

# Teoría de Integración

Basado en las clases impartidas por Santiago Saglietti en el  
segundo semestre del 2025

# Contents

<b>1</b>	<b>Integral de Riemann</b>	<b>2</b>
1.1	Limitaciones de la integral de Riemann . . . . .	6
1.2	Demostración del teorema de extensión de Carathéodory . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Unidad 2 - Funciones Medibles</b>	<b>36</b>
2.0.1	Principios de Littlewood . . . . .	45
<b>3</b>	<b>Unidad 3: Integración</b>	<b>48</b>
3.1	Integración de funciones a valores en $\mathbb{C}$ . . . . .	60
3.1.1	Caso particular: Integral de Lebesgue . . . . .	61
<b>4</b>	<b>Unidad 4: Espacios Producto</b>	<b>65</b>

# Chapter 1

## Integral de Riemann

### Clase 1

4 de Agosto

**Definición 1.1** (partición + intervalos). Una partición de un intervalo  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$  es un subconjunto finito  $\Pi \subseteq [a, b]$  tal que  $a, b \in \Pi$ . Denotaremos a las particiones como  $\Pi = \{x_0, \dots, x_n\}$ , donde  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ . Los intervalos  $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 1, \dots, n$  serán llamados intervalos de la partición.

**Observación.** A veces, identificaremos la partición  $\Pi$  con  $(I_i)_{i=1, \dots, n}$ . En tal caso, abusando de la notación, escribiremos  $I_i \in \Pi$  cuando queramos hablar de los intervalos de  $\Pi$ .

**Definición 1.2** (norma de particiones). La norma de una partición  $\Pi$  como  $\|\Pi\| := \max_{i=1, \dots, n} (x_i - x_{i-1}) = \max_{I_i \in \Pi} |I_i|$ .

**Definición 1.3** (partición marcada). Una partición marcada de  $[a, b]$  es un par  $\Pi^* := (\Pi, \varepsilon)$  donde:

- $\Pi = \{x_0, \dots, x_n\}$  es una partición de  $[a, b]$ ;
- $\varepsilon = \{x_1^*, \dots, x_n^*\}$  es una colección de puntos tal que  $x_i^* \in I_i$  para cada  $i = 1, \dots, n$ .

**Observación.** Dada una partición marcada  $\Pi^* = (\Pi, \varepsilon)$ , definimos  $\|\Pi^*\| := \|\Pi\|$ .

**Definición 1.4** (Suma de Riemann). Sean  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  acotada y  $\Pi^* = (\Pi, \varepsilon)$  una partición marcada. Definimos la suma de Riemann de  $f$  asociada a  $\Pi^*$  como:

$$S_R(f; \Pi^*) := \sum_{n=1}^n f(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{I_i \in \Pi} f(x_i^*)|I_i|.$$

## Clase 2

6 de Agosto

**Definición 1.5** (Riemann integrable). Dada  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  acotada, decimos que es Riemann integrable si existe el límite  $\lim_{\|\Pi^*\| \rightarrow 0} S_R(f; \Pi^*)$ . Equivalentemente,  $\exists L \in \mathbb{R}$ , tal que dado cualquier  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  tal que  $\|\Pi^*\| < \delta \Rightarrow |S_R(f; \Pi^*) - L| < \varepsilon$ .

**Observación.** Cuando el límite existe, lo llamamos la integral de Riemann de  $f$  en  $[a, b]$  y lo notamos  $\int_a^b f(x)dx$ .

**Definición 1.6** (Sumas superior e inferior de Darboux). Dadas  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  acotada y  $\Pi = (I_i)_{i=1, \dots, n}$  una partición de  $[a, b]$ , definimos

$$m_{I_i} := \inf_{x \in I_i} f(x), \quad M_{I_i} := \sup_{x \in I_i} f(x) \quad \text{y}$$

$$\underline{S}(f; \Pi) := \sum_{I_i \in \Pi} m_{I_i} |I_i|, \quad \bar{S}(f; \Pi) := \sum_{I_i \in \Pi} M_{I_i} |I_i|.$$

Llamamos a  $\underline{S}(f; \Pi)$  y  $\bar{S}(f; \Pi)$  las sumas inferior y superior de Darboux de  $f$  con respecto a  $\Pi$ , respectivamente.

**Nota.** Como  $m_{I_i} \leq f(x) \leq M_{I_i}, \forall x \in I_i$  para toda partición marcada  $\Pi^* = (\Pi; \varepsilon)$ , tenemos  $\underline{S}(f; \Pi) \leq S_R(f; \Pi^*) \leq \bar{S}(f; \Pi)$ .

**Definición 1.7** (refinamiento). Diremos que una partición  $\Pi'$  de  $[a, b]$  es un refinamiento de otra partición de  $[a, b]$ ,  $\Pi$ , si  $\Pi \subseteq \Pi'$ . Equivalentemente, si para todo  $J_i \in \Pi'$  existe  $I_i \in \Pi$  tal que  $J_i \subseteq I_i$ .

**Proposición 1.8.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  acotada. Entonces,

- Si  $\Pi \subseteq \Pi'$  son particiones de  $[a, b]$ ,

$$\underline{S}(f; \Pi) \leq \underline{S}(f; \Pi'), \quad \bar{S}(f; \Pi) \geq \bar{S}(f; \Pi').$$

- Si  $\Pi_1, \Pi_2$  son particiones de  $[a, b]$  cualesquiera,

$$\underline{S}(f; \Pi_1) \leq \bar{S}(f; \Pi_2)$$

**Definición 1.9.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  acotada. Definimos:

- La integral superior (de Darboux) de  $f$  como  $\int_a^b f(x)dx := \inf_{\Pi} \bar{S}(f; \Pi)$ .
- La integral inferior (de Darboux) de  $f$  como  $\int_a^b f(x)dx := \sup_{\Pi} \underline{S}(f; \Pi)$ .

**Teorema 1.10.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  acotada. Entonces,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \underline{S}(f; \Pi) \quad \text{y} \quad \int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \overline{S}(f; \Pi).$$

**Observación.** Equivalentemente, para cualquier sucesión  $(\Pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de partición de  $[a, b]$  tal que  $\|\Pi_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , se tiene que

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}(f; \Pi_n) \quad \text{y} \quad \int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(f; \Pi_n).$$

**Teorema 1.11.** Dada  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  acotada, son equivalentes:

1.  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$  (i.e.,  $f$  es Darboux integrable).
2.  $f$  es Riemann integrable.
3.  $\lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \overline{S}(f; \Pi) - \underline{S}(f; \Pi) = 0$ .
4.  $\forall (\Pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sucesión de particiones de  $[a, b]$  tal que  $\|\Pi_n\| \rightarrow 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(f; \Pi_n) - \underline{S}(f; \Pi_n) = 0.$$

5.  $\exists (\Pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sucesión de particiones de  $[a, b]$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(f; \Pi_n) - \underline{S}(f; \Pi_n) = 0.$$

## Clase 3

7 de Agosto

**Nota.** Las integrales en el sentido de Darboux y el de Riemann coinciden.

**Proposición 1.12.** Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es monótona, entonces es Riemann integrable.

**Observación.** Una función monótona tiene discontinuidades numerables.

**Proposición 1.13.** Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es continua, entonces es Riemann integrable.

En particular, existen funciones Riemann integrables con numerables discontinuidades. De hecho, hay ejemplos con  $c$  (cardinal del continuo) discontinuidades. No obstante, si  $f$  es integral de Riemann, su conjunto de discontinuidades tiene que ser "pequeño".

**Teorema 1.14.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  acotada. Entonces,  $f$  es Riemann Integrable si y sólo si su conjunto de discontinuidades tiene medida nula.

**Definición 1.15** (intervalo). Decimos que un conjunto  $I \subseteq \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$  es un intervalo si satisface

$$x, y \in I \Rightarrow z \in I \text{ para todo } \min x, y \leq z \leq \max x, y.$$

**Ejemplo.** (y propiedades)

- Dados  $a \leq b$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ), los conjuntos  $(a, b)$ ,  $(a, b]$ ,  $[a, b]$ ,  $[a, b)$  son intervalos;
- El conjunto vacío es un intervalo ( $\emptyset = (a, a)$ );
- Los puntos son intervalos.  $I = [\lambda, \lambda]$ ;
- La intersección de intervalos es intervalos.

**Definición 1.16** (intervalo generalizado). Decimos que un conjunto  $I \subseteq \mathbb{R}^d$  es un intervalo si puede escribirse como

$$I = \prod_{k=1}^d I_k$$

donde cada  $I_k$  es un intervalo en  $\mathbb{R}$ . La medida de un intervalo  $I \subseteq \mathbb{R}^d$  se define como

$$|I| := \prod_{k=1}^d |I_k|.$$

**Nota.** Los intervalos en  $\mathbb{R}^d$  heredan las mismas propiedades en  $\mathbb{R}$ :

- Intersección de intervalos en  $\mathbb{R}^d$  es intervalo.
- Si  $I \subseteq J \subseteq \mathbb{R}^d$  son intervalos, entonces  $|I| \leq |J|$ .

**Definición 1.17** (medida nula). Un conjunto  $E \subseteq \mathbb{R}^d$  se dice de medida nula si, dado  $\varepsilon > 0$ , existe una sucesión  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de intervalos de  $\mathbb{R}^d$  tal que

$$E \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \quad \text{y} \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} |I_n| < \varepsilon.$$

**Ejemplo.** (y propiedades)

1. Todo conjunto unitario  $\{x\}$ , ( $x \in \mathbb{R}^d$ ) tiene medida nula;
2. Toda unión numerable de conjuntos de medida nula tiene medida nula;
3. Cualquier conjunto numerable tiene medida nula;
4. Cualquier subconjunto de un conjunto de medida nula tiene medida nula;
5. Existen conjuntos no numerables de medida nula:

- En  $\mathbb{R}^d$  con  $d \geq 2$ , los ejes  $\{x : x_1 = 0\}, i = 1, \dots, d$  tiene medida nula.
  - En  $\mathbb{R}$ , el conjunto de cantor tiene medida nula.
6.  $E \subseteq \mathbb{R}^d$  es de medida nula, entonces  $\alpha \dot{E}$  tiene medida nula  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ .
  7.  $E \subseteq \mathbb{R}^d$  es de medida nula, entonces  $E + v$  tiene medida nula  $\forall v \in \mathbb{R}^d$ .
  8. Si  $E$  contiene un intervalo no unitario, entonces no tiene medida nula. Notar que:
    - La vuelta no es válida:  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  no contiene intervalos no unitarios pero no puede tener medida nula.
    - De esto se deduce que si  $E \subseteq \mathbb{R}^d$  tiene medida nula. Entonces  $E^c$  es denso (no vale la vuelta:  $E^c = \mathbb{Q}$ ).
  9.  $E \subseteq \mathbb{R}^d$  tiene medida nula si y sólo si

$$|E|_e := \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} |I_n| : E \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \right\} = 0, \quad I_n \text{ intervalo } \forall n \in \mathbb{N}.$$

## Clase 4

8 de Agosto

**Teorema 1.18.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  acotada. Entonces

$$f \text{ Riemann integrable} \iff D_f = \{x \in [a, b] : f \text{ discontinua en } x\} \text{ tiene medida nula.}$$

## 1.1 Limitaciones de la integral de Riemann

1. Sólo está definida para  $f$  acotada y sobre intervalos  $[a, b]$  acotados. La teoría de integrales impropias resuelve esto.
2. Propiedades del espacio  $\mathcal{R}([a, b]) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ Riemann integrable}\}$ : Nos gustaría poder definir una noción de convergencia en  $\mathcal{R}([a, b])$  tal que

$$f_n \rightarrow f \text{ en } \mathcal{R}([a, b]) \Rightarrow \int_a^b f_n \rightarrow \int_a^b f \quad \left( \lim \int_a^b f_n = \int_a^b \lim f_n \right).$$

**Observación.** La convergencia puntal NO cumple esto (punto 2).

**Ejemplo (1).**

- $f_n := n\chi_{(0, \frac{1}{n}]}$  es Riemann integrable en  $[0, 1]$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ;
- $f_n \rightarrow f \cong 0$  puntualmente en  $[0, 1]$ ;
- $\int_0^1 f_n = 1 \not\rightarrow 0 = \int_0^1 f$ .

**Ejemplo (2).**

- Sea  $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una enumeración de  $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ ;
- $f_n := \chi_{\{Q_1, \dots, Q_n\}}$  es Riemann integrable en  $[0, 1]$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ;
- $f_n \rightarrow f := \chi_{\mathbb{Q} \cap [0, 1]}$  puntualmente en  $[0, 1]$ ;
- $f$  no es Riemann integrable.  $\int_0^1 f = 0 \neq 1 = \overline{\int_0^1 f}$ .

**Observación.** La convergencia uniforme SÍ cumple esto, pero es demasiado fuerte.

**Ejercicio** (Guía 1). Sean  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{R}([a, b])$  tales que  $f_n \rightarrow f$  uniformemente en  $[a, b]$ . Entonces,  $f \in \mathcal{R}([a, b])$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$ .

**Ejemplo** (3).

- $f_n(x) := x^n$  en  $[0, 1]$ ,  $f_n \in \mathcal{R}([a, b])$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n \rightarrow \chi = f$  puntualmente;
- $f \in \mathcal{R}([a, b])$  y  $\int_0^1 f_n(x) dx = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 = \int_0^1 f$ ;
- $f_n$  no converge uniformemente a  $f$ .

Resulta que la noción de convergencia "óptima" (la más "débil" que cumple lo que queremos) es la de convergencia en  $L'$ :

$$f_n \xrightarrow{L'} f \text{ si } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f_n - f| = 0.$$

Esta noción de convergencia viene dada por una "norma":

- $\|f\|_{L'} := \int_a^b |f|$  (recordar que  $f \in \mathcal{R}([a, b]) \Rightarrow |f| \in \mathcal{R}([a, b])$ );
- $d_{L'}(f, g) := \|f - g\|_{L'} = \int_a^b |f - g|$ .

**Observación.**  $\|\cdot\|_{L'}$  no es una norma porque  $\|f\|_{L'} = 0 \nRightarrow f = 0$ . Decimos que es una *pseudo-norma* y  $d$  una *pseudo-métrica*.

Para arreglar esto, dadas  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , decimos que son *equivalentes* y lo notamos  $f \sim g$  si  $\{x \in [a, b] : f(x) \neq g(x)\}$  tiene medida nula. Resulta que  $\sim$  es una relación de equivalencia y, además,

$$f, g \in \mathcal{R}([a, b]), f \sim g \Rightarrow \int_a^b f = \int_a^b g.$$

Sea  $\overline{\mathcal{R}}([a, b])$  el conjunto de clases de equivalencia de  $\mathcal{R}([a, b])$ , y denotamos por  $\bar{f}$  a la clase de equivalencia de  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ . Con esto,  $\|\bar{f}\|_{L'} := \int_a^b |f| dx$  define una norma en  $\overline{\mathcal{R}}([a, b])$  que se llama la **norma**  $L'$ .

**Observación.** Hay un problema:  $(\overline{\mathcal{R}}([a, b]), \|\cdot\|_{L'})$  NO ES COMPLETO!

3. **TFC:** Si  $f \in \mathcal{R}([a, b])$  es continua en  $x_0 \in [a, b]$ , entonces  $F(x) := \int_a^x f(t) dt$  es derivable en  $x_0$  y  $F'(x_0) = f(x_0)$ . En particular,  $F$  es derivable en  $x$  y  $F'(x) = f(x)$  para todo  $x$  salvo un conjunto de medida nula.

## Clase 5

18 de Agosto

**Teorema Fundamental del Cálculo:** Si  $f \in \mathcal{R}([a, b])$  es continua en  $x_0 \in [a, b]$ , entonces  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $F(x) := \int_a^x f(t)dt$  es derivable en  $x = x_0$  y vale  $F'(x_0) = f(x_0)$ . En particular,  $F'(x) = f(x)$  salvo quizás por un conjunto de  $x \in [a, b]$  de medida nula. O sea, podemos integrar y luego derivar y esto es "casi" como no hacer nada. Pero, tenemos problemas:

### 1. Este "casi" no puede removerse

**Teorema 1.19** (Hankel, 1871). Dado  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ , existe  $f \in \mathcal{R}([a, b])$  tal que  $F(x) := \int_a^x f(t)dt$  no es derivable para ningún  $x$  en un subconjunto denso en  $[a, b]$  (y, en particular, infinito).

### 2. A veces no podemos componer en el orden inverso

**Teorema 1.20** (Volterra, 1881). Dado  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ , existe  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  derivable en  $[a, b]$ , tal que  $f'$  es acotada en  $[a, b]$  pero  $f' \notin \mathcal{R}([a, b])$ .

## Extendiendo la integral de Riemann

Sean  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  acotada y  $\Pi = \{x_0, \dots, x_n\}$  una partición de  $[a, b]$ . Definimos:

$$\begin{aligned}\Phi_{f,\Pi}(x) &:= m_{I_1}\chi_{[x_0, x_1]}(x) + \sum_{i=2}^n m_{I_i}\chi_{(x_{i-1}, x_i]}(x), \quad m_{I_i} = \inf_{t \in I_i} f(t) \\ &= m_{I_1}\chi_{\{x_0\}}(x) + \sum_{i=1}^n m_{I_i}\chi_{(x_{i-1}, x_i]}(x) \\ \psi_{f,\Pi}(x) &:= M_{I_1}\chi_{\{x_0\}}(x) + \sum_{i=1}^n M_{I_i}\chi_{(x_{i-1}, x_i]}(x), \quad M_{I_i} = \sup_{t \in I_i} f(t).\end{aligned}$$

Observemos que  $\Phi_{f,\Pi}(x) \leq f(x) \leq \psi_{f,\Pi}(x) \quad \forall x \in [a, b]$ . Además,

$$\begin{aligned}\int_a^b \Phi_{f,\Pi}(x)dx &= \underline{S}(f, \Pi), \\ \int_a^b \psi_{f,\Pi}(x)dx &= \overline{S}(f, \Pi).\end{aligned}$$

En particular, si  $f$  es Riemann integrable,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \overline{\int_a^b f(x)dx} = \inf \left\{ \int_a^b \psi_{f,\Pi} : \Pi \text{ partición} \right\} \\ &= \underline{\int_a^b f(x)dx} = \sup \left\{ \int_a^b \Phi_{f,\Pi} : \Pi \text{ partición} \right\}.\end{aligned}$$

**Definición 1.21** (función escalonada). Una función  $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  se dice escalonada si existen  $\Pi = \{x_0, \dots, x_n\}$  partición de  $[a, b]$  y  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$  tales que

$$\Phi|_{(x_{i-1}, x_i)} \equiv c_i \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Notemos que podemos escribir a cualquier función  $\Phi$  escalonada como

$$\begin{aligned}\Phi(x) &:= \sum_{i=1}^n c_i \cdot \chi_{(x_{i-1}, x_i)}(x) + \sum_{i=0}^n \Phi(x_i) \cdot \chi_{\{x_i\}}(x) \\ &= \sum_{i=1}^k c_j \cdot \chi_{A_j}(x).\end{aligned}$$

donde los  $A_j$  son intervalos disjuntos tales que  $\bigsqcup_{j=1}^k A_j = [a, b]$  (se pone una "D" dentro de la unión para denotar que estamos haciendo una unión disjunta).

Si tomamos  $\Phi$  de la forma  $\Phi = \sum_{j=1}^k c_j \cdot \chi_{A_j}$  con  $(A_j)_{j=1, \dots, k}$  disjuntos,  $\bigsqcup_{j=1}^k A_j = [a, b]$  pero  $A_j$  no son necesariamente intervalos, diremos que  $\Phi$  es una función escalonada generalizada. Como para funciones escalonadas "normales", tenemos

$$\int_a^b \Phi(x) dx = \sum_{j=1}^k c_j \cdot |A_j| \left( = \sum_{i=1}^n c_i \cdot |I_i| \right)$$

**La función longitud** Sea  $\mathcal{I}$  la colección de los intervalos en  $\mathbb{R}$ . Definimos la función longitud  $\lambda : \mathcal{I} \rightarrow [0, \infty]$  como  $\lambda(I) := |I|$ .

**Propiedades:**

1.  $\lambda(\emptyset) = 0$ ;
2.  $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ ,  $I_1 \subseteq I_2 \Rightarrow \lambda(I_1) \leq \lambda(I_2)$  (Monotonía de  $\lambda$ );
3. (Aditividad finita de  $\lambda$ ) Si  $I \in \mathcal{I}$  es tal que  $I = \bigsqcup_{i=1}^n J_i$  con  $J_i \in \mathcal{I}$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ ,  $J_i \cap J_j = \emptyset$  con  $i \neq j$ , entonces

$$\lambda(I) = \sum_{i=1}^n \lambda(J_i);$$

4. ( $\sigma$ -aditividad de  $\lambda$ ) Si  $I \in \mathcal{I}$  es tal que  $I = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ , con  $(I_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{I}$  disjuntos, entonces

$$\lambda(I) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(I_i);$$

5. ( $\sigma$ -subaditividad de  $\lambda$ ) Si  $I \in \mathcal{I}$  verifica  $I \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ ,  $(I_i)_{i \in \mathbb{N}}$  intervalos (no necesariamente disjuntos), entonces  $\lambda(I) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(I_i)$ ;
6.  $\lambda(I+x) = \lambda(I)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $I+x := \{a+x : a \in I\}$ ;
7.  $\lambda(\{x\}) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$ .

## Clase 6

20 de Agosto

Nos gustaría extender  $\lambda$  a una clase más grande que  $\mathcal{I}$ . Más precisamente, nos gustaría definir una aplicación  $m : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ , donde  $\mathcal{M}$  es una colección de subconjuntos de  $\mathbb{R}$  tal que  $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{M}$ , de manera tal que, dado  $E \in \mathcal{M}$ ,  $m(E)$  represente la "longitud" de  $E$ . Idealmente, nos gustaría que  $m$  cumpla lo siguiente:

1.  $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ ;
2. Si  $I \in \mathcal{I}$ , entonces  $m(I) = |I|$ ;
3.  $m$  es  $\sigma$ -aditiva ( $E, (E_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}, E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \Rightarrow m(E) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$ );

**Ejercicio.** (1) + (2) + (3)  $\Rightarrow m$  es monótona,  $\sigma$ -subaditiva y finitamente aditiva.

4. Si  $E \in \mathcal{M}$ , entonces  $E + x \in \mathcal{M}$  y  $m(E + x) = m(E) \forall x \in \mathbb{R}$ .

El problema es que, si asumimos el Axioma de Elección, uno puede mostrar que no existe una tal  $m$  que cumpla (1) – (2) – (3) – (4) y, de hecho, no se sabe si existe  $m$  que cumpla (1) – (2) – (3). (Si asumimos la hipótesis del continuo, entonces no existe  $m$  que cumpla (1) – (2) – (3)).

Luego, para construir  $m$  debemos debilitar alguna de las propiedades:

- Si debilitamos (1)  $\Rightarrow$  TEORÍA DE LA MEDIDA;
- Si debilitamos (3), tenemos dos opciones sobre lo que pedir:
  - $\rightarrow$  aditividad finita  $\Rightarrow$  "medidas finitamente aditivas";
  - $\rightarrow$   $\sigma$ -subaditividad  $\Rightarrow$  "medidas exteriores".

Vamos a optar por debilitar (1).

Una manera de extender  $\lambda$  es la siguiente:

- i. Si  $E = \bigcup_{i=1}^n I_i$  entonces definimos  $\lambda(E) := \sum_{i=1}^n \lambda(I_i)$ ;
- ii. Si  $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$  entonces definimos  $\lambda(E) := \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(I_i)$ ;
- iii. La fórmula anterior nos permite definir  $\lambda(E)$  para todo  $E$  abierto en  $\mathbb{R}$ ;
- iv. Para conjuntos mas generales, "aproximar" por abiertos.

**Definición 1.22 (premedida).** Sea  $X$  un conjunto no vacío y  $\mathcal{C}$  una colección de subconjuntos de  $X$  tal que  $\emptyset \in \mathcal{C}$ . Diremos que una aplicación  $\tau : \mathcal{C} \rightarrow [0, \infty]$  es una premedida si  $\tau(\emptyset) = 0$ .

**Observación.** El conjunto no vacío  $X$  será llamado un espacio y la colección  $\mathcal{C}$  será llamada una clase (de subconjuntos de  $X$ ).

Intuitivamente,  $\mathcal{C}$  representa la colección de subconjuntos cuyo "tamaño" sabemos medir y  $\tau$  nos da su medida.

**Ejemplo.**

1. **Premedida de Lebesgue:**  $\mathcal{C} := \mathcal{I} := \{I \subseteq \mathbb{R} : I \text{ intervalo}\}$ ,  $\tau(I) := |I|$ .
2. **Premedidas de Lebesgue-Stieltjes:** Sea  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  monótona creciente y continua a derecha ( $\lim_{x \rightarrow x_0}^+ F(x) = F(x_0)$ ). Una función tal se dice una función de Lebesgue-Stieltjes.

Observemos que, por monotonía, existen los límites

$$\left\{ \begin{array}{l} F(\infty) := \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) \\ F(-\infty) := \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) \end{array} \right\} \in \mathbb{R}$$

Sea además la clase  $\tilde{\mathcal{I}}$  de intervalos de  $\mathbb{R}$  dada por

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{I}} &:= \{I(a, b) : -\infty \leq a \leq b \leq \infty\} \text{ donde } I(a, b) := (a, b] \cap \mathbb{R} \\ &= \{(a, b] : -\infty \leq a \leq b < \infty\} \cup \{(a, \infty) : -\infty \leq a < \infty\}. \end{aligned}$$

Definimos la premedida  $\tau_F$  de Lebesgue-Stieltjes asociada a  $F$  como la aplicación  $\tau_F : \tilde{\mathcal{I}} \rightarrow [0, \infty]$ , dada por

$$\tau_F(I(a, b)) = F(b) - F(a).$$

**Nota.** Observar que si  $F(x) = x$  entonces  $\tau_F$  es la premedida de Lebesgue (sobre  $\tilde{\mathcal{I}}$ ).

3. **Premedidas de Probabilidad:** Si  $F$  es una función de L-S tal que  $F(\infty) = 1$  y  $F(-\infty) = 0$ , decimos que  $F$  es una función de distribución (acumulada). En tal caso, la premedida  $\tau_F$  se conoce como premedida de probabilidad o predistribución (en  $\mathbb{R}$ ).

**Observación.**  $\tau_F(\mathbb{R}) = \tau_F(I(-\infty, \infty)) = F(\infty) - F(-\infty) = 1 - 0 = 1$ .

#### 4. Premedida...

## Clase 7

22 de Agosto

**Definición 1.23** (semiálgebra). Sea  $X$  un espacio y  $\mathcal{C}$  una clase de subconjuntos de  $X$ . Decimos que  $\mathcal{C}$  es una semiálgebra (de subconjuntos de  $X$ ) si cumple:

1.  $\emptyset \in \mathcal{C}$ ;
2. ( $\mathcal{C}$  es cerrada por intesecciones finitas)  $A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{C}$ ;
3. Si  $A \in \mathcal{C}$ , existen  $C_1, \dots, C_n \in \mathcal{C}$  disjuntos tal que  $A^c = \bigcup_{i=1}^n C_i$ .

**Ejemplo.**

1. La clase  $\mathcal{I}_d$  de intervalos en  $\mathbb{R}^d$  es una semiálgebra.
2. La clase  $\tilde{\mathcal{I}} := \{(a, b] \cap \mathbb{R} : -\infty \leq a \leq b \leq \infty\}$  es una semiálgebra.
3. Si  $X$  e  $Y$  son espacios y  $\mathcal{C}_X, \mathcal{C}_Y$  son semiálgebras en  $X$  e  $Y$  respectivamente, entonces

$$\mathcal{C}_X \times \mathcal{C}_Y := \{F \times G : F \in \mathcal{C}_X, G \in \mathcal{C}_Y\}$$

es una semiálgebra en  $X \times Y$ , llamada "semiálgebra producto".

**Definición 1.24** (álgebra). Sean  $X$  un espacio y  $\mathcal{A}$  una clase de subconjuntos de  $X$ . Decimos que  $\mathcal{A}$  es un álgebra (de subconjuntos de  $X$ ) si cumple que:

- (i)  $\emptyset \in \mathcal{A}$ ;
- (ii)  $\mathcal{A}$  es cerrado por intersecciones finitas;
- (iii) ( $\mathcal{A}$  es cerrada por complementos)  $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$ .

Equivalentemente, en presencia de (iii), (ii) se puede reemplazar por:

- (ii') ( $\mathcal{A}$  es cerrada por uniones finitas)  $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$ . (**Dem:** Ejercicio!)

**Ejemplo.**

1.  $X$  espacio,  $\mathcal{A}_1 := \{\emptyset, X\}$ ,  $\mathcal{A}_2 := \mathcal{P}(X)$  son álgebras (donde  $\mathcal{A}$  es llamada el álgebra trivial);
2. Sea  $\mathcal{S}$  una semiálgebra de subconjuntos de un espacio  $X$ . Entonces

$$\mathcal{A} := \left\{ E \subseteq X : \exists S_1, \dots, S_n \in \mathcal{S} \text{ disjuntos tal que } E = \bigcup_{i=1}^n S_i \right\}$$

es un álgebra, llamada el álgebra generada por  $\mathcal{S}$ . Notemos que  $\mathcal{A}(\mathcal{S})$  es el menor álgebra que contiene a  $\mathcal{S}$ :

- (i)  $\mathcal{A}(\mathcal{S})$  es un álgebra y  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{S})$ ;
- (ii) Si  $\mathcal{A}'$  es un álgebra con  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}'$  entonces  $\mathcal{A}(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{A}'$ .

**Nota.** Toda álgebra es una semiálgebra.

**Definición 1.25** ( $\sigma$ -álgebra). Una clase (no vacía)  $\mathcal{M}$  de subconjuntos de un espacio  $X$  se dice una  $\sigma$ -álgebra si cumple:

1.  $\emptyset \in \mathcal{M}$ ;
2.  $E \in \mathcal{M} \Rightarrow E^c \in \mathcal{M}$ ;
3.  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathcal{M}$ .

Llamamos al par  $(X, \mathcal{M})$  un espacio medible y a los elementos de  $\mathcal{M}$ , conjuntos medibles.

**Nota.**

1. Todo  $\sigma$ -álgebra es un álgebra;
  2. Equivalentemente, en presencia de (1), (3) se puede reemplazar por
- $$(3'.) (E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M} \Rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathcal{M}.$$

**Ejemplo.**

1.  $\sigma$ -álgebra  $\Rightarrow$  álgebra  $\Rightarrow$  semiálgebra (no valen las recíprocas);
2.  $\{\emptyset, X\}, \mathcal{P}(X)$  son  $\sigma$ -álgebras;
3. Si  $(\mathcal{M}_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$  son  $\sigma$ -álgebras, entonces

$$\bigcap_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{M}_\gamma := \{E \subseteq X : E \in \mathcal{M}_\gamma, \forall \gamma \in \Gamma\}$$

es una  $\sigma$ -álgebra.

4. Si  $\mathcal{M}$  es una clase de subconjuntos de  $X$ , entonces

$$\sigma(\mathcal{M}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{M} \text{ } \sigma\text{-álgebra} \\ \mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}}} \mathcal{M}$$

es la  $\sigma$ -álgebra generada por  $\mathcal{M}$ . De hecho,  $\sigma(\mathcal{M})$  es la menor  $\sigma$ -álgebra que contiene a  $\mathcal{C}$ :

- (a)  $\sigma(\mathcal{C})$  es  $\sigma$ -álgebra y  $\mathcal{C} \subseteq \sigma(\mathcal{C})$ ;
  - (b) Si  $\mathcal{F}$  es  $\sigma$ -álgebra y  $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$  entonces  $\sigma(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{F}$ .
5. Si  $(X, \mathcal{T})$  es un espacio topológico,  $\sigma(\mathcal{T})$  se conoce como la  $\sigma$ -álgebra de Borel, y sus elementos se llaman Borelianos. La notamos  $\beta(X)$  ( $= \sigma(\mathcal{T})$ ).

**Ejemplo.**  $\beta(\mathbb{R})$  contiene a todos los abiertos, cerrados, intervalos, conjuntos de tipo  $G_\delta$  y  $F_\sigma, \dots$ . De hecho,  $\beta(\mathbb{R}) = \sigma(\text{cerrados}) = \sigma(\text{compactos}) = \sigma(\mathcal{I}) = \sigma(\tilde{\mathcal{I}})$ .

**Definición 1.26.** Sea  $\mathcal{C}$  una clase (no vacía) de subconjuntos de  $X$  y  $\mu : \mathcal{C} \rightarrow [0, \infty]$  una función (la llamamos una función de conjuntos). Diremos que:

- (i)  $\mu$  es **monótona** (en  $\mathcal{C}$ ) si  $A, B \in \mathcal{C}, A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$ ;
- (ii)  $\mu$  es **finitamente aditiva** si  $(A_i)_{i=1, \dots, n} \subseteq \mathcal{C}$ , entonces

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i);$$

- (iii)  $\mu$  es  **$\sigma$ -aditiva** si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}$  disjuntos, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i);$$

- (iv)  $\mu$  es  **$\sigma$ -subaditiva** si  $\mu(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_n)$ , para todo  $A \in \mathcal{C}$  y  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}$  tal que  $A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$

## Clase 8

25 de Agosto

**Observación.** Rana da una definición más débil de (4):

$$A \in \mathcal{C}, A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, A_i \in \mathcal{C} \forall i \Rightarrow \mu(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

Ambas definiciones son equivalentes si  $\mathcal{C}$  es una semiálgebra y  $\mu$  es monótona (siempre será el caso para nosotros).

**Definición 1.27** (premedida finita y  $\sigma$ -finita). Una premedida  $\tau : \mathcal{C} \rightarrow [0, \infty]$  se dice:

1. **finita** si  $X \in \mathcal{C}$  y  $\tau < \infty$ ;
2.  **$\sigma$ -finita** si existen  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}$  disjuntos tales que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = X \quad \text{y} \quad \tau(C_n) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

**Ejemplo.**

1. finita  $\Rightarrow \sigma$ -finita;
2. La función longitud  $\lambda : \mathcal{I} \rightarrow [0, \infty]$  es  $\sigma$ -finita pero no finita;
3. Si  $F$  es una función de L-S, entonces  $\tau_F : \tilde{\mathcal{I}} \rightarrow [0, \infty]$  es siempre  $\sigma$ -finita ( $\tau_F((n, n+1]) = F(n+1) - F(n) < \infty \forall n \in \mathbb{Z}$ ) y es finita si y sólo si  $\tau_F(\mathbb{R}) = \tau_F((-\infty, \infty] \cap \mathbb{R}) = F(\infty) - F(-\infty) < \infty$ .

**Definición 1.28** (medida). Sea  $(X, \mathcal{M})$  es un espacio medible. Diremos que  $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$  es una medida (en  $(X, \mathcal{M})$ ) si:

1.  $\mu(\emptyset) = 0$ ;
2.  $\mu$  es  $\sigma$ -aditiva en  $\mathcal{M}$  ( $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ ).

Llamamos a la terna  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  un espacio de medida.

**Objetivo.** Construir un espacio de medida  $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, \mu)$  tal que  $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{M}$  y

$$\begin{cases} \mu(I) = |I| \quad \forall I \in \mathcal{I}, \\ \mu(E+x) = \mu(E) \quad \forall E \in \mathcal{M}. \end{cases}$$

**Ejemplo** (Espacios de Probabilidad). Si  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  es un EdM tal que  $\mu(X) = 1$ ,  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  recibe el nombre de espacios de probabilidad.

- $X$  recibe el nombre de espacio muestral, y se lo nota  $\Omega$  (en lugar de  $X$ );
- $\mathcal{M}$  se suele notar como  $\mathcal{F}$  (ó  $\mathcal{Y}$ ). Sus elementos se dicen eventos;

- $\mu$  recibe el nombre de medida de probabilidad ó distribución y se la nota  $\mathbb{P}$ .

En probabilidad, típicamente se estudian 2 tipos de distribuciones en  $\mathbb{R}$  (o en  $\mathbb{R}^d$ ).

1. **Distribuciones discretas:**  $\exists S \subseteq \mathbb{R}$  numerable y  $(p_x)_{x \in S} \subseteq [0, 1]$  tal que  $\mathbb{P}(A) = \sum_{x \in A \cap S} p_x$ .

**Ejemplo.** Binomial, Geométrica, Poisson,...

2. **Distribuciones (absolutamente) continuas:**  $\exists f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  "integrable" tal que  $\mathbb{P}(A) = \int_A f(x)dx$ .

**Ejemplo.** Uniforme, Exponencial, Normal,...

**Propiedades generales de una medida.** Si  $\mu$  es una medida sobre  $(X, \mathcal{M})$ , entonces:

1.  $\mu$  es monótona (en  $\mathcal{M}$ );
2.  $\mu$  es  $\sigma$ -subaditiva;
3.  $\mu$  es **continua por debajo:** si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$  es creciente ( $A_n \subseteq A_{n+1} \forall n$ ) entonces

$$\mu \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

4.  $\mu$  es **continua por arriba:** si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$  es decreciente ( $A_{n+1} \subseteq A_n \forall n$ ) y  $\mu(A_{n_0}) < \infty$  para algún  $n_0$  ( $\Rightarrow \mu(A_n) < \infty \forall n \geq n_0$ ), entonces

$$\mu \left( \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

(**Cuidado!** (4) puede no valer si  $\mu(A_n) = \infty \forall n \in \mathbb{N}$ )

**Definición 1.29** (premedida extendible y unívocamente extendible). Una premedida  $\tau : \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$  definida sobre una semiálgebra de subconjunto de  $X$ , se dice:

1. **Extendible** si es
  - (E1) finitamente aditiva en  $\mathcal{S}$ ;
  - (E2)  $\sigma$ -subaditiva en  $\mathcal{S}$ .
2. **Unívocamente extendible** si es extendible y se cumple
  - (E3)  $\sigma$ -finita

**Observación.** Los nombres de extendible y unívocamente extendible no se encontrarán en el Rana (los puso el profe).

**Teorema 1.30** (Extensión de Carathéodory). Dados un espacio  $X$  y una premedida  $\tau$  sobre una semiálgebra  $\mathcal{S}$  de subconjuntos de  $X$  tal que  $\tau$  es extendible, existe una extensión de  $\tau$  a una medida  $\mu_\tau$  definida sobre  $\sigma(\mathcal{S})$  la  $\sigma$ -álgebra generada por  $\mathcal{S}$ . Más aún, si  $\tau$  es unívocamente extendible, entonces la extensión  $\mu_\tau$  a  $\sigma(\mathcal{S})$  es única.

Por último, si  $\tau$  es unívocamente extendible, entonces se puede extender de manera única a una medida  $\overline{\mu_\tau}$  sobre la  $\mu_\tau$ -completación de  $\sigma(\mathcal{S})$ , i.e. la  $\sigma$ -álgebra  $\overline{\sigma(\mathcal{S})}$  dada por

$$\overline{\sigma(\mathcal{S})} := \{B \cup N : B \in \sigma(\mathcal{S}), \exists \tilde{N} \in \sigma(\mathcal{S}) \text{ con } N \subseteq \tilde{N} \text{ y } \mu_\tau(\tilde{N}) = 0\}$$

mediante la fórmula  $\overline{\mu_\tau}(B \cap N) := \mu_\tau(B)$ .

## Clase 9

27 de Agosto

**Observación.** Si  $\tau : \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$  es  $\sigma$ -aditiva en  $\mathcal{S}$  y  $\mathcal{S}$  es una semiálgebra, entonces  $\tau$  es extendible.

**Observación.** La extensión puede no ser única si  $\tau$  no es  $\sigma$ -finita.

**Ejemplo.**  $\tilde{\mathcal{I}}_{\mathbb{Q}} := \tilde{\mathcal{I}} \cap \mathbb{Q} = \{(a, b] \cap \mathbb{Q} : -\infty \leq a \leq b \leq \infty\}$

**Nota.**

- $\tilde{\mathcal{I}}_{\mathbb{Q}}$  es una semiálgebra;
- $\sigma(\tilde{\mathcal{I}}_{\mathbb{Q}}) = \sigma(\tilde{\mathcal{I}} \cap \mathbb{Q}) \stackrel{\text{Ej!}}{=} \sigma(\tilde{\mathcal{I}}) \cap \mathbb{Q} = \beta(\mathbb{R}) \cap \mathbb{Q} = \mathcal{P}(\mathbb{Q})$  (9.52)
- $\tau : \tilde{\mathcal{I}}_{\mathbb{Q}} \rightarrow [0, \infty]$ , dada por  $\tau(A) := \begin{cases} 0 & A = \emptyset \\ \infty & A \neq \emptyset, A \in \tilde{\mathcal{I}}_{\mathbb{Q}} \end{cases}$  (Observar que  $\tau$  no es  $\sigma$ -finita)
- Para cada  $r > 0$ ,  $\mu_r : \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \rightarrow [0, \infty]$  dada por  $\mu_r(A) := r(\#A)$  es una extensión de  $\tau$  (y es una medida)

**Definición 1.31** (espacio completo y conjuntos  $\mu$ -nulos). Sea  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  un EdM y definamos

$$\mathcal{N}_\mu := \{E \subset X : \exists N \in \mathcal{M} \text{ con } E \subseteq N \text{ y } \mu(N) = 0\}$$

Los elementos de  $\mathcal{N}_\mu$  se dicen conjuntos  $\mu$ -nulos. Diremos que  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  es completo si  $\mathcal{N}_\mu \subseteq \mathcal{M}$

**Observación.**  $(X, \overline{\sigma(\mathcal{S})}, \overline{\mu_\tau})$  es completo. En efecto,  $\mathcal{N}_{\overline{\mu_\tau}}$  corresponde al subconjunto de  $\overline{\sigma(\mathcal{S})}$  que se obtiene tomando  $B = \emptyset$ .

**Observación.** Veremos más adelante que las siguientes premedidas son UE:

- Premedidas de Lebesgue-Stieltjes (en particular, la función longitud  $\lambda$  (sobre  $\tilde{\mathcal{I}}$ ) y las premedidas de probabilidad).
- Premedidas de Lebesgue en  $\mathbb{R}^d$ , con  $d \in \mathbb{N}$ .

En particular;

**Corolario 1.32.** Para cada función  $F$  de Lebesgue-Stieltjes, existe una  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{M}_F$  sobre  $\mathbb{R}$  y una única medida  $\mu_F$  en  $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_F)$  tal que

$$\mu_F(I(a, b)) = F(b) - F(a) \quad \forall -\infty \leq a \leq b \leq \infty$$

Además,  $\beta(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{M}_F$ . Es decir,  $\mu_F$  es una medida que extiende a  $\tau_F$ , a todo  $\mathcal{M}_F$  (y en particular, a todo  $\beta(\mathbb{R})$ ). Además,  $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_F, \mu_F)$  es un EdM completo. ( $\mathcal{M}_F := \sigma(\tilde{\mathcal{I}})^F$ ,  $\mu_F := \overline{\mu_{\tau_F}}$ ). La medida  $\mu_F$  se conoce como medida de L-S asociada a  $F$ . En particular, para cualquier función de distribución  $F$ , existe una única medida de probabilidad  $\mathbb{P}_F$  en  $(\mathbb{R}, \beta(\mathbb{R}))$  tal que

$$\mathbb{P}_F(I(a, b)) = F(b) - F(a) \quad \forall -\infty \leq a \leq b \leq \infty$$

(En la guía 3 veremos que  $F \rightarrow \mathbb{P}_F$  es una biyección)

**Nota.** Los  $\beta$  son los Borelianos y  $I(a, b) = (a, b] \cap \mathbb{R}$ . (super  $F \rightarrow 10.26$ ).

**Ejemplo (Importante!). Medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}$ .** Tomando  $F = id$  en el Corolario anterior, obtenemos una  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{L}(\mathbb{R}) := \mathcal{M}_{id}$  con  $\beta(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{L}(\mathbb{R})$  y una medida  $\mu_{id}$  en  $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}))$  tal que  $\mu_{id}(I(a, b)) = b - a \quad \forall -\infty \leq a \leq b \leq \infty$ . En particular, de esto se deduce que  $\mu_{id}(I) = |I| \quad \forall I \in \mathcal{I}$ . Dicha medida recibe el nombre de medida de Lebesgue (en  $\mathbb{R}$ ), y los elementos de  $\mathcal{L}(\mathbb{R})$  se dicen conjuntos medibles Lebesgue. Adoptaremos la notación  $\mu_{id}(E) := \lambda(E) := |E|$ . La medida  $\mu_{id}$  es la extensión de la noción de longitud que buscábamos y  $\mathcal{L}(\mathbb{R})$  son los conjuntos cuya "longitud" podremos medir. Además, los conjuntos de medida nula (de la guía 2), son exactamente aquellos  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$  tal que  $\mu_{id}(A) = 0$  (lo veremos más adelante!).

**Ejemplo (Medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^d$ ).** Si  $\mathcal{I}_d$  son los intervalos en  $\mathbb{R}^d$  y definimos  $\tau : \mathcal{I}_d \rightarrow [0, \infty]$  como  $\tau(I) := |I|$ , entonces  $\mathcal{I}_d$  es una semiálgebra y  $\tau$  es una premedida  $\sigma$ -aditiva en  $\mathcal{I}_d$  (lo veremos después). Por lo tanto,  $\tau$  se puede extender (de manera única, pues  $\tau$  es  $\sigma$ -finita) a una medida  $\mu_\tau$  sobre la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d) = \sigma(\mathcal{I}_d)^\tau$ , llamada medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^d$  y  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$  es la clase de conjuntos medibles Lebesgue en  $\mathbb{R}^d$ . Al igual que antes, dado  $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ , notamos  $|E| := \mu_\tau(E)$ .

## Clase 10

29 de Agosto

### 1.2 Demostración del teorema de extensión de Carathéodory

**Paso 1:** Medidas Exteriores

**Proposición 1.33.** Si  $I \subseteq \mathbb{R}$  es un intervalo,

$$|E|_e = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| : (I_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ intervalos, } E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right\}$$

**Demostración.**

( $\geq$ ) Tomando  $I_1 = I$ ,  $I_{n+1} = \emptyset \quad \forall n \in \mathbb{N}$

( $\leq$ ) Por la  $\sigma$ -subaditividad de  $\lambda$  en  $\mathcal{I}$ : si  $I \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$  entonces  $\lambda(I) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(I_i)$ .  $\square$

**Definición 1.34** (Medida exterior inducida por una premedida). Sea  $X$  un espacio,  $\mathcal{C}$  una clase de subconjuntos de  $X$  y  $\tau : \mathcal{C} \rightarrow [0, \infty]$  una premedida. Definimos la medida exterior inducida por  $\tau$  como la aplicación  $\mu_{\tau}^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$  dada por

$$\mu_{\tau}^*(A) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \tau(C_i) : (C_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C} \text{ y } A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \right\}$$

con la convención de que  $\inf \emptyset := \infty$ .

**Ejemplo.**  $\mu_{\lambda}^* = \text{medida exterior de Lebesgue}$  y la notamos  $|E|_e := \mu_{\lambda}^*(E)$ .

Idealmente, nos gustaría que  $\mu_{\tau}^*$  cumpla

$$\begin{cases} (C1) \mu_{\tau}^*(C) = \tau(C) \quad \forall C \in \mathcal{C} \\ (C2) \mu_{\tau}^* \text{ es } \sigma\text{-subaditiva en } \mathcal{P}(X) \end{cases}$$

pero no tienen por qué cumplirse ninguna de la 2:

(C1) Sean  $X = \{a, b\}$ ,  $\mathcal{C} = \{\emptyset, \{a\}, X\}$ ,

$$\tau(A) = \begin{cases} 0 & A = \emptyset \\ 2 & A = \{a\} \\ 1 & A = X \end{cases}$$

Luego,  $\tau(\{a\}) = 2$ ,  $\mu_{\tau}^*(\{a\}) = 1 \neq \tau(\{a\})$ .

(C2) Medida exterior de Lebesgue no es  $\sigma$ -aditiva (lo vemos mas adelante!)

**Proposición 1.35.** Si  $\tau$  es una premedida sobre una semiálgebra  $\mathcal{S}$  que satisface

(E2)  $\tau$  es  $\sigma$ -subaditiva en  $\mathcal{S}$ ,

entonces  $\mu_{\tau}^*(A) = \tau(A) \quad \forall A \in \mathcal{S}$  (i.e.  $\mu_{\tau}^*$  cumple (C1)).

**Demostración.**  $\mu_{\tau}^*(A) \leq \tau(A)$ . Tomando  $C_1 = A \in \mathcal{S}$ ,  $C_{n+1} = \emptyset \in \mathcal{S}$ . Luego  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es cubrimiento de  $A$  por elementos de  $\mathcal{S}$  y luego

$$\mu_{\tau}^*(A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \tau(C_n) = \tau(A)$$

$\tau(A) \leq \mu_{\tau}^*(A)$ . Si  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}$  es un cubrimiento de  $A \in \mathcal{S}$  entonces por (E2), tenemos que  $\tau(A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \tau(C_n)$ . Tomando  $\inf$  sobre tales

cubrimientos, resulta  $\tau(A) \leq \mu_\tau^*(A)$ .  $\square$

**Teorema 1.36.** Sean  $X$  un espacio,  $\mathcal{C}$  una clase de subconjuntos de  $X$  y  $\tau : \mathcal{C} \rightarrow [0, \infty]$  una premedida. Entonces,

1.  $\mu_\tau^*(\emptyset)$ ;
2.  $\mu_\tau^*$  es monótona ( $A \subseteq B \Rightarrow \mu_\tau^*(A) \leq \mu_\tau^*(B)$ );
3.  $\mu_\tau^*$  es  $\sigma$ -subaditiva ( $A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \Rightarrow \mu_\tau^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_\tau^*(A_n)$ ).

**Demostración.** 1.  $\mu_\tau^*(\emptyset) \geq 0$  es por definición. Para ver que  $\mu_\tau^*(\emptyset) \leq 0$ , tomamos el cubrimiento  $C_n = \emptyset$  y repetimos el argumento de la Proposición anterior.

2. Si  $\mu_\tau^*(B) = \infty$ , la desigualdad es inmediata. Si  $\mu_\tau^*(B) < \infty$ , entonces existen cubrimientos de  $B$  por elementos de  $\mathcal{S}$ . Sea  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}$  un cubrimiento de  $B$ . Entonces,  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es también cubrimiento de  $A$  y, luego,  $\mu_\tau^*(A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \tau(C_n)$ . Como esto es cierto para todo cubrimiento  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $B$ , tomando ínfimo en la desigualdad anterior sobre tales cubrimientos resulta  $\mu_\tau^*(A) \leq \mu_\tau^*(B)$ .
3. Dado  $\varepsilon > 0$ , sea  $(C_i^{(n)})_{i \in \mathbb{N}}$  un cubrimiento de  $A_n$  tal que  $\sum_{i=1}^{\infty} \tau(C_i^{(n)}) \leq \mu_\tau^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$ . Luego, notando que  $(C_i^{(n)}) : i \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$  es un cubrimiento de  $A$ , obtenemos que

$$\begin{aligned} \mu_\tau^*(A) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \tau(C_i^{(n)}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left( \mu_\tau^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \right) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_\tau^*(A_n) + \varepsilon \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}}_1 \end{aligned}$$

Luego,  $\mu_\tau^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_\tau^*(A_n) + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$ . Tomando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , obtenemos la  $\sigma$ -subaditividad de  $\mu_\tau^*$ .  $\square$

**Definición 1.37** (medida exterior). Sea  $X$  un espacio. Decimos que  $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$  es una medida exterior si:

1.  $\mu^*(\emptyset) = 0$ ;
2.  $A \subseteq B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ ;
3.  $A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \Rightarrow \mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$ .

**Ejemplo.**

1. Medidas exteriores generadas por una premedida;

2. Si  $(\mu_\gamma^*)_{\gamma \in \Gamma}$  son medidas exteriores sobre  $X$ , entonces

$$\mu^*(A) := \sup_{\gamma \in \Gamma} \mu_\gamma^*(A)$$

es una medida exterior (Ej. Guía 3).

### 3. Medida exterior $s$ -dimensional de Hausdorff en $\mathbb{R}^d$ .

- Si  $I$  es un intervalo en  $\mathbb{R}^d$ , entonces  $|rI| = r^d|I|$ ;
- Si  $E \subseteq \mathbb{R}^d$  es medible Lebesgue, entonces  $|rE| = r^d|E|$ ;
- En particular, si  $E = B(x, r)$ , entonces

$$|E| = |B(0, r)| = |rB(0, 1)| = r^d|B(0, 1)| = C_d(\text{diam} E)^d, \quad C_d := \frac{|B(0, 1)|}{2^d}$$

- Si  $E \subseteq \mathbb{R}^d$  es "s-dimensional" y  $\mathcal{H}_s$  es la medida que queremos, entonces debería valer que

$$\mathcal{H}_s(E \cap B(x, r)) = \mathcal{H}_s(\text{entorno s-dimensional}) \approx (\text{diam}(\text{entorno}))^s$$

Luego, si cubrimos a  $E$  por entornos pequeños  $(E \cap B(x_i, r_i))_{i \in \mathbb{N}}$ , entonces

$$\mathcal{H}_s(E) \approx \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_s(E \cap B(x_i, r_i)) \approx \sum_{i \in \mathbb{N}} (\text{diam}(E \cap B(x_i, r_i)))^s.$$

## Clase 11

1 de Septiembre

### Medida exterior de Hausdorff

$\mathcal{H}_s$  = medida que "mide" el tamaño de objetos s-dimensionales en  $\mathbb{R}^d$ .

Si  $E$  es un conjunto s-dimensional en  $\mathbb{R}^d$ , entonces

$$\mathcal{H}_s(E) \stackrel{r_1 \leq 1}{\approx} \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_s(E \cap B(x_i, r_i)) \approx \sum_{i \in \mathbb{N}} (\text{diam}(E \cap B(x_i, r_i)))^s.$$

Teniendo esto en cuenta, dados  $d \in \mathbb{N}$ ,  $s \in [0, d]$ ,  $\delta > 0$ , definimos:

- $C_\delta := \{A \subseteq \mathbb{R}^d : \text{diam} A < \delta\}$ ;
- $\mathcal{H}_s^{(\delta)}(E) := \inf\{\sum_{n \in \mathbb{N}} (\text{diam} A_n)^s : (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq C_\delta, E \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\}$ .  
Donde  $\mathcal{H}_s^{(\delta)}(E)$  es la medida exterior inducida por  $\tau_s^{(\delta)}$  y  $\tau_s^{(\delta)}(A) := (\text{diam} A)^s$  la  $\delta$ -premedida de Hausdorff s-dimensional en  $\mathbb{R}^d$  con  $\tau_s^{(\delta)} : C_\delta \rightarrow [0, \infty]$ .

**Observar.** Si  $\delta' < \delta$  entonces  $\mathcal{H}_s^{(\delta')}(E) \geq \mathcal{H}_s^{(\delta)}(E)$ .

Luego, podemos definir

$$\mathcal{H}_s(E) := \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_s^{(\delta)}(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mathcal{H}_s^{(\delta)}(E),$$

donde  $\mathcal{H}_s$  es la medida exterior de Hausdorff s-dimensional en  $\mathbb{R}^d$ .

**Definición 1.38** (conjunto  $\mu^*$ -medible). Sea  $X$  un espacio y  $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$  medida exterior. Decimos que  $E \subseteq X$  es un conjunto  $\mu^*$ -medible si

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \quad \forall A \subseteq X.$$

**Observar.**  $\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$  vale siempre (por  $\sigma$ -subaditividad de  $\mu^*$ ). Luego, para ver que  $E$  es  $\mu^*$ -medible, basta ver que  $\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$ .

**Teorema 1.39.** Sea  $\mu^*$  una medida exterior sobre un espacio  $X$ . Entonces:

1.  $\mu^*(E) = 0 \Rightarrow E$  es  $\mu^*$ -medible;
2. La clase  $\mathcal{M}_{\mu^*}$  de conjuntos  $\mu^*$ -medibles es una  $\sigma$ -álgebra;
3. La restricción  $\mu$  de  $\mu^*$  a  $\mathcal{M}_{\mu^*}$  es una medida.

En particular,  $(X, \mathcal{M}_{\mu^*}, \mu)$  es un espacio de medida completo.

#### Demostración.

1. Si  $A \subseteq X$ ,  $\mu^*(A \cap E) \leq \mu^*(E) = 0$ . Además, por monotonía,  $\mu^*(A \cap E^c) \leq \mu^*(A)$ . Luego,  $\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) = 0 + \mu^*(A \cap E^c) \leq \mu^*(A)$ .

2. ( $\emptyset \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ ): Se sigue de (1), pues  $\mu^*(\emptyset) = 0$ , por definición.

( $E \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ ): Directo de la definición de  $\mathcal{M}_{\mu^*}$ , puesto que es simétrica en  $E$  y  $E^c$ .

(( $E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}_{\mu^*} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ ): Esto lo demostramos en tres pasos.

- En primer lugar, demostramos que si  $E_1, E_2 \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ , entonces  $E_1 \cap E_2, E_1 \cup E_2 \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ . Si  $A \subseteq X$ , entonces

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &= \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_1^c) \\ &= \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap \overbrace{E_1^c \cap E_2}^{E_2 \setminus E_1}) + \mu^*(A \cap \underbrace{E_1^c \cap E_2^c}_{(E_1 \cup E_2)^c}) \\ &\geq \mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) + \mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)^c). \end{aligned}$$

Notar que la primera igualdad se tiene por  $E_1 \in \mathcal{M}_{\mu^*}$  y la segunda por  $E_2 \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ . Esto implica que  $E_1 \cap E_2 \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ . Pero entonces  $E_1 \cap E_2 = ((E_1 \cap E_2)^c)^c = (\underbrace{E_1^c}_{\in \mathcal{M}_{\mu^*}} \cup \underbrace{E_2^c}_{\in \mathcal{M}_{\mu^*}})^c \in \mathcal{M}_{\mu^*}$

- Para el segundo paso, demostramos que si  $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{M}_{\mu^*}$  disjuntos, entonces

$$\mu^* \left( A \cap \left( \bigcup_{i=1}^n E_i \right) \right) = \sum_{i=1}^n \mu^*(A \cap E_i).$$

La idea es probarlo por inducción. Basta ver el caso  $n = 2$  (los otros casos salen iterando éste)

$$\begin{aligned} & \mu^*(A \cap (E_1 \uplus E_2)) \\ &= \mu^* \underbrace{(A \cap (E_1 \uplus E_2) \cap E_1)}_{A \cap E_1} + \mu^* \underbrace{(A \cap (E_1 \uplus E_2) \cap E_1^c)}_{A \cap E_2}. \end{aligned}$$

pues  $E_2 \subseteq E_1^c$  por ser disjuntos. Por último, vemos que si  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}_{\mu^*}$ , entonces  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ . Podemos suponer que los  $E_n$  son disjuntos. Si no, los cambiamos por

$$\begin{aligned} E'_1 &:= E_1 \in \mathcal{M}_{\mu^*} \\ E'_2 &:= E_2 \setminus E_1 = E_2 \cap E_1^c \in \mathcal{M}_{\mu^*} \\ &\vdots \\ E'_{n+1} &:= E_{n+1} \setminus \bigcup_{i=1}^n E_i \in \mathcal{M}_{\mu^*}, \end{aligned}$$

y

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E'_n.$$

Sea

$$F_n := \bigcup_{i=1}^n E_i \longrightarrow E := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n.$$

Notar que si  $F_n \subseteq E$ , entonces  $E^c \subseteq F_n^c$ . Luego, dado  $A \subseteq X$ , como  $F_n \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ , se tiene

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &= \underbrace{\mu^*(A \cap F_n)}_{= \sum_{i=1}^n \mu^*(A \cap E_i)} + \underbrace{\mu^*(A \cap F_n^c)}_{\subseteq A \cap E^c} \\ &\geq \sum_{i=1}^n \mu^*(A \cap E_i) + \mu^*(A \cap E^c). \end{aligned}$$

Tomando  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\begin{aligned}\mu^*(A) &\geq \sum_{i=1}^n \mu^*(A \cap E_i) + \mu^*(A \cap E^c) \\ &\geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \quad (\mu^* \text{ } \sigma\text{-subad.}) \\ A \cap E &= \bigcup_{i=1}^{\infty} A \cap E_i.\end{aligned}$$

Que era lo que necesitabamos. ✓

Con esto, tenemos que  $\mathcal{M}_{\mu^*}$  es, en efecto,  $\sigma$ -álgebra.

□

## Clase 12

3 de Septiembre

**Teorema 1.40.** Si  $\mu^*$  es una medida exterior sobre un espacio  $X$ , entonces:

1.  $\mu^*(E) = 0 \Rightarrow E$  es  $\mu^*$ -medible;
2.  $\mathcal{M}_{\mu^*} := \{E \subseteq X \mid E \text{ es } \mu^*\text{-medible}\}$  es  $\sigma$ -álgebra;
3.  $\mu := \mu^*|_{\mathcal{M}_{\mu^*}}$  es una medida y  $(X, \mathcal{M}_{\mu^*}, \mu)$  es completo.

**Demostración (3).** Debemos ver que si  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}_{\mu^*}$  son disjuntos entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n)$$

La desigualdad ( $\leq$ ) viene dada ya que  $\mu^*$  es  $\sigma$ -aditiva. Entonces, basta ver la desigualdad ( $\geq$ ). Para esto, notamos que:

$$\begin{array}{ccc}\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) & \geq & \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^M E_n\right) = \sum_{n=1}^M \mu^*(E_n) \\ & \downarrow & \downarrow \\ & \mu^*\text{-monótona} & E_n \text{ es } \mu^*\text{-medible } \forall n\end{array}$$

Si tomamos  $M \rightarrow \infty$ , resulta que

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n).$$

Entonces,  $\mu$  es medida. Ahora, tenemos que ver que  $(X, \mathcal{M}_{\mu^*}, \mu)$  es completo. Notamos que si  $E \subseteq X$  es  $\mu$ -nulo, es decir,  $\exists N \in \mathcal{M}_{\mu^*}$  tal que  $E \subseteq N$  y  $\mu(N) = 0$ , entonces

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(N) = 0$$

Por lo tanto,  $\mu^*(E) = 0$  y, por (1),  $E \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ .

□

**Observación.** Esto muestra que si  $\mu$  es finitamente aditiva ( $\Rightarrow$  monótona) y  $\sigma$ -subaditiva, entonces es  $\sigma$ -aditiva (es un si y sólo si).

**Proposición 1.41.** Si  $\tau$  es una premedida sobre la semiálgebra  $\mathcal{S}$  que es extendible ( $E_1 + E_2$ ) entonces su medida exterior asociada  $\mu_\tau^*$  cumple que:

$$(C1) \quad \mathcal{S} \subseteq \mathcal{M}_{\mu^*} \quad (\Rightarrow \sigma(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{M}_{\mu^*});$$

$$(C2) \quad \mu_\tau^*(A) = \tau(A) \quad \forall A \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \mu(A) = \tau(A) \quad \forall A \in \mathcal{S} \text{ por (C1)}.$$

**Demostración.** (C2) ya se ha visto antes, entonces queda demostrar (C1). Necesitamos ver que si  $A \in \mathcal{S}$  entonces

$$\mu_\tau^*(F) \geq \mu_\tau^*(F \cap A) + \mu_\tau^*(F \cap A^c) \quad \forall F \subseteq X.$$

En efecto, si  $\mu_\tau^*(F) = \infty$ , es evidente. Si  $\mu_\tau^*(F) < \infty$ , dado  $\varepsilon > 0$ , existen  $(B_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}$  tal que  $F \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i$  y  $\sum_{i \in \mathbb{N}} \tau(B_i) \leq \mu_\tau^*(F) + \varepsilon$ . Por otro lado, como  $A \in \mathcal{S}$ , existen  $S_1, \dots, S_k$  disjuntos tales que  $A^c = \bigsqcup_{j=1}^k S_j$ . Como  $B_i = \bigcup_{j=1}^k B_i \cap S_j$ , donde  $S_0 := A$ , por (E1)

$$\tau(B_i) = \sum_{j=0}^k \tau(B_i \cap S_j).$$

Sumando en  $i$ , resulta

$$\begin{aligned} \mu_\tau^*(F) + \varepsilon &\geq \sum_{i \in \mathbb{N}} \tau(B_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j=0}^k \tau(B_i \cap S_j) \\ &= \sum_{j=0}^k \sum_{i \in \mathbb{N}} \tau(B_i \cap S_j) \\ &\stackrel{\left( \begin{smallmatrix} B_i \cap S_j \in \mathcal{S} \\ \text{y (C2)} \end{smallmatrix} \right)}{=} \sum_{j=0}^k \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu_\tau^*(B_i \cap S_j) \\ &\stackrel{(F \cap S_j \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i \cap S_j \Rightarrow)}{\geq} \sum_{j=0}^k \mu_\tau^*(F \cap S_j) \\ &= \mu_\tau^*(F \cap A) + \sum_{j=1}^k \mu_\tau^*(F \cap S_j) \\ &\stackrel{(F \cap S^c \subseteq \bigcup_{j=1}^k F \cap S_j \Rightarrow)}{\geq} \mu_\tau^*(F \cap A) + \mu_\tau^*(F \cap A^c). \end{aligned}$$

Luego,  $A$  es  $\mu_\tau^*$ -medible (y se cumple (C1)).  $\square$

**Corolario 1.42** (Carathéodory hasta ahora - Versión 1). Si  $\mu^*$  es una medida exterior en  $X$ , entonces

$$\mathcal{M}_{\mu^*} := \{E \subseteq X : E \text{ es } \mu^* \text{-medible}\}$$

es  $\sigma$ -álgebra y  $(X, \mathcal{M}_{\mu^*}, \mu^*|_{\mathcal{M}_{\mu^*}})$  es un espacio de medida completo.

Además, si  $\tau$  es una premedida en una semiálgebra  $\mathcal{S}$  que es extendible y  $\mu_\tau^*$  es su medida exterior asociada, entonces  $\sigma(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{M}_{\mu_\tau^*}$  y  $\mu_\tau := \mu_\tau^*|_{\mathcal{M}_{\mu_\tau^*}}$  es una medida que se extiende a  $\tau$ .

**Teorema 1.43.** Si  $\tau$  es una premedida sobre una semiálgebra  $\mathcal{S}$  que es unívocamente extendible ( $E1 + E2 + E3$ ) entonces  $\sigma(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{M}_{\mu_\tau^*}$  y además son equivalentes:

1.  $A \in \mathcal{M}_{\mu_\tau^*}$ ;
2.  $\exists B \in \sigma(\mathcal{S}), N_1 \in \mathcal{M}_{\mu_\tau^*}$  con  $\mu_\tau^*(N_1) = 0$  tal que  $A = B - N_1$ ;
3.  $\exists C \in \sigma(\mathcal{S}), N_2 \in \mathcal{M}_{\mu_\tau^*}$  con  $\mu_\tau^*(N_2) = 0$  tal que  $A = C \cup N_2$ .

**Observación.**  $\mu_\tau^*(A) = \mu_\tau^*(B) = \mu_\tau^*(C)$  y  $\mathcal{M}_{\mu_\tau^*}$  es la  $\mu_\tau^*|_{\sigma(\mathcal{S})}$ -completación.

**Demostración.** Que  $(2) \Rightarrow (1)$  y  $(3) \Rightarrow (1)$  es inmediato. Veamos que  $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)$ .

$(1) \Rightarrow (2)$  Supongamos primero que  $\mu_\tau^*(A) < \infty$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , existen  $(B_n^{(\varepsilon)})_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}$  tal que  $A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n^{(\varepsilon)}$  y  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \tau(B_n^{(\varepsilon)}) \leq \mu_\tau^*(A) + \varepsilon$ . En particular,

$$\begin{aligned} \mu_\tau^*(A) &\leq \mu_\tau^*\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n^{(\varepsilon)}\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_\tau^*(B_n^{(\varepsilon)}) \\ \left(\begin{array}{l} \mu_\tau^* \text{ extiende a } \\ \tau \text{ si es extendible} \end{array}\right) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \tau(B_n^{(\varepsilon)}) \leq \mu_\tau^*(A) + \varepsilon. \end{aligned} \quad (*)$$

Sea  $B := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n^{(\frac{1}{k})}$ . Notemos que  $B \in \sigma(\mathcal{S})$  y que  $A \subseteq B$ . Además, como  $A, B \in \mathcal{M}_{\mu_\tau^*}$  por hipótesis y  $\sigma(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{M}_{\mu_\tau^*}$  y  $\mu_\tau = \mu_\tau^*|_{\mathcal{M}_{\mu_\tau^*}}$  es finitamente aditiva y si definimos  $N_1 := B \setminus A$  y  $B^{(\frac{1}{k})} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n^{(\frac{1}{k})}$ , entonces  $N_1 \in \mathcal{M}_{\mu_\tau^*}$ ,  $A := B - N_1$ , y para todo  $k_0 \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \mu_\tau(N_1) &= \mu_\tau(B - A) = \mu_\tau\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} (B^{(\frac{1}{k})} \setminus A)\right) \\ &\leq \mu_\tau(B^{(\frac{1}{k_0})} - A). \end{aligned}$$

Luego,

$$A \subseteq B^{(\frac{1}{k_0})} \Rightarrow \mu_\tau^*(B^{(\frac{1}{k_0})}) - \mu_\tau^*(A) \leq \frac{1}{k_0} \quad (*)$$

Tomando  $k_0 \rightarrow \infty$ , resulta  $(1) \Rightarrow (2)$ .  $\square$

### Clase 13

5 de Septiembre

**Demostración** (Continuación clase anterior).

$(1) \Rightarrow (2)$  Si  $\mu_\tau^*(A) < \infty$  (LISTO!). Si  $\mu_\tau^*(A) = \infty$ , tomamos  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}$  disjuntos tal que  $X = \biguplus_{n \in \mathbb{N}} E_n$  y  $\tau(E_n) < \infty$ . Luego,  $\mu_\tau^*(A \cap E_n) \leq \mu_\tau^*(E_n) = \tau(E_n) < \infty$  (La igualdad es, pues  $E_n \in \mathcal{S}, \tau$   $\sigma$ -sub). Por ende, por lo ya probado, existe  $B_n \in \sigma(\mathcal{S})$  tal que  $A \cap E_n \subseteq B_n$  y  $\mu_\tau(B_n) = \mu_\tau(A \cap E_n) < \infty$ . Luego,  $B := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$  y  $N := B - A$  cumplen lo pedido pues  $A = \biguplus_{n \in \mathbb{N}} A \cap E_n \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = B$  y

$$\begin{aligned} \mu_\tau(B \setminus A) &= \mu_\tau\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \setminus A\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_\tau(B_n \setminus A) \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_\tau(B_n \setminus (A \cap E_n)) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\mu_\tau(B_n) - \mu_\tau(A \cap E_n)}_0 = 0. \end{aligned}$$

$(2) \Rightarrow (3)$  Notemos que por  $(2) \Rightarrow (1)$ ,  $A \in \mathcal{M}_{\mu_\tau^*}$  si vale (2). En particular,  $A^c \in \mathcal{M}_{\mu_\tau^*}$ . Luego, por  $(1) \Rightarrow (2)$  para  $A^c$ ,  $\exists \tilde{B} \in \sigma(\mathcal{S})$  y  $N_2 \in \mathcal{M}_{\mu_\tau^*}$  con  $\mu_\tau(N_2) = 0$  tal que  $A^c = \tilde{B} - N_2$ . Pero entonces, tomando  $C := \tilde{B}^c$ , vemos que  $C \in \sigma(\mathcal{S})$  y  $A = (A^c)^c = (\tilde{B} \cap N_2^c)^c = \tilde{B}^c \cup (N_2^c)^c = C \cup N_2$ .  $\square$

**Observación.**  $\mathcal{M}_{\mu_\tau^*} = \overline{\sigma(\mathcal{S})}$  (con resp. a  $\mu_\tau^*|_{\sigma(\mathcal{S})}$ ). En efecto, si  $A \in \mathcal{M}_{\mu_\tau^*}$  entonces, por  $(1) \Rightarrow (3)$ , existen  $C \in \sigma(\mathcal{S})$  y  $N \in \mathcal{M}_{\mu_\tau^*}$  tal que  $A = C \cup N$  y  $\mu_\tau^*(N) = 0$ . Como  $N \in \mathcal{M}_{\mu_\tau^*}$ , por  $(1) \Rightarrow (2)$  para  $N$ , existe  $\tilde{N} \in \sigma(\mathcal{S})$  tal que  $N \subseteq \tilde{N}$  y  $0 = \mu_\tau(N) = \mu_\tau(\tilde{N})$ . Luego,  $N$  resulta  $\mu_\tau^*|_{\sigma(\mathcal{S})}$ -nulo y, por lo tanto,  $N \in \overline{\sigma(\mathcal{S})}^{\mu_\tau^*|_{\sigma(\mathcal{S})}}$ .

Por otro lado, si  $A \in \overline{\sigma(\mathcal{S})}$  (resp. a  $\mu_\tau^*|_{\sigma(\mathcal{S})}$ ), entonces  $A = B \cup N$  donde  $B \in \sigma(\mathcal{S})$  y  $\exists \tilde{N} \in \sigma(\mathcal{S})$  tal que  $N \subseteq \tilde{N}$  y  $\mu_\tau^*(N) = 0$ , y entonces  $A = B \cup N \in \mathcal{M}_{\mu_\tau^*}$  (pues  $\sigma(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{M}_{\mu_\tau^*}$ ).

**Observación.** En particular, hemos probado:

**Proposición 1.44.** Si  $\tau$  es una premedida UE sobre una semiálgebra  $\mathcal{S}$  entonces, dado  $A \subseteq X$  (no necesariamente  $\mu_\tau^*$ -medible),

$$\begin{aligned} \mu_\tau^*(A) &:= \min\{\mu_\tau(B) \mid B \in \sigma(\mathcal{S}), A \subseteq B\} \\ &= \max\{\mu_\tau(C) \mid C \in \sigma(\mathcal{S}), C \subseteq A\}. \end{aligned}$$

**Teorema 1.45.**  $\beta(\mathbb{R}^d) \subsetneq \mathcal{L}(\mathbb{R}^d) \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ . De hecho,  $\#\mathcal{L}(\mathbb{R}^d) = 2^c$ ,  $\#\mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \setminus \mathcal{L}(\mathbb{R}^d) = 2^c$ ,  $\#\beta(\mathbb{R}^d) = c$ .

**Teorema 1.46.** Existe  $V \subseteq \mathbb{R}$  no medible Lebesgue.

**Lema 1.47.**  $|E + x|_e = |E|_e \quad \forall E \subseteq \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$ . Además, si  $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ , entonces  $E + x \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$  y  $|E| = |E + x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .

**Axioma de Elección.** Si  $(A_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$  es una familia de conjuntos disjuntos, no vacíos, entonces existe un conjunto  $A$  tal que  $A \cap A_\gamma$  tiene exactamente 1 elemento  $\forall \gamma \in \Gamma$ .

**Demostración** (lema 1.47). Definimos una relación de equivalencia  $\sim$  en  $[0, 1)$  decretando que  $x \sim y$  si  $x - y \in \mathbb{Q}$ . Por el Axioma de Elección, existe un conjunto  $V \subseteq \mathbb{R}$  que tiene exactamente 1 elemento de cada clase de equivalencia de  $\sim$ . Observemos que:

V1)  $(V + Q_1) \cap (V + Q_2) = \emptyset \quad \forall Q_1, Q_2 \in \mathbb{Q}$  distintos. En efecto, si  $v_1 + Q_1 = v_2 + Q_2$  con  $v_1, v_2 \in V \Rightarrow v_1 - v_2 = Q_2 - Q_1 \in \mathbb{Q} \Rightarrow v_1 \sim v_2 \Rightarrow v_1 = v_2 \Rightarrow Q_1 = Q_2$ .

V2)  $[0, 1) \subseteq \bigcup_{Q \in \mathbb{Q}} V + Q$ . Notar que dado  $x \in [0, 1)$ , existe un único  $v \in V$  tal que  $x \sim v$ , i.e.,  $x - v = Q \in \mathbb{Q} \Rightarrow x = v + Q \in V + Q$ .

Si  $V$  fuera medible, por (V2) y el Lema,

$$1 = |[0, 1)| \leq \sum_{Q \in \mathbb{Q}} |V + Q| = \sum_{Q \in \mathbb{Q}} |V| \Rightarrow |V| > 0$$

Por otro lado, por (V1),  $\bigcup_{Q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)} V + Q \subseteq [0, 2)$ , y luego, por el Lema y como  $|V| > 0$ ,

$$\begin{aligned} \infty &= \sum_{Q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)} |V| = \left| \bigcup_{Q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)} V + Q \right| \\ &\leq |[0, 2)| = |[0, 1)| + |[1, 2)| \\ &= |[0, 1)| + |1 + [0, 1)| = 2|[0, 1)| \\ &= 2 < \infty, \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción. Luego  $V$  no es medible.  $\square$

## Clase 14

8 de Septiembre

1. Construimos un conjunto  $V \subseteq [0, 1)$  tal que

(V1)  $(V + Q_1) \cap (V + Q_2) = \emptyset$ , tal que  $Q_1, Q_2 \in \mathbb{Q}$  son distintos;

(V2)  $[0, 1) \subseteq \bigcup_{Q \in \mathbb{Q}} (V + Q)$ .

Cualquier conjunto  $V \subseteq [0, 1)$  que cumpla  $V_1$  y  $V_2$  se dice un conjunto de Vitali. Ningún conjunto de Vitali es medible Lebesgue.

2. La misma demostración se puede adaptar para mostrar que:

- i. Si  $|E|_e > 0$  entonces existe  $\tilde{E} \subseteq E$  no medible Lebesgue;
- ii. Si  $\mu$  es una medida en  $\mathbb{R}$  invariante por traslaciones definida sobre una  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}$  tal que  $V \in \mathcal{F}$  entonces

$$\mu([0, 1)) = \begin{cases} 0 & (\Rightarrow \mu \equiv 0) \\ \infty \end{cases}$$

En particular, la noción de longitud no puede extenderse a todo  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  (de forma invariante por traslación).

- iii.  $V \times [0, 1]^{d-1} \notin \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$  para ningún  $d > 1$ .

**Observación.** La existencia de  $V$  nos dice que  $|\cdot|_e$  no es ni siquiera finitamente aditiva.

**Paradoja de Banach-Tarski.** Si  $A = B(0, 1) \subseteq \mathbb{R}^d$ , existe una partición finita de  $A$ ,

$$A = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \dots \sqcup A_k \quad (\text{basta tomar } k = 6)$$

tal que sólo mediante rotaciones y traslaciones de los  $A_j$  (operaciones que no cambian medida) se pueden obtener 2 copias disjuntas de  $A$ .

**Definición 1.48** ( $\pi$ -sistema). Una clase de subconjuntos  $\mathcal{P}$  de un espacio  $X$ , se dice un  $\pi$ -sistema si es cerrado por intersecciones finitas, i.e.,

$$A, B \in \mathcal{P} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{P}$$

**Ejemplo.**

- Semiálgebra  $\Rightarrow \pi$ -sistema  $\nRightarrow$  semiálgebra;
- $\mathcal{P} = \{(-\infty, x] : x \in \mathbb{R}\}$  es un  $\pi$ -sistema pero no semiálgebra;
- $\mathcal{P} \subseteq \tilde{I}$  pero  $\tilde{I}$  no es una semiálgebra generada, aunque

$$\mathcal{A}(\mathcal{P}) = \mathcal{P}(\tilde{I}) \Rightarrow \sigma(\mathcal{P}) = \beta(\mathbb{R}).$$

**Definición 1.49** ( $\lambda$ -sistema). Una clase  $\mathcal{L}$  de subconjuntos de un espacio  $X$  se dice un  $\lambda$ -sistema si:

- ( $\lambda_1$ )  $X \in \mathcal{L}$ ;
- ( $\lambda_2$ )  $A \in \mathcal{L} \Rightarrow A^c \in \mathcal{L}$ ;
- ( $\lambda_3$ )  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}$  disjuntos  $\Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{L}$ .

**Nota.** Tenemos que  $\phi \in \mathcal{L}$  y que, por ende  $\mathcal{L}$  es también cerrado por uniones disjuntas finitas.

**Ejemplo.**  $\sigma$ -álgebra  $\Rightarrow \lambda$ -sistema  $\nRightarrow \sigma$ -álgebra.

$$X = \{1, 2, 3, 4\}, \mathcal{L} := \{\emptyset, X, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$$

$\mathcal{L}$  es un  $\lambda$ -sistema, pero  $\{1, 2, 3\} = \{1, 2\} \cup \{2, 3\} \notin \mathcal{L}$  y luego,  $\mathcal{L}$  no es  $\sigma$ -álgebra.

**Teorema 1.50** ( $\pi$ - $\lambda$  de Dynkin). Si  $\mathcal{L}$  es un  $\lambda$ -sistema y  $\mathcal{P}$  es un  $\pi$ -sistema tal que  $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{L}$ , entonces  $\sigma(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{L}$ .

**Lema 1.51.** Todo  $\lambda$ -sistema que sea también  $\pi$ -sistema es, de hecho, una  $\sigma$ -álgebra.

**Demostración** (lema). Debemos ver que si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}$ , entonces  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{L}$ . Para ello, definimos para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$A_0 := \emptyset, \quad B_n := A_n \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}) = A_n \cap A_1^c \cap \dots \cap A_{n-1}^c$$

Notemos que:

1.  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  son disjuntos y  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ;
2.  $B_n \in \mathcal{L} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ , pues  $\mathcal{L}$  es un  $\lambda$ -sistema y  $\pi$ -sistema. Pero entonces,

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{L}.$$

□

**Demostración** (Dynkin). Sea

$$\lambda(\mathcal{P}) := \bigcap_{\substack{\widetilde{\mathcal{L}} \text{ } \lambda\text{-sistema} \\ \mathcal{P} \subseteq \widetilde{\mathcal{L}}}} \widetilde{\mathcal{L}}$$

el  $\lambda$ -sistema generado por  $\mathcal{P}$ . Observar que  $\lambda(\mathcal{P})$  es el menor  $\lambda$ -sistema que contiene a  $\mathcal{P}$ . Luego, valen las inclusiones  $\mathcal{P} \subseteq \lambda(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{L}$ . (\*) Si mostramos que  $\lambda(\mathcal{P})$  es un  $\pi$ -sistema, entonces, por el lema,  $\lambda(\mathcal{P})$  resulta una  $\sigma$ -álgebra (que contiene a  $\mathcal{P}$ ) y, por minimalidad,  $\sigma(\mathcal{P}) \subseteq \lambda(\mathcal{P})$ . □

## Clase 15

10 de Septiembre

**Demostración** (Dynkin, continuación). Bastaba con probar que  $\lambda(\mathcal{P})$  es un  $\pi$ -sistema. Esto es equivalente a probar que

$$\lambda(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{L}_A := \{B \subseteq X : A \cap B \in \lambda(\mathcal{P})\} \quad \forall A \in \lambda(\mathcal{P}).$$

A su vez, para esto basta probar que:

$$\begin{cases} (1) \mathcal{L}_A \text{ es un } \lambda\text{-sistema } \forall A \in \lambda(\mathcal{P}) \\ (2) \mathcal{P} \subseteq \mathcal{L}_A. \end{cases}$$

**Veamos (1).**

( $\lambda_1$ )  $X \in \mathcal{L}_A$ : Como  $A \in \lambda(\mathcal{P})$ , se tiene que  $A \cap X = A \in \lambda(\mathcal{P})$  ( $\Rightarrow X \in \mathcal{L}_A$ ) ✓

( $\lambda_2$ )  $B \in \mathcal{L}_A \Rightarrow B^c \in \mathcal{L}_A$ : Notar que

$$\begin{aligned} A \cap B^c \in \lambda(\mathcal{P}) &\Leftrightarrow (A \cap B^c)^c = A^c \cup B \in \lambda(\mathcal{P}) \\ &\Leftrightarrow A^c \cup B = \underbrace{A^c}_{\substack{\in \lambda(\mathcal{P}) \\ \text{pues} \\ A \in \lambda(\mathcal{P})}} \cup \underbrace{(B \cap A)}_{\substack{\in \lambda(\mathcal{P}) \\ \text{pues} \\ B \in \mathcal{L}_A}} \in \lambda(\mathcal{P}) \quad \left( \begin{array}{l} \text{cierto pues } \lambda(\mathcal{P}) \\ \text{es } \lambda\text{-sistema} \end{array} \right). \end{aligned}$$

( $\lambda_3$ ) Si  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}_A$  disjuntos, entonces  $(A \cap B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  también. Además, cada  $A \cap B_n \in \lambda(\mathcal{P})$  pues  $B_n \in \mathcal{L}_A$ . Luego,

$$A \cap \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A \cap B_n \in \lambda(\mathcal{P}) \quad \left( \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{L}_A \right)$$

**Veamos (2).** Vamos por casos

1. ( $A \in \mathcal{P}$ ): Si  $B \in \mathcal{P}$ , entonces  $A \cap B \in \mathcal{P}$ , pues  $\mathcal{P}$  es un  $\pi$ -sistema, y entonces  $A \cap B \in \mathcal{P} \subseteq \lambda(\mathcal{P})$  y así resulta  $B \in \mathcal{L}_A$ . Como  $B \in \mathcal{P}$  era arbitrario, esto nos dice que  $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{L}_A$ . En particular, por (1) resulta que  $\lambda(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{L}_A$ .
2. ( $A \in \lambda(\mathcal{P})$  general): Si tomamos  $B \in \mathcal{P}$ , entonces  $B \in \mathcal{L}_A \Leftrightarrow A \cap B \in \lambda(\mathcal{P}) \Leftrightarrow A \in \mathcal{L}_B$ . Luego, lo que queremos mostrar es que, para todo  $B \in \mathcal{P}$ ,  $\lambda(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{L}_B$ . Pero esto vale por el caso 1. ✓

□

**Definición 1.52** (extensión de una premedida). Sean  $\tau : \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$  una premedida sobre  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$  y  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$  una  $\sigma$ -álgebra. Decimos que una medida  $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$  es una extensión de  $\tau$  (sobre  $\mathcal{F}$ ) si:

1.  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{F}$  ( $\Rightarrow \sigma(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{F}$ );
2.  $\mu(A) = \tau(A) \quad \forall A \in \mathcal{S}$ .

**Teorema 1.53** (Unicidad de Extensión de Carathéodory). Sea  $\tau$  una premedida definida sobre una semiálgebra  $\mathcal{S}$  de subconjuntos de un espacio  $X$ . Si  $\tau$  es  $\sigma$ -finita, entonces existe a lo sumo una extensión de  $\mu$  sobre  $\sigma(\mathcal{S})$ . En particular, si  $\tau$  es UE, entonces admite exactamente:

- una extensión sobre  $\sigma(\mathcal{S})$ , i.e.  $\mu_\tau := \mu_\tau^*|_{\sigma(\mathcal{S})}$ ;
- una extensión sobre  $\mathcal{M}_{\mu_\tau^*}$ , i.e.,  $\mu_\tau^*|_{\mathcal{M}_{\mu_\tau^*}}$ .

**Demostración.** Sean  $\mu, \mu'$  medidas sobre  $(X, \mathcal{M})$  tal que  $\mu(B) = \mu'(B) \quad \forall B \in \mathcal{S}$ . Queremos ver que  $\mu(A) = \mu'(A) \quad \forall A \in \mathcal{M}$  (primero cuando  $\mathcal{M} = \sigma(\mathcal{S})$  y luego con  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\mu_\tau^*}$ ):

(i)  $\mathcal{M} = \sigma(\mathcal{S})$ : Tomamos  $(E_n)_n \subseteq \mathcal{S}$  disjuntos tal que  $X = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$  y  $\tau(E_n) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$  (podemos, pues  $\tau$  es  $\sigma$ -finita). Observemos que, por ser  $\mu$  y  $\mu'$  medidas en  $\sigma(\mathcal{S})$  si  $A \in \sigma(\mathcal{S})$ , entonces:

$$\mu(A) = \mu\left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A \cap E_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A \cap E_n) \quad \text{y} \quad \mu'(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu'(A \cap E_n).$$

Luego, bastará con ver que  $\mu(A \cap E_n) = \mu'(A \cap E_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}, A \in \sigma(\mathcal{S})$ . Luego, fijemos  $n \in \mathbb{N}$  y definamos

$$\xi_n := \{A \in \sigma(\mathcal{S}) : \mu(A \cap E_n) = \mu'(A \cap E_n)\}.$$

Queremos ver que  $\sigma(\mathcal{S}) \subseteq \xi_n$ . Para ello, como  $\mathcal{S}$  es un  $\pi$ -sistema, por Dynkin bastará con ver que

1.  $\xi_n$  es un  $\lambda$ -sistema;
2.  $\mathcal{S} \subseteq \xi_n$ .

**Veamos 1.**

( $\lambda_1$ )  $X \in \xi_n$ : Es cierto, pues  $\mu(X \cap E_n) = \mu(E_n) = \tau(E_n) = \mu'(E_n) = \mu'(X \cap E_n)$ ;

( $\lambda_2$ )  $A \in \xi_n \Rightarrow A^c \in \xi_n$ :  $\mu(A^c \cap E) = \mu(E_n \setminus A) = \mu(E_n) - \mu(A \cap E_n)$  (la última igualdad se da pues  $\mu(E_n) < \infty$ ). Luego, por ( $\lambda_1$ ), esto último es igual a  $\mu'(E_n) - \mu'(A \cap E_n) = \mu'(A^c \cap E_n)$ ;

( $\lambda_3$ ) Si  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \xi_n$  son disjuntos, entonces

$$\begin{aligned} \mu \left( \left( \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \right) \cap E_n \right) &= \mu \left( \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \cap E_n \right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k \cap E_n) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu'(A_k \cap E_n) \\ &= \mu' \left( \left( \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \right) \cap E_n \right). \end{aligned}$$

Luego,  $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \xi_n$

**Veamos 2.** Si  $A \in \mathcal{S}$  entonces  $A \cap E_n \in \mathcal{S}$  pues  $\mathcal{S}$  es un  $\pi$ -sistema, y entonces  $\mu(A \cap E_n) = \tau(A \cap E_n) = \mu'(A \cap E_n)$ . ✓

(ii)  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\mu_\tau^*}$  ( $\tau$  unívocamente extendible): Sea  $A \in \mathcal{M}_{\mu_\tau^*}$ . Como  $\tau$  es  $\sigma$ -finita en  $\mathcal{S}$ , existen  $B, C \in \sigma(\mathcal{S})$  tales que  $C \subseteq A \subseteq B$  y  $\mu_\tau^*(C) = \mu_\tau^*(A) = \mu_\tau^*(B)$ . Entonces, si  $\mu$  es una extensión de  $\tau$  sobre  $\mathcal{M}_{\mu_\tau^*}$ , tenemos que

$$\begin{array}{ccc} \mu_\tau^*(A) = \mu_\tau^*(C) \leq \mu(C) \leq \mu(A) \leq \mu(B) = \mu_\tau^*(B) = \mu_\tau^*(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ C \in \sigma(\mathcal{S}) \text{ y } \exists! \text{ ext. en } \sigma(\mathcal{S}) & & B \in \sigma(\mathcal{S}) \end{array}$$

de donde resulta que  $\mu(A) = \mu_\tau^*(A)$  y la extensión es única. Además, satisface  $\mu(A) = \mu_\tau(B) = \mu_\tau(C)$  para cualquier  $C, B \in \sigma(\mathcal{S})$  tal que  $C \subseteq A \subseteq B$ ,  $N_1 = A \setminus C$  y  $N_2 = B \setminus A$  son  $\mu_\tau$ -nulos. Luego,  $\mu = \overline{\mu_\tau}$ , donde  $\overline{\mu_\tau}$  es la "completación" de  $\mu_\tau$  definida en el Teorema de Extensión de Carathéodory.  $\square$

**Nota.** De la demostración se deduce que si  $\mu$  y  $\nu$  son medidas finitas sobre  $(X, \mathcal{M})$ , entonces

$$\mathcal{L} := \{A \in \mathcal{M} : \mu(A) = \nu(A)\}$$

es un  $\lambda$ -sistema si y solo si  $X \in \mathcal{L}$ . En particular, si dos medidas finitas coinciden en un  $\pi$ -sistema  $\mathcal{P}$  que contiene a  $X$ , entonces coinciden en  $\sigma(\mathcal{P})$ .

## Clase 16

12 de Septiembre

**Comentario.** Si queremos definir una medida finita sobre  $(\mathbb{R}, \beta(\mathbb{R}))$ , por el comentario de la vez pasada, basta predefinirla en un  $\pi$ -sistema  $\mathcal{P}$  que genere a  $\beta(\mathbb{R})$  (si queremos unicidad de la extensión a  $\beta(\mathbb{R})$ ). Una elección natural es tomar  $\mathcal{P} := \{(-\infty, x] : x \in \mathbb{R}\}$  ( $\sigma(\mathcal{P}) = \beta(\mathbb{R})$ ).

Luego, si  $\mu$  es una medida que extiende a una premedida  $\tau$  sobre  $\mathcal{P}$ , entonces  $\mu$  queda unívocamente determinada sobre  $\tilde{\mathcal{I}}$ :

- $\mu(\mathbb{R}) = \mu \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-\infty, n] \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu((-\infty, n]) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau((-\infty, n])$ .
- $\mu((a, b]) = \mu((-\infty, b] \setminus (-\infty, a]) = \tau((-\infty, b]) - \tau((-\infty, a])$ .
- $\mu((a, \infty)) = \mu(\mathbb{R} - (-\infty, a]) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau((-\infty, n]) - \tau((-\infty, a])$ .

En conclusión,  $\tilde{\mathcal{I}}$  es la semiálgebra natural que aparece cuando buscamos extender un apremida definida sobre  $\mathcal{P}$  (y necesitamos definirla al menos sobre un  $\pi$ -sistema como  $\mathcal{P}$  si queremos unicidad).

Luego, la idea será:

$$\begin{aligned} \tau \text{ sobre } \mathcal{P} &\Rightarrow \text{extensión automática a } \tilde{\mathcal{I}} \\ &\Rightarrow \text{extensión a } \beta(\mathbb{R}) \text{ por Carathéodory.} \end{aligned}$$

$$\tau((-\infty, x]) =: F_\tau(x).$$

**Teorema 1.54.** Sea  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  monótona creciente. Entonces,  $\tau_F : \tilde{\mathcal{I}} \rightarrow [0, \infty]$  dada por  $\tau(I(a, b)) = F(b) - F(a)$  ( $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$ ) cumple que:

- E1)  $\tau_F$  es finitamente aditiva;
- E2) Si  $F$  es continua a derecha,  $\tau_F$  es  $\sigma$ -subaditiva.

Es decir, si  $F$  es de L-S entonces  $\tau_F$  es extendible (de hecho, es unívocamente extendible)

#### Demostración.

**E1.** Sea  $I \in \tilde{\mathcal{I}}$ . Luego,  $I = I(a, b)$  para ciertos  $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$  y  $\tau(I) = F(b) - F(a)$ . Ahora, si  $I = \bigsqcup_{i=1}^n J_i$  entonces, eventualmente reordenando los  $J_i$ , podemos suponer que  $J_i = I(a_i, b_i)$  para cada  $i = 1, \dots, n$ , donde  $a = a_1 \leq b_1 = a_2 \leq \dots \leq b_{n-1} = a_n \leq b_n = b$ . Luego,  $\tau(I) = F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n F(b_i) - F(a_i) = \sum_{i=1}^n \tau(J_i)$ .

**E2.** Supongamos primero que  $I = (a, b]$  con  $-\infty < a < b < \infty$ . Si  $I \subseteq \bigcup_{i=1}^\infty J_i$  con  $J_i \in \tilde{\mathcal{I}}$ , entonces  $J_i = (a_i, b_i] \cap \mathbb{R}$  con  $-\infty \leq a_i \leq b_i \leq \infty$ . Eventualmente, cambiando  $a_i \rightarrow \max\{a, a_i\}$ ,  $b_i \rightarrow \min\{b, b_i\}$ , puedo suponer que  $-\infty < a_i \leq b_i < \infty$ . Ahora, como  $F$  es continua a derecha, dado  $\varepsilon > 0$ , existen

- $\delta > 0$  tal que  $a + \delta < b$  y  $F(a + \delta) < F(a) + \varepsilon$ ;
- $\eta_i > 0$  tal que  $F(b_i + \eta_i) < F(b_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$  para cada  $i \in \mathbb{N}$ .

Luego, los intervalos de la forma  $((a_i, b_i + \eta_i))_{i \in \mathbb{N}}$  cubren  $[a + \delta, b]$ , con lo cual, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $[a + \delta, b] \subseteq \bigcup_{i=1}^N (a_i, b_i + \eta_i)$ . Como  $a + \delta \in [a + \delta, b]$ , existe  $i_1 \in \{1, \dots, N\}$  tal que  $a + \delta \in (a_{i_1}, b_{i_1} + \eta_{i_1}) =: I_1$ .

1. Si  $b \in I_1$ , entonces

$$\begin{aligned}
 F(b) - F(a + \delta) &\leq F(b_{i_1} + \eta_{i_1}) - F(a_{i_1}) \\
 &\leq F(b_{i_1}) + \frac{\varepsilon}{2^{i_1}} - F(a_{i_1}) \\
 &\leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \left( F(b_i) + \frac{\varepsilon}{2^i} - F(a_i) \right) \\
 &= \sum_{i \in \mathbb{N}} F(b_i) - F(a_i) + \varepsilon.
 \end{aligned}$$

de modo que  $F(b) - F(a) \leq F(b) - F(a + \delta) + \varepsilon \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} F(b_i) + 2\varepsilon$ . Tomando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , resulta  $\tau(I) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \tau(J_i)$ . ✓

2. Si  $b \notin I_1$ , entonces  $b_{i_1} + \eta_{i_1} \leq b$  y, luego,  $b_{i_1} + \eta_{i_1} \in [a + \delta, b]$ , de modo tal que existe  $i_2 \in \{1, \dots, N\} \setminus \{i_1\}$  tal que  $b_{i_1} + \eta_{i_1} \in (a_{i_2}, b_{i_2} + \eta_{i_2}) = I_2$ . En general, existen  $m \leq N$  e  $i_1, \dots, i_m \in \{1, \dots, N\}$  tales que:

$$a_{i_1} < a + \delta < b_{i_1} + \eta_{i_1} < \dots < b_{i_{m-1}} + \eta_{i_{m-1}} \leq b < b_{i_m} + \eta_{i_m}$$

con  $b_{i_k} + \eta_{i_k} \in (a_{i_{k+1}}, b_{i_{k+1}} + \eta_{i_{k+1}}) \quad \forall k = 1, \dots, m$ . Luego,

$$\begin{aligned}
 F(b) - F(a + \delta) &\leq F(b_{i_m} + \eta_{i_m}) - F(a_{i_1}) \\
 &= \left( \sum_{k=1}^{m-1} F(b_{i_{k+1}} + \eta_{i_{k+1}}) - F(b_{i_k} + \eta_{i_k}) \right) \\
 &\quad + F(b_{i_1} + \eta_{i_1}) - F(a_{i_1}) \\
 &\leq \left( \sum_{k=1}^{m-1} F(b_{i_{k+1}} + \eta_{i_{k+1}}) - F(a_{i_{k+1}}) \right) \\
 &\quad + F(b_{i_1} + \eta_{i_1}) - F(a_{i_1}) \\
 &\leq \sum_{i=1}^{\infty} F(b_i + \eta_i) - F(a_i) \\
 &\leq \sum_{i \in \mathbb{N}} F(b_i) - F(a_{i_1}) + \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Con lo cual,  $\tau(I) = F(b) - F(a) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \tau(J_i) + 2\varepsilon$ . Tomando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , obtenemos el resultado (en el caso  $-\infty < a < b < \infty$ ).

3. Si  $a = b$  entonces  $I = \emptyset$  y el resultado es inmediato.  
 4. Si  $a = -\infty$  ó  $b = \infty$  y  $a \neq b$ , entonces

$$(\max\{a, -N\}, \min\{b, N\}) \subseteq I \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

de modo que, si  $I \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} J_i$ , por el caso anterior,

$$\tau((\max\{a, -N\}, \min\{b, N\})) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \tau(J_i) \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Notamos que la parte izquierda es igual a

$$F(\min\{b, N\}) - F(\max\{a, -N\}),$$

y si  $N \rightarrow \infty$ , entonces

$$F(b) - F(a) = \tau(I)$$

□

## Clase 17

22 de Septiembre

**Ejemplo.** Medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}$ . Se obtiene tomando  $F := x$  ( $x \in \mathbb{R}$ ). La medida  $\mu_{\text{id}}$  resultante cumple  $\mu_{\text{id}}((a, b]) = b - a \forall -\infty \leq a \leq b \leq \infty$ . A partir de esta propiedad, se obtiene que  $\mu_{\text{id}}$  coincide con  $\lambda$  en todo  $\mathcal{I}$ . ( $\mu_{\text{id}}(I) = |I|$ ). En particular, es la extensión buscada.

**Ejemplo** ( $\mathcal{I}$ ?). Medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^d$ .

**Ejemplo.** Medida de Hausdorff  $s$ -dimensional en  $\mathbb{R}^d$ . La restricción de  $\mathcal{H}_s^*$  a los conjuntos medibles  $\mathcal{H}_s^*$ -medibles ( $\mathcal{H}_s^*$  = medida exterior de Hausdorff  $s$ -dimensional en  $\mathbb{R}^d$ ) es la medida  $\mathcal{H}_s$  conocida como medida de Hausdorff  $s$ -dimensional en  $\mathbb{R}^d$ .

**Datazo.** Si  $\mu_\xi$  es la distribución de Cantor,  $\mu_\xi = \mathcal{H}_{\frac{\log 2}{\log 3}}|_\xi$ . Notar que  $\mu_\xi(A) = \mathcal{H}_{\frac{\log 2}{\log 3}}(A \cap \xi)$ , donde  $\xi$  = conjunto de Cantor.

**Observación.** Los  $\beta(\mathbb{R}^d)$  son medibles porque  $\mathcal{H}_s^*$  es "medida exterior métrica" (Ejercicio guía 3).

## Chapter 2

# Unidad 2 - Funciones Medibles

**Definición 2.1** (función medible). Sean  $(X, \mathcal{M})$ ,  $(Y, \Sigma)$  espacios medibles. Decimos que  $f : X \rightarrow Y$  es  $(\mathcal{M}, \Sigma)$ -medible (o sólo medible si  $\mathcal{M}$  y  $\Sigma$  están claros) si  $f^{-1}(B) \in \mathcal{M} \forall B \in \Sigma$ . Si  $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , decimos que:

- i.  $f$  es medible Lebesgue si  $f^{-1}(B) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \forall B \in \beta(\mathbb{R}^m)$ ;
- ii.  $f$  es medible Borel si  $f^{-1}(B) \in \beta(\mathbb{R}^n) \forall B \in \beta(\mathbb{R}^m)$ .

**Observación.**  $f$  es medible Borel implica  $f$  medible Lebesgue.

**Aclaración.** A veces necesitaremos trabajar con funciones  $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ . Para ello dotamos a  $\overline{\mathbb{R}}$  con la  $\sigma$ -álgebra  $\beta(\overline{\mathbb{R}}) := \{A \cup B : A \in \beta(\mathbb{R}), B \subseteq \{-\infty, \infty\}\}$ .

**Lema 2.2.**  $\beta(\overline{\mathbb{R}})$  es una  $\sigma$ -álgebra y

$$\begin{aligned}\beta(\overline{\mathbb{R}}) &= \sigma((a, \infty] : a \in \mathbb{R}) = \sigma([a, \infty] : a \in \mathbb{R}) \\ &= \sigma([-\infty, b) : b \in \mathbb{R}) = \sigma([-\infty, b] : b \in \mathbb{R}).\end{aligned}$$

**Demostración.** Ejercicio! □

**Definición 2.3** (funciones medibles Lebesgue y Borel). Dada  $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , decimos que:

- i.  $f$  es medible Lebesgue si  $f^{-1}(B) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \forall B \in \beta(\overline{\mathbb{R}})$ ;
- ii.  $f$  es medible Borel si  $f^{-1}(B) \in \beta(\mathbb{R}^n) \forall B \in \beta(\overline{\mathbb{R}})$ .

Es decir, si es medible cuando tomamos  $\Sigma = \beta(\overline{\mathbb{R}})$  es la definición anterior.

**Proposición 2.4.** Sean  $(X_1, \mathcal{M})$  y  $(X_2, \mathcal{M})$  espacios medibles y  $\xi$  una clase de subconjuntos de  $X_1$  tal que  $\xi \subseteq \mathcal{M}_2$  y  $\sigma(\xi) = \mathcal{M}_2$ . Entonces, dada  $f : X_1 \rightarrow X_2$  tenemos que

$$f \text{ es } (\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)\text{-medible} \Leftrightarrow f^{-1}(C) \in \mathcal{M}_1 \quad \forall C \in \xi$$

**Demostración.**  $\Rightarrow$  Inmediato de la definición de  $f$  función medible.

$\Leftarrow$  Si definimos  $f^{-1}(\mathcal{M}_2) := \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{M}_2\}$ , debemos ver que  $f^{-1}(\mathcal{M}_2) \subseteq \mathcal{M}_1$ . Pero por ejercicio de la guía 3,  $\{f^{-1}(C) : C \in \xi\}$ .

$$f^{-1}(\mathcal{M}_2) = f^{-1}(\sigma(\xi)) = \sigma(f^{-1}(\xi)).$$

Pero  $f^{-1}(\xi) \subseteq \mathcal{M}_1$  y esto es exactamente lo que queríamos ver.  $\square$

**Corolario 2.5.** Si  $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es continua, entonces es medible Borel.

**Demostración.** Por la proposición, basta ver que  $f^{-1}(G) \in \beta(\mathbb{R}^n) \quad \forall G \subseteq \mathbb{R}^n$  abierto. Pero  $f$  es continua y  $G$  abierto, entonces  $f^{-1}(G)$  abierto y, en particular, Boreliano en  $\mathbb{R}^n$ .  $\square$

**Pregunta.** ¿Por qué tomamos  $\Sigma = \beta(\mathbb{R}^m)$  y no  $\Sigma = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  en la definición de función medible? Pues las funciones medibles son las candidatas a ser integrables en el sentido más amplio que buscamos construir. En particular, toda función continua  $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  debería ser medible. Por la proposición, esto implica que  $f^{-1}$  debe ser medible  $\forall B \in \beta(\mathbb{R})$ . Pero si tomamos  $\Sigma = \mathcal{L}(\mathbb{R})$  esto ya no sirve, i.e., existe  $f$  continua y  $E \subseteq \mathcal{L}(\mathbb{R})$  tal que  $f^{-1}(E) \not\subseteq \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ .

## Clase 18

24 de Septiembre

**Fé de erratas.** Dada  $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , decimos que

- $f$  es mdeible Lebesgue si  $f^{-1}(B) \in \mathcal{L}(E) \quad \forall B \in \beta(\mathbb{R}^m)$ ;
- $f$  es medible Borel si  $f^{-1}(B) \in \beta(E) \quad \forall B \in \beta(\mathbb{R}^m)$ ,

donde  $\mathcal{L}(E) := \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \cap E := \{A \cap E : A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)\}$ ,  $\beta(E) := \beta(\mathbb{R}^n) \cap E := \{B \cap E : B \in \beta(\mathbb{R}^n)\}$ .

**Observación.** Si  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  es una función, entonces por el Lema de la clase pasada,

$$\begin{aligned} f(\mathcal{F}, \beta(\mathbb{R})) - \text{medible} &\Leftrightarrow \{f > a\} \in \mathcal{F} \quad \forall a \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \{f \geq a\} \in \mathcal{F} \quad \forall a \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \{f < b\} \in \mathcal{F} \quad \forall b \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \{f \leq b\} \in \mathcal{F} \quad \forall b \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

**Proposición 2.6.** Sea  $(X, \mathcal{M})$  es un espacio medible y  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  funciones medibles (i.e.  $(\mathcal{M}, \beta(\mathbb{R}))$ -medible). Entonces:

- i)  $f + g$  es medible;
- ii)  $\alpha \cdot f$  es medible para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ ;
- iii)  $|f|$ ,  $\max\{f, g\}$ ,  $\min\{f, g\}$  son medibles;
- iv)  $f \cdot g$  es medible;
- v) Si  $g(x) \neq 0 \forall x \in X$ ,  $\frac{f}{g}$  es medible.

Además, si  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  es medible para cada  $n \in \mathbb{N}$  entonces las funciones  $h_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , dadas por

$$\begin{aligned} h_1(x) &:= \sup_{n \in \mathbb{N}} (f_n(x)) & h_2(x) &:= \inf_{n \in \mathbb{N}} (f_n(x)) \\ h_3(x) &:= \limsup_{n \rightarrow \infty} (f_n(x)) & h_4(x) &:= \liminf_{n \rightarrow \infty} (f_n(x)). \end{aligned}$$

son  $(\mathcal{M}, \beta(\mathbb{R}))$ -medibles.

**Demostración.** Por la observación, para ver que  $h : X \rightarrow \mathbb{R}$  es medible bastará con ver que  $\{h > a\} = \{x : h(x) > a\} = h^{-1}((a, \infty]) \in \mathcal{M} \forall a \in \mathbb{R}$ . Veamos esto en cada caso:

- i) Notamos que

$$\begin{aligned} \{x : f(x) + g(x) > a\} &= \{x : f(x) > a - g(x)\} \\ &= \bigcup_{Q \in \mathbb{Q}} \{x : f(x) > Q > a - g(x)\} \\ &= \bigcup_{Q \in \mathbb{Q}} \{x : f(x) > Q\} \cap \{x : g(x) > a - Q\} \end{aligned}$$

- ii) Si  $\alpha > 0$ ,

$$\{\alpha \cdot f > a\} = \left\{f > \frac{a}{\alpha}\right\} \in \mathcal{M}.$$

Si  $\alpha < 0$ ,

$$\{\alpha \cdot f > a\} = \left\{f < \frac{a}{\alpha}\right\} \in \mathcal{M}.$$

Si  $\alpha = 0$ ,

$$\{\alpha \cdot f > a\} = \{0 > a\} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } a \geq 0 \\ X & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

- iii)  $\{|f| > a\} = \{-a < f < a\} = f^{-1}((-a, a)) \in \mathcal{M}$ . Para ver que  $\max\{f, g\}$  y  $\min\{f, g\}$  son medibles, notamos que

$$\max\{f, g\} = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2}, \quad \min\{f, g\} = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2}.$$

iv) Primero, notemos que  $f^2$  es medible pues

- si  $a < 0$ ,  $\{f^2 > a\} = X \in \mathcal{M}$ ,
- si  $a \geq 0$ ,  $\{f^2 > a\} = \{|f| > \sqrt{a}\} \in \mathcal{M}$ .

De aquí se deduce que  $f \cdot g$  es medible pues

$$f \cdot g = \frac{(f+g)^2 - f^2 - g^2}{2}$$

v) Por (iv), bastará con ver que  $\frac{1}{g}$  es medible. Para esto,

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{1}{g} > a \right\} &= \left\{ \frac{1}{g} > a \right\} \cap \{g > 0\} \cup \left\{ \frac{1}{g} > a \right\} \cap \{g < 0\} \\ &= \{1 > ag\} \cap \{g > 0\} \cup \{1 < ag\} \cap \{g < 0\} \in \mathcal{M}. \end{aligned}$$

Por último, para ver que las  $h_i$  son medibles, notemos que

$$\{h_1 > a\} = \{x : \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) > a\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{f_n > a\} \in \mathcal{M}$$

pues  $f_n$  medible  $\forall n$ . Pero entonces,

$$\begin{aligned} h_2 &:= \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n = -\sup_{n \in \mathbb{N}} (-f_n) \\ h_3 &:= \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} (\sup_{k \geq n} f_k) \\ h_4 &:= \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n = -\limsup_{n \rightarrow \infty} (-f_n). \end{aligned}$$

son todas medibles. □

**Comentario** Las mismas propiedades valen si  $f, g$  toman valores en  $\overline{\mathbb{R}}$ , excepto la (i), pues  $f + g$  no está bien definida en  $x$  tales que  $f(x) + g(x)$  sea  $\infty - \infty$  ó  $-\infty + \infty$ . No obstante,  $f + g$  resulta medible si la redefinimos de manera constante en donde no esté bien definida.

**Proposición 2.7.** Sean  $(X_i, \mathcal{M}_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , espacios medibles. Si  $f : X_1 \rightarrow X_2$  es  $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ -medible y  $g : X_2 \rightarrow X_3$  es  $(\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3)$ -medible, entonces,  $g \circ f : X_1 \rightarrow X_3$  es  $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_3)$ -medible.

**Demostración.** Si  $B \in \mathcal{M}_3$ ,  $g \circ f^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B)) \in \mathcal{M}_1$  pues  $f$  es  $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ -medible y  $g^{-1}(B) \in \mathcal{M}_2$  pues  $g$  es  $(\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3)$ -medible. □

**Corolario 2.8.** Si  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones, entonces

- i)  $f, g$  medibles Borel ( $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_3 = \beta(\mathbb{R})$ )  $\Rightarrow g \circ f$  medible Borel;
- ii)  $f$  medible Lebesgue ( $\mathcal{M}_1 = \mathcal{L}(\mathbb{R})$ ,  $\mathcal{M}_2 = \beta(\mathbb{R})$ ) y  $g$  medible Borel ( $\mathcal{M}_2 = \beta(\mathbb{R})$ ,  $\mathcal{M}_3 = \beta(\mathbb{R})$ )  $\Rightarrow g \circ f$  es medible Lebesgue.

**Observación.** Si  $f, g$  son medibles Lebesgue, entonces  $g \circ f$  no tiene por qué ser medible Lebesgue.

**Definición 2.9.** Dado un espacio de medida  $(X, \mathcal{M}, \mu)$ , diremos que una cierta propiedad vale en casi todo punto de  $X$  respecto a  $\mu$ , o que vale  $\mu$ -C.T.P (ó  $\mu$ -a.e), si el subconjunto de  $X$  en donde dicha propiedad no vale es un conjunto  $\mu$ -nulo.

**Proposición 2.10.** Si  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  es un espacio de medida completo, y  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones que coinciden  $\mu$ -C.T.P, entonces

$$f \text{ medible} \Leftrightarrow g \text{ medible.}$$

**Demostración.** Si  $f$  es medible, entonces

$$\{g > a\} = (\{g > a\} \cap \{f = g\}) \cup \underbrace{(\{g > a\} \cap \{f \neq g\})}_{\mu\text{-nulo}}$$

Dado que este conjunto es  $\mu$ -nulo junto con que el espacio es completo, entonces el conjunto pertenece a  $\mathcal{M}$ . Como  $\{f \neq g\} \in \mathcal{M}$  por ser  $\mu$ -nulo, entonces  $\{f = g\} = \{f \neq g\}^c \in \mathcal{M}$ . Como  $\{f > a\} \in \mathcal{M}$ ,  $g$  resulta medible. Luego, probamos  $\Rightarrow$ ) y la otra implicación es igual.  $\square$

## Clase 19

26 de Septiembre

**Observación.** Si  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  no necesariamente completo, entonces si  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  es  $\mathcal{M}$ -medible y  $N \in \mathcal{M}$  con  $\mu(N) = 0$ , para cualquier  $C \in \overline{\mathbb{R}}$ ,  $g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  dada por

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & x \notin N \\ C & x \in N \end{cases}$$

es también medible. A modo de paréntesis, notemos que

$$\{g > a\} = \underbrace{\{f > a\}}_{\in \mathcal{M}} \cup \underbrace{N^c}_{\in \mathcal{M}} \cap \{C > a\} \cap N,$$

donde

$$\{C > a\} \cap N = \begin{cases} \emptyset & \text{si } C \leq a \\ N & \text{si } C > a \end{cases} \in \mathcal{M}$$

**Definición 2.11** (convergencia  $\mu$ -CTP). Sean  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  es un espacio de medida y, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , una función  $f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  (no necesariamente medibles). Dada otra función  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  (no necesariamente medible) decimos que  $f_n$  converge a  $f$  en  $\mu$ -casi todo punto (ó  $\mu$ -CTP, ó  $\mu$ -ae) y lo notamos  $f_n \rightarrow f$   $\mu$ -CTP (ó  $f_n \xrightarrow{\text{ae}} f$ ) si  $\{x \in X : f_n(x) \not\rightarrow f \text{ cuando } n \rightarrow \infty\}$  es  $\mu$ -nulo.

**Observación.** Si  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  son  $\mathcal{M}$ -medibles, entonces el conjunto

$$\begin{aligned} \{x \in X : f_n(x) \not\rightarrow f(x)\} &= \bigcup_{\delta > 0} \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq N} \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \delta\} \\ &= \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcap_{M \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq M} \underbrace{\left\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{k}\right\}}_{\in \mathcal{M}} \\ &\Rightarrow \in \mathcal{M} \end{aligned}$$

Ver el caso en que sea  $\overline{\mathbb{R}}$  en el codominio.

**Definición 2.12** (convergencia en medida). Sean  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  un espacio de medida y  $f_n, f : X \rightarrow \mathbb{R}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), funciones  $\mathcal{M}$ -medibles. Decimos que  $f_n$  converge en medida a  $f$  respecto a  $\mu$ , y lo notamos  $f_n \xrightarrow{\mu} f$ , si para cada  $\varepsilon > 0$  vale que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0$$

**Comentarios.**

1. La definición se puede extender a funciones medibles a valores en  $\overline{\mathbb{R}}$ , redefiniendo  $f_n(x) - f(x) := \infty$  cuando no está bien definida.

2.  $f_n \rightarrow f$   $\mu$ -CTP  $\not\Rightarrow f_n \xrightarrow{\mu} f$

**Ejemplo.**  $(X, \mathcal{M}, \mu) := (\mathbb{R}, \mathcal{L}, \lambda)$ , donde  $\lambda$  es la medida de Lebesgue.  $f_n(x) := \chi_{[n, \infty)}(x)$ ,  $f(x) := 0$ . Entonces,  $f_n(x) \rightarrow f(x) \forall x \in \mathbb{R}$ , pero si  $\varepsilon \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} \lambda(\{x : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) &= \lambda(\{x : f_n(x) = 1\}) \\ &= |[n, \infty)| = \infty \not\rightarrow 0. \end{aligned}$$

3.  $f_n \xrightarrow{\mu} f \not\Rightarrow f_n \rightarrow f$   $\mu$ -CTP.

**Ejemplo.**  $(X, \mathcal{M}, \mu) := ([0, 1], \mathcal{L}([0, 1]), \lambda|_{[0, 1]})$  y las funciones  $f_n$  dadas por seguir el mismo proceso (de manera inductiva) que  $f_1, f_2, f_3$  y  $f_4$  en los gráficos (dados en Fig 1.1 y 1.2). Entonces  $f_n \xrightarrow{\mu} 0$ , pero  $f_n \not\rightarrow 0$  para todo  $x$ .

**Proposición 2.13.** Sean  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  un espacio de medida y  $f_n, f : X \rightarrow \mathbb{R}$  funciones medibles. Entonces, si  $\mu$  es finita ( $\mu(X) < \infty$ ), vale la implicación

$$f_n \rightarrow f \text{ } \mu\text{-CTP} \Rightarrow f_n \xrightarrow{\mu} f.$$

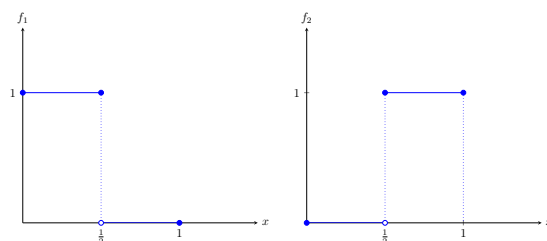


Fig. 2.1: gráficos de  $f_1$  y  $f_2$

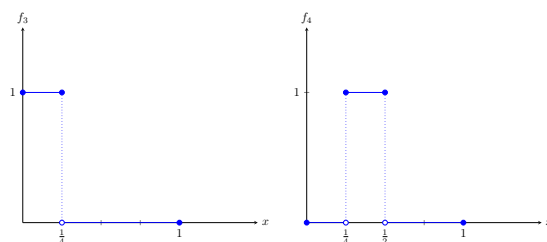


Fig. 2.2: gráficos  $f_3$  y  $f_4$

**Demostración.** Por la observación anterior, que  $f_n \rightarrow f$   $\mu$ -CTP significa que

$$\mu \left( \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcap_{M \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq M} \left\{ x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{k} \right\} \right) = 0 \quad (*)$$

Pero (\*) sucederá si y sólo si

$$\mu \left( \bigcap_{M \in \mathbb{N}} \left( \bigcup_{n \geq M} \left\{ x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{k} \right\} \right) \right) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (**)$$

Luego, dado que es  $\mu$ -finita (por ende, continua por arriba)

$$(**) \Leftrightarrow \lim_{M \rightarrow \infty} \mu \left( \bigcup_{n \geq M} \left\{ x : |f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{k} \right\} \right) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Como

$$\left\{ x : |f_M(x) - f(x)| > \frac{1}{k} \right\} \subseteq \bigcup_{n \geq M} \left\{ x : |f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{k} \right\},$$

entonces lo anterior implica que

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \mu \left( \left\{ x : |f_M(x) - f(x)| > \frac{1}{k} \right\} \right) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Por lo tanto, si  $\varepsilon > 0$  entonces

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \mu(\{x : |f_M(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0$$

(tomando  $k$  tal que  $\frac{1}{k} < \varepsilon$ ). Luego,  $f_n \xrightarrow{\mu} f$ .  $\square$

**Observación.** Probamos que si  $\mu$  es finita, entonces

$$f_n \rightarrow f \text{ } \mu\text{-CTP} \Leftrightarrow \lim_{M \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{n \geq M} \{|f_n - f| > \varepsilon\}\right) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$$

Comparar con

$$f_n \xrightarrow{\mu} f \Leftrightarrow \lim_{M \rightarrow \infty} \mu(\{|f_M - f| > \varepsilon\}) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$$

**Lema 2.14.** (Borel-Cantelli) Sean  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  un espacio de medida y  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$ . Entonces,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty \Rightarrow \mu(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = 0$$

donde  $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} A_k$ .

**Demostración.** Notar que

$$\begin{aligned} \mu(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) &\leq \mu\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right) \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ &\leq \sum_{k=n}^{\infty} \mu(A_k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

si  $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$ .  $\square$

## Clase 20

29 de Septiembre

A partir de esto, podemos extender la noción de convergencia en casi todo punto y en medida, respectivamente, reemplazando

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \text{ por } \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{d}(f_n(x), f(x)) = 0$$

y

$$|f_n(x) - f(x)| \text{ por } \bar{d}(f_n(x), f(x)).$$

Con este cambio, los resultados que vimos la clase pasada para funcione a valores en  $\mathbb{R}$ , también valen si toman valores en  $\mathbb{R}$ . Notar que  $\bar{d}(f(x), g(x))$  es medible (como función de  $x$ ) pues  $\bar{d}(f(x), g(x)) = |r \circ f(x) - r \circ g(x)|$ , y  $r \circ f, r \circ g$  son medibles porque  $r$  es continua.

**Lema 2.15.** Si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$ , entonces

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) < \infty \Rightarrow \mu(\limsup A_n) = 0.$$

**Aclaración** ¿Qué interpretación le damos a  $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$ ?

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n &= \bigcap_{M \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq M} A_n \\ &= \{x \in X : x \in A_n \text{ para infinitos valores de } n\} \\ &= \{x \in X : \exists \text{ subsucesión } (A_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \text{ tq } x \in A_{n_k} \forall k \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

¿Por qué se llama límite superior? Porque  $\chi_{\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \chi_{A_n}$ .

**Proposición 2.16.** Sean  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  un espacio de medida y  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}, f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  funciones medibles. Entonces, si  $f_n \xrightarrow{\mu} f$ , existe una subsucesión  $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  tal que  $f_{n_k} \rightarrow f$   $\mu$ -CTP.

**Demostración.** Como  $f_n \xrightarrow{\mu} f$ , para cada  $k \in \mathbb{N}$  podemos elegir  $n_k \in \mathbb{N}$  tal que

$$\mu\left(\left\{\bar{d}(f_{n_k}, f) > \frac{1}{k}\right\}\right) \leq \frac{1}{2^k}$$

Si llamamos

$$A_k := \left\{\bar{d}(f_{n_k}, f) > \frac{1}{k}\right\},$$

entonces  $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) < \infty$  y, luego, por el lema de Borel-Cantelli

$$\mu(\limsup_{k \rightarrow \infty} A_k) = 0.$$

Pero, por otro lado, si  $x \notin \limsup_{k \rightarrow \infty} A_k$ , entonces  $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$ . En efecto, si  $x \notin \limsup_{k \rightarrow \infty} A_k = \bigcap_{M \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq M} A_k$ , esto quiere decir que existe  $M_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $x \notin \bigcup_{k \geq M_0} A_k$ , i.e.,  $x \notin A_k \forall k \geq M_0$ . En particular,  $\bar{d}(f_{n_k}(x), f(x)) \leq \frac{1}{k} \forall k \geq M_0$ . Luego,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{d}(f_{n_k}(x), f(x)) = 0$  y entonces  $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$ . En particular,  $\{x : f_{n_k}(x) \not\rightarrow f(x)\} \subseteq \limsup_{k \rightarrow \infty} A_k$ , y por lo tanto  $\{x : f_{n_k}(x) \not\rightarrow f(x)\}$  es  $\mu$ -nulo, lo cual prueba que  $f_{n_k} \rightarrow f$   $\mu$ -CTP.  $\square$

**Corolario 2.17.** Si  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  es un espacio de medida completo y  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  es una sucesión de funciones medibles que convergen  $\mu$ -CTP a una función límite  $f$ , entonces  $f$  es medible también.

**Demostración.** Basta observar que  $f = \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n$  en  $\mu$ -casi todo punto, y usar que  $\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n$  es, como ya vimos, medible.  $\square$

## 2.0.1 Principios de Littlewood

**Primer Principio** (Todo conjunto medible es casi un abierto).

**Teorema 2.18.** Dado un conjunto  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ , son equivalentes:

1.  $E$  medible Lebesgue;
2. Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $G$  abierto tal que  $E \subseteq G$  y  $|G - E|_e < \varepsilon$ ;
3. Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $F$  cerrado tal que  $F \subseteq E$  y  $|E - F|_e < \varepsilon$ .

Además, si  $|E|_e < \infty$ , entonces estas afirmaciones son equivalentes a

4. Dado  $\varepsilon > 0$ , existen intervalos abiertos  $I_1, \dots, I_n$  tal que

$$\left| E \Delta \left( \bigcup_{k=1}^n I_k \right) \right|_e < \varepsilon.$$

**Observación.** Podemos reemplazar (4) por una condición (4') en donde los intervalos puedan ser tomados semiabiertos, cerrados, disjuntos, etc.

**Segundo Principio** (Toda sucesión convergente de funciones medibles, es "casi" uniformemente convergente).

**Teorema 2.19** (Egorov). Sean  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  un espacio de medida finita y  $(f_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}} : X \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $f_n \rightarrow f_\infty$   $\mu$ -CTP. Entonces, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $E_\varepsilon \in \mathcal{M}$  tal que  $f_n \rightarrow f$  uniformemente en  $E_\varepsilon$  y  $\mu(E_\varepsilon^c) < \varepsilon$ .

**Tercer Principio** (Toda función medible es "casi" continua).

**Teorema 2.20** (Lusin). Sea  $f : [a, b] \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  una función medible Lebesgue finita en casi todo punto (resp. de la medida de Lebesgue). Entonces, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua tal que

$$|\{x \in [a, b] : f(x) \neq g(x)\}| < \varepsilon.$$

## Clase 21

1 de Octubre

**Demostración** (Primer Principio, 1.72). Veamos sólo  $(2) \Leftrightarrow (4)$ , si  $|E|_e < \infty$ . El resto son ejercicios de la guía 4.

$\Rightarrow$  Dado  $\varepsilon > 0$ , sea  $G$  abierto tal que  $E \subseteq G$  y  $|G - E|_e < \frac{\varepsilon}{2}$ . Notar que  $|G|_e < \infty$ , pues  $|G|_e \leq |E|_e + |G - E|_e < \infty$ . Como  $G$  es abierto y  $\mathbb{R}$  es separable, entonces existen  $(I_i)_{i \in \mathbb{N}}$  intervalos abiertos tales que  $G = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i$ . Sea  $A_n := \bigcup_{i=1}^n I_i$ . Notar que  $A_n \nearrow G$  (i.e.  $A_n \subseteq A_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = G$ ). Como la medida de Lebesgue es "continua inferior",  $|G| = \lim_{n \rightarrow \infty} |A_n|$ . Tomemos  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|A_{n_0}| > |G| - \frac{\varepsilon}{2}$  (puedo, pues  $|G| < \infty$ ). Entonces,  $E \Delta A_n = (E - A_n) \cup (A_n - E) \subseteq (G - A_n) \cup (G - E)$  (notar que en la inclusión estamos usando que  $E, A_n \subseteq G$ ) de modo que,

notando primero  $|G - A_{n_0}|_e = |G - A_{n_0}| = |G| - |A_{n_0}| < \frac{\varepsilon}{2}$  (notar que en la última igualdad usamos que  $A_n \subseteq G$ ,  $|G| < \infty$ ), entonces

$$|E\Delta A_{n_0}|_e \leq |G - A_{n_0}|_e + |G - E|_e < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Luego,  $A_n$  es el conjunto buscado.

◀ Dado  $\varepsilon > 0$ , existen abiertos  $I_1, \dots, I_n$  tal que

$$\left| E\Delta \left( \bigcup_{i=1}^n I_i \right) \right|_e < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Por otro lado, por el ejercicio 1 de la guía 4, existe  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  abierto tal que

$$E\Delta \bigcup_{i=1}^n I_i \subseteq V \quad \text{y} \quad |V| \leq \left| E\Delta \left( \bigcup_{i=1}^n I_i \right) \right|_e + \frac{\varepsilon}{4} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Luego, si tomamos  $G = V \cup I_1 \cup \dots \cup I_n$ , entonces:

1.  $G$  es abierto,
2.  $E \subseteq G$ ,
3.  $G - E \subseteq V \cup (\bigcup_{i=1}^n I_i \setminus E) \subseteq (E\Delta \bigcup_{i=1}^n I_i)$ ,

con lo cual:

$$\begin{aligned} |G - E|_e &\leq |V|_e + \left| E\Delta \left( \bigcup_{i=1}^n I_i \right) \right|_e \\ &= |V| + \left| E\Delta \left( \bigcup_{i=1}^n I_i \right) \right|_e \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon. \end{aligned} \quad \square$$

**Demostración** (Segundo Principio, 1.73, Egorov). Para cada  $k, n \in \mathbb{N}$  definamos

$$E_n^{(k)} := \left\{ x : \bar{d}(f_n(x), f(x)) > \frac{1}{k} \right\}.$$

Observar que  $\limsup_{n \rightarrow \infty} E_n^{(k)} \subseteq \{x : f_n(x) \not\rightarrow f(x)\}$ . Por lo tanto,  $\limsup_{n \rightarrow \infty} E_n^{(k)}$  es  $\mu$ -nulo y, como  $f_n, f$  son medibles,  $\limsup_{n \rightarrow \infty} E_n^{(k)}$  es medible y  $\mu(\limsup_{n \rightarrow \infty} E_n^{(k)}) = 0$ . Luego, definimos  $B_M^{(k)} \searrow \limsup_{n \rightarrow \infty} E_n^{(k)}$  donde  $M \rightarrow \infty$  ( $B_{M+1}^{(k)} \subseteq B_M^{(k)} \forall M$ ,  $\bigcap_{M \in \mathbb{N}} B_M^{(k)} = \limsup_{n \rightarrow \infty} E_n^{(k)}$ ). Como  $\mu$  es finita,  $\mu$  es "continua superior" y entonces

$$\mu \left( \limsup_{n \rightarrow \infty} E_n^{(k)} \right) = \lim_{M \rightarrow \infty} \mu \left( B_M^{(k)} \right) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

En particular, dado  $\varepsilon > 0$ , podemos tomar  $M_k \in \mathbb{N}$  grande, de modo que

$$\mu(B_{M_k}^{(k)}) < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Luego, si definimos  $E_\varepsilon := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} (B_{M_k}^{(k)})^c$ , entonces

$$\mu(E_\varepsilon^c) = \mu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_{M_k}^{(k)}\right) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(B_{M_k}^{(k)}) < \varepsilon.$$

Por otro lado, si  $x \in E_\varepsilon$ , entonces, dado  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\bar{d}(f_n(x), f(x)) \leq \frac{1}{k} \quad \forall n \geq M_k.$$

Es decir, dado  $k \in \mathbb{N}$ , existe  $M_k \in \mathbb{N}$  tal que

$$\sup_{x \in E_\varepsilon} \bar{d}(f_n(x), f(x)) \leq \frac{1}{k} \quad \forall n \geq M_k.$$

Esto prueba que  $f_n$  "converge uniformemente" sobre  $E_\varepsilon$ .  $\square$

**Observación (Importante!).** Si las  $f_n, f$  son finitas  $\mu$ -CTP, entonces la misma demostración prueba que, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $E_\varepsilon \in \mathcal{M}$  tal que

$$\mu(E_\varepsilon^c) < \varepsilon \quad \text{y} \quad \sup_{x \in E_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Sólo hay que cambiar  $\bar{d}$  por  $d(x, y) := |x - y|$  y trabajar en el conjunto en donde  $f_n, f$  son finitas.

## Clase 22

3 de Octubre

## Chapter 3

# Unidad 3: Integración

**Definición 3.1** (función simple). Sea  $(X, \mathcal{M})$  un espacio medible. Una función  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  se dice simple si existen  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ , distintos y no nulos, y  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{M}$  disjuntos y no vacíos tales que

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i} \quad \left( \varphi(x) = \begin{cases} \alpha_i & \text{si } x \in A_i \\ 0 & \text{si } x \notin \bigcup A_i \end{cases} \right) \quad (*)$$

**Observación.**

1.  $\varphi$  simple  $\Rightarrow \varphi$   $\mathcal{M}$ -medible, pues  $\chi_{A_i}$   $\mathcal{M}$ -medible  $\forall i$ .
2.  $\text{Im}(\varphi) - \{0\} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  y  $A_i = \varphi^{-1}(\{\alpha_i\}) \forall i = 1, \dots, n$ , de modo tal que la representación en  $(*)$  es única salvo reordenamiento de los  $\alpha_i$  (siempre que los  $\alpha_i$  sean disjuntos y distintos de 0, y los  $A_i$  sean disjuntos y distintos de  $\emptyset$ ). Llamamos a  $(*)$ , la representación canónica de  $\varphi$  (abreviado RC).
3. Si  $\varphi$  es  $\mathcal{M}$ -medible y toma finitos valores, entonces es simple. En particular, si  $\varphi$  es combinación lineal (finita) de  $\chi_{A_i}$  con  $A_i \in \mathcal{M}$  (no necesariamente disjuntos, ni no vacíos), entonces es simple.

**Definición 3.2.** Dado un espacio de medida  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  y  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  una función simple no negativa, definimos la integral de  $\varphi$  respecto a  $\mu$  como:

$$\int_X \varphi d\mu := \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i),$$

si  $\varphi$  tiene RC,  $\varphi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$ .

**Proposición 3.3** (Propiedades de la integral para funciones simples). Si  $\varphi_1, \varphi_2 : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  son simples no negativas, entonces

1. Si  $\alpha \geq 0$ ,  $\alpha \cdot \varphi$  es simple no negativa y  $\int_X \alpha \varphi d\mu = \alpha \int_X \varphi d\mu$ ;
2.  $\varphi_1 + \varphi_2$  es simple no negativa y  $\int_X (\varphi_1 + \varphi_2) d\mu = \int_X \varphi_1 d\mu + \int_X \varphi_2 d\mu$ ;
3. Si  $\varphi_1 \leq \varphi_2$   $\mu$ -CTP, entonces  $\int_X \varphi_1 d\mu \leq \int_X \varphi_2 d\mu$ .

**Demostración.** Ver Canvas □

**Definición 3.4.** Dados  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  un espacio de medida y  $f : X \rightarrow [0, \infty]$   $\mathcal{M}$ -medible no negativa, definimos la integral de  $f$  con respecto a  $\mu$  como

$$\int_X f d\mu := \sup \left\{ \int_X \varphi d\mu : \varphi \text{ simple, } 0 \leq \varphi \leq f \right\} \in [0, \infty].$$

**Observación.** Si  $f : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  es simple no negativa, entonces esta definición es consistente con la anterior, pues

$\boxed{\leq}$  Si  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  es simple tal que  $0 \leq \varphi \leq f$  y  $f$  tiene RC  $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$  entonces por la proposición,

$$\int_X \varphi d\mu \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i).$$

Tomando supremo en  $\varphi$ , resulta DEF NUEVA  $\leq$  DEF ORIGINAL.

$\boxed{\geq}$  Tomando  $\varphi = f$  en la definición nueva, resulta DEF NUEVA  $\geq$  DEF ORIGINAL.

**Definición 3.5** (partes negativa y positiva de  $f$ ). Dados  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  un espacio de medida y  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$   $\mathcal{M}$ -medible, definimos:

- la parte positiva de  $f$  como  $f^+ := \max\{f, 0\}$ .
- la parte negativa de  $f$  como  $f^- := -\min\{f, 0\}$ .

**Observación.** Notar que  $f^+$  y  $f^-$  son  $\mathcal{M}$ -medibles, no negativas y  $f = f^+ - f^-$ ,  $|f| = f^+ + f^-$ .

**Definición 3.6.** Diremos que  $f$  es integrable con respecto a  $\mu$  (o  $\mu$ -integrable) si

$$\max \left\{ \int_X f^+ d\mu, \int_X f^- d\mu \right\} < \infty$$

y diremos que es débilmente integrable respecto a  $\mu$  si

$$\min \left\{ \int_X f^+ d\mu, \int_X f^- d\mu \right\} < \infty.$$

**Definición 3.7.** Si  $f$  es (al menos) débilmente  $\mu$ -integrable, definimos su integral respecto de  $\mu$  como

$$\int_X f d\mu := \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu \in [-\infty, \infty]$$

**Definición 3.8.** Si  $f$  es débilmente  $\mu$ -integrable y  $E \in \mathcal{M}$ , definimos

$$\int_E f d\mu := \int_X f \chi_E d\mu$$

**Observación.** La integral está bien definida, pues  $f \chi_E$  resulta débilmente  $\mu$ -integrable.

**Lema 3.9.** Si  $f$  es débilmente  $\mu$ -integrable y  $\mu(E) = 0$ , entonces

$$\int_E f d\mu = 0.$$

**Demostración.** Supongamos primero que  $f \geq 0$ . En tal caso,  $f \chi_E = 0$   $\mu$ -CTP. En particular, si  $\varphi$  es simple tal que  $0 \leq \varphi \leq f \chi_E$ ,

$$0 \leq \int_X \varphi d\mu \leq \int_X (\max \varphi) \chi_E d\mu = (\max \varphi) \mu(E) = 0.$$

Entonces,  $\int_X \varphi d\mu = 0$ , lo que implica  $\int_X f \chi_E = 0$ . Para el caso general, usamos este caso y el hecho de que  $(f \chi_E)^\pm = f^\pm \chi_E$ .  $\square$

## Clase 23

6 de Octubre

**Recordar.**

- $f$   $\mu$ -integrable  $\Leftrightarrow \int_X |f| d\mu < \infty$ .
- $f$  débilmente  $\mu$ -integrable si  $\int_X f^+ d\mu < \infty$  y/o  $\int_X f^- d\mu < \infty$ .

**Teorema 3.10.** Sean  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  un Edm y  $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  débilmente  $\mu$ -integrables. Entonces, valen las siguientes

i) Dado  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \cdot f$  es débilmente  $\mu$ -integrable y  $\int_X \alpha \cdot f d\mu = \alpha \int_X f d\mu$ .  
(con la convención de que  $\alpha \cdot \infty = 0$ )

ii) Si  $f + g$  es débilmente  $\mu$ -integrable, entonces

$$\int_X (f + g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu. \quad (*)$$

iii) (Monotonía) Si  $f \leq g$   $\mu$ -CTP, entonces  $\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$ .

iv) (Desigualdad Triangular)  $|\int_X f d\mu| \leq \int_X |f| d\mu$ .

v) Si  $\mu(E) = 0 \Rightarrow \int_E f d\mu = 0$ .

En particular,

1. Si  $f, g$  son  $\mu$ -integrables, entonces  $f + g$  es  $\mu$ -integrable y vale (\*).

2.  $f$  es  $\mu$ -integrable si y sólo si  $\int_X |f| d\mu < \infty$ .

**Nota.** (i) + (ii) se conocen como la propiedad de "linealidad" de la integral.

**Observación.** Si  $f$  es  $\mathcal{M}$ -medible y no negativa, entonces es débilmente  $\mu$ -integrable pue  $f^- \cong 0$  y entonces  $\int f^- = 0 < \infty$ . Lo mismo si no es positiva. Así que todas estas propiedades valen para funciones que no cambian de signo.

**Nota.** La siguiente proposición es un caso particular de (iii).

**Proposición 3.11.** Si  $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  son débilmente  $\mu$ -integrables y  $f \leq g$  en todo punto, entonces  $\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$ .

**Demostración.** Si  $f, g$  son no negativas, entonces

$$\begin{aligned} \int_X f d\mu &= \sup \left\{ \int_X \varphi d\mu : 0 \leq \varphi \leq f, \varphi \text{ simple} \right\} \\ (f \leq g \Rightarrow) &\leq \sup \left\{ \int_X \varphi d\mu : 0 \leq \varphi \leq g, \varphi \text{ simple} \right\} = \int_X g d\mu. \end{aligned}$$

(el caso general de éste, se demuestra usando que  $f^+ \leq g^+$  y  $g^- \leq f^-$ ).  $\square$

**Lema 3.12.** Si  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  es función simple no negativa, entonces la aplicación  $\mu_\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\mu_\varphi(E) = \int_E \varphi d\mu$  es una medida en  $(X, \mathcal{M})$ .

**Demostración.** 1.  $\mu_\varphi(\emptyset) = \int_\emptyset \varphi d\mu = \int_X \varphi \chi_\emptyset d\mu = \int_X 0 d\mu = 0$ .  
 $\mu_\varphi(X) = 0$ .

2. Sean  $(E_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$  disjuntos y supongamos que  $\varphi$  tiene RC  $\varphi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_{A_i}$ . Entonces,

$$\begin{aligned}
 \mu_\varphi \left( \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i \right) &= \int_{\bigcup_j E_j} \varphi \, d\mu = \int_X \varphi \chi_{\bigcup_j E_j} \, d\mu \\
 &= \int_X \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i} \chi_{\bigcup_j E_j} \, d\mu = \int_X \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i \cap \bigcup_j E_j} \, d\mu \\
 &= \int_X \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{\bigcup_j A_i \cap E_j} \, d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_X \chi_{\bigcup_j A_i \cap E_j} \, d\mu \\
 &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu \left( \bigcup_{j=1}^{\infty} A_i \cap E_j \right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_i \cap E_j) \\
 (\alpha > 0) &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i \cap E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_X \chi_{A_i \cap E_j} \, d\mu \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_X \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i} \chi_{E_j} \right) \, d\mu \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{E_j} \varphi \, d\mu \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} \mu_\varphi(E_j). \quad \square
 \end{aligned}$$

**Observación.** Lo que tuvimos que demostrar fue:

$$\int_X \varphi \chi_{\bigcup_j E_j} \, d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_X \varphi \chi_{E_j} \, d\mu,$$

es decir

$$\int \sum_{j=1}^{\infty} \varphi \chi_{E_j} = \sum_{j=1}^{\infty} \int \varphi \chi_{E_j}.$$

**Teorema 3.13 (Convergencia Monótona).** Sean  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  un Edm y  $(f_n)_n$  una sucesión de funciones  $f_n : X \rightarrow [0, \infty]$   $\mathcal{M}$ -medibles no negativas tales que  $f_n \leq f_{n+1} \, \forall n \in \mathbb{N}$ . Entonces

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$  existe y es  $\mathcal{M}$ -medible.
2.  $\int_X (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n) \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu$ .

**Demostración.** 1. Como  $0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \, \forall x \in X$  y  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \in [0, \infty]$  existe  $\forall x \in X$ , y es medible porque  $f \cong \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$ . Como  $f \geq 0$ , es también débil  $\mu$ -integrable.

2. Notemos que por monotonía de la integral,  $(\int_X f_n d\mu)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq [0, \infty]$  es una sucesión creciente y, como tal, tiene límite  $L \in [0, \infty]$ . Queremos ver que  $L = \int_X f d\mu$ . Para ello, notemos que  $f_n \leq f \forall n \in \mathbb{N}$

$$\int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Tomando supremo,  $L \leq \int_X f d\mu$ . Para la otra desigualdad, sea  $\varphi$  simple tal que  $0 \leq \varphi \leq f$ . Bastará ver que  $\int_X \varphi d\mu \leq L$ . Si tomamos  $\alpha \in (0, 1)$  y definimos

$$E_n := \{x : f_n(x) \geq \alpha \varphi(x)\},$$

entonces  $E_n \nearrow X$  pues  $f_n \rightarrow f$  puntualmente. Luego, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$L \geq \int_X f_n d\mu \geq \int_{E_n} f_n d\mu \geq \int_{E_n} \alpha \varphi d\mu = \alpha \int_{E_n} \varphi d\mu = \alpha \mu_\varphi(E_n).$$

Por continuidad por debajo,  $\mu_\varphi(E_n) \nearrow \mu_\varphi(X) = \int_X \varphi d\mu$ . Tomando  $n \rightarrow \infty$  en la desigualdad anterior,

$$L \geq \alpha \int_X \varphi d\mu \quad (\forall \alpha \in (0, 1)).$$

Tomando  $\alpha \rightarrow 1^-$ , resulta  $L \geq \int_X \varphi d\mu$ .

□

## Clase 24

8 de Octubre

**Aplicación.** Sea  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  un espacio de medida.

1. Si  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  son  $\mathcal{M}$ -medibles no negativas, entonces  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$  es  $\mathcal{M}$ -medible (y, por ende, débil  $\mu$ -integrable, pues es no negativa) y vale que

$$\int_X \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n \right) d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_X f_n d\mu$$

(i.e., vale integrar la serie término a término).

2. Si  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  es  $\mathcal{M}$ -medible no negativa, entonces  $\mu_f : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$  dada por

$$\mu_f(A) := \int_A f d\mu,$$

es una medida.

**Demostración.** 1. Si definimos  $S_n := \sum_{k=1}^n f_k$ , entonces  $S_n$  es  $\mathcal{M}$ -medible  $\forall n \in \mathbb{N}$  (suma finita de medibles) y  $0 \leq S_n \leq S_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$  (pues

$f_{n+1} \geq 0$ ). Por convergencia monótona,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

es  $\mathcal{M}$ -medible y

$$\begin{aligned} \int_X \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n \right) d\mu &= \int_X \left( \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \right) d\mu \\ (\text{por C. Mon.}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X S_n d\mu \\ (\text{por linealidad}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_X f_k d\mu \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_X f_n d\mu. \end{aligned}$$

2. Notar que  $\mu_f(\emptyset) = \int_{\emptyset} f d\mu = 0$ , pues  $\mu(\emptyset) = 0$  y  $f$  débil  $\mu$ -int. Además, si  $(E_j)_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$  son disjuntos,

$$\begin{aligned} \mu_f \left( \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right) &= \int_{\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j} f d\mu = \int_X f \chi_{\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j} d\mu \\ &= \int_X f \left( \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{E_j} \right) d\mu = \int_X \left( \sum_{j=1}^{\infty} f \chi_{E_j} \right) d\mu \\ (\text{por 1.}) &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_X f \chi_{E_j} d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_f(E_j) \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j) &= \mu \left( \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right) \\ &= \int_X \chi_{\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j} d\mu \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_X \chi_{E_j} d\mu. \end{aligned}$$

□

**Lema 3.14.** Sea  $f : X \rightarrow [0, \infty]$  una función no negativa. Entonces,  $f$  es  $\mathcal{M}$ -medible si y sólo si existe una sucesión  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de funciones simples  $\mathcal{M}$ -medibles tales que

- i)  $0 \leq \varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x) \quad \forall x \in X, n \in \mathbb{N};$
- ii)  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) \quad \forall x \in X.$

En particular, por Convergencia Monótona,

$$\int_X f(x) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \varphi_n d\mu.$$

**Demostración.**  $\boxed{\Leftarrow}$  Inmediato, pues límite puntual de medibles es medible (ó  $f = \sup \varphi_n$ ).

$\boxed{\Rightarrow}$  Definimos

$$\varphi_n := \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \chi_{A_k^{(n)}} + n \chi_{B^{(n)}},$$

donde

$$A_k^{(n)} := \left\{ x : \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n} \right\}, \quad B^{(n)} := \{x : f(x) \geq n\}$$

Observar que cada  $\varphi_n$  es simple y  $\mathcal{M}$ -medible (pues  $f$  es  $\mathcal{M}$ -medible) y

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{[2^n f(x)]}{2^n} & \text{si } 0 \leq f(x) < n \\ n & \text{si } f(x) \geq n, \end{cases}$$

de donde se sigue que  $\varphi_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x) \quad \forall x \in X$ . Por otro lado, como  $A_k^{(n)} = A_{2k}^{(n+1)} \uplus A_{2k+1}^{(n+1)}$ , entonces, si  $x \in A_k^{(n)}$ ,

$$\varphi_n(x) = \frac{k}{2^n} \leq \begin{cases} \frac{2k}{2^{n+1}} \quad (= \frac{k}{2^n}) & \text{si } x \in A_{2k}^{(n+1)} \\ \frac{2k+1}{2^{n+1}} \quad (= \frac{k}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}) & \text{si } x \in A_{2k+1}^{(n+1)} \end{cases} = \varphi_{n+1}(x).$$

Si  $x \in B^{(n)}$ , la demostración es similar.  $\square$

**Demostración (propiedades de la integral).** Linealidad Lo vemos sólo en el caso  $\alpha \geq 0$  y funciones no negativas. El caso general, se deduce de éste, trabajando con partes pos/neg. En efecto, sean  $f, g : X \rightarrow [0, \infty]$   $\mathcal{M}$ -medibles no negativas. Por el lema, existen  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  simples  $\mathcal{M}$ -medibles tales que

- $0 \leq \varphi_n \nearrow f;$
- $0 \leq \psi_n \nearrow g.$

Como  $\alpha \geq 0$ , tenemos que

$$\begin{cases} 0 \leq \alpha \varphi_n \nearrow \alpha f \\ 0 \leq \alpha \psi_n \nearrow \alpha g \\ 0 \leq \varphi_n + \psi_n \nearrow f + g. \end{cases}$$

Por Convergencia Monótona, y la linealidad para simples,

$$\int_X \alpha f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \alpha \varphi_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \varphi_n d\mu = \alpha \int_X f d\mu$$

y

$$\begin{aligned} \int_X (f + g) d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X (\varphi_n + \psi_n) d\mu \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_X \varphi_n d\mu + \int_X \psi_n d\mu \right) \\ &= \int_X f d\mu + \int_X g d\mu. \end{aligned}$$

Esto prueba linealidad. En particular, vemos que

$$\int_X |f| d\mu = \int_X f^+ d\mu + \int_X f^- d\mu$$

y, por ende,  $f$  es  $\mu$ -integrable si y sólo si  $\int_X |f| d\mu < \infty$ .

Desigualdad Triangular Si  $f$  es débil  $\mu$ -integrable, pero  $\int_X |f| d\mu = \infty$ , entonces la desigualdad es inmediata. Por otro lado, si  $f$  es  $\mu$ -integrable, entonces, por la desigualdad triangular en  $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \left| \int_X f d\mu \right| &= \left| \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu \right| \\ &\leq \left| \int_X f^+ \right| + \left| \int_X f^- \right| \\ &= \int_X f^+ + \int_X f^- = \int_X |f|. \end{aligned}$$

Monotonía. Si  $f \leq g$   $\mu$ -CTP, entonces, como  $f, f\chi_{\{f \leq g\}}$  son débil  $\mu$ -int. (y lo mismo para  $g$ ) y  $\mu(\{f > g\}) = 0$ ,

$$\begin{aligned} \int_X f d\mu &= \int_X f(\chi_{\{f \leq g\}} + \chi_{\{f > g\}}) d\mu \\ &= \int_X f\chi_{\{f \leq g\}} + \int_X f\chi_{\{f > g\}} \\ &= \int_{\{f \leq g\}} f \leq \int_{f \leq g} g = \int_X g d\mu \end{aligned}$$

(notar que la última desigualdad está dada por una propiedad de la clase pasada).  $\square$

## Clase 25

10 de Octubre

**Observación.** Si  $f$  es débil  $\mu$ -integrable y  $A, B \in \mathcal{M}$  son disjuntos, entonces

$$\int_{A \sqcup B} f \, d\mu = \int_X f(\chi_A + \chi_B) d\mu = \int_A f \, d\mu + \int_B f \, d\mu.$$

En particular, si  $\mu(E) = 0$ , entonces

$$\int_X f \, d\mu = \int_E f \, d\mu + \int_{E^c} f \, d\mu = \int_{E^c} f \, d\mu.$$

**Propiedad 3.15** (Desigualdad de Tchebychev). Si  $f$  es  $\mu$ -integrable, entonces, dado  $\lambda > 0$ ,

$$\mu(\{x : |f(x)| > \lambda\}) \leq \frac{1}{\lambda} \int_{\{x : |f(x)| > \lambda\}} |f| \, d\mu.$$

**Demostración.**

$$\int_{\{x : |f(x)| > \lambda\}} |f(x)| \, d\mu \geq \int_{\{x : |f(x)| > \lambda\}} \lambda \, d\mu = \lambda \mu(\{x : |f(x)| > \lambda\}).$$

□

**Corolario 3.16.** Si  $f$  es  $\mathcal{M}$ -medible no negativa y tal que  $\int_X f \, d\mu = 0$ , entonces  $f = 0$   $\mu$ -CTP.

**Corolario 3.17.** Si  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  es  $\mu$ -integrable, entonces es finita  $\mu$ -CTP.

**Lema 3.18** (Fatou). Sea  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  un espacio de medida y  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  funciones  $\mathcal{M}$ -medibles no negativas  $\mu$ -CTP. Entonces,

$$\int_X \left( \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

**Observación.** La desigualdad puede ser estricta: En efecto, tomar  $(X, \mathcal{M}, \mu) := (\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}), \lambda)$ ,  $f_n(x) := n\chi_{(0, \frac{1}{n}]}$ . Entonces,  $f_n \rightarrow 0$  puntualmente, pero  $\int_X f_n \, d\mu = 1 \, \forall n$  y esto es estrictamente mayor que  $\int_X 0 \, d\mu = 0$ . Además, tomando  $g_n := -f_n$ , vemos que la hipótesis de  $f_n \geq 0$   $\mu$ -CTP también es necesaria.

**Demostración.** Sea  $E := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{x : f_k(x) < 0\}$ . Notar que  $E \in \mathcal{M}$  y  $\mu(E) = 0$ . Luego, si definimos  $g_n := (\inf_{k \geq n} f_k) \chi_{E^c}$ , entonces

$$0 \leq g_n \nearrow \left( \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \right) \chi_{E^c} = \left( \sup_{n \in \mathbb{N}} g_n \right) \chi_{E^c}.$$

Luego, por Convergencia Monótona,

$$\int_{E^c} \left( \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu.$$

(no podemos poner límite sólo en el lado derecho, pues no sabemos si converge). Para concluir, debemos ver que  $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$  es débil  $\mu$ -integrable y que  $\int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu = \int_{E^c} \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu$ . Pero esto se deduce de la observación al principio de la clase, pues  $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$  es débil  $\mu$ -integrable, ya que  $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \geq 0$   $\mu$ -CTP y, por lo tanto,

$$\left( \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \right)^- = 0 \text{ } \mu\text{-CTP}$$

y, por lo tanto,

$$\int_X (\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n)^- d\mu = \int_X 0 d\mu = 0 < \infty.$$

(notar que la igualdad está dada por la observación dada a continuación).  $\square$

**Observación.** Si  $f = g$   $\mu$ -CTP, entonces

$$\int_X f d\mu = \int_{\{f=g\}} f d\mu = \int_{\{f=g\}} g d\mu = \int_X g d\mu.$$

( $f, g$  son débil  $\mu$ -integrables).

**Teorema 3.19** (de Convergencia Dominada). Sean  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  un espacio de medida y  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  funciones  $\mathcal{M}$ -medibles tales que

1.  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge  $\mu$ -CTP a  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$   $\mathcal{M}$ -medible;
2. Existe  $g : X \rightarrow [0, \infty]$   $\mu$ -integrable ( $\Rightarrow$   $\mathcal{M}$ -medible) tal que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n| \leq g$$

$\mu$ -CTP.

Entonces,  $f$  es  $\mu$ -integrable y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0.$$

En particular,

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu.$$

**Observación.** (2) es equivalente a que  $(\sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n|)$  sea  $\mu$ -integrable.

**Demostración.** Vemos primero que  $f$  es  $\mu$ -integrable. Observar que

$$|f(x)| = \liminf_{n \rightarrow \infty} |f_n(x)| \quad \forall x \in E := \{x : f_n(x) \rightarrow f(x)\}.$$

Como  $\mu(E^c) = 0$  por hipótesis, entonces

$$\int_X |f| d\mu = \int_E |f| d\mu = \int_E \left( \liminf_{n \rightarrow \infty} |f_n| \right) d\mu = \int_X \left( \liminf_{n \rightarrow \infty} |f_n| \right) d\mu.$$

Luego, por el Lema de Fatou,

$$\int_X |f| d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n| d\mu \leq \int_X g d\mu < \infty.$$

Luego,  $f$  es  $\mu$ -integrable. En particular, como cada  $f_n$  es  $\mu$ -integrable,

$$\int_X |f_n - f| d\mu < \infty.$$

Sea ahora  $h_n := 2g - |f_n - f|$ . Observar que  $h_n \geq 0$   $\mu$ -CTP (pues  $|f_n| \leq g$   $\mu$ -CTP  $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow |f| \leq g$   $\mu$ -CTP). Por el Lema de Fatou,

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} h_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X h_n d\mu = \liminf_{n \rightarrow \infty} \left( 2 \int_X g d\mu - \int_X |f_n - f| d\mu \right).$$

Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 2g$   $\mu$ -CTP,

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} h_n = \int_X 2g d\mu.$$

Juntando ambas cosas, tenemos que

$$2 \int_X g d\mu \leq 2 \int_X g d\mu - \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu.$$

Luego,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu \leq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$$

y, como,

$$\left| \int_X f_n d\mu - \int_X f d\mu \right| = \left| \int_X (f_n - f) d\mu \right| \leq \int_X |f_n - f| d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

resulta que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$ . □

## Clase 26

13 de Octubre

**Observación.**  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  medible si  $f^{-1}(B) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}) \quad \forall B \in \beta(\mathbb{R})$ .

**Proposición 3.20.** Sean  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  un espacio de medida y  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  funciones  $\mathcal{M}$ -medibles. Entonces, si  $f_n \geq 0$   $\mu$ -CTP  $\forall n \in \mathbb{N}$  ó  $\int (\sum_{n \in \mathbb{N}} |f_n|) d\mu < \infty$ , vale que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$  converge  $\mu$ -CTP (en  $\overline{\mathbb{R}}$ ), es  $\mathcal{M}$ -medible, (definida como 0 donde no converge) y, además,

$$\int_X \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n \right) d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_X f_n d\mu.$$

### 3.1 Integración de funciones a valores en $\mathbb{C}$

Sean  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  un espacio de medida y  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  una función. Notemos que  $f = \Re(f) + i\Im(f)$  donde  $\Re(f), \Im(f) : X \rightarrow \mathbb{R}$  están definidas por

$$\Re(f)(x) := \Re(f(x)), \quad \Im(f)(x) := \Im(f(x)).$$

**Definición 3.21** (función medible). Una función  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  se dice medible si  $\Re(f), \Im(f)$  lo son (en el sentido usual). Decimos que  $f$  es  $\mu$ -integrable si  $\Re(f), \Im(f)$  lo son. En ese caso, definimos

$$\int_X f d\mu := \int_X \Re(f) d\mu + i \int_X \Im(f) d\mu \in \mathbb{C}.$$

**Teorema 3.22.** Sean  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  un espacio de medida y  $f, g : X \rightarrow \mathbb{C}$  funciones  $\mathcal{M}$ -medibles. Entonces:

1. Si  $f, g$  son  $\mu$ -integrables, entonces  $\alpha f + \beta g$  es  $\mu$ -integrable  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$  y

$$\int_X (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_X f d\mu + \beta \int_X g d\mu.$$

2.  $f$  es  $\mu$ -integrable (en  $\mathbb{C}$ ) si y sólo si  $|f|$  es  $\mu$ -integrable (en  $\mathbb{R}$ ) y, en tal caso,

$$\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu.$$

3. Si  $f$  es  $\mu$ -integrable y  $E \in \mathcal{M}$ , entonces  $f\chi_E$  es  $\mu$ -integrable. En particular, si definimos  $\int_E f d\mu := \int_X f \cdot \chi_E d\mu$ , entonces si  $E_1, E_2 \in \mathcal{M}$  son disjuntos,

$$\int_{E_1 \sqcup E_2} f d\mu = \int_{E_1} f d\mu + \int_{E_2} f d\mu.$$

Además, si  $\mu(E) = 0$ , entonces  $\int_E f d\mu = 0$  y, por lo tanto,  $\int_X f d\mu = \int_{E^c} f d\mu$ .

**Demostración.** Teorema 8.12 del Rana.  $\square$

### 3.1.1 Caso particular: Integral de Lebesgue

**Notación.**

- $\int f(x) dx$  = integral de  $f$  respecto a la medida de Lebesgue.
- $\int_a^b f(x) dx := \int_{[a,b]} f(x) dx$ .
- C.T.P. = C.T.P. respecto de la medida de Lebesgue.
- integrable = integrable respecto de la medida de Lebesgue.
- $\int_X f(x) d\mu(x)$  cuando queramos destacar la variable de integración.

**Teorema 3.23.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  acotada. Entonces,

1.  $f$  es integrable Riemann si y sólo si  $f$  es continua C.T.P.
2. Si  $f$  es integrable Riemann, entonces  $f$  es integrable Lebesgue y

$$\int_a^b f(x) dx(R) = \int_a^b f(x) dx(L).$$

**Definición 3.24** (envolventes de Baire). Dada  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  acotada, definimos:

1. La envolvente superior de Baire de  $f$  como  $M : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$M(x) := \limsup_{y \rightarrow x} f(y) := \inf_{\delta > 0} \left( \sup_{y: |y-x| < \delta} f(y) \right).$$

2. La envolvente inferior de Baire de  $f$  como  $m : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$m(x) := \liminf_{y \rightarrow x} f(y) := \sup_{\delta > 0} \left( \inf_{y: |y-x| < \delta} f(y) \right).$$

**Lema 3.25.** Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es acotada, entonces:

1.  $m(x) \leq f(x) \leq M(x) \quad \forall x \in [a, b]$ .
2.  $f$  es continua en  $x \Leftrightarrow m(x) = M(x)$ .
3.  $M$  es semicontinua superior, i.e.  $\{M < \alpha\}$  es abierto  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ .
4.  $m$  es semicontinua inferior, i.e.  $\{m > \alpha\}$  es abierto  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ .

En particular,  $M$  y  $m$  son medibles Borel.

**Demostración.** Ver Canvas. □

**Lema 3.26.** Sean  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  acotada y  $(\pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de particiones de  $[a, b]$  tales que  $\|\pi_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Entonces, si definimos  $\underline{s}_{\pi_n}, \bar{s}_{\pi_n} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\underline{s}_{\pi_n} := \sum_{I \in \pi_n} m_I(f) \chi_I, \quad \bar{s}_{\pi_n} := \sum_{I \in \pi_n} M_I(f) \chi_I.$$

vale que

$$\begin{aligned} \underline{s}_{\pi_n}(x) &\longrightarrow m(x) \\ \bar{s}_{\pi_n}(x) &\longrightarrow M(x) \end{aligned} \quad \forall x \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \pi_n.$$

En particular,  $\underline{s}_{\pi_n} \longrightarrow m, \bar{s}_{\pi_n} \longrightarrow M$  C.T.P.

**Demostración.** Dado  $x_0 \in [a, b] \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \pi_n$  y  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$\sup_{y: |y-x_0| < \delta} f(y) < M(x_0) + \varepsilon.$$

Sea  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\|\pi_n\| < \delta \quad \forall n \geq n_0$ . Luego, para cada  $n \geq n_0$ , existe  $I_n \in \pi_n$  tal que  $x_0 \in I_n \subseteq B(x_0, \delta)$ . En particular,

$$\bar{s}_{\pi_n}(x_0) = \sup_{y \in I_n} f(y) \leq \sup_{y: |y-x_0| < \delta} f(y) < M(x_0) + \varepsilon.$$

Por otro lado, existe  $\delta^* > 0$  tal que  $B(x_0, \delta^*) \subseteq I_n$ , de modo que

$$\bar{s}_{\pi_n}(x_0) = \sup_{y \in I_n} f(y) \geq \sup_{y: |y-x_0| < \delta^*} f(y) \geq M(x_0).$$

Luego,  $\forall n \geq n_0, M(x_0) \leq \bar{s}_{\pi_n}(x_0) \leq M(x_0) + \varepsilon$ . Como  $\varepsilon > 0$  es arbitrario, resulta  $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{s}_{\pi_n}(x_0) = M(x_0)$ . □

**Nota.** La prueba para  $m$  es análoga.

**Proposición 3.27.** Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es acotada, entonces

$$\overline{\int_a^b f(x) \, dx(R)} = \int_a^b M(x) \, dx(L), \quad \underline{\int_a^b f(x) \, dx(R)} = \int_a^b m(x) \, dx(L).$$

**Demostración.** Hacemos el caso de  $M$ . Sean  $(\pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  partición de  $[a, b]$  tal que  $\|\pi_n\| \longrightarrow 0$ . Entonces

1.  $\bar{s}_{\pi_n} \longrightarrow M$  C.T.P.
2.  $|\bar{s}_{\pi_n}| \leq \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| := K \in [0, \infty)$  pues  $f$  es acotada.

Luego, como la función constante  $K$  es integrable en  $[a, b]$  por ser simple y ser  $||[a, b]| < \infty$ , entonces por Convergencia Dominada,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \bar{s}_{\pi_n}(x) dx(L) = \int_a^b M(x) dx.$$

□

## Clase 27

15 de Octubre

**Proposición 3.28.** Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es acotada, entonces

$$\overline{\int_a^b f(R)} = \int_a^b M(L) \quad \text{y} \quad \underline{\int_a^b f(R)} = \int_a^b m(L).$$

**Demostración** (continuación). Vemos sólo el caso de  $M$ , pues el otro es igual. Vimos ya que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \bar{s}_{\pi_n}(x) dx(L) = \int_a^b M(x) dx(L).$$

Pero, notemos que

$$\int_a^b \bar{s}_{\pi_n}(x) dx = \bar{S}(f; \pi_n).$$

Luego, por resultado visto en clases, como  $\|\pi_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{S}(f; \pi_n) = \overline{\int_a^b f(R)}.$$

Juntando ambas cosas, por unicidad del límite,

$$\overline{\int_a^b f(R)} = \int_a^b M(L).$$

□

**Demostración** (Teorema 2.23). 1.  $f$  integrable Riemann  $\Leftrightarrow \overline{\int_a^b f} = \underline{\int_a^b f} \Leftrightarrow \int_a^b M(x) dx = \int_a^b m(x) dx \Leftrightarrow \int_a^b (M(x) - m(x)) dx = 0 \Leftrightarrow$  (por corolario de la clase pasada)  $M - m = 0$  CTP.  $\Leftrightarrow M = m$  CTP.  $\Leftrightarrow f$  continua CTP.

2. Si  $f$  es Riemann integrable, entonces, por (1) y el control 3,  $f$  es medible Lebesgue (o, sino,  $f = M$  CTP y  $M$  es medible). Además, es integrable por ser acotada y, en consecuencia,

$$\int_a^b f(x) dx(L) = \int_a^b M(x) dx(L) = \overline{\int_a^b f(x) dx(R)} = \int_a^b f(x) dx(R).$$

□

**Definición 3.29** (función escalonada). Una función  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  se dice escalonada si existe una partición  $\pi = \{x_0, \dots, x_n\}$  de  $[a, b]$  y  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  tal que

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{[x_{i-1}, x_i]}(x) \quad \forall x \notin \pi.$$

**Observación.** Toda  $\varphi$  escalonada es simple y Riemann integrable.

**Proposición 3.30.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada. Entonces

$$f \text{ Riemann integrable} \Leftrightarrow \inf_{\substack{\varphi \text{ escalonada} \\ \varphi \geq f}} \int_a^b \varphi = \sup_{\substack{\varphi \text{ escalonada} \\ \varphi \leq f}} \int_a^b \varphi,$$

y

$$f \text{ Lebesgue integrable} \Leftrightarrow \inf_{\substack{\varphi \text{ simple} \\ \varphi \geq f}} \int_a^b \varphi(L) = \sup_{\substack{\varphi \text{ simple} \\ \varphi \leq f}} \int_a^b \varphi(L).$$

**Demostración.** Royden (Capítulo 4, sección 2, proposición 3). □

## Chapter 4

# Unidad 4: Espacios Producto

**Definición 4.1.** Sean  $(X_1, \mathcal{M}_1)$ ,  $(X_2, \mathcal{M}_2)$  espacios medibles. Definimos

1. La clase de rectángulos medibles en  $X_1 \times X_2$  como

$$\mathcal{R} := \{A \times B : A \in \mathcal{M}_1, B \in \mathcal{M}_2\}.$$

2. La  $\sigma$ -álgebra producto  $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$  en  $X_1 \times X_2$  como  $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 := \sigma(\mathcal{R})$ .

**Nota.** No confundir  $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$  con el producto cartesiano de  $\mathcal{M}_1$  y  $\mathcal{M}_2$  !!! En efecto, notar que el producto cartesiano entre  $\mathcal{M}_1$  y  $\mathcal{M}_2$  es igual a  $\{(A, B) : A \in \mathcal{M}_1, B \in \mathcal{M}_2\}$ . En cambio, los elementos de  $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$  son subconjuntos de  $X_1 \times X_2$ .

**Ejemplo.**

- $\beta(\mathbb{R}^n) \times \beta(\mathbb{R}^m) = \beta(\mathbb{R}^{n+m}) = \sigma(I_1 \times \cdots \times I_{n+m} : I_i \subseteq \mathbb{R} \text{ intervalo})$ .
- $\beta(\mathbb{R}^n) \times \beta(\mathbb{R}^m) \subsetneq \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^m) \subsetneq \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+m})$ .

**Observación.**  $\mathcal{R}$  es una semiálgebra.

**Teorema 4.2.** Sean  $(X_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$ ,  $(X_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$  espacios de medida  $\sigma$ -finita. Entonces, existe una única medida  $\mu_1 \times \mu_2$  en  $(X_1 \times X_2, \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2)$  tal que  $\mu_1 \times \mu_2(A \times B) = \mu_1(A)\mu_2(B) \quad \forall A \times B \in \mathcal{R}$ .

Más aún,  $\mu_1 \times \mu_2$  se puede extender de manera única a la  $\sigma$ -álgebra

$$\overline{\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2} := \{A \uplus N : A \in \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2, \exists B \in \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 \text{ tq } N \subseteq B \text{ y } (\mu_1 \times \mu_2)(B) = 0\}.$$

Notamos a dicha extensión como  $\overline{\mu_1 \times \mu_2}$  y viene dada por

$$\overline{\mu_1 \times \mu_2}(A \uplus N) = \mu_1 \times \mu_2(A).$$

**Nota.** La medida  $\mu_1 \times \mu_2$  se llama la medida producto de  $\mu_1$  y  $\mu_2$ .

**Observación.** Por inducción, se puede definir  $\mu_1 \times \cdots \times \mu_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

**Ejemplo.** Si  $(X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i) := (\mathbb{R}, \beta(\mathbb{R}), \lambda) \quad i = 1, \dots, n$  entonces

$$\begin{aligned} X_1 \times \dots \times X_n &= \mathbb{R}^n \\ \beta(\mathbb{R}) \times \dots \times \beta(\mathbb{R}) &= \beta(\mathbb{R}^n) \\ \lambda \times \dots \times \lambda &= \lambda_{\mathbb{R}^n} \text{ (sobre } \beta(\mathbb{R}^n)) \end{aligned}$$

## Clase 28

17 de Octubre

**Demostración** (Teorema 4.2). Definimos la premedida  $\tau : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty]$  por  $\tau(A \times B) := \mu_1(A)\mu_2(B)$ . Como  $\tau$  es  $\sigma$ -finita, pues  $\mu_1$  y  $\mu_2$  lo son, y por el Teorema de Carathéodory, bastará con ver que  $\tau$  es  $\sigma$ -aditiva en  $\mathcal{R}$  (implica finitamente aditiva +  $\sigma$ -subaditiva). A tal fin, sean  $(A_n \times B_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{R}$  disjuntos y  $A \times B \in \mathcal{R}$  tal que  $A \times B = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \times B_n$ . Debemos ver que  $\mu_1(A)\mu_2(B) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_1(A_n)\mu_2(B_n)$ . Para cada  $x \in A$ , sea  $I(x) := \{n \in \mathbb{N} : x \in A_n\}$ .

Notar que, entonces,  $B = \bigsqcup_{n \in I(x)} B_n$ . En efecto,

$$\begin{aligned} y \in B &\Leftrightarrow (x, y) \in A \times B \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in A_n \times B_n \text{ para algún } n \\ &\Leftrightarrow n \in I(x), y \in B_n. \end{aligned}$$

Para ver que la unión es disjunta, notar que si  $y \in B_n \cap B_m$  con  $n, m \in I(x)$ , entonces  $(x, y) \in A_n \times B_n \cap A_m \times B_m \Rightarrow n = m$ .

En particular, esto implica que

$$\chi_A(x)\mu_2(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}(x)\mu_2(B_n)$$

donde, además, tenemos que

$$\chi_A(x)\mu_2\left(\bigsqcup_{n \in I(x)} B_n\right) = \chi_A(x) \sum_{n=1}^{\infty} \mu_2(B_n) \underbrace{\chi_{I(x)}(n)}_{=\chi_{A_n}(x)}.$$

Integrando respecto a  $\mu_1$  a ambos miembros,

$$\mu_1(A)\mu_2(B) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_1(A_n)\mu_2(B_n).$$

Donde la igualdad está dada por monotonía (i.e.  $\int_{X_1} \sum_{n \in \mathbb{N}} \chi_{A_n} \mu_2(B_n) d\mu_1 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{X_1} \chi_{A_n} \mu_2(B_n) d\mu_1$ ).  $\square$

**Definición 4.3** (sección transversal). Dados  $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ,  $(Y, \Sigma, \nu)$  y  $E \subseteq X \times Y$ , para cada  $x \in X$  e  $y \in Y$  definimos

- La sección transversal de  $E$  en  $x$  como  $E_x := \{y \in Y : (x, y) \in E\}$ ;
- La sección transversal de  $E$  en  $y$  como  $E^y := \{x \in X : (x, y) \in E\}$ .

**Propiedad 4.4.**

- $(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n)_x = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (E_n)_x$  y  $(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n)_x = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (E_n)_x$ .
- $E_1 \subseteq E_2 \Rightarrow (E_1)_x \subseteq (E_2)_x$ .
- $E_1 \subseteq E_2 \Rightarrow (E_2 - E_1)_x = (E_2)_x - (E_1)_x$ . En particular,  $(E^c)_x = (E_x)^c$ .
- La aplicación  $y \mapsto \chi_E(x, y)$  coincide con  $\chi_{E_x} : Y \rightarrow \{0, 1\}$ .

Vale lo mismo para secciones transversales en  $y \in Y$ .

**Teorema 4.5** (Principio de Cavalieri). Sean  $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ,  $(Y, \Sigma, \nu)$  espacios de medida  $\sigma$ -finita. Entonces si  $E \in \mathcal{M} \times \Sigma (= \sigma(\mathcal{R}))$ , vale que:

- $E_x \in \Sigma \quad \forall x \in X$
- $g_E(x) := \nu(E_x) = \int_Y \chi_E(x, y) d\nu(y)$  es  $\mathcal{M}$ -medible.
- se tienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} \mu \times \nu(E) &= \int_{X \times Y} \chi_E(x, y) d(\mu \times \nu)(x, y) \\ &= \int_X g_E(x) d\mu(x) = \int_X \left( \int_Y \chi_E(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) \end{aligned}$$

Además, vale lo mismo para secciones en  $y$

**Demostración.** i) Sea  $\mathcal{M} := \{E \in \mathcal{M} \times \Sigma : E_x \in \Sigma \forall x \in X\}$ . Queremos ver que  $\mathcal{M} \times \Sigma \subseteq \mathcal{C}$ . Basta ver que  $\mathcal{C}$  es  $\sigma$ -álgebra que contiene a  $\mathcal{R}$ . En efecto:

- (a)  $(\mathcal{R} \subseteq \mathcal{C})$ : si  $E = A \subset B \in \mathcal{R}$  entonces

$$E_x = \begin{cases} B & x \in A \\ \emptyset & x \notin A \end{cases} \in \Sigma.$$

□

**Clase 29**

20 de Octubre

**Demostración** (Principio de Cavalieri). Debíamos ver que  $\mathcal{C} = \{E \in \mathcal{M} \times \Sigma : E_x \in \Sigma \forall x\}$  es una  $\sigma$ -álgebra que contiene a  $\mathcal{R}$ .

- a)  $(\mathcal{R} \subseteq \mathcal{C})$ : ya lo vimos!

- b)  $(\mathcal{C} \text{ } \sigma\text{-álgebra})$ :

- $X \times Y \in \mathcal{C}$  pues  $X \times Y \in \mathcal{R} \subseteq \mathcal{C}$ ;

- $E \in \mathcal{C}$ ,  $x \in X \Rightarrow (E^c)_x = (E_x)^c \in \Sigma$ ;
- $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}$ ,  $x \in X \Rightarrow (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n)_x = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (E_n)_x \in \Sigma$ .

Por minimalidad,  $\mathcal{M} \times \Sigma = \sigma(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{C}$ .

- c) (ii + iii) Suponemos que  $\mu$  y  $\nu$  son finitas (el caso general se deduce de éste, mediante el argumento de siempre). Consideremos la clase

$$\mathcal{L} := \left\{ E \in \mathcal{M} \times \Sigma : \begin{array}{l} g_E(x) := \nu(E_x) \text{ es } \mathcal{M}\text{-medible (ii)} \\ \mu \times \nu(E) = \int_X g_E(x) d\mu(x) \text{ (iii)} \end{array} \right\}$$

Queremos ver que  $\mathcal{M} \times \Sigma \subset \mathcal{L}$ . Para ello, mostraremos que  $\mathcal{L}$  es un  $\lambda$ -sistema que contiene a  $\mathcal{R}$ . Como  $\mathcal{R}$  es un  $\pi$ -sistema por ser semiálgebra, por Dynkin obtenemos que  $\mathcal{M} \times \Sigma = \sigma(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{L}$ .

- $(\mathcal{R} \subseteq \mathcal{L})$ : Si  $E = A \times B \in \mathcal{L}$ , entonces

$$\begin{cases} g_E(x) = \nu(B)\chi_A(x) \text{ es } \mathcal{M}\text{-medible, pues } A \in \mathcal{M}. \checkmark \\ \mu \times \nu(E) = \mu(A)\nu(B) = \int_X g_E(x) d\mu(x). \checkmark \end{cases}$$

- $(\mathcal{L} \text{ } \lambda\text{-sistema})$ :
  - $X \times Y \in \mathcal{L}$  pues  $X \times Y \in \mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}$ .
  - $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}$  disjuntos  $\Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathcal{L}$ . En efecto,

$$\begin{aligned} g_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n}(x) &= \nu \left( \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right)_x \right) \\ &= \nu \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (E_n)_x \right) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu((E_n)_x) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} g_{E_n}(x) \end{aligned}$$

es  $\mathcal{M}$ -medible por ser límite de las sumas parciales (que son  $\mathcal{M}$ -medibles)

$$\begin{aligned} \mu \times \nu \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu \times \nu(E_n) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_X g_{E_n} d\mu \\ &= \int_X \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} g_{E_n} \right) d\mu \\ &= \int_X g_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n} d\mu. \checkmark \end{aligned}$$

–  $(E \in \mathcal{L} \Rightarrow E^c \in \mathcal{L})$ : En efecto,

$$\begin{aligned} g_{E^c}(x) &= \nu((E^c)_x) = \nu((E_x)^c) \\ &= \nu(Y) - \nu(E_x) \\ &= g_{X \times Y}(x) - g_E(x) \end{aligned}$$

es  $\mathcal{M}$ -medible.

$$\begin{aligned} \mu \times \nu(E^c) &= \mu \times \nu(X \times Y) - \mu \times \nu(E) \\ &= \int_X g_{X \times Y} d\mu - \int_X g_E d\mu \\ &= \int_{X \times Y} \underbrace{(g_{X \times Y} - g_E)}_{g_{E^c}} d\mu. \end{aligned}$$

□

**Teorema 4.6** (Fubini). Si  $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ,  $(Y, \Sigma, \nu)$  son espacios de medida  $\sigma$ -finita y  $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  es  $(\mathcal{M} \times \Sigma)$ -medible y débil  $(\mu \times \nu)$ -integrable, entonces:

- i)  $y \mapsto f(x, y)$  es  $\Sigma$ -medible  $\forall x \in X$  y débil  $\nu$ -integrable  $\mu$ -CTP.
- ii)  $x \mapsto \int_Y f(x, y) d\nu(y)$  es  $\mathcal{M}$ -medible (extiendiendo por 0 donde no se puede integrar) y débil  $\mu$ -integrable.
- iii)  $\int_X (\int_Y f(x, y) d\nu(y)) d\mu(x) = \int_{X \times Y} f(x, y) d(\mu \times \nu)(x, y)$ .

Además,

- 1. Si  $f \geq 0$  entonces la débil  $\nu$ -integrabilidad en (i) es en TODO punto.
- 2. Si  $f$  es  $(\mu \times \nu)$ -integrable entonces la integrabilidad débil se puede reemplazar por integrabilidad en (i), (ii).
- 3. Valen las mismas afirmaciones intercambiando el rol de  $x$  e  $y$ .

**Demostración.** Lo hacemos en 4 pasos:

- 1. Si  $f = \chi_E$  con  $E \in \mathcal{M} \times \Sigma$ , el resultado se sigue del principio de Cavalieri (y la débil integrabilidad en (i) es en TODO punto).
- 2. Si  $f$  es simple no negativa, el resultado se sigue de (i) por linealidad.
- 3. Si  $f$  es no negativa, tomamos  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  simples tales que  $0 \leq \varphi_n \nearrow f$ . Entonces, si dada  $g : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  y  $x \in X$ , definimos  $g_x(y) := g(x, y)$ , entonces:
  - $0 \leq (\varphi_n)_x \nearrow f_x$  y, por (2),  $f_x$  resulta  $\Sigma$ -medible. Como  $f_x \geq 0$ , en particular, es débil  $\nu$ -integrable ( $\forall x \in X$ ).

- Por Convergencia Monótona,

$$0 \leq h_n(x) := \int_Y (\varphi_n)_x d\nu(y) \nearrow \int_Y f_x d\nu(y) := h_f(x).$$

En particular,  $h_f$  es  $\mathcal{M}$ -medible (por ser límite de medibles) y, al ser  $h \geq 0$ , es también débil  $\mu$ -integrable.

(iii) Por convergencia Monótona de nuevo,

$$\begin{aligned} \int_X \left( \int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) &= \int_X h_f(x) d\mu(x) \\ (\text{Conv. Mon.}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X h_n(x) d\mu(x) \\ (2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{X \times Y} \varphi_n(x, y) d(\mu \times \nu)(x, y) \\ (\text{Conv. Mon.}) &= \int_{X \times Y} f(x, y) d(\mu \times \nu)(x, y) \end{aligned}$$

4. Si  $f$  cambia de signo, se obtiene el resultado a partir de  $f^+$  y  $f^-$  utilizando el paso (3). Lo único que hay que verificar es que  $f_x$  y  $h_f$  son débilmente integrables si  $f$  lo es. Para ello, supongamos que  $\int_{X \times Y} f^+ d(\mu \times \nu) < \infty$  (el otro caso es análogo). Luego, por el paso (3),  $\int_X (\int_Y (f^+)_x d\nu) d\mu < \infty$  (\*). En particular,  $\int_Y (f^+)_x d\nu(y) < \infty$  para  $\mu$ -casi todo  $x$ . Esto implica que:

- $f_x = (f^+)_x - (f^-)_x$  es  $\mathcal{M}$ -medible  $\forall x \in X$ , y es débil  $\nu$ -integrable para  $\mu$ -casi todo  $x$ , pues  $(f_x)^+ = (f^+)_x$ .
- $h(x) = \int_X (f^+)_x - \int_Y (f^-)_x$  está bien definida  $\mu$ -CTP. Además, es  $\mathcal{M}$ -medible (si la extendemos por 0 donde no está bien definida) por ser medibles.
- $\int_X h_f^+(x) d\mu(x) \leq \int_X (\int_Y (f^+)_x(y) d\nu(y)) d\mu(x) < \infty$  por (\*) y luego  $h_f$  es débil  $\mu$ -integrable.

□

## Clase 30

22 de Octubre

**Demostración** (Continuación Fubini). Estábamos viendo el caso (4) en que  $f$  cambia de signo, pero es débil  $(\mu \times \nu)$ -integrable ( $\int_{X \times Y} f^+ d(\mu \times \nu) < \infty$ ). Usando que  $(f_x)^\pm = (f^\pm)_x$ , vimos que  $h_f(x) := \int_Y f_x(y) d\nu(y)$  estaba bien definida para  $\mu$ -casi todo  $x$  y era débil  $\mu$ -integrable. Como

$$h_f(x) = \int_Y (f_x)^+ d\nu - \int_Y (f_x)^- d\nu$$

por linealidad, concluimos que

$$\begin{aligned}
 \int_X h_f d\mu &= \int_X \left( \int_Y (f_x)^+ d\nu \right) d\mu - \int_X \left( \int_Y (f_x)^- d\nu \right) d\mu \\
 &= \int_X \left( \int_Y (f^+)_x d\nu \right) d\mu - \int_X \left( \int_Y (f^-)_x d\nu \right) d\mu \\
 &= \int_{X \times Y} f^+ d(\mu \times \nu) - \int_{X \times Y} f^- d(\mu \times \nu) \\
 &:= \int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu).
 \end{aligned}$$

Por último, si  $f$  fuese  $(\mu \times \nu)$ -integrable, podemos repetir lo anterior para  $f^+$  y  $f^-$  y con esto reemplazar la integrabilidad débil por integrabilidad en todos lados.  $\square$

**Nota.**

- El caso particular en que  $f \geq 0$  se conoce como el Teorema de Tonelli (o de Fubini-Tonelli).
- Los libros suelen hacer el caso  $f \geq 0$  ó  $f$  integrable.
- El argumento en 4 pasos ( $\chi_E \rightarrow$  simples  $\rightarrow f \geq 0 \rightarrow f$  cualquiera) se conoce como "argumento estándar".

**Pregunta.** ¿Qué pasa si  $E \in \overline{\mathcal{M} \times \Sigma} \setminus \mathcal{M} \times \Sigma$ ?

**Ejemplo.** Si  $V \subseteq [0, 1]$  es un conjunto de Vitali y  $E = \{0\} \times V$ . Se verifica que:

1.  $V \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2) = \overline{\mathcal{L}(\mathbb{R}) \times \mathcal{L}(\mathbb{R})} = \overline{\beta(\mathbb{R}) \times \beta(\mathbb{R})} = \overline{\beta(\mathbb{R}^2)}$  pues es  $(\lambda \times \lambda)$ -nulo.
2.  $E \notin \mathcal{L}(\mathbb{R}) \times \mathcal{L}(\mathbb{R})$  y  $x = 0$ , entonces  $E_x = V \notin \mathcal{L}(\mathbb{R})$  (absurdo, por Fubini).

**Teorema 4.7** (Fubini en  $\overline{\mathcal{M} \times \Sigma}$ ). Sean  $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ,  $(Y, \Sigma, \nu)$  espacios de medida  $\sigma$ -finita completos y  $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$   $(\mathcal{M} \times \Sigma)$ -medible y débil  $(\mu \times \nu)$ -integrable. Entonces:

- i)  $f_x(y) := f(x, y)$  es  $\Sigma$ -medible y débil  $\nu$ -integrable para  $\mu$ -casi todo  $x$ .
- ii)  $h_f(x) := \int_Y f_x(y) d\nu(y)$  es  $\mathcal{M}$ -medible (extendiendo donde no está bien definida) y débil  $\mu$ -integrable.
- iii) se tiene que

$$\begin{aligned}
 \int_X \left( \int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) &= \int_X h_f(x) d\mu(x) \\
 &= \int_{X \times Y} f(x, y) d(\mu \times \nu)(x, y)
 \end{aligned}$$

Además, vale lo mismo para secciones en  $y$ .

**Demostración.** Por el argumento estándar, bastará con verlo para  $f = \chi_E$  con  $E \in \overline{\mathcal{M} \times \Sigma}$ .

En tal caso,  $E = B \uplus N$ , donde  $B \in \mathcal{M} \times \Sigma$  y  $N$  es  $\mu \times \nu$ -nulo, i.e.  $\exists \widehat{N} \in \mathcal{M} \times \Sigma$  tal que  $N \subseteq \widehat{N}$  y  $\mu \times \nu(\widehat{N}) = 0$ . Luego,  $\chi_E = \chi_B + \chi_N$  y, como ya vimos el Teo. para  $B \in \mathcal{M} \times \Sigma$ , bastará con verlo para  $\chi_N$ . A tal fin, notar que, para cada  $x \in X$  se tiene que  $(\chi_N)_x = \chi_{N_x}$ . En particular,  $(\chi_N)_x$  es  $\Sigma$ -medible si y sólo si  $N_x \in \Sigma$ . Veremos que  $N_x \in \Sigma$  para  $\mu$ -casi todo  $x$  y eso nos dará (i). Para ello, observar que por el Principio de Cavalieri

$$0 = \mu \times \nu(\widehat{N}) = \int_X \left( \int_Y \underbrace{\chi_{\widehat{N}}(x, y)}_{=(\chi_{\widehat{N}})_x} d\nu \right) d\mu = \int_X \underbrace{\nu(\widehat{N}_x)}_{\geq 0} d\mu(x).$$

Como  $\nu(\widehat{N}_x) \geq 0 \forall x \in X$ , lo anterior implica (por guía 6) que  $\nu(\widehat{N}_x) = 0$  para  $\mu$ -c.t.x. Entonces, como  $N_x \subseteq \widehat{N}_x$ , resulta que  $N_x$  es  $\mu$ -nulo para  $\mu$ -casi todo  $x$ . Como  $(Y, \Sigma, \nu)$  es completo, resulta  $N_x \in \Sigma$  para  $\mu$ -c.t.x.  $\square$

## Clase 31

24 de Octubre

**Definición 4.8** (variación). Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\pi$  una partición de  $[a, b]$ . Definimos la variación de  $f$  en  $[a, b]$  respecto a  $\pi$  como

$$V_a^b(f; \pi) := \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \sum_{I \in \pi} |\Delta f(I)|$$

donde  $\Delta f(I) = f(\sup I) - f(\inf I)$ . Observar que si  $\pi \subseteq \pi'$ , entonces  $V_a^b(f; \pi) \leq V_a^b(f; \pi')$ . Luego, definimos la variación total de  $f$  en  $[a, b]$  como

$$V_a^b(f) := \sup_{\substack{\pi \text{ part.} \\ \text{de } [a, b]}} V_a^b(f; \pi) \in [0, \infty].$$

$f$  se dice variación acotada si  $V_a^b(f) < \infty$ .

**Ejemplo.** Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es monótona, entonces  $V_a^b(f) = |f(b) - f(a)| \forall \pi$ . Luego,  $V_a^b(f) = |f(b) - f(a)| < \infty$  y, por ende,  $f$  es de variación acotada.

**Ejemplo.** La función

$$f(x) := \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x = 0, \end{cases}$$

es continua pero no tiene variación acotada en  $[0, 1]$ .

**Observación.** Existen funciones  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continuas pero que no son de VA sobre ningún intervalo  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$  acotado.

**Teorema 4.9.** Una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es de VA si y sólo si  $f = f_1 - f_2$  con  $f_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  monótonas crecientes.

**Demostración.**  $\boxed{\Leftarrow}$  Por el ejemplo,  $f_1$  y  $f_2$  son de variación acotada. En particular, si  $\pi$  es partición de  $[a, b]$ ,

$$|\Delta f(I)| \leq |\Delta f_1(I)| + |\Delta f_2(I)|$$

y, por lo tanto,

$$V_a^b(f; \pi) \leq V_a^b(f_1; \pi) + V_a^b(f_2; \pi) \leq V_a^b(f_1) + V_a^b(f_2) < \infty,$$

es decir (tomando supremo), tenemos

$$V_a^b(f) \leq V_a^b(f_1) + V_a^b(f_2) < \infty.$$

$\boxed{\Rightarrow}$  Definimos  $f_1(x) := V_a^x(f)$  y  $f_2(x) := f_1(x) - f(x)$ . Por construcción, basta ver que  $f_1$  y  $f_2$  son crecientes (y que  $f_1$  toma valores en  $\mathbb{R}$ ). Si tomamos  $a \leq x \leq y \leq b$  y  $\pi$  partición de  $[a, x]$ ,

$$\begin{aligned} V_a^x(f; \pi_x) + |f(y) - f(x)| &= \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| + |f(y) - f(x)| \\ (x_n = x \Rightarrow) &= V_a^y(f; \pi_x \cup \{y\}) \\ &\leq V_a^y(f) = f_1(y) \end{aligned}$$

Tomando supremo en  $\pi_x$ ,

$$f_1(x) + |f(y) - f(x)| \leq f_1(y).$$

En particular,

- $f_1(x) \leq f_1(y)$  ( $f_1$  es creciente) y, como  $f_1(b) < \infty$ ,  $f_1$  toma valores en  $\mathbb{R}$  (en  $[0, \infty]$ ).
- $f_1(x) + f(y) - f(x) \leq f_1(y) \Rightarrow f_2(x) \leq f_2(y)$ . ✓

□

**Definición 4.10** (integral indefinida). Dada  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrable, definimos su integral indefinida  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  como  $F(x) := \int_a^x f(t) dt$ .

**Teorema 4.11.** Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  tal que si  $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)$  son intervalos disjuntos de  $[a, b]$ , entonces vale que:

$$\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^n |F(b_i) - F(a_i)| < \varepsilon.$$

**Lema 4.12.** Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es integrable, entonces, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , tal que para todo  $E \subseteq [a, b]$  medible, vale que

$$|E| < \delta \Rightarrow \int_E |f| < \varepsilon.$$

**Demostración** (Lema). Guía 6. □

**Demostración** (Teorema). Si  $E := \bigsqcup_{i=1}^n (a_i, b_i)$ , entonces  $E$  es medible y  $|E| = \sum_{i=1}^n (b_i - a_i)$ . Si tomo  $\delta$  como el dado por el Lema,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |F(b_i) - F(a_i)| &= \sum_{i=1}^n \left| \int_{a_i}^{b_i} f(x) \, dx \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} |f| \, dx \\ &= \int_E |f| \, dx < \varepsilon. \end{aligned} \quad \square$$

**Definición 4.13** (función absolutamente continua). Una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  se dice absolutamente continua si, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  tal que para cualquier colección finita de intervalos  $\{(a_i, b_i)\}_{i=1, \dots, n}$  disjuntos, se cumple lo siguiente:

$$\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon.$$

**Observación.**  $f$  absolutamente continua  $\Rightarrow f$  uniformemente continua ( $n = 1$ ).

**Observación.** En la definición, es importante que los intervalos sean disjuntos. En efecto, si  $f$  cumple la definición para cualquier colección finita de intervalos (no necesariamente disjuntos), entonces  $f$  resulta Lipschitz (pero  $f$  absolutamente continua no implica Lipschitz) (y Lipschitz sí implica absolutamente continua).

**Teorema 4.14.** Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es absolutamente continua, entonces es de VA en  $[a, b]$ .

**Demostración.** Si  $f$  es absolutamente continua, existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que si  $\{(a_i, b_i)\}_{i=1, \dots, n}$  son disjuntos tal que

$$\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \frac{b-a}{k}, \quad (*)$$

entonces

$$\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < 1. \quad (**)$$

En particular, si  $\pi_k = \{y_0, \dots, y_k\}$  es la partición de  $[a, b]$  en  $k$  partes iguales, entonces  $V_{y_{j-1}}^{y_j}(f) \leq 1 \quad j = 1, \dots, k$ . En efecto, si  $Q = \{x_0, \dots, x_n\}$  es una partición de el intervalo  $[y_{j-1}, y_j]$ , entonces los intervalos  $\{(x_{i-1}, x_i)\}_{i=1, \dots, n}$  cumplen (\*) y, por ende,  $V_{y_{j-1}}^{y_j}(f; Q) < 1$  por (\*\*). Tomando supremo en  $Q$ , resulta  $V_{y_{j-1}}^{y_j}(f) \leq 1$ .  $\square$