Ayudantía Topología

Contents

Chapter 1

Interrogación N°1

1.1 Ayudantía 1 (12/08)

1. Sea X un conjunto infinito.

   (a) Sea $p \in X$ un punto arbitrario en X, demuestre que

   $$\tau_1 = \{U \subset X \ : \ U = \varnothing \text{ o } p \in U\}$$

   es una topología en X. Esta es conocida como **topología del punto particular**.

   > **Proof.**
   > - Claramente $\varnothing, X \in \tau_1$.
   > - $U_\alpha \in \tau_1 \Rightarrow p \in U_\alpha \Rightarrow p \in \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \Rightarrow \bigcup U_\alpha \in \tau_1$.
   > - $U_1, \ldots, U_n \in \tau_1 \Rightarrow p \in U_i \Rightarrow p \in \displaystyle\bigcap_{i=1}^n U_i \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n U_i \in \tau_1$.
   >
   > $\square$

   (b) Sea $p \in X$ un punto arbitrario en X, demuestre que

   $$\tau_2 = \{U \subset X \ : \ U = X \text{ o } p \notin U\}$$

   es una topología en X. Esta es conocida como **topología del punto excluido**.

   > **Proof.**
   > - Claramente $\varnothing, X \in \tau_2$ $(p \notin \varnothing)$.
   > - $U_\alpha \in \tau_2 \Rightarrow p \notin U_\alpha \Rightarrow p \notin \bigcup U_\alpha \Rightarrow \bigcup U_\alpha \in \tau_2$.
   > - $U_1, \ldots, U_n \in \tau_2 \Rightarrow p \notin U_i \Rightarrow p \notin \displaystyle\bigcap_{i=1}^n U_i \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n U_i \in \tau_2$.
   >
   > $\square$

   (c) Determine cuando

   $$\tau_3 = \{U \subset X \ : \ U = X \text{ o } X \setminus U \text{ es infinito}\}$$

es una topología en X.

Proof. Si $p \in X \Rightarrow \{p\}^c$ es infinito $\Rightarrow \{p\}$ es abierto. Si τ_3 es topología y $q \in X$, entonces

$$\bigcup_{p \neq q} \{p\} = X \setminus \{q\} \Rightarrow (X \setminus \{q\})^c = \{q\}$$

es infinito. Contradicción! ※ Es decir, τ_3 no es topología. □

2. Sea $K = \{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ y $\mathcal{B}_K$ la colección de intervalos abiertos $(a, b) \subset \mathbb{R}$ y de conjuntos de la forma $(a, b) - K$. Es decir,

$$\mathcal{B}_K = \{(a, b) \ : \ a, b \in \mathbb{R}\} \cup \{(a, b) - K\}.$$

   (a) Pruebe que $\mathcal{B}_K$ es una base para X. Denotamos por $\mathbb{R}_K$ la topología generada.

   Proof.
   - $t \in \mathbb{R}, \ \exists (a, b) \subset \mathbb{R} \ : \ t \in (a, b) \subset \mathcal{B}_K$;
   - Notar que la intersección de elementos de la base es un elemento de la base

$$\begin{aligned} (a, b) \cap (c, d) &= (c, b) \\ (a, b) - K \cap (c, d) &= (c, b) - K \\ (a, b) - K \cap (c, d) - K &= (c, b) - K. \end{aligned}$$

   □

   (b) Considere las siguientes topologías en $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \text{ topología estándar en } \mathbb{R} \\ \tau_2 &= \text{ topología } \mathbb{R}_K \\ \tau_3 &= \text{ topología cofinita en } \mathbb{R} \\ \tau_4 &= \text{ topología con } (-\infty, a) = \{x \ : \ x < a\} \text{ como base.} \end{aligned}$$

   Determine, para cada una de estas topologías, cual de las otras contiene.

3. Sea X conjunto, denotamos por $\tau_{\text{cof}}(X)$ a la topología cofinita en X. Demuestre que

$$\tau_{\text{cof}}(X \times Y) \subseteq \tau_{\text{cof}}(X) \times \tau_{\text{cof}}(Y),$$

es decir, la topología producto de las topologías cofinitas es más finita que la topología cofinita en $X \times Y$. De un ejemplo en que estas topologías no son iguales.

Proof. Sea $U \in \tau_{\text{cof}}(X \times Y)$ Entonces,

$$U = X \times Y - \{(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)\} = \bigcap_{i=1}^{n} X \times Y - \{(a_i, b_i)\}.$$

Queremos ver que $X \times Y - \{(a,b)\}$ es abierto en $\tau_{\text{cof}}(X) \times \tau_{\text{cof}}(Y)$. Notar que $\mathcal{B} = \{U \times V \ : \ U \in \tau_{\text{cof}}(X), V \in \tau_{\text{cof}}(Y)\}$ es una base para $\tau_{\text{cof}}(X) \times \tau_{\text{cof}}(Y)$. Sea $(c,d) \in X \times Y - \{(a,b)\}$. Supongamos que $c \neq a$.

$$(c,d) \in \underbrace{X \setminus \{a\}}_{\in \tau_{\text{cof}}(X)} \times \underbrace{Y}_{\in \tau_{\text{cof}}(Y)} \subseteq X \times Y - \{(a,b)\}.$$

X infinito. Luego,

$$W = X \times Y \setminus \{a\} \in \tau_{\text{cof}}(X) \times \tau_{\text{cof}}(Y).$$

Pero $W^c = X \times \{a\}$ no es finito. Por lo tanto $W \in \tau_{\text{cof}}(X \times Y)$. Entonces $\tau_{\text{cof}}(X \times Y) \subsetneq \tau_{\text{cof}}(X) \times \tau_{\text{cof}}(Y)$. □

1.2 Ayudanía 2 (19/08)

1. Considere $W \subseteq Y \subseteq X$, τ topología en X, τ' topología inducida en X. Pruebe que las topologías inducidas por τ y τ' sen W son iguales.

   Proof. U abierto en $\tau|_W \Leftrightarrow U = U_X \cap W$.

   $$\begin{aligned} U \text{ abierto en } \tau'|_W \Leftrightarrow U &= \overbrace{(U_X \cap Y)}^{\text{abierto en } \tau'} \cap W \\ &\Leftrightarrow U_X \cap W. \end{aligned}$$

   □

2. Considere $\mathbb{Z}$ con la topología profinita y $H \leq \mathbb{Z}$. Pruebe que la topología inducida en H es igual a la topología profinita en H.

   Remark. Topología profinita: G, $\tau(G)$. $\mathcal{B} = \{gH \ : \ H \triangleleft G, \ [G : H] < \infty\}$. Caso de Z: si $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, entonces $S(a,b) = \{a + bn \ : \ n \in \mathbb{Z}\}$. Luego, $G = \mathbb{Z}, \ H = (b), \ b \neq 0$.

   $$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \{a(b) \ : \ b \neq 0\} \\ &= \{a + bn \ : \ n \neq 0\} \\ &= \{S(a,b)\}. \end{aligned}$$

   Proof. $\tau(\mathbb{Z})$ = topología profinita en $\mathbb{Z}$. Si $H \leq \mathbb{Z}, \ H = (m), \ m \neq 0, 1$. Notar que se debe demostrar $\tau(H) = \tau(\mathbb{Z})|_H$. (Afirmamos que $\mathcal{B}(H) = \{S(sm, tm) \ : \ t \neq 0\}$ es base de $\tau(H)$ y que $\mathcal{B}(Z) \cap H$ es base de $\tau(\mathbb{Z})|_H$)
   $\boxed{\supseteq}$ Sea $x \in B \in \mathcal{B}(\mathbb{Z}) \cap H, \ B = S(a,b) \cap (m)$. Luego, $x = a + bn \in$

(m). $x \in S(x, bm) \subseteq S(a, b) \cap (m)$. Si $y \in S(x, bm)$, entonces

$$\begin{aligned} y &= x + bmk \\ &= a + bn + bmk \\ &= a + b(n + mk) \in S(a, b). \end{aligned}$$

$\boxed{\subseteq}$ Sea $B \in \mathcal{B}(H)$. Luego $B = S(tm, sm)$, $s \neq 0$. Notar que B es un abierto de la base de $\tau(\mathbb{Z})$ y que $B \subseteq H = (m)$. Entonces, $B \in \tau(\mathbb{Z})|_H$. $\square$

3. X espacio topológico, $A \subseteq X$. Definimos la frontera de A por

$$\partial A := \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}.$$

   (a) $\partial A = \overline{A} \setminus int(A)$;
   (b) Demuestre que $int(A)$, ∂A son disjuntos y $\overline{A} = int(A) \cup \partial A$;
   (c) $\partial A = \varnothing \Leftrightarrow A$ abierto y cerrado;
   (d) U abierto $\Leftrightarrow \partial U = \overline{U} \setminus U$;
   (e) U abierto ¿$U = int(\overline{U})$?

Proof. (a) Notar que

$$\overline{A} \setminus int(A) = \overline{A} \cap int(A)^c.$$

Basta ver que $int(A)^c = \overline{X \setminus A}$.

$$\begin{aligned} x \in int(A)^c &\Leftrightarrow \forall\, U(X),\ U(X) \nsubseteq A \\ &\Leftrightarrow \forall\, U(X),\ U(X) \cap (X - A) \neq \varnothing. \\ x \in \overline{X \setminus A} &\Leftrightarrow \forall\, U(X),\ U(X) \cap (X \setminus A) \neq \varnothing.. \end{aligned}$$

(b) $\partial A = \overline{A} \setminus int(A) \Rightarrow \partial A \cap int(A) = \varnothing$. Luego, $(\bigcup int(A))$, $partial A \cup int(A) = \overline{A}$.

(c) $\partial A = \varnothing \Leftrightarrow A$ abierto y cerrado.
$\boxed{\Rightarrow}$ Basta ver que

$$\begin{aligned} \partial A &= \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} \\ &= A \cap X \setminus A \\ &= \varnothing. \end{aligned}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Basta ver que

$$\begin{aligned} \partial A = \varnothing = \overline{A} \setminus int(A) &\Rightarrow int(A) = \overline{A} \quad (int(A) \subseteq A \subseteq \overline{A}) \\ &\Rightarrow A = \overline{A} = int(A) \\ &\Rightarrow A \text{ abierto y cerrado.} \end{aligned}$$

(d) U abierto $\Leftrightarrow \partial U = \overline{U} \setminus U$

$\boxed{\Rightarrow}$ $\partial U = \overline{U} \setminus int(U) = \overline{U} \setminus U$.

$\boxed{\Leftarrow}$ $\overline{U} = int(U) \cup \partial U = int(U) \cup (\overline{U} \setminus U)$. $\overline{U} \cap (\overline{U} \cap U^c)^c = \overline{U} \setminus (\overline{U} \setminus U) = int(U)$. (terminar dem)

(e) La igualdad es falsa, pero una de las contenciones es real.

$\square$