Teoría de Integración

Basado en las clases impartidas por Santiago Saglietti en el segundo semeste del 2025

Contents

1 Integral de Riemann **2**
1.1 Clase 1 (04/08) 2
1.2 Clase 2 (06/08) 3
1.3 Clase 3 (07/08) 4
1.4 Clase 4 (08/08) 6
1.4.1 Limitaciones de la integral de Riemann 6
1.4.2 Clase 5 (18/08) 8

Chapter 1

Integral de Riemann

1.1 Clase 1 (04/08)

Definition 1.1 (partición + intervalos)**.** Una partición de un intervalo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ es un subconjunto finito $\Pi \subseteq [a, b]$ tal que $a, b \in \Pi$. Denotaremos a las particiones como $\Pi = \{x_0, \dots, x_n\}$, donde $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Los intervalos $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$ serán llamados intervalos de la partición.

Remark. A veces, identificaremos la partición Π con $(I_i)_{i=1,\dots,n}$. En tal caso, abusando de la notación, escribiremos $I_i \in \Pi$ cuando queramos hablar de los intervalos de Π.

Definition 1.2 (norma de particiones)**.** La norma de una partición Π como $\|\Pi\| := \max_{i=1,\dots,n}(x_i - x_{i-1}) = \max_{I_i \in \Pi} |I_i|$.

Definition 1.3 (partición marcada)**.** Una partición marcada de $[a, b]$ es un par $\Pi^* := (\Pi, \varepsilon)$ donde:

- $\Pi = \{x_0, \dots, x_n\}$ es una partición de $[a, b]$;
- $\varepsilon = \{x_1^*, \dots, x_n^*\}$ es una colección de puntos tal que $x_i^* \in I_i$ para cada $i = 1, \dots, n$.

Remark. Dada una partición marcada $\Pi^* = (\Pi, \varepsilon)$, definimos $\|\Pi^*\| := \|\Pi\|$.

Definition 1.4 (Suma de Riemann)**.** Sean $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada y $\Pi^* = (\Pi, \varepsilon)$ una partición marcada. Definimos la suma de Riemann de f asociada a Π^* como:

$$S_R(f; \Pi^*) := \sum_{n=1}^{n} f(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{I_i \in \Pi} f(x_i^*)|I_i|.$$

1.2 Clase 2 (06/08)

Definition 1.5 (Riemann integrable)**.** Dada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada, decimos que es Riemann integrable si existe el límite $\lim_{\|\Pi^*\|\to 0} S_R(f; \Pi^*)$.
Equivalentemente, $\exists L \in \mathbb{R}$, tal que dado cualquier $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que $\|\Pi^*\| < \delta \Rightarrow |S_R(f; \Pi^*) - L| < \varepsilon$.

Remark. Cuando el límite existe, lo llamamos la integral de Riemann de f en $[a, b]$ y lo notamos $\int_a^b f(x)dx$.

Definition 1.6 (Sumas superior e inferior de Darboux)**.** Dadas $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada y $\Pi = (I_i)_{i=1,\ldots,n}$ una partición de $[a, b]$, definimos

$$m_{I_i} := \inf_{x\in I_i} f(x), \quad M_{I_i} := \sup_{x\in I_i} f(x) \quad \text{y}$$

$$\underline{S}(f; \Pi) := \sum_{I_i\in\Pi} m_{I_i}|I_i|, \quad \overline{S}(f; \Pi) := \sum_{I_i\in\Pi} M_{I_i}|I_i|.$$

Llamamos a $\underline{S}(f; \Pi)$ y $\overline{S}(f; \Pi)$ las sumas inferior y superior de Darboux de f con respecto a Π, respectivamente.

Note. Como $m_{I_i} \leq f(x) \leq M_{I_i}$, $\forall x \in I_i$ para toda partición marcada $\Pi^* = (\Pi; \varepsilon)$, tenemos $\underline{S}(f; \Pi) \leq S_R(f; \Pi^*) \leq \overline{S}(f; \Pi)$.

Definition 1.7 (refinamiento)**.** Diremos que una partición Π' de $[a, b]$ es un refinamiento de otra partición de $[a, b]$, Π, si $\Pi \subseteq \Pi'$.
Equivalentemente, si para todo $J_i \in \Pi'$ existe $I_i \in \Pi$ tal que $J_i \subseteq I_i$.

Proposition 1.8. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada. Entonces,

- Si $\Pi \subseteq \Pi'$ son particiones de $[a, b]$,

$$\underline{S}(f; \Pi) \leq \underline{S}(f; \Pi'), \quad \overline{S}(f; \Pi) \geq \overline{S}(f; \Pi').$$

- Si Π_1, Π_2 son particiones de $[a, b]$ cualesquiera,

$$\underline{S}(f; \Pi_1) \leq \overline{S}(f; \Pi_2)$$

Definition 1.9. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada. Definimos:

- La integral superior (de Darboux) de f como $\overline{\int_a^b} f(x)dx := \inf_{\Pi} \overline{S}(f; \Pi)$.
- La integral inferior (de Darboux) de f como $\underline{\int_a^b} f(x)dx := \sup_{\Pi} \underline{S}(f; \Pi)$.

Theorem 1.10. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada. Entonces,

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \lim_{\|\Pi\|\to 0} \underline{S}(f;\Pi) \quad \text{y} \quad \overline{\int_a^b} f(x)dx = \lim_{\|\Pi\|\to 0} \overline{S}(f;\Pi).$$

Remark. Equivalentemente, para cualquier sucesión $(\Pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de partición de $[a,b]$ tal que $\|\Pi_n\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$, se tiene que

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f;\Pi_n) \quad \text{y} \quad \overline{\int_a^b} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f;\Pi_n).$$

Theorem 1.11. Dada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada, son equivalentes:

1. $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$ (i.e., f es Darboux integrable).
2. f es Riemann integrable.
3. $\lim_{\|\Pi\|\to 0} \overline{S}(f;\Pi) - \underline{S}(f;\Pi) = 0$.
4. $\forall (\Pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de particiones de $[a,b]$ tal que $\|\Pi_n\| \to 0$,
$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f;\Pi_n) - \underline{S}(f;\Pi_n) = 0.$$
5. $\exists (\Pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de particiones de $[a,b]$ tal que
$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f;\Pi_n) - \underline{S}(f;\Pi_n) = 0.$$

1.3 Clase 3 (07/08)

Note. Las integrales en el sentido de Darboux y el de Riemann coinciden.

Proposition 1.12. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es monótona, entonces es Riemann integrable.

Remark. Una función monótona tiene discontinuidades numerables.

Proposition 1.13. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces es Riemann integrable.

En particular, existen funciones Riemann integrables con numerables discontinuiodades. De hecho, hay ejemplos con c (cardinal del continuo) discontinuidades. No obstante, si f es integral de Riemann, su conjunto de discontinuidades tiene que ser "pequeño".

Theorem 1.14. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada. Entonces, f es integral de Riemann si y sólo si su conjunto de discontinuidades tiene medida nula.

Definition 1.15 (intervalo)**.** Decimos que un conjunto $I \subseteq \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ es un intervalo si satisface

$$x, y \in I \Rightarrow z \in I \text{ para todo } \min x, y \leq z \leq \max x, y.$$

Example. (y propiedades)

- Dados $a \leq b$ $(a, b \in \mathbb{R})$, los conjuntos $(a,b), (a,b], [a,b], [a,b)$ son intervalos;
- El conjunto vacío es un intervalo $(\varnothing = (a,a))$;
- Los puntos son intervalos. $I = [\lambda, \lambda]$;
- La intersección son intervalos de intervalos.

◇

Definition 1.16 (intervalo generalizado)**.** Decimos que un conjunto $I \subseteq \mathbb{R}^d$ es un intervalo si puede escribirse como

$$I = \prod_{k=1}^{d} I_k$$

donde cada I_r es un intervalo en $\mathbb{R}$. La medida de un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}^d$ se define como

$$|I| := \prod_{k=1}^{d} |I_k|.$$

Note. Los intervalos en $\mathbb{R}^d$ heredan las mismas pripiedades en $\mathbb{R}$:

- Intersección de intervalos en $\mathbb{R}^d$ es intervalo.
- Si $I \subseteq J \subseteq \mathbb{R}^d$ son intervalos, entonces $|I| \leq |J|$.

Definition 1.17 (medida nula)**.** Un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^d$ se dice de medida nula si, dado $\varepsilon > 0$, existe una sucesión $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de intervalos de $\mathbb{R}^d$ tal que

$$E \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \quad \text{y} \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} |I_n| < \varepsilon.$$

Example. (y propiedades)

1. Todo conjunto unitario $\{x\}, (x \in \mathbb{R}^d)$ tiene medida nula;

2. Toda unión numerable de conjuntos de medida nula tiene medida nula;
3. Cualquier conjunto numerable tiene medida nula;
4. Cualquier subconjunto de un conjunto de medida nula tiene medida nula;
5. Existen conjuntos no numerables de medida nula:
    - En $\mathbb{R}^d$ con $d \geq 2$, los ejes $\{x : x_1 = 0\}, i = 1, \ldots, d$ tiene medida nula.
    - En $\mathbb{R}$, el conjunto de cantor tiene medida nula.
6. $E \subseteq \mathbb{R}^d$ es de medida nula, entonces $\alpha \dot{E}$ tiene medida nula $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
7. $E \subseteq \mathbb{R}^d$ es de medida nula, entonces $E + v$ tiene medida nula $\forall v \in \mathbb{R}^d$.
8. Si E contiene un intervalo no unitario, entonces no tiene medida nula. Notar que:
    - La vuelta no es válida: $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ no contiene untervalos no unitarios pero no puede tener medida nula.
    - De esto se deduce que si $E \subseteq \mathbb{R}^d$ tiene medida nula. Entonces E^c es denso (no vale la vuelta: $E^c = \mathbb{Q}$).
9. $E \subseteq \mathbb{R}^d$ tiene medida nula si y sólo si

$$|E|_e := \inf\{\sum_{n \in \mathbb{N}} |I_n| : E \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n\} = 0, \quad I_n \text{ intervalo } \forall n \in \mathbb{N}.$$

$\diamond$

1.4 Clase 4 (08/08)

Theorem 1.18. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada. Entonces

$$f \text{ Riemann integrable} \Longleftrightarrow D_f = \{x \in [a, b] : f \text{ discontinua en } x\} \text{ tiene medida nula.}$$

1.4.1 Limitaciones de la integral de Riemann

1. Sólo está definida para f acotada y sobre intervalos $[a, b]$ acotados. La teoría de integrales impropias resuelve esto.
2. Propiedades del espacio $\mathcal{R}([a, b]) = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} : f \text{ Riemann integrable}\}$: Nos gustaría poder definir una noción de convergencia en $\mathcal{R}([a, b])$ tal que

$$f_n \to f \text{ en } \mathcal{R}([a, b]) \Rightarrow \int_a^b f_n \to \int_a^b f \quad \left(\lim \int_a^b f_n = \int_a^b \lim f_n\right).$$

Remark. La convergencia puntal NO cumple esto (punto 2).

Example (1).

- $f_n \coloneqq n\chi_{(0,\frac{1}{n}]}$ es Riemann integrable en $[0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
- $f_n \to f \cong 0$ puntualmente en $[0,1]$;
- $\int_0^1 f_n = 1 \not\to 0 = \int_0^1 f$.

$\diamond$

Example (2).

- Sea $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una enumeración de $\mathbb{Q} \cap [0,1]$;
- $f_n \coloneqq \chi_{\{Q_1,\ldots,Q_n\}}$ es Riemann integrable en $[0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
- $f_n \to f \coloneqq \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ puntualmente en $[0,1]$;
- f no es Riemann integrable. $\underline{\int_0^1} f = 0 \neq 1 = \overline{\int_0^1} f$.

$\diamond$

Remark. La convergencia uniforme SÍ cumple esto, pero es demasiado fuerte.

Exercise (Guía 1). Sean $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}([a,b])$ tales que $f_n \to f$ uniformemente en $[a,b]$. Entonces, $f \in \mathcal{R}([a,b])$ y $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$.

Example (3).

- $f_n(x) \coloneqq x^n$ en $[0,1]$, $f_n \in \mathcal{R}([a,b])$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \to \chi = f$ puntualmente;
- $f \in \mathcal{R}([a,b])$ y $\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{1}{n+1} \to 0 = \int_0^1$;
- f_n no converge uniformemente a f.

$\diamond$

Resulta que la noción de convergencia "óptima" (la más "débil" que cumple lo que queremos) es la de convergencia en L':

$$f_n \xrightarrow{L'} f \text{ si } \lim_{n\to\infty} \int_a^b |f_n - f| = 0.$$

Esta noción de convergencia viene dada por una "norma":

- $\|f\|_{L'} \coloneqq \int_a^b |f|$ (recordar que $f \in \mathcal{R}([a,b]) \Rightarrow |f| \in \mathcal{R}([a,b])$);
- $d_{L'}(f,g) \coloneqq \|f-g\|_{L'} = \int_a^b |f-g|$.

Remark. $\|\cdot\|_{L'}$ no es una norma porque $\|f\|_{L'} = 0 \not\Rightarrow f = 0$. Decimos que es una *pseudo-norma* y d una *pseudo-métrica*.

Para arreglar esto, dadas $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, decimos que son *equivalentes* y lo notamos $f \sim g$ si $\{x \in [a, b] \ : \ f(x) \neq g(x)\}$ tiene medida nula. Resulta que $\sim$ es una relación de equivalencia y, además,

$$f, g \in \mathcal{R}([a, b]),\ f \sim g \Rightarrow \int_a^b f = \int_a^b g.$$

Sea $\overline{\mathcal{R}}([a, b])$ el conjunto de clases de equivalencia de $\mathcal{R}([a, b])$, y denotamos por $\overline{f}$ a la clase de equivalencia de $f \in \mathcal{R}([a, b])$. Con esto, $\|\overline{f}\|_{L'} := \int_a^b |f| dx$ define una norma en $\overline{\mathcal{R}}([a, b])$ que se llama la **norma** L'.

Remark. Hay un problema: $(\overline{\mathcal{R}}([a, b]), \|\cdot\|_{L'})$ NO ES COMPLETO!

3. **TFC:** Si $f \in \mathcal{R}([a, b])$ es continua en $x_0 \in [a, b]$, entonces $F(x) := \int_a^x f(t)dt$ es derivable en x_0 y $F'(x_0) = f(x_0)$. En particular, F es derivable en x y $F'(x) = f(x)$ para todo x salvo un conjunto de medida nula.

1.4.2 Clase 5 (18/08)

Teorema Fundamental del Cálculo: Si $f \in \mathcal{R}([a, b])$ es continua en $x_0 \in [a, b]$, entonces $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por $F(x) := \int_a^x f(t)dt$ es derivable en $x = x_0$ y vale $F'(x_0) = f(x_0)$. En particular, $F'(x) = f(x)$ salvo quizás por un conjunto de $x \in [a, b]$ de medida nula. O sea, podemos integrar y luego derivar y esto es "casi" como no hacer nada. Pero, tenemos problemas:

1. **Este "casi" no puede removerse**

> **Theorem 1.19** (Hankel, 1871). Dado $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, existe $f \in \mathcal{R}([a, b])$ tal que $F(x) := \int_a^x f(t)dt$ no es derivable para ningún x en un subconjunto denso en $[a, b]$ (y, en particular, infinito).

2. **A veces no podemos componer en el orden inverso**

> **Theorem 1.20** (Volterra, 1881). Dado $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, existe $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivable en $[a, b]$, tal que f' es acotada en $[a, b]$ pero $f' \notin \mathcal{R}([a, b])$.

Extendiendo la integral de Riemann

Sean $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada y $\Pi = \{x_0, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$. Definimos:

$$\begin{aligned}
\Phi_{f,\Pi}(x) &:= m_{I_1}\chi_{[x_0,x_i]}(x) + \sum_{i=2}^{n} m_{I_i}\chi_{(x_{i-1},x_i]}(x), \quad m_{I_i} = \inf_{t \in I_i} f(t) \\
&= m_{I_1}\chi_{\{x_0\}}(x) + \sum_{i=1}^{n} m_{I_i}\chi_{(x_{i-1},x_i]}(x) \\
\psi_{f,\Pi} &:= M_{I_1}\chi_{\{x_0\}}(x) + \sum_{i=1}^{n} M_{I_i}\chi_{(x_{i-1},x_i]}(x), \quad M_{I_i} = \sup_{t \in I_i} f(t).
\end{aligned}$$

Observemos que $\Phi_{f,\Pi}(x) \leq f(x) \leq \psi_{f,\Pi}(x) \quad \forall x \in [a, b]$. Además,

$$\int_a^b \Phi_{f,\Pi}(x)dx = \underline{S}(f, \Pi) \int_a^b \psi_{f,\Pi}(x)dx = \overline{S}(f, \Pi).$$

En particular, si f es Riemann integrable,

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx &= \inf\left\{\int_a^b \psi_{f,\Pi} \ : \ \Pi \text{ partición}\right\} \\
= \underline{\int_a^b} f(x)dx &= \sup\left\{\int_a^b \Phi_{f,\Pi} \ : \ \Pi \text{ partición}\right\}.
\end{aligned}
$$

Definition 1.21 (función escalonada). Una función $\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ se dice escalonada si existen $\Pi = \{x_0, \dots, x_n\}$ partición de $[a,b]$ y $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$\Phi|_{(x_{i-1},x_i)} \equiv c_i \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Notemos que podemos escribir a cualquier función Φ escalonada como

$$
\begin{aligned}
\Phi(x) \coloneqq \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \chi_{(x_{i-1},x_i}(x) + \sum_{i=0}^{n} \Phi(x_i) \cdot \chi_{\{x_i\}}(x) \\
= \sum_{i=1}^{k} c_j \cdot \chi_{A_j}(x)..
\end{aligned}
$$

donde los A_j son intervalos disjuntos tales que $\bigcup_{j=1}^{k} A_j = [a,b]$ (se pone una "D" dentro de la "U" de unión para denotar que estamos haciendo una unión disjunta).

Si tomamos Φ de la forma $\Phi = \sum_{j=1}^{k} c_j \cdot \chi_{A_j}$ con $(A_j)_{j=1,\dots,k}$ disjuntos, $\bigcup_{j=1}^{k} A_j = [a,b]$ (la U tiene la D en medio) pero A_j no son necesariamente intervalos, diremos que Φ es una función escalonada generalizada. Como para funciones escalonadas "normales", tenemos

$$\int_a^b \Phi(x)dx = \sum_{j=1}^{k} c_j \cdot |A_j| \left(= \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot |I_i| \right)$$

$\bigcup\!\!\!\!\!\!D$

La función longitud Sea $\mathcal{I}$ la colección de los intervalos en $\mathbb{R}$. Definimos la función longitud $\lambda : \mathcal{I} \to [0, \infty]$ como $\lambda(I) \coloneqq |I|$.

Propiedades:

1. $\lambda(\varnothing) = 0$;
2. $I_1, I_2 \in \mathcal{I},\ I_1 \subseteq I_2 \Rightarrow \lambda(I_1) \leq \lambda(I_2)$(Monotonía de λ);
3. (Aditividad finita de λ) Si $I \in \mathcal{I}$ es tal que $I = \bigcup_{i=1}^{n} J_i$ (la union tiene la D en medio) con $J_i \in \mathcal{I},\ \forall i = 1, \dots, n,\ J_i \cap J_j = \varnothing$ sin $i \neq j$, entonces

$$\lambda(I) = \sum_{i=1}^{n} \lambda(J_i)$$

4. (r-aditividad de λ) Si $I \in \mathcal{I}$ es tal que $I = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$, con $(I_i)_i \in \mathbb{N} \subseteq \mathcal{I}$ disjuntos, entonces
$$\lambda(I) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(I_i)$$

5. (r-subaditividad de λ) Si $I \in \mathcal{I}$ verifica $I \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i,\ (I_1)_{i\in\mathbb{N}})$ intervalos (no necesariamente disjuntos), entonces $\lambda(I) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(I_i)$

6. $\lambda(I + x) = \lambda(I),\ \forall x \in \mathbb{R},\ I + x \coloneqq \{a + x \ : \ a \in I\}$