Topología

Basado en las clases impartidas por Eduardo Reyes en el segundo semeste del 2025

Contents

Chapter 1

Munkres

Clase 1

4 de Agosto

1.1 Espacios Topológicos (12)

Definición 1.1 (sistema de vecindades). X conjunto no vacío. Si $x \in X$, consideramos $\mathcal{V}_x \subset 2^X$, tal que:

1. $\forall x \in X$, $\forall V \in \mathcal{V}_x$, $x \in \mathcal{V}_x$;
2. $\forall x \in X$, $\forall V \in \mathcal{V}$, si $V' \supset V \Rightarrow V' \in \mathcal{V}_x$;
3. Si $V_1, V_2 \in \mathcal{V} \Rightarrow V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}_x$.

El sistema de vecindades es $\{\mathcal{V}_x\}_{x\in X}$. Si $V \in \mathcal{V}_x$, V es vecindad de x.

Ejemplo. 1. (X, d) espacio métrico $\mathcal{V}_x \coloneqq \{V \subset X | \exists \varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subset V\}$. Verificamos que sea sistema de vecindad.

> **Demostración.** Verificamos $1), 2)$ y $3)$:
>
> 1) $x \in X$, $V \in \mathcal{V}_x \Rightarrow x \in B_\varepsilon(x) \subset V$;
> 2) X $x \in X$, $V \in \mathcal{V}_x$, $V' \supset V \Rightarrow x \in B_\varepsilon(x) \subset V \subset V' \Rightarrow V' \in \mathcal{V}_x$;
> 3) $$\begin{aligned} x \in V_1 \cap V_2, V_1, V_2 \in \mathcal{V}_x &\Rightarrow B_{\varepsilon_1}(x) \subset V_1, B_{\varepsilon_2}(x) \subset V_2 \\ &\Rightarrow B_{\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}}(x) \subset V_1 \cap V_2 \\ &\Rightarrow V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}_x. \end{aligned}$$
>
> □

2. X arbitrario, $\forall x \in X$, sea $\mathcal{V}_x = \{X\}$ es sistema de vecindades (vacuidad).
3. X arbitrario $\mathcal{V}_x = \{V \subset X \mid x \in V$ y $X \setminus V$ sea finito$\}$ (queda como ejercicio chequear que esto define un sistema de vecindades).

Definición 1.2 (topología desde sistema de vecindades)**.** Tenemos X, $\{\mathcal{V}_x\}_{x\in X}$ sistema de vecindades. Definimos, $\tau = \{U \subset X \mid x \in U \Rightarrow U \in \mathcal{V}_x\}$.

Lema 1.3. τ cumple lo siguiente:

1. $\varnothing, X \in \tau$;
2. $U_\alpha \in \tau, \alpha \in A \Rightarrow \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha \in \tau$;
3. $U_1, \ldots, U_n \in \tau \Rightarrow U_1 \cap \cdots \cap U_n \in \tau$.

τ es la topología inducida por $\{\mathcal{V}_x\}$. Elementos de τ (subconjuntos de X) se llamarán abiertos.

Clase 2

6 de Agosto

1.2 Topología, Base (12, 13)

Demostración. (último lema de la clase anterior)

1. $\varnothing \in \tau$ por vacuidad.

$$\begin{aligned} X \in \tau : x \in X \Rightarrow \exists V \in \mathcal{V}_x \quad (1) x \in V; (2) x \in V \subset X \\ \Rightarrow X \in \mathcal{V}_x. \quad \forall x : X \in \tau \end{aligned}$$

2. Tomar $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$, $U_\alpha \in \tau$, $\mathcal{U} = \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$. Si $x \in \mathcal{U} \Rightarrow x \in U_\alpha \in \mathcal{V}_x$ para algún α. Como $U_\alpha \in \tau \Rightarrow U_\alpha \in \mathcal{V}_x$. Luego, si $x \in U_\alpha \subset \mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{U} \in \mathcal{V}_x$, $\forall x \in \mathcal{U}$. Por lo tanto, $\mathcal{U} \in \tau$.
3. Tomamos $U_1, \ldots, U_n \in \tau$, $\mathcal{U} = U_1 \cap \cdots \cap U_n$ y $x \in \mathcal{U}$. Luego, $x \in U_i \quad \forall i$. Como $U_i \in \tau \Rightarrow U_i \in \mathcal{V}_x, \quad \forall i$. Por inducción (con las intersecciones), podemos afirmar que $\mathcal{U} \in \mathcal{V}_x$, $\forall x \in \mathcal{U}$. Por lo tanto, $\mathcal{U} \in \tau$.

□

1.2.1 Topología

Definición 1.4 (topología)**.** X conjunto no vacío, $\tau \subset 2^X$ es una topología si cumple:

1. $\varnothing, X \in \tau$;
2. $U_\alpha \in \tau,\ \alpha \in A \Rightarrow \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha \in \tau$;
3. $U_1, \ldots, U_n \in \tau \Rightarrow U_1 \cap \cdots \cap U_n \in \tau$.

Observación. Se utilizará la siguiente notación:

- (X, τ) se llama espacio topológico.

- $U \in \tau \Rightarrow U$ se llama abierto (con respecto a la topología).

Lema 1.5. τ topología en $X \Rightarrow$ Inducida por un único sistema de vecindades.

Demostración. Para $x \in X$, definir $\mathcal{V}_x = \{V \subset X \mid \exists U \in \tau \text{ con } x \in U \subset V\}$. Verificamos que $\{\mathcal{V}_x\}_x$ es sistema de vecindades:

1. La definición implica $V \in \mathcal{V}_x \Rightarrow x \; (\in U \subset) \; \in V$;
2. Si $V \in \mathcal{V}_x$ y $V' \supset V \Rightarrow (V \in \mathcal{V}_x) \; x \in U \subset \; (U \in \tau)$
$$\Rightarrow x \in U \subset V' \Rightarrow V' \in \mathcal{V}_x;$$
3. Tomar $V_1, V_2 \in \mathcal{V}_x \Rightarrow x \in U_1 \subset V_1, \quad x \in U_2 \subset V_2$ con $U_1, U_2 \in \tau$
$$\Rightarrow x \in \underbrace{U_1 \cap U_2}_{\in \tau} \subset V_1 \cap V_2 \Rightarrow V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}_x;$$

(falta demostrar unicidad). □

Ejemplo (de espacios topológicos).

1. (Topología métrica): (X, d) espacio métrico. Abierto es $U \in X$ tal que $\forall x \in U, \exists \varepsilon > 0$ tal que $x \in B_\varepsilon(x) \subset U$.
   (a) $X = \mathbb{R}^n$, $d((x_i), (y_i)) = \sqrt{sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$. Así, se obtiene la topología estándar.
   (b) X arbitrario, d métrica discreta $d(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y. \end{cases}$ Así, se obtiene la topología discreta: $\tau = 2^X$.
2. (Topología indiscreta): X arbitrario, $\tau = \{\varnothing, X\}$;
3. (Topología cofinita): X arbitrario, $\tau_{cof} = \{U \subset X \mid X \setminus U \text{ es finito}\} \cap \{\varnothing\}$ (queda como ejercicio verificar que es topología).

1.2.2 Base de una topología

Una base es un subconjunto "manejable" de τ que la describe completamente!

Definición 1.6 (base). X es conjunto. $\mathcal{B} \subset 2^X$ es base para alguna topología si:

1. $\forall x \in X, \exists B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$ $\left(\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X\right)$.
2. $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}, \forall x \in B_1 \cap B_2, \exists B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Definición 1.7 (topología inducida). La topología inducida por la base $\mathcal{B}$ en X es:

$$\tau = \{U \subset X \mid \forall x \in U, \exists B \in \mathcal{B} \text{ tal que } x \in B \subset U\}.$$

Nota. $\mathcal{B} \subset \tau$.

Lema 1.8. τ, definido arriba, es una topología.

Ejemplo. (X, d) espacio métrico $\Rightarrow \mathcal{B} = \{B_\varepsilon(x) \mid x \in X, \varepsilon > 0\}$ es base de la topología métrica.

Clase 3

8 de Agosto

1.3 Bases, Topología producto (13,15)

Demostración. (lema 1.8)

1. $\varnothing, X \in \tau$: $\varnothing \in \tau$ por vacuidad y $X \in \tau$ por propiedad (1) de $\mathcal{B}$.
2. τ cerrado bajo unión: $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ colección con $U_\alpha \in \tau$, $\mathcal{U} = \bigcup_\alpha U_\alpha$.

$$\begin{aligned} \text{Si } x \in \mathcal{U} &\Rightarrow x \in U_\alpha \text{ para algún } \alpha \\ &\Rightarrow x \in B \subset U_\alpha \text{ para algún } B \in \mathcal{B} \\ &\Rightarrow x \in B \subset \mathcal{U}. \end{aligned}$$

   Por lo tanto, $\mathcal{U} \in \tau$.

3. τ cerrado bajo intersección finita: $U_1, \ldots, U_n \in \tau, \mathcal{U} = U_1 \cap \cdots \cap U_n$. Sea $x \in \mathcal{U} \Rightarrow x \in U_i \; \forall i \; (U_i \in \tau) \Rightarrow x \in B_i \subset U_i \; \forall \, i, B_i \in \mathcal{B}$. Propiedad (2) implica $x \in B \subset B_1 \cap \cdots \cap B_n \subset U_1 \cap \cdots \cap U_n = \mathcal{U}$. Por lo tanto, $\mathcal{U} \in \tau$.

□

Nota. Si B base genera $\tau \Rightarrow B \subset \tau$.

Definición 1.9 (topología generada). τ topología está generada por una base B sin B es base, y τ es topología generada por B.

Utilidad: Dada τ topología a estudiar, queremos encontrar base B que la describa.

Ejemplo. (X, d) espacio métrico, $\mathcal{B} = \{B_\varepsilon(x) \mid \varepsilon > 0, x \in X\}$ es base para la topología métrica.

Demostración. Probamos que B es base.

1. Notar $X = \bigcup_{x \in X} B_1(x)$. Por lo tanto, $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$.

2. $B_1, B_2 \in \mathcal{B}, B_1 = B_{\varepsilon_1}(x_1), B_2 = B_{\varepsilon_2}(x_2)$. Sea $x \in B_1 \cap B_2$. Queremos encontrar $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subset B_1 \cap B_2$. Por desigualdad triangular, tenemos que $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1 - d(x, x_1), \varepsilon_2 - d(x, x_2)\}$ sirve.

$\square$

Nota. 1. Una base no es necesariamente una topología ((1) y (2) pueden fallar).

2. Si B es base y τ topología, $B \subset \tau \not\Rightarrow \tau$ es generada por B.

Ejemplo. Topología del límite inferior en $\mathbb{R}$: $B_l = \{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ (se deja como ejercicio demostrar que B_l es base).

Definición 1.10 (topología del límite inferior). B_l genera la topología del límite inferior τ_l.

Observación.

1. τ_l no es τ_{std} ($[a, b)$ abierto en τ_l pero no en τ_{std}

2. $\tau_{std} \subset \tau_l$ (la demostración de esto queda como ejercicio).

3. (Intuición): Si $0 \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$ (para τ_{std}, y cerda de 0 si $|y| < \varepsilon$). Para τ_l, y cerca de 0, si $y \in [0, \varepsilon)$ ($0 \leq y < \varepsilon$ para $\varepsilon > 0$ chiquito).

1.3.1 Comparación de topologías

Definición 1.11 (topologías finas). τ, τ' topologías en X, decimos que τ' es más fina que τ si $\tau' \supset \tau$. Decimos que τ y τ' son comparables si $\tau' \supset \tau$ o $\tau \supset \tau'$.

Ejemplo. τ_l es más fina que τ'.

Ejemplo. $\forall \tau$ topología en X, $\{\varnothing, X\} \subset \tau \subset 2^X$. Donde $\{\varnothing, X\}$ es llamada la topología indiscreta (todos cercanos entre sí) y 2^X la topología discreta (todos lejanos entre sí).

En conclusión, si τ' es más fina que τ, los puntos están más lejanos respecto a τ' que a τ

Clase 4

11 de Agosto

1.4 Topología producto (15) e inducida (16)

Lema 1.12. $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ bases en X que generan la topología τ, τ' respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned} \tau' \supset \tau &\Leftrightarrow \text{(todo elemento de } \mathcal{B} \text{ está en } \tau'); \\ &\Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{B}, B \text{ es unión de elementos de } \mathcal{B}'; \\ &\Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{B}, \forall x \in B, \exists B' \in \mathcal{B}' \text{ tal que } x \in B' \subset B. \end{aligned}$$

Lema 1.13. $\mathcal{B}_{X\times Y} := \{U \times U' \mid U$ abierto en X, U' abierto en $Y\}$ es una base para una topología.

Definición 1.14 (topología producto)**.** Topología producto en $X \times Y$ es la generada por $\mathcal{B}_{X\times Y}$.

Demostración. (lemma 1.13.)

1. Como $X \times Y \in \mathcal{B}_{X\times Y} \Rightarrow \bigcup_{B\in\mathcal{B}_{X\times Y}} B = X \times Y$.
2. Tomar $B_1 = U_1 \times U_1' \in \mathcal{B}_{X\times Y}, B_2 = U_2 \times U_2' \in \mathcal{B}_{X\times Y}, (x, y) \in B_1 \cap B_2$ (U_1, U_2 abiertos en X y U_1', U_2' abiertos en Y). Notar que:

$$B_1 \cap B_2 = (U_1 \times U_1') \cap (U_2 \times U_2') = \underbrace{(U_1 \cap U_2)}_{\text{abto. en } X} \times \underbrace{(U_1' \cap U_2')}_{\text{abto. en } Y} \in \mathcal{B}_{X\times Y}.$$

□

Nota. Misma demostración (salvo modificaciones esperables) implica que si $\mathcal{B}_X$ es base de X, $\mathcal{B}_Y$ base de Y, $\mathcal{B}'_{X\times Y} := \{B \times B' \mid B \in \mathcal{B}_X, B' \in \mathcal{B}_Y\}$ es base y genera la misma topología generada por $\mathcal{B}_{X\times Y}$.

Ejemplo (importante)**.** $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Propiedad: topología estándar de $\mathbb{R}^2$ (métrica euclidiana) es igual a la topología producto en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (cada uno con su topología estándar).

- Topología estándar en $\mathbb{R}^2$: generada por base $\mathcal{B} = \{B_\varepsilon(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2, \varepsilon > 0\}$.
- Topología producto en $\mathbb{R}^2$: generada por base $\mathcal{B}' = \{(a, b) \times (c, d) \mid a < b, c < d\}$.

Ejercicio. Verificar para $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.15 (topología inducida)**.** $\tau|_Y := \{Y \cap U \mid U \in \tau\}$ es topología en Y. La llamamos topología en Y inducida por X.

Demostración. (topología inducida es topología)

1. $\varnothing = \varnothing \cap Y, Y = X \cap Y$.
2. Si $U_\alpha \in \tau|_Y, \alpha \in A \Rightarrow U_\alpha = U'_\alpha \cap Y$ con $U'_\alpha \in \tau \Rightarrow \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha = \bigcup_{\alpha\in A}(U_{\alpha\in A} \cap Y) = \left[\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha\right] \times Y \in \tau|_Y$.
3. $U_1, \ldots, U_n \in \tau|_Y, U_i = U_i' \cap Y \Rightarrow U_1 \cap \cdots \cap U_n = (U_1' \cap Y) \cap \cdots \cap (U_n' \cap Y) = (U_1' \cap \cdots \cap U_n') \cap Y \in \tau|_Y$.

□

Lema 1.16. $\mathcal{B}|_Y \coloneqq \{Y \cap B \mid B \in \mathcal{B}\}$ es base para la topología en Y inducida por X.

Observación. Cuidado: La noción de abierto depende de la topología a especificar.

Ejemplo. En $X = \mathbb{R}, Y = [0,1] \cup (2,3) \cup \{4\}$. Notar que:

- Y es abierto en Y, pero no es abierto en X.
- $[0,1]$ también abierto en $Y : [0,1] = Y \cap (-1,2)$.
- $\{4\}$ también abierto en $Y : \{4\} = Y \cap (3,5)$.

Nota. Si $U \subset Y$ es abierto en $X \Rightarrow$ abierto en Y.

Lema 1.17. $Y \subset X, \tau|_Y \subset \tau \Leftrightarrow Y$ es abierto en X.

Proposición 1.18. X, Y espacios topológicos, $A \subset X, B \subset Y$.

En $A \times B \to$ topología inducida desde $X \times Y$ (con topología producto)
$\to$ topología producto desde A y B (con topología inducida por X, Y respectivamente).

Estas topologías son la misma.

Demostración. Elemento de topología primera: $U = U' \cap A \times B$
Elemento de topología segunda: U es unión de productos $V \times V'$ con V abierto en A, V' abierto en B. Notar que $V \times V' = (W \cap A) \times (W' \cap B) = (W \times W') \cap A \times B$. $\square$

Clase 5

13 de Agosto

1.5 Cerrados, clausura, puntos límites (17)

Definición 1.19 (conjunto cerrado)**.** X espacio topológico, $C \subset X$ es cerrado si $X \backslash C$ es abierto.

Lema 1.20.

1. $X, \varnothing$ son cerrados;
2. Si $C_\alpha \subset X$ cerrados, $\alpha \in A \Rightarrow \bigcap_\alpha C_\alpha$ es cerrado;
3. Si $C_1, \ldots, C_n$ cerrados, entonces $C_1 \cup \cdots \cup C_n$ es cerrado.

Demostración.

1. $X = X \setminus \varnothing,\ \varnothing = X \setminus X$;
2. $C_\alpha = \bigcap_{\alpha\in A} C_\alpha \Rightarrow X \setminus C = X \setminus \bigcap_{\alpha\in A} C_\alpha = \underbrace{\bigcup_{\alpha\in A} (\overbrace{X \setminus C_\alpha}^{\text{abto}})}_{\text{abto}}$;
3. $C = C_1\cup\cdots\cup C_n \Rightarrow X\setminus C = X\setminus(C_1\cup\cdots\cup C_n) = \underbrace{(\overbrace{X \setminus C_1}^{\text{abto}}) \cap \cdots \cap (\overbrace{X \setminus C_n}^{\text{abto}})}_{\text{abto}}$.

□

Ejemplo.

1. $X = \mathbb{R}$, $[a, b]$ es cerrado ($\mathbb{R} \setminus [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$);
2. (X, d) espacio métrico (+ topología métrica) $\Rightarrow \overline{B_\varepsilon}(x)$ es cerrado. Luego, $X \setminus \overline{B_\varepsilon}(x) = \bigcup_{y\in X\setminus \overline{B_\varepsilon}(x)} B_{d(x,y)-\varepsilon}(y)$ (abierto en topología métrica);
3. X con la topología discreta $\Rightarrow$ todo subconjunto de X es abierto y cerrado!

Definición 1.21 (cerrado topología inducida). X espacio topológico, $Y \subset X$ (con la topología inducida), $C \subset Y$ es cerrado en Y si es cerrado en la topología inducida.

Lema 1.22. *C es cerrado en Y si y solo si $C = C' \cap Y$ con C' cerrado en X.*

Demostración. $C \subset Y$ es cerrado en $Y \Leftrightarrow Y\setminus C$ es abierto en Y
$\Leftrightarrow Y\setminus C = U \cap C$ con $U \subset X$ abierto
$\Leftrightarrow C = (X\setminus U) \cap Y = C' \cap Y$, con $C' = X\setminus U$ cerrado.

□

Definición 1.23 (clausura e interior). X espacio topológico, $A \subset X$:

1. El interior de A es $\mathring{A}$ = unión de todos los abiertos contenidos en A;
2. La clausura de A es $\overline{A}$ = intersección de todos los cerrados que contienen A.

Observación.

1. $\mathring{A}$ es abierto, $\overline{A}$ es cerrada, $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$;
2. A es abierto si y solo si $\mathring{A} = A$. A es cerrado si y solo si $\overline{A} = A$;

3. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$;
4. El interior $\mathring{A}$ es el abierto mas grande contenido en A y la clausura $\overline{A}$ es el cerrado mas pequeño que contiene a A.

Proposición 1.24. X espacio topológico, $A \subset X$ cualquiera, $x \in X$.

$$\begin{aligned} x \in \overline{A} &\Leftrightarrow \forall U \text{ abierto conteniendo a } X, \text{ se tiene } A \cap U \neq \varnothing \qquad (*) \\ &\Leftrightarrow \text{ toda vecindad de } x \text{ interseca a } A \\ &\Leftrightarrow A \text{ contiene puntos arbitrariamente cercanos a } X \text{ (según la topología).} \end{aligned}$$

Corolario 1.25. $C \subset X$ es cerrado si y solo si $\forall x \in X$, si toda vecindad de x contiene un punto de C, entonces $x \in X$.

Demostración. (proposición 1.24)
$\boxed{\Leftarrow}$ Suponer que $x \notin \overline{A}$. Entonces $\exists C$ cerrado con $A \subset C$ y $x \notin C$. Luego, tomar $U := C \setminus C$ abierto. Entonces, $A \cap U = \varnothing$ y $x \in U$. Es decir, negamos $(*)$.
$\boxed{\Rightarrow}$ Negamos $(*) \Rightarrow \exists U$ abierto con $x \in U$ y $U \cap A = \varnothing$. Luego, $C = X \setminus U$ cerrado con $A \subset C$ y $x \notin C$. Entonces, $x \notin A$. □

Definición 1.26 (puntos de acumulación)**.** $A \subset X$. Decimos que $x \in X$ es punto límite/de acumulación de A si $\forall\, U$ abierto conteniendo a x, se tiene que $U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \varnothing$. Escribimos $A' := \{\text{puntos límite de } A\}$.

Ejemplo. En $\mathbb{R}$, tenemos lo siguiente:

A	$\mathring{A}$	$\overline{A}$	A'
(a,b)	(a,b)	$[a,b]$	$[a,b]$
$[a,b)$	(a,b)	$[a,b]$	$[a,b]$
$[a,b]$	(a,b)	$[a,b]$	$[a,b]$
$[0,1] \cup \{2\}$	$(0,1)$	$[0,1] \cup \{2\}$	$(0,1)$

Notar que 2 no es punto de acumulación.

Clase 6

18 de Agosto

1.6 Espacios Hausdorff, convergencia (17)

Observación. $x \in A' \Leftrightarrow x \in \overline{A \setminus \{x\}}$.

Lema 1.27. $\forall\, A \subset X$, $\overline{A} = A \cup A'$.

Demostración. $\boxed{\supset}$ Notar que $A \subset \overline{A}$. Si $x \in A' \Rightarrow x \in \overline{A \setminus \{x\}} \subset \overline{A}$ $(*)$. Notar que $(*) A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$. Por lo tanto $A' \subset \overline{A}$. Entonces, $A \cup A' \subset \overline{A}$.

$\boxed{\subset}$ $(\overline{A} \subset A \cup A'$, equiv: $\overline{A} \setminus A \subset A')$ Si $x \in \overline{A} \setminus A$. Entonces, $x \notin A$ y $\forall\, U \ni x$ abierto se tiene $A \cap U \neq \varnothing$. Como $x \notin A \Rightarrow (A \setminus \{x\}) \cap U \neq \varnothing$. Entonces, $x \in A'$. □

Observación. A' no es necesariamente cerrado.

Ejemplo. $X = \{a, b\}$; $\tau = \{\varnothing, X\}$ $(a, b$ indistinguibles desde el punto de vista de $\tau)$. $A = \{b\} \Rightarrow A' = \{b\}$ (no es cerrado). $a \notin A' \Leftrightarrow a \notin \overline{A \setminus \{a\}} = \overline{\varnothing} = \varnothing$. $b \in A \Leftrightarrow b \in \overline{A \setminus \{b\}} = \overline{\{a\}} = \{a, b\}$.

Problemas:

- Subconjuntos finitos no tienen topología discreta;
- Subconjuntos finitos no son cerrados.

Lema 1.28. Si X es espacio topológico arbitrario. Son equivalentes:

1. Todos los subconjuntos finitos de X tienen la topología discreta.
2. Todos los subconjuntos finitos de X son cerrados.

Definición 1.29 (espacios T_1 o Frechet)**.** Un espacio topológico X es T_1 (cumple el axioma T_1) si sus subconjuntos finitos son cerrados.

Ejemplo. X con la topología indiscreta NO es T_1 si $\#X \geq 2$.

Ejemplo. X con topología cofinita es T_1. En la topología

$$\{\text{subconjuntos cerrados}\} = \{\text{conjuntos finitos}\}$$

Lema 1.30. X es T_1, $A \subset X \Rightarrow A'$ es cerrado.

Demostración. (Queremos $\overline{A'} = A'$, i.e. $\overline{A'} \setminus A' = \varnothing$) Suponer que $x \in \overline{A'}$, $x \notin A'$. Si $x \notin A'$, entonces $\exists\, U$ abierto con $x \in U$ y $U \cap A \subset \{x\}$. Si $x \in \overline{A'}$, entonces $A' \cap U \neq \varnothing$. Luego, $\exists\, y \in U \cap A'$ $(y \neq x)$. Como X es T_1, entonces $\{x\}$ es cerrado. Luego, $X \setminus \{x\}$ es abierto, y con ello tenemos que $U \setminus \{x\}$ es abierto. Si $V = U \setminus \{x\}$ abierto que contiene a y $(y \in A')$, entonces V contiene puntos de A, distintos de y. Luego, $\exists\, z \in A \cap V$. Así, $z \in A \cap U$ y $z \neq x$. Contradicción! ※ □

Definición 1.31 (espacios T_2 o Haussdorff)**.** Un espacio topológico X es T_2 (o Hausdorff), si $\forall\, x \neq y$ en X existen $U, U' \subset X$ abiertos <u>disjuntos</u> con $x \in U$, $y \in U'$.

Ejemplo. X con la topología cofinita, con $\#X = \infty$ es T_1 pero no es Hausdorff. Veamos que esto es así. Si $x \neq y \in X$, $x \in U$, $y \in U'$ abiertos $(X \setminus U,\ X \setminus U'$ finitos), entonces $(X \setminus U) \cup (X \setminus U')$ finito. Luego, $X \setminus (U \cap U')$ finito. Así, $U \cap U'$ infinito, por lo que $U \cap U'$ no puede ser disjunto.

Lema 1.32. X Hausdorff $\Rightarrow X$ es T_1.

kk

Demostración. (X es $T_1 \Leftrightarrow$ subconjuntos finitos son cerrados $\Leftrightarrow$ singlietons son cerrados) $\to$ (veremos el último si y solo si) Sea $x \in X$, queremos que $X \setminus \{x\}$ sea abierto. Si $y \neq x$, dado que X es Hausdorff, $\exists\ U_y, U'_y$ abiertos disjuntos con $y \in U_y,\ x \in U'_y$. Luego, $x \notin U_y$. Por lo tanto, $X \setminus \{x\} = \bigcup_{y \neq x} U_y$ es abierto. □

Ejemplo. (X, d) espacio métrico, X es Hausdorff con la topología métrica.

Corolario 1.33 (secreto)**.** Existen topologías que no vienen de métricas.

Demostración (del ejemplo)**.** Para la topología métrica, bolas abiertas son abiertos. Si $x \neq y$, entonces $U = B_{\frac{d(x,y)}{2}}(x),\ U' = B_{\frac{d(x,y)}{2}}(y)$. □

En X con la topología cofinita, $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ infinito contable. Definimos $y_n = x_n$ con $n \geq 1$ (cada elemento de X aparece exactamente una vez). Cada abierto $\varnothing \neq U \subset X$ contiene a $y_n\ \forall n \geq \mathbb{N}$ (N depende de U). (próxima clase: $y_n \to x\ \forall x \in X$).

Clase 7

20 de Agosto

Observación. $\mathcal{B} \subset \tau \Rightarrow$ quizás $\tau_{\mathcal{B}} \neq \tau$. Solo es cierto $\tau_{\mathcal{B}} \subset \tau$.

Observación. Existe una noción más débil (T_0): $\forall\ x \neq y \in X,\ \exists\ U$ abierto tal que, o bien $x \in U,\ y \notin U$ o $y \in U,\ x \notin U$. Se puede demostrar que $T_1 \Rightarrow T_0$. Además, $\exists\ X,\ T_0$, no T_1, tal que 1.30 se cumple.

Definición 1.34 (convergencia de suceciones)**.** X espacio topológico, $(X_n)_n$ sucesión en $X,\ x \in X$. Decimos que x_n converge a x (con respecto a la topología) $[x_n \to x]$ si: $\forall\ U$ abierto con $x \in U$ existe N tal que $n \geq N$ implica $x_n \in U$.

Nota. Si $\mathcal{B}$ base para topología en X, $x_n \to x$ equivale a: $\forall B \in \mathcal{B}$ con $x \in B$, $\exists N$ tal que $n \geq N$ se tiene $x_n \in B$.

Ejemplo. (X, d) espacio métrico. $x_n \to x$ (topología métrica) $\longleftrightarrow x_n \to x$ (análisis real): $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N$ tal que $n \geq N \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$ ($x_n \in B_\varepsilon(x)$).

Ejemplo. X con la topología indiscreta ($\tau = \{\varnothing, X\}$). Entonces, para cualquier suceción $(x_n)_n$, para cualquier $x \in X,\ x_n \to x$ (solo se debe verificar $U = X$).

Ejemplo. X con la topología discreta, entonces $(x_n \to x) \longleftrightarrow x_n = x$ para todo $n \gg 0$ [Caso $U = \{x\}$].

Ejemplo. X infinito contable con topología cofinita [T_1, no T_2], $X = \{a_1, a_2, \dots\}$. Si $x_n = a_n \Rightarrow x_n \to x$ para todo $x \in X$ [Si U abierto, $x \in U \not\Rightarrow U = X \setminus \{a_{i_1}, \dots, a_{i_k}\} (i_1 < \cdots < i_k) \Rightarrow n \geq N = i_k + 1$ implica $x_n \to x$].

Lema 1.35. Si T_2, $(x_n)_n$ sucesión con $x_n \to x$, $x_n \to y$, entonces $x = y$.

Demostración. Si $x \neq y$, dado que es T_2, entonces existen U, U' abiertos disjuntos con $x \in U$, $y \in U'$. Si $x_n \to x$, entonces existe N_1 tal que $n \geq N_1$ implica $x_n \in U$. Si $x_n \to y$, entonces existe N_2 tal que $n \geq N_2$ implica $x_n \in U$. Por lo tanto $n \geq N_1$ y $n \geq N_2$, entonces $x_n \in U \cap U'$. Contradicción! ※ $\square$

Continuidad: $f : X \to Y$, X, Y espacios topológicos.

- [No Def]: Si $x_n \to x$ en $X \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$ en Y.

Definición 1.36 (continuidad)**.** f es continua si $\forall\ U \subset Y$ abierto, se tiene $f^{-1}(U)$ es abierto en X.

Ejemplo. Si (X, d), (Y, d') son espacios métricos, entonces $f : X \to Y$ continua (respecto a topologías métricas) $\longleftrightarrow f(\varepsilon - \delta)$ continua: $\forall\, x \in X$, $\forall\, \varepsilon > 0$; $\exists\, \delta > 0$ tal que $d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Observación. $d(x, y) < \delta$ es lo mismo que pedir $y \in B_\delta(x)$. Similarmente $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$ es lo mismo que $\delta(y) \in B_\varepsilon(f(x))$, $y \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(x))$.

Lema 1.37. $X \xrightarrow{f} Y$, $\mathcal{B}'$ base de Y, $\mathcal{B}$ base de X. Entonces

$$\begin{aligned} f \text{ continua} &\Leftrightarrow [\text{Si } B' \in \mathcal{B}' \Rightarrow f^{-1}(B') \text{ es abierto} \\ &\Leftrightarrow \text{Si } B' \in \mathcal{B}',\ \forall\, y \in f^{-1}(B'),\ \text{existe } B \in \mathcal{B} \text{ con } y \in B \subset f^{-1}(B'). \end{aligned}$$

Lema 1.38 (continuidad secuencial)**.** Si $f : X \to Y$ continua (hay top. dadas). Entonces, si $x_n \to x$ en $X \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$ en Y.

Demostración. Suponer $x_n \to x$ en X. Queremos que $f(x_n) \to f(x)$ en Y. Tomar $U \subset Y$ abierto con $f(x) \in U$. Luego, f continua implica que $f^{-1}(U)$ abierto con $x \in f^{-1}(U)$. Si $x_n \to x$, entonces existe N tal que $n \geq N$ implica $x_n \in f^{-1}(U)$. Entonces, existe N tal que $n \geq N$ implica $f(x_n) \in U$. Por lo tanto, $f(x_n) \to f(x)$. $\square$

Clase 8

22 de Agosto

1.7 Continuidad, homeomorfismos (18)

1.7.1 Observaciones clase pasada

Observación.

- $f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in I} f^{-1}(A_\alpha)$;

- $f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in I} f^{-1}(A_\alpha)$.

Estas identidades no son necesariamente ciertas si se ocupa f en vez de f^{-1}.
Observación (Tarea 2)**.** Coninuidad secuencial $\not\Rightarrow$ Continuidad.

1.7.2 Clase 8

Lema 1.39. $f : X \to Y,\ X,\ Y$ espacios topológicos.

$$f \text{ continua } \Leftrightarrow \forall C \subset Y \text{ cerrado, se tiene } f^{-1}(C) \text{ cerrado en } X$$

Demostración. $\boxed{\Rightarrow}$ Suponer que f continua. Tomamos $C \subset Y$ cerrado [queremos $X \setminus f^{-1}(C)$ abierto]. Notar que

$$\begin{aligned} X \setminus f^{-1}(C) = \{x \in X \ : \ x \notin f^{-1}(C)\} &= \{x \in X \ : \ f(x) \in Y \setminus C\} \\ &= \underbrace{f^{-1}\ \underbrace{(Y \setminus C)}_{\text{abierto en } X}}_{\text{abierto en } X \text{ pq } f \text{ continua}} \quad . \end{aligned}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Análogo. $\square$

Ejemplo. Si $f : X \to Y,\ X,\ Y$ espacios topológicos

1. Si Y con topología indiscreta $(\{\varnothing, Y\}) \Rightarrow f$ automáticamente continua. Notar que $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing,\ f^{-1}(Y) = X$.

2. Si X tiene topología discreta $(2^X) \Rightarrow f$ continua. Notar que $f^{-1}(U)$ es abierto para todo subconjunto $U \subset Y$.

3. Si $A \subset X$ y f continua. Entonces $f|_A : A \to Y$ también es continua [A co top. inducida]. Notar que $U \subset Y$ abierto, entonces

$$\begin{aligned} (f|_A)^{-1}(U) &= \{x \in A \mid f|_A(x) = f(x) \in U\} \\ &= \underbrace{A \cap \underbrace{f^{-1}(U)}_{\text{abierto en } X}}_{\text{abierto en} A} \end{aligned}$$

4. Si X_1, X_2 espacios topológicos, entonces $\pi_1 : X_1 \times X_2 \to X_1$ es continua. Notar que si $U \subset X_1$ abierto, entonces $\pi_1^{-1}(U) = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in U\} = U \times X_2$ abierto en $X_1 \times X_2$.

Propiedades. X, Y, Z espacios topológicos

1. Fijar $y_0 \in Y$. $f : X \to Y,\ f(x) = y_0\ \forall x$, es continua. Notar que $U \subset Y$ abierto, entonces

$$f^{-1}(U) = \begin{cases} X \text{ si } y_0 \in U \\ \varnothing \text{ si } y_0 \notin U \end{cases}$$

2. Si $f : X \to Y,\ g : Y \to Z$ continuas, entonces $g \circ f : X \to Z$ continuas. Notar que $V \subset Z$ abierto, entonces $(g \circ f)^{-1}(V) = \underbrace{f^{-1}\ \underbrace{(g^{-1}(V))}_{\text{abierto en } Y}}_{\text{abierto en } X}$

3. Si $f : X \to Y$ continua y $f(X) \subset Z \subset Y$, entonces $f : X \to Z$ continua. Notar que $U \subset Z$ abierto en Z, entonces $U = Z \cap V,\ V \subset Y$ abierto. Dado que $f(X) \subset Z$, tenemos que $f^{-1}(U) = f^{-1}(V)$ abierto en X [$f : X \to Y$ continua]. Luego, $f^{-1}(U)$ abierto en X.

4. (Continuidad es propiedad local): Si $f : X \to Y,\ (B_\alpha)_{\alpha \in I}$ abiertos en X tal que $\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \overset{(*)}{=} X$. Entonces

$$f \text{ continua} \Leftrightarrow f|_{B_\alpha} \to Y \text{ es continua para todo } \alpha$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Tomamos $U \subset Y$ abierto (queremos $f^{-1}(U)$ abierto en X). Usar $f^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in I} (f|_{B_\alpha})^{-1}(U)$. Vamos a demostrar esta igualdad:

$\boxed{\subset}$ $x \in f^{-1}(U)$ y $x \in B_\alpha$, entonces $x \in (f|_{B_\alpha})^{-1}(U)$.

$\boxed{\supset}$ Hacer!

Luego, tenemos que $(f|_{B_\alpha})^{-1}(U)$ es abierto en B_α y que B_α es abierto, entonces $(f|_{B_\alpha})^{-1}(U)$ abierto en X $\forall \alpha$. Por $(*)$, tenemos que $f^{-1}(U)$ es abierto en X.

Nota. Si se reemplaza "B_α abiertos" por "B_α cerrados", 4. igual se cumple $+$ I finito (cjto. de indices de la unión) [Lema del pegado en Munkres]

Definición 1.40 (homeomorfismo)**.** X, Y espacios topológicos. $f : X \to Y$ es homeomorfismo si

1. f es continua;
2. f es biyectiva (existe $f^{-1} : Y \to X$);
3. f^{-1} es continua.

Observación. Propiedades topológicas (como T_1, Hausdorff, etc...) son invariantes por homeomorfismos.

Clase 9

25 de Agosto

1.8 Homemomorfismos, Productos infinitos (18, 19)

Ejemplo.

1. $f : (-1, 1) \to (-\infty, \infty),\ f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ es homeomorfismo. La inversa es $g(y) = \frac{2y}{1+(1+4y^2)^{1/2}}$. Notar que f y g son $\varepsilon - \delta$ continuas (i.e. con topologías métricas). Observamos que (X, d) espacio métrico, $Y \subset X$ subconjunto, entonces la topología inducida en Y es igual a la topología métrica dada por $d|_Y$.

2. $id : (\mathbb{R}, \tau_{\text{discr}}) \to (\mathbb{R}, \tau_{\text{std}})$ continuo. $(id)^{-1} = id : (\mathbb{R}, \tau_{\text{std}}) \to (\mathbb{R}, \tau_{\text{discr}})$ no es continua. Si tomamos $U = \{0\}$, es abierto en τ_{discr}, pero no abierto en τ_{std}. Moral: f continua y biyectiva $\not\Rightarrow f^{-1}$ continua.

   Observación. $id : (X, \tau) \to (X, \tau')$ es continua si y sólo si $\tau' \subset \tau$ (τ más fina que τ').

3. $X = [0, 2\pi]$, $Y = \mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, $f : X \to Y$, $t \mapsto (\cos t, \sin t)$. f es continua (es $\varepsilon - \delta$ continua) y biyectiva. Si f^{-1} no es continua, queremos $U \subset X$ tal que $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$ no es abierto en Y. Notar que un intervalo de la forma $U = [0, t)$ es abierto en X, pero $f(U)$ no es abierto en Y (el punto $(1, 0) \in f(U)$ no está en el interior). Moral: "despegar/cortar" no es operación continua.

1.8.1 Productios cartesianos arbitrarios

Recuerdo. X, Y espacios topológicos, en $X \times Y$ tenemos <u>topología producto</u> con base $\mathcal{B} = \{U \times U' \mid U \subset X,\ U' \subset Y \text{ abiertos}\}$. En general, si $X_1, dots, X_n$ (finitos) espacios topológicos, la <u>topología producto</u> en $X_1 \times \cdots \times X_n$ tiene base

$$\mathcal{B} = \{U_1 \times \cdots \times U_n \mid U_i \subset X_i \text{ abierto para cada } i\}.$$

Lema 1.41. Topología producto en $X_1 \times \cdots \times X_n$ es la <u>menor</u> topología tal que $\pi_i : X_1 \times \cdots \times X_n \to X_i$ tal que $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i$, es continua para cada i.
(Menor: si τ' topología en $X_1 \times \cdots \times X_n$ tal que π_i continua $\forall i$, entonces $\tau' \supset \tau =$topología producto)

Demostración. Si τ' topología en $\underline{X}$ tal que $\pi_i : \underline{X} \to X_i$ continuas, entonces $\forall 1 \leq i \leq n$, si $U_i \subset X_i$ abierto. Luego $\pi_i^{-1}(U_i)$ abierto en τ', donde $\pi_i^{-1} = X_1 \times \cdots \times X_{i-1} \times U_i \times X_{i+1} \times \cdots \times X_n$. Si queremos $\tau \subset \tau'$, basta que $\mathcal{B} \subset \tau'$. Si $U_1 \subset X_1, \ldots, U_n \subset X_n$ son abiertos, entonces $\mathcal{B} \ni U_1 \times \cdots \times U_n = \pi_1^{-1}(U_1) \cap \pi_2^{-1}(U_2) \cap \cdots \cap \pi_n^{-1}(U_n)$ es abierto en τ' (usamos que n es finito!!!). □

Definición 1.42 (producto)**.** Una familia indexada de conjuntos es $\{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$. Si $\underline{X} \bigcup_{\alpha \in J} X_\alpha$, el producto cartesiano es $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ es el conjunto de funciones $x : J \to \underline{X}$ tal que para $\alpha \in J$, $x_\alpha \coloneqq x(\alpha) \in X_\alpha$ [x_α es la α-coordenada de x]

Ejemplo.

- Si $J = \{1, \ldots, n\} \Rightarrow \prod_{\alpha \in J} X_\alpha = X_1 \times \cdots \times X_n$;
- Si $X_\alpha = X$ para todo $\alpha \Rightarrow \prod_{\alpha \in J} X_\alpha = X^J = \{\text{funciones } f : J \to X\}$;
- Si $J = \mathbb{Z}_{>0}$, $X_\alpha = X\ \forall \alpha \Rightarrow \prod_{\alpha \in J} X_\alpha = \{\text{sucesiones } x = (x_1, x_2, \ldots) \text{ en } X\}$

1.8.2 Topologías en $\Pi_{\alpha\in J} X_\alpha$

Definición 1.43 (Topología de cajas). Topología con base

$$\mathcal{B} = \{\prod_{\alpha\in J} U_\alpha \mid U_\alpha \subset X_\alpha \text{ es abierto para cada } \alpha\}$$

Definición 1.44 (Topología producto). Es la <u>menor</u> topología tal que las proyecciones $\pi_\beta : \prod_{\alpha\in J} X_\alpha \to X_\beta,\ x = (x_\alpha)_{\alpha\in J} \mapsto x_\beta$ sean continuas para cada $\beta \in J$.

Observación. Si $\underline{X}$ conjunto, $f_\alpha : \underline{X} \to X_\alpha$ espacios topológicos, entonces existe una menor topología tal que f_α continua para todo α. Es la menor topología tal que $f_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ sea abierta para cada $U_\alpha \subset X_\alpha$ abierto, para cada $\alpha \in J$ (existe por tarea 1).

Observación. Para $\underline{X} = \prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ una base es $\mathcal{B}' = \{\prod_{\alpha\in J} U_\alpha \mid U_\alpha \subset X_\alpha$ abierto, y $U_\alpha = X_\alpha$ salvo en un conjunto finito de índices $\alpha\}$.

Corolario 1.45. $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$, por lo tanto $\tau_{\text{prod}} \subset \tau_{\text{cajas}}$.

Corolario 1.46. Para topología de cajas, proyecciones π_α también son continuas.

Ejemplo (Próxima clase).

1. $\underline{X} = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}_{>0}}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\mathbb{Z}_{>0}}$ tal que $t \mapsto (t, t, t, t, \dots)$. Se puede ver que f continua para la topología producto, pero no es continua para la topología de cajas.

2. $\underline{X} = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}_{>0}}$. En $\underline{X}$ con topología de cajas, es la topología discreta. $\underline{X}$ es homeomorfo al conjunto de Cantor con la topología producto.

Clase 10

27 de Agosto

1.9 Topología producto, Topología cuociente (19, 22)

Observación.

1. $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$;

2. Si J es finito, topología de cajas = topología producto;

3. Si J es infinito, en general esto no es cierto.

Ejemplo. Si $J = \mathbb{Z}^+,\ X_n = \mathbb{R}\ \forall n,\ Z = \prod_{n\geq 1} \mathbb{R} = \mathbb{R}^\omega,\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\omega,\ t \mapsto (t, t, t, \dots)$.

Propiedad. Si $Z = \prod_{\alpha\in J} X_\alpha,\ f : Y \to Z \Rightarrow f$ está dada por $f(y) = (f_\alpha(y))_{\alpha\in J}$ con $f_\alpha : Y \to X_\alpha$. Con la topología producto, f es continua $\Leftrightarrow$

cada f_α es continua.

Antes de probar la propiedad, veremos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\omega$ no es continua para la topología de cajas: Tomar $B = \prod_{n\geq 1}\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ es abierto para topología de cajas y $(0,0,0,\dots) = f(0) \in B$. Luego, $f^{-1}(B) = \{0\}$ no es abierto en $\mathbb{R}$. Por lo tanto, f no es continua.

Demostración (Propiedad). $\boxed{\Rightarrow}$ Notar que $f_\alpha = \pi_\alpha \circ f$ (con π_α la proyección: $Z \to X_\alpha,\ (x_\beta)_\beta \mapsto x_\alpha$) es composición de funciones continuas. Por lo tanto, es continua.

$\boxed{\Leftarrow}$ Tomar $B = \prod_{\alpha\in J} U_\alpha$ en base de topología producto. Luego, notamos

$$\begin{aligned}\prod_{\alpha\in J} U_\alpha &= U_{i_1} \times \cdots \times U_{i_n} \times \prod_{\alpha\in J\setminus\{i_1,\dots,i_n\}} X_\alpha \quad \subset Z \\ &= \bigcap_{j=1}^{n} \pi_{ij}^{-1}(U_{ij})\end{aligned}$$

Por lo tanto, suficiente probar que $f^{-1}(\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha))$ abierto para cada α, $\forall U_\alpha \subset X_\alpha$. Luego, $f^{-1}(\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)) = f_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ es abierto porque f_α continua. □

Ejemplo. $Z = \{0,1\}^\omega = \{\text{sucesiones } (x_1, x_2, \dots) \text{ con } x_i \in \{0,1\}\}$.

Lema 1.47. Si $Z = \prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ donde cada X_α tiene topología discreta. Entonces, topología de cajas en Z es la topología discreta.

Demostración. Queremos $\{(x_\alpha)_\alpha\}$ abierto en Z. Notar que $\{(x_\alpha)_\alpha\} = \prod_\alpha \{x_\alpha\}$ es abierto en Z con topología de cajas. □

Con topología producto, Z es homeomorfo al conjunto de Cantor.

Recuerdo. En $[0,1]$, E_n = unión de intervalos $B_{i_1\dots i_n}$ con $i_n \in \{0,1\}$ tal que, inductivamente, si $B_{i_{i_1\dots i_n}} = [a,b]$, entonces

$$B_{i_1\dots i_n 0} = \left[a, a + \frac{1}{3^{n+1}}\right], \quad B_{i_1\dots i_n 1} = \left[b - \frac{1}{3^{n+1}}, b\right]$$

Luego, $\mathcal{C} = \bigcap_{n\geq 1} E_n$ (Cantor) (cerrado en $\mathbb{R}$, de interior vacío). Construir $f : \{0,1\}^{\mathbb{Z}^+} \to \mathcal{C},\ (x_n)_{n\geq 1} \mapsto \sum_{n\geq 1} \frac{2x_n}{3^n}$, esto es biyección.

Veamos que f es continua: Notar que una base del $\mathcal{C}$ es el conjunto

$$\mathcal{B} = \bigcup_{n\geq 1} \{B_{i_1\dots i_n} \cap \mathcal{C} \mid i_1, \dots, i_n \in \{0,1\}\}$$

Luego,

$$\begin{aligned} f^{-1}(B_{i_1\dots i_n}\cap \mathcal{C}) &= \{(x_1,\dots,x_n,x_{n+1},\dots) \mid x_1=i_1,\ x_2=i_2,\dots,x_n=i_n\} \\ &= \underbrace{\{i_1\}\times\{i_2\}\times\cdots\times\{i_n\}\times\{0,1\}^{\mathbb{Z}_{>n}}}_{\text{abierto para topología producto}} \end{aligned}$$

Propiedades. $Z=\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ espacio topológico.

1. Si cada X_α es Hausdorff $\Rightarrow$ Z Hausdorff (Z con topología producto ó con topología de cajas)
2. Si $A_\alpha \subset X_\alpha$, donde $A=\prod_{\alpha\in J} A_\alpha \subset \prod_{\alpha\in J} X_\alpha = Z$. La topología producto en A es la inducida por la producto en Z. Por otro lado, la topología de cajas de A es la inducida por la topologia de cajas de Z (demostrar!).

Clase 11

29 de Agosto

Contexto. $p: X\to A$ sobreyectiva, X espacio topológico. Uno quiere dar una topología "natural" a A tal que ρ sea continua.

Ejemplo (estándar). Si $\sim$ relación de equivalencia en X, con $X\backslash\sim=$ *conjunto de clases de equivalencia*

$$\rho: X\to X\backslash\sim,\quad x\mapsto [x]_\sim$$

Ejemplo (1.). **Colapsar subespacios.** $Y\subset X$. Luego, $\sim$ en X tal que todos los puntos de Y son equivalentes (y nada más). Entonces, $X\setminus Y = X\backslash\sim$.

Ejemplo (1.1). $X=[0,1],\ Y=\{0,1\}$

Ejemplo (1.2). $X=D^2=\{x\in\mathbb{R}^2 \mid |x|\le 1\},\ Y=\mathbb{S}^1=\{x \mid |x|=1\}$.

Ejemplo (2.). **Acciones de grupo.** Γ grupo, X espacio. Acción es $\rho:\Gamma\times X\to X$ (notación $\rho(g,x)=g\cdot x$) tal que

1. $\rho(1_\Gamma,x)=x \quad \forall x\in X$;
2. $\rho(gh,x)=\rho(g,\rho(h,x))$.

Observar. ρ es mismo dato de un homomorfismo

$$\Gamma\to Biy(X),\quad g\mapsto (x\mapsto \rho(g,x))$$

Ejemplo. $\mathbb{Z}^2 \curvearrowright \mathbb{R}^2,\ (m,n)\cdot(x,y)=(x+m,y+n)$.

Notar que si tenemos $\Gamma\curvearrowright X$ acción, nos da $\sim_\Gamma$ tal que $x\sim_\Gamma y$ si y sólo si $y=g\cdot x$ para algún $g\in\Gamma$ (x,y en la misma órbita). Además, $X\setminus\Gamma := X\backslash\sim_\Gamma$ espacio de órbitas, o cociente de X por la acción de Γ.

Contexto. $p: X\to A$ sobreyectiva, X espacio topológico.

Definición 1.48 (topología cociente en A).

$$\tau = \{U \subset A \mid p^{-1}(U) \text{ es abierto en } X\}$$

Esto es topología: Viene de que

$$p^{-1}\left(\bigcup_{\alpha} U_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha} p^{-1}(U_\alpha)$$
$$p^{-1}\left(\bigcap_{\alpha} U_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha} p^{-1}(U_\alpha).$$

Observar.

1. p es continua si A tiene topología cociente;
2. Se cumple algo más fuerte

$$U \subset A \text{ abierto} \Leftrightarrow p^{-1}(U) \subset X \text{ abierto} \tag{$*$}$$

[top. cociente es topología más grande tal que p es continua]

Definición 1.49 (mapa cociente). Si X, A son espacios topológicos $p : X \to A$ es mapa cociente si es sbore y se cumple $(*)$.

Observar. $X \overset{p}{\twoheadrightarrow}$, A con topología cociente

1. Si p es continua respecto a τ' otra topología en A, entonces $\tau' \subset \tau_{\text{coc}}$;
2. p es mapa cociente con respecto a τ_{coc}. Si p es mapa cociente con respecto a topología τ en A, entonces $\tau = \tau_{\text{coc}}$.

[$X \overset{p}{\to}$ mapa cociente $\equiv X \overset{p}{\to} A$ sobre y A tiene top. cociente.]

Propiedad. Suponer que $p : X \to A$ mapa cociente, Y espacio topológico, $f : A \to Y$. Sea $g = f \circ p : X \to Y$. Luego,

$$f \text{ es continua} \Leftrightarrow g \text{ es continua}$$

Demostración. $\boxed{\Leftarrow}$ Si $U \subset Y$ abierto (queremos $f^{-1}(U) \subset A$ abierto). Luego, g continua implica que $g^{-1}(U) \subset X$ abierto. Notar que $g^{-1}(U) = (f \circ g)^{-1}(U) = p^{-1}(f^{-1}(U)) \subset X$ abierto. Dado que p es mapa cociente, entonces $f^{-1}(U) \subset A$ abierto. $\square$

Ejemplo. $g : [0, 2\pi] = X \to \mathbb{S}^1 = \{|z| = 1\}, \quad t \mapsto (\cos t, \sin t)$.

- $A = [0, 2\pi] \setminus \{0, 2\pi\}$;
- $p : X \to A$.

(g cumple $(*)$) $\Rightarrow$ hay una función $f : A \to \mathbb{S}^1$ tal que

$$\begin{tikzcd}
{[0,2\pi]} \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "g \text{ (continua sobre } y)"] & \\
A \arrow[r, "\text{biyección}"'] & \mathbb{S}^1
\end{tikzcd}$$

Propiedad anterior $\Rightarrow$ f continua (y biyectiva)

Clave. f^{-1} es continua! $\rightsquigarrow$ $[U \subset A$ abierto $\Rightarrow f(U)$ abierto en $\mathbb{S}^1]$

> **Demostración.** Suponer U que contiene a $p(0) = p(2\pi) \Rightarrow p^{-1}(U)$ abierto que contiene a 0 y a 2π. Entonces, U contiene a $[0, \varepsilon) \cup (2\pi - \varepsilon, 2\pi]$ para algún ε chiquito. Luego $g(U)$ contiene vecindad de $g(p(0))$. $\square$

Clase 12

1 de Septiembre

1.10 Grupos Topológicos (pp 145, Lee pp 77)

Propiedad (clase pasada)**.** Si $f : X \to Y$ continua tal que $p(x) = p(y) \Rightarrow f(x) = f(y)$ (con p mapa cociente). Además, junto con el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "f"] & \\
A \arrow[r, dashed, "g"'] & Y
\end{tikzcd}$$

afirmamos que $\exists! g : A \to Y$ continua tal que $g \circ p = f$

Ejemplo. Cociente de Hausdorff no tiene que ser Hausdorff.

$$X = \mathbb{R},\ A = \{0,1\},\ p : \mathbb{R} \to \{0,1\},\ p(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0 \\ 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Topología en $A:$ $p^{-1}(\varnothing) = \varnothing,\ p^{-1}(\{0,1\}) = \mathbb{R},\ p^{-1}(\{0\}) = (-\infty, 0),\ p^{-1}(\{1\}) = [0, \infty)$ (notar que este último no es abierto). Luego, $\tau_{\text{coc}} = \{\varnothing, \{0,1\}, \{0\}\} \rightsquigarrow$ No es Hausdorff (ni $T1$).

Definición 1.50 (grupo topológico)**.** Un grupo topológico es un grupo Γ con una topología tal que $v : \Gamma \to \Gamma$ y $* : \Gamma \times \Gamma \to \Gamma$ sean continuas.

Observar. En la definición, el dominio de $*$, $\Gamma \times \Gamma$ viene con la topología producto respecto a la topología en Γ.

Ejemplo.

- $(\mathbb{R}, +)$ es un grupo topológico con la topología estándar ($v(x) = -x$, $*(x,y) = x + y$);

- $(\mathbb{R}^n, +)$ es un grupo topológico con la topología estándar (cualquier isomorfismo $\mathbb{R}$-lineal es homeomorfismo);
- Γ cualquiera con la topología discreta. Decimos que Γ es grupo discreto;
- Grupo lineal: $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in \underbrace{\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})}_{\cong \mathbb{R}^{n^2}} \mid \det A \neq 0\}$;
- $\mathbb{R}^{n^2}$ nos da una topología de subespacio desde $\mathbb{R}^{n^2}$. Si usamos el isomorfismo $[a_{i,j}]_{i,j} \mapsto (a_{i,j})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n^2}$. ¿Cómo se ven v y $*$? $\rightsquigarrow v : A \to A^{-1} = \frac{1}{\det A}\mathrm{adj}(A)$ (matriz con cada entrada un polonomio en coef de A). Por lo tanto, $*$ es función racional y por ende, continua. Luego, $* : (A, B) \to AB$ (cada entrada es un polinomio en las entradas de A y B);
- $SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\} < GL_n(\mathbb{R})$.

Propiedad. Γ grupo topológico y $H < \Gamma$ subgrupo. Entonces, H es grupo topológico con topología inducida.

Notar que, si Γ cualquiera con topología profinita (topología con base $\mathcal{B} = \{a\Gamma' \mid \Gamma' \lhd \Gamma$ subgrupo normal de índice finito, $a \in \Gamma\}$).

- v es continua (basta $v^{-1}(a\gamma')$ abierto): $v^{-1}(a\Gamma') = \{x^{-1} \mid x \in a\Gamma'\} = \{(ag)^{-1} \mid g \in \Gamma'\} = \{g^{-1}a^{-1} \mid g \in \Gamma'\} = \Gamma' a^{-1} \overset{\Gamma' \lhd}{=} a^{-1}\Gamma' \in \mathcal{B}$.
- Si $a \in \Gamma$, $L_a : \Gamma \to \Gamma$, $g \mapsto ag$ es continua: si $a'\Gamma'$ elemento arbitrario de $\mathcal{B}$, entonces $(L_a)^{-1}(a'\Gamma') = (L_{a^{-1}})(a'\Gamma') = a^{-1}a\Gamma' \ni \mathcal{B}$ (#).

Observar. (#) es más débil que probar que $* : \Gamma \times \Gamma \to \Gamma$, $(g, h) \mapsto gh$ es continua.

Propiedad. Γ, Γ' grupos topológicos.

1. $\Gamma \times \Gamma'$ es grupo topológico von la topología producto.
   Ejemplo (1.1)**.** $\mathbb{S}^{-1} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ es un grupo topológico con producto usual y topología inducida;
   Ejemplo (1.2)**.** $\Pi^n = \underbrace{\mathbb{S}^{-1} \times \cdots \times \mathbb{S}^{-1}}_{n-\text{veces}}$ n-toro es grupo topológico.
2. $H \lhd \Gamma$ subgrupo normal. Entonces, $\overline{\Gamma} := \Gamma/H$ grupo cociente y $p : \Gamma \to \overline{\Gamma}$ homomorfismo cociente.
   (a) p es abierta ($U \subset \Gamma \Rightarrow p(U)$ es abierto en $\overline{\Gamma}$ con la topología cociente);
   (b) $\overline{\Gamma}$ es grupo topológico;
   (c) $\overline{\Gamma}$ es Hausforff ssi $H < \Gamma$ cerrado.
   Ejemplo (2.1)**.** $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ es Hausdorff con la topología cociente ($\mathbb{R}$ con la topología estándar).

Clase 13

3 de Septiembre

1.11 Acciones Topológicas (Lee p.77)

Ejemplo (última propiedad clase pasada, punto 2). Sea $\Gamma = \mathbb{R},\ H = \mathbb{Q} \rightsquigarrow \overline{\Gamma} = \mathbb{R}/\mathbb{Q}$. Como $\mathbb{Q}$ no es cerrado en $\mathbb{R}$, entonces $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ no es Hausdorff. Además, veremos que la topología cociente en $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ es la indiscreta. Notar que $U \subset \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ es abierto no vacío $\Leftrightarrow p^{-1}(U) \subset \mathbb{R}$ abierto no vacío. Tomar $U \subset \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ no vacío, $\exists [x] = p(x) \in U (x \in \mathbb{R}) \Rightarrow p^{-1}(U)$ contiene a x, y; y de hecho contiene a x tal que $\forall q \in \mathbb{Q}$ $(p(x+q) = p(x))$. Por lo tanto, $p^{-1}(U)$ abierto (en $\mathbb{R}$) y $x + \mathbb{Q} \subset p^{-1}(U)$ (denso). $p^{-1}(U)$ es invariante por trasladar por $\mathbb{Q}$: si $y \in p^{-1}(U),\ q \in \mathbb{Q} \Rightarrow y + q \in p^{-1}(U)$. Como $x \in p^{-1}(U)$ abierto, entonces $\exists \varepsilon > 0$ tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset p^{-1}(U)$. Luego, $(x-\varepsilon+q, x+\varepsilon+q) \subset p^{-1}(U)\ \forall q \in \mathbb{Q}$. En conclusión, $p^{-1}(U) = \mathbb{R}$ y $U = \mathbb{R}/\mathbb{Q}$, $\therefore$ la topología en $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ es $\{\varnothing, \mathbb{R}/\mathbb{Q}\}$.

Ejemplo (Furstenberg). Se puede probar que existen infinitos primos de manera puramente topológica (usando topología profinita en $\mathbb{Z}$).

Demostración. Base: $\mathcal{B} = \{\underbrace{\overbrace{a\mathbb{Z}}^{\Gamma'} + b}_{b\Gamma'} \mid a \neq 0,\ b \in \mathbb{Z}\}$. Observar que, cada $a\mathbb{Z} + b$ es infinito. Esto implica que cada abierto con la topología profinita es o bien vacío, o infinito. En $\mathbb{Z}$, todo número no primo es o bien 1 o -1, o $p \cdot a$ con p primo y $a \in \mathbb{Z}$. Entonces,

$$\mathbb{Z} = \{-1, 1\} \sqcup \bigcup_{p \text{ primo}} p\mathbb{Z} \qquad (*)$$

Notar que cada $p\mathbb{Z}$ es cerrado:

$$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \bigcup_{1 \le i \le p-1} (p\mathbb{Z} + i)$$

Si hubiera finitos primos, entonces la unión de los $p\mathbb{Z}$ en $(*)$ sería cerrado. Así, $\{-1, 1\} \subset \mathbb{Z}$ abierto, lo que es una contradicción! □

Acciones topológicas

Recuerdo. $\Gamma \curvearrowright X : \Gamma \times X \to X$ tal que $(g, x) \mapsto g \cdot x$ y se cumple (i) $1 \cdot x = x$; (ii) $h \cdot (g \cdot x) = (hg) \cdot x$.

Definición 1.51 (acción continua). Una acción $\Gamma \curvearrowright X$ (Γ grupo topológico, gX espacio topológico) es continua si:

$$\begin{aligned} \Gamma \times X &\to X \\ (g, x) &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

es continuo.

Lema 1.52. Γ, X grupos topológicos y $\Gamma \curvearrowright X$ acción.

1. Si $\Gamma \curvearrowright X$ continua, entonces $L_g : X \to X$, con $x \mapsto g \cdot x$, es homeomorfismo para cada $g \in \Gamma$,
2. Si Γ es grupo discreto y cada L_g es homeomorfismo, entonces $\Gamma \curvearrowright X$ es continua.

Demostración.

1. Dado $g \in \Gamma$:

$$\begin{aligned} X &\to \{g\} \times X \hookrightarrow \Gamma \times X \to X \\ x &\mapsto \ (g, x) \quad \mapsto (g, x) \ \mapsto g \cdot x. \end{aligned}$$

2. Tomar $U \subset X$ abierto. Notar que

$$\begin{aligned} p^{-1} &= \{(g, x) \mid g \cdot x \in U\} \\ &= \{(g, x) \mid L_g(x) \in U\} \\ &= \{(g, x) \mid x \in L_g^{-1}(U)\} \\ &= \{(g, x) \mid x \in L_g^{-1}(U)\} \\ &= \bigcup_{g \in \Gamma} \{g\} \times L_g^{-1}(U). \end{aligned}$$

Donde $\{g\}$ es abierto en Γ (topología discreta) y $L_g^{-1}(U)$ es abierto en X (L_g homeo). Así, la unión es un abierto en $\Gamma \times X$.

$\square$

Ejemplo. $GL_n(\mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{R}^n$, $A \cdot v = A(v)$ (multiplicación usual). Esta acción es continua!

$$\begin{aligned} &Mat_{n\times n}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad [(A, v) \mapsto A(v)] \\ &\cup \\ &GL_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ &\qquad (A, v) \mapsto A(v). \end{aligned}$$

Clase 14

5 de Septiembre

1.12 Acciones topológicas/continuas (Lee p.77)

Recuerdo. $\Gamma \curvearrowright X$ acción $\rightsquigarrow \sim_\Gamma$ en X : $x \sim_\Gamma y$ si $p : X \to X/\Gamma := X/\sim_\Gamma$ espacio de órbitas (con top. cociente). $x \in \Gamma$, su órbita (denotada) $\Gamma \cdot x$ es $\{g \cdot x \mid g \in \Gamma\}$.

Ejemplo.

1. $\mathbb{R}^+ \curvearrowright \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $(t, x) \mapsto tx$ es continua! Luego, cociente $(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})/\mathbb{R}^+ \approx \mathbb{S}^{n-1} := \{z \in \mathbb{R}^n \mid |z| = 1\}$ n-esfera! (el $\approx$ es de homeomorfo)

2. $\mathbb{R}\setminus\{0\} \curvearrowright \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $(t,x)\mapsto tx$. Luego, cociente es el espacio proyectivo $\mathbb{R}P^{n-1}$.

3. Γ grupo topológico arbitrario, $H<\Gamma$ subgrupo (no necesariamente normal). Entonces, hay dos acciones topológicas $H \curvearrowright \Gamma$

   i) $(h,g)\mapsto hg$.

   ii) $(h,g)\mapsto hgh^{-1}$.

   Continuo porque $(g_1,g_2)\mapsto g_1g_2$ y $g\mapsto g^{-1}$ continuo en Γ. Estas acciones son distintas: (i) $H\cdot 1 = H$, (ii) $H\cdot 1=\{1\}$.

Convención. $\Gamma/H =$ espacio de órbitas de $H\curvearrowright\Gamma$, $h\cdot g = hg$.

3*. $(GL_n(\mathbb{R}) > SL_n(\mathbb{R}) >)\ SO(n) := \{A\in SL_n(\mathbb{R}) \mid A^tA = \mathbb{1}\}$ grupo ortogonal especial. Notar que $SL_2(\mathbb{R})/SO(2)\approx \mathbb{R}^2$ plano hiperbólico ($n\geq 3$: espacios simétricos de tipo no compacto.

Observación. $SO(n) < SL_n(\mathbb{R})$ es cerrado.

Criterio para X/Γ Hausdorff

Proposición 1.53. $\Gamma\curvearrowright X$ continua si

$$\Delta = \{(x, g\cdot x) \mid x\in X,\ g\in\Gamma\}\subset X\times X$$

es cerrado en $X\times X$, entonces X/Γ Hausdorff.

Ejemplo. Γ grupo topológico arbitrario, $H<\Gamma$ subgrupo (no necesariamente normal). Si $H\subset\Gamma$ es cerrado, entonces Γ/H es Hausdorff.

Demostración (ejemplo)**.** Queremos

$$\Delta = \{(g, \underbrace{hg}_{g'}) \mid g\in\Gamma, h\in H\}\subset \Gamma\times\Gamma$$

Luego, $\Delta = \{(g,g') \mid g'g^{-1}\in H\}$. Si llamamos $f(g,g') = g'g^{-1}$, entonces $f:\Gamma\times\Gamma\to\Gamma$ continua. Luego

$$\Delta = \{(g,g') \mid f(g,g')\in H\} = f^{-1}(H)$$

Por lo tanto, Δ es cerrado si H es cerrado. Así, podemos aplicar la proposición. □

Lema 1.54. $\Gamma\curvearrowright X$ acción continua $(p: X\to X/\Gamma)$. Entonces, p es función abierta; i.e. si $U\subset X$ abierto $\Rightarrow p(U)$ abierto en X/Γ.

Demostración (lema)**.** $U\subset X$ abierto (queremos $p(U)\subset X/\Gamma$ abierto).

Luego, $p(U) \subset X/\Gamma$ abierto $\leftrightarrow p^{-1}(p(U)) \subset X$ abierto.

$$\begin{aligned} p^{-1}(p(U)) &= \{x \in X \mid p(x) \in p(U)\} \\ &= \{x \in X \mid g \cdot x \in U \text{ para algún } g \in \Gamma\} \\ &= \{x \in X \mid x \in g^{-1} \cdot U \text{ para } g \in \Gamma\}, \quad (g \cdot U = \{g \cdot y \mid y \in U\}) \\ &= \underbrace{\bigcup_{g \in \Gamma} \underbrace{g^{-1} \cdot U}_{\text{abiertos.}}}_{\text{abierto!}} := \Gamma \cdot U. \end{aligned}$$

□

Demostración (proposición). Queremos $p(x) \neq p(y)$ en $X/\Gamma \Rightarrow \exists \hat{U}, \hat{U}' \subset X/\Gamma$ abiertos disjuntos tal que $p(x) \in \hat{U},\ p(y) \in \hat{U}'$. En efecto, asumamos que $\Delta \subset X \times X$ cerrado. Notar que $p(x) \neq p(y) \Rightarrow (x, y) \in X \times X \setminus \Delta$ abierto! Por la definición de topología producto, $\exists U, U' \subset X$ abiertos tal que $(x, y) \in U \times U' \times X \times X \setminus \Delta$ (donde $U \times U'$ es un elemento de la base). Por el lema, $p(x) \in p(U) := \hat{U},\ p(y) \in p(U') := \hat{U}'$, abiertos en X/Γ. Solo falta verificar que $p(U), p(U)$ disjuntos: (usar que $U \times U' \cap \Delta = \varnothing$) Si $z \in p(U) \cap p(U') \Rightarrow z = p(u) = p(u'),\ u \in U,\ u' \in U' \Rightarrow u' = g \cdot u,\ g \in \Gamma \Rightarrow (u, u') \in U \times U' \cap \Delta$, lo que es una contradicción! □

Clase 15

8 de Septiembre

1.13 Conexidad (23, 24)

Recuerdo (TVI). $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Si $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, entonces $f(c) = 0$ para algún $c \in [a, b]$.

Conexidad. Es una condición topológica en X tal que $f : X \to \mathbb{R}$ cumple versión esperable del TVI!

Definición 1.55 (separación y conexidad). X espacio topológico.

i. Una separación de X es $X = U \cup V$, con $U, V \subset X$ abiertos disjuntos, no vacíos;

ii. X es conexo si no tiene separación. Equivalentemente, $X = U \cup V,\ U, V \subset X$ abiertos disjuntos, entonces $\varnothing \in \{U, V\}$.

Ejemplo (i.). $X = [0, 1] \cup [2, 3] \cup \{5\} \rightsquigarrow U = [0, 1],\ V = [2, 3] \cup \{5\}$ es separación.

Ejemplo (ii.). $[0, 1]$ es conexo!!! (Magia del axioma del supremo)

Observación. $X = U \cup V$ separación $\longleftrightarrow U \neq \varnothing$ clopen (abierto + cerrado) y $X \setminus U \neq \varnothing$.

Lema 1.56. X espacio topológico. X conexo $\longleftrightarrow \forall f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) > 0,\ f(y) < 0$ para algún $x, y \in X \Rightarrow f(z) = 0$ para algún $z \in X$.

Propiedad ganadora. Si $f : X \to Y$ continua. X conexo $\Rightarrow f(X)$ conexo (respecto a la topología inducida).

Corolario 1.57. Si $p : X \to A$ mapa cociente, X conexo $\Rightarrow A$ conexo.

Corolario 1.58. X, Y espacios homeomorfos. X conexo $\longleftrightarrow Y$ conexo.

Demostración (propiedad ganadora)**.** Quremos $f(X)$ conexo (no hay separación). Suponer que $f(X) = U \cup V$ separación ($U, V \subset f(X)$ abiertos, disjuntos y no vacíos). Luego, $X = f^{-1}(f(X)) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$ separación. Pero esto es una contradicción, pues X es conexo! $\square$

Nota. Se utilizó que la preimagen de abierto es abierto y que siguien siendo disjuntos los abiertos bajo la preimagen.

Lema 1.59. $Y \subset X$ espacios topológicos. Y conexo $\longleftrightarrow \forall A, B \subset X$ abiertos tales que:

i. $Y \subset A \cup B$;

ii. $Y \cap A \cap B = \varnothing$;

$\Rightarrow Y \subset A$ ó $Y \subset B$.

Criterio 1.60 (Conexidad)**.** $(Y_\alpha)_{\alpha \in J}$ familia de subespacioes de X tal que:

1. Cada Y_α conexo;
2. $\bigcap_{\alpha \in J} Y_\alpha \neq \varnothing$;

$\Rightarrow Z = \bigcup_{\alpha \in J} Y_\alpha$ conexo.

Observación. $\bigcap_{\alpha \in J} Y_\alpha$ no necesariamente conexa si cada Y_α conexo.

Ejemplo.

1. $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$ conexo. En efecto, si $v \in \mathbb{S}^{n-1} \rightsquigarrow Y_v = \{tv + (1-t)(-v) \mid t \in [0,1]\} \approx [0,1]$. Por lo tanto, cada Y_v es conexo. Luego, $0 \in Y_v, \quad \forall v \in \mathbb{S}^{n-1} \Rightarrow B = \bigcup_{v \in \mathbb{S}^{n-1}} Y_v$ conexo;
2. $\mathbb{R}$ es conexo. $\mathbb{R} = \bigcup_{\varepsilon > 0} [-\varepsilon, \varepsilon],\ 0 \in [-\varepsilon, \varepsilon] \quad \forall \varepsilon < 0$;
3. $\mathbb{S}^{n-1}$ conexo si $n \geq 2$ ($\mathbb{S}^0 = \{-1, 1\}$ no conexo (disconexo)). Para $n = 2$, recordar que $[0,1]/\sim \to \mathbb{S}^1$ homeomorfismo. Por lo tanto, $\mathbb{S}^1$ conexo. Para n arbitrario, sean $X = [0,1]^n,\ Y = \partial X \rightsquigarrow X/Y \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^n$ homeomorfismo. Otra forma: sea $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{S}^{n-1}$ tal que $v \mapsto \frac{v}{|v|}$ continua y sobre. Luego, es suficiente probar que $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ conexo si $n \geq 2$.

Clase 16

10 de Septiembre

1.14 Arcoconexidad (23, 24)

Demostración (criterio conexidad clase pasada)**.** Sean $A, B \subset X$ abiertos con $Z \subset A \cup B$. Queremos $Z \subset A$ o $Z \subset B$. Fijando $\alpha_0 \in J$, se tiene $X_{\alpha_0} \subset A \cup B$. Dado que X_{α_0} es conexo, podemos suponer que $X_{\alpha_0} \subset A$. Tomar $\alpha \in J$, $\alpha \neq \alpha_0$, queremos $X_\alpha \subset A$, y si no pasa, $X_\alpha \subset B$. En efecto, como X_α, $X_{\alpha_0} \subset Z$, $Z \cap A \cap B = \varnothing$, entonces $X_\alpha \cap X_{\alpha_0} = \varnothing$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $X_\alpha \subset A \quad \forall \alpha$. Luego, $Z \subset A$. □

Lema 1.61. Si X, Y conexos, entonces $X \times Y$ conexo.

Observar. Si $X \times Y$ conexo, entonces $X = \prod_X (X \times Y)$ conexo.

Observar. Si X_α conexo, entonces $\prod_\alpha X_\alpha$ conexo con la topología producto (tarea 3).

Demostración (lema)**.** Dado $(x, y) \in X \times Y$, definimos $T_{(x,y)} = \{x\} \times Y \cup X \times \{y\}$. Si X, Y conexos, entonces $T_{(x,y)}$ conexo $\forall (x, y) \in X \times Y$. Notar que $T_{(a,y)} \cap T_{(x,y)} \neq \varnothing \quad \forall a, x \in X$. Por el criterio, tenemos que $\bigcup_{x \in X} T_{(x,y)}$ conexo para cada y fijo, pero $\bigcup_{x \in X} T_{(x,y)} = X \times Y$. □

1.14.1 Arcoconexidad (conexidad por caminos)

Definición 1.62 (curva)**.** X espacio topológico es arcoconexo si $\forall x, y \in X$, existe una función continua $\alpha : [0, 1] \to X$ tal que $\alpha(0) = x$, $\alpha(1) = y$. Llamaremos curva con extremos $\alpha(0)$ y $\alpha(1)$ a α.

Ejemplo.

- $[0, 1]$ arcoconexo
- $\mathbb{S}^{n-1}$, $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ arcoconexo si $n \geq 2$.

Proposición 1.63. Si X arcoconexo, entonces X conexo.

Demostración. Sea X arcoconexo. Procedemos por contradicción. Supongamos que X no es conexo. Entonces, existe separación $X = U \sqcup V$, con U, V abiertos no vacíos. Tomamos $x \in U$, $y \in V$. Luego, existe una curva $\alpha : [0, 1] \to X$ tal que $0 \mapsto x$ y $1 \mapsto y$. Tomar $g : X \to \{-1, 1\} \subset \mathbb{R}$ tal que

$$g(w) = \begin{cases} -1, & w \in U \\ 1, & w \in V \end{cases}$$

es continua. Entonces $f = g \circ \alpha : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continua tal que $f(0) =$

-1, $f(1) = 1$, pero no existe $c \in [0,1]$ con $f(c) = 0$, lo que contradice el TVI! □

Clase 17

12 de Septiembre

1.15 (Arco)conexidad local, Componentes (25)

Observar. Conexidad $\not\Rightarrow$ Arcoconexidad.

Ejemplo. $Y = \{(t, \sin(\frac{1}{t}) \mid t > 0\} \subset \mathbb{R}^2$ arcoconexo. $X = \overline{Y}$ conexo! Pero no es arcoconexo!

Lema 1.64. $Y \subset A$ espacios topológicos tal que $Y \subset X \subset \overline{Y}$. Si Y es conexo $\Rightarrow X$ conexo.

Nota. El A es simplemente porque Y tiene que estar dentro de un espacio para poder tomar su clausura.

Componentes

Definición 1.65 (componentes conexa y arcoconexa)**.** Sea X espacio topológico, $C \subset X$ es componente conexa (resp. arcoconexa) si:

1. C es conexo (resp. arcoconexo);
2. C es maximal respecto a (1): Si C' es (arco)conexo y $C \subset C' \Rightarrow C = C'$.

Observar.

1. Componentes existen: Si $x \in X$

   $$C_x := \bigcup \{C \subset X \mid C \text{ conexo}, x \in C\}$$

   (C_x componente de x en X). Esto es conexo (criterio) y maximal.

2. Lo mismo vale para arcoconexidad (Existe versión del criterio).
3. Componentes conexas forman una partición de X. Si $C_x \neq C_y \Rightarrow C_x \cap C_y = \varnothing$. En efecto, si $C_x \cap C_y \neq \varnothing$, $C_x \neq C_y \Rightarrow C_x \cup C_y$ es conexo aún más grande.
4. Si $C \subset X$ componente conexa $\Rightarrow C$ es cerrado $\Rightarrow C = \overline{C}$ ($\overline{C}$ conexo + C conexo maximal) (esto es falso si se reemplaza por componente arcoconexa).

Ejemplo.

1. X es (arco)conexo si X es componente (arco)conexa;
2. En $X = \mathbb{Q}$ con topología inducida de $\mathbb{R}$, componentes son los singleton. En particular, notar que componentes no son abiertas;

3. $X = [0,1] \cup (2,3) \cup \{4\}$ (y es claro que $[0,1]$, $(2,3)$ y $\{4\}$ son componentes) (aquí componentes son abiertas);

4. Subconjuntos conexos de $\mathbb{R}$

   - $[a,b]$, $(a,b]$, $[a,b)$, (a,b) $\quad a < b$;
   - $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$, (b, ∞), $[b, \infty)$;
   - $\mathbb{R}$;
   - $\{x\}$.

   (todos arcoconexos!!!)

5. $X = \overline{Y} \subset \mathbb{R}^2$. Componentes conexas de X: es sólo X. Componentes arcoconexas de X: Y, $\{0\} \times [-1,1]$.

Definición 1.66 (localmente (arco)conexo)**.** X espacio topológico es localmente (arco)conexo si $\forall x \in X$, para todo abierto $U \subset X$ tal que $x \in U$, va a existir $V \subset U$ abierto (arco)conexo con $x \in V$.

Criterio 1.67. X localmente (arco)conexo si y sólo si $\forall U \subset X$ abierto, componentes (arco)conexas de U (respecto a la topología inducida) son abiertos en X.

Corolario 1.68.

1. Si X es localmente arcoconexo, componentes conexas son igual a componentes arcoconexas y viceversa;

2. X localmente arcoconexo y conexo $\Rightarrow$ X es arcoconexo.