概率论与数理统计期末总结

第二章 随机变量及其分布

第一讲 随机变量分布函数

$$F(x)=\begin{cases}P(X\leq x),x\in R & (\text{离散型})\\ \int_{-\infty}^{x}f(t)dt,-\infty<x<+\infty & (\text{连续型})\end{cases}$$

$$\Rightarrow P(x_1<X\leq x_2)=F(x_2)-F(x_1)=\begin{cases}\sum_{x_1^+}^{x_2}P(X=x) & (\text{离散型})\\ \int_{x_1}^{x_2}f(x)dx & (\text{连续型})\end{cases}$$

【性质】

> - $0\leq F(x)\leq 1(x\in R)$，且 $F(-\infty)=0,F(+\infty)=1$
> - $x_1<x_2\Rightarrow F(x_1)\leq F(x_2)(F(x_1)=F(x_2)$当且仅当$P(x_1<X<x_2)=0)$
> - $F(x)$右连续，即$F(\lim_{x\to x_0^+}x)=F(x_0)\iff F(x_0+0)=F(x_0)(x\in R)$

$f(x)$ 为连续性随机变量 X 的概率密度函数；
【性质】

> - $f(x)\geq 0(-\infty<x<+\infty)$
> - $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$
> - X 为连续型随机变量，则 $P(X=a)=0\Rightarrow\begin{cases}\text{不可能事件} & \Rightarrow & P=0\\ P=0 & \not\Rightarrow & \text{不可能事件}\end{cases}$

第二讲 离散型随机变量分布律

$$P(X=x_i)=p_i, i=1,2,\cdots$$
$$F(x)=P(X\le x)=\sum_{x_i\le x}P(X=x_i)=\sum_{x_i\le x}p_i$$

2.1 已知分布函数求分布律

X 可能取值即是 $F(X)$ 的间断点（分界点）$x_i(i=1,2,\cdots)$

$$p_i=P(X=x_i)=F(x_i+0)-F(x_i-0)=F(x_i)-F(x_i-0)$$

2.2 独立重复试验

【n次独立重复试验】

> - 每次试验条件相同
> - 各次试验相互独立

【n重$Bernoulli$试验】

> n次独立重复试验结果只有两个，A或$\overline{A}$

2.3 泊松定理

$$\lim_{n\to\infty}C_n^kp^k(1-p)^{n-k}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}(\lambda=np)$$

推导：

$$C_n^kp^k(1-p)^{n-k}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}(\frac{\lambda}{n}^k)(1-\frac{\lambda}{n})^{n-k}$$
$$=\frac{\lambda^k}{k!}[1\cdot(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})](1-\frac{\lambda}{n})^n(1-\frac{\lambda}{n})^{-k}$$
$$\lim_{n\to\infty}1\cdot(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})\to 1, \lim_{n\to\infty}(1-\frac{\lambda}{n})^n\to e^{-\lambda}, \lim_{n\to\infty}(1-\frac{\lambda}{n})^{-k}\to 1$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}C_n^kp^k(1-p)^{n-k}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

当 n 很大，p 很小时，对二项分布近似计算：

$$C_n^kp^k(1-p)^{n-k}\approx\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

第三讲 随机变量函数及其分布

3.1 离散型随机变量函数分布律

$$P(Y=g(x_i))=P(g(X)=g(x_i))=P(X=x_i)=p_i, i=1,2,\cdots$$

3.2 连续型随机变量函数分布律

【$Theorem$】X的概率密度$f_X(x), y=g(x)$严格单调可微$, y^{-1}=x=h(y), y\in I$当且仅当$f_X(h(y))>0,$且$\exists h(y),h'(y)$

$$f_Y(y)=\begin{cases}f_X(h(y))|h'(y)|, & y\in I\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

第三章 多维随机变量及其分布

第一讲 二维随机变量及其联合分布函数

联合分布函数

$$F(x,y)=P(X\le x,Y\le y),x、y\in R$$
$$\Rightarrow \forall x_1<x_2,y_1<y_2,\ P(x_1<X\le x_2,y_1<Y\le y_2)=F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)$$

非负性	$0\le F(x,y)\le 1(x,y\in R)$	$F(+\infty,-\infty)=1$

边缘性	$F(-\infty,y)=F(x,-\infty)=F(-\infty,+\infty)=0$

单调不减	$x_1<x_2,F(x1,y)\le F(x_2,y)(y=C)$	$y_1<y_2,F(x,y_1)\le F(x,y_2)(x=C)$

右连续	$F(x+0,y)=F(x,y)(y=C)$	$F(x,y+0)=F(x,y)(x=C)$

第二讲 二维随机变量及其联合分布律

2.1 联合分布律

二维随机变量	离散型	连续型
联合分布律/概率密度	$P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij}(i,j=1,2,\cdots)$	$f(x,y)(x,y\in R)$
联合分布函数	$F(x,y)=\sum_{x_i\le x}\sum_{y_j\le y}p_{ij}(x,y\in R)$	$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dudv(x,y\in R)$

【连续型】

$P((X,Y)\in G)=\iint_G f(x,y)dxdy$
混合偏导数连续 $\Longrightarrow f(x,y)$连续点上$\frac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2F(x,y)}{\partial y\partial x}=f(x,y)$

2.2 二维均匀分布

$$(X,Y)\sim U(G)$$

联合概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{A}, & (x,y)\in G \quad A=S_G\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

第三讲 边缘分布

3.1 边缘分布函数

$$\begin{cases}F_X(x)=P(X\le x)=F(x,+\infty), & x\in R\\ F_Y(y)=P(Y\le y)=F(+\infty,y), & y\in R\end{cases}$$

3.2 边缘分布律

二维随机变量	离散型	连续型
边缘分布律/概率密度	$\begin{cases}p_{i\cdot}=P(X=x_i)=\sum_j p_{ij}, & i=1,2,\cdots\\ p_{\cdot j}=P(Y=y_j)=\sum_i p_{ij}, & j=1,2,\cdots\end{cases}$	$\begin{cases}f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy, & -\infty<x<+\infty\\ f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx, & -\infty<y<+\infty\end{cases}$

二维正态分布的边缘分布为一维正态分布

第四讲 条件分布

条件分布

离散型条件分布律	$P(X=x_i\|Y=y_j)=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}(i=1,2,\cdots)$	$P(Y=y_j\|X=x_i)=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}(j=1,2,\cdots)$
连续型条件概率密度	$f_{X\|Y}(x\|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}(-\infty<x<+\infty,\ f_Y(y)>0)$	$f_{Y\|X}(y\|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}(-\infty<y<+\infty,\ f_X(x)>0)$

第五讲 随机变量的独立性

5.1 随机事件独立性

$P(X\le x,Y\le y)=P(X\le x)P(Y\le y)(x,y\in R)$

5.2 随机变量独立性

边缘分布函数	$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$

边缘分布律(离散型)	$p_{ij}=p_{i\cdot}p_{\cdot j}$

边缘概率密度(连续型)	f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)(x,y\in R)$

随机变量独立性等价于随机事件独立性
随机变量相互独立 $\Longrightarrow$ 随机变量函数相互独立

第六讲 二维随机变量函数及其分布

6.1 二维随机变量函数

$$z=g(x,y)\text{连续}\Longrightarrow Z=g(X,Y):\text{二维随机变量函数(一维随机变量)}$$

6.2 二维离散型随机变量函数

$$P(Z=z_l)=\sum_{g(x_i,y_j)=z_l}p_{ij}(l=1,2,\cdots)$$

当 $Z=X+Y$ 时，则

$$\begin{aligned}P(Z=z_l)&=\sum_{x_i+y_j=z_l}p_{ij}=\sum_{x_i+y_j=z_l}P(X=x_i,Y=y_j)\\&=\sum_i P(X=x_i,Y=z_l-x_i)\\&=\sum_j P(X=z_l-y_j,Y=y_j)\end{aligned}$$

若 X 与 Y 相互独立，则

$$\begin{aligned}P(Z=z_l)&=\sum_i P(X=x_i)P(Y=z_l-x_i)\\&=\sum_j P(X=z_l-y_j)P(Y=y_j)\end{aligned}$$

6.3 二维连续型随机变量函数

【分布函数】

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(g(X,Y) \le z) = \iint_{g(x,y)\le z} f(x,y)dxdy$$

$$f_Z(z) = F'_Z(z)$$

【概率密度】

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx(z \in R)$$

若 X 与 Y 相互独立，则

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx(z \in R)$$

> $$X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2) \Rightarrow X+Y \sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)(X与Y相互独立)$$

第四章 随机变量的数学特征

第一讲 几种重要随机变量分布

1.1 数学期望

当分布律 $P(X=x_i)=p_i, i=1,2,\cdots$ 时,

$$\begin{cases} EX=\sum_i x_i p_i & \text{离散型} \\ EX=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx & \text{连续型} \end{cases}$$

1.2 0—1分布

$$X \sim B(1,p)$$

分布律

$$P(X=k)=p^k(1-p)^{1-k}, 0<p<1, k=0,1$$

分布函数

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ 1-p, & 0\leq x<1 \\ 1, & x\geq 1 \end{cases}$$

1.3 二项分布

$$X \sim B(n,p)$$

分布律

$$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}, k=0,1,2,\cdots,n, q=1-p$$

$$EX=np, DX=npq$$

当 $n=1$ 时，$X\sim B(n,p) \Rightarrow X\sim B(1,p)$

1.4 泊松(Poisson)分布

$$X \sim P(\lambda)$$

分布律

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \lambda>0, k=0,1,2,\cdots$$

数学期望

$$EX=\sum_{k=0}^{\infty} k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda$$

方差

$$DX=EX=\lambda$$

1.5 几何分布

分布律

$$P(X=k)=q^{k-1}p, k=1,2,\cdots, 0<p<1, q=1-p$$

数学期望

$$EX=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot q^{k-1}p=p(1+2q+3q^2+\cdots)=p(q+q^2+q^3+\cdots)'=p(\frac{q}{1-q})'=\frac{1}{p}$$

方差

$$DX=\frac{1-p}{p^2}$$

1.6 超几何分布

分布律

$$P(X=k)=\frac{C_M^kC_{N-M}^{n-k}}{C_N^n},k=0,1,2,\cdots,min\{M,n\}$$

数学期望

$$EX=\frac{nM}{N}$$

方差

$$DX=\frac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}$$

【$Theorem$】

$$\lim_{N\to\infty}\frac{M}{N}=p\Rightarrow\lim_{N\to\infty}\frac{C_M^kC_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}=\lim_{N\to\infty}P(X=k)=C_n^kp^kq^{n-k}(n\text{固定})$$

注解：当 n 相对于 N 较小时，超几何分布近似于二项分布

分布	背景
超几何分布	不放回抽样
二项分布	放回抽样

1.7 均匀分布

$$X\sim U(a,b)$$

概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \frac{x-a}{b-a}, & a\le x<b(\text{归一化})\\ 1, & x\ge b\end{cases}$$

数学期望

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_a^b x\cdot\frac{1}{b-a}dx=\frac{a+b}{2}$$

方差

$$DX=\frac{(b-a)^2}{12}$$

1.8 正态（高斯）分布

$$X \sim N(\mu,\sigma^2)$$

概率密度

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},-\infty<x<+\infty$$

状态	μ	σ
参数类型	位置参数	形状参数
↑	右移	越扁
↓	左移	越尖

数学期望

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\mu$$

方差

$$DX=\sigma^2$$

1.9 标准正态分布

$$X \sim N(\mu,\sigma^2),\mu=0,\sigma^2=1 \Longrightarrow X\sim N(0,1)$$

概率密度

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},-\infty<x<+\infty$$

分布函数

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$
$$\Phi(0)=\frac{1}{2}\Longrightarrow\Phi(-x)=1-\Phi(x)$$

【正态标准化】

$$X\sim N(\mu,\sigma^2)\Longrightarrow Z=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$$

【分布函数标准化】

$$X\sim N(\mu,\sigma^2)\Rightarrow F(x)=\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$$
$$\Longrightarrow\forall x_1<x_2,P(x_1<X\le X_2)=F(x_2)-F(x_1)=\Phi(\frac{x_2-\mu}{\sigma})-\Phi(\frac{x_1-\mu}{\sigma})$$

1.10 二维正态分布

$$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$$

联合概率密度

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}]}\quad(x、y\in R)$$
$$\mu_1=C_1、\mu_2=C_2、\sigma_1=C_3>0、\sigma_2=C_4>0、\rho=C_5(|\rho|<1)$$

1.11 指数分布

$$X \sim E(\lambda), \lambda > 0$$

概率密度

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, x > 0 \\ 0, x \leq 0 \end{cases}$$

分布函数

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

数学期望

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{0}^{+\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$$

方差

$$DX = \frac{1}{\lambda^2}$$

> 指数分布具有无记忆性

$\forall s, t > 0$	$P(X > s + t \mid X > s) = P(X > t)$

$$\begin{aligned} P(X > s + t \mid X > s) &= \frac{P(X > s + t, X > s)}{P(X > s)} \\ &= \frac{P(X > s + t)}{P(X > s)} = \frac{1 - F(s + t)}{1 - F(s)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = P(X > t) \end{aligned}$$

1.12 随机变量函数数学期望

一维随机变量

$$EY = E[g(X)] = \begin{cases} \sum_i g(x_i) p_i & P(X = x_i) = p_i \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx & f(x) 为 X 概率密度 \end{cases}$$

二维随机变量

$$EZ = E[g(X, Y)] = \begin{cases} \sum_i \sum_j g(x_i, y_j) p_{ij} & P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f(x, y) dx dy & f(x, y) 为 XY 联合概率密度 \end{cases}$$

1.13 性质

$$E(C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_nX_n) = C_1EX_1 + C_2EX_2 + \cdots + C_nEX_n$$
$$E(X_1X_2 \cdots X_n) = EX_1EX_2 \cdots EX_n, (X_1, X_2, \cdots, X_n 相互独立)$$

第二讲 方差

2.1 方差

$$DX = E(X - EX)^2 \Rightarrow DX = EX^2 - (EX)^2(\text{推论，可以转求}EX^2)$$

其中 $\sqrt{DX}$ 为随机变量 X 的均方差或标准差;

2.2 性质

$$D(C_1X + C_2) = C_1^2DX$$
$$D(X \pm Y) = DX + DY \pm 2cov(X,Y)$$
$$DX = 0 \iff P(X = EX) = 1$$

【$Theorem$】
$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)(i = 1, 2, \cdots, n)$ 相互独立，则

$$c_1X_1 + c_2X_2 + \cdots + c_nX_n \sim N(c_1\mu_1 + c_2\mu_2 + \cdots + c_n\mu_n, c_1^2\sigma_1^2 + c_2^2\sigma_2^2 + \cdots + c_n^2\sigma_n^2)$$
$$(c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_n^2 \neq 0)$$

第三讲 协方差与相关系数

3.1 协方差

$$cov(X,Y) = E[(X - EX)(Y - EY)]$$
$$\Rightarrow cov(X,Y) = E(XY) - EX \cdot EY$$

3.2 性质

> - $cov(X,X) = DX, cov(X,C) = 0$
> - $cov(X,Y) = cov(Y,X)$
> - $cov(aX_1 + bX_2, cY + d) = accov(X_1,Y) + bccov(X_2,Y)$
> - $D(X \pm Y) = DX + DY \pm 2cov(X,Y)$

3.3 相关系数

$$\rho_{XY} = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}(DX > 0, DY > 0)$$

注解：转向求协方差
【$Theorem$】

$$(X,Y) \sim N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho) \Rightarrow \rho_{XY} = \rho$$
$$\Rightarrow X\text{与}Y\text{相互独立} \iff \text{不相关}$$

3.4 $Cauchy - Schwarz$ 不等式

$$[E(XY)]^2 \leq EX^2EY^2, (EX^2 < +\infty, EY^2 < \infty)$$

3.5 性质

> 由柯西施瓦茨不等式推得：$|\rho_{XY}| \leq 1$
> $|\rho_{XY}| = 1 \iff \exists a(a \neq 0), b \Rightarrow P(Y = aX + b) = 1$

3.6 不相关

$DX>0,DY>0$

> - X,Y 不相关 $\Longleftrightarrow cov(X,Y)=0$
> - X,Y 不相关 $\Longleftrightarrow E(XY)=EX\cdot EY$
> - X,Y 不相关 $\Longleftrightarrow D(X\pm Y)=DX+DY$
> - X,Y 不相关 $\Longleftrightarrow D(X+Y)=D(X-Y)$

第四讲 n 维正态随机变量

4.1 矩的概念

> - k 阶原点矩 $\mu_k=EX^k,k=1,2,\cdots$
> - k 阶中心矩 $\nu_k=E(X-EX)^k,k=1,2,\cdots$
> - $k+l$ 阶混合原点矩 $\mu_{kl}=E(X^kY^l),k,l=1,2,\cdots$
> - $k+l$ 阶混合中心矩 $\nu_{kl}=E[(X-EX)^k(Y-EY)^l],k,l=1,2,\cdots$

4.2 均值向量

$$X=(X_1,X_2,\cdots,X_n),\mu_i=EX_i(i=1,2,\cdots,n)$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)$$

4.3 协方差矩阵

$$\sigma_{ij}=cov(X_i,X_j)=E[(X_i-EX_i)(X_j-EX_j)](i,j=1,2,\cdots,n)$$
$$\boldsymbol{B}=(\sigma_{ij})_{n\times n}=\begin{bmatrix}\sigma_{11}&\sigma_{12}&\cdots&\sigma_{1n}\\ \sigma_{21}&\sigma_{22}&\cdots&\sigma_{2n}\\ \vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\ \sigma_{n1}&\sigma_{n2}&\cdots&\sigma_{nn}\end{bmatrix}$$

4.4 n 维正态随机变量

$$\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n),\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n),\boldsymbol{B}=(\sigma_{ij})_{n\times n}$$
$$\text{若其联合概率密度}f(\boldsymbol{x})=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|\boldsymbol{B}|^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^T}(i=1,2,\cdots,n)$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)\sim N(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{B})$$

4.5 性质

> - $\begin{cases}\boldsymbol{X}\sim N(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{B})\Rightarrow X_i\sim N(\mu_i,\sigma_{ii})(i=1,2,\cdots,n)\\ X_i\sim N(\mu_i,\sigma_{ii})(i=1,2,\cdots,n)\text{且相互独立}\Rightarrow \boldsymbol{X}\sim N(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{B})\end{cases}$
> - $\boldsymbol{X}\sim N(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{B})\Longleftrightarrow\forall c_1,c_2,\cdots,c_n$,满足$c_1^2+c_2^2+\cdots+c_n^2\neq 0$，有$c_1X_1+c_2X_2+\cdots+c_nX_n\sim N(\mu,\sigma)$
> - $\boldsymbol{X}\sim N(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{B}),(Y_1,Y_2,\cdots,Y_k)$满足$Y_i=\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{X}(i=1,2,\cdots,k)$,则$\boldsymbol{Y}=(Y_1,Y_2,\cdots,Y_k)\sim N(\mu,\sigma)$
> - $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)\sim N(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{B})\Rightarrow \boldsymbol{X}'=(X_1,X_2,\cdots,X_m)\sim N(\boldsymbol{\mu}',\boldsymbol{B}')(m<n)$

第五章 大数定理及中心极限定理

第一讲 切比雪夫不等式

$$\begin{cases} P(|X-EX|\ge\varepsilon)\le\frac{DX}{\varepsilon^2} \\ P(|X-EX|<\varepsilon)\ge 1-\frac{DX}{\varepsilon^2} \end{cases}$$

第二讲 大数定律

随机变量序列的前若干项的算术平均值在某种条件下收敛到这些项的均值的算术平均值

$\lim_{n\to\infty}P(\lvert\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-a_n\rvert\ge\varepsilon)=0$	随机变量前 n 项均值依概率收敛于某一定值
$\lim_{n\to\infty}P(\lvert X_n-X\rvert\ge\varepsilon)=0$即$X_n\to^P X(n\to\infty)$	随机变量依概率收敛于另一随机变量

【大数定理】

大数定理	条件	定律形式
切比雪夫大数定律	X_i相互独立, $EX_i=\mu=C_1, DX_i=\sigma^2=C_2$	$lim_{n\to\infty}P(\lvert\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu\rvert\ge\varepsilon)=0$ $\Rightarrow\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\to^P\mu(n\to\infty)$
切比雪夫大数定律一般形式	X_i相互独立, $EX_i=\mu=C_1, DX_i\le C$	$lim_{n\to\infty}P(\lvert\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu\rvert\ge\varepsilon)=0$ $\Rightarrow\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\to^P\mu(n\to\infty)$
马尔可夫大数定理	$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}D[\sum_{i=1}^{n}X_i]=0$	$\lim_{n\to\infty}P(\lvert\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i\rvert\ge\varepsilon)=0$ $\Rightarrow\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\to^P\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i(n\to\infty)$
辛钦大数定理	X_i相互独立同分布, $EX_i=\mu=C<\infty$	$\lim_{n\to\infty}P(\lvert\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu\rvert\ge\varepsilon)=0$ $\Rightarrow\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\to^P\mu(n\to\infty)$

大数定理	条件	定律形式
伯努利大数定理	$f_A=\frac{n_A}{n},P(A)=p$	$lim_{n\to\infty}P(\vert\frac{n_A}{n}-p\vert\geq\varepsilon)=0$ $\Rightarrow\frac{n_A}{n}\to^P p(n\to\infty)$

第三讲 中心极限定理

3.1 独立同分布中心极限定理

$$【适用条件】X_i相互独立且同分布\Rightarrow EX_i=\mu,DX_i=\sigma^2(i=1,2,\cdots)$$

$$令随机变量Y_n=\frac{\sum_{i=1}^n X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}，其分布函数F_n(x)$$

$$\lim_{n\to\infty}F_n(x)=\lim_{n\to\infty}P(\frac{\sum_{i=1}^n X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\leq x)=\int_{-\infty}^x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\Phi(x)$$

$$\Longrightarrow Y_i=\sum_{i=1}^n X_i\sim N(n\mu,n\sigma^2)(n\to\infty)$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}P(\sum_{i=1}^n X_i\leq x)\approx\Phi(\frac{x-n\mu}{\sqrt{n}\sigma})\\P(a<\sum_{i=1}^n X_i\leq b)\approx\Phi(\frac{b-n\mu}{\sqrt{n}\sigma})-\Phi(\frac{a-n\mu}{\sqrt{n}\sigma})\end{cases}$$

3.2 李雅普诺夫中心极限定理

$$【适用条件】X_i相互独立且EX_i=\mu_i,DX_i=\sigma_i^2(i=1,2,\cdots)$$

$$令随机变量Y_n=\frac{\sum_{i=1}^n X_i-E[\sum_{i=1}^n X_i]}{\sqrt{D[\sum_{i=1}^n X_i]}}=\frac{\sum_{i=1}^n X_i-\sum_{i=1}^n\mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n\sigma_i^2}}，其分布函数F_n(x)$$

$$\lim_{n\to\infty}F_n(x)=\lim_{n\to\infty}P(\frac{\sum_{i=1}^n X_i-\sum_{i=1}^n\mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n\sigma_i^2}}\leq x)=\int_{-\infty}^x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\Phi(x)$$

$$\Longrightarrow Y_i=\sum_{i=1}^n X_i\sim N(\sum_{i=1}^n\mu_i,\sum_{i=1}^n\sigma_i^2)(n\to\infty)$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}P(\sum_{i=1}^n X_i\leq x)\approx\Phi(\frac{x-\sum_{i=1}^n\mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n\sigma_i^2}})\\P(a<\sum_{i=1}^n X_i\leq b)\approx\Phi(\frac{b-\sum_{i=1}^n\mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n\sigma_i^2}})-\Phi(\frac{a-\sum_{i=1}^n\mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n\sigma_i^2}})\end{cases}$$

注重两个中心极限定理的区别与联系

3.3 $DeMoivre-Laplace$ 中心极限定理

$$【n重伯努利试验】f_A=\frac{n_A}{n},P(A)=p$$

$$令随机变量Y_n=\frac{n_A-np}{\sqrt{np(1-p)}}，其分布函数F_n(x)$$

$$\lim_{n\to\infty}F_n(x)=\lim_{n\to\infty}P(\frac{n_A-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leq x)=\int_{-\infty}^x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\Phi(x)$$

$$\Longrightarrow X\sim N(np,np(1-p))(n\to\infty)$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}P(X\leq x)\approx\Phi(\frac{x-np}{\sqrt{np(1-p)}})\\P(a<X\leq b)\approx\Phi(\frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}})-\Phi(\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}})\end{cases}$$