

# Teoría de Integración

Basado en las clases impartidas por Santiago Saglietti en el  
segundo semestre del 2025

# Contents

<b>1</b>	<b>Integral de Riemann</b>	<b>2</b>
1.1	Clase 1 (04/08) . . . . .	2
1.2	Clase 2 (06/08) . . . . .	3
1.3	Clase 3 (07/08) . . . . .	4
1.4	Clase 4 (08/08) . . . . .	6
	1.4.1 Limitaciones de la integral de Riemann . . . . .	6
	1.4.2 Clase 5 (18/08) . . . . .	8
1.5	Clase 6 (20/08) . . . . .	10
1.6	Clase 7 (22/08) . . . . .	12
1.7	Clase 8 (25/08) . . . . .	14
1.8	Clase 9 (27/08) . . . . .	16

# Chapter 1

## Integral de Riemann

### 1.1 Clase 1 (04/08)

**Definition 1.1** (partición + intervalos). Una partición de un intervalo  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$  es un subconjunto finito  $\Pi \subseteq [a, b]$  tal que  $a, b \in \Pi$ . Denotaremos a las particiones como  $\Pi = \{x_0, \dots, x_n\}$ , donde  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ . Los intervalos  $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 1, \dots, n$  serán llamados intervalos de la partición.

**Remark.** A veces, identificaremos la partición  $\Pi$  con  $(I_i)_{i=1, \dots, n}$ . En tal caso, abusando de la notación, escribiremos  $I_i \in \Pi$  cuando queramos hablar de los intervalos de  $\Pi$ .

**Definition 1.2** (norma de particiones). La norma de una partición  $\Pi$  como  $\|\Pi\| := \max_{i=1, \dots, n} (x_i - x_{i-1}) = \max_{I_i \in \Pi} |I_i|$ .

**Definition 1.3** (partición marcada). Una partición marcada de  $[a, b]$  es un par  $\Pi^* := (\Pi, \varepsilon)$  donde:

- $\Pi = \{x_0, \dots, x_n\}$  es una partición de  $[a, b]$ ;
- $\varepsilon = \{x_1^*, \dots, x_n^*\}$  es una colección de puntos tal que  $x_i^* \in I_i$  para cada  $i = 1, \dots, n$ .

**Remark.** Dada una partición marcada  $\Pi^* = (\Pi, \varepsilon)$ , definimos  $\|\Pi^*\| := \|\Pi\|$ .

**Definition 1.4** (Suma de Riemann). Sean  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  acotada y  $\Pi^* = (\Pi, \varepsilon)$  una partición marcada. Definimos la suma de Riemann de  $f$  asociada a  $\Pi^*$  como:

$$S_R(f; \Pi^*) := \sum_{i=1}^n f(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{I_i \in \Pi} f(x_i^*)|I_i|.$$

## 1.2 Clase 2 (06/08)

**Definition 1.5** (Riemann integrable). Dada  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  acotada, decimos que es Riemann integrable si existe el límite  $\lim_{\|\Pi^*\| \rightarrow 0} S_R(f; \Pi^*)$ . Equivalentemente,  $\exists L \in \mathbb{R}$ , tal que dado cualquier  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  tal que  $\|\Pi^*\| < \delta \Rightarrow |S_R(f; \Pi^*) - L| < \varepsilon$ .

**Remark.** Cuando el límite existe, lo llamamos la integral de Riemann de  $f$  en  $[a, b]$  y lo notamos  $\int_a^b f(x)dx$ .

**Definition 1.6** (Sumas superior e inferior de Darboux). Dadas  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  acotada y  $\Pi = (I_i)_{i=1, \dots, n}$  una partición de  $[a, b]$ , definimos

$$m_{I_i} := \inf_{x \in I_i} f(x), \quad M_{I_i} := \sup_{x \in I_i} f(x) \quad \text{y}$$

$$\underline{S}(f; \Pi) := \sum_{I_i \in \Pi} m_{I_i} |I_i|, \quad \overline{S}(f; \Pi) := \sum_{I_i \in \Pi} M_{I_i} |I_i|.$$

Llamamos a  $\underline{S}(f; \Pi)$  y  $\overline{S}(f; \Pi)$  las sumas inferior y superior de Darboux de  $f$  con respecto a  $\Pi$ , respectivamente.

**Note.** Como  $m_{I_i} \leq f(x) \leq M_{I_i}$ ,  $\forall x \in I_i$  para toda partición marcada  $\Pi^* = (\Pi; \varepsilon)$ , tenemos  $\underline{S}(f; \Pi) \leq S_R(f; \Pi^*) \leq \overline{S}(f; \Pi)$ .

**Definition 1.7** (refinamiento). Diremos que una partición  $\Pi'$  de  $[a, b]$  es un refinamiento de otra partición de  $[a, b]$ ,  $\Pi$ , si  $\Pi \subseteq \Pi'$ . Equivalentemente, si para todo  $J_i \in \Pi'$  existe  $I_i \in \Pi$  tal que  $J_i \subseteq I_i$ .

**Proposition 1.8.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  acotada. Entonces,

- Si  $\Pi \subseteq \Pi'$  son particiones de  $[a, b]$ ,

$$\underline{S}(f; \Pi) \leq \underline{S}(f; \Pi'), \quad \overline{S}(f; \Pi) \geq \overline{S}(f; \Pi').$$

- Si  $\Pi_1, \Pi_2$  son particiones de  $[a, b]$  cualesquiera,

$$\underline{S}(f; \Pi_1) \leq \overline{S}(f; \Pi_2)$$

**Definition 1.9.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  acotada. Definimos:

- La integral superior (de Darboux) de  $f$  como  $\int_a^b f(x)dx := \inf_{\Pi} \overline{S}(f; \Pi)$ .
- La integral inferior (de Darboux) de  $f$  como  $\int_a^b f(x)dx := \sup_{\Pi} \underline{S}(f; \Pi)$ .

**Theorem 1.10.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  acotada. Entonces,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \underline{S}(f; \Pi) \quad \text{y} \quad \overline{\int_a^b f(x)dx} = \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \overline{S}(f; \Pi).$$

**Remark.** Equivalentemente, para cualquier sucesión  $(\Pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de partición de  $[a, b]$  tal que  $\|\Pi_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , se tiene que

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}(f; \Pi_n) \quad \text{y} \quad \overline{\int_a^b f(x)dx} = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(f; \Pi_n).$$

**Theorem 1.11.** Dada  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  acotada, son equivalentes:

1.  $\int_a^b f(x)dx = \overline{\int_a^b f(x)dx}$  (i.e.,  $f$  es Darboux integrable).
2.  $f$  es Riemann integrable.
3.  $\lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \overline{S}(f; \Pi) - \underline{S}(f; \Pi) = 0$ .
4.  $\forall (\Pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sucesión de particiones de  $[a, b]$  tal que  $\|\Pi_n\| \rightarrow 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(f; \Pi_n) - \underline{S}(f; \Pi_n) = 0.$$

5.  $\exists (\Pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sucesión de particiones de  $[a, b]$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(f; \Pi_n) - \underline{S}(f; \Pi_n) = 0.$$

### 1.3 Clase 3 (07/08)

**Note.** Las integrales en el sentido de Darboux y el de Riemann coinciden.

**Proposition 1.12.** Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es monótona, entonces es Riemann integrable.

**Remark.** Una función monótona tiene discontinuidades numerables.

**Proposition 1.13.** Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es continua, entonces es Riemann integrable.

En particular, existen funciones Riemann integrables con numerables discontinuidades. De hecho, hay ejemplos con  $c$  (cardinal del continuo) discontinuidades. No obstante, si  $f$  es integral de Riemann, su conjunto de discontinuidades tiene que ser "pequeño".

**Theorem 1.14.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  acotada. Entonces,  $f$  es integral de Riemann si y sólo si su conjunto de discontinuidades tiene medida nula.

**Definition 1.15 (intervalo).** Decimos que un conjunto  $I \subseteq \mathbb{R} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$  es un intervalo si satisface

$$x, y \in I \Rightarrow z \in I \text{ para todo } \min x, y \leq z \leq \max x, y.$$

**Example.** (y propiedades)

- Dados  $a \leq b$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ), los conjuntos  $(a, b)$ ,  $(a, b]$ ,  $[a, b]$ ,  $[a, b)$  son intervalos;
- El conjunto vacío es un intervalo ( $\emptyset = (a, a)$ );
- Los puntos son intervalos.  $I = [\lambda, \lambda]$ ;
- La intersección son intervalos de intervalos.

◇

**Definition 1.16 (intervalo generalizado).** Decimos que un conjunto  $I \subseteq \mathbb{R}^d$  es un intervalo si puede escribirse como

$$I = \prod_{k=1}^d I_k$$

donde cada  $I_r$  es un intervalo en  $\mathbb{R}$ . La medida de un intervalo  $I \subseteq \mathbb{R}^d$  se define como

$$|I| := \prod_{k=1}^d |I_k|.$$

**Note.** Los intervalos en  $\mathbb{R}^d$  heredan las mismas propiedades en  $\mathbb{R}$ :

- Intersección de intervalos en  $\mathbb{R}^d$  es intervalo.
- Si  $I \subseteq J \subseteq \mathbb{R}^d$  son intervalos, entonces  $|I| \leq |J|$ .

**Definition 1.17 (medida nula).** Un conjunto  $E \subseteq \mathbb{R}^d$  se dice de medida nula si, dado  $\varepsilon > 0$ , existe una sucesión  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de intervalos de  $\mathbb{R}^d$  tal que

$$E \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \quad \text{y} \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} |I_n| < \varepsilon.$$

**Example.** (y propiedades)

1. Todo conjunto unitario  $\{x\}, (x \in \mathbb{R}^d)$  tiene medida nula;

2. Toda unión numerable de conjuntos de medida nula tiene medida nula;
3. Cualquier conjunto numerable tiene medida nula;
4. Cualquier subconjunto de un conjunto de medida nula tiene medida nula;
5. Existen conjuntos no numerables de medida nula:
  - En  $\mathbb{R}^d$  con  $d \geq 2$ , los ejes  $\{x : x_1 = 0\}, i = 1, \dots, d$  tiene medida nula.
  - En  $\mathbb{R}$ , el conjunto de cantor tiene medida nula.
6.  $E \subseteq \mathbb{R}^d$  es de medida nula, entonces  $\alpha \dot{E}$  tiene medida nula  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ .
7.  $E \subseteq \mathbb{R}^d$  es de medida nula, entonces  $E + v$  tiene medida nula  $\forall v \in \mathbb{R}^d$ .
8. Si  $E$  contiene un intervalo no unitario, entonces no tiene medida nula.  
Notar que:
  - La vuelta no es válida:  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  no contiene intervalos no unitarios pero no puede tener medida nula.
  - De esto se deduce que si  $E \subseteq \mathbb{R}^d$  tiene medida nula. Entonces  $E^c$  es denso (no vale la vuelta:  $E^c = \mathbb{Q}$ ).
9.  $E \subseteq \mathbb{R}^d$  tiene medida nula si y sólo si

$$|E|_e := \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} |I_n| : E \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \right\} = 0, \quad I_n \text{ intervalo } \forall n \in \mathbb{N}.$$

◇

## 1.4 Clase 4 (08/08)

**Theorem 1.18.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  acotada. Entonces

$$f \text{ Riemann integrable} \iff D_f = \{x \in [a, b] : f \text{ discontinua en } x\} \text{ tiene medida nula.}$$

### 1.4.1 Limitaciones de la integral de Riemann

1. Sólo está definida para  $f$  acotada y sobre intervalos  $[a, b]$  acotados. La teoría de integrales impropias resuelve esto.
2. Propiedades del espacio  $\mathcal{R}([a, b]) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ Riemann integrable}\}$ :  
Nos gustaría poder definir una noción de convergencia en  $\mathcal{R}([a, b])$  tal que

$$f_n \rightarrow f \text{ en } \mathcal{R}([a, b]) \Rightarrow \int_a^b f_n \rightarrow \int_a^b f \quad \left( \lim \int_a^b f_n = \int_a^b \lim f_n \right).$$

**Remark.** La convergencia puntal NO cumple esto (punto 2).

**Example (1).**

- $f_n := n\chi_{(0, \frac{1}{n}]}$  es Riemann integrable en  $[0, 1]$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ;
- $f_n \rightarrow f \cong 0$  puntualmente en  $[0, 1]$ ;
- $\int_0^1 f_n = 1 \not\rightarrow 0 = \int_0^1 f$ .

◇

**Example (2).**

- Sea  $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una enumeración de  $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ ;
- $f_n := \chi_{\{Q_1, \dots, Q_n\}}$  es Riemann integrable en  $[0, 1]$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ;
- $f_n \rightarrow f := \chi_{\mathbb{Q} \cap [0, 1]}$  puntualmente en  $[0, 1]$ ;
- $f$  no es Riemann integrable.  $\int_0^1 f = 0 \neq 1 = \overline{\int_0^1 f}$ .

◇

**Remark.** La convergencia uniforme SÍ cumple esto, pero es demasiado fuerte.

**Exercise (Guía 1).** Sean  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{R}([a, b])$  tales que  $f_n \rightarrow f$  uniformemente en  $[a, b]$ . Entonces,  $f \in \mathcal{R}([a, b])$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$ .

**Example (3).**

- $f_n(x) := x^n$  en  $[0, 1]$ ,  $f_n \in \mathcal{R}([a, b])$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n \rightarrow \chi = f$  puntualmente;
- $f \in \mathcal{R}([a, b])$  y  $\int_0^1 f_n(x) dx = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 = \int_0^1$ ;
- $f_n$  no converge uniformemente a  $f$ .

◇

Resulta que la noción de convergencia "óptima" (la más "débil" que cumple lo que queremos) es la de convergencia en  $L'$ :

$$f_n \xrightarrow{L'} f \text{ si } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f_n - f| = 0.$$

Esta noción de convergencia viene dada por una "norma":

- $\|f\|_{L'} := \int_a^b |f|$  (recordar que  $f \in \mathcal{R}([a, b]) \Rightarrow |f| \in \mathcal{R}([a, b])$ );
- $d_{L'}(f, g) := \|f - g\|_{L'} = \int_a^b |f - g|$ .

**Remark.**  $\|\cdot\|_{L'}$  no es una norma porque  $\|f\|_{L'} = 0 \not\Rightarrow f = 0$ . Decimos que es una *pseudo-norma* y  $d$  una *pseudo-métrica*.



Para arreglar esto, dadas  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , decimos que son *equivalentes* y lo notamos  $f \sim g$  si  $\{x \in [a, b] : f(x) \neq g(x)\}$  tiene medida nula. Resulta que  $\sim$  es una relación de equivalencia y, además,

$$f, g \in \mathcal{R}([a, b]), f \sim g \Rightarrow \int_a^b f = \int_a^b g.$$

Sea  $\overline{\mathcal{R}}([a, b])$  el conjunto de clases de equivalencia de  $\mathcal{R}([a, b])$ , y denotamos por  $\bar{f}$  a la clase de equivalencia de  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ . Con esto,  $\|\bar{f}\|_{L'} := \int_a^b |f| dx$  define una norma en  $\overline{\mathcal{R}}([a, b])$  que se llama la **norma**  $L'$ .

**Remark.** Hay un problema:  $(\overline{\mathcal{R}}([a, b]), \|\cdot\|_{L'})$  NO ES COMPLETO!

3. **TFC:** Si  $f \in \mathcal{R}([a, b])$  es continua en  $x_0 \in [a, b]$ , entonces  $F(x) := \int_a^x f(t) dt$  es derivable en  $x_0$  y  $F'(x_0) = f(x_0)$ . En particular,  $F$  es derivable en  $x$  y  $F'(x) = f(x)$  para todo  $x$  salvo un conjunto de medida nula.

### 1.4.2 Clase 5 (18/08)

**Teorema Fundamental del Cálculo:** Si  $f \in \mathcal{R}([a, b])$  es continua en  $x_0 \in [a, b]$ , entonces  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $F(x) := \int_a^x f(t) dt$  es derivable en  $x = x_0$  y vale  $F'(x_0) = f(x_0)$ . En particular,  $F'(x) = f(x)$  salvo quizás por un conjunto de  $x \in [a, b]$  de medida nula. O sea, podemos integrar y luego derivar y esto es "casi" como no hacer nada. Pero, tenemos problemas:

1. Este "casi" no puede removerse

**Theorem 1.19** (Hankel, 1871). Dado  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ , existe  $f \in \mathcal{R}([a, b])$  tal que  $F(x) := \int_a^x f(t) dt$  no es derivable para ningún  $x$  en un subconjunto denso en  $[a, b]$  (y, en particular, infinito).

2. A veces no podemos componer en el orden inverso

**Theorem 1.20** (Volterra, 1881). Dado  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ , existe  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  derivable en  $[a, b]$ , tal que  $f'$  es acotada en  $[a, b]$  pero  $f' \notin \mathcal{R}([a, b])$ .

### Extendiendo la integral de Riemann

Sean  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  acotada y  $\Pi = \{x_0, \dots, x_n\}$  una partición de  $[a, b]$ . Definimos:

$$\begin{aligned} \Phi_{f, \Pi}(x) &:= m_{I_1} \chi_{[x_0, x_1]}(x) + \sum_{i=2}^n m_{I_i} \chi_{(x_{i-1}, x_i]}(x), \quad m_{I_i} = \inf_{t \in I_i} f(t) \\ &= m_{I_1} \chi_{\{x_0\}}(x) + \sum_{i=1}^n m_{I_i} \chi_{(x_{i-1}, x_i]}(x) \\ \psi_{f, \Pi} &:= M_{I_1} \chi_{\{x_0\}}(x) + \sum_{i=1}^n M_{I_i} \chi_{(x_{i-1}, x_i]}(x), \quad M_{I_i} = \sup_{t \in I_i} f(t). \end{aligned}$$

Observemos que  $\Phi_{f, \Pi}(x) \leq f(x) \leq \psi_{f, \Pi}(x) \quad \forall x \in [a, b]$ . Además,

$$\int_a^b \Phi_{f, \Pi}(x) dx = \underline{S}(f, \Pi) \int_a^b \psi_{f, \Pi}(x) dx = \overline{S}(f, \Pi).$$

En particular, si  $f$  es Riemann integrable,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \overline{\int_a^b f(x)dx} = \inf \left\{ \int_a^b \psi_{f,\Pi} : \Pi \text{ partición} \right\} \\ &= \underline{\int_a^b f(x)dx} = \sup \left\{ \int_a^b \Phi_{f,\Pi} : \Pi \text{ partición} \right\}.\end{aligned}$$

**Definition 1.21** (función escalonada). Una función  $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  se dice escalonada si existen  $\Pi = \{x_0, \dots, x_n\}$  partición de  $[a, b]$  y  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$  tales que

$$\Phi|_{(x_{i-1}, x_i)} \equiv c_i \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Notemos que podemos escribir a cualquier función  $\Phi$  escalonada como

$$\begin{aligned}\Phi(x) &:= \sum_{i=1}^n c_i \cdot \chi_{(x_{i-1}, x_i)}(x) + \sum_{i=0}^n \Phi(x_i) \cdot \chi_{\{x_i\}}(x) \\ &= \sum_{i=1}^k c_j \cdot \chi_{A_j}(x)..\end{aligned}$$

donde los  $A_j$  son intervalos disjuntos tales que  $\bigsqcup_{j=1}^k A_j = [a, b]$  (se pone una "D" dentro de la unión para denotar que estamos haciendo una unión disjunta).

Si tomamos  $\Phi$  de la forma  $\Phi = \sum_{j=1}^k c_j \cdot \chi_{A_j}$  con  $(A_j)_{j=1, \dots, k}$  disjuntos,  $\bigsqcup_{j=1}^k A_j = [a, b]$  pero  $A_j$  no son necesariamente intervalos, diremos que  $\Phi$  es una función escalonada generalizada. Como para funciones escalonadas "normales", tenemos

$$\int_a^b \Phi(x)dx = \sum_{j=1}^k c_j \cdot |A_j| \left( = \sum_{i=1}^n c_i \cdot |I_i| \right)$$

**La función longitud** Sea  $\mathcal{I}$  la colección de los intervalos en  $\mathbb{R}$ . Definimos la función longitud  $\lambda : \mathcal{I} \rightarrow [0, \infty]$  como  $\lambda(I) := |I|$ .

**Propiedades:**

1.  $\lambda(\emptyset) = 0$ ;
2.  $I_1, I_2 \in \mathcal{I}, I_1 \subseteq I_2 \Rightarrow \lambda(I_1) \leq \lambda(I_2)$  (Monotonía de  $\lambda$ );
3. (Aditividad finita de  $\lambda$ ) Si  $I \in \mathcal{I}$  es tal que  $I = \bigsqcup_{i=1}^n J_i$  con  $J_i \in \mathcal{I}, \forall i = 1, \dots, n, J_i \cap J_j = \emptyset$  sin  $i \neq j$ , entonces

$$\lambda(I) = \sum_{i=1}^n \lambda(J_i);$$

4. ( $\sigma$ -aditividad de  $\lambda$ ) Si  $I \in \mathcal{I}$  es tal que  $I = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ , con  $(I_i)_i \in \mathbb{N} \subseteq \mathcal{I}$  disjuntos, entonces

$$\lambda(I) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(I_i);$$

5. ( $\sigma$ -subaditividad de  $\lambda$ ) Si  $I \in \mathcal{I}$  verifica  $I \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ ,  $(I_i)_{i \in \mathbb{N}}$  intervalos (no necesariamente disjuntos), entonces  $\lambda(I) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(I_i)$ ;
6.  $\lambda(I+x) = \lambda(I)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $I+x := \{a+x : a \in I\}$ ;
7.  $\lambda(\{x\}) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$ .

## 1.5 Clase 6 (20/08)

Nos gustaría extender  $\lambda$  a una clase más grande que  $\mathcal{I}$ . Más precisamente, nos gustaría definir una aplicación  $m : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ , donde  $\mathcal{M}$  es una colección de subconjuntos de  $\mathbb{R}$  tal que  $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{M}$ , de manera tal que, dado  $E \in \mathcal{M}$ ,  $m(E)$  represente la "longitud" de  $E$ . Idealmente, nos gustaría que  $m$  cumpla lo siguiente:

1.  $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ ;
2. Si  $I \in \mathcal{I}$ , entonces  $m(I) = |I|$ ;
3.  $m$  es  $\sigma$ -aditiva ( $E, (E_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}$ ,  $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \Rightarrow m(E) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$ );

**Exercise.** (1) + (2) + (3)  $\Rightarrow m$  es monóton,  $\sigma$ -subaditiva y finitamente aditiva.

- 4 Si  $E \in \mathcal{M}$ , entonces  $E+x \in \mathcal{M}$  y  $m(E+x) = m(E) \forall x \in \mathbb{R}$ .

El problema es que, si asumimos el Axioma de Elección, uno puede mostrar que no existe una tal  $m$  que cumpla (1) – (2) – (3) – (4) y, de hecho, no se sabe si existe  $m$  que cumpla (1) – (2) – (3). (Si asumimos la hipótesis del continuo, entonces no existe  $m$  que cumpla (1) – (2) – (3)).

Luego, para construir  $m$  debemos debilitar alguna de las propiedades:

- Si debilitamos (1)  $\Rightarrow$  TEORÍA DE LA MEDIDA;
- Si debilitamos (3) pidiendo solo (hay dos opciones):
  - $\rightarrow$  aditividad finita  $\Rightarrow$  "medidas finitamente aditivas";
  - $\rightarrow$   $\sigma$ -subaditividad  $\Rightarrow$  "medidas exteriores".

Vamos a optar por debilitar (1).

Una manera de extender  $\lambda$  es la siguiente:

- i. Si  $E = \bigcup_{i=1}^n I_i$  entonces definimos  $\lambda(E) := \sum_{i=1}^n \lambda(I_i)$ ;
- ii. Si  $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$  entonces definimos  $\lambda(E) := \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(I_i)$ ;
- iii. La fórmula anterior nos permite definir  $\lambda(\delta)$  para todo  $\delta$  abierto en  $\mathbb{R}$ ;
- iv. Para conjuntos mas generales, "aproximar" por abiertos.

**Definition 1.22** (premedida). Sea  $X$  un conjunto no vacío y  $\mathcal{C}$  una colección de subconjuntos de  $X$  tal que  $\emptyset \in \mathcal{C}$ . Diremos que una aplicación  $\mathcal{T} : \mathcal{C} \rightarrow [0, \infty]$  es una premedida si  $\mathcal{T}(\emptyset) = 0$ .

**Remark.** El conjunto no vacío  $X$  será llamado un espacio y la colección  $\mathcal{C}$  será llamada una clase (de subconjuntos de  $X$ ).

Intuitivamente,  $\mathcal{C}$  representa la colección de subconjuntos cuyo "tamaño" sabemos medir y  $\mathcal{T}$  nos da su medida.

**Example.**

1. **Premedida de Lebesgue:**  $\mathcal{C} := \mathcal{I} := \{I \subseteq \mathbb{R} : I \text{ intervalo}\}$ ,  $\mathcal{T}(I) := |I|$ .
2. **Premedidas de Lebesgue-Stieltjes:** Sea  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  monótona creciente y continua a derecha ( $\lim_{x \rightarrow x_0}^+ F(x) = F(x_0)$ ). Una función tal se dice una función de Lebesgue-Stieltjes.

◇

Observemos que, por monotonía, existen límites

$$\left\{ \begin{array}{l} F(\infty) := \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) \\ F(-\infty) := \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) \end{array} \right\} \in \mathbb{R}$$

Sea además la clase  $\tilde{\mathcal{I}}$  de intervalos de  $\mathbb{R}$  dada por

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{I}} &:= \{I(a, b) : \} \text{ donde } I(a, b) := (a, b] \cap \mathbb{R} \\ &= \{(a, b] : -\infty \leq a \leq b\} \cup \{(a, \infty) : -\infty \leq a < \infty\}. \end{aligned}$$

Definimos la premedida  $\mathcal{T}_F$  de Lebesgue-Stieltjes asociada a  $F$  como la aplicación  $\mathcal{T}_F : \tilde{\mathcal{I}} \rightarrow [0, \infty]$ , dada por

$$\mathcal{T}_F(I(a, b)) = F(b) - F(a).$$

**Note.** Observar que si  $F(x) = x$  entonces  $\mathcal{T}_F$  es la premedida de Lebesgue (sobre  $\tilde{\mathcal{I}}$ ).

3. **Premedidas de Probabilidad:** Si  $F$  es una función de L-S tal que  $F(\infty) = 1$  y  $F(-\infty) = 0$ , decimos que  $F$  es una función de distribución (acumulada). En tal caso, la premedida  $\mathcal{T}_F$  se conoce como premedida de probabilidad o predistribución (en  $\mathbb{R}$ ).

**Remark.**  $\mathcal{T}_F(\mathbb{R}) = \mathcal{T}_F(I(-\infty, \infty)) = F(\infty) - F(-\infty) = 1 - 0 = 1$ .

#### 4. Premedida...

## 1.6 Clase 7 (22/08)

**Definition 1.23** (semiálgebra). Sea  $X$  un espacio y  $\mathcal{C}$  una clase de subconjuntos de  $X$ . Decimos que  $\mathcal{C}$  es una semiálgebra (de subconjuntos de  $X$ ) si cumple:

1.  $\emptyset \in \mathcal{C}$ ;
2. ( $\mathcal{C}$  es cerrada por intersecciones finitas)  $A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{C}$ ;
3. Si  $A \in \mathcal{C}$ , existen  $C_1, \dots, C_n \in \mathcal{C}$  disjuntos tal que  $A^c = \bigcup_{i=1}^n C_i$ .

**Example.**

1. La clase  $\mathcal{I}_d$  de intervalos en  $\mathbb{R}^d$  es una semiálgebra.
2. La clase  $\tilde{\mathcal{I}} := \{(a, b] \cap \mathbb{R} : -\infty \leq a \leq b \leq \infty\}$  es una semiálgebra.
3. Si  $X$  e  $Y$  son espacios y  $\mathcal{C}_X, \mathcal{C}_Y$  son semiálgebras en  $X$  e  $Y$  respectivamente, entonces

$$\mathcal{C}_X \times \mathcal{C}_Y := \{F \times G : F \in \mathcal{C}_X, G \in \mathcal{C}_Y\}$$

es una semiálgebra en  $X \times Y$ , llamada "semiálgebra producto".

◇

**Definition 1.24** (álgebra). Sean  $X$  un espacio y  $\mathcal{A}$  una clase de subconjuntos de  $X$ . Decimos que  $\mathcal{A}$  es un álgebra (de subconjuntos de  $X$ ) si cumple que:

- (i)  $\emptyset \in \mathcal{A}$ ;
- (ii)  $\mathcal{A}$  es cerrado por intersecciones finitas;
- (iii) ( $\mathcal{A}$  es cerrada por complementos)  $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$ .

Equivalentemente, en presencia de (iii), (ii) se puede reemplazar por:

- (ii') ( $\mathcal{A}$  es cerrada por uniones finitas)  $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$ . (**Dem:** Ejercicio!)

**Example.**

1.  $X$  espacio,  $\mathcal{A}_1 := \{\emptyset, X\}$ ,  $\mathcal{A}_2 := \mathcal{P}(X)$  son álgebras (donde  $\mathcal{A}$  es llamada el álgebra trivial);

2. Sea  $\mathcal{S}$  una semiálgebra de subconjuntos de un espacio  $X$ . Entonces

$$\mathcal{A} := \{E \subseteq X : \exists S_1, \dots, S_n \in \mathcal{S} \text{ disjuntos tal que } E = \bigcup_{i=1}^n S_i\}$$

es un álgebra, llamada el álgebra generada por  $\mathcal{S}$ . Notemos que  $\mathcal{A}(\mathcal{S})$  es el menor álgebra que contiene a  $\mathcal{S}$ :

- (i)  $\mathcal{A}(\mathcal{S})$  es un álgebra y  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{S})$ ;
- (ii) Si  $\mathcal{A}'$  es un álgebra con  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}'$  entonces  $\mathcal{A}(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{A}'$ .

◇

**Note.** Toda álgebra es una semiálgebra.

**Definition 1.25** ( $\sigma$ -álgebra). Una clase (no vacía)  $\mathcal{M}$  de subconjuntos de un espacio  $X$  se dice una  $\sigma$ -álgebra si cumple:

- 1.  $\emptyset \in \mathcal{M}$ ;
- 2.  $E \in \mathcal{M} \Rightarrow E^c \in \mathcal{M}$ ;
- 3.  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathcal{M}$ .

Llamamos al par  $(X, \mathcal{M})$  un espacio medible y a los elementos de  $\mathcal{M}$ , conjuntos medibles.

**Note.**

- 1. Todo  $\sigma$ -álgebra es un álgebra;
- 2. Equivalentemente, en presencia de (1), (3) se puede reemplazar por

$$(iii') \quad (E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M} \Rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathcal{M}.$$

**Example.**

- 1.  $\sigma$ -álgebra  $\Rightarrow$  álgebra  $\Rightarrow$  semiálgebra (no valen las recíprocas);
- 2.  $\{\emptyset, X\}, \mathcal{P}(X)$  son  $\sigma$ -álgebras;
- 3. Si  $(\mathcal{M}_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$  son  $\sigma$ -álgebras, entonces

$$\bigcap_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{M}_\gamma := \{E \subseteq X : E \in \mathcal{M}_\gamma, \forall \gamma \in \Gamma\}$$

es una  $\sigma$ -álgebra.

- 4. Si  $\mathcal{M}$  es una clase de subconjuntos de  $X$ , entonces

$$\sigma(\mathcal{M}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{M} \text{ } \sigma\text{-álgebra} \\ \mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}}} \mathcal{M}$$

es la  $\sigma$ -álgebra generada por  $\mathcal{C}$ . De hecho,  $\sigma(\mathcal{M})$  es la menor  $\sigma$ -álgebra que contiene a  $\mathcal{C}$ :

- (a)  $\sigma(\mathcal{C})$  es  $\sigma$ -álgebra y  $\mathcal{C} \subseteq \sigma(\mathcal{C})$ ;
  - (b) Si  $\mathcal{F}$  es  $\sigma$ -álgebra y  $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$  entonces  $\sigma(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{F}$ .
5. Si  $(X, \mathcal{T})$  es un espacio topológico,  $\sigma(\mathcal{T})$  se conoce como la  $\sigma$ -álgebra de Borel, y sus elementos se llaman Borelianos. La notamos  $\beta(X)$  ( $= \sigma(\mathcal{T})$ ).

◇

**Example.**  $\beta(\mathbb{R})$  contiene a todos los abiertos, cerrados, intervalos, conjuntos de tipo  $G_\delta$  y  $F_\sigma, \dots$ . De hecho,  $\beta(\mathbb{R}) = \sigma(\text{cerrados}) = \sigma(\text{compactos}) = \sigma(\mathcal{I}) = \sigma(\tilde{\mathcal{I}})$ .

◇

**Definition 1.26.** Sea  $\mathcal{C}$  una clase (no vacía) de subconjuntos de  $X$  y  $\mu : \mathcal{C} \rightarrow [0, \infty]$  una función (la llamamos una función de conjuntos). Diremos que:

- (i)  $\mu$  es **monótona** (en  $\mathcal{M}$ ) si  $A, B \in \mathcal{C}$ ,  $A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$ ;
- (ii)  $\mu$  es **finitamente aditiva** si  $(A_i)_{i=1, \dots, n} \subseteq \mathcal{C}$  disjuntos  $\Rightarrow \mu(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$ ;
- (iii)  $\mu$  es  **$\sigma$ -aditiva** si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}$  disjuntos  $\Rightarrow \mu(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) = \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i)$ ;
- (iv)  $\mu$  es  **$\sigma$ -subaditiva** si  $\mu(A) \leq \sum_{i=1}^\infty \mu(A_n)$ , para todo  $A \in \mathcal{C}$  y  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}$  tal que  $A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$

## 1.7 Clase 8 (25/08)

**Remark.** Rana da una definición más débil de (4):

$$A \in \mathcal{C}, A = \bigcup_{i=1}^\infty A_i, A_i \in \mathcal{C} \forall i \Rightarrow \mu(A) \leq \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i)$$

Ambas definiciones son equivalentes si  $\mathcal{C}$  es una semiálgebra y  $\mu$  es monótona (siempre será el caso para nosotros).

**Definition 1.27** (premedida finita y  $\sigma$ -finita). Una premedida  $\mathcal{T} : \mathcal{C} \rightarrow [0, \infty]$  se dice:

- 1. **finita** si  $X \in \mathcal{C}$  y  $\mathcal{T} < \infty$ ;
- 2.  **$\sigma$ -finita** si existen  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}$  disjuntos tales que  $\bigcup_{n=1}^\infty C_n = X$  y  $\mathcal{T}(C_n) < \infty \forall n \in \mathbb{N}$ .

**Example.**

1. finita  $\Rightarrow \sigma$ -finita;
2. La función longitud  $\lambda : \mathcal{I} \rightarrow [0, \infty]$  es  $\sigma$ -finita pero no finita;
3. Si  $F$  es una función de L-S, entonces  $\mathcal{T}_F : \tilde{\mathcal{I}} \rightarrow [0, \infty]$  es siempre  $\sigma$ -finita ( $\mathcal{T}_F((n, n+1]) = F(n+1) - F(n) < \infty \forall n \in \mathbb{Z}$ ) y es finita si y sólo si  $\mathcal{T}_F(\mathbb{R}) = \mathcal{T}_F((-\infty, \infty] \cap \mathbb{R}) = F(\infty) - F(-\infty) < \infty$ .

◇

**Definition 1.28 (medida).** Sea  $(X, \mathcal{M})$  es un espacio medible. Diremos que  $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$  es una medida (en  $(X, \mathcal{M})$ ) si:

1.  $\mu(\emptyset) = 0$ ;
2.  $\mu$  es  $\sigma$ -subaditiva en  $\mathcal{M}$   $\left( \mu \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \right)$ .

Llamamos a la terna  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  un espacio de medida.

**Objetivo.** Construir un espacio de medida  $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, \mu)$  tal que  $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{M}$  y

$$\begin{cases} \mu(I) = |I| \quad \forall I \in \mathcal{I}, \\ \mu(E+x) = \mu(E) \quad \forall E \in \mathcal{M}. \end{cases}$$

**Example (Espacios de Probabilidad).** Si  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  es un EdM tal que  $\mu(X) = 1$ ,  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  recibe el nombre de espacios de probabilidad. ◇

- $X$  recibe el nombre de espacio muestral, y se lo nota  $\Omega$  (en lugar de  $X$ );
- $\mathcal{M}$  se suele notar como  $\mathcal{F}$  (ó  $\mathcal{Y}$ ). Sus elementos se dicen eventos;
- $\mu$  recibe el nombre de medida de probabilidad ó distribución y se la nota  $\mathbb{P}$ .

En probabilidad, típicamente se estudian 2 tipos de distribuciones en  $\mathbb{R}$  (o en  $\mathbb{R}^d$ ).

1. **Distribuciones discretas:**  $\exists S \subseteq \mathbb{R}$  numerable y  $(p_x)_{x \in S} \subseteq [0, 1]$  tal que  $\mathbb{P}(A) = \sum_{x \in A \cap S} p_x$ .

**Example.** Binomial, Geométrica, Poisson,... ◇

2. **Distribuciones (absolutamente) continuas:**  $\exists f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  "integrable" tal que  $\mathbb{P}(A) = \int_A f(x)dx$ .

**Example.** Uniforme, Exponencial, Normal,... ◇

**Propiedades generales de una medida.** Si  $\mu$  es una medida sobre  $(X, \mathcal{M})$ , entonces:

1.  $\mu$  es monótona (en  $\mathcal{M}$ );
2.  $\mu$  es  $\sigma$ -subaditiva;



3.  $\mu$  es **continua por debajo**: si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$  es creciente ( $A_n \subseteq A_{n+1} \forall n$ ) entonces

$$\mu \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

4.  $\mu$  es **continua por arriba**: si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$  es decreciente ( $A_{n+1} \subseteq A_n \forall n$ ) y  $\mu(A_{n_0}) < \infty$  para algún  $n_0$  ( $\Rightarrow \mu(A_n) < \infty \forall n \geq n_0$ ), entonces

$$\mu \left( \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

(**Cuidado!** (4) puede no valer si  $\mu(A_n) = \infty \forall n \in \mathbb{N}$ )

**Definition 1.29** (premedida extendible y unívocamente extendible). Una premedida  $\mathcal{T} : \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$  definida sobre una semiálgebra de subconjunto de  $X$ , se dice:

1. **Extendible** si es
  - (E1) finitamente aditiva en  $\mathcal{S}$ ;
  - (E2)  $\sigma$ -subaditiva en  $\mathcal{S}$ .
2. **Unívocamente extendible** si es extendible y se cumple
  - (E3)  $\sigma$ -finita

**Remark.** Los nombres de extendible y unívocamente extendible no se encontrarán en el Rana (los puso el profe).

**Theorem 1.30** (Extensión de Carathéodory). Dados un espacio  $X$  y una premedida  $\mathcal{T}$  sobre una semiálgebra  $\mathcal{S}$  de subconjuntos de  $X$  tal que  $\mathcal{T}$  es extendible, existe una extensión de  $\mathcal{T}$  a una medida  $\mu_{\mathcal{T}}$  definida sobre  $\sigma(\mathcal{S})$  la  $\sigma$ -álgebra generada por  $\mathcal{S}$ . Más aún, si  $\mathcal{T}$  es unívocamente extendible, entonces la extensión  $\mu_{\mathcal{T}}$  a  $\sigma(\mathcal{S})$  es única.

Por último, si  $\mathcal{T}$  es unívocamente extendible, entonces se puede extender de manera única a una medida  $\overline{\mu_{\mathcal{T}}}$  sobre la  $\mu_{\mathcal{T}}$ -completación de  $\sigma(\mathcal{S})$ , i.e. la  $\sigma$ -álgebra  $\overline{\sigma(\mathcal{S})}$  dada por

$$\overline{\sigma(\mathcal{S})} := \{B \cup N : B \in \sigma(\mathcal{S}), \exists \tilde{N} \in \sigma(\mathcal{S}) \text{ con } N \subseteq \tilde{N} \text{ y } \mu_{\mathcal{T}}(\tilde{N}) = 0\}$$

mediante la fórmula  $\overline{\mu_{\mathcal{T}}}(B \cap N) := \mu_{\mathcal{T}}(B)$ .

## 1.8 Clase 9 (27/08)

**Remark.** Si  $\mathcal{T} : \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$  es  $\sigma$ -aditiva en  $\mathcal{S}$  y  $\mathcal{S}$  es una semiálgebra, entonces  $\mathcal{T}$  es extendible.

**Remark.** La extensión puede no ser única si  $\mathcal{T}$  no es  $\sigma$ -finita.

**Example.**  $\tilde{\mathcal{I}}_{\mathbb{Q}} := \tilde{\mathcal{I}} \cap \mathbb{Q} = \{(a, b] \cap \mathbb{Q} : -\infty \leq a \leq b \leq \infty\}$   $\diamond$

**Note.**

- $\tilde{\mathcal{I}}_{\mathbb{Q}}$  es una semiálgebra;
- $\sigma(\tilde{\mathcal{I}}_{\mathbb{Q}}) = \sigma(\tilde{\mathcal{I}} \cap \mathbb{Q}) \stackrel{\text{Ej!}}{=} \sigma(\tilde{\mathcal{I}}) \cap \mathbb{Q} = \beta(\mathbb{R}) \cap \mathbb{Q} = \mathcal{P}(\mathbb{Q})$  (9.52)
- $\mathcal{T} : \tilde{\mathcal{I}}_{\mathbb{Q}} \rightarrow [0, \infty]$ , dada por  $\mathcal{T}(A) := \begin{cases} 0 & A = \emptyset \\ \infty & A \neq \emptyset, A \in \tilde{\mathcal{I}}_{\mathbb{Q}} \end{cases}$  (Observar que  $\mathcal{T}$  no es  $\sigma$ -finita)
- Para cada  $r > 0$ ,  $\mu_r : \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \rightarrow [0, \infty]$  dada por  $\mu_r(A) := r(\#A)$  es una extensión de  $\mathcal{T}$  (y es una medida)

**Definition 1.31** (espacio completo y conjuntos  $\mu$ -nulos). Sea  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  un EdM y definamos

$$\mathcal{N}_{\mu} := \{E \subset X : \exists N \in \mathcal{M} \text{ con } E \subseteq N \text{ y } \mu(N) = 0\}$$

Los elementos de  $\mathcal{N}_{\mu}$  se dicen conjuntos  $\mu$ -nulos. Diremos que  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  es completo si  $\mathcal{N}_{\mu} \subseteq \mathcal{M}$

**Remark.**  $(X, \overline{\sigma(\mathcal{S})}, \overline{\mu_{\delta}})$  es completo. En efecto,  $\mathcal{N}_{\overline{\mu_{\delta}}}$  corresponde al subconjunto de  $\overline{\sigma(\mathcal{S})}$  que se obtiene tomando  $B = \emptyset$ .

**Remark.** Veremos más adelante que las siguientes premedidas son UE:

- (i) Premedidas de Lebesgue-Stieltjes (en particular, la función longitud  $\lambda$  (sobre  $\tilde{\mathcal{I}}$ ) y las premedidas de probabilidad).
- (ii) Premedidas de Lebesgue en  $\mathbb{R}^d$ , con  $d \in \mathbb{N}$ .

En particular;

**Corollary 1.32.** Para cada función  $F$  de Lebesgue-Stieltjes, existe una  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{M}_F$  sobre  $\mathbb{R}$  y una única medida  $\mu_F$  en  $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_F)$  tal que

$$\mu_F(I(a, b)) = F(b) - F(a) \quad \forall -\infty \leq a \leq b \leq \infty$$

Además,  $\beta(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{M}_F$ . Es decir,  $\mu_F$  es una medida que extiende a  $\mathcal{T}_F$ , a todo  $\mathcal{M}_F$  (y en particular, a todo  $\beta(\mathbb{R})$ ). Además,  $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_F, \mu_F)$  es un EdM completo. ( $\mathcal{M}_F := \overline{\sigma(\tilde{\mathcal{I}})^F}$ ,  $\mu_F := \overline{\mu_{\mathcal{T}_F}}$ ). La medida  $\mu_F$  se conoce como medida de L-S asociada a  $F$ . En particular, para cualquier función de distribución  $F$ , existe una única medida de probabilidad  $\mathbb{P}_F$  en  $(\mathbb{R}, \beta(\mathbb{R}))$  tal que

$$\mathbb{P}_F(I(a, b)) = F(b) - F(a) \quad \forall -\infty \leq a \leq b \leq \infty$$

(En la guía 3 veremos que  $F \rightarrow \mathbb{P}_F$  es una biyección)

**Note.** Los  $\beta$  son los Borelianos y  $I(a, b) = (a, b] \cap \mathbb{R}$ . (super  $F \rightarrow 10.26$ ).

**Example (Importante!). Medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}$ .** Tomando  $F = id$  en el Corolario anterior, obtenemos una  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{L}(\mathbb{R}) := \mathcal{M}_{id}$  con  $\beta(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{L}(\mathbb{R})$  y una medida  $\mu_{id}$  en  $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}))$  tal que  $\mu_{id}(I(a, b)) = b - a \quad \forall -\infty \leq a \leq b \leq \infty$ . En particular, de esto se deduce que  $\mu_{id}(I) = |I| \quad \forall I \in \mathcal{I}$ . Dicha medida recibe el nombre de medida de Lebesgue (en  $\mathbb{R}$ ), y los elementos de  $\mathcal{L}(\mathbb{R})$  se dicen conjuntos medibles Lebesgue. Adoptaremos la notación  $\mu_{id}(E) := \lambda(E) := |E|$ . La medida  $\mu_{id}$  es la extensión de la noción de longitud que buscábamos y  $\mathcal{L}(\mathbb{R})$  son los conjuntos cuya "longitud" podremos medir. Además, los conjuntos de medida nula (de la guía 2), son exactamente aquellos  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$  tal que  $\mu_{id}(A) = 0$  (lo veremos más adelante!).  $\diamond$

**Example (Medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^d$ ).** Si  $\mathcal{I}_d$  son los intervalos en  $\mathbb{R}^d$  y definimos  $\mathcal{T} : \mathcal{I}_d \rightarrow [0, \infty]$  como  $\mathcal{T}(I) := |I|$ , entonces  $\mathcal{I}_d$  es una semiálgebra y  $\mathcal{T}$  es una premedida  $\sigma$ -aditiva en  $\mathcal{I}_d$  (lo veremos después). Por lo tanto,  $\mathcal{T}$  se puede extender (de manera única, pues  $\mathcal{T}$  es  $\sigma$ -finita) a una medida  $\mu_\delta$  sobre la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d) = \overline{\sigma(\mathcal{I}_d)^{\mathcal{T}}}$ , llamada medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^d$  y  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$  es la clase de conjuntos medibles Lebesgue en  $\mathbb{R}^d$ . Al igual que antes, dado  $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ , notamos  $|E| := \mu_\mathcal{T}(E)$ .  $\diamond$