphi \in C^1(I_\delta;\mathbb{R})$. De hecho, $\varphi \in C^\infty((\delta,\delta);\mathbb{R})$ y podemos escribir un polinomio de MacLaurin de orden 2 con resto de Peano:

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + \frac{\varphi''(0)}{2}t^2 + o(t^2)$$

para $t \to 0$. Sabemos que $\varphi(0) = 1$ y $\varphi'(0) = \frac{0+2}{0+1} = 2$. Además, derivando $(PC)_{(1)}$ se obtiene:

$$\varphi''(t) = \frac{t^2 + (\varphi(t))^2 - (t+2)(2t + 2\varphi(t)\varphi'(t))}{(t^2 + (\varphi(t))^2)^2} \quad \forall t \in \mathring{I}_\delta,$$

con lo que: $\varphi''(0) = -7$. Luego:

$$\varphi(t) = 1 + 2t - \frac{7}{2}t^2 + o(t^2)$$

para $t \to 0$.

IV. Unicidad global y solución global del problema de Cauchy

4.1 Unicidad global de solución del (PC).

Lema 1.21 (Grönwall). Sean $x_0 < x_1$ números reales, $h \in \mathbb{R}$ y $u, k \in C([x_0,x_1];\mathbb{R})$ funciones tales que $k(x) \geq 0$ $\forall x \in [x_0,x_1]$. Entonces,

(A) Si $u(x) \leq h + \int_{x_0}^x k(s)u(s)ds$ $\forall x \in [x_0,x_1]$, entonces

$$u(x) \leq h \cdot \exp\left(\int_{x_0}^x h(s)ds\right) \quad \forall x \in [x_0,x_1]$$

(B) Si $u(x) \leq h + \int_x^{x_1} h(s)u(s)ds$ $\forall x \in [x_0,x_1]$, entonces:

$$u(x) \leq h \cdot \exp\left(\int_x^{x_1} h(s)ds\right) \quad \forall x \in [x_0,x_1]$$

Demostración (sólo apartado (A)). Definamos la función

$$v(x) = \int_{x_0}^x k(s)u(s)ds \quad \forall x \in [x_0,x_1],$$

y así, $v \in C^1([x_0,x_1];\mathbb{R})$, $v(x_0) = 0$ y $v'(x) = k(x)u(x)$ $\forall x \in (x_0,x_1)$.

Como $u(x) \leq h + v(x) \quad \forall x \in [x_0, x_1]$, entonces

$$\begin{aligned} h(x)u(x) &\leq h \cdot k(x) + v(x)k(x) \quad \forall x \in [x_0, x_1] \\ \Leftrightarrow v'(x) &\leq h \cdot k(x) + k(x)v(x) \quad \forall x \in [x_0, x_1]. \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned} &\exp\left(-\int_{x_0}^{x} h(s)ds\right) v'(x) - \exp\left(-\int_{x_0}^{x} h(s)ds\right) k(x)v(x) \\ &\leq h \cdot k(x) \exp\left(-\int_{x_0}^{x} k(s)ds\right) \\ \Leftrightarrow &\frac{d}{dx}\left[\exp\left(-\int_{x_0}^{x} k(s)ds\right) v(x)\right] \leq -h\frac{d}{dx}\left[\exp\left(-\int_{x_0}^{x} h(s)ds\right)\right]. \end{aligned}$$

Integrando en $[x_0, x]$, con $x \in (x_0, x_1]$, se obtiene:

$$\begin{aligned} &\exp\left(-\int_{x_0}^{x} k(s)ds\right) v(x) \leq h\left[1 - \exp\left(-\int_{x_0}^{x} k(s)ds\right)\right] \\ \Rightarrow\ & v(x) \leq h \cdot \exp\left(\int_{x_0}^{x} k(s)ds\right) - h \\ \Leftrightarrow\ & u(x) \leq h + v(x) \leq h \cdot \exp\left(\int_{x_0}^{x} k(s)ds\right) \quad \forall x \in [x_0, x_1] \end{aligned}$$

□

Observar.

1. Si $h = 0$, el lema de Grönwall asefura que $u(x) \leq 0 \quad \forall x \in [x_0, x_1]$;
2. Es posible utilizar una única formulación que agrupe las dos condiciones del lema:

$$\begin{aligned} u(x) &\leq h + \left|\int_{x_0}^{x} k(s)u(s)ds\right| \quad \forall x, x_0 \in I \\ \Rightarrow u(x) &\leq h \cdot \exp\left(\left|\int_{x_0}^{x} k(s)ds\right|\right). \end{aligned}$$

Teorema 1.22 (unicidad global)**.** Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un conjunto abierto, $(x_0, y_0) \in \Omega$ y $f \in C(\Omega; \mathbb{R}^n) \cap \mathrm{Lip}_{loc}(y; \Omega)$. Si (I_1, φ_1) y (I_2, φ_2) son soluciones locales del problema de Cauchy

$$(PC) \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \quad \forall x \in I \subset \mathbb{R}, \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

entonces $\varphi_1(x) = \varphi_2(x) \quad \forall x \in I_1 \cap I_2$ (acá, $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ son intervalos que conienen a x_0).

Demostración. Sabemos que $(I_1 \cap I_2) \setminus \{x_0\} \neq \varnothing$, y así, tomemos $x_1 \in (I_1 \cap I_2) \setminus \{x_0\}$, con $x_1 > x_0$. Definamos el conjunto:

$$K = \{(s, \varphi_1(s)) \bigm| s \in [x_0, x_1]\} \cup \{(s, \varphi_2(s) \bigm| s \in [x_0, x_1]\}$$

Luego, $K \subset \Omega$ es compacto. Como f es continua en Ω, resulta que: $\sup_{(x,y)\in K} |f(x,y)| < \infty \Rightarrow f \in \mathrm{Lip}(y; K)$, y sea $L_k > 0$ una constante de Lipschitz (global) para f, respecto a su segunda variable en K. Sabemos que $\varphi_i(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s))ds \quad \forall x \in [x_0, x_1],\ \forall i \in \{1, 2\}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| &= \left| \int_{x_0}^{x} [f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))]ds \right| \\
&\leq \int_{x_0}^{x} \bigl|f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi(s))\bigr|ds \\
&\leq L_K \int_{x_0}^{x} \bigl|\varphi_1(s) - \varphi_2(s)\bigr|ds \quad \forall x \in [x_0, x_1].
\end{aligned}$$

Así (gracias al lema de Grönwall), $\bigl|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)\bigr| = 0 \quad \forall x \in [x_0, x_1] \Rightarrow \varphi_1(x) = \varphi_2(x) \quad \forall x \in [x_0, x_1]$. $\square$