

# Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Basado en las clases impartidas por - en el segundo semestre del  
2025

# Chapter 1

## 1.1 Clase (20/08)

### 1.1.1 Algunas ecuaciones no-lineales

**Example.** Considere la EDO:

$$y' = -\frac{t^2 + y^2}{t^2 - ty} = -\frac{M(t, y)}{N(t, y)}, \quad t > 0$$

Sean  $M(t, y) = t^2 + y^2$  y  $N(t, y) = t^2 - ty$ ,  $\forall (t, y) \in \mathbb{R}^2$ , y así:

$$M(st, sy) = s^2 M(t, y) \text{ y } N(st, sy) = s^2 N(t, y), \quad s, t, y \in \mathbb{R}.$$

En tal caso, conviene introducir el cambio de variable  $y = ty$ , y así:

$$u + tu' = -\frac{t^2 + t^2 u^2}{t^2 - t^2 u} = -\frac{1 + u^2}{1 - u},$$

y así

$$\begin{aligned} u' &= -\frac{1}{t} \cdot \frac{1+u}{1-u} \Leftrightarrow \frac{du}{dt} = -\frac{1}{t} \cdot \frac{1+u}{1-u} \\ &\Leftrightarrow \frac{1-u}{1+u} du = -\frac{1}{t} dt \\ &\Leftrightarrow \log((1+u)^2) - u = -\log(t) + C \\ &\Leftrightarrow (1+u)^2 = \frac{C}{t} e^u \\ &\Leftrightarrow (t + y(t))^2 = C t e^{y(t)/t} \quad (\text{solución definida implícitamente}). \end{aligned}$$

◇

En general, si  $M, N : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  son dos funciones tales que

$$M(st, sy) = s^\alpha M(t, y) \text{ y } N(st, sy) = s^\alpha N(t, y), \quad \forall s, t, y \in \mathbb{R},$$

para cierto  $\alpha > 0$ , se sugiere utilizar el cambio de variable  $y = tu$ .

**Ecuación de Bernoulli:** tiene la forma

$$y'(t) + P(t)y(t) = f(t)(y(t))^n \quad \text{con } n \in \mathbb{N}$$

**Note.** los casos  $n = 0$  y  $n = 1$  ya han sido estudiados.

Para  $n \geq 2$  conviene utilizar el cambio de variable  $u = y^{1-n}$ . Luego,  $u' = (1-n)y^{-n}y'$ , es decir:  $y' = \frac{1}{1-n}y^n u'$ , y así:

$$\begin{aligned}\frac{y^n}{1-n}u' + P(t)y(t) &= f(t)(y(t))^n \Leftrightarrow \frac{1}{1-n}u' + P(t)y^{1-n} = f(t) \\ \Leftrightarrow u'(t) + (1-n)P(t)u(t) &= (1-n)f(t) \\ &\text{(se resuelve con factor integrante).}\end{aligned}$$

**Ecuación de Ricatti:** es de la forma

$$y' = P(t) + Q(t)y(t) + R(t)(y(t))^2$$

Supongamos que se conoce una solución  $y_1(t)$  de esta EDO, es decir:

$$y_1'(t) - P(t) - Q(t)y_1(t) - R(t)(y_1(t))^2 = 0$$

Luego, definimos  $z(t) = y(t) - y_1(t)$ , y así:

$$y'(t) = z'(t) + y_1'(t) = P(t) + Q(t)(z(t) + y_1(t)) + R(t)(z(t) + y_1(t))^2 \Leftrightarrow z'(t) - [Q(t) + 2y_1(t)R(t)]z(t) = R(t)(z(t))^2$$

**Example.** Resolver la EDO:

$$y'(t) = 6 + 5y(t) + (y(t))^2$$

Corresponde a una ecuación de Ricatti con:

$$P(t) = 6, \quad Q(t) = 5, \quad R(t) = 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Nótese que  $y_1(t) = -2$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$  es solución. Luego, definimos:

$$\begin{aligned}z(t) &= y(t) - y_1(t) = y(t) + 2 \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow z'(t) - z(t) &= (z(t))^2.\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}u'(t) + u(t) &= -1 \Rightarrow u(t) = Ce^{-t} - 1 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (C \in \mathbb{R}) \\ \Rightarrow z(t) &= \frac{1}{u(t)} = \frac{1}{Ce^{-t} - 1} \\ \Rightarrow y(t) &= z(t) - 2 = \frac{1}{Ce^{-t} - 1} - 2.\end{aligned}$$

◇

**Note.** Si  $C > 0$ , la solución "explota" cuando  $t = \log(C)$ .

### 1.1.2 III. Problema de Cauchy: existencia y unicidad

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  un conjunto abierto, que por lo general será de la forma  $\Omega = I \times \tilde{\Omega}$ , con  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo abierto y  $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto. Dada una función

$$f \in C(\Omega; \mathbb{R}^n)$$

consideramos nuevamente el problema de Cauchy

$$(PC) \quad \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & \forall x \in I \text{ con } x_0 \in I \text{ y} \\ y(x_0) = y_0, & y \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

El (PC) puede ser formulado de manera equivalente, pero "relativamente" más débil:

**Lemma 1.1.** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  un conjunto abierto de la forma  $\Omega = I \times \tilde{\Omega}$ ,  $I \subset \mathbb{R}$  intervalo abierto y  $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$  conjunto abierto. Dados  $x_0 \in I$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}^n$  y  $f \in C(\Omega; \mathbb{R}^n)$ , una función  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  es solución de (PC) si y sólo si:

- (i)  $\varphi \in C(I; \mathbb{R}^n)$ ;
  - (ii)  $(x, \varphi(x)) \in \Omega \quad \forall x \in I$ ;
  - (iii)  $\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \varphi(s)) ds \quad \forall x \in I$ .
- (i, ii y iii es formulación integral del (PC)).

**Remark.** La formulación integral nos permite estudiar el (PC) desde una perspectiva más abstracta. Supongamos por ahora que

$$\Omega = \mathbb{R}^{n+1}, \quad I = \mathbb{R}, \quad \tilde{\Omega} = \mathbb{R}^n \quad \text{y} \quad f \in C(\mathbb{R}^{n+1}; \mathbb{R}^n).$$

Dados  $y_0 \in \mathbb{R}^n$  y  $x_0 \in \mathbb{R}$ , consideramos la aplicación  $T : C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n) \rightarrow C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ .

$$T(\varphi)(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \varphi(s)) ds \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Por el lema precedente, es evidente que  $\varphi \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$  es solución de (PC) si y sólo si  $T(\varphi) \equiv \varphi$  (i.e.,  $\varphi$  es punto fijo de  $T$ ).

## 1.2 Clase (22/08)

$\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $\Omega = I \times \tilde{\Omega}$  con  $I \subset \mathbb{R}$  intervalo abierto y  $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$  conjunto abierto.

$$(PC) \quad \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & \forall x \in I, \\ y(x_0) = y_0 & (x_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}^n) \end{cases}$$

- (i) Resolver localmente el problema (PC) corresponde a encontrar un intervalo  $J \subset I$  y una función  $\varphi \in C^1(J; \mathbb{R}^n)$  tales que:

$$x_0 \in J, \quad (x, \varphi(x)) \in \Omega \quad \forall x \in J, \quad \varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad \forall x \in J;$$

- (ii) Si  $J_1, J_2 \subset I$  son intervalos abiertos que contienen a  $x_0$ , y  $\phi_1 \in C^1(J_1; \mathbb{R}^n)$  y  $\phi_2 \in C^1(J_2; \mathbb{R}^n)$  son soluciones locales de (PC), decimos que  $\phi_2$  extiende a  $\phi_1$  es una restricción de  $\phi_2$ ;

- (iii) Una solución es maximal cuando no admite extensiones;

- (iv) Una solución local, definida sobre  $J \subset I$ , es global si  $J = I$ .

**Recuerdo.** Dados  $a < b$  números reales, el espacio vectorial

$$C([a, b]; \mathbb{R}^n)$$

dotado de la norma  $\|\varphi\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |\varphi(x)| \quad \forall \varphi \in C([a, b]; \mathbb{R}^n)$ , es un espacio de Banach.

- Todo sub-conjunto cerrado de  $(C([a, b]; \mathbb{R}^n); \|\cdot\|_\infty)$  es un espacio métrico completo.
- Todo sub-conjunto vectorial cerrado de  $(C([a, b]; \mathbb{R}^n); \|\cdot\|_\infty)$  es un espacio de Banach.

### 1.2.1 Aplicaciones contractivas: teorema del punto fijo de Baanch

**Definition 1.2** (aplicación contractiva). Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo. Decimos que una aplicación  $T : X \rightarrow X$  es contractiva si existe  $\alpha \in [0, 1)$  tal que

$$d(T(x), T(y)) \leq \alpha d(x, y) \quad \forall x, y \in X$$

**Theorem 1.3** (punto fijo de Banach). Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo y  $T : X \rightarrow X$  una aplicación contractiva. Entonces, existe un único  $\hat{x} \in X$  tal que  $T(\hat{x}) = \hat{x}$ .

### 1.2.2 Funciones Lipschitz

**Note.**  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $(x, y) \in \Omega$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , y  $y \in \mathbb{R}^n$

**Definition 1.4** (función globalmente Lipschitz). Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  abierto, y  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función. Decimos que  $f$  es globalmente Lipschitz respecto a la variable  $y$  en  $\Omega$  si existe una constante  $L > 0$  tal que

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad \forall (x, y_1), (x, y_2) \in \Omega$$

**Note.**  $\text{Lip}(y; \Omega)$  denota el espacio vectorial de todas las funciones  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  que son globalmente Lipschitz respecto a  $y$  en  $\Omega$ .

**Definition 1.5** (función localmente Lipschitz). Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  abierto. Se dice que una función  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  es localmente Lipschitz respecto a la variable  $y$  en  $\Omega$  si: para cualquier punto  $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega$ , existe  $\varepsilon > 0$  y una constante  $L > 0$  tales que  $B((\bar{x}, \bar{y}), \varepsilon) \subset \Omega$ , y

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad \forall (x, y_1), (x, y_2) \in B((\bar{x}, \bar{y}), \varepsilon).$$

**Note.**  $\text{Lip}_{loc}(y; \Omega)$ .

**Proposition 1.6.**

- (A) Si  $f \in \text{Lip}(y; \Omega)$ , entonces  $f$  es uniformemente continua respecto a  $y$  en  $\Omega$ :  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall (x, y_1), (x, y_2) \in \Omega,$

$$|y_1 - y_2| \leq \delta \Rightarrow |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq \varepsilon$$

- (B) Si  $f \in \text{Lip}_{loc}(y; \Omega)$ , entonces  $f$  es continua respecto a la variable  $y$  en  $\Omega$ : para todo  $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega$ :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) |y - \bar{y}| \leq \delta \Rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega \text{ y } |f(\bar{x}, \bar{y}) - f(\bar{x}, y)| \leq \varepsilon$$

**Remark.** En general,  $\text{Lip}(y; \Omega) \not\subseteq C(\Omega; \mathbb{R}^n)$ . Por ejemplo,

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ y & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

pertenece a  $\text{Lip}(y; \mathbb{R}^2)$ , pero es discontinua en el conjunto  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$ . Recíprocamente, la continuidad ("en pareja") de una función no implica ningún tipo de Lipschitzianidad (local o global).

**Example.**  $\hat{f}(x, y) = \sqrt{|y|} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Vemos que no es localmente Lipschitz:  $\hat{f} \notin \text{Lip}_{loc}(y; \mathbb{R}^2)$ : por contradicción, debiese existir  $\varepsilon > 0$  tal que  $f \in \text{Lip}(y; B((0, 0), \varepsilon))$ . Por ende, existe una constante  $L > 0$  tal que

$$\begin{aligned} \left| f(0, 0) - f\left(0, \frac{\varepsilon}{n}\right) \right| &\leq L \cdot \frac{\varepsilon}{n} \quad \forall n \geq 2, \\ &\Leftrightarrow \sqrt{\frac{\varepsilon}{n}} \leq \frac{L\varepsilon}{n} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{n} \leq L\sqrt{\varepsilon} \quad \forall n \geq 2, \end{aligned}$$

lo cual es absurdo! ◇

**Theorem 1.7.** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  un conjunto abierto y

$$f = (f_1, f_2, \dots, f_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$$

una función tal que las derivadas parciales  $\frac{\partial f_i}{\partial y_j} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$  existen y son continuas en  $\Omega$ . Entonces:

- (A)  $f \in \text{Lip}_{loc}(y; \Omega)$ ;
- (B) Si, además,  $\Omega$  es convexo,  $f \in \text{Lip}(y; \Omega)$  si y sólo si

$$\sup_{(x, y) \in \Omega} \left| \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x, y) \right| < \infty \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$$

### 1.3 Clase (25/08)

**Remark.** Consideramos las funciones  $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definidos por:

$$f_1(x, y) = \frac{1}{1+y^2}, \quad f_2(x, y) = \frac{x}{1+y^2}, \quad f_3(x, y) = \begin{cases} xy & \text{si } x > 0; \\ y & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Se puede demostrar que:

- (i)  $f_1 \in \text{Lip}(y; \mathbb{R}^2)$ ;
- (ii)  $f_2 \in \text{Lip}(y; \mathbb{R}^2)$ , pero  $f_2 \notin \text{Lip}(y; \Omega)$  para cualquier dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  que sea acotada en la dirección de  $x$ ;
- (iii)  $f_3 \in \text{Lip}(y; \mathbb{R}^2)$  y  $f_3 \in \text{Lip}(y; \Omega)$  para cualquier dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  que sea acotado en la dirección de  $x$ . No obstante,  $\frac{\partial f_3}{\partial y}$  no es continua en  $\mathbb{R}^2$ .

**Theorem 1.8.** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  un conjunto abierto. Si  $f \in \text{Lip}_{\text{loc}}(y; \Omega)$  y  $K \subset \Omega$  es un conjunto compacto tal que  $\sup_{(x,y) \in K} |f(x,y)| < \infty$ , entonces  $f \in \text{Lip}(y; K)$ .

**Theorem 1.9 (Picard-Lindelöf).** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  un conjunto abierto y  $f \in C(\Omega; \mathbb{R}^n) \cap \text{Lip}_{\text{loc}}(y; \Omega)$ . Entonces, para cada  $(x_0, y_0) \in \Omega$ , existe un  $\delta > 0$  tal que, si denotamos

$$I_\delta = [x_0 - \delta, x_0 + \delta],$$

el problema de Cauchy

$$(PC) \quad \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & \forall x \in I_\delta, \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

admite una única solución.

**Proof.** Como  $\Omega$  es abierto y  $(x_0, y_0) \in \Omega$ , existen  $a_0 > 0$  y  $b_0 > 0$  tal que, si ponemos

$$R = [x_0 - a_0, x_0 + a_0] \times \overline{B(y_0, b_0)},$$

entonces  $R \subset \Omega$  y  $f \in \text{Lip}(y; R)$ .

- Sea  $L > 0$  una constante de Lipschitz para  $f$  en  $R$  (respecto a  $y$ ):

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad \forall (x, y_1), (x, y_2) \in R.$$

- Denotemos por  $M = \max_{(x,y) \in R} |f(x,y)|$ .

Fijemos un número  $\delta > 0$  tal que

$$0 < \delta < \min \left\{ a_0, \frac{b_0}{M}, \frac{1}{L} \right\}$$

y consideremos el conjunto:

$$X = \{\varphi \in C(I_\delta; \mathbb{R}^n) \mid |\varphi(x) - y_0| \leq b_0 \quad \forall x \in I_\delta\}$$

donde  $(X, d)$  es un espacio métrico completo con la distancia usual en  $C(I_\delta, \mathbb{R}^n)$ .

Definimos la aplicación  $T : X \rightarrow C(I_\delta; \mathbb{R}^n)$  por

$$T(\varphi)(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \varphi(s)) ds \quad \forall \varphi \in X, \quad \forall x \in I_\delta.$$

Notemos que, dado  $\varphi \in X$ ,  $\varphi$  es solución de (PC) en  $I_\delta$  si y sólo si  $\varphi$  es un punto fijo de la aplicación  $T$  en  $X$ .

$$\varphi \in C(I_\delta; \mathbb{R}^n) : (x, \varphi(x)) \in \Omega \quad \forall x \in I_\delta; \quad \varphi(x_0) = y_0$$

**PDQ:**  $|\varphi(x) - y_0| \leq b_0 \quad \forall x \in I_\delta$ .

**Proof.** Por contradicción, supongamos que  $\exists \hat{x} \in I_\delta : |\varphi(x) - y_0| > b_0$ . Por continuidad, existe  $\hat{x}_0 \in I_\delta$  tal que

$$|\varphi(\hat{x}_0) - y_0| = b_0 \text{ y } |\varphi(x) - y_0| < b_0 \quad x \in (x_0, \hat{x}_0).$$

$$\begin{aligned} b_0 &= |\varphi(\hat{x}_0) - y_0| \\ &= \left| \int_{x_0}^{\hat{x}_0} f(s, \varphi(s)) ds \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^{\hat{x}_0} |f(s, \varphi(s))| ds \right| \\ &\leq M|\hat{x}_0 - x_0| \leq M\delta < b_0. \end{aligned}$$

□

Dada  $\varphi \in X$ , ciertamente  $T(\varphi) \in C(I_\delta; \mathbb{R}^n)$ . Además,  $\forall x \in I_\delta$ ,

$$\begin{aligned} |T(\varphi)(x) - y_0| &= \left| \int_{x_0}^x f(s, \varphi(s)) ds \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x |f(s, \varphi(s))| ds \right| \\ &\leq M|x - x_0| \leq M\delta < b_0. \end{aligned}$$

entonces,  $T(\varphi) \in X$ . Demostremos ahora que  $T$  es una contracción: dados  $\varphi, \psi \in X$ ,

$$\begin{aligned} |T(\varphi)(x) - T(\psi)(x)| &= \left| \int_{x_0}^x (f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s))) ds \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x |f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s))| ds \right| \\ &\leq L \left| \int_{x_0}^x |\varphi(s) - \psi(s)| ds \right| \\ &\leq L|x - x_0| \|\varphi - \psi\|_\infty \leq L\delta \|\varphi - \psi\|_\infty, \end{aligned}$$

con  $L\delta < 1$ . Luego,  $T : X \rightarrow X$  es una contracción, y entonces admite un único punto fijo  $\hat{\varphi} \in X$ , que constituye la única solución del (PC) en  $I_\delta$ . □