Title

课程考核

平时成绩 10%

实验成绩 25%

期末成绩 65%

第一章 时域离散信号和时域离散系统

第一讲 时域离散信号

1.1 概念解析

数字信号：幅度、时间均离散化的模拟信号

也即幅度离散化的时域离散信号

数字信号存在量化误差

1.2 时域离散信号

模拟信号 $x_a(t) \xrightarrow[t_n=nT]{\text{均匀采样}}$ 时域离散信号 $x_a(nT)$

$$x(n)=x_a(t)\big|_{t=nT}=x_a(nT),\quad -\infty<n<\infty$$

时域离散信号/序列 集合表示：

$$x(n)=\{\cdots, x_a(-2T), x_a(-T), x_a(0), x_a(T), x_a(2T), \cdots\}$$

1.3 表示方法

① 集合

$$x(n)=\{1,2,3,4,3;\ n=0,1,2,3,4\}$$

或 $x(n)=\{\underline{1},2,3,4,3\}$

$\underline{1}$ → 表示 $n=0$

② 公式

$$x(n)=3^{|n|},\quad -\infty<n<\infty$$

③ 图形

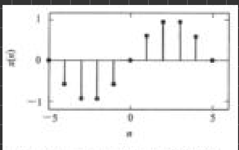


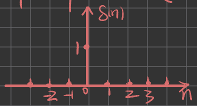
图 1.2.1 $x(n)=\sin(\pi n/5)$的波形图

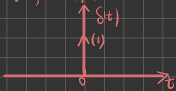
1.3 常用典型序列

① 单位脉冲序列 $\delta(n)$ （单位采样序列）

$$\delta(n)=\begin{cases}1, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases}$$

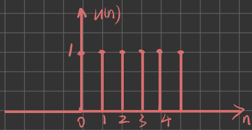
单位冲激函数 $\delta(t)=\begin{cases}\infty, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases}$





② 单位阶跃序列 $u(n)$

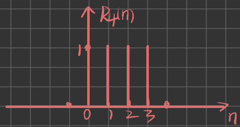
$$u(n)=\begin{cases}1, & n\geq 0\\ 0, & n<0\end{cases}$$



☆ $\begin{cases}\delta(n)=u(n)-u(n-1) & \text{后向差分}\\ u(n)=\sum\limits_{m=-\infty}^{n}\delta(m)\end{cases}$

③ 矩形序列 $R_N(n)$

$$R_N(n)=\begin{cases}1, & 0\leq n\leq N-1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$



N: length of rectangle sequence

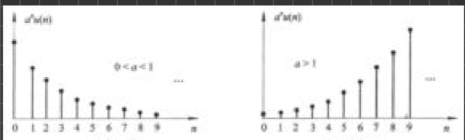
$$R_N(n)=u(n)-u(n-N) \Longrightarrow \text{区间 } [0, N)$$

④ 实指数序列

$$x(n)=a^n u(n), \quad a\in\mathbb{R}$$

if $|a|<1$, $n\uparrow \rightarrow x(n)\downarrow$ 收敛序列

if $|a|>1$, $n\uparrow \rightarrow x(n)\uparrow$ 发散序列



(a) 收敛序列　(b) 发散序列

⑤ 正弦序列

$$x(n)=\sin(wn)$$

w: 数字域频率 / 数字频率 (rad)

模拟信号 $x_a(t)=\sin(\Omega t)$

$$x(n)=x_a(t)\big|_{t=nT}=\sin(\Omega nT)=\sin(wn)$$

即得 $w=\Omega T$

Ω: 模拟角频率 (rad/s)，T: 采样时间间隔，$F_s = \frac{1}{T}$: 采样频率

$\Rightarrow \omega = \frac{\Omega}{F_s}$ 　对采样频率做归一化频率

$\Omega_c \le \frac{\Omega_s}{2}$

$\omega = \Omega_c T \le \frac{\Omega_s}{2} T = \frac{\Omega_s}{2} \frac{1}{F_s} = \pi$

$\omega \in [0, \pi]$

⑥ 复指数序列

$$x(n) = e^{(\sigma + j\omega_0)n}$$

⑦ 周期序列

$$x(n) = x(n+N), \quad -\infty < n < \infty$$

分析 $x(n) = A\sin(\omega_0 n + \varphi)$ 周期性

解: $x(n+N) = A\sin(\omega_0 n + \omega_0 N + \varphi)$

if $x(n) = x(n+N)$

then $\omega_0 N = 2k\pi$

即得 $N = \frac{2k\pi}{\omega_0} = k \cdot \frac{2\pi}{\omega_0}$

① if $\frac{2\pi}{\omega_0} \in \mathbb{Z}$, get $k=1$, $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$

② if $\frac{2\pi}{\omega_0} \in \mathbb{Q}$, set $\frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{P}{Q}$, $P, Q \in \mathbb{Z}$, $\gcd(P, Q) = 1$

get $k = Q$, $T = P$

③ if $\frac{2\pi}{\omega_0} \notin \mathbb{Q}$, no T

序列分解:

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m)$$

第二讲 时域离散系统

2.1 线性系统

$$y_1(n) = T[x_1(n)], \quad y_2(n) = T[x_2(n)]$$

可加性 $T[x_1(n) + x_2(n)] = y_1(n) + y_2(n)$

齐次/比例性 $T[a x_1(n)] = a y_1(n)$

2.2 时不变系统

$$y(n) = T[x(n)]$$

$$y(n-n_0) = T[x(n-n_0)]$$

Example: $y(n) = x(n)\sin(\omega_0 n + \frac{\pi}{4})$

证明: $y(n-n_0) = x(n-n_0)\sin[\omega_0(n-n_0) + \frac{\pi}{4}]$ 　延时 n

$T[x(n-n_0)] = x(n-n_0)\sin(\omega_0 n + \frac{\pi}{4})$ 　输入延时

由 $y(n-n_0) \ne T[x(n-n_0)]$

$\Rightarrow$ 时变系统

2.3 系统响应

输入 $x(n)=\delta(n)$　　$y(n)|_{n=0}=0$

单位脉冲响应 $h(n)$ $\Rightarrow$ $h(n)=T[\delta(n)]$

推导: if $x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)$

then $y(n)=T[\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)]$

又 $x(m)=C$ 即 线性时不变系统

then

$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)T[\delta(n-m)]$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)$$

$$=x(n)*h(n)$$

卷积 $x(n)$ 长度: N　　$y(n)$ 长度: M

则 $x(n)*y(n)$ 长度 $N+M-1$

$R_4(n)$

解析计算法

设 $x(n)=a^n u(n)$, $h(n)=R_4(n)$ 求 $y(n)=x(n)*h(n)$

解:

$$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}R_4(m)\,\underbrace{a^{n-m}u(n-m)}$$ → 当各项均非零时, $y(n)\neq 0$

so $\begin{cases} n-m\geq 0 \\ 0\leq m\leq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\leq n \\ 0\leq m\leq 3 \end{cases}$

① if $n<0$, $y(n)=0$

② if $0\leq n\leq 3$, then $0\leq m\leq n$

$$y(n)=\sum_{m=0}^{n}a^{n-m}=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

③ if $n>3$, then $0\leq m\leq 3$

$$y(n)=\sum_{m=0}^{3}a^{n-m}=\frac{1-a^4}{1-a}$$

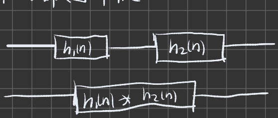
卷积性质:

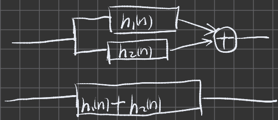
$$x(n)*h(n)=h(n)*x(n)$$

$$x(n)*[h_1(n)*h_2(n)]=[x(n)*h_1(n)]*h_2(n)$$

$$x(n)*[h_1(n)+h_2(n)]=x(n)*h_1(n)+x(n)*h_2(n)$$

2.4 级联与并联





$$\begin{cases} x(n) = x(n) * \delta(n) \\ x(n-n_0) = x(n) * \delta(n-n_0) \end{cases}$$

2.5 系统的因果性和稳定性

Define 因果性: $x_n = \{x_n\}$

$$\text{Output}\Big|_{t=n} = y_n = T(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \cdots)$$

充分必要条件:

$h(n) = 0, \quad n < 0$

✓ 单位脉冲响应 $\longrightarrow$ 零状态响应 } 当 $n<0$ 时 序列值 对 $h(n)$ 贡献为 0

Define 稳定性:

若 $|x_n| < \infty$, $|T(x_n)| < \infty$

For LTI system, 若 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$

Demonstrate:

充分性 $$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)\,x(n-m)$$

即 $$|y(n)| \le \sum_{m=-\infty}^{\infty} |h(m)|\,|x(n-m)|$$

Condition: 若 $|x(n)| < B$, $-\infty < n < \infty$

then $$|y(n)| \le B \sum_{m=-\infty}^{\infty} |h(m)|$$

必要性: (反证法)

不妨设 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \infty$

An example: $$x(n) = \begin{cases} \dfrac{h^*(-n)}{|h(-n)|}, & h(n) \ne 0 \\ 0, & h(n) = 0 \end{cases}$$

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)\,x(n-m)$$

若 $n=0$, $$y(0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)\,x(-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)\frac{h^*(m)}{|h(m)|} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |h(m)| = \infty$$

2.6 Examples

系统的单位脉冲响应 $h(n)=u(n)$ 求任意输入序列 $x(n)$ 的输出 $y(n)$，并检验系统的因果性和稳定性

解：由系统 $h(n)=u(n)$，则

输出：$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)u(n-k)=\sum_{k=-\infty}^{n}x(k)$

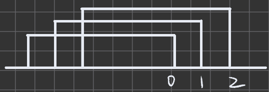
因果性：$n<0,\ h(n)=0$

稳定性：$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|u(n)|=\infty$

2.8 课堂笔记

① FIR

$$y(n)=\frac{1}{0.05}\sum_{i=1}^{m}x(n-i)$$



滑动平均滤波器

第二章 时域离散信号与系统的频域分析

第一讲 傅里叶定义及性质

1.1 Define:

$$X(e^{j\omega}) = FT[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

充分条件:

若 $x(n)$ 绝对可和 即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty \quad \text{then } FT[x(n)] 存在$$

傅里叶反变换:

$$\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) e^{j\omega(n-m)} d\omega$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(n-m)} d\omega$$

解: $\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(n-m)} d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} [\cos[\omega(n-m)] + j\sin[\omega(n-m)]] d\omega$

$$= \begin{cases} \int_{-\pi}^{\pi} d\omega = 2\pi, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

当 $m \neq n$ 时,

分析: 原式 $= \int_{-\pi}^{\pi} \cos[\omega(n-m)] d\omega$

$= 2\int_{0}^{\pi} \cos[\omega(n-m)] d\omega$

由 $m, n \in \mathbb{Z}$, 则令 $k = n-m \in \mathbb{Z}$

即得: $= 2\int_0^{\pi} \cos(\omega k) d\omega$, $k \in \mathbb{Z}$

$= \frac{2}{k} \sin(\omega k) \Big|_0^{\pi}$

$= \frac{2}{k} \sin(k\pi)$

$= 0$

$$\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = 2\pi x(n)$$

即得:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

1.2 FT 的周期性

<1>

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) e^{-j\omega m} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) e^{-j(\omega+2\pi m)m}$$

$$= X(e^{j(\omega+2\pi m)})$$

线性:

<2> $X_1(e^{j\omega}) = FT[x_1(n)]$, $X_2(e^{j\omega}) = FT[x_2(n)]$

$$\Rightarrow FT[a_1 x_1(n) + b_1 x_2(n)] = a_1 FT[x_1(n)] + b_1 FT[x_2(n)]$$

原信号幅值相乘.且相加

时移与频移性质

<3> 若 $X(e^{j\omega}) = FT[x(n)]$

$$FT[x(n-n_0)] = e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$$

$$FT[e^{j\omega_0 n}x(n)] = X(e^{j(\omega-\omega_0)})$$

FT对称性

<4>

共轭对称序列：

$$x_e(n) = x_e^*(-n)$$

if $x_e(n) = x_{er}(n) + j x_{ei}(n)$ then $x_e^*(n) = x_{er}(n) - j x_{ei}(n)$

故：$x_e^*(-n) = x_{er}(-n) - j x_{ei}(-n)$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} x_{er}(n) = x_{er}(-n) & \text{实部——偶} \\ x_{ei}(n) = -x_{ei}(-n) & \text{虚部——奇} \end{cases}$$

共轭反对称序列：

$$x_o(n) = -x_o^*(-n)$$

$$\begin{cases} x_{or}(n) = -x_{or}(-n) & \text{实部——奇} \\ x_{oi}(n) = x_{oi}(-n) & \text{虚部——偶} \end{cases}$$

一般序列可以用共轭对称与共轭反对称序列表示：

即 $x(n) = x_e(n) + x_o(n)$ $\qquad \begin{cases} x_e(n) = x_e^*(-n) \\ x_o(n) = -x_o^*(-n) \end{cases}$

$\Rightarrow$ $x^*(-n) = x_e^*(-n) + x_o^*(-n)$

$= x_e(n) - x_o(n)$

联立解得：$\begin{cases} x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(-n)] \\ x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(-n)] \end{cases}$

对于频域函数 $X(e^{j\omega})$ 有：

$$X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{j\omega})$$

同理：$\qquad \begin{cases} X_e(e^{j\omega}) = X_e^*(e^{-j\omega}) \\ X_o(e^{j\omega}) = -X_o^*(e^{-j\omega}) \end{cases}$

$$X^*(e^{-j\omega}) = X_e^*(e^{-j\omega}) + X_o^*(e^{-j\omega})$$

① 序列 $x(n)$ 分成实部 $x_r(n)$ 和虚部 $x_i(n)$

$$x(n) = x_r(n) + x_i(n)$$

傅里叶变换：

$$X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{j\omega})$$

其中：$\begin{cases} X_e(e^{j\omega}) = FT[x_r(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_r(n) e^{-j\omega n} & \text{(共轭对称)} \\ X_o(e^{j\omega}) = FT[j x_i(n)] = j\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_i(n) e^{-j\omega n} & \text{(共轭反对称)} \end{cases}$

③ 序列分成共轭对称部分 $x_e(n)$ 和共轭反对称部分 $x_o(n)$

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n)$$

且易得 $\begin{cases} x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(-n)] \\ x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(-n)] \end{cases}$

$$FT[x^*(-n)] = X^*(e^{jw})$$

推导 $= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(-n) e^{-jw(-n)}$

$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n) e^{jwn}$

取傅里叶变换：

$$FT[x_e(n)] = \frac{1}{2}[\underbrace{X(e^{jw}) + X^*(e^{jw})}_{实部}]$$

$$= Re[X(e^{jw})]$$

$$= X_R(e^{jw})$$

$$FT[x_o(n)] = \frac{1}{2}[X(e^{jw}) - X^*(e^{jw})]$$

$$= j\,Im[X(e^{jw})]$$

$$= jX_I(e^{jw})$$

$\Downarrow$

$$X(e^{jw}) = X_R(e^{jw}) + jX_I(e^{jw})$$

①②的应用分析：

对于实序列 $h(n)$：

$$FT[h(n)] = H_e(e^{jw}),\quad H_o(e^{jw}) = 0$$

$\Rightarrow \begin{cases} H(e^{jw}) = H_e(e^{jw}) \\ H(e^{jw}) = H^*(e^{-jw}) \end{cases}$ （实偶虚奇）

因果序列：$\{x(n)\}$，且 $x(n) = 0,\ n < 0$

<5> 时域卷积定理

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

则 $\quad Y(e^{jw}) = X(e^{jw}) H(e^{jw})$

证明：$\quad y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) h(n-m)$

$$\Rightarrow Y(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) h(n-m)\right] e^{-jwn}$$

令 $k = n-m$ 即 $n = k+m$

$$Y(e^{jw}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) h(k)\right] e^{-jwm} e^{-jwk}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{-jwk} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) e^{-jwm}$$ 提取公因式

$$= H(e^{jw})\, X(e^{jw})$$

<6> 频域卷积定理

设 $y(n)=h(n)x(n)$

$$Y(e^{jw})=\frac{1}{2\pi}H(e^{jw})*X(e^{jw})$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H(e^{j\theta})X(e^{j(w-\theta)})d\theta$$

<7> 帕斯维尔定理 (Parseval)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|X(e^{jw})|^2dw$$

能量守恒：$E_t=E_w$

第二讲 序列的Z变换

2.1 Define:

双边 $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$，$z=e^{jw}=\cos w+j\sin w$ 单位圆

单边 $X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}$

Z变换存在的条件：(级数绝对收敛)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)z^{-n}|<\infty$$

$\Downarrow$

收敛域：Z的取值域：

$$R_{x-}<|z|<R_{x+}$$

令 $z=re^{jw}$，代入上式：$R_{x-}<r<R_{x+}$

2.2 常用的Z变换 (有理函数)

$$X(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$$

零点：$P(z)$ 的根　　极点：$Q(z)$ 的根 $\rightarrow$ 以极点限定其边界

傅里叶变换与Z变换(ZT)之间关系：

$$X(e^{jw})=X(z)|_{z=e^{jw}}$$

$\downarrow$

单位圆上的Z变换就是序列的傅里叶变换

2.3 序列特性

① 有限长序列

$$x(n)=\begin{cases}x(n), & n_1\le n\le n_2\\ 0, & 其它\end{cases}$$

⇒ z变换

$$X(z)=\sum_{n=n_1}^{n_2}x(n)z^{-n}$$

有限项求和，0与∞点收敛性未知

2.4 逆z变换

由 $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}\quad R_{x-}<|z|<R_{x+}$；

两端乘以 z^{n-1} 并进行积分：

$$\oint_c X(z)z^{n-1}dz=\oint_c\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)z^{-m}\right]z^{n-1}dz$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\oint_c z^{n-m-1}dz$$

由柯西公式得：

$$\oint_c z^{n-m-1}dz=\begin{cases}2\pi j, & m=n\\ 0, & m\ne n\end{cases}$$

$$\Rightarrow\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\oint_c z^{n-m-1}dz=x(n)$$

即 $\oint_c X(z)z^{n-1}dz=2\pi j\,x(n)$

$$\Rightarrow x(n)=IFT[X(z)]=\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)z^{n-1}dz$$

① 留数法计算逆z变换

令 $F(z)=X(z)z^{n-1}$，其极点为 z_k 则

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)z^{n-1}dz=\underbrace{\sum_k Res[F(z),z_k]}_{被积函数F(z)在极点z=z_k那留数}$$

$$\begin{cases}Res[F(z),z_k]=(z-z_k)\cdot F(z)\big|_{z=z_k} & 单阶极点\\ Res[F(z),z_k]=\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_k)^mF(z)\right]\big|_{z=z_k} & 多阶极点\end{cases}$$

第三讲 时域离散系统的描述

输入输出描述法：只描述或研究系统输出和输入之间的关系

3.1 线性常系数差分方程

$$\sum_{i=0}^{N} a_i y(n-i) = \sum_{i=0}^{M} b_i x(n-i),\ a_0=1 \qquad (1)$$

阶数：$y(n-i)$ 中 i 的最大看值定义

LTI 系统，$y(n) = h(n) * x(n)$ 注解：可看作对 $x(n)$ 的加权，"权函数"

For $h(n)$，if 由有限项构成 $\longrightarrow$ 有限冲激响应系统 FIR

else 无限冲激响应系数 IIR

For eq.(1)，$N=0$ 时为 FIR 系统，$N>0$ 时为 IIR 系数

分析：if we set $N=1$，then

$$y(n) + a_1 y(n-1) = \sum_{i=0}^{M} b_i x(n-i),$$

$$y(n-1) + a_1 y(n-2) = \sum_{i=0}^{M} b_i x(n-1-i),$$

and if $x(n) = \delta(n)$ then $y(n)=h(n)$

迭代到无限项，求解 $h(n)$

关联无限多项

傅里叶变换：

$$X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jwn}$$

卷积定理：

$$y(n)=h(n)*x(n) \quad \text{———} \quad Y(e^{jw}) = H(e^{jw})\cdot X(e^{jw})$$

已知 $H(e^{jw})$，$x(n)$ 求 $y(n)$：

$$x(n) \xrightarrow[FT]{} X(e^{jw}) \longrightarrow H(e^{jw})\cdot X(e^{jw}) \xrightarrow[IFT]{} y(n)$$

$$\underline{H(e^{jw})} = \frac{Y(e^{jw})}{X(e^{jw})} \qquad T=2\pi \text{ 连续周期函数}$$

☆ $H(e^{jw}) = |H(e^{jw})| e^{j\arg[H(e^{jw})]} = |H(e^{jw})| e^{j\varphi(w)}$

群延迟 $\tau(w)$ 表示相位的线性性

$$\tau(w) = -\frac{d\varphi(w)}{dw} = -\frac{d}{dw}[\arg[H(e^{jw})]]$$

if $\tau(w) = C$，then $\varphi(w) = aw+b$

序列 z 变换

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

Compare：

if $z = e^{jw} = \underline{\cos w + j\sin w} \longrightarrow$ FT

单位圆

if $z = ae^{jbw} = a(\cos bw + j\sin bw) \longrightarrow$ 复频域

革新录

——面向应试的简要核心笔记

单位冲激串：$p_\delta(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$

采样信号：$\hat{x}_a(t)=x_a(t)p_\delta(t)=x_a(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$

$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\underbrace{x_a(nT)}_{\text{权值}}\delta(t-nT)$ 延时的单位冲激加权和

采样序列：$x(n)=x_a(nT)$ 只在 $t=nT$ 上有定义

第一讲

$\delta(n)=\begin{cases}1, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases}$，$u(n)=\begin{cases}1, & n\geq 0\\ 0, & n<0\end{cases}$

$\delta(n)=u(n)-u(n-1)$

$u(n)=\sum_{k=0}^{\infty}\delta(n-k)$

$R_N(n)=\begin{cases}1, & 0\leq n\leq N-1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

$R_N(n)=u(n)-u(n-N)$

$R_N(n)=\sum_{k=0}^{N-1}\delta(n-k)$

$x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)$ 单位采样序列移位加权和

$=x(n)*\delta(n)$

N阶线性常系数差分方程：

$\sum_{i=0}^{N}a_i y(n-i)=\sum_{i=0}^{M}b_i x(n-i)$，$a_0=1$ ⟶ 递推求系统冲激响应 $h(n)$

LTI系统：

$y(n)=h(n)*x(n)$ ⟶ 卷积求得差分方程

$y(n) = h(n) * x(n)$ —— $Y(z) = H(z) \cdot X(z)$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

由式(1)作Z变换得：

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{M} b_i z^{-i}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} \xlongequal[\text{分解}]{\text{因式}} \frac{A\prod_{i=1}^{M}(1-c_i z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1-d_k z^{-1})} = A \cdot z^{N-M} \frac{\prod_{i=1}^{M}(z-c_i)}{\prod_{k=1}^{N}(z-d_k)} \qquad (2)$$

⇓

零点：$z=c_i$，极点：$z=d_k$

令 $N=M$，$z=e^{jw}$ 由(2)式得：

$$H(e^{jw}) = A\frac{\prod_{r=1}^{M}(e^{jw}-c_r)}{\prod_{r=1}^{N}(e^{jw}-d_r)} \longrightarrow \text{分析：复数}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{c_r B} = e^{jw} - c_r & \text{零点矢量} \\ \overrightarrow{d_r B} = e^{jw} - d_r & \text{极点矢量} \end{cases}$$

$$\Rightarrow H(e^{jw}) = A\frac{\prod_{r=1}^{M}\overrightarrow{c_r B}}{\prod_{r=1}^{N}\overrightarrow{d_r B}} = |H(e^{jw})| e^{j\varphi(w)}$$

$$\begin{cases} |H(e^{jw})| = A\dfrac{\prod_{r=1}^{M} c_r B}{\prod_{r=1}^{N} d_r B} \\ \varphi(w) = \sum_{r=1}^{N}\alpha_r - \sum_{r=1}^{M}\beta_r \end{cases}$$

零、极点对幅频特性的影响：

（1）原点处的零、极点对幅频无影响；模值为1

（2）零点使幅频产生谷值，单位圆上的零点使系统幅度为零；

（3）极点使幅频产生峰值，单位圆上的极点使系统谐振，不稳定。

因果最小相位系统：全部零、极点在单位圆内。当ω从0变到2π时，系统的相位变化为0；

因果最大相位系统：零点在单位圆外，极点在单位圆内。当ω从0变到2π时，系统的相位变化为$-2\pi m_0$（m_0圆外零点数）；

因果混合相位系统：零点在单位圆内外，极点在单位圆内。

> 收敛域包含单位圆时，系统稳定 ⟺ $H(e^{jw}) = FT[h(n)]$ 存在

☆ 系统函数确定系统输入输出关系

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \Rightarrow Y(z) = H(z) \cdot X(z)$$

作Z反变换，$Y(z) \longleftrightarrow y(n)$，$z^{-i} Y(z) \longleftrightarrow y(n-i)$

得 $y(n) \sim x(n)$

Example: $H(z) = 1 - z^{-8}$，求冲激响应

解：$Y(z) = H(z)X(z) = X(z) - z^{-8}X(z)$

作Z反变换：$y(n) = x(n) - x(n-8)$

由 $y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \longrightarrow$ $h(n)$看作对$x(n)$的加权

$= x(n) - x(n-8)$

$$\Rightarrow h(n) = \begin{cases} 1, & n=0 \\ -1, & n=8 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

第四讲 模拟信号数字处理方法

4.1 采样

单位采样信号：$p_{\delta}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$

采样信号：$\hat{x}_a(t)=x_a(t)\cdot p_{\delta}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(t)\delta(t-nT)$

采样序列：$\hat{x}_a(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(nT)\delta(t-nT)$

采样定理：$\hat{X}_a(j\Omega)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_a(j\Omega-jk\Omega_s)$

采样信号的频谱是原模拟信号的频谱以Ω_s为周期，进行周期性延拓而成的

需要说明：一般频谱函数是复函数，相加应是复数相加，图1.5.3和图1.5.4仅是示意图。

$f_s/2=f_c$称为奈奎斯特频率(Nyquist frequency)

$f_s=2f_c$称为奈奎斯特率(Nyquist rate)

$[-f_s/2, f_s/2]$称为奈奎斯特间隔(Nyquist interval)

只有按照采样定理采样，才不会在采样信号的频谱中产生频率混叠现象。频率混叠均产生在$f_s/2$附近。

考虑到器件衰减、运算精度等影响，实际采样频率选为 $f_s=(3\sim10)f_c$

4.2 数字信号转换为模拟信号

由时域离散信号$x_a(nT)$恢复模拟信号的过程是采样点内插的过程。理想低通滤波的方法是用$g(t)$函数作内插函数。而实际可行的方法是零阶保持器+平滑滤波器。

理想低通滤波器 $G(j\Omega)$

$$G(j\Omega)=\begin{cases}T & |\Omega|<\frac{1}{2}\Omega_s\\ 0 & |\Omega|\geq\frac{1}{2}\Omega_s\end{cases}$$

$$x_a(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(nT)g(t-nT)$$

第3章 离散傅里叶变换(DFT)

3.1 Defination:

$x(n)$ 长度: M，N点 DFT:

$$X(k) = DFT[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, \quad k=0,1,\cdots,N-1$$

$X(k)$ 只影响 W_N^{kn}

$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ 旋转因子

逆变换:

$$x(n) = IDFT[X(k)] = \underbrace{\frac{1}{N}}_{①} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \underbrace{W_N^{-kn}}_{②} \quad n=0,1,\cdots,N-1$$

3.2 Relationship:

$x(n)$ 长度: M

$$X(z) = ZT[x(n)] = \sum_{n=0}^{M-1} x(n) z^{-n}$$

$$X(k) = DFT[x(n)]_N = \sum_{n=0}^{M-1} x(n) W_N^{kn}, \quad k=0,1,\cdots,N-1$$

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}} \Rightarrow W_N^{kn} = e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$X(k) = X(z)\big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}$$

z变换在单位圆上的N点等间隔采样

DFT 隐含周期性

☆ $W_N^{k} = W_N^{k+mN}$

$$X(k+mN) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{(k+mN)n} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} = X(k)$$

周期延拓序列: $\tilde{x}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n+mN)$

$\tilde{x}(n) = x((n))_N \quad (N \geq M)$

主值序列: $x(n) = \tilde{x}(n) R_N(n) \quad (N \geq M)$

分析: 若 $N<M$, 序列重叠
取主值序列时会发生失真

DFT:

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x((n))_N W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}$$

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{-kn} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}, \quad X(k) = \tilde{X}(k) R_N(k)$$

$x(n) = \tilde{x}(n) R_N(n)$

$$\left\{ \begin{array}{l} x(n) \longleftrightarrow X(k) \\ x((n))_N \longleftrightarrow \tilde{X}(k) \end{array} \right\}$$

$X(k) = \tilde{X}(k) R_N(k)$

第二讲 基本性质

2.1 线性性质：

$x_1(n): N_1 \quad x_2(n): N_2$，且

$$y(n) = a x_1(n) + b x_2(n)$$

取 $N \geq \max[N_1, N_2]$，N点DFT：

$$Y(k) = DFT[y(n)]_N = aX_1(k) + bX_2(k) \quad 0 \leq k \leq N-1$$

2.2 循环移位性质

Defination:

$x(n): M, \quad (M \leq N)$

$$y(n) = x((n+m))_N R_N(n)$$

$x(n) \longrightarrow \tilde{x}(n) = x((n))_N \longrightarrow \tilde{x}(n+m) = x((n+m))_N$

$\longrightarrow y(n) = \tilde{x}(n+m) R_N(n) = x((n+m))_N R_N(n)$

$x((n))_N = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(n+iN)$ Defination

① 时域循环移位定理

$x(n): M \quad (M \leq N)$，$y(n) = x((n+m))_N R_N(n)$

DFT:

$$Y(k) = DFT[y(n)]_N = W_N^{-km} X(k), \quad X(k) = DFT[x(n)]_N \ (0 \leq k \leq N-1)$$

证明：

$$Y(k) = DFT[y(n)]_N = \sum_{n=0}^{N-1} y(n) W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x((n+m))_N R_N(n) W_N^{kn}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x((n+m))_N W_N^{kn}$$

令 $n' = n+m$，（凑 $x(n) \longrightarrow X(k)$）

$$Y(k) = \sum_{n'=m}^{N-1+m} x((n'))_N W_N^{k(n'-m)}$$

$x((n'))_N$为周期延拓序列

$$= W_N^{-km} \sum_{n'=0}^{N-1} x((n'))_N W_N^{kn'}$$

$$= W_N^{-km} \sum_{n'=0}^{N-1} x(n')_N W_N^{kn'}$$

主值区为第一个周期，有 $x((n)) = x(n)$

$$= W_N^{-km} X(k)$$

② 频域循环移位定理

$X(k) = DFT[x(n)]_N, \quad 0 \leq k \leq N-1$

$Y(k) = X((k+m))_N R_N(n)$ 频域循环移位

即：

$$y(n) = IDFT[Y(k)]_N = W_N^{nm} x(n)$$

证明： $y(n) = IDFT[Y(k)]_N = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y(k) W_N^{-kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X((k+m))_N R_N(k) W_N^{-kn}$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X((k+m))_N W_N^{-kn}$$

令 $k'=k+m$，则

$$y(n)=\frac{1}{N}\sum_{k'=m}^{N-1+m}X((k'))_N W_N^{-n(k'-m)}$$

$$=W_N^{nm}\cdot\frac{1}{N}\sum_{k'=0}^{N-1}X((k'))_N W_N^{-nk'}$$

$$=W_N^{nm}\cdot\frac{1}{N}\sum_{k'=0}^{N-1}X(k')_N W_N^{-nk'}$$

$$=W_N^{nm}x(n)$$

2.3 循环卷积定理

$\circledast$ 循环卷积

Ⓛ L点循环卷积

$h(n):N,\quad x(n):M$

L点循环卷积：

$$y_c(n)=\left[\sum_{m=0}^{L-1}h(m)\,x((n-m))_L\right]R_L(n)\quad,\ L\geq \max[N,M]$$

记作：

$$y_c(n)=h(n)\ Ⓛ\ x(n)$$

矩阵相乘计算循环卷积：

Example：

$x(n)=\{x(0),x(1),x(2),x(3)\}=\{1,2,3,4\}$

$h(n)=\{h(0),h(1),h(2),h(3)\}=\{1,1,1,1\}$

8点循环卷积：

$$\begin{bmatrix}y_c(0)\\y_c(1)\\y_c(2)\\y_c(3)\\y_c(4)\\y_c(5)\\y_c(6)\\y_c(7)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&4&3&2\\2&1&0&0&0&0&4&3\\3&2&1&0&0&0&0&4\\4&3&2&1&0&0&0&0\\0&4&3&2&1&0&0&0\\0&0&4&3&2&1&0&0\\0&0&0&4&3&2&1&0\\0&0&0&0&4&3&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3\\6\\10\\9\\7\\4\\0\end{bmatrix}$$

#1：循环倒相序列，(第一个元素不动，其余元素翻转180°

if $M<L$，$x(n)$后补 $L-M$ 个零

#2—End：前一行向右循环移一位

循环卷积的DFT

$x_1(n):N_1,\quad x_2(n):N_2\quad,\ N\geq\max[N_1,N_2]$

N点循环卷积：

$$x(n)=x_2(n)\ Ⓝ\ x_1(n)=\left[\sum_{m=0}^{N-1}x_2(m)\,x_1((n-m))_N\right]R_N(n)$$

时域循环卷积　　N点 DFT

① $X(k)=DFT[x(n)]_N=X_1(k)X_2(k)$　　　时域卷积，频域相乘

其中 $X_1(k)=DFT[x_1(n)]_N\ ,\ X_2(k)=DFT[x_2(n)]_N$

$$\left\{\begin{array}{l} X(k)=DFT[x(n)]_N= X_1(k)X_2(k)=X_2(k)X_1(k) \\ x(n)=IDFT[X(k)]=x_1(n)\circledast x_2(n)=x_2(n)\circledast x_1(n)\end{array}\right\}$$ 满足交换律

频域循环卷积

频域循环卷积定理

① $X(k)=\frac{1}{N}X_2(k)\circledast X_1(k)=\frac{1}{N}\left[\sum_{m=0}^{N-1}X_2(m)X_1((k-m))_N\right]R_N(k)$ 其中 $\left\{\begin{array}{l}X_1(k)=DFT[x_1(n)]_N\\X_2(k)=DFT[x_2(n)]_N\end{array}\right.$ $0\le k\le N-1$

② $x(n)=IDFT[X(k)]_N=x_1(n)x_2(n)$

证明：① $X(k)=DFT[x(n)]_N=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}=\sum_{n=0}^{N-1}\left[\sum_{m=0}^{N-1}x_2(m)x_1((n-m))_N R_N(n)\right]W_N^{kn}$

$$=\sum_{m=0}^{N-1}x_2(m)\sum_{n=0}^{N-1}x_1((n-m))_N W_N^{kn}$$

$$=\sum_{m=0}^{N-1}x_2(m)W_N^{km}\sum_{n=0}^{N-1}x_1((n-m))_N W_N^{k(n-m)}$$

令 $n'=n-m$ 则

$$X(k)=\sum_{m=0}^{N-1}x_2(m)W_N^{km}\sum_{n'=-m}^{N-1-m}x_1((n'))_N W_N^{kn'}$$

$$=X_2(k)\sum_{n'=0}^{N-1}x_1(n')W_N^{kn'}$$

$$=X_2(k)X_1(k)$$

② $x(n)=IDFT[X(k)]_N=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-kn}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}X_2(m)X_1((k-m))_N R_N(k)\right]W_N^{-kn}$

$$=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}X_2(m)W_N^{-mn}\cdot\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X_1((k-m))_N W_N^{-n(k-m)}$$

令 $k'=k-m$ 则

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}X_2(m)W_N^{-mn}\cdot\frac{1}{N}\sum_{k'=-m}^{N-1-m}X_1((k'))_N W_N^{-nk'}$$

$$=x_2(n)\cdot\frac{1}{N}\sum_{k'=0}^{N-1}X_1(k')_N W_N^{-nk'}$$

$$=x_1(n)\cdot x_2(n)$$

2.4 复共轭序列的DFT

$x(n):N$ 复共轭序列：$x^*(n):N$ $X(k)=DFT[x(n)]_N$

即

$$DFT[x^*(n)]_N=X^*(N-k),\quad 0\le k\le N-1$$

分析：$x(n)\longleftrightarrow x^*(n)$ 复共轭 $\longrightarrow$ $X(k)\longleftrightarrow X^*(N-k)$ 复共轭对称

证明：$\underbrace{X^*(N-k)}_{\text{new }k}=\left[\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{(N-k)n}\right]^*=\sum_{n=0}^{N-1}x^*(n)W_N^{-(N-k)n}$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}x^*(n)W_N^{kn}$$

$$=DFT[x^*(n)]_N$$

变式：　$DFT[x^*(N-n)]_N = X^*(k)$

① 序列的共轭对称性

性质　　共轭对称 $x_{ep}(n) = x_{ep}^*(N-n)$
　　　　共轭反对称 $x_{op}(n) = -x_{op}^*(N-n)$　　$0 \le n \le N-1$

if $N=2k, k \in Z^+$，取 $n = \frac{N}{2}-n$

$$\begin{cases} x_{ep}(\frac{N}{2}-n) = x_{ep}^*(\frac{N}{2}+n) \\ x_{op}(\frac{N}{2}-n) = -x_{op}^*(\frac{N}{2}+n) \end{cases}$$

For any limited sequence $x(n)$, we can repsent:

时域
分解出共轭分量

$$\begin{cases} ①\ x(n) = x_{ep}(n) + x_{op}(n) \quad 0 \le n \le N-1 \\ ②\ x^*(N-n) = x_{ep}^*(N-n) + x_{op}^*(N-n) = x_{ep}(n) - x_{op}(n) \end{cases}$$

$$③\begin{cases} x_{ep}(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(N-n)] \\ x_{op}(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(N-n)] \end{cases}$$

频域

For any limited sequence $X(k)$,

$X(k) = X_{ep}(k) + X_{op}(k) \quad 0 \le k \le N-1$

$X^*(N-k) = X_{ep}^*(N-k) + X_{op}^*(N-k) = X_{ep}(k) - X_{op}(k)$

$$\begin{cases} X_{ep}(k) = \frac{1}{2}[X(k) + X^*(N-k)] \\ X_{op}(k) = \frac{1}{2}[X(k) - X^*(N-k)] \end{cases}$$

② DFT 的共轭对称性

<1>　$x(n) = x_r(n) + j x_i(n)$

$$\begin{cases} x_r(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(n)] \\ x_i(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(n)] \end{cases}$$

分析：

由频域的共轭对称性：

$$\begin{cases} X_{ep}(k) = \frac{1}{2}[X(k) + X^*(N-k)] \\ X_{op}(k) = \frac{1}{2}[X(k) - X^*(N-k)] \end{cases}$$

$$\left.\begin{cases} DFT[x_r(n)] = \frac{1}{2}DFT[x(n) + x^*(n)] = \frac{1}{2}[X(k) + X^*(N-k)] \\ DFT[j x_i(n)] = \frac{1}{2}DFT[x(n) - x^*(n)] = \frac{1}{2}[X(k) - X^*(N-k)] \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} = X_{ep}(k) \\ = X_{op}(k) \end{matrix}$$

分解得到的分量

则

$X(k) = DFT[x(n)] = X_{ep}(k) + X_{op}(k)$

<2>　$x(n) = x_{ep}(n) + x_{op}(n) \quad 0 \le n \le N-1$

其中 $\begin{cases} x_{ep}(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(N-n)] \\ x_{op}(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(N-n)] \end{cases}$

变式性质：$DFT[x^*(N-n)]_N = X^*(k)$

$$\left.\begin{matrix} DFT[x_{ep}(n)] = \frac{1}{2}DFT[x(n) + x^*(N-n)] = \frac{1}{2}[X(k) + X^*(k)] \\ DFT[x_{op}(n)] = \frac{1}{2}DFT[x(n) - x^*(N-n)] = \frac{1}{2}[X(k) - X^*(k)] \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} = Re[X(k)] \\ = j Im[X(k)] \end{matrix}$$

则

$X(k) = DFT[x(n)] = Re[X(k)] + j Im[X(k)] = X_R(k) + j X_I(k)$

③ Conclusions:

$x(n)$: N 实序列, $X(k)=DFT[x(n)]_N$

☆ → 共轭对称: $X(k)=X^*(N-k)$ $0\le k\le N-1$

→ 若 实偶对称: $x(n)=x(N-n)$

$X(k)=X(N-k)$

→ 若 实奇对称: $x(n)=-x(N-n)$

$X(k)=-X(N-k)$

单一分量

第三讲 频率域采样

3.1 频域采样定理

For any 连续信号 $x(n)$,

Z变换: $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$ (收敛域包含单位圆)

频域采样:

在单位圆 $e^{j\omega}$ 上对 $X(z)$ 等间隔采样:

$$X(k)=X(z)\big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)W_N^{kn}$$

记 $x_N(n)=IDFT[X(k)]$, $0\le n\le N-1$

$$x_N(n)\longrightarrow\tilde{x}(n)\ \text{周期延拓}$$

$$\tilde{x}(n)\ \xrightarrow{DFS}\ \tilde{X}(k)$$

$$\text{主值序列}\ X(k)\longleftarrow\tilde{X}(k)$$

推导:

$$\tilde{X}(k)=X((k))_N=DFS[\tilde{x}(n)]$$

$$X(k)=\tilde{X}(k)R_N(k)$$

$$\tilde{x}(n)=x_N((n))_N=IDFS[\tilde{X}(k)]$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)W_N^{-kn}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-kn}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)W_N^{km}\right]W_N^{-kn}$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}W_N^{k(m-n)}$$

得到序列 $\{x(n+iN)\}$

↓ 求和形式

$$=\sum_{i=-\infty}^{\infty}x(n+iN)$$

Conclusion:

☆ 由 $\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}W_N^{k(m-n)}=\begin{cases}1, & m=iN+n,\ i\in Z\\ 0, & \text{其他 } m\end{cases}$

延展:

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}W_N^{k(n-m)}=\begin{cases}1, & m=iN+n,\ i\in Z\\ 0, & \text{其他 } m\end{cases}$$

$$x_N(n)=\tilde{x}(n)R_N(n)=\underbrace{\sum_{i=-\infty}^{\infty}x(n+iN)R_N(n)}$$ → 原序列 $x(n)$ 周期延拓：

$$x((n))_N=\sum_{i=-\infty}^{\infty}x(n+iN)$$

↓ 取主值序列

$$\tilde{x}(n)R_N(n)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}x(n+iN)R_N(n)$$

↓ 对比变换对

$$x_N(n)=\tilde{x}(n)R_N(n)$$

变换对：$\begin{cases}\tilde{X}(k)=X((k))_N\\ X(k)=\tilde{X}(k)R_N(n)\end{cases}$ 与 $\begin{cases}\tilde{x}(n)=x_N((n))_N\\ x_N(n)=\tilde{x}(n)R_N(n)\end{cases}$

Conclusion:

式(3.3.3)说明，$X(z)$在单位圆上的N点等间隔采样$X(k)$的N点IDFT是原序列$x(n)$以N为周期的周期延拓序列的主值序列。综上所述，可以总结出频域采样定理。

$x(n):M$，当频域采样点数 $N\geq M$ 时，才有

$$x_N(n)=\text{IDFT}[X(k)]=x(n)$$

3.2 内插公式与内插函数

满足频域采样定理时，频域采样序列$X(k)$就是原序列$x(n)$的N点DFT，所以$X(k)$的N点IDFT是原序列$x(n)$，必然可以由$X(k)$恢复$X(z)$和$X(e^{j\omega})$。下面推导用频域采样

$x(n):M$，$[0,2\pi]$上等间隔采样N点，$N\geq M$

$$\begin{cases}X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)z^{-n} & (\text{if } \notin[0,N-1],\ x(n)=0)\\ X(k)=X(z)\Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}} & ,\ k=0,1,2,\dots,N-1\end{cases}$$

满足频域采样定理：

$$x(n)=\text{IDFT}[X(k)]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-kn}$$

$$\Rightarrow X(z)=\sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-kn}\right]z^{-n}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\sum_{n=0}^{N-1}W_N^{-kn}z^{-n}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\sum_{n=0}^{N-1}(W_N^{-k}z^{-1})^{n}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\frac{1-W_N^{-kN}z^{-N}}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\frac{1-z^{-N}}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$$

if 记 $\underbrace{\varphi_k(z)=\frac{1}{N}\frac{1-z^{-N}}{1-W_N^{-k}z^{-1}}}$ → 复频域内插函数

then

$$X(z)=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\varphi_k(z)$$ → 复频域内插公式

if $z=e^{j\omega}$ then

$$\underbrace{\varphi(\omega)=\frac{1}{N}\frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)}}$$ → 频域内插函数

$$X(e^{j\omega})=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\varphi\left(\omega-\frac{2\pi}{N}k\right)$$ → 频域内插公式

第4章 快速傅里叶变换(FFT)

第一讲 时域抽取法 DIT-FFT

I、DFT计算分析:

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}\ ,\quad k=0,1,\cdots,N-1$$

计算 $X(k)$ 复数乘法: N　　复数加法: $N-1$

N点DFT 复数乘法: N^2　　复数加法: $N(N-1)$

II. 旋转因子 W_N^m 分析:

周期性: $W_N^{m+lN}=W_N^m\ ,\quad l\in Z$

对称性: $W_N^{m+\frac{N}{2}}=-W_N^m$

$$\rightarrow W_N^{m+\frac{l}{2}N}=\begin{cases}W_N^m\ , & l=2k,\ k\in Z\\ -W_N^m\ , & l=2k+1,\ k\in Z\end{cases}$$

$W_N^{Cm}=W_{\frac{N}{C}}^m$, C为常数

取共轭: $[W_N^m]^*=W_N^{-m}$

☆ $[W_N^{N-m}]^*=W_N^m$

DIT-FFT (Decimation-In-Time FFT)

时域序列 $x(n)$ 抽取奇偶子序列:

$$\begin{cases}x_1(r)=x(2r)\ , & r=0,1,\cdots,\frac{N}{2}-1\\ x_2(r)=x(2r+1)\ , & r=0,1,\cdots,\frac{N}{2}-1\end{cases}$$

$$\begin{aligned}X(k)&=\sum_{r=0}^{N/2-1}x(2r)W_N^{k2r}+\sum_{r=0}^{N/2-1}x(2r+1)W_N^{k(2r+1)}\\&=\sum_{r=0}^{N/2-1}x(2r)W_{\frac{N}{2}}^{kr}+W_N^k\sum_{r=0}^{N/2-1}x(2r+1)W_{\frac{N}{2}}^{kr}\\&=X_1(k)+W_N^kX_2(k)\end{aligned}$$

又 $X_1(k)$、$X_2(k)$: $T=\frac{N}{2}$ ，且 $W_N^{k+\frac{N}{2}}=-W_N^k$

则

① $$\begin{cases}X(k)=X_1(k)+W_N^kX_2(k)\\ X(k+\frac{N}{2})=X_1(k)-W_N^kX_2(k)\end{cases}$$

分析:

一次蝶形运算: 一次复数乘，两次复数加

↓

单次计算两个点的N点DFT

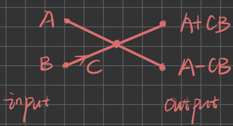
↓

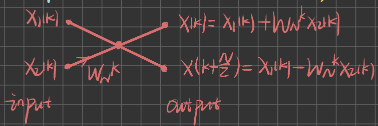
相距 $\frac{N}{2}$

DFT: 乘: $2N$　加: $2(N-1)$

FFT: 乘: $\frac{N}{2}+1$　加 $\frac{N}{2}+1$

蝶形运算:





② $\begin{cases} X_1(k) = X_3(k) + W_{N/2}^{k} X_4(k) \\ X_1(k+\frac{N}{4}) = X_3(k) - W_{N/2}^{k} X_4(k) \end{cases}$ $\begin{cases} X_2(k) = X_5(k) + W_{N/2}^{k} X_6(k) \\ X_2(k+\frac{N}{4}) = X_5(k) - W_{N/2}^{k} X_6(k) \end{cases}$

DIT-FFT与DFT比较分析：

设 $N=2^m \longrightarrow$ 运算流图：m级蝶形

每级：$\frac{N}{2}$个蝶形运算 $\longrightarrow$ $\frac{N}{2}$复数乘、N复数加

分析：单个蝶形 $\longrightarrow$ 变换两个DFT $\longrightarrow \frac{N}{2}$

$\downarrow$ m级运算

Multiply: $C_M = \frac{N}{2} \cdot m = \frac{N}{2} \cdot \log_2 N$

Add: $C_A = N \cdot m = N \cdot \log_2 N$

DFT:

$C_M = N^2$

$C_A = N(N-1)$

第二讲 频域抽取法FFT (DIF-FFT)

(Decimation-In-Frequency FFT)

频域序列 $X(k)$ 抽取奇偶子序列 △

$x(n)$: $N=2^m$

$$X(k) = DFT[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \quad \text{(对半分开)}$$

$$= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n) W_N^{kn} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x(n) W_N^{kn}$$

$$= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n) W_N^{kn} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n+\frac{N}{2}) W_N^{k(n+\frac{N}{2})}$$

$$= \sum_{n=0}^{N/2-1} [x(n) + W_N^{k\frac{N}{2}} x(n+\frac{N}{2})] W_N^{kn}$$

分析：$W_N^{k\cdot\frac{N}{2}} = \begin{cases} -1, & k=2m+1, m\in Z \\ 1, & k=2m, m\in Z \end{cases}$

$\downarrow$ 分解 $X(k)$ 为奇偶子序列

$$X(2m) = \sum_{n=0}^{N/2-1} [x(n) + x(n+\frac{N}{2})] W_N^{2mn} = \sum_{n=0}^{N/2-1} [x(n) + x(n+\frac{N}{2})] W_{N/2}^{mn}$$

$$X(2m+1) = \sum_{n=0}^{N/2-1} [x(n) - x(n+\frac{N}{2})] W_N^{(2m+1)n} = \sum_{n=0}^{N/2-1} [x(n) - x(n+\frac{N}{2})] W_N^{n} \cdot W_{N/2}^{mn}$$

if we note

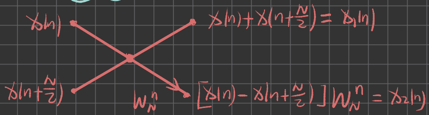
$x_1(n) = x(n) + x(n+\frac{N}{2})$, $x_2(n) = [x(n) - x(n+\frac{N}{2})] W_N^{n}$

then:

$X(2m) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_1(n) \cdot W_{N/2}^{mn}$, $X(2m+1) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_2(n) W_{N/2}^{mn}$

$\frac{N}{2}$ DFT

DIF-FFT 蝶形运算流图:



Summrize:

DIT-FFT: $\frac{N}{2}$点DFT $\rightarrow X_1(k), X_2(k) \longrightarrow$ 蝶形运算

DIF-FFT: 蝶形运算 $\rightarrow x_1(n), x_2(n) \longrightarrow \frac{N}{2}$点DFT

第三讲 DFT(FFT)的应用

3.1 DFT(FFT)计算线性卷积

$h(n): N, \quad x(n): M$

L点循环卷积:

$$y_c(n)=h(n) \circledL x(n)=\sum_{m=0}^{L-1} h(m)x((n-m))_L R_L(n)$$

其中, $L \geq max[N, M]$, $x((n))_L=\sum_{i=-\infty}^{\infty} x(n+iL)$

线性卷积:

$$y_l(n)=h(n)*x(n)=\sum_{m=0}^{N-1} h(m)\cdot x(n-m)$$

$\longrightarrow$ L 变换到 N: $h(n): N$ 其他 $h(m)=0$

$$y_c(n)=\left[\sum_{m=0}^{N-1} h(m)\sum_{i=-\infty}^{\infty} x(n+iL-m)\right]R_L(n)$$

$$=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n+iL-m)\right]R_L(n)$$

分析上式得:

$$\sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n+iL-m)=y_l(n+iL)$$

故

$$y_c(n)=\underbrace{\sum_{i=-\infty}^{\infty} y_l(n+iL)}_{\text{周期延拓序列}}\underbrace{R_L(n)}_{\text{主值区间}}$$

Conclusions:

① $y_l(n) \longrightarrow \tilde{y}_l(n) \longrightarrow \tilde{y}_l(n)R_L(n)=y_c(n)$

② 无时域混叠条件: $\underbrace{L}_{\text{延拓周期}} \geq \underbrace{N+M-1}_{\text{线性卷积长度}}$

循环卷积 = 线性卷积 Condition: $L \geq N+M-1$

3.2 FFT进行分段卷积

时域、频域

$t — f$

if $M \geq N \longrightarrow$ expense much time

① 重叠相加法

$h(n):N$　$x(n)$无限长，每段长M

$$x(n)=\sum_{k=0}^{\infty} x_k(n)$$

其中 $x_k(n)=x(n)\cdot \underbrace{R_M(n-kM)}$

$0 \leq n-kM \leq M-1$

即 $kM \leq n \leq (k+1)M-1$

$$\begin{aligned} y(n) &= h(n)*x(n) \\ &= h(n)*\sum_{k=0}^{\infty} x_k(n) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} h(n)*x_k(n) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} y_k(n) \end{aligned}$$

Steps: ① 将$x(n)$顺序分段为$x_i(n)$，M与N同数量级，$M>N$

② $h(n) \xrightarrow{L点DFT} H(k)$，$x_i(n) \xrightarrow{L点DFT} X_i(k)$，$L \geq N+M-1$ (FFT)

③ $H(k)\cdot X_i(k) \xrightarrow{L点IDFT} \underbrace{y_c(n)=y_i(n)=h(n)*x_i(n)}$ (FFT)

④ $y(n)=\sum_{i=0}^{\infty} y_i(n)$

$L \geq N+M-1$ 时，$y_c(n)=y_L(n)$

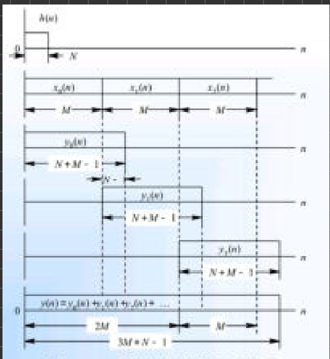


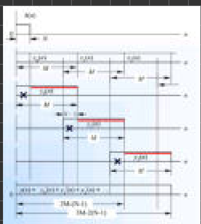
图 3.4.4 重叠相加法卷积示意图

② 重叠保留法

1> $x(n)$以M为长度重叠分段为$x_i(n)$，重叠$N-1$个点

2> 每段计算$L=M$点循环卷积

3> 去掉各段循环卷积结果的前$N-1$个点.

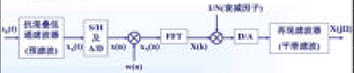


重叠保留法卷积示意图

3.3 FFT对连续信号作频谱分析

谱分析 = 信号的傅里叶变换

实现流程为:



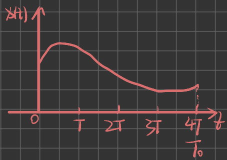
频率采样间隔为

模拟域 $f_0=1/T_0=1/NT$ (T为时域采样周期)

$\Omega_0=2\pi/(NT)$

数字域 $\omega_0=2\pi/N$

所以，频率分辨率即为 $f_0=1/NT$，f_0越小分辨率越高。



Ω_0：模拟角频率：

$\Omega_0=\frac{2\pi}{T_0}=\frac{2\pi}{NT}$：均分时间$T_0$

$\Omega_0 t$：连续

w_0：数字角频率

$w_0=\frac{2\pi}{N}$：均分采样点数N

$w_0 n$：离散

混叠失真

S/H或A/D采样频率：f_s

不产生频域混叠：

$$f_s \geq 2f_h = 2f_c$$

$$f_0=\frac{1}{NT}=\frac{f_s}{N}\geq\frac{2f_h}{N}$$

> if $N=C$, $f_h\uparrow \longrightarrow f_0\uparrow \longrightarrow$ 分频率下降

> if $N=C$, $f_0\downarrow \longrightarrow$ 分频率下降 $\longrightarrow f_h\downarrow$

f_h、f_0相互矛盾

Best Method: let $f_0=C$ or $f_h=C$, then $N\uparrow$

① $\uparrow T_0 \longrightarrow$ if $T=C$, then $N=\frac{T_0}{T}\uparrow$

② $\downarrow T \longrightarrow$ if $T_0=C$, then $N=\frac{T_0}{T}\uparrow$

频谱泄露

For 时宽无限 / 长时宽信号 $\longrightarrow$ DFT(FFT)，

Firstly，时域加窗 $\longrightarrow$ 有限时宽信号

$x(n)\cdot w(n) \longleftrightarrow X(e^{jw}) * W(e^{jw})$

频域卷积造成：窗谱主瓣使信号频谱加宽，窗谱旁瓣使信号频谱出现波纹(皱波)，这种现象称为频谱泄露。

栅栏效应

用DFT(FFT)计算的频谱可以看作是连续信号频谱的采样值，我们只能在离散采样点上看到真实的频谱，就好象通过栅栏看一幅图像一样，这就是栅栏效应。

减小这种效应的方法是，在被加窗后的信号数据末端补若干零值，使FFT计算点数N增加，又不改变原有的记录数据(相当于窗宽不变)。这样就可以在保持原频谱形状不变的情况下，增加谱线密度，即频域采样点数增加，使原来看不见的频谱分量变得可见。

除以上三方面外，CFT与DFT还有两点不同：

(1) DFT是周期的，CFT是非周期的

DFT一个周期 $\longrightarrow$ CFT
(k=-N/2~N/2-1)

(2) DFT幅值与CFT幅值不同

$X(k)=N\cdot X(j\Omega)$　　$\Omega=2\pi k/(NT)$

或　$X(k)=N\cdot X(f)$　　$f=k/(NT)$

Experiment 1: 验证时域采样定理

模拟信号: $x_a(t)$

采样信号: $\hat{x}_a(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(nT)\delta(t-nT)$

采样时隙 $T=\frac{1}{f_s}$, $\Omega_s=2\pi f_s$ 采样角频率

采样定理：

设时域连续信号$x_a(t)$具有截止频率分量f_c赫兹，则此函数在时域内完全可由一系列时间间隔等于或小于$1/f_c$秒的采样序列确定。

$$\hat{X}_a(j\Omega)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_a(j\Omega-jk\Omega_s)$$

上式表明采样信号的频谱是原模拟信号的频谱沿频率轴，每间隔采样角频率Ωs重复出现一次，或者说采样信号的频谱是原模拟信号的频谱以Ωs为周期，进行周期性延拓而成的。

考虑到器件衰减、运算精度等影响，实际采样频率选为 $f_s=(3\sim10)f_c$

第5章 时域离散系统的网络结构

无限长单位脉冲响应(IIR)滤波器

递归型

N阶差分方程:

$$y(n)=\sum_{i=0}^{M}b_i x(n-i)-\sum_{i=1}^{N}a_i y(n-i)$$

$$y(n)=h(n)*x(n)=\sum_{r=-\infty}^{\infty}h(r)x(n-r)$$

系统函数:

$$H(z)=\frac{\sum_{i=0}^{M}b_i z^{-i}}{1+\sum_{k=1}^{N}a_k z^{-k}}$$

分析: $y(n)+\sum_{i=1}^{N}a_i y(n-i)=\sum_{i=0}^{M}b_i x(n-i)$

作z变换

$$Y(z)+\sum_{i=1}^{N}a_i Y(z)z^{-i}=\sum_{i=0}^{M}b_i X(z)z^{-i}$$

即 $$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{i=0}^{M}b_i z^{-i}}{1+\sum_{k=1}^{N}a_k z^{-k}}$$

有限长单位脉冲响应(FIR)滤波器

N阶差分方程:

$$y(n)=\sum_{i=0}^{M}b_i x(n-i)$$

非递归型

$$y(n)=h(n)*x(n)=\sum_{r=0}^{M}h(r)x(n-r)$$

系数函数:

$$H(z)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)z^{-n}$$

分析: $y(n)=h(n)*x(n)=\sum_{r=0}^{N-1}h(r)x(n-r)$

作z变换:

$$Y(z)=\sum_{r=0}^{N-1}h(r)X(z)z^{-r}$$

即 $$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\sum_{r=0}^{N-1}h(r)z^{-r}$$

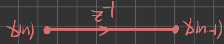
第一讲 网络结构

1) 信号流图

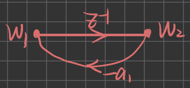
乘法:

加法:

单位延迟



环路增益



定义环路增益为: $-a_1z^{-1}$

分析: $W_2(z)=W_1(z)\cdot z^{-1}$

For W_1, 环路引入: $-a_1W_2(z)=-a_1W_1(z)\cdot z^{-1}$

第二讲 IIR系统网络结构

直接型

N阶差分方程：

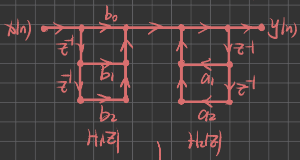
$$y(n)=\sum_{i=0}^{M}b_i x(n-i)+\sum_{i=1}^{N}a_i y(n-i)$$

$$\Rightarrow H(z)=\frac{\sum_{i=0}^{M}b_i z^{-i}}{1-\sum_{i=1}^{N}a_i z^{-i}}$$

计 $M=N=2$ 则 $H(z)=\dfrac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}{1-a_1z^{-1}-a_2z^{-2}}$

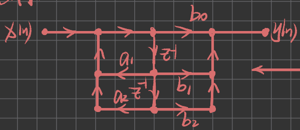
分析：

$$y(n)=b_0x(n)+b_1x(n-1)+b_2x(n-2)+a_1y(n-1)+a_2y(n-2)$$



$$H(z)=H_1(z)\cdot H_2(z)=H_2(z)\cdot H_1(z)$$

直接型结构：



级联型

$$H(z)=A\frac{\prod_{r=1}^{M}(1-c_rz^{-1})}{\prod_{r=1}^{N}(1-d_rz^{-1})}$$

↓分解

$$H(z)=H_1(z)H_2(z)\cdots H_k(z)$$

其中 $H_k(z)=\dfrac{\beta_{0j}+\beta_{1j}z^{-1}+\beta_{2j}z^{-2}}{1-\alpha_{1j}z^{-1}-\alpha_{2j}z^{-2}}$ 为一阶/二阶的子系统函数

$$\Rightarrow Y(z)=H(z)X(z)$$

并联型

$$H(z)=H_1(z)+H_2(z)+\cdots+H_k(z)$$

$H_k(z)=\dfrac{\beta_{0i}+\beta_{1i}z^{-1}}{1-\alpha_{1i}z^{-1}-\alpha_{2i}z^{-2}}$ 为一阶/二阶子系统函数

$$\Rightarrow Y(z)=H_1(z)X(z)+H_2(z)X(z)+\cdots+H_k(z)X(z)$$

子系统并联

第三讲 FIR系统网络结构

单位脉冲响应 $h(n)$ ：N

↓

$$H(z)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)z^{-n}$$

$$y(n)=\sum_{m=0}^{N-1}h(m)x(n-m)$$

直接型

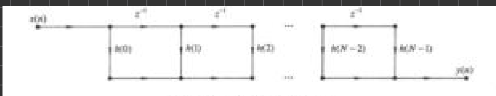


图 5.4.1 FIR 直接型网络结构

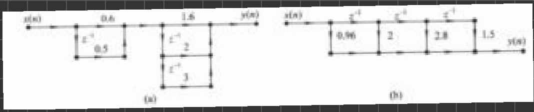
级联型

H(z) 因式分解 ⟶ 构成一阶/二阶因子的级联

$$H(z)=0.96+2z^{-1}+2.8z^{-2}+1.5z^{-3}$$

↓

$$H(z)=(0.6+0.5z^{-1})(1.6+2z^{-1}+3z^{-2})$$



第6章 无限脉冲响应数字滤波器的设计

第一讲 基本概念

1) 技术指标

频率响应函数: $H(e^{j\omega}) = \underbrace{|H(e^{j\omega})|}_{\text{幅频特性}} e^{j\varphi(\omega)} \longrightarrow$ 相频特性

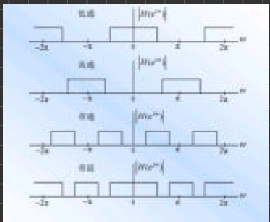


图 6.1.1 理想低通、高通、带通、带阻滤波器幅度特性

通带和阻带内允许的衰减一般用分贝数表示。通带内允许的最大衰减用α_p表示，阻带内允许的最小衰减用α_s表示：

$$\alpha_p = 20\lg\frac{|H(e^{j0})|}{|H(e^{j\omega_p})|}\,dB \qquad (6.1.3)$$

$$\alpha_s = 20\lg\frac{|H(e^{j0})|}{|H(e^{j\omega_s})|}\,dB \qquad (6.1.4)$$

如将$|H(e^{j0})|$归一化为1，(6.1.3)和(6.1.4)式则表示成：

$$\alpha_p = -20\lg|H(e^{j\omega_p})|\,dB \qquad (6.1.5)$$

$$\alpha_s = -20\lg|H(e^{j\omega_s})|\,dB \qquad (6.1.6)$$

幅度下降到0.707时，$\omega=\omega_c$，$\alpha_p=3dB$，称ω_c为3dB通带截止频率。

通带：$0<\omega<\omega_p$

阻带：$\omega_s<\omega<\infty$

过渡带：$\omega_p<\omega<\omega_s$

ω_c：截止频率

δ1：通带幅度误差容限

δ2：阻带幅度误差容限

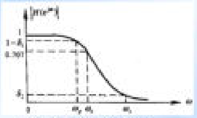


图 6.1.2 低通滤波器的技术要求

数字滤波器频带限于 $|\omega|<\pi$

第二讲 数字滤波器分析

运算:

$$e^{j\omega}+1 = 2\cos(\tfrac{\omega}{2})\, e^{j\frac{\omega}{2}}$$

分析:

$$\begin{aligned} e^{j\omega}+1 &= \cos\omega + j\sin\omega + 1 \\ &= 2\cos^2\tfrac{\omega}{2} - 1 + j\cdot 2\sin\tfrac{\omega}{2}\cos\tfrac{\omega}{2} + 1 \\ &= 2\cos\tfrac{\omega}{2}(\cos\tfrac{\omega}{2} + j\sin\tfrac{\omega}{2}) \\ &= 2\cos\tfrac{\omega}{2}\, e^{j\frac{\omega}{2}} \end{aligned}$$

$\Phi(\omega)=\frac{\omega}{2}$时，分析相频特性！

数字滤波器频带限 $|\omega|<\pi$

$$\begin{cases} -\pi<\omega<\pi \text{时}, & \Phi(\omega)=\frac{\omega}{2} \\ \pi<\omega<3\pi \text{时}, & \text{关于}\pi\text{奇对称} \Rightarrow \varphi(\omega) = -\varphi(2\pi-\omega) = -\frac{2\pi-\omega}{2} = \frac{\omega}{2}-\pi \\ 3\pi<\omega<5\pi \text{时}, & \text{关于}2\pi\text{奇对称} \Rightarrow \varphi(\omega) = -\varphi(4\pi-\omega) = -\frac{4\pi-\omega}{2} = \frac{\omega}{2}-2\pi \\ \vdots & \end{cases}$$

不断周期延拓

从H(z)可以看出，当零点数目>极点数目时，递推公式中必然出现输入的超前时刻值，从而导致实时不可实现性。

第三讲 脉冲响应不变法设计 IIR 数字滤波器

设计关键：模拟低通滤波器 $H_a(s) \longrightarrow$ 数字低通滤波器 $H(z)$

↓

Core Map: $H_a(s) \longrightarrow H(z)$

① 因果稳定条件：

- $H_a(s)$ 极点全部位于 s 平面的左半平面　模拟
- $H(z)$ 极点全部在单位圆内　数字

Map: $\sigma<0 \longrightarrow |z|<1$

② 频率响应特性不变　Map: $\sigma=0 \longrightarrow |z|=1$

☆

1> $H_a(s) \longrightarrow H(z)$

$$H_a(s)=\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i}{s-s_i}$$

(只有单阶极点)

↓

$$H(z)=\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i}{1-e^{s_iT}z^{-1}}$$

$H_a(s)$ 极点 s_i 映射到 z 平面的极点为 e^{s_iT}

→ Memorize:

$s_i \to e^{s_iT} \to z_i=e^{s_iT}$

↓

$$\frac{A_i}{1-z_iz^{-1}}=\frac{A_i}{1-e^{s_iT}z^{-1}}$$

2> s平面 $\longrightarrow$ z平面

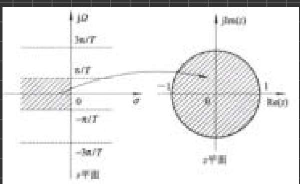
$$z=e^{sT}$$

设 $s=\sigma+j\Omega$，$z=re^{jw}$ ⇒ $re^{jw}=e^{(\sigma+j\Omega)T}=e^{\sigma T}e^{j\Omega T}$

$$\begin{cases} r=e^{\sigma T} \\ w=\Omega T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma=0,\ r=1 \to \text{s平面虚轴映射到z平面单位圆} \\ \sigma<0,\ r<1 \to \sigma<0 \to |z|<1 \\ \sigma>0,\ r>1 \end{cases}$$

又 $z=e^{sT}=e^{\sigma T}\cdot e^{j\Omega T}=e^{\sigma T}e^{j(\Omega+\frac{2\pi}{T}M)T}$　(e^{sT} 以2π为周期)

s平面jΩ轴周期变化 $\frac{2\pi}{T}$



$\Omega: -\frac{\pi}{T} \longrightarrow \frac{\pi}{T}$，$w: -\pi \to \pi$ ⇒ $w=\Omega T$

频谱混叠

频响特性：

$$H(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a\left(j\Omega - j\frac{2\pi}{T}k\right), \quad T_0 = \frac{2\pi}{T} \text{ 周期延拓}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a\left(j\frac{\omega - 2\pi k}{T}\right), \quad T_0 = 2\pi \text{ 周期延拓}$$

Ω: $\frac{(2k+1)\pi}{T}$, $k \in Z$　　ω: $\pm\pi$ 处频谱混叠

特性分析：

仅适合设计带限滤波器，低通，带通

优点：频率变换关系是线性的，$\omega = \Omega T$

时域特性逼近好

革新:

1. 时域离散信号: 时域离散, 函数值连续

$\downarrow$ 有限位二进制编码表示

幅度量化了的时域离散信号 $\longleftarrow$ 数字信号

2. 等间隔采样:

$$x(n) = x_a(t)\big|_{t=t_n} = x_a(t_n) = x_a(t_n)\big|_{t_n=nT} = x_a(nT)$$

✓ 当 $t=t_n$ 时有定义, 其他无定义

3.

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & n\neq 0 \end{cases}$$

单位脉冲/采样序列

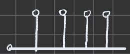
$$u(n) = \begin{cases} 1, & n\geq 0 \\ 0, & n<0 \end{cases}$$

单位阶跃序列

$\downarrow$

$$\begin{cases} \delta(n) = u(n) - u(n-1) & ① \\ u(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k) \end{cases}$$

$\downarrow$ $\delta(n)$ 不断右移累加



$$R_N(n) = \begin{cases} 1, & 0\leq n\leq N-1 \\ 0, & 其他\,n \end{cases}$$

$0\sim N-1$ 个 $\delta(n)$ 的和

$$R_N(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \delta(n-k)$$

其他变体: 基于定义推导

$\downarrow$

$$R_N(n) = u(n) - u(n-N) \quad ②$$

由①②分析:

N: 信号持续宽度

$N=1 \rightarrow \delta(n)$

实指数序列:

$x(n) = a^n u(n) \rightarrow$ ☆

正弦序列 $x(n)=\sin(wn)$ | $x(n)=A\sin(w_0 n+\varphi)$

$$\begin{cases} x_a(t)=\sin(\Omega t) \\ x(n)=x_a(t)\big|_{t=nT}=\underbrace{\sin(\Omega nT)=\sin(wn)} \end{cases}$$

$$\left.w=\Omega T=\frac{\Omega}{F_s}\right\}\rightarrow \text{归一化频率}$$

周期:

若 $\frac{2\pi}{w_0}$ = 无理数 → 非周期

若 $\underbrace{\frac{2\pi}{w_0}=\frac{P}{Q}}_{\text{约至最简}}$ $N=P$

4. 信号频谱分析

$x_a(t)=A_1\cos(2\pi f_1 t)+A_2\cos(2\pi f_2 t)$

① 采样频率 f_s 采样间隔 $T=\frac{1}{f_s}$

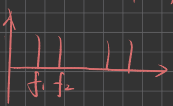
由 $x_a(t)\Rightarrow f_h=f_2$

时域采样定理: $f_s\geq 2f_c$，但 $f_c\neq f_h$

↓

$f_s>2f_h=2f_2$

$x(n)=x_a(t)\big|_{t=nT}=A_1\cos(2\pi f_1 nT)+A_2\cos(2\pi f_2 nT)$



最小的频率间隔:

$f_\delta=f_2-f_1$

谱分辨率 $f\leq f_\delta$

$$\left.\begin{aligned} T_0&=\frac{1}{f} \\ T&=\frac{1}{f_s} \end{aligned}\right\} N=\frac{T_0}{T}$$

5. 移位加权和

$\underbrace{x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)}$，$\delta(n-m)=\begin{cases}1, & n=m\\ 0, & n\neq m\end{cases}$

表示任意序列: → 通式表示 ☆

$x(m)$：权值

6.判定线性

$$y_1(n)=T[x_1(n)],\quad y_2(n)=T[x_2(n)]$$

$$\downarrow$$

☆ $$y(n)=T[ax_1(n)+bx_2(n)]=ay_1(n)+by_2(n)$$

7.判定时不变性

$$y(n)=T[x(n)]$$

$$\downarrow$$

$$y(n-n_0)=T[x(n-n_0)]$$

输入延时，输出也延时

Example: $y(n)=ax(n)+b$

$y(n-n_0)=ax(n-n_0)+b$ 变换 $n=n-n_0$

$T[x(n-n_0)]=ax(n-n_0)+b$ 替换 $x(n)=x(n-n_0)$ 信号

$$\downarrow$$

$$y(n-n_0)=T[x(n-n_0)]$$

8.判定因果性 ① 一般因果系统定义：n时刻输出只与n时刻以及n时刻以前的输入序列有关

② 线性时不变系统

单位脉冲响应 $h(n)=0,\ n<0$

稳定性：① 有界输入 → 有界输出

② $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|<\infty$ 绝对可和/收敛

9.输入输出描述法

① 线性常系数差分方程

$$y(n)=\sum_{i=0}^{M}b_i x(n-i)-\sum_{i=1}^{N}a_i y(n-i) \quad ①$$

$$\downarrow$$

$$\sum_{i=0}^{N}a_i y(n-i)=\sum_{i=0}^{M}b_i x(n-i),\quad a_0=1$$

阶数：$\max(i)-\min(i),\ i\in y(n-i)$

② 冲激响应 (单位取样响应)

线性时不变系统: $y(n)=h(n)*x(n)$

<1> 因果系统中, if $x(n)=\delta(n)$ 递推①式 $\rightarrow$ $h(n)$

<2> 已知 $h(n) \longrightarrow y(n)=h(n)*x(n) \rightarrow$ ①式

③ 频率响应

序列傅里叶变换

$$X(e^{jw})=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, e^{-jwn}$$

$$y(n)=h(n)*x(n) \longrightarrow Y(e^{jw})=H(e^{jw})\cdot X(e^{jw})$$

if $h(n)$ 冲激响应 $\longrightarrow$ $H(e^{jw})$ 为系统的频率响应

$$H(e^{jw})=\frac{Y(e^{jw})}{X(e^{jw})} \rightarrow T=2\pi$$

$$=|H(e^{jw})|\, e^{j\arg[H(e^{jw})]}$$

④ 系统函数

序列Z变换:

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, z^{-n}$$

$$h(n) \xrightarrow{Z} H(z)$$

$$y(n)=h(n)*x(n), \quad Y(z)=H(z)\cdot X(z)$$

$$\rightarrow H(z)=\frac{\sum_{i=0}^{M} b_i z^{-i}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}=\frac{A\prod_{i=1}^{M}(1-c_i z^{-1})}{\sum_{k=1}^{N}(1-d_k z^{-1})} \rightarrow \begin{array}{l}\text{零点: } z=c_i \\ \text{极点: } z=d_k\end{array}$$

$H(z)$ 与 $H(e^{jw})$ Relationship:

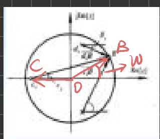
$$H(e^{jw})=H(z)\big|_{z=e^{jw}}$$

$$\begin{cases} e^{jw}=\cos w+j\sin w \rightarrow |e^{jw}|=1 \\ z=e^{\sigma+jw}=e^{\sigma}(\cos w+j\sin w) \rightarrow 0\le|z|<\infty \end{cases}$$

$$H(e^{jw})=H(z)\big|_{z=e^{jw}}=\frac{A\prod_{i=1}^{M}(e^{jw}-c_i)}{\sum_{k=1}^{N}(e^{jw}-d_k)}$$

$\overrightarrow{C_rB}=e^{jw}-C_r$ 零点矢量

$\overrightarrow{d_rB}=e^{jw}-d_k$ 极点矢量



分析: $\overrightarrow{OB}=\cos w+j\sin w=e^{jw}$ (单位圆上)

$\overrightarrow{OC}=C_r+j0=C_r$ (C_r为实数)

$\overrightarrow{C_rB}=\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=e^{jw}-C_r$

$$H(e^{j\omega}) = A\frac{\prod_{r=1}^{N} C_r B}{\prod_{r=1}^{N} d_r B} = |H(e^{j\omega})|e^{j\varphi(\omega)}$$

$$|H(e^{j\omega})| = A\frac{\prod_{r=1}^{N} C_r B}{\prod_{r=1}^{N} d_r B}$$ 零点矢量模之积 / 极点矢量模之积

$$\varphi(\omega) = \sum_{r=1}^{N}\alpha_r - \sum_{r=1}^{N}\beta_r$$ 零点相角之和 − 极点相角之和

零、极点对幅频特性的影响：

（1）原点处的零、极点对幅频无影响；

（2）零点使幅频产生谷值，单位圆上的零点使系统幅度为零； 零点矢量模最小

（3）极点使幅频产生峰值，单位圆上的极点使系统谐振，不稳定。 极点矢量模最小

因果最小相位系统：全部零、极点在单位圆内。当ω从0变到2π时，系统的相位变化为0； $\sum\alpha_r = \sum\beta_r = 2\pi$ → $\varphi(\omega)=0$

因果最大相位系统：零点在单位圆外，极点在单位圆内。当ω从0变到2π时，系统的相位变化为$-2\pi m_0$（m_0圆外零点数）； $\sum\alpha_r = 0,\ \sum\beta_r = 2\pi$ → $\varphi(\omega) = -2\pi m_0$

因果混合相位系统：零点在单位圆内外，极点在单位圆内。

因果性

10、由系统函数 H(z) 求差分方程，进而求冲激响应

$$H(z) = 1 - z^{-8}$$

$$Y(z) = (1-z^{-8})X(z) = X(z) - z^{-8}X(z)$$

作 z 反变换：$y(n) = x(n) - x(n-8)$

卷积定义 $y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m)$

$$h(n) = \begin{cases} 1, & n=0 \\ -1, & n=8 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

11. 时域采样定理

$$\hat{X}_a(j\Omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega - jk\Omega_s)$$

$$G(j\Omega) = \begin{cases} T, & |\Omega| < \frac{1}{2}\Omega_s \\ 0, & |\Omega| \ge \frac{1}{2}\Omega_s \end{cases} \quad (1.5.6)$$

$$Y_a(j\Omega) = FT[Y_a(t)] = \hat{X}_a(j\Omega)\cdot G(j\Omega)$$

$$Y_a(t) = F^{-1}T[Y_a(j\Omega)]$$

$$Y_a(t) = x_a(t), \Omega_c \le \frac{1}{2}\Omega_s$$ 满足采样定理

$$g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega_s/2}^{\Omega_s/2} Te^{j\Omega t}d\Omega = \frac{\sin(\Omega_s t/2)}{\Omega_s t/2}$$

因为$\Omega_s=2\pi f_s=2\pi/T$，因此g(t)也可以用下式表示：

$$g(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}$$

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)\frac{\sin(\pi(t-nT)/T)}{\pi(t-nT)/T}$$

类似卷积

Chapter 1 习题:

1. $\underset{\text{实序列}}{x(n)} \longrightarrow$ 分解
$$\begin{cases} x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x(-n)] \rightarrow \text{偶对称序列} \\ x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x(-n)] \rightarrow \text{奇对称序列} \end{cases} \rightarrow x(n) = x_e(n) + x_o(n)$$

2. $y(n) = x(n) + 2x(n-1) + 3x(n-2)$

$$y_1(n) = T[x_1(n)] = x_1(n) + 2x_1(n-1) + 3x_1(n-2)$$
$$y_2(n) = T[x_2(n)] = x_2(n) + 2x_2(n-1) + 3x_2(n-2)$$
$$\downarrow$$
$$y(n) = T[ax_1(n) + bx_2(n)] = ax_1(n) + bx_2(n) + 2ax_1(n-1) + 2bx_2(n-1) + 3ax_1(n-2) + 3bx_2(n-2)$$
$$= ay_1(n) + by_2(n)$$

$$y(n-n_0) = x(n-n_0) + 2x(n-1-n_0) + 3x(n-2-n_0)$$
$$T[x(n-n_0)] = x(n-n_0) + 2x(n-n_0-1) + 3x(n-n_0-2)$$
$$= y(n-n_0)$$

3. ① $y(n) = x(n^2)$ 分析

时变性:
$$y(n-n_0) = x[(n-n_0)^2]$$
$$T[x(n-n_0)] = x(n^2-n_0)$$
$$\neq y(n-n_0)$$

$$y_1(n) = T[x_1(n)] = x_1(n^2)$$
$$y_2(n) = T[x_2(n)] = x_2(n^2)$$
$$\downarrow$$
$$y(n) = T[ax_1(n) + bx_2(n)] = ax_1(n^2) + bx_2(n^2)$$
$$= ay_1(n) + by_2(n)$$

② $y(n) = x^2(n)$ 分析
$$y(n-n_0) = x^2(n-n_0)$$
$$T[x(n-n_0)] = x^2(n-n_0)$$
$$= y(n-n_0)$$

$$y_1(n) = T[x_1(n)] = x_1^2(n)$$
$$y_2(n) = T[x_2(n)] = x_2^2(n)$$
$$\downarrow$$
$$y(n) = T[ax_1(n) + bx_2(n)] = [ax_1(n) + bx_2(n)]^2$$
$$\neq ay_1(n) + by_2(n)$$

③ $y(n) = \sum_{m=0}^{n} x(m)$
$$y(n-n_0) = \sum_{m=0}^{n-n_0} x(m)$$ (变量替换 $n = n-n_0$)
$$T[x(n-n_0)] = \sum_{m=0}^{n} x(m-n_0)$$ (信号替换: $x(n) = x(n-n_0)$ 对每个 m $\downarrow$ $x(m) = x(m-n_0)$)
$$\neq y(n-n_0)$$

$$y_1(n) = T[x_1(n)] = \sum_{m=0}^{n} x_1(m)$$
$$y_2(n) = T[x_2(n)] = \sum_{m=0}^{n} x_2(m)$$
$$y(n) = T[ax_1(n) + bx_2(n)] = \sum_{m=0}^{n}[ax_1(m) + bx_2(m)] = \sum_{m=0}^{n} ax_1(m) + \sum_{m=0}^{n} bx_2(m)$$
$$= ay_1(n) + by_2(n)$$

④ $y(n) = x(n)\sin(\omega n)$
$$y(n-n_0) = x(n-n_0)\sin[\omega(n-n_0)]$$
$$T[x(n-n_0)] = x(n-n_0)\sin(\omega n)$$
$$\neq y(n-n_0)$$

$$y_1(n) = T[x_1(n)] = x_1(n)\sin(\omega n)$$
$$y_2(n) = T[x_2(n)] = x_2(n)\sin(\omega n)$$
$$y(n) = T[ax_1(n) + bx_2(n)]$$
$$= [ax_1(n) + bx_2(n)]\sin(\omega n)$$
$$= ax_1(n)\sin(\omega n) + bx_2(n)\sin(\omega n)$$
$$= ay_1(n) + by_2(n)$$

4. $\underbrace{y(n) = x(n) + x(n+1)}_{\text{与 } n+1 \text{ 时刻有关} \rightarrow \text{非因果}}$

base n ↗ $+1 \rightarrow$ 非因果
base n ↘ $-1 \rightarrow$ 因果

5. $y(n) = h(n) * x(n)$

列表法

					0						
$x(m)$			-1	0	0	1	0	2	0		
$h(m)$					2	1	0.5	0	0		
$h(-m-2)$	0.5	1	2								$y(-2) = -2$
$h(-m-1)$		0.5	1	2							$y(-1) = -1$
$h(-m)$			0.5	1	2						$y(0) = -0.5$
$h(1-m)$				0.5	1	2					$y(1) = 2$
$h(2-m)$					0.5	1	2				$y(2) = 1$
$h(3-m)$						0.5	1	2			$y(3) = 4.5$
$h(4-m)$							0.5	1	2		$y(4) = 2$
$h(5-m)$								0.5	1	2	$y(5) = 1$

6. $h(n) = \frac{3}{8} 0.5^n u(n) \longrightarrow y(n) = x(n) * h(n)$

$$= \frac{3}{8} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m \cdot 0.5^{n-m} u(n-m)$$

$$= \frac{3}{8} \sum_{m=0}^{n} x_m\, 0.5^{n-m} \qquad n<0,\ x_n = 0$$

卷积 → 差分方程 → 递推求 $y(n)$

递推差分方程求得 $y(n)$

7. $y(0) = x(0)$

$y(1) = a x(0) + x(1)$

$y(2) = a[a x(0) + x(1)] + x(2)$

$= a^2 x(0) + a x(1) + x(2)$

$y(n) = a^n x(0) + a^{n-1} x(1) + \cdots + x(n)$

$= \sum_{i=0}^{n} a^{n-i} x(i)$

时不变性 $y(n-n_0) = \sum_{i=0}^{n-n_0} a^{n-n_0-i} x(i)$

$T[x(n-n_0)] = \sum_{i=0}^{n} a^{n-i} x(i-n_0)$

令 $j = i - n_0$ 则

$T[x(n-n_0)] = \sum_{j=-n_0}^{n-n_0} a^{n-n_0-j} x(j)$

线性

$y_1(n) = \sum_{i=0}^{n} a^{n-i} x_1(i)$

$y_2(n) = \sum_{i=0}^{n} a^{n-i} x_2(i)$

$y(n) = T[b x_1(n) + c x_2(n)] = \sum_{i=0}^{n} a^{n-i} [b x_1(i) + c x_2(i)]$

$= b \sum_{i=0}^{n} a^{n-i} x_1(i) + c \sum_{i=0}^{n} a^{n-i} x_2(i)$

$= b y_1(n) + c y_2(n)$

2. 循环位移性质

若 $x(n) \longleftrightarrow X(k)$ 成立，则

$x(n-n_0) \longleftrightarrow X(k)W_N^{kn_0}$ 称为时间位移性 (1)

或 $x(n)W_N^{-nk_0} \longleftrightarrow X(k-k_0)$ 称为频率位移性 (2)

$\left|e^{j\frac{2\pi}{N}n_0k}\right| = 1$

(1)说明时域信号的加载时刻，对信号DFT的幅度不产生任何影响，只在频域引入一线性相移。

(2)说明用特定频率的余弦（或正弦）对信号进行调制，其结果是信号的频谱发生了位移（以调制频率为中心）。

8. Make a Summary of Equations:

DFT: $X(k) = DFT[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}$

IDFT: $x(n) = IDFT[X(k)] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}$

$x_1(n) * x_2(n) = X_1(k) \cdot X_2(k)$

$x_1(n) \cdot x_2(n) = \frac{1}{N}(X_1(k) \cdot X_2(k))$

循环卷积：

$$x_c(n) = \sum_{m=0}^{N_c-1} x_1(m)x_2(n-m) \qquad 0 \le n \le N_c - 1$$

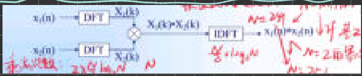
线性卷积：

$$x_l(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)x_2(n-m)$$

其中，循环卷积长度 $N_c = \max[N_1, N_2]$

线性卷积长度 $N_l = N_1 + N_2 - 1$ 显然，$N_c < N_l$

可以证明 $x_c(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_l(n + rN_c)$



FFT实现

Multiply: $2 \times \frac{N}{2}\log_2 N$ $\qquad \frac{N}{2}\log_2 N$

Add: $2 \times N\log_2 N$ $\qquad N\log_2 N$

FFT进行快速卷积进行信号处理

① $x(n) = x_1(n) + j x_2(n)$

$X(k) = X_{ep}(k) + X_{op}(k)$

$X_1(k) = \frac{1}{2}[X(k) + X^*(N-k)]$

$X_2(k) = -\frac{j}{2}[X(k) - X^*(N-k)]$

$x(n) \longrightarrow X(k)$ 一次N点FFT

② $X_1(k) \cdot X_2(k)$ N次频域复数乘

③ $x_1(n) * x_2(n) = IDFT[X_1(k) \cdot X_2(k)]$

一次N点IDFT $\longrightarrow$ FFT实现

$\longrightarrow T = 2 \times \left(\frac{N}{2}\log_2 N + N\log_2 N\right) + N \cdot T_{mul}$

T_{mul}: 单次复数乘的时间

9.

因此，对两个有限长序列计算线性卷积的方法为：

i. 确定循环卷积的计算长度，即

$$N \ge N_1 + N_2 - 1$$

其中，N_1 与 N_2 分别为序列 $x_1(n)$ 与 $x_2(n)$ 长度(即周期)；

ii. 将 $x_1(n)$ 与 $x_2(n)$ 分别补零至长度为N；

iii. 对 $x_1(n)$ 与 $x_2(n)$ 分别求出N点的DFT为 $X_1(k)$ 与 $X_2(k)$；

iv. 计算 $X_1(k) \cdot X_2(k)$；

v. 求 $X_1(k) \cdot X_2(k)$ 的N点IDFT为 $x_1(n) * x_2(n)$，该结果即为线性卷积。

10. 计算线性卷积：

①

例：已知 $h = [1, 2, -1, 1]$，

$x = [1, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 1]$，

求 $y = h * x$。

解：

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
h_0	h_0x_0	h_0x_1	h_0x_2	h_0x_3	h_0x_4
h_1	h_1x_0	h_1x_1	h_1x_2	h_1x_3	h_1x_4
h_2	h_2x_0	h_2x_1	h_2x_2	h_2x_3	h_2x_4
h_3	h_3x_0	h_3x_1	h_3x_2	h_3x_3	h_3x_4

线性卷积表

h\x	1	1	2	1	2	2	1	1
1	1	1	2	1	2	2	1	1
2	2	2	4	2	4	4	2	2
-1	-1	-1	-2	-1	-2	-2	-1	-1
1	1	1	2	1	2	2	1	1

$y = [1, 3, 3, 5, 3, 7, 4, 3, 3, 0, 1]$

$L_y = 8 + 4 - 1 = 11$

②

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	0	0	0
h_0	h_0x_0	h_0x_1	h_0x_2	h_0x_3	h_0x_4	0	0	0
h_1	0	h_1x_0	h_1x_1	h_1x_2	h_1x_3	h_1x_4	0	0
h_2	0	0	h_2x_0	h_2x_1	h_2x_2	h_2x_3	h_2x_4	0
h_3	0	0	0	h_3x_0	h_3x_1	h_3x_2	h_3x_3	h_3x_4
	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7

h\x	1	1	2	1	2	2	1	1	0	0	0
1	1	1	2	1	2	2	1	1	0	0	0
2	0	2	2	4	2	4	4	2	2	0	0
-1	0	0	-1	-1	-2	-1	-2	-2	-1	-1	0
1	0	0	0	1	1	2	1	2	2	1	1
y(n)	1	3	3	5	3	7	4	3	3	0	1

11. FFT进行频谱分析:

$$f_s = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{NT}, \quad T = \frac{1}{f_s}$$

f_s：频谱分辨率；T_0：时域采样窗口宽度

$$\Omega_s = \frac{2\pi}{NT}$$

$$w_s = \frac{2\pi}{N}$$

$$f_s = \frac{1}{NT} \geq \frac{2f_h}{N}$$

时域采样定理: $f_s \geq 2f_c = 2f_h$

又 $f_s = \frac{1}{NT} = \frac{f_s}{N}$ 则

$$Nf_s \geq 2f_h$$

即 $f_s \geq \frac{2f_h}{N} \longrightarrow N \geq \frac{2f_h}{f_s}$ 最小采样点数

例：用频谱分析仪对模拟信号进行谱分析，要求谱分辨率$f_o \leq 5Hz$，信号最高频率$f_h = 2.5kHz$，试确定最小记录时间T_{0min}，最低采样频率f_{smin}，最少采样点数N_{min}。如果f_h不变，要求谱分辨率提高一倍，最少采样点数和最小记录时间是多少？ $f_0 \leq 5Hz$

解：　$T_o = 1/f_o \geq 1/5 = 0.2(s)$，　$T_{0min} = 0.2s$

$f_s \geq 2f_h = 2 \times 2.5 = 5(kHz)$，　$f_{smin} = 5kHz$

$N \geq 2f_h/f_o = 2 \times 2.5 \times 10^3/5 = 10^3$，　$N_{min} = 10^3$

频率分辨率提高一倍，即$f_o = 5Hz/2$，则

$N_{min} = 2f_h/f_o = 5 \times 10^3/2.5 = 2 \times 10^3$

$T_{0min} = 1/f_o = 1/2.5 = 0.4s$

12. $x(n) = 1$

✓ $$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1 - e^{-j\frac{2\pi}{N}kN}}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{N}k}} = \begin{cases} N, & k = 0 \\ 0, & k = 1, 2, \cdots N-1 \end{cases}$$

$x(n) = \delta(n)$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} \delta(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = 1, \quad k = 0, 1, \cdots N-1$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \delta(n-n_0) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \underline{e^{-j\frac{2\pi}{N}n_0k} = W_N^{kn_0}}$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} R_m(n) W_N^{nk} \quad 0 < m < N$$

$$= \sum_{n=0}^{m-1} W_N^{nk} \longrightarrow = \frac{1 - W_N^{km}}{1 - W_N^{k}}$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}mn} W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}mn} e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}n(m-k)} = \begin{cases} N, & k = m \\ 0, & k \neq m \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}n} = 0$$

Useful Conclusions:

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}n} = 0} \longrightarrow \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1}\left(e^{-j\frac{2\pi}{N}n}\right)^k = 0} \Longrightarrow \begin{cases} \text{if } \frac{k}{N}=p,\ p\in \mathbb{Z} \\ \quad \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi np} = 0 \\ \text{if } \frac{k}{N}=p,\ p\notin \mathbb{Z} \\ \quad \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi k}{N}n} = 0 \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{kn} = 0$$

N不能整除k

$$(0<m<N)$$

$$\sum_{n=0}^{N-1}\cos\left(\frac{2\pi}{N}mn\right)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1}\left[e^{j\frac{2\pi}{N}mn}+e^{-j\frac{2\pi}{N}mn}\right]e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1}\left[e^{j\frac{2\pi}{N}n(m-k)}+e^{-j\frac{2\pi}{N}n(m+k)}\right]$$

$$= \begin{cases} \frac{N}{2}, & k=m,\ k=N-m \\ 0, & k\neq m,\ k\neq N-m \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\omega_0 n}R_N(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\omega_0 n}e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{jn\left(\omega_0-\frac{2\pi}{N}k\right)}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} nR_N(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} ne^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$x((n+m))_N = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(n+m+iN)$$

$$\Big\downarrow m=-1$$

$$x((n-1))_N = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(n-1+iN)$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-kn} = \frac{1}{N}X(m)W_N^{-mn} + \frac{1}{N}X(N-m)W_N^{-(N-m)n}$$

$$= \frac{1}{N}\cdot\frac{N}{2}e^{j\theta}W_N^{-mn} + \frac{1}{N}\cdot\frac{N}{2}e^{-j\theta}W_N^{-(N-m)n}$$

$$= \frac{1}{2}e^{j\theta}e^{j\frac{2\pi}{N}mn} + \frac{1}{2}e^{-j\theta}e^{j\frac{2\pi}{N}(N-m)n}$$

$$= \frac{1}{2}e^{j\left(\theta+\frac{2\pi}{N}mn\right)} + \frac{1}{2}e^{-j\left(\theta+\frac{2\pi}{N}mn\right)}$$

$$= \cos\left(\theta+\frac{2\pi}{N}mn\right)$$

1 1 1 1 1 0 0 0 0 0

1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	-3
1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	-1
1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	3
1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	5
0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	-1	3
0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	-1	1
0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	-1	-1
0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	-1	-3
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	-1	-5

4. 证明:

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn} \quad 即\ X(n)=\sum_{m=0}^{N-1}x(m)W_N^{mn}$$

$$\begin{aligned}DFT[X(n)] &= \sum_{n=0}^{N-1}X(n)W_N^{kn}\\ &= \sum_{n=0}^{N-1}\left[\sum_{m=0}^{N-1}x(m)W_N^{mn}\right]W_N^{kn}\\ &= \sum_{m=0}^{N-1}x(m)\sum_{n=0}^{N-1}W_N^{n(k+m)}\\ &= \sum_{m=0}^{N-1}x(m)\underbrace{\sum_{n=0}^{N-1}e^{-j\frac{2\pi}{N}n(k+m)}} = N\,x(N-k)\end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1}W_N^{n(k+m)}=\begin{cases}N, & m=N-k,\\ 0, & m\neq N-k,\end{cases}\quad 0\le m\le N-1$$

分析: $0\le k\le N-1,\quad 0\le m\le N-1$

$$W_N^{n(k+m)}=e^{-j\frac{2\pi}{N}n(k+m)}$$

if $k+m=pN$ $(p\in Z)$, then $W_N^{n(k+m)}=e^{-j2\pi np}=1$

$0\le k+m\le 2N-2$

则 $p=1$

$\Rightarrow m=N-k$

if $k+m\neq pN=N$, 则 $k+m=q$

then $W_N^{n(k+m)}=e^{-j\frac{2\pi}{N}nq}=W_N^{nq}$

$$\sum_{n=0}^{N-1}W_N^{nq}=0$$

5.

$$h(n)=\sum_{n=0}^{mN-1}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\delta(n+iN)$$

$$x((n))_N=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(n+mN)$$

$$H(k)=\sum_{n=0}^{mN-1}h(n)W_N^{kn}$$

$$= \sum_{n=0}^{mN-1}$$

$$H(k) = DFT[h(n)]_{mN} = \sum_{n=0}^{mN-1} h(n) W_{mN}^{kn}$$
$$= \sum_{n=0}^{mN-1} x((n))_N R_{mN}(n) W_{mN}^{kn}$$
$$= \sum_{n=0}^{mN-1} x((n))_N W_{mN}^{kn}$$
$$= \sum_{n=0}^{mN-1} \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(n+iN) W_{mN}^{kn}$$

3.6 $H(k) = DFT[h(n)]$, $0 \le k \le mN-1$

令 $n = n' + lN$, $l = 0, 1, \cdots, m-1$, $n' = 0, 1, \cdots, N-1$

对 $0 \le k \le mN-1$ 的分解

$0 \le n' \le N-1$

$0 \le lN \le (m-1)N$

$\downarrow$

$0 \le n' + lN \le mN-1$

$$H(k) = \sum_{n=0}^{mN-1} x((n))_N R_{mN}(n) W_{mN}^{kn}$$
$$= \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{n'=0}^{N-1} x((n'+lN))_N W_{mN}^{k(n'+lN)}$$
$$= \sum_{l=0}^{m-1} \left[\sum_{n'=0}^{N-1} x(n') W_{mN}^{kn'} \right] W_{mN}^{klN}$$

$x((n'+lN))_N$ 周期延拓 $\downarrow$ 取值等于主值区间

$$= \sum_{l=0}^{m-1} \left[\sum_{n'=0}^{N-1} x(n') W_N^{\frac{k}{m}n'} \right] W_{mN}^{klN}$$
$$= X\left(\frac{k}{m}\right) \sum_{l=0}^{m-1} W_m^{kl}$$

$$\sum_{l=0}^{m-1} W_m^{kl} = \sum_{l=0}^{m-1} e^{-j\frac{2\pi}{m}lk} = \begin{cases} m, & \frac{k}{m} = p,\ p \in Z \\ 0, & \frac{k}{m} = p,\ p \notin Z \end{cases}$$

$$H(k) = \begin{cases} mX\left(\frac{k}{m}\right), & \frac{k}{m} \in Z \\ 0, & \frac{k}{m} \notin Z \end{cases}$$

3.9 解:

$$Y(k) = \sum_{n=0}^{mN-1} y(n) W_{mN}^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_{mN}^{kn}$$
$$= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N} n \frac{k}{m}}$$
$$= \underbrace{X\left(\frac{k}{m}\right) \quad 对\ \frac{k}{m} \in Z}_{Y(k)}, \quad 0 \le k \le mN-1$$

3.12 解:

$$F(k) = F_{ep}(k) + F_{op}(k)$$

$$X(k) = \frac{1}{2}\left[F(k) + F^*(N-k)\right]$$
$$Y(k) = \frac{1}{2j}\left[F(k) - F^*(N-k)\right]$$

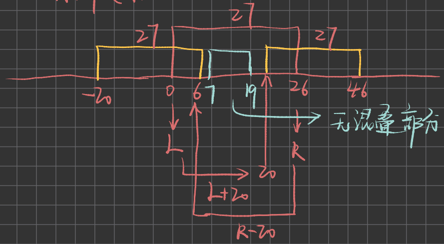
3.13 解: $IDFT[X(k)]_N = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} =$

3.14 解: $f_1(n) = x(n) * y(n)$, $N_1 = 27$

$\downarrow$

$f(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_1(n+mN) R_N(m)$, $N = 20$

周期延拓



3.15 解: $X(0)$ $X(1)$ $X(2)$ $X(3)$ $X(4)$

$\downarrow$ $x(n)$为实序列

$X(k) = X^*(N-k)$

$x(n)$ 偶对称 → $X(k) = X(N-k)$

$x(n)$ 奇对称 → $X(k) = -X(N-k)$

$X(5) = X^*(8-5) = X^*(3) = 0.125 + j0.0518$

$X(6) = X^*(2) = 0$

$X(7) = X^*(1) = 0.125 + j0.3018$

$y(n) = x((n+m))_N R_N(n)$

$\downarrow$

$Y(k) = DFT[y(n)]_N = W_N^{-km} X(k)$

$$X_2(k) = \sum_{n=0}^{7} x(n) e^{j\frac{2\pi}{8}n} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{8}kn}$$

$$= \sum_{n=0}^{7} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{8}n(k-1)}$$

$$= \underbrace{\sum_{n=0}^{7} x(n) W_8^{(k-1)n}}$$

$\downarrow$

$DFT[x(n) W_8^{-n}]$

$$= \underbrace{\sum_{n=0}^{7} x(n) W_8^{-n} W_8^{kn}}$$

$\downarrow$

$X((k-1))_8 R_8(k)$

3.15 解: $X(k)=DFT[x(n)]_N$

① $\underline{x_1(n)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(n+5+8m)R_8(n)}$,

$= x((n+5))_N R_N(n)$, $N=8$ 循环移位序列

1> Conclusion: $X_1(k)=W_N^{-5k}X(k)$

2> $X_1(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x((n+5))_N R_N(n) W_N^{kn}$

$=\sum_{n=0}^{N-1} x((n+5))_N W_N^{kn}$

令 $n'=n+5$, 则,

$X_1(k)=\sum_{n'=5}^{N+4} x((n'))_N W_N^{k(n'-5)}$

$=W_N^{-5k}\sum_{n'=0}^{N-1} x(n')_N W_N^{kn'}$

$=W_N^{-5k}X(k)$

② $x_2(n)=x(n)e^{j\frac{\pi n}{4}}$

$x_2(n)=x(n)e^{j\frac{2\pi n}{8}}=\underline{x(n)W_N^{-n}}$

1> 频域循环移位定理 　　正逆向运用

↓

$Y(k)=X((k-1)_N)R_N(k)$

3.16 解: $x_1(n)=x((n+3))_N R_N(n)$ 　　$x_2(n)=x((n-2))_N R_N(n)$

↓ 　　↓

$X_1(k)=W_N^{-3k}X(k)$ 　　$X_1(k)=W_N^{2k}X(k)$

3.17 解:

$Y(k)=DFT[y(n)]_M=\sum_{n=0}^{M-1} x((n))_M R_M(n) W_M^{kn}$

$=\sum_{n=0}^{M-1} x((n))_M W_M^{kn}$

$X(e^{j\omega})=FT[x(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$

3.18 解: $Y(k)=X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{M}k}$

总: $x(n) \leftrightarrow FT[x(n)]=X(e^{j\omega}) \xrightarrow[\text{采样}]{\text{频域}} Y(k)=X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$

↓

$y(n)=IDFT[Y(k)]_N$

$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n+mN)R_N(n)$

频域采样定理

其中 $x(n)$: M → $\left\{\begin{array}{ll} N\ge M & \text{无混叠} \\ N<M & \text{有混叠}\end{array}\right\}$ $y(n)$ 恢复 $x(n)$

3.19 谱分析:

$$T_{pmin} = \frac{1}{F} \geq \frac{1}{50} s = 0.02s$$

$$f_s \geq 2f_h = 2kHz \Rightarrow T_{max} = \frac{1}{f_s} = \frac{1}{2k} = 5\times10^{-4}s$$

$$N = \frac{T_p}{T} \Rightarrow N_{min} = \frac{T_{pmin}}{T_{max}} = \frac{0.02}{5\times10^{-4}} = 40$$

$$F = 25Hz, \Rightarrow T_{pmin} = 0.04s$$

$$N = \frac{T_{pmin}}{T_{max}} = 80$$

3.20 解: 信号调频

载波频率: $f_c = 1kHz$ 调制频率 $f_m = 100Hz$

↓

基波

→ 调制信号: $f_c - f_m$, f_c, $f_c + f_m$

$$f_s \leq f_m = 100Hz$$

$$T_{pmin} = \frac{1}{f_s} = \frac{1}{100} = 10\,ms$$

$$f_{smin} = 2f_c + 2f_m = 2.2\,kHz$$

$$N_{min} = \frac{T_{pmin}}{T_{max}}$$

Make A Summary For Chapter 3

① 循环卷积的矩阵计算

☆ ② 时域、频域循环移位定理

☆ ③ DFT 的共轭对称性

④ 循环卷积与线性卷积之间的关系

⑤ 频域采样定理

☆ ⑥ 频谱分析

⑦ 重叠相加法过程

4.3 解: $x(n)$, $y(n)$ 实序列 $\longrightarrow$ $X(k)$, $Y(k)$ 共轭对称

$$Y(k) = Y^*(N-k)$$

则 $$jY(k) = jY^*(N-k)$$
$$= -j^* Y^*(N-k)$$
$$= -[jY(N-k)]^*$$

令 $F(k) = X(k) + jY(k) = F_{ep}(k) + F_{op}(k)$

$$f(n) = IFFT[F(k)] = Re[f(n)] + jIm[f(n)]$$

$$Re[f(n)] = IDFT[F_{ep}(k)] = IDFT[X(k)] = x(n)$$
$$jIm[f(n)] = IDFT[F_{op}(k)] = IDFT[jY(k)] = jy(n)$$

即 $$x(n) = \frac{1}{2}[f(n) + f^*(n)]$$
$$y(n) = \frac{1}{2j}[f(n) - f^*(n)]$$

4.4 DIT-FFT

$$\begin{cases} x_1(n) = x(2n), & n = 0, 1, \dots, N-1 \\ x_2(n) = x(2n+1), & n = 0, 1, \dots, N-1 \end{cases}$$

① $y(n) = x_1(n) + jx_2(n)$ 时域

$$Y(k) = X_{ep}(k) + X_{op}(k) = DFT[y(n)]$$
$$X_1(k) = DFT[x_1(n)] = X_{ep}(k) = \frac{1}{2}[Y(k) + Y^*(N-k)]$$
$$jX_2(k) = DFT[x_2(n)] = X_{op}(k) = \frac{1}{2}[Y(k) - Y^*(N-k)]$$

$$X(k) = X_1(k) + W_{2N}^k X_2(k)$$
$$X(k+N) = X_1(k) - W_{2N}^k X_2(k)$$
$k = 0, 1, \dots, N-1$

② 目前 $X(k)$ 2N点

$x(n) = IDFT[X(k)]$, $n = 0, 1, \dots, 2N-1$

$X(k)$ 分组, 利用共轭对称性 $\longrightarrow$ N点IDFT

$$DIT-FFT \begin{cases} x_1(n) = x(2n) \\ x_2(n) = x(2n+1) \end{cases}, n = 0, 1, \dots, N-1 \Rightarrow \begin{cases} X_1(k) = DFT[x_1(n)] \\ X_2(k) = DFT[x_2(n)] \end{cases}, k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X(k) = X_1(k) + W_{2N}^k X_2(k) \\ X(k+N) = X_1(k) - W_{2N}^k X_2(k) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1(k) = \frac{1}{2}[X(k) + X(k+N)] \\ X_2(k) = \frac{1}{2}[X(k) - X(k+N)] W_{2N}^{-k} \end{cases}$$

Summarize:

① 实部与虚部

$$x(n) = Re[x(n)] + jIm[x(n)]$$

$$Re[x(n)] = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(n)]$$
$$Im[x(n)] = \frac{1}{2j}[x(n) - x^*(n)]$$

② 共轭对称

$$x(n) = x_{ep}(n) + x_{op}(n)$$

$$x_{ep}(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(N-n)]$$
$$x_{op}(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(N-n)]$$

③ $X(k)$ 共轭对称

if $x(n)$ 实序列

then $X(k)$ 共轭对称

$jX(k)$ 共轭反对称

$$X(k) = X^*(N-k)$$
$$jX(k) = jX^*(N-k)$$
$$= -j^* X^*(N-k)$$
$$= -[jX(N-k)]^*$$

又 $x(n)$ 实序列, then $X(k)$ 共轭对称 $\Rightarrow X_1(k), X_2(k)$ 共轭对称

② $Y(k) = X_1(k) + jX_2(k) = Y_{ep}(k) + Y_{op}(k)$ 频域

$y(n) = IFFT[Y(k)] = Re[y(n)] + j\,Im[y(n)]$ 由结论推出

$\downarrow$

$Re[y(n)] = \frac{1}{2}[y(n) + y^*(n)] = IDFT[Y_{ep}(k)] = x_1(n)$

$jIm[y(n)] = \frac{1}{2}[y(n) - y^*(n)] = IDFT[Y_{op}(k)] = jx_2(n)$

$\downarrow$

$$\begin{cases} x_1(n) = \frac{1}{2}[y(n) + y^*(n)] & x(n) \text{ 的偶序列} \\ x_2(n) = -\frac{j}{2}[y(n) - y^*(n)] & x(n) \text{ 的奇序列} \end{cases}$$

$\downarrow$

$$x(n) = \begin{cases} x_1(\frac{n}{2}) = \frac{1}{2}[y(\frac{n}{2}) + y^*(\frac{n}{2})], & n = 2p, \\ x_2(\frac{n-1}{2}) = -\frac{j}{2}[y(\frac{n-1}{2}) - y^*(\frac{n-1}{2})], & n = 2p+1, \end{cases} \quad 0 \le p \le N-1$$

Make A Summary For Chapter 4

① DIT-FFT, DIF-FFT

② 基2FFT 的时域、频域公式

③ 基2FFT 与共轭对称性结合求 DFT, IDFT

1. IIR 系统函数

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{M} b_i z^{-i}}{1 - \sum_{i=0}^{N} a_i z^{-i}}$$

FIR

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n}$$

2. FIR 滤波器

$$h(n) = \begin{cases} \frac{1}{10}, & n = 0 \sim 9 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

① 非递归形式 —— 卷积

$$y(n) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(i) x(n-i) = \frac{1}{10} \sum_{i=0}^{9} x(n-i)$$

② 递归形式 —— 系统函数

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n} = \frac{1}{10} \sum_{n=0}^{9} z^{-n}$$

$$= \frac{1}{10} \frac{1 - z^{-10}}{1 - z^{-1}}$$

$$= \frac{Y(z)}{X(z)}$$

即 $Y(z) - Y(z) z^{-1} = \frac{1}{10}[X(z) - X(z) z^{-10}]$

$\Rightarrow y(n) = y(n-1) + \frac{1}{10}[x(n) - x(n-10)]$

$w=2\pi f$

3. 双线性变换法

单值映射关系

$$S=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

$$z=\frac{\frac{2}{T}+s}{\frac{2}{T}-s}$$

w与Ω之间 非线性关系

缺点：(1)连续系统的频率响应必须分段为常数，以补偿模拟频率和数字频率刻度间的非线性影响；

(2)经双线性变换后的数字滤波器没有保持模拟滤波器的冲激响应和相位响应。 Map: $H_a(s) \to H(z)$

4. FIR的线性相位

① 第一类线性相位

$$\begin{cases}\theta(w)=-w\tau, & \tau=\frac{N-1}{2}\\ h(n)=h(N-1-n), & 0\le n\le N-1\end{cases}$$

$$H_g(w)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\cos\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)w\right]$$

$\frac{N-1}{2}$偶对称　$\frac{N-1}{2}$偶对称

<1> N=奇数

令m=(N-1)/2-n,则有

$$H_g(\omega)=h\left(\frac{N-1}{2}\right)+\sum_{m=1}^{(N-1)/2}2h\left(\frac{N-1}{2}-m\right)\cos\omega m$$

$$H_g(\omega)=\sum_{n=0}^{(N-1)/2}a(n)\cos\omega n \tag{7.1.13}$$

式中

$$\begin{cases}a(0)=h\left(\frac{N-1}{2}\right)\\ a(n)=2h\left(\frac{N-1}{2}-n\right), n=1,2,3,\cdots,\frac{N-1}{2}\end{cases} \tag{7.1.14}$$

由于(7.1.13)式中cos(ωn)项对ω=0,π,2π皆为偶对称，因此幅度特性的特点是对ω=0,π,2π偶对称。

<2> N=偶数

$$H_g(w)=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}2h(n)\cos\left[w\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\right]$$

令m=N/2-n,则有

$$H_g(\omega)=\sum_{m=1}^{N/2}2h\left(\frac{N}{2}-m\right)\cos\left[\omega\left(m-\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$H_g(\omega)=\sum_{n=1}^{N/2}b(n)\cos\left[\omega\left(n-\frac{1}{2}\right)\right] \tag{7.1.15}$$

$$b(n)=2h\left(\frac{N}{2}-n\right), n=1,2,\cdots,\frac{N}{2} \tag{7.1.16}$$

幅度特性的特点是对ω=π奇对称，且ω=π处零点使$H_g(\pi)=0$。

$h(w)=\cos[w(n-\frac{1}{2})]$

$h(2\pi-w)=\cos[(2\pi-w)(n-\frac{1}{2})]$

$=\cos(2\pi n-\pi-wn+\frac{w}{2})$

$=-\cos[w(\frac{1}{2}-n)]$

$=-\cos[w(n-\frac{1}{2})]$

$=-h(w)$

② 第二类线性相位

$$H_g(w)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\sin\left[w\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\right]$$

<1> N为奇数

令m=(N-1)/2-n，则有

$$H_g(\omega)=\sum_{n=1}^{(N-1)/2}c(n)\sin\omega n \tag{7.1.17}$$

$$c(n)=2h\left(\frac{N-1}{2}-n\right), n=1,2,\cdots,\frac{N-1}{2} \tag{7.1.18}$$

幅度特性$H_g(\omega)$在ω=0,π,2π处为零，即z=±1处是零点，且$H_g(\omega)$对ω=0,π,2π呈奇对称。

$n=\frac{N-1}{2}$时，$\sin[w(\frac{N-1}{2}-n)]=0$

省去中间点

<2> N为偶数

令m=N/2-n,则有

$$H_g(\omega)=\sum_{m=0}^{N/2} 2h(\frac{N}{2}-m)\sin[\omega(m-\frac{1}{2})]$$

$$H_g(\omega)=\sum_{n=1}^{N/2} d(n)\sin[\omega(n-\frac{1}{2})] \quad (7.1.19)$$

$$d(n)=2h(\frac{N}{2}-n), n=1,2,3\cdots,\frac{N}{2} \quad (7.1.20)$$

幅度特性$H_g(\omega)$在ω=0，2π处为零，即z=1处是零点，且$H_g(\omega)$对ω=0，2π呈奇对称，对$\omega=\pi$呈偶对称。

零点必须是互为倒数的共轭对，确定其一，另外3(或1)个随之确定。

$[z_i, \frac{1}{z_i}, z_i^*, \frac{1}{z_i^*}]$

4. 线性相位FIR滤波器网络结构

设N为偶数，则有

$$H(z)=\sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n)z^{-n}+\sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} h(n)z^{-n}$$

令m=N-n-1,则有

$$H(z)=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n)z^{-n}+\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} h(N-m-1)z^{-(N-m-1)}$$

$$h(n)=\pm h(N-n-1)$$

①
$$H(z)=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n)[z^{-n}\pm z^{-(N-n-1)}] \quad (7.1.22)$$

如果N为奇数，则将中间项h[(N-1)/2]单独列出。

②
$$H(z)=\sum_{n=0}^{(\frac{N-1}{2})-1} h(n)[z^{-n}\pm z^{-(N-n-1)}]+h(\frac{N-1}{2})z^{-\frac{N-1}{2}} \quad (7.1.23)$$

$h(n)=h(N-1-n)$

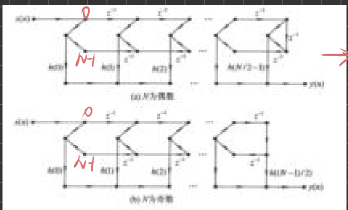


图 5.5.1 第一类线性相位网络结构流图

N为偶数，N-1为奇数

$\frac{N}{2}-1$ 对称部分 + 侧边延迟

N为奇数，$\frac{N-1}{2}$ 对称部分

且 $h(\frac{N-1}{2})$ 单独列出

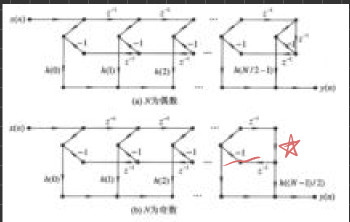


图 5.5.2 第二类线性相位网络结构流图

由于零点对系统稳定性没有影响，所以FIR滤波器总是稳定的，又由于h(n)全部定义在正时间轴上，所以FIR滤波器也总是因果的。

窗函数法设计FIR滤波器的步骤：

(1) $H_d(e^{j\omega})\rightarrow h_d(n)$

如果给出待求滤波器的频响为$H_d(e^{j\omega})$，则

$$h_d(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \quad (7.2.17)$$

或用$H_d(e^{j\omega})$的M个采样点计算

$$h_M(n)=\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} H_d(e^{j\frac{2\pi}{M}k})e^{j\frac{2\pi}{M}kn} \quad (7.2.18)$$

根据频率采样定理，$h_M(n)$与$h_d(n)$应满足如下关系：

$$h_M(n)=\sum_{r=-\infty}^{\infty} h_d(n+rM)$$

5. 频率采样法

1. 设计思想

$$H_d(e^{j\omega}) \xrightarrow{\omega=\frac{2\pi}{N}k} H_d(k) \xrightarrow{IDFT} h(n) \xrightarrow{ZT} H(z)$$

$$H(z) = \frac{1-z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H_d(k)}{1-W_N^{-k} z^{-1}}$$

$$= \frac{1}{N} H_F(z) H_I(z)$$

$$H(z) = \frac{1}{N} H_c(z) \sum_{k=0}^{N-1} H_k(z)$$

式中，$H_c(z) = 1 - z^{-N}$

$$H_k(z) = \frac{H(k)}{1-W_N^{-k} z^{-1}}$$

$H_c(z)$是FIR滤波器，称为梳状滤波器(参考第八章)。其零点为

$$z_k = e^{j\frac{2\pi}{N}k} = W_N^{-k}, k = 0,1,2\cdots,N-1$$

$H_k(z)$是单极点IIR滤波器，称为谐振器，谐振频率为

$$\omega_k = \frac{2\pi}{N}k,\quad (\text{极点} z_k = W_N^{-k} = e^{j\frac{2\pi}{N}k})$$

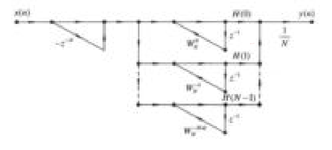


图 5.6.1　FIR 滤波器频率采样结构

(3) 频率采样法设计线性相位滤波器的条件

将$\omega=\omega_k$代入(7.3.4)-(7.3.7)式中，并写成k的函数：

$$H_d(k) = H_g(k)e^{j\theta(k)} \qquad (7.3.8)$$

$$\theta(k) = -\frac{N-1}{2}\frac{2\pi}{N}k = -\frac{N-1}{N}\pi k \qquad (7.3.9)$$

$$H_g(k) = H_g(N-k), N = \text{奇数} \qquad (7.3.10)$$

$$H_g(k) = -H_g(N-k), N = \text{偶数} \qquad (7.3.11)$$

3.3.2.5 IIR和FIR数字滤波器的比较

从性能看，IIR滤波器传输函数的极点可位于单位圆内的任何地方，因此可用较低的阶数获得高的选择性，所用的存贮单元少，所以经济且效率高。但是这个高效率是以相位的非线性为代价的。

FIR滤波器可得到严格的线性相位特性，但由于极点固定在原点，必须用较高的阶数获得高的选择性，成本高，信号延迟大。

IIR滤波器设计要求频率特性为分段常数，而FIR滤波器设计对频率特性无特别要求。

从结构看，IIR滤波器必须采用递归结构，极点位置必须在单位圆内，否则系统将不稳定。运算中的舍入误差，可能会引起寄生振荡。

FIR滤波器采用非递归结构，系统总是稳定的，不存在累积误差，可用FFT快速实现。

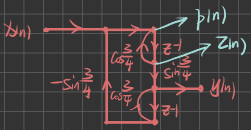
从设计工具看，IIR滤波器可以借助于模拟滤波器的成果，因此一般都有有效的封闭形式的设计公式可供准确计算，计算工作量比较小，对计算工具的要求不高。

FIR滤波器设计一般无封闭形式的设计公式，只能依计算程序进行，对计算工具要求较高。

1. 级联型结构的不唯一性

2. 级联型结构判断好坏的标准：用的延时器数目，越少越好

5.6.(h)



$$H(z)=\frac{\sin(3/4)z^{-1}}{1-\cos(3/4)z^{-1}-\cos(3/4)z^{-1}+\sin^2(3/4)z^{-2}+\cos^2(3/4)z^{-2}}$$

$$=\frac{\sin(3/4)z^{-1}}{1-2\cos(3/4)z^{-1}+z^{-2}}$$

分析：列节点变量方程：

$$\begin{cases} Y(z)=\cos\frac{3}{4}\cdot Y(z)z^{-1}+\sin\frac{3}{4}\cdot Z(z) \\ Z(z)=P(z)z^{-1} \\ P(z)=\cos\frac{3}{4}Z(z)+X(z)-\sin\frac{3}{4}Y(z)\cdot z^{-1} \end{cases}$$

解得：

$$Z(z)z=P(z)$$

$$\downarrow$$

$$Z(z)z=\cos\frac{3}{4}Z(z)+X(z)-\sin\frac{3}{4}Y(z)\cdot z^{-1}$$

即 $$Z(z)=\frac{X(z)-\sin\frac{3}{4}Y(z)z^{-1}}{z-\cos\frac{3}{4}}$$

故 $$Y(z)=\cos\frac{3}{4}Y(z)z^{-1}+\frac{\sin\frac{3}{4}X(z)-\sin^2\frac{3}{4}Y(z)z^{-1}}{z-\cos\frac{3}{4}}$$

$$Y(z)\left[z-\cos\frac{3}{4}-\cos\frac{3}{4}+\cos^2\frac{3}{4}z^{-1}+\sin^2\frac{3}{4}z^{-1}\right]=\sin\frac{3}{4}X(z)$$

$$\Rightarrow H(z)=\frac{\sin\frac{3}{4}}{z-2\cos\frac{3}{4}+\cos^2\frac{3}{4}z^{-1}+\sin^2\frac{3}{4}z^{-1}}$$

$$=\frac{\sin\frac{3}{4}\cdot z^{-1}}{1-2\cos\frac{3}{4}z^{-1}+\cos^2\frac{3}{4}z^{-2}+\sin^2\frac{3}{4}z^{-2}}$$

2021年试题分析:

一、1. $N_1=8$, $N_2=12$, $N=24$

2. $X(e^{j\omega})\big|_{\omega=0}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}\big|_{\omega=0}$
$=2$

3. $T=22$

4. $y(n)=h(n)*x(n)$

if $x(n)=e^{j\omega_0 n}$, then $y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)e^{j\omega_0(n-m)}$
$=e^{j\omega_0 n}\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)e^{-j\omega_0 m}$
$=e^{j\omega_0 n}H(e^{j\omega_0})$

5. L

6. 快速卷积，信号频谱分析

7. 单位圆内

8. 带限即低通，带通

9. $h(n)=h(N-1-n)$

10. 增加窗函数的长度

二、× × √ × √ × √ √ × √ $f_0=\frac{f_s}{N}$

三、设 $x_1(n):N$, $x_2(n):M$

1. ①

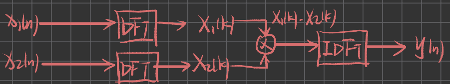
$y_1(n)=x_1(n)*x_2(n)$, $L_1=N+M-1$

$y_2(n)=x_1(n)\,ⓛ\,x_2(n)$, $L\geq\max(N,M)$

$y_2(n)=y_1((n))_L=\sum_{m=-\infty}^{\infty}y_1(n+mL)$

离散卷积：线性卷积的周期延拓，延拓周期为L，当 $L\geq N+M-1$ 时，离散卷积等于线性卷积

②



其中 DFT, IDFT 采用FFT实现

2、IIR：单位取样响应长度是无限长的，不总是稳定的，必须保证极点在单位圆内系统才稳定，相位非线性，不可用FFT，零极点可在单位圆内外，可用较低的阶数，递归结构

FIR：……有限长的，总是稳定的，严格的线性相位，可用FFT，极点总在原点，零点可在单位圆内外，必须用较高的阶数，一般采用非递归结构

四、1. 解：(1) 分析：采样间隔 $T=\frac{2\pi}{\Omega_s}=\frac{1}{4}s$

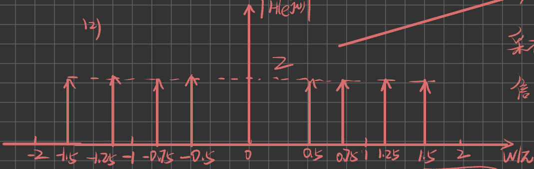
$\hat{x}_a(t)=x_a(t)|_{t=nT}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(t)\delta(t-nT)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}[\cos(2\pi t)+\cos(5\pi t)]\delta(t-nT)$

$x(n)=x_a(nT)$

$=\cos(2\pi nT)+\cos(5\pi nT)$

$=\cos(0.5\pi n)+\cos(\frac{5}{4}\pi n)$

(2)



幅值：$X_a(nT)=\frac{1}{T}X(f)$，T：采样间隔

$\Rightarrow X\frac{1}{T}=4$ 又双边谱故幅值为2

采样频率 $f_s=\frac{\Omega_s}{2\pi}=4$ Hz

信号模拟角频率分量：$\Omega_1=2\pi$，$\Omega_2=5\pi$

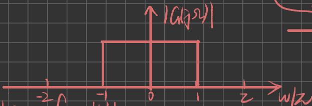
数字角频率：$w_1=\frac{\Omega_1}{f_s}=0.5\pi$

$w_2=\frac{\Omega_2}{f_s}=1.25\pi$

并且采样信号以采样频率为周期进行周期延拓

(3) 对于 $G(j\Omega)$ 得截止数字角频率为：

$w_c=\frac{\Omega}{f_s}=\pi$ 故其频谱图为：



有失真

$f_h=2.5$Hz，$f_s=4$Hz

$f_s<2f_h$ 不满足采样定理

$\longrightarrow$ $G(j\Omega)$ 选择出 $w_1'=0.5\pi$，$w_2'=0.75\pi$ 频率分量 即模拟角频率为

$\Omega_1'=w_1'f_s=2\pi$，$\Omega_2'=w_2'f_s=3\pi$

故得输出信号为：$y(t)=\cos(2\pi t)+\cos(3\pi t)$

① $x(t)=\sin(\Omega t)=\sin(\frac{2\pi}{T}t)$

$=\sin(2\pi f t)$

$\Omega_s=\frac{2\pi}{T}=2\pi f_s$ rad/s

模拟

$\sin(\Omega t)=\sin(\Omega nT)=\sin(wn)$

$\rightarrow w_s=\Omega_s T$ rad

② $\frac{\Omega_s}{f_s}=2\pi \leftarrow w=\frac{\Omega}{f_s}$

数字角频率=模拟角频率对采样频率的归一化

$2\pi=\frac{\Omega_s}{f_s}$

$f_s=\frac{\Omega_s}{2\pi}=4$Hz

2. 解：(1) 由 $y(n)=0.4y(n-1)+x(n)+0.8x(n-1)$ 作Z变换：

$Y(z)=0.4Y(z)z^{-1}+X(z)+0.8X(z)z^{-1}$

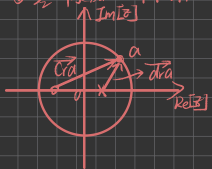
则 $H(z)=\frac{1+0.8z^{-1}}{1-0.4z^{-1}}$ $z\neq0.4$

频率响应为：

$H(e^{jw})=H(z)|_{z=e^{jw}}=\frac{1+0.8e^{-jw}}{1-0.4e^{-jw}}$

(2) 由 $H(z)$ 求得：系统零点为 $z=-0.8$，极点 $z=0.4$

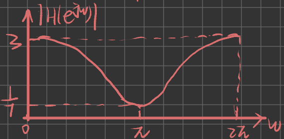
① 零极点结构图：



② 进一步得到

$|H(e^{jw})|=\frac{\prod|c_r a|}{\prod|d_r a|}$

由几何确定法得 幅频特性曲线图



(3) 低通滤波器

(4) $y(0)=0.4y(-1)+x(0)+0.8x(-1)$，$y(n)=0,\ n<0$

$=1-0.8=0.2$

$y(1)=0.4y(0)+x(1)+0.8x(0)$

$=0.4\times0.2-1+0.8=0.4\times0.2-0.2$

$$y(2) = 0.4\,y(1) + x(2) + 0.8\,x(1)$$
$$= 0.4\times[0.4\times0.2 - 0.2] + 1 - 0.8$$
$$= 0.4\times0.4\times0.2 - 0.4\times0.2 + 0.2$$
$$y(3) = 0.4\,y(2) + x(3) + 0.8\,x(2)$$
$$= 0.4^3\times0.2 - 0.4^2\times0.2 + 0.4\times0.2 - 0.2$$

归纳得：$y(n)=\begin{cases} 0.2\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\,0.4^{i}, & n\geq0 \\ 0, & n<0 \end{cases}$

超过 $T=8$ 时叠加

以 $T=8$ 作周期延拓

线性卷积 1 1 1 2 2 2 3 3 3

8点离散卷积：1 1 1 2 2 2 3 3

$1+3=4$

4 1 1 2 2 2 3 3

3. 解 (1)
$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, \quad N=10$$
$$= \sum_{n=0}^{9}[\delta(n)+2\delta(n-5)]\,e^{-j\frac{2\pi}{10}kn}$$
$$= 1+2e^{-j\pi k}$$
$$= 1+2(-1)^k, \quad k=0,1,2,\cdots,9$$

(2) 由 $X(k) = DFT[x(n)]_N$, $N=10$

且 $Y(k) = W_{10}^{2k} X(k)$

由时域循环移位定理得
$$y(n) = x((n-2))_N R_N(n)$$
$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n-2-10m) R_{10}(n)$$
$$= \delta(n-2)+2\delta(n-7)$$

(3) 由 $\begin{cases} x_1(n) = \delta(n)+2\delta(n-5) \\ x_2(n) = \delta(n)+2\delta(n-5) \end{cases}$ 则
$$T[a x_1(n)+b x_2(n)] = (a+b)\,\delta(n) + (a+b)\,2\delta(n-5)$$
$$= a x_1(n) + b x_2(n)$$
$$x(n-n_0) = \delta(n-n_0) + 2\delta(n-n_0-5)$$
$T[x(n-n_0)] = \delta(n-n_0)+2\delta(n-n_0-5) = x(n-n_0)$ 得

$x(n), y(n)$ 为线性时不变系统

故 又 $G(k) = X(k)\,Y(k)$ 则

$g(n) = x(n) ⑩ y(n)$, $L=10$

Way2:
$$g(n) = x(n) * y(n)$$
$$= [\delta(n)+2\delta(n-5)] * [\delta(n-2)+2\delta(n-7)]$$
$$= \delta(n-2)+2\delta(n-7)+2\delta(n-7)+4\delta(n-12)$$
$$= 5\delta(n-2)+4\delta(n-7)$$

超过 $N=10$ 点，时域叠加

$4\delta(n-12+N) = 4\delta(n-2)$

由矩阵相乘法：

$x(n) = \{1,0,0,0,0,2,0,0,0,0\}$

$y(n) = \{0,0,1,0,0,0,0,2,0,0\}$

$$\begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&2&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&2&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&2&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&2&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&2 \\ 2&0&0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&2&0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&2&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&2&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&2&0&0&0&0&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\2\\0\\0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\0\\5\\0\\0\\0\\0\\4\\0\\0 \end{bmatrix}$$

故 $g(n) = 5\delta(n-2)+4\delta(n-7)$

4. 解 (1) 由 $H_a(s) = \frac{1}{s^2+5s+6} = \frac{1}{s+2} + \frac{-1}{s+3}$ 得 极点 $s_1=-2$, $s_2=-3$

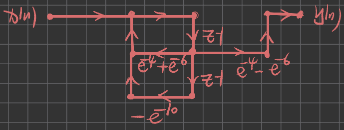
由脉冲响应不变法得变换后极点：
$$z_1 = e^{s_1T}\big|_{T=2s} = e^{-4}, \quad z_2 = e^{s_2T}\big|_{T=2s} = e^{-6}$$

故得系统函数为
$$H(z) = \frac{1}{1-e^{-4}z^{-1}} + \frac{-1}{1-e^{-6}z^{-1}} = \frac{e^{-4}z^{-1} - e^{-6}z^{-1}}{(1-e^{-4}z^{-1})(1-e^{-6}z^{-1})}$$

(2) 由 $H(z)=\dfrac{e^{-4}z^{-1}-e^{-6}z^{-1}}{(1-e^{-4}z^{-1})(1-e^{-6}z^{-1})}=\dfrac{(e^{-4}-e^{-6})z^{-1}}{1-(e^{-4}+e^{-6})z^{-1}+e^{-10}z^{-2}}=\dfrac{(e^{-4}-e^{-6})z^{-1}}{1-e^{-4}z^{-1}}\cdot\dfrac{1}{1-e^{-6}z^{-1}}$

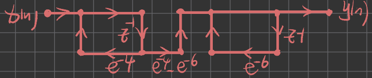
$$=\frac{(e^{-4}-e^{-6})z^{-1}}{1-e^{-6}z^{-1}}\cdot\frac{1}{1-e^{-4}z^{-1}}$$

故得直接型结构:

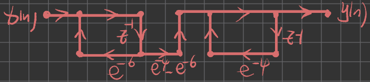


级联型结构:

①



②



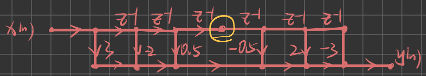
Practice Notes:

1. $y(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x(n-k)$, $N \in Z$

   if $N \geq 1$, 系统是因果系统

   if $|x(N-k)| \leq M$, then $|y(n)| \leq M < \infty$

2. $H(z) = 3 - 2z^{-1} + 0.5z^{-2} - 0.5z^{-4} + 2z^{-5} - 3z^{-6}$



3. 实序列 $x(n)$, $y(n)$ 的DFT为 $X(k)$、$Y(k)$, 试设计一种计算一次IDFT得出 $x(n)$, $y(n)$ 的计算方法

解: 由 $x(n)$, $y(n)$ 均为实序列, 则

$$X(k) = X^*(N-k), \quad jY(k) = -[jY(N-k)]^*$$

故令 $W(k) = X(k) + jY(k) = W_{ep}(k) + W_{op}(k)$

对 $W(k)$ 作IDFT:

$$w(n) = IDFT[W(k)] = Re[w(n)] + jIm[w(n)]$$

由DFT的共轭对称性得:

$$Re[w(n)] = IDFT[W_{ep}(k)] = \frac{1}{2}[w(n) + w^*(n)]$$

$$jIm[w(n)] = IDFT[W_{op}(k)] = \frac{1}{2}[w(n) - w^*(n)]$$

故得:

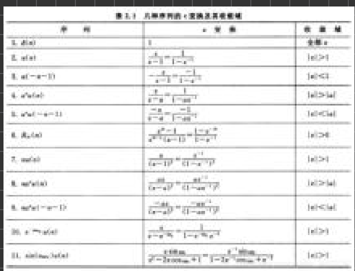
$$x(n) = \frac{1}{2}[w(n) + w^*(n)],$$

$$y(n) = -\frac{j}{2}[w(n) - w^*(n)]$$

4. 离散时间线性时不变系统是稳定的, 则 $H(z)$ 收敛域包含单位圆

5. $H(z) = \frac{4/3}{1-0.5z^{-1}} - \frac{2/3}{1-2z^{-1}} \Rightarrow h(n) = \frac{4}{3}(0.5)^n u(n) + \frac{2}{3}2^n u(-n-1)$

   $0.5 < |z| < 2$



6. $H(e^{j\omega}) = \frac{-0.8 + e^{-j\omega}}{1 - 0.8e^{-j\omega}}$ 则

$$|H(e^{j\omega})| = \left|\frac{-0.8 + e^{-j\omega}}{1 - 0.8e^{-j\omega}}\right| = 1$$

故为全通滤波器

7. 利用DFT求解线性卷积：$y(n)=x(n)*h(n)$

$N=L+M-1=7$

$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}$

$H(k)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)W_N^{kn}$

$Y(k)=X(k)H(k)$ DFFT

$y(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}Y(k)W_N^{-kn}$

8. 双线性变换法：模拟 $\xrightarrow{设计}$ 数字

w与Ω之间存在非线性映射，需要进行预畸变

窗函数法设计FIR数字滤波器时

{ 窗函数长度 控制过渡带宽度
窗函数形状 控制阻带衰减量

9. $x_a(t)=\cos\pi t$，$T=0.2s$ 采样 → $x(n)$

$\Omega=\pi/s$，$w=\Omega T=0.2\pi$

$N=\frac{2\pi}{w}=10$

$x(2)=\cos(wn)\big|_{n=2}=\cos(0.4\pi)$

10、最少采样点数：

$2^{\lceil\log_2(4000\times10)\rceil}$

11. 并联型结构　　直接型结构　　级联型结构

运算速度最高　　误差累积最大　　同时调整零、极点

调整极点位置方便　　　　运算误差互不影响/最小

12. $f_s=600Hz$ 对 $x(t)$ 采样，对 $x(n)$ 作 $N=1024$ DFT

$k_1=128$，$k_2=768$ 时，对应 $x(n)$ 频率 f_1、f_2

$f_s=\frac{1}{NT}=\frac{f_s}{N}$

$f_1=k_1f_s$，$f_2=k_2f_s$

$$Y(z) = b_0 X(z) + z^{-1}\left[b_1 X(z) + a_1 Y(z) + \left[b_2 X(z) + a_2 Y(z)\right] z^{-1}\right]$$

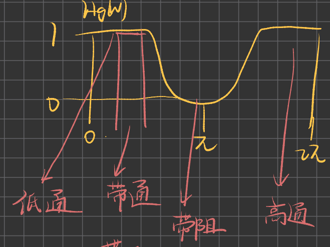
$$Y(z)\left[1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}\right] = X(z)\left[b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}\right]$$

$$\frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}}$$

① 第一类 → "-"当作奇

N为奇数 → 当作奇 → 奇奇得偶 $w=\pi$ 偶对称

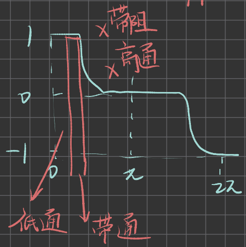
$w=0, 2\pi$ 偶对称



N为偶数 奇偶得奇

$w=\pi$ 奇对称

$w=0, 2\pi$ 偶对称



② 第二类 → 偶 → 奇 $w=\pi$ 奇

N为奇 → 奇

$w=0, 2\pi$ 奇对称

一致

N为偶 $w=\pi$ 偶

$w=0, 2\pi$ 奇对称