电子科技大学

硕士学位论文

非对称不定二阶椭圆边值问题多重网格方法收敛性

姓名：罗志强

申请学位级别：硕士

专业：计算数学

指导教师：钟尔杰

20050101

# 摘 要

本文研究了二阶椭圆边值问题协调有限元多重网格方法 V-循环的收敛性。关于对称正定椭圆边值问题已经有许多完善的研究成果，本文研究了对称正定椭圆边值问题的误差衰减情况。将协调有限元空间分解成高频子空间与低频子空间的直和，从而将误差的衰减变化转化为考虑高、低频子空间上的误差的高频与低频分量的衰减变化。进一步观察出误差在正交子空间上经光滑迭代和粗网格校正后的磨光效果关系式，并估计出收敛因子是小于 1 的。第二章的内容就是在此背景下进行研究的，着重研究了在网格函数空间的正交子空间上，误差的磨光效果、误差的衰减程度和收敛性分析。

协调有限元多重网格法近似解对称正定椭圆边值问题，往往要对解，光滑子作一定的正则性、逼近性假设，在无正则性弱假设条件的前提下，我们直接推导误差减少算子的收敛关系式，第三章主要分析了对称正定椭圆边值问题的多重网格 V-循环收敛性。

本文主要考虑低阶项的系数不是很大的情况下的非对称不定椭圆边值问题。基于文献[6]中提出的对称正定算子的扰动格式的基础上，第四章建立了类似文献[8][22]的误差减小算子，构造了一个新的误差减少算子的扰动关系式，结合给出的假设和引理，比较简洁地分析了非对称不定二阶椭圆边值问题的 V-循环收敛性。

在无正则性假设条件下，以 Richardson 为迭代格式，分析了非对称不定二阶椭圆边值问题多重网格方法收敛性。在第五章中，通过建立一定的弱假设，推导了一些重要的定理，证明了在无正则性假设前提下非对称不定二阶椭圆型边值问题多重网格 V-循环是收敛性。

**关键词**：多重网格方法，V–循环收敛性，误差迭代，非对称不定，椭圆边值问题

# Abstract

The thesis is devoted to discuss the V-cycle convergence of the multigrid methods for two order elliptic boundary value problem. It is well known that there are many efficient methods available for solving the discrete equations with approximate solutions of the symmetry positive define elliptic boundary value problem. To begin with, the smoothing effect of error which is decomposed into orthogonal vectors in grid function space is analyzed. The error-reducing effect in orthogonal subspace which is developed from high frequencies and low frequencies component has been analyzed. The convergence operator of the multigrid method for symmetry and positive define elliptic boundary value problem is proved to be less than 1. In the grid function space, the smoothing effect, smoothing degree and the convergence are discussed in orthogonal subspace which involve high frequencies and low frequencies respectively.

Many papers present various analyses for comforming finite element multigrid methods which are often based on certain regularity and approximation assumptiom concerning smoother and the solution. In chapter three, we analyze the error convergence operator directly and analyze the V-cycle convergence for symmetry positive define elliptic boundary problem without regularity assumption.

In chapter four, the coefficient which is not large for nonsymmetric and indefinite elliptic boundary value problems is considered. Base on the perturbation of symmetric and positive definite operator which present in paper[6], together with new assumption and lemma, the V-cycle convergence of the multigrid method for the nonsymmetric and indefinite elliptic boundary value problems is proved briefly.

In chapter five, a few assumption and important theorems are developed, the multigrid arithmetic which use the Richardson iteration as its smoothing method can be founded. Finally the convergence of the multigrid method V-cycle for the nonsymmetric and indefinite elliptic problem without regularity assumption is analyzed in detail.


**Key words**: multigrid method, V-cycle convergence, nonsymmetric and Indefinite, elliptic boundary value problem, error iteration

# 独 创 性 声 明

本人声明所呈交的学位论文是本人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。据我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得电子科技大学或其它教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示谢意。

签名：罗志强　　　日期：05 年 6 月 10 日

# 关于论文使用授权的说明

本学位论文作者完全了解电子科技大学有关保留、使用学位论文的规定，有权保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和磁盘，允许论文被查阅和借阅。本人授权电子科技大学可以将学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。

（保密的学位论文在解密后应遵守此规定）

签名：罗志强　　　导师签名：钟子建

日期：05 年 6 月 10 日

# 第一章 引言

这篇论文讨论和研究了椭圆型偏微分方程协调有限元的多重网格方法及其收敛性,它是作者近三年来对有限元多重网格方法的学习和研究的工作总结。鉴于目前国际上对多重网格方法研究和应用非常广泛，文献数量繁多。我们在引言的第一部分首先介绍多重网格方法的研究概况;其次在第二部分介绍多重网格方法的基本思想:第三部分介绍作者的研究工作，也是本论文的主要部分;第四部分概述文章的内容安排。

## 1.1 有限元多重网格方法的研究概况

多重网格方法是六十年代初开始出现的，由求解椭圆型偏微分方程组，逐渐发展起来的一种数值求解方法。最早提出这一方法的是 Fedorenko[37][38],在 1961 年提出了第一个真正的二重网格迭代，1964 年构造了第一个多重网格算法，他研究了正方形区域上的 Possion 方程，证明了有限差分方法的多重网格方法的收敛性。随后 Bachvalov[1]在 1966 年考虑了更为复杂的具有变系数的二阶椭圆型方程的差分格式,Astrakhantsev[11]又将 Bakhalov 的差分方法推广到有限元方法。

虽然 Fedorenko 和 Bachvalov 将其推广到多层，并证明了多重网格法的最佳收敛性，但当时并未引起人们的广泛注意。进入七十年代中期，A.Brant[12]和 W.Hackbusch[18]的工作才标志着多重网格方法的研究全面开始,A.Brant 把多重网格方法和自适应技术[MLAT]相结合，后来又把一般区域局部网格加密[24]和“局部 Fourier 分析”技术应用到多重网格方法计算中来。

此后，还有其他作者，Nicolaides,Bank 和 Dupont,Hackbusch,Stuben 和 Trottenberg,Braess 和 Hackbusch,McCormick,他们的研究工作推动了多重网格方法在计算领域的广泛应用。八十年代的成果，比较系统的总结在 A.Brant[26], W.Hachbusch[18],W.Briggs[26],S.McCormick[29],和 P.wessling 的专著中。

在工程和各种实际物理问题中,问题的模型大多数为非对称不定椭圆边值问题，研究这一类问题的文献集中出现在把八、九十年代，文献[1][2][3]开始将多重网格方法应用于解非对称不定椭圆边值问题,Bank 最早在文献[4]中分析了所谓的对称和非对称算法格式求解非对称不定二阶椭圆边值问题,并且证明了两种格式所需的工作量估计。随后 Bramble、Pasciak 和 Jinchao Xu[5]对所谓的对称多重网格法格式作了研究。进入九十年代后 Jinchao Xu[6][7],Bramble 等[8][9],J.Wang[10]用各种方法讨论非对称不定椭圆边值问题。

## 1.2 多重网格方法的基本思想

本节我们将介绍用有限元多重网格法求解偏微分方程的基本思想。
考虑二阶椭圆边值问题：

$$\begin{cases} -\Delta u + bu = f & in \;\; \Omega \\ u = 0 & on \;\; \partial\Omega \end{cases} \tag{1.1}$$

其中$\Omega$为多边形区域。

方程(1.1)改写成变分形式为：求$u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$,使得

$$A(u,v) = (f,v), \;\; \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{1.2}$$

其中$A(u,v) = \int_\Omega (\nabla u \nabla v + buv)dx$，$(f,v) = \int_\Omega fv dx$

将区域$\Omega$剖分为三角形单元，在其上构造有限元空间$M_k$ ($k = 1,2,\cdots J$)，

$$M_k = \left\{ v \in C(\bar{\Omega}), v|_{\Delta_i} \text{为线性函数（}\Delta_i\text{为任何一个三角形单元.）},\;\; v|_{\partial\Omega} = 0 \right\},$$

$M_k$ ($k = 1,2,\cdots J$)是一系列有限维网格函数空间，其上网格函数相对于网格剖分$\tau_k$是分片线性连续的，$M_{k-1} \subset M_k$。$\tau_k$是区域$\Omega$上的一个拟一致三角剖分，$\tau_{k+1}$是通过连接$\tau_k$上的每个三角形内中点之间的连线得到的，$h_{k+1}$和$h_k$是对应$M_{k+1}$和$M_k$的网格步长，显然$h_{k+1} = 2^{-k} h_1$。

则求解(1.2)方程的有限元方法为：求$u_k \in M_k$,使得

$$A(u_k, v_k) = (f, v_k), \forall v_k \in M_k \tag{1.3}$$

取一组节点基函数$\{\Phi_l : l = 1,2,\cdots n_k\}$，其中

$$n_k = \dim M_k$$

满足$\Phi_l(X_m) = \delta_{l,m}$，其中$\{X_m\}$为网格节点。设

$$u_h = \sum_{l=1}^{n_k} \mu_l \Phi_l(x)$$

于是导出$\mu_l$满足的方程组

$$\sum_{l=1}^{n_k} A(\Phi_l, \Phi_m)\mu_l = (f, \Phi_m), (m = 1,2,\cdots,n_k)$$

记系数矩阵，解向量和常向量分别为

$$A_k = \sum_{l=1}^{n_k} A(\Phi_l, \Phi_m),\; y_k = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{n_k})^T,\;\; b_k = (f, \Phi_m), (m = 1,2,\cdots,n_k)$$

若把(1.3)写成向量矩阵的形式，

$$A_k y_k = b_k\text{，}\quad (k = 1,2,\cdots,J) \tag{1.4}$$

$A_k$ 称为刚度矩阵。

方程(1.4)就是椭圆型边值问题有限元离散后的方程组，求方程(1.4)的解就是原椭圆型边值问题的近似解。

在上述离散化过程和(1.4)的求解过程并无相互作用，这就造成了很大的浪费，离散化过程不能预测合适的解和在每个位置的适当的逼近解。若产生的网格较粗，所求的解误差很大; 若产生的网格太细，造成所得到的方程组的阶数不必要地大，而精度常仍旧很低，因为解的局部光滑性未被适当地利用。同时,采用经典的线性迭代法求解近似解无法彻底消除低频误差,基于这种现象,我们采用的多重网格方法将很好的克服了这些缺陷。

多重网格方法由细网格光滑和粗网格校正组成的,在细网格上对误差的高频分量进行磨光，然后将亏量限制到粗网格上对误差的低频分量进行校正。多重网格方法的基本思想是把嵌套网格方法[1]和亏量校正方法相结合，首先从区域网格剖分中，选定有限元网格函数空间 $M_k$ 和 $M_{k-1}$ 之间的限制算子，插值算子。其次由细网格有限元空间 $M_k$ 上任给的近似解，作为细网格有限元空间 $M_k$ 光滑迭代的初始值，进行光滑迭代。再次将光滑迭代后的解限制到下一层粗网格空间 $M_{k-1}$ 进行亏量校正，最后将校正后的解再次光滑迭代。将此过程在一系列有限元空间上进行循环迭代就构成了多重网格方法，具体步骤如下：

下面给出一般意义下的多重网格算法。

设 $B_1 = A_1^{-1}$，设线性映射 $B_{k-1}$ 已经定义，现由下式定义 $B_k b_k : M_k \to M_k$。

若 k=1 时，定义 $y_1 = B_1 b_1$ 为方程(1.4)的解

若 k>1 时，则 $B_k b_k$ 定义如下：

(1) 前光滑：

$$x_k^{l+1} = x_k^l + R_k^l (b_k - A_k x_k^l)\text{，}\quad l = 1,2,\cdots,m_1(k)$$

(2) 粗网格校正：

$$x_k^{m_1(k)+2} = x_k^{m_1(k)+1} + q^p\text{，}$$

其中粗网格校正公式 $q^i = q^{i-1} + B_{k-1}(P_{k-1}^0(b_k - A_k x_k^{m_1(k)+1}) - A_{k-1} q^{i-1})$，$i = 1,2,\cdots p$，其中 $q^0 = 0$。

(3) 后光滑：

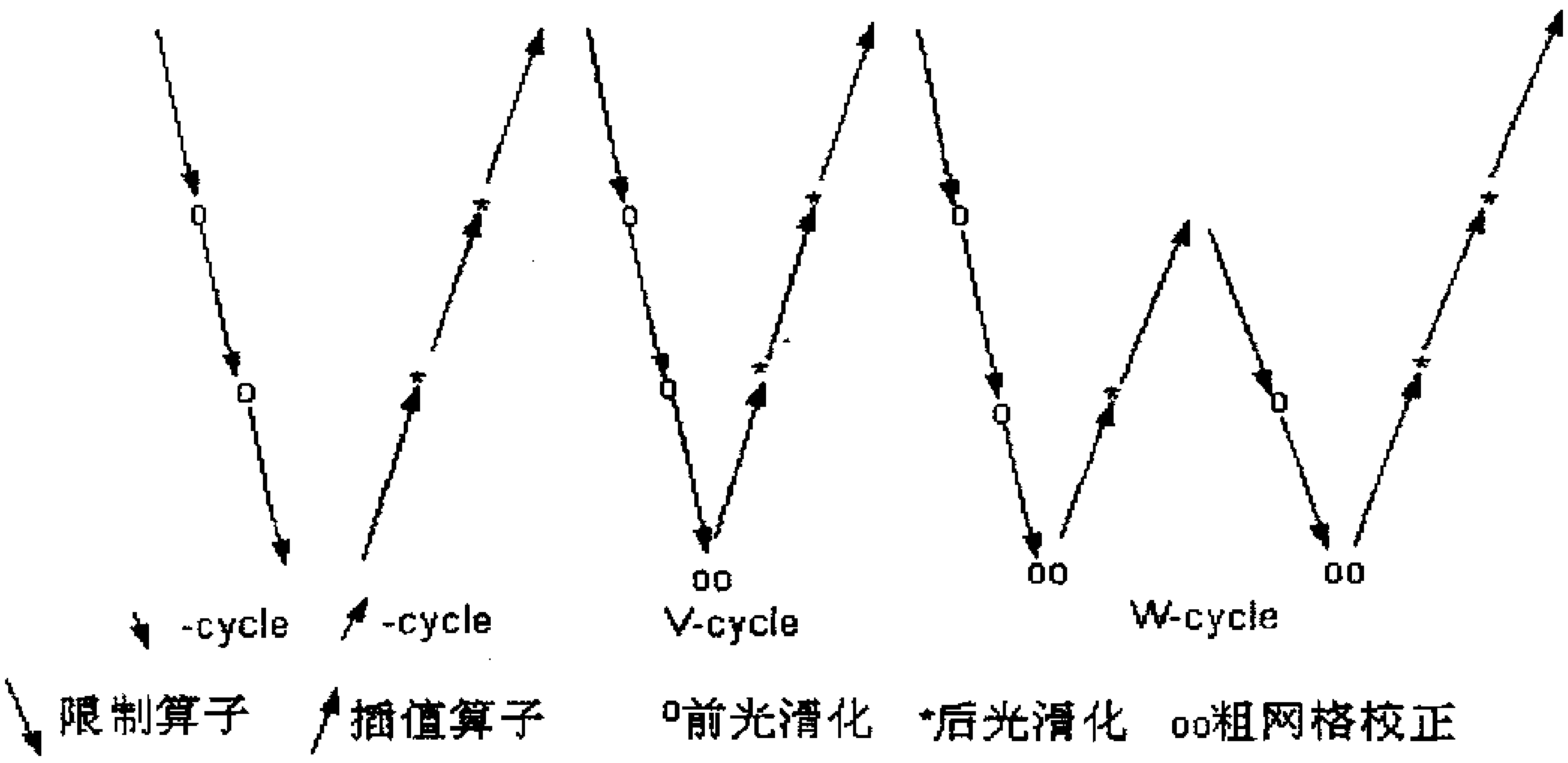
$$x_k^{l+1} = x_k^l + R_k (b_k - A_k x_k^l)$$

$l = m_1(k)+2, m_1(k)+3,\cdots,m_1(k)+m_2(k)+2$

(4) $B_k b_k = x_k^{m_1(k)+m_2(k)+2}$

其中 $u_k^1$ 为第 $k$ 层迭代初值，限制算子 $p_{k-1}^0 : M_k \to M_{k-1}$,投影算子 $P_k : M_J \to M_k$

光滑算子$R_k$： $M_k \to M_k, k=1,2,\cdots,J$，（$R_k^t$为$R_k$之转置）。以上格式是所谓的标准对称多重网格算法，当 p=1 时，算法为 V 循环，当 p=2 时，算法为 W 循环。用以下示意图表示几种基本的多重网格迭代。




1)　$m_1 = m, p = 1, m_2 = 0$，称为↘—Cycle

2)　$m_1 = 0, p = 1, m_2 = m$，称为↗—Cycle

3)　$m_1 = m_3 = m, p = 1$，称为 V—Cycle

4)　$m_1 = m_2 = m, p = 2$，称为 W—Cycle

下面，我们分析多重网格算法误差减少因子（error reduction operator）的重要递推关系式，先证明粗网格校正公式的递推解。

证明粗网格校正公式的递推解

$$q^p = (I-(I-B_{k-1}A_{k-1})^p)A_{k-1}^{-1}P_{k-1}^0 A_k(u-u_k^{m_1(k)+1})$$

事实上

设$A_k u = b_k$，$u_k$为其近似解，由粗网格校正公式

$$q^i = q^{i-1} + B_{k-1}(P_{k-1}^0(b_k - A_k u_k^{m_1(k)+1}) - A_{k-1}q^{i-1})$$

其中$i = 1,2,\cdots p$ ,$q^0 = 0$。

由$p_{k-1}^0 A_k = A_{k-1}P_{k-1}$(此证明在后)，我们可直接验证

$$q^{i+1} = q^i + B_{k-1}(P_{k-1}^0(b_k - A_k u_k^{m_1(k)+1}) - A_{k-1}q^i)$$

$$= (I-B_{k-1}A_{k-1})[(I-B_{k-1}A_{k-1})q^{i-1} + B_{k-1}(P_{k-1}^0(b_k - A_k u_k^{m_1(k)+1}))] +$$

$$B_{k-1}(P_{k-1}^0(b_k - A_k u_k^{m_1(k)+1})$$

$$=(I-B_{k-1}A_{k-1})^2 q^{i-1} + (I-B_{k-1}A_{k-1})B_{k-1}P_{k-1}^0 A_k(u-u_k^{m_1(k)+1}) +$$

$$B_{k-1}(P_{k-1}^0 A_k(u-u_k^{m_1(k)+1}))$$

$$= (I-B_{k-1}A_{k-1})^2 q^{i-1} + (I-B_{k-1}A_{k-1})B_{k-1}P_{k-1}^0 A_k(u-u_k^{m_1(k)+1}) + B_{k-1}P_{k-1}^0 A_k(u-u_k^{m_1(k)+1})$$

$$=(I-B_{k-1}A_{k-1})^i q^1 + ((I-B_{k-1}A_{k-1})^{i-1} B_{k-1}P_{k-1}^0 A_k(u-u_k^{m_1(k)+1}) +$$

$$\cdots + (I - B_{k-1}A_{k-1})B_{k-1}P_{k-1}^{0}A_k(u - u_k^{m_1(k)+1}) + B_{k-1}P_{k-1}^{0}A_k(u - u_k^{m_1(k)+1})$$

$$=(I - B_{k-1}A_{k-1})^{i} q^{1} + ((I - B_{k-1}A_{k-1})^{i-1} B_{k-1}A_{k-1}P_{k-1}(u - u_k^{m_1(k)+1}) + \cdots$$

$$\cdots + (I - B_{k-1}A_{k-1})B_{k-1}A_{k-1}P_{k-1}(u - u_k^{m_1(k)+1}) + B_{k-1}A_{k-1}P_{k-1}(u - u_k^{m_1(k)+1})$$

把 $q^1 = B_{k-1}A_{k-1}P_{k-1}(u - u_k^{m_1(k)+1})$ 代入

$$q^{i+1} = (I - (I - B_{k-1}A_{k-1})^{i+1})P_{k-1}(u - u_k^{m_1(k)+1})$$

$$q^{i+1} = (I - (I - B_{k-1}A_{k-1})^{i+1})A_{k-1}^{-1}P_{k-1}^{0}A_k(u - u_k^{m_1(k)+1}))$$

即

$$q^{p} = (I - (I - B_{k-1}A_{k-1})^{p})A_{k-1}^{-1}P_{k-1}^{0}A_k(u - u_k^{m_1(k)+1})$$

接下来，我们证明下面几个重要的误差减少算子(error reduction operator)的递推关系式。

因为

$$u - u_k^{m_1(k)+1} = K_k^{m_1(k)}(u - u_k^{1})$$

$$u - u_k^{m_1(k)+m_2(k)+2} = K_k^{m_2(k)}(u - u_k^{m_1(k)+2})$$

其中 $K_k^{m_1(k)} = (I - R_k^{t}A_k)^{m_1(k)}$， $K_k^{m_2(k)} = (I - R_k A_k)^{m_2(k)}$ 分别是前光滑和后光滑迭代算子。

我们不妨设误差

$$e_k^{0} = u - u_k^{1}$$

$$e_k^{1} = u - u_k^{m_1(k)+m_2(k)+2}$$

$$e_k^{1} = E_k e_k^{0}$$

其中 $E_k$ 表示第 k 层上的误差减少算子。

同理第 k-1 层上误差减少因子为

$$e_{k-1}^{1} = E_{k-1}e_{k-1}^{0}$$

设 $\overline{q}$ 是粗网格校正公式误差的近似解，由 $e_{k-1}^{1} = E_{k-1}e_{k-1}^{0}$ 得

$$q - \overline{q} = E_{k-1}q$$

$$(q - \overline{q})^{p} = E_{k-1}^{p}q^{p}$$

由粗网格校正公式 $q^{i} = q^{i-1} + B_{k-1}(P_{k-1}^{0}(b_k - A_k x_k^{m_1(k)+1}) - A_{k-1}q^{i-1}))$ 得

$$(q - \overline{q})^{p} = (I - B_{k-1}A_{k-1})^{p} q^{p}$$

所以

$$E_{k-1} = I - B_{k-1}A_{k-1}$$

又因为

$$K_k^{m_1(k)} = (I - R_k^{t}A_k)^{m_1(k)}, \quad K_k^{m_2(k)} = (I - R_k A_k)^{m_2(k)}$$

$$u - u_k^{m_1(k)+2} = u - u_k^{m_1(k)+1} - (I - (I - B_{k-1}A_{k-1})^{p} B_{k-1}P_{k-1}^{0}A_k(u - u_k^{m_1(k)+1})$$

$$u - u_k^{m_1(k)+m_2(k)+2} = K_k^{m_2(k)}\,(u - u_k^{m_1(k)+1} - (I - (I - B_{k-1}A_{k-1})^{p} B_{k-1}P_{k-1}^{0}A_k(u - u_k^{m_1(k)+1}))$$

所以

$$u-u_k^{m_1(k)+m_2(k)+2}=K_k^{m_2(k)}(u-u_k^{m_1(k)+1}-(I-(I-B_{k-1}A_{k-1})^p B_{k-1}P_{k-1}^0 A_k(u-u_k^{m_1(k)+1}))$$
$$=K_k^{m_2(k)}(I-(I-(I-B_{k-1}A_{k-1})^p B_{k-1}P_{k-1}^0 A_k))(u-u_k^{m_1(k)+1})$$
$$=K_k^{m_2(k)}(I-(I-(I-B_{k-1}A_{k-1})^p B_{k-1}P_{k-1}^0 A_k))K_k^{m_1(k)}(u-u_k^1)$$
$$u-u_k^{m_1(k)+m_2(k)+2}=K_k^{m_2(k)}(I-(I-(I-B_{k-1}A_{k-1})^p B_{k-1}P_{k-1}^0 A_k))K_k^{m_1(k)}(u-u_k^1)$$
$$E_k=K_k^{m_2(k)}[(I-P_{k-1})+E_{k-1}^p P_{k-1}]K_k^{m_1(k)}$$

所以具有前后光滑迭代的误差减少算子得递推关系是

$$I-B_kA_k=K_k^{m_2(k)}[(I-P_{k-1})+(I-B_{k-1}A_{k-1})^p P_{k-1}]K_k^{m_1(k)}$$

同理，只有前光滑或后光滑迭代的误差减少算子得递推关系式分别是

$$I-B_kA_k=[(I-P_{k-1})+(I-B_{k-1}A_{k-1})^p P_{k-1}]K_k^{m_1(k)}$$
$$I-B_kA_k=K_k^{m_2(k)}[(I-P_{k-1})+(I-B_{k-1}A_{k-1})^p P_{k-1}]$$

至于收敛性分析，有几种经典的完全多重网格方法的证明，其中比较典型的是利用椭圆正则性证明二阶椭圆边值问题多重网格方法 V-循环和 W-循。还有通过对子空间分解和构造预处理器来证明多重网格收敛性，近些年来，一些文献分析了在无正则性、弱正则性和不完全椭圆正则性前提下的多重网格方法收敛性，读者可参考 Bramble，Xu Jingchao, Wang Junping 的有关文献。

## 1.3 作者的工作

对协调有限元多重网格方法，已经有许多完善的研究成果。McCormick[11][12]将协调有限元空间分解成高频子空间与低频子空间的直和，从而将误差的衰减变化转化为考虑高、低频子空间上的误差衰减变化。为了进一步观察出误差在不同子空间上经光滑迭代和粗网格校正后的变化关系式，本文将进一步对误差的磨光效果和收敛性性质作粗浅的探讨。第二章的内容就是在此背景下进行研究的，着重研究了在网格函数空间的正交子空间上，解的磨光效果、解的误差衰减程度和收敛性分析。

到目前为止，关于对称正定的椭圆型边值问题的多重网格法有许多方面的研究工作，对对称正定椭圆型边值问题的求解已经比较成熟。由于 Fourier analysis 应用范围有限往往只应用特殊区域（如矩形区域），所以更多的求解方法都是经变分或有限元多重网格法格式获得的,在这些方法当中，一些文献[14][22]先通过求得二重网格收敛性估计结果然后去推导出多重网格法的收敛估计；另一些文献直接推导误差减少算子的递推关系式，然后证明误差减少算子的某种范数是小于 1 的不等式。协调有限元多重网格法解对称正定椭圆边值问题，往往要对求解边界，光滑子作一定的正则性、逼近性假设，读者可参文献[13][18] [20] [22][ 23] [25]。在第三章前一部分，我们对有关算法和算子的选择作了浅要的介绍，3.4 节在无椭圆正则性的前提下，分析了对称正定椭圆边值问题的收敛性。

通常对称正定椭圆边值问题的各种假设往往不能直接照搬到非对称不定椭圆型边值问题上求解。在工程和物理问题中，大量的问题模型是非对称不定椭圆型边值问题。我们主要考虑低阶项的系数不是很大的情况下的非对称不定椭圆边值问题。在这种前提下，基于文献[6]中提出的对称正定算子的扰动格式的基础上，本章建立了类似文献[8][22]的误差减小算子，构造了一个新的误差减少算子的扰动关系式，结合新的假设和引理，比较简洁地分析了非对称不定二阶椭圆边值问题的收敛性，第四章主要分析了非对称不定椭圆边值问题的收敛性。

在无正则性假设条件下的收敛性证明，读者可参阅文献[14][15]。第五章研究了在无正则性假设条件下，以 Richardson 为光滑迭代的非对称不定椭圆边值问题的多重网格方法的收敛性。

## 1.4 内容安排

全文分五章，第一章是引言。

第二章叙述了在正交的网格函数空间上，求解二阶椭圆型边值问题的协调有限元的多重网格方法，并主要分析了误差在光滑迭代和粗网格校正下的变化情况和收敛性。

在第三章中，介绍了多重网格法常见的算法和算子选择，分析了无正则假设前提下的对称正定椭圆边值问题多重网格方法的收敛性。

在第四章中，我们详细介绍了非对称不定椭圆型的协调有限元多重网格方法的收敛性。

在第五章中，对目前求解对称正定椭圆型方程的有关方法、思路和假设给予适当的推广到非对称不定椭圆型问题的求解上去，主要分析了在非正则前提下的非对称不定椭圆边值问题多重网格方法的收敛性。

# 第二章 多重网格法误差迭代分析

多重网格方法是一种求解椭圆边值问题离散所得的大型线性或非线性方程组的“最优”解法。对于对称正定的椭圆边值问题的求解方法已经有多种方法，文献[18][27][28]提出了各种问题的多重网格方法。

McCormic[32]巧妙地将网格函数向量空间分解成高频子空间与低频子空间的直和，把误差分解到高频子空间和低频子空间去讨论。二重网格方法，它由光滑迭代与粗网格校正两个过程组成的，光滑迭代与粗网格校正分别用来消除高频与低频误差。由于高频与低频误差在粗细网格上不断变化，误差磨光的作用效果不容易直观表达，用波谱法[33]分析又不能很好地解释误差中间分量的变化。本章在其引理的基础上，结合文献[34]的有关结论，推导出高频误差与低频误差在光滑迭代与粗网格校正过程中误差变化的关系式，从结果容易看出光滑迭代与粗网格校正误差磨光的效果和收敛性。

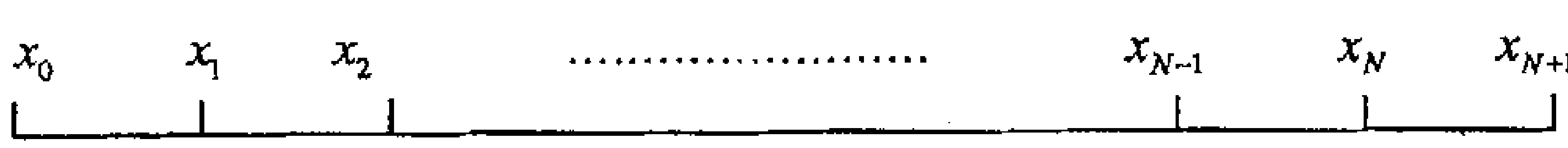
首先，我们给出一维椭圆边值问题误差迭代变化情况，特别是误差的高低、频分量在误差磨光和粗网格校正过程中的变化情况。

## 2.1 迭代法的误差衰减与光滑作用

考虑如下最简单的一维椭圆边值问题

$$\begin{cases} -u' = f & x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

我们用差分法离散上述方程，对任意给定的正整数 N，考虑区间（0，1）上的均匀网格 $\tau_h$，如下图所示：




其中

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N < x_{N+1} = 1,\quad x_j = \frac{j}{N+1}\quad (j = 0 : N+1)$$

该网格将区间[0，1]分为 N+1 个长为 $h = \dfrac{1}{N+1}$ 的子区间。

于是采用差分法离散上述椭圆边值问题的近似方程组为

$$\frac{-\mu_{j-1}+2\mu_j-\mu_{j+1}}{h}=hf(x_j),\quad 1\le j\le N,\ \mu_0=\mu_{N+1}=0$$

若采用有限元离散上述边值问题

设有限元空间$V_h=\{v\in H_0^1(0,1), v|_{[x_j,x_{j+1}]}是一次多项式, 0\le j\le N\}$，则上述边值问题的有限元逼近：求$u_h\in V_h$使得

$$a(u_h,v_h)=(f,v_h),\forall v_h\in V_h \tag{2.1}$$

其中

$$a(u,v)=\int_0^1 u'v'dx,\quad (f,v)=\int_0^1 fvdx$$

现在设$\phi_j\in V_h(j=1,2,\cdots,N)$为相应的节点基函数使得

$$\phi_j(x_i)=\delta_{i,j}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\ne j\end{cases}$$

令$u_h=\sum_{j=1}^{N}\mu_j\phi_j$，在（2.1）中取$v_h=\phi_i$，即可得到

$$\sum_{j=1}^{N}a(\phi_j,\phi_i)\mu_j=(f,\phi_j), 1\le i\le N$$

经计算得到

$$a(\phi_j,\phi_i)=\begin{cases}0, |i-j|\ge 2\\ -1/2, |i-j|=1\\ 2/h, i=j\end{cases}$$

从而

$$\frac{-\mu_{j-1}+\mu_j-\mu_{j+1}}{h}=\int_0^1 f\phi_i dx,\quad 1\le j\le N,\ \mu_0=\mu_{N+1}=0$$

当然，$N$越大，$\mu$对$u$的逼近就越好。
离散后两种形式写成统一的代数方程组为

$$A\mu=\beta \tag{2.2}$$

其中$A=diag(-1,2,-1)$为主对角上为 2，其余均是-1 的三对角矩阵，

$\mu=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_N)$，$\beta=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_N)$，$\beta_i$由下式决定

$$\beta_i=\begin{cases}hf(x_i),有限差分格式\\ (f,\phi_i),\ 有限元离散格式\end{cases}$$

接下来使用迭代法（高频误差磨光）分析总体误差的磨光效果，采用迭代格式。

$$\mu^{l} = \mu^{l-1} + R(\beta - A\mu^{l-1}) \tag{2.3}$$

即对 $j = 1:N$

$$\mu_j^{l} = \mu_j^{l-1} + R(\beta_j - A\mu_j^{l-1})$$

又因为 $\mu$ 是式(2.2)的准确解，即有

$$\mu = \mu + R(\beta - A\mu) \tag{2.4}$$

式(2.4)-式(2.3)得

$$\mu - \mu^{l} = (I - RA)(\mu - \mu^{l-1})$$

$$\mu - \mu^{l} = (I - RA)^{l}(\mu - \mu^{0})$$

当 $A$ 是对称正定时，$\mu^{l}$ 收敛的充要条件是

$$0 < R < \frac{2}{\rho(A)}$$

采用最简单的 Richardson 迭代格式，取 $R = \frac{h}{4}$ 得

$$\mu^{l} = \mu^{l-1} + R(\beta - A\mu^{l-1})$$

我们用上述迭代格式，为了方便取 $R = \frac{h}{3}$，对迭代法的光滑性作如下分析，首先作出 11 个节点前六次迭代的误差变化图形（图 2.1）。误差的变化曲线从上到下依次为第一次到第六
次迭代。

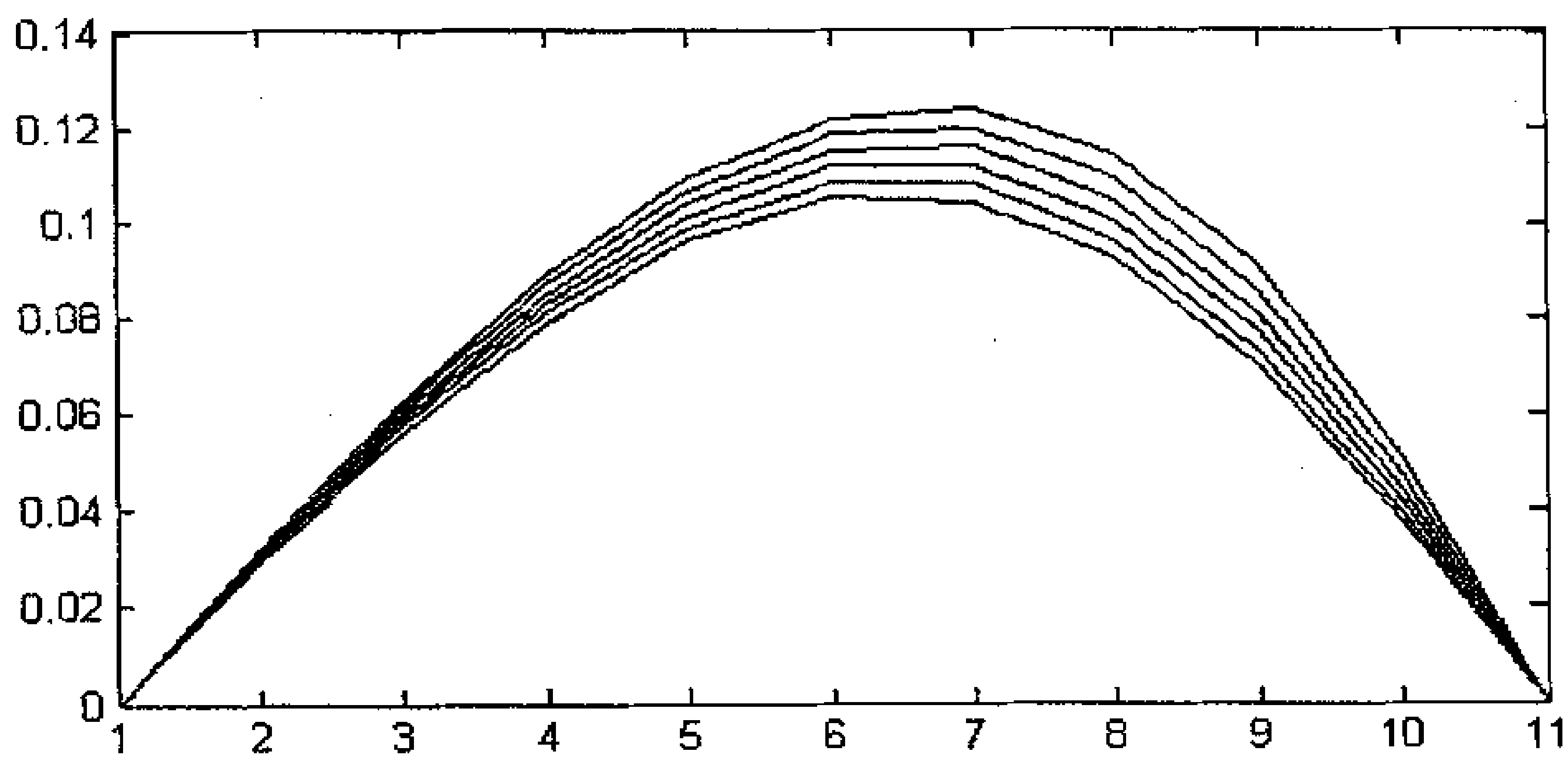



图 2.1

同时，我们给出了单点 $x = 0.4$ 的误差与迭代次数变化关系的图形(图 2.2)。

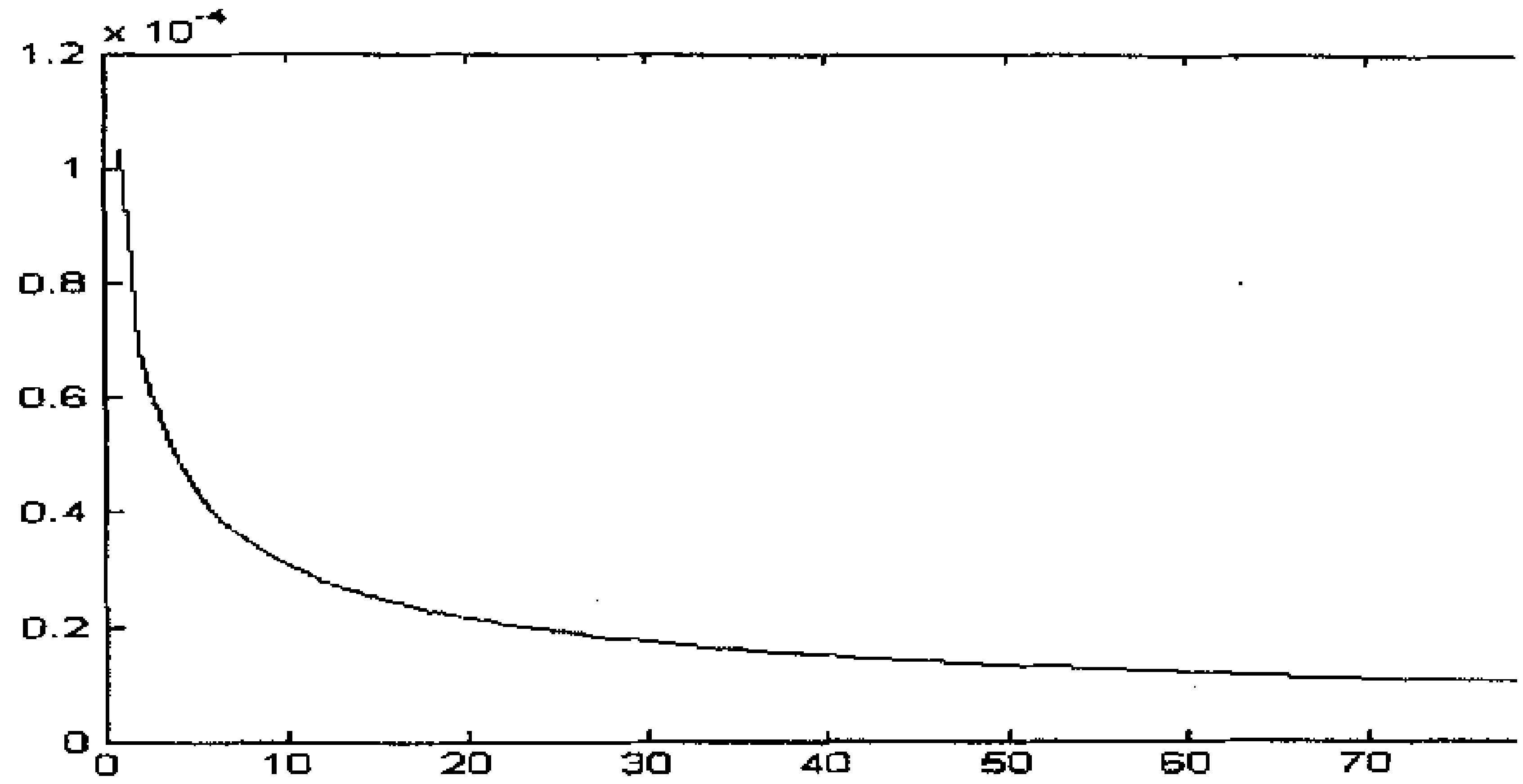



图 2.2

从图形 2.2 我们发现，Richardson 格式在刚迭代几次时误差迅速减小，之后变化得较慢。为什么会出现这样一种情况呢？接下来，我们将进一步从频率方面来分析误差在迭代后高频与低频分量的光滑情况。

先给出命题

命题 1. 设 $a,b$ 为任意实数，$N$阶三对角矩阵 $A=diag(b,a,b)\in IR$ 的特阵值由下式给出，

$$\lambda_k=a+2b\cos\frac{k\pi}{N+1}，\ 1\le k\le N$$

并且对应的特阵向量

$$\xi_k=(\xi_{k,1},\xi_{k,2},\cdots,\xi_{k,N})(1\le k\le N)$$

其中

$$\xi_{k,j}=\sin(\frac{jk\pi}{N+1}),1\le j\le N$$

证明：假设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_N)\in IR$ 是对应特征值 $\lambda$ 的特阵向量，即

$$Ax=\lambda x$$

于是有方程组

$$bx_{j-1}+ax_j+bx_{j+1}=\lambda x_j，\ 1\le j\le N$$

令 $x_0=x_{N+1}=0$

由于 $\xi_{k,j}=\sin(\dfrac{jk\pi}{N+1}),1\le j\le N$ 可以自然延拓使得 $\xi_{k,0}=\xi_{k,N+1}=0$。

实际上上述方程组存在形如 $\xi_k$ 的解，把 $\xi_k$ 代入上述方程组得

$$b\sin(\frac{(j-1)k\pi}{N+1})+a\sin(\frac{jk\pi}{N+1})+b\sin(\frac{(j+1)k\pi}{N+1})=\lambda\sin(\frac{jk\pi}{N+1})$$

相应得到

$$\lambda=a+2b\cos\frac{k\pi}{N+1}，\ 1\le k\le N$$

由于 $A$ 至多有 $N$ 个不同的特征值，结论证毕。

考虑特殊情形$a=2,b=-1$，特征值和特征向量分别为

$$\lambda_k = 2-2\cos\frac{k\pi}{N+1} = 4\sin^2(\frac{k\pi}{2(N+1)})$$

和

$$\xi_k = (\xi_{k,1},\xi_{k,2},\cdots,\xi_{k,N})(1\le k\le N)$$

其中$\xi_{k,j}=\sin(\frac{jk\pi}{N+1}),1\le j\le N$。

每一个特征向量$\xi_k$（$1\le k\le N$），对应一个给定的频率，$k$越大，对应的频率越高，我们规定当$1\le k<\frac{N}{2}$为低频部分，$\frac{N}{2}\le k\le N$为高频部分。

接下来，我们考虑误差在迭代后的高低频变化情况。

由于$\xi_k$（$1\le k\le N$）构成了$IR^N$的一组正交基，任意向量（或误差向量）均可以由基线性表示。

设$\mu-\mu^0=\sum_{k=1}^{N}\alpha_k\xi_k$，则

$$\mu-\mu^l=\sum_{k=1}^{N}\alpha_k(I-\frac{h}{4}A)^l\xi_k$$

我们注意到对任意多项式$p(A)$都有

$$p(A)\xi_k = p(\lambda_k)\xi_k$$

于是经 m 次迭代后

令$\beta_{k,m}=(1-\frac{h}{4}\lambda_k)^m\alpha_k$，则

$$\mu-\mu^m=\beta_{k,m}\xi_k$$

于是$\beta_{k,m}=(1-\frac{h}{4}\lambda_k)^m\alpha_k$，把$\lambda_k$代入得

$$\beta_{k,m}=(1-\sin^2\frac{k\pi}{2(N+1)})^m\alpha_k$$

所以

$$|\beta_{k,m}|=|(1-\sin^2\frac{k\pi}{2(N+1)})^m\alpha_k|=|\alpha_k\sin^{2m}(\frac{N-k+1}{N+1}\frac{\pi}{2})|\le$$

$$|\alpha_k|(\frac{N-k+1}{N+1}\frac{\pi}{2})^{2m}$$

我们发现，当$1 \le k < \frac{N}{2}$，特别是$k$很小时$\beta_{k,m}$收敛到0的速度就变得非常慢，也就是低频分量随迭代次数得增加收敛到0的速度就非常慢。同理，当$\frac{N}{2} \le k \le N$，特别是当$k$接近$N$时，$\beta_{k,m}$收敛到0的速度就变得非常快，也就是高频分量会迅速衰减，当$m \to \infty$时，$\beta_{k,m} \to 0$。结论说明，误差经迭代后，只需几次迭代，收敛到0的速度很快，之后收敛速度变得较慢。

由于*Richardson*迭代较容易地消除误差中的高频（非光滑）部分，而对误差中的低频（光滑）部分不容易消除，我们知道*Richardson*迭代具有一定的光滑（磨光）作用，但与*Gauss-seidel*迭代相比，磨光性能要差的多，读者可参考文献[18]。

## 2.2 网格函数空间正交分解

设椭圆型边值问题的变分形式：求$u \in V$

$$a(u,v) = (f,v), v \in V^*$$

任给$v \in V$，$f \in V^*$，$V$为 sobolev 空间，$V^*$为$V$的对偶空间，存在有限元嵌套子空间列$V_j \subset V_{j+1} \subset \cdots \subset V_N \ (j = 1,2,\cdots,N)$，那么第j层上的离散问题：

寻找到$u \in V_j$，使得

$$a(u,v) = (f,v) \tag{2.2.1}$$

其中$v \in V_j, f \in V_j^* (V_j^*$为$V_j$对偶)。

作辅助向量空间$s^{h_j-1}$记为$s^{j-1}$，$h = h_N < h_{N-1} < \cdots\cdots < h_1 < h_0, \dim s^{j-1} < \dim s^j$，$(j = 1，2,\cdots,N)$

设有限元离散后的方程组

$$A_{h_j} u_{h_j} = f_{h_j} \tag{2.2.2}$$

其中$A_{h_j}$是对称正定刚度矩阵，$s^h$为有限元空间对应网格函数的向量空间。

**定义 1**[18] 设双线性映射$p: s^{j-1} \to s^j, (j = 1,2,\cdots N)$，$s^j$是网格函数$u \in V_j$的向量空间，典型取法为$p = p_j^{-1} p_{j-1}$，典型限制为$r = p^*$，其中$r: s^j \to s^{j-1}$满足$p_{j-1} = p_j p$，$rR_j = R_{j-1}$（其中$R_j$是$p_j^*$伴随)。

显然$(R_j p_j)^{-1}: s^j \to s^j$存在。

引理 1[18] 设$A_j, A_{j-1}$是(2.2.1)式经有限元离散后的刚度矩阵，且$p,r$是典型的，那么有

$$A_{j-1} = rA_j p$$

引入线性算子$I_j^{j-1}$：$s^j \to s^{j-1}$，$I_{j-1}^j$ ：$s^{j-1} \to s^j$，由定义1和引理1知

$$A_{j-1} = I_j^{j-1} A_j I_{j-1}^j$$

同时假设变分条件$I_j^{j-1} = c^j (I_{j-1}^j)^*, c^j$是依赖于$h_j$的常数。

记$M_c^j$(j,u,f)，求解(2)式的多重网格算法如下

1)若 j=0，直接求解$A_0u=f$

2)若 j>0,完成以下步骤:

(1) 前光滑$u=G_j^v(u,f)$

(2) 粗网格校正迭代 i $\bar{f}\leftarrow I_j^{j-1}(\bar{f}-A_ju)$

ii $v=0$作$\mu$次 j-1 重网格迭代

$v\leftarrow M(j-1,v,\bar{f})$

iii 作校正解 $u\leftarrow u+I_{j-1}^j v$

(3) 后光滑$u=E_j^v(u,f)$

设光滑算子$G_j(u,f)$和$E_j(u,f)$是线性算子，$G_j^v(u,f)=G_j^v u+K_jf$，$E_j^v(u,f)=E_j^v u+F_jf$，$\|G_j\|\le 1$，$\|E_j\|\le 1$满足相容性条件:

$$u=G_j(u,f)\Leftrightarrow A_ju=f\text{，}\quad u=E_j(u,f)\Leftrightarrow A_ju=f$$

由文献[32]有以下结果:

引理 2 网格函数空间$s^j$可分解成高频子空间$N(I_j^{j-1}A_j)$与低频子空间$R(I_{j-1}^j)$的直和，即

$$s^j=N(I_j^{j-1}A_j)\oplus R(I_{j-1}^j)$$

由文献[35]有引理 3

引理 3 设$T_{h_j}$和$\xi_{h_j}$分别为$s^{h_j}$到$N(I_j^{j-1}A_j)$和$R(I_{j-1}^j)$的$A_k$-正交投影，记$T_{h_j}$ $\xi_{h_j}$分别为$T_j,\xi_j$，则$T_j^2=T_j$，$\xi_j^2=\xi_j$，记$\|u\|_{A_h}=\langle A_hu,u\rangle$，其中$(\cdot,\cdot)$为 Euclid 范数。

由文献[34]有引理 4

引理 4 光滑算子$G_j$为非亏损矩阵时，则$N(I_j^{j-1}A_j)$和$R(I_{j-1}^j)$为$G_j$的不变子空间。

## 2.3 误差迭代分析

本节讨论误差经光滑迭代和粗网格校正后的变化情况。误差的高频与低频分量会出现不同程度的衰减，我们不但可以直观分析误差的分量的变化，而且还可以分析光滑迭代和粗网格校正的效果。

由 McCormick [35]引理 2.1 有

$$\|e\|_{A_j}^2=\|T_je\|_{A_j}^2+\|\xi_je\|_{A_j}^2$$

其中$e$为迭代初始误差，不妨称上式为初始误差的高、低频的平方分解，以下定理的高低频误差分析均与此初始误差平方分解作比较。

引理 5 设$G_j$，$E_j$为都为非亏损矩阵，$T_j$为$s^j$到$N(I_j^{j-1}A_j)$的$A_j-$正交投影算子，$\xi_j$为$s^j$到$R(I_{j-1}^j)$的$A_j-$正交投影算子，则 $G_j\,T_j=T_j\,G_j$且$G_j\,\xi_j=\xi_j\,G_j$，$E_j\,T_j=T_j\,E_j$，$E_j\,\xi_j=\xi_j\,E_j$。

证明：前一结论见[34]，现证明第二部分，其余类推。

对任意误差向量 $u\in s^j$，作正交分解 $u=T_j u+\xi_j u$,

$$G_jT_ju\in N(I_j^{j-1}A_j),G_j\,\xi_j u\in R(I_{j-1}^j),$$

由引理 4

$$\xi_j(G_j\xi_ju)=G_j\xi_ju,\ \xi_j(G_jT_ju)=0$$

于是

$$\xi_j\,G_j\,u=\xi_j\,G_j\,(T_j\,u+\xi_j\,u,)=\xi_j\,G_j\,T_j\,u+\xi_j\,G_j\,\xi_j\,u=\xi_j\,G_j\,\xi_j\,u=G_j\,\xi_j\,u$$

则

$$G_j\,\xi_j=\xi_j\,G_j$$

同理

$$E_j\,T_j=T_j\,E_j,\quad E_j\,\xi_j=\xi_j\,E_j$$

在文献[32]引理的基础上有定理 1

**定理 1** 设$G_j$为非亏损矩阵，若存在与 h 无关的常数$\alpha$，$(0<\alpha<1)$，使$\|G_jT_j\|_{A_j}\le\sqrt{\alpha}$，且$\|G_j\|_{A_j}\le1$，$T_j$和$\xi_j$分别为$s^k$到$N(I_j^{j-1})$和$R(I_{j-1}^j)$的$A_j$一正交投影，则前光滑$v$次时，光滑算子$G_j$对误差的磨光效果为

$$\|G_j^v e\|_{A_j}^2\le\alpha^v\|T_je\|_{A_j}^2+\|\xi_je\|_{A_j}^2$$

证明：因为 $s^j=N(I_j^{j-1}A_j)\oplus R(I_{j-1}^j)$，对任意误差向量 $e\in s^j$，有 $e=T_je+\xi_je$，由引理 5 知

$$G_jT_je\in N(I_j^{j-1}A_j),G_j\,\xi_j e\ \in R(I_{j-1}^j,)$$

故

$$\langle A_jG_jT_je,G_j\xi_je\rangle=0$$

利用$T_j^2=T_j$，得

$$\begin{aligned}\|G_j^ve\|_{A_j}^2&=\langle A_jG_j^ve,G_j^ve\rangle=\langle A_jG_j^v\xi_je,G_j^v\xi_je\rangle+2\langle A_jG_j^vT_je,G_j^v\xi_je\rangle+\langle A_jG_j^vT_je,G_j^vT_je\rangle\\&=\langle A_jG_j^v\xi_je,G_j^v\xi_je\rangle+\langle A_jG_j^vT_je,G_j^vT_je\rangle\\&\le\langle A_jG_j^v\xi_je,G_j^v\xi_je\rangle+\langle A_jG_j^vT_j^ve,G_j^vT_j^vT_j^ve\rangle\\&\le\|G_j^v\|_{A_j}^2\|\xi_je\|_{A_j}^2+\|G_j^vT_j^v\|_{A_j}^2\|T_j^ve\|_{A_j}^2\le\alpha^v\|T_je\|_{A_j}^2+\|\xi_je\|_{A_j}^2\end{aligned}$$

由定理 1 知，当前光滑$\nu$ 次后，只是高频误差分量减少了$\alpha^{\nu}$倍。

同理可分析后光滑迭代效果。

接下来考虑只有前光滑和粗网格校正的多重网格迭代效果。由文献[36]得到算法$M(j,u,f)$的粗网格校正迭代算子$M_c^j = I - I_{j-1}^j[I-(M_{j-1})^{\mu}]A_j^{-1}\, I_j^{j-1}A_j$，由文献[34]定理 2 知 $M_c^j e = T_j e + \delta_{j-1}^{\mu}\xi_j b_j$，其中$\|\xi_j^{\nu} b\|_{A_j} \le \|\xi_j^{\nu} e\|_{A_j}$，$b \in s^j$.

设非亏损矩阵$G_j$和$E_j$的特征值分别为$\lambda_1,\lambda_2$，谱半径分别为$\rho_1,\rho_2$，显然$|\rho_1|\le 1$，$|\rho_2|\le 1$

**定理 2** 设$M_c^j$为只有前光滑的多重网格迭代算子，粗网格迭代矩阵为$M_{j-1}$，且满足$\|M_{j-1}\|_{A_{j-1}} \le \delta_{j-1}\left(0<\delta_{j-1}<1\right)$，则一个多重网格迭代步对高频误差和低频误差的磨光效果为

$$\|M_c^j G_j^{\nu} e\|_{A_j}^2 \le \alpha^{\nu}\|T_j e\|_{A_j}^2 + \delta_{j-1}^{2\mu}\|\xi_j e\|_{A_j}^2$$

证明：因为对任意误差向量 $e$ 有：$M_c^j e = T_j e + \delta_{j-1}^{\mu}\xi_j b_j$

所以

$$\begin{aligned}
\|M_c^j G_j^{\nu} e\|_{A_j}^2 &= \|\lambda_1^{\nu} M_c^j e\|_{A_j}^2 = \|\lambda_1^{\nu}(T_j^{\nu} e + \delta_{j-1}^{\mu}\xi_j b_j)\|_{A_j}^2 \\
&= \|(T_j^{\nu} e + \delta_{j-1}^{\mu}\xi_j b_j)\lambda_1^{\nu}\|_{A_j}^2 \\
&= \|T_j^{\nu} G_j^{\nu} e + \lambda_1^{\nu}\delta_{j-1}^{\mu}\xi_j b_j\|_{A_j}^2 \\
&= \langle A_j(T_j G_j^{\nu} e + \lambda_1^{\nu}\delta_{j-1}^{\mu}\xi_j b_j), T_j G_j^{\nu} e + \lambda_1^{\nu}\delta_{j-1}^{\mu}\xi_j b_j\rangle \\
&= \langle A_j T_j G_j^{\nu} e, T_j G_j^{\nu} e\rangle + 2\langle A_j T_j G_j^{\nu} e, \lambda_1^{\nu}\delta_{j-1}^{\mu}\xi_j b_j\rangle + (|\lambda_1^{2\nu}|\delta_{j-1}^{2\mu})\langle A_j\xi_j b_j, \xi_j b_j\rangle
\end{aligned}$$

由引理 4，5，$T_j^2 = T_j$，$\|G_j T_j\|_{A_j} \le \sqrt{\alpha}$ 和$|\lambda_1^{2\nu}| \le \rho_1^{2\nu} \le 1$得

$$\begin{aligned}
\|M_c^j G_j^{\nu} e\|_{A_j}^2 &= \|T_j^{\nu} G_j^{\nu} e\|_{A_j}^2 + (|\lambda_1^{2\nu}|\delta_{j-1}^{2\mu})\|\xi_j b_j\|_{A_j}^2 \\
&= \|T_j^{\nu} T_j^{\nu} G_j^{\nu} e\|_{A_j}^2 + (|\lambda_1^{2\nu}|\delta_{j-1}^{2\mu})\|\xi_j b_j\|_{A_j}^2 \\
&= \|(G_j T_j)^{\nu} T_j^{\nu} e\|_{A_j}^2 + (|\lambda_1^{2\nu}|\delta_{j-1}^{2\mu})\|\xi_j b_j\|_{A_j}^2 \\
&\le \alpha^{\nu}\|T_j e\|_{A_j}^2 + (|\lambda_1^{2\nu}|\delta_{j-1}^{2\mu})\|\xi_j e\|_{A_j}^2 \le \alpha^{\nu}\|T_j^{\nu} e\|_{A_j}^2 + \delta_{j-1}^{2\mu}\|\xi_j e\|_{A_j}^2
\end{aligned}$$

所以

$$\|M_c^j G_j^{\nu} e\|_{A_j}^2 \le \alpha^{\nu}\|T_j e\|_{A_j}^2 + (|\lambda_1^{2\nu}|\delta_{j-1}^{2\mu})\|\xi_j e\|_{A_j}^2 \le \alpha^{\nu}\|T_j e\|_{A_j}^2 + \delta_{j-1}^{2\mu}\|\xi_j e\|_{A_j}^2$$

同理可以求出只后光滑$\nu$次和粗网格校正的误差磨光效果

$$\|E_j^{\nu} M_c^j e\|_{A_j} \le \beta^{\nu}\|T_j e\|_{A_j}^2 + \delta_{j-1}^{2\mu}\|\xi_j e\|_{A_j}^2$$

其中，假设$\|E_j T_j\|_{A_j} \le \sqrt{\beta}$ $(0<\beta<1)$

以上结果表明：

1 前光滑迭代将校正前的高频误差分量磨光。

2 粗网格校正中只磨光低频误差分量。

3 与初始误差平方分解相比，高频误差减少到$\alpha^{v}$倍，低频误差减少到$\delta_{j-1}^{2\mu}$倍。

定理 3 设$M^{j}=E_{j}^{v}(I-I_{j-1}^{j}[I-(M_{j-1})^{\mu}]A_{j}^{-1}I_{j}^{j-1}A_{j})G_{j}^{v}$ 为多重网格迭代时实施了前后光滑的迭代算子，粗网格迭代矩阵为$M_{j-1}$且满足$\|M_{j-1}\|_{A_{j-1}}\le\delta_{j-1}$，则一个多重网格迭代步对高频误差和低频误差的磨光效果为

$$\|E_{j}^{v}M^{j}G_{j}^{v}e\|_{A_{j}}^{2}\le\alpha^{v}\beta^{v}\|T_{j}e\|_{A_{j}}^{2}+\delta_{j-1}^{2\mu}|\rho_{1}\rho_{2}|^{2v}\|\xi_{j}e\|_{A_{j}}^{2}\le\alpha^{v}\beta^{v}\|T_{j}e\|_{A_{j}}^{2}+\delta_{j-1}^{2\mu}\|\xi_{j}e\|_{A_{j}}^{2}$$

证明：由文献[34]的结论，利用光滑算子的特征值，得

$$\begin{aligned}\|E_{j}^{v}M_{c}^{j}G_{j}^{v}e\|_{A_{j}}^{2}&=\|\lambda_{1}^{v}E_{j}^{v}M_{c}^{j}e\|_{A_{j}}^{2}=\|\lambda_{1}^{v}E_{j}^{v}(T_{j}e+\delta_{j-1}^{\mu}\xi_{j}b_{j})\|_{A_{j}}^{2}\\&=\|\lambda_{1}^{v}E_{j}^{v}T_{j}e+\lambda_{1}^{v}E_{j}^{v}\delta_{j-1}^{\mu}\xi_{j}b_{j})\|_{A_{j}}^{2}\\&=\|\lambda_{1}^{v}\lambda_{2}^{v}T_{j}e+\lambda_{1}^{v}E_{j}^{v}\delta_{j-1}^{\mu}\xi_{j}b_{j})\|_{A_{j}}^{2}\\&=\|G_{j}^{v}T_{j}E_{j}^{v}e+\delta_{j-1}^{\mu}\lambda_{1}^{v}E_{j}^{v}\xi_{j}b_{j})\|_{A_{j}}^{2}=\\&\langle A_{j}(G_{j}^{v}T_{j}E_{j}^{v}e+\delta_{j-1}^{\mu}\lambda_{1}^{v}E_{j}^{v}\xi_{j}b_{j}),G_{j}^{v}T_{j}E_{j}^{v}e+\delta_{j-1}^{\mu}\lambda_{1}^{v}E_{j}^{v}\xi_{j}b_{j}\rangle\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}\|E_{j}^{v}M^{j}G_{j}^{v}e\|_{A_{j}}^{2}=&\langle A_{j}G_{j}^{v}T_{j}E_{j}^{v}e,G_{j}^{v}T_{j}E_{j}^{v}e\rangle+2\langle A_{j}G_{j}^{v}T_{j}E_{j}^{v}e,\delta_{j-1}^{\mu}\lambda_{1}^{v}E_{j}^{v}\xi_{j}b_{j}\rangle+\\&\langle A_{j}\delta_{j-1}^{\mu}\lambda_{1}^{v}E_{j}^{v}\xi_{j}b_{j},\delta_{j-1}^{\mu}\lambda_{1}^{v}E_{j}^{v}\xi_{j}b_{j}\rangle\end{aligned}$$

由引理 4 知，$\langle A_{j}G_{j}^{v}T_{j}E_{j}^{v}e,\delta_{j-1}^{\mu}\lambda_{1}^{v}E_{j}^{v}\xi_{j}b_{j}\rangle=0$，所以

$$\begin{aligned}\|E_{j}^{v}M^{j}G_{j}^{v}e\|_{A_{j}}^{2}&=\langle A_{j}G_{j}^{v}T_{j}E_{j}^{v}e,G_{j}^{v}T_{j}E_{j}^{v}e\rangle+\langle A_{j}\delta_{j-1}^{\mu}\lambda_{1}^{v}E_{j}^{v}\xi_{j}b_{j},\delta_{j-1}^{\mu}\lambda_{1}^{v}E_{j}^{v}\xi_{j}b_{j}\rangle\\&=\|G_{j}^{v}T_{j}^{v}E_{j}^{v}e\|_{A_{j}}^{2}+\|\lambda_{1}^{v}\delta_{j-1}^{\mu}E_{j}^{v}\xi_{j}b_{j}\|_{A_{j}}^{2}=\|G_{j}^{v}T_{j}^{v}T_{j}^{v}E_{j}^{v}T_{j}e\|_{A_{j}}^{2}+\|\lambda_{1}^{v}\delta_{j-1}^{\mu}E_{j}^{v}\xi_{j}b_{j}\|_{A_{j}}^{2}\end{aligned}$$

由引理 5，$\|G_{j}T_{j}\|_{A_{j}}\le\sqrt{\alpha}$和$\|E_{j}T_{j}\|_{A_{j}}\le\sqrt{\beta}$得

$$\begin{aligned}\|E_{j}^{v}M^{j}G_{j}^{v}e\|_{A_{j}}^{2}&\le\alpha^{v}\beta^{v}\|T_{j}e\|_{A_{j}}^{2}+\|\lambda_{1}^{v}\delta_{j-1}^{\mu}E_{j}^{v}\xi_{j}e\|_{A_{j}}^{2}\\&=\alpha^{v}\beta^{v}\|T_{j}e\|_{A_{j}}^{2}+|\lambda_{1}^{2v}\lambda_{2}^{2v}|\delta_{j-1}^{2\mu}\|\xi_{j}e\|_{A_{j}}^{2}\\&\le\alpha^{v}\beta^{v}\|T_{j}e\|_{A_{j}}^{2}+\delta_{j-1}^{2\mu}|\rho_{1}\rho_{2}|^{2v}\|\xi_{j}e\|_{A_{j}}^{2}\\&\le\alpha^{v}\beta^{v}\|T_{j}e\|_{A_{j}}^{2}+\delta_{j-1}^{2\mu}\|\xi_{j}e\|_{A_{j}}^{2}\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}\|E_{j}^{v}M^{j}G_{j}^{v}e\|_{A_{j}}^{2}&\le\alpha^{v}\beta^{v}\|T_{j}e\|_{A_{j}}^{2}+\delta_{j-1}^{2\mu}|\rho_{1}\rho_{2}|^{2v}\|\xi_{j}e\|_{A_{j}}^{2}\\&\le\alpha^{v}\beta^{v}\|T_{j}e\|_{A_{j}}^{2}+\delta_{j-1}^{2\mu}\|\xi_{j}e\|_{A_{j}}^{2}\end{aligned}$$

以上定理表明：

1 多重网格前后细网格光滑迭代分别磨光校正前后的高频误差分量，粗网格校正只磨光误差低频分量。

2 多重网格方法只有光滑迭代与粗网格校正结合在一起才能彻底磨光高低频误差，若只有细网格磨光或只有粗网格校正的迭代格式一般达不到所需效果的。

3 与初始误差平方分解相比，高频误差减少到$\alpha^{\nu}\beta^{\nu}$倍，低频误差减少到$\delta_{j-1}^{2\mu}$倍。

## 2.4 收敛性分析

McCormick[35] 中从另一个角度分析了收敛性结果. 本节由引理 2.1，$\|e\|_{A_j}^2=\|T_j e\|_{A_j}^2+\|\xi_j e\|_{A_j}^2$和$M_c^j e=T_j e+\delta_{j-1}^{\mu}\xi_j b_j$容易得到多重网格迭代的收敛率。

设$\varepsilon^0,\varepsilon$分别是多重网格法迭代前后的误差向量，$E_j$为一个完整迭代步的误差减少算子(error reduction operator)。

设 $$\varepsilon=E_j\varepsilon^0$$

$$\varepsilon=E_j^{\nu}M^jG_j^{\nu}\varepsilon^0=\lambda_1^{\nu}\ E_j^{\nu}M^j\varepsilon^0=\lambda_1^{\nu}\lambda_2^{\nu}\ T_j\varepsilon^0+\lambda_1^{\nu}\ \delta_{j-1}^{\mu}\xi_j b$$

$$\|\varepsilon\|_{A_j}^2=\|G_j^{\nu}T_j^{\nu}T_j^{\nu}E_j^{\nu}\varepsilon\|_{A_j}^2+\|\lambda_1^{\nu}\delta_{j-1}^{\mu}E_j^{\nu}\xi_j b_j\|_{A_j}^2=\|G_j^{\nu}T_j^{\nu}T_j^{\nu}E_j^{\nu}T_j^{\nu}\varepsilon\|_{A_j}^2+\|\lambda_1^{\nu}\delta_{j-1}^{\mu}E_j^{\nu}\xi_j b_j\|_{A_j}^2$$

因为$\|\xi_j b\|_{A_j}\le\|\xi_j\varepsilon^0\|_{A_j}$

$$\|\varepsilon\|_{A_j}^2\le\ \alpha^{\nu}\ \beta^{\nu}\|T_j\varepsilon^0\|_{A_j}^2+\delta_{j-1}^{2\mu}\|\xi_j\varepsilon^0\|_{A_j}^2=(\alpha^{\nu}\ \beta^{\nu}\frac{\|T_j\varepsilon^0\|_{A_j}^2}{\|\varepsilon^0\|_{A_j}^2}+\delta_{j-1}^{2\mu}\frac{\|\xi_j\varepsilon^0\|}{\|\varepsilon^0\|_{A_j}^2})\|\varepsilon^0\|_{A_j}^2$$

令$\eta=\dfrac{\|T_j\varepsilon^0\|_{A_j}^2}{\|\varepsilon^0\|_{A_j}^2}$， $1-\eta=\dfrac{\|\xi_j\varepsilon^0\|_{A_j}^2}{\|\varepsilon^0\|_{A_j}^2}$则

$$\|\varepsilon\|_{A_j}^2\le\sup_{0\le\eta\le1}[\alpha^{\nu}\beta^{\nu}\eta+\delta_{j-1}^{2\mu}(1-\eta)]\|\varepsilon^0\|_{A_j}^2$$

所以收敛率为

$$\zeta=\|\varepsilon\|_{A_j}^2\le\sqrt{\sup_{0\le\eta\le1}[\alpha^{\nu}\beta^{\nu}\eta+\delta_{j-1}^{2\mu}(1-\eta)]}\ \|\varepsilon^0\|_{A_j}^2=\max(\sqrt{\alpha^{\nu}\beta^{\nu}},\delta_{j-1}^{\mu})\ \|\varepsilon^0\|_{A_j}^2$$

所以一个完整迭代步的误差减少算子为

$$E_j=\ \sqrt{\max(\sqrt{\alpha^{\nu}\beta^{\nu}},\delta_{j-1}^{\mu})}<1$$

从以上推导知多重网格迭代因子是收敛的，因而该光滑迭代与粗网格校正有意义。

# 第三章 对称正定椭圆边值问题多重网格方法收敛性

多重网格法是二十世纪六十年代初由 *R..P.Fedorenko* 提出了求解离散方程的一种新的迭代法，七十年代初，*A.brant* 进一步总结研究和发展了多重网格法。后来，许多计算数学家对多层网格方法的理论和应用问题作了深入的研究。多层网格方法有效地利用了迭代过程的误差校正特性和对高频误差分量的光滑特性，改变了传统的做法，对迭代过程作了变革性的构造。多重网格方法的敛速与 $h$ 无关，其计算工作量为 $o(N)$,因而多层网格方法是一种高效率迭代法。

多重网格方法已成为求解偏微分方程近似解的一个强有力的工具,为了进一步理解多重网格方法的理论，许多文献进行了广泛而深入的研究。文献[18][27][28]提出各种问题的多重网格方法分析，这些方法都需要在求解系统上建立起一定的光滑性、逼近性和正则性假设。对于对称正定椭圆型边值问题，有各种不同类型的求解方法[20][22][25][31][29]进行大量深入的研究。对对称正定椭圆型边值问题的求解已经比较成熟。由于 Fourier analysis 应用范围有限往往只应用特殊区域（如矩形区域)，所以更多的求解方法都是经变分或有限元多重网格法格式获得的,在这些方法当中，一些文献[13][18]先通过求得二重网格收敛性估计结果然后去推导出多重网格法得收敛估计；另一些文献直接推导收敛因子的递推关系式，然后证明收敛因子的某种范数是小于 1 的不等式。协调有限元多重网格法解对称正定椭圆边值问题，往往要对求解边界，光滑子作一定的正则性、逼近性假设，读者可参文献[13][18][20][22][23][25]。由于他们的的思想和处理问题的方法,对后面工作有重要的影响,故在这章介绍无正则性二阶椭圆型边值问题的多重网格方法的收敛性。我们先介绍一般的多重网格方法的有关概念和有关算子选择。

## 3.1 有限元多重网格算法

考虑二阶椭圆型边值问题：

$$-\nabla(a\nabla u)+bu=f \qquad u\in\Omega \tag{3.1}$$

$$u=0 \qquad u\in\partial\Omega \tag{3.2}$$

其中假设$\Omega\in R^2$是凸多变形区域, $a\in C^1(\bar{\Omega})^{2\times2}$, $b\in C(\bar{\Omega})$, 且有下界$a(x)\ge\alpha>0$, $b(x)\ge0$。

方程(3.1)(3.2)写成变分形式为：求$u\in H^2(\Omega)\bigcap H_0^1(\Omega)$使得

$$a(u,v)=(f,v),\forall v\in H_0^1(\Omega) \tag{3.3}$$

其中$a(u,v)=\int_\Omega(a\nabla u\nabla v+buv)dx,\ (f,v)=\int_\Omega fvdx$。

定义 sobolev 空间$H^k(\Omega)$的模为

$$\|u\|_{H^k}^2=\sum_{|\beta|\le k}(D^\beta u,D^\beta u)$$

以及对应于双线性形式$a(u,v)$的能量模为

$$|||u|||^2=a(u,u)$$

显然$H^1$模和能量模有等价性

$$\frac{1}{c}\|u\|_{H^1(\Omega)}\le|||u|||\le c\|u\|_{H^1(\Omega)}$$

由微分方程理论可知，对任意的$f\in L^2(\Omega)=H^0(\Omega)$，(3.3)存在唯一解$u\in H^2(\Omega)\bigcap H_0^1(\Omega)$，并且满足椭圆方程的正则性条件

$$\|u\|_{H^2(\Omega)}\le c(a,b,\Omega)\|f\|_{L^2(\Omega)}$$

设$\Gamma_k,k\ge 1$是区域$\Omega$的一族三角网格剖分，其中$\Gamma_k$是由连接$\Gamma_{k-1}$中三角形的三边中点得到的网格剖分，$\Gamma_{k-1}$满足剖分的拟一致条件，即

$$\frac{h_{k-1}}{\rho_{k-1}}\le\lambda \tag{3.4}$$

其中$h_{k-1}=\max_{\tau\in\Gamma_{k-1}}h_\tau$，($h_\tau$三角形$\tau$的最长边)，$\rho_{k-1}=\min_{\tau\in\Gamma_{k-1}}\rho_\tau$，($\rho_\tau$三角形$\tau$的内切圆的直径)，$\lambda=$常数。

由上述剖分约定，三角形网格剖分$\Gamma_k$也满足拟一致条件(3.4)，而且有$h_k=\frac{1}{2}h_{k-1}$。

设$M_k$是对应于三角形剖分$\Gamma_k$的分片线性插值有限元空间，由于上述三角形剖分是嵌套的，可知有限元空间$M_k(k\ge 1)$为嵌套有限元空间，即$M_{k-1}\subset M_k\subset H_0^1(\Omega)$ $(k\ge 1)$。

问题(3.3)的有限元方法为：求$u_k\in M_k$使得

$$a(u_k,v_k)=(f,v_k)\quad\forall v\in M_k \tag{3.5}$$

设$\psi_i^k(i=1,2,\cdots,N_k)$为有限元空间$M_k$的基函数，$N_k$为$M_k$的维数，那么式(3.5)写成向量形式为

$$A_kx_k=b_k \tag{3.6}$$

其中矩阵$A_k=(a(\psi_i^k,\psi_j^k))_{i,j=1}^{N_k}$，右端向量$b_k=((f,\psi_j^k))_{j=1}^{N_k}$，解向量$x_k=(x_j^k)_{j=1}^{N_k}$为函数$u_k=\sum_{j=1}^{N_k}x_j^k\psi_j^k\in M_k$的系数。

通常有限元方法就是求解方程(3.6)，从而得到方程(3.3)的一个近似解。以下我们来考虑求解方程(3.6)的多重网格方法。

设$I_k$为网格转移算子[032]，$I_k:M_{k-1}\to M_k$。由于$M_k$为嵌套有限元空间$M_{k-1}\subset M_k$，因此$I_k$为自然内射算子，即$I_k|_{M_{k-1}}v=v$，对$\forall v\in M_{k-1}$。

定义$I_k$算子关于$L^2$内积的共轭算子（约束算子）$I_k^t:M_k\to M_{k-1}$为

$$(I_k^tu_k,v_{k-1})=(u_k,I_kv_{k-1}),\ \forall u_k\in M_k,v_k\in M_{k-1}$$

则可知$I_k^t$为$I_k$的转置算子。

又因为存在一个$N_{k-1}\times N_k$的矩阵$B_k=(b_{i,j})_{N_{k-1}\times N_k}$满足

$$\psi_i^{k-1}=\sum_{j=1}^{N_k}b_{i,j}\psi_j^k,\ i=1,2,\cdots,N_{k-1}$$

其中$\{\psi_i^{k-1}\}_{i=1}^{N_{k-1}}$为有限元空间$M_{k-1}$的基函数，因此对任何函数$u_{k-1}\in M_{k-1}\subset M_k$有

$$u_{k-1}=\sum_{i=1}^{N_k}y_i^k\psi_i^k=\sum_{i=1}^{N_{k-1}}x_i^{k-1}\psi_i^{k-1}$$

$$=\sum_{i=1}^{N_{k-1}}\sum_{j=1}^{N_k}x_i^{k-1}b_{i,j}\psi_j^k=\sum_{j=1}^{N_k}\sum_{i=1}^{N_{k-1}}x_i^{k-1}b_{i,j}\psi_j^k$$

得到关系式

$$y_k=B_k^T x_{k-1}$$

即网格转移算子$I_k=B_k^T$,因而$I_k^T=B_k$。

下面我们给出求解方程(3.6)的$k$重网格迭代方法. 设$u_k^0=\sum_{i=1}^{N_k}x_i^{k,0}\psi_i^k$为方程(3.6)解的一个初始近似值，$u_k^{\nu_1+\nu_2+1}=MG(k,x_k^0,b_k)=\sum_{i=1}^{N_k}x_i^{k,\nu_1+\nu_2+1}\psi_i^k$为下述$k$重网格方法的迭代解：

1)前光滑：若$k=1$，则$u_1=MG(1,x_1^0,b_1)$由直接求解(3.6)得到.

若$k>1$，则$u_k^{\nu_1}\in M_k$由下述递归定义的迭代方法得到

$$x_k^q=x_k^{q-1}+R_k^t(b_k-A_kx_k^{q-1})\qquad q=1,2,\cdots,\nu_1 \tag{3.7}$$

其中$R_k^t$表示光滑子.

2)粗网格校正：设$\upsilon_{k-1}\in M_{k-1}$为下述粗网格方程的解

$$A_{k-1}y_{k-1}=B_k(b_k-A_kx_k^{\nu_1}) \tag{3.8}$$

若$k=1$，则$\upsilon_{k-1}$由(3.8)直接解出.

若$k>1$，则$\upsilon_{k-1}\in M_{k-1}$的近似解$\upsilon_{k-1}^{\mu}=\sum_{i=1}^{N_{k-1}}y_i^{k-1,\mu}\psi_i^{k-1}$由下列递归定义的迭代方法得到

$$\upsilon_{k-1}^0=0$$

$$\upsilon_{k-1}^{\mu}=MG(k-1,y_{k-1}^{\mu-1},\bar{b}_{k-1})$$

其中$\mu=1$或2，$\bar{b}_k=B_k(b_k-A_kx_k^{\nu_1})$。

$$x_k^{\nu_1+1}=x_k^{\nu_1}+B_k^Ty_{k-1}^{\mu}$$

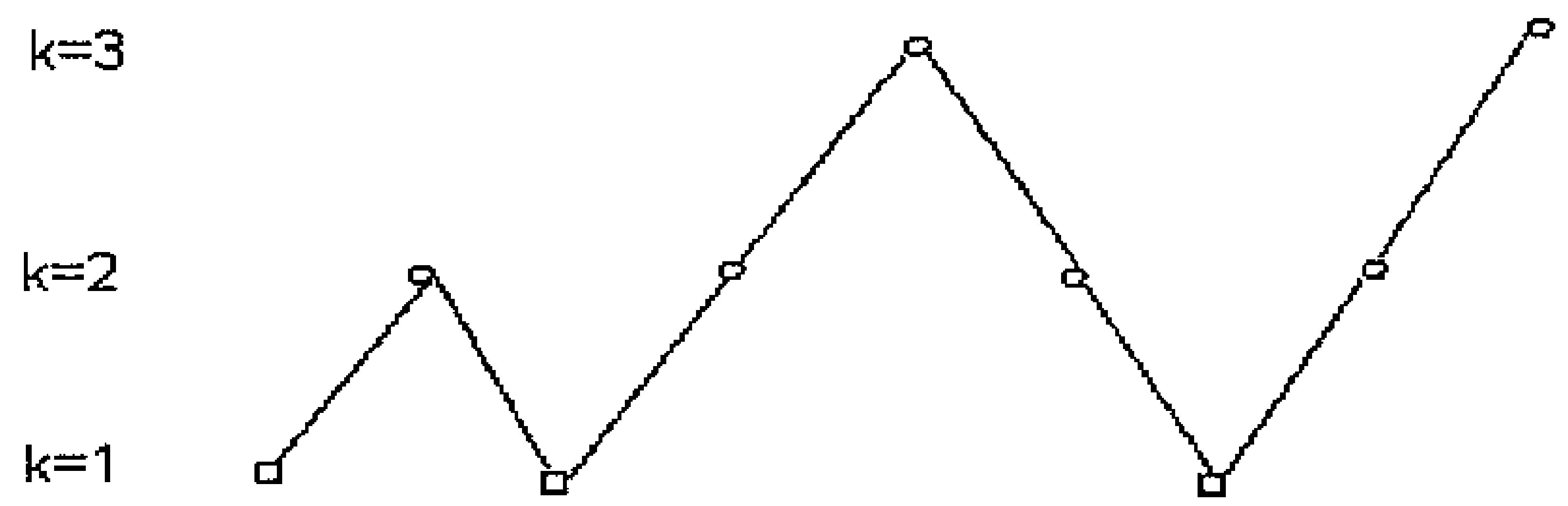
所以得到解$u_k^{\nu_1+1}=\sum_{i=1}^{N_k}x_i^{k,\nu_1+1}\psi_i^k$

3)后光滑：对$q=\nu_1+2,\nu_1+3,\cdots,\nu_1+\nu_2+1$，$u_k^{\nu_1+\nu_2+1}$由光滑迭代(3.7)求解得到。

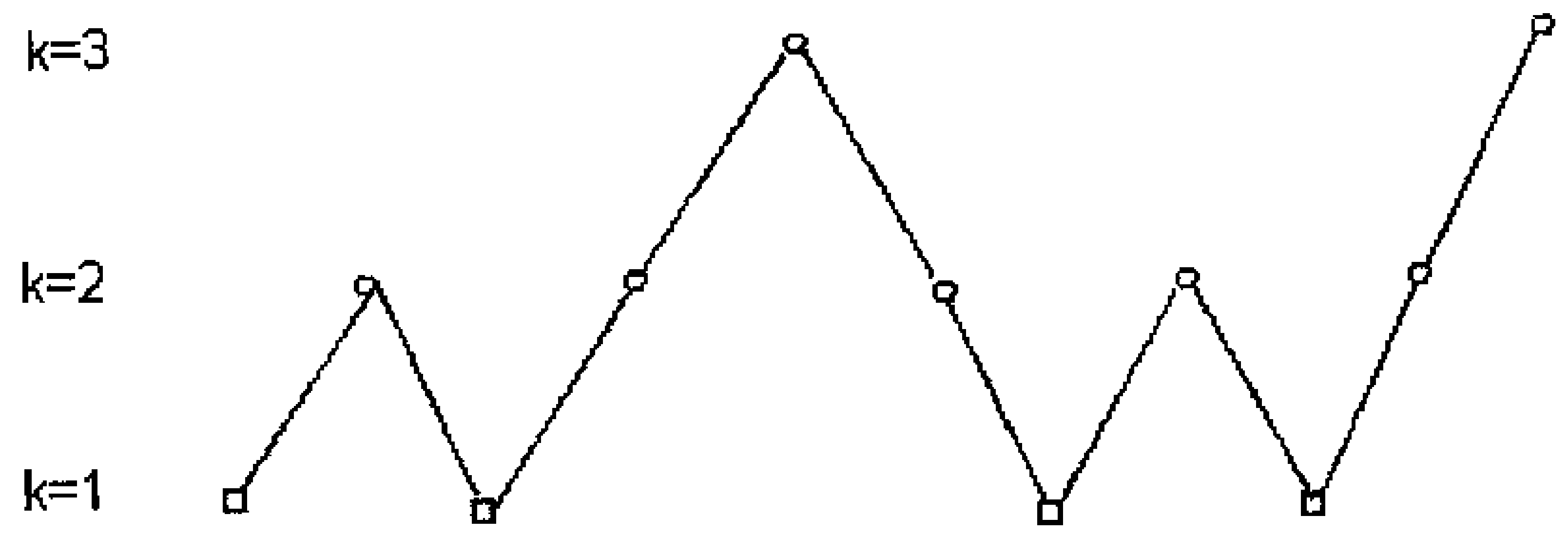
通常我们把$\mu=1$，称为$V(\nu_1,\nu_2)$－循环，$\mu=2$称为$W(\nu_1,\nu_2)$－循环。

用图形表示上述多重网格方法的迭代求解过程

当 $\mu=1$, V-循环的图形为




当 $\mu=2$ 时, W-循环图形为




○-表示光滑迭代　　　　　　　□-表示精确求解

\-表示细网格到粗网格的约束　　　/-表示粗网格到细网格的延拓

$\mu$-表示循环次数参数

## 3.2 多重网格方法算子符号介绍

为了大致介绍多重网格方法的思想过程，我们将有关算子详细表示出来，一个多重网格方法的 $V(W)$-循环步骤如下:

为了求解最细网格层上的离散方程

$$A_l x_l = b_l \tag{3.9}$$

由上述算法

1) 前光滑: 若 $k=1$, 则 $u_1 = MG(1, x_1^0, b_1)$ 由直接求解(3.6)得到.

若 $k>1$, 则 $u_k^{\nu_1} \in M_k$ 由下述递归定义的迭代方法得到

$$x_k^q = x_k^{q-1} + R_k^t (b_k - A_k x_k^{q-1}) \qquad q = 1,2,\cdots,\nu_1$$

其中 $R_k^t$ 表示光滑子.

2) 粗网格校正: 设 $\upsilon_{k-1} \in M_{k-1}$ 为下述粗网格方程的解

$$A_{k-1} y_{k-1} = B_k (b_k - A_k x_k^{\nu_1})$$

若 $k=1$, 则 $\upsilon_{k-1}$ 由(3.8)直接解出.

若 $k>1$, 则 $\upsilon_{k-1} \in M_{k-1}$ 的近似解 $\upsilon_{k-1}^{\mu} = \sum_{i=1}^{N_{k-1}} y_i^{k-1,\mu} \psi_i^{k-1}$ 由下列递归定义的迭代方法得到

$$\upsilon_{k-1}^{0}=0$$
$$\upsilon_{k-1}^{\mu}=MG(k-1,y_{k-1}^{\mu-1},\bar{b}_{k-1})$$

其中 $\mu=1$或$2$, $\bar{b}_k=B_k(b_k-A_kx_k^{\nu_1})$。

$$x_k^{\nu_1+1}=x_k^{\nu_1}+B_k^Ty_{k-1}^{\mu}$$

所以得到解 $u_k^{\nu_1+1}=\sum_{i=1}^{N_k}x_i^{k,\nu_1+1}\psi_i^k$

3)后光滑:

对 $q=\nu_1+2,\nu_1+3,\cdots,\nu_1+\nu_2+1$, $u_k^{\nu_1+\nu_2+1}$ 由光滑迭代(3.7)求解得到， $u_k^{\nu_1+\nu_2+1}=MG(k,x_k^0,b_k)=\sum_{i=1}^{N_k}x_i^{k,\nu_1+\nu_2+1}\psi_i^k$ 为 $k$ 重网格方法的迭代解。

接下来我们给出一些算子的选取情况，我们考虑有限元离散和有限差分离散化后的算子选取情况，为了说明两种离散方式的一致性。我们特地假设初始剖分区域是矩形区域。

1. 基本迭代法

假设 $A$ 是对称正定矩阵，光滑迭代公式(3.7)中 $R_k^t$ 取不同的算子就得到不同得迭代关系式。

$$R_k^t=\begin{cases}\omega & Richardson\text{迭代法}\\ D^{-1} & Jacobi\text{迭代法}\\ \omega D^{-1} & \text{阻尼}Jacobi\text{迭代法}\\ (D-L)^{-1} & Guass-seidel\text{迭代法}\\ \omega(D-\omega L)^{-1} & SOR\text{迭代法}\end{cases}$$

**命题 2.** 设 $A$ 是对称正定矩阵，则有

1) $Richardson$ 迭代法是收敛的充要条件是 $0<\omega<2/\rho(A)$;

2) $Jacobi$ 迭代法是收敛的充要条件是 $2D-A$ 是对称正定的;

3) 阻尼 $Jacobi$ 迭代法是收敛的充要条件是 $0<\omega<2/\rho(D^{-1}A)$;

4) $Gauss-seidel$ 迭代法总是收敛的;

5) 逐次超松驰迭代法（SOR）方法是收敛的充要条件是 $0<\omega<2$。

在通常情况下，阻尼 $Jacobi$ 迭代的光滑性比 $Jacobi$ 好，但比 $Gauss-seidel$ 要差，超松驰的光滑性比 $Gauss-seidel$ 要差。

2. 粗、细网格的选取

我们列举三种常用网格剖分，记细网格为

$\Omega_{H_{k+1}}=\Omega\cap\{(h_{k+1},l_{k+1})\mid k=1,2,\cdots\},H_{k+1}=(h_{k+1},l_{k+1})=2^{-k}H_1$， $k=1,2,\cdots J$

为初始细网格。

若 $H_{k+1}=\frac{1}{2}H_k=(\frac{1}{2}h_k,\frac{1}{2}l_k)$，则称 $\Omega_{H_{k+1}}$ 为标准粗化网格，标准粗化网格是常

用的。

若$H_{k+1}=(\frac{1}{2}h_k,l_k)$或$H_{k+1}=(h_k,\frac{1}{2}l_k)$，则称$\Omega_{H_{k+1}}$为半粗化网格，它常采用逐线松驰光滑，具有很好的光滑作用。

红黑粗化网格：$\Omega_{H_{k+1}}$的网格点以棋盘分划方式分布于细网格$\Omega_{H_k}$的节点上，当$\Omega_{H_k}$是正方形网格时，将其旋转$\pi/4$，并把网格步长放大到$\sqrt{2}h$就得到$\Omega_{H_k}$。

3. 限制算子的选择

最简单的限制算子就是投影限制算子，即含粗网格点的值等于相应细网格点的值。

除了投影限制算子外，一般按下列法则选取限制算子：

$$I_{k+1}^{k}=\frac{1}{2^d}(I_k^{k+1})^T$$

其中 T 表示共轭转置，d 表示线性插值算子的维数。

设$\Omega_{H_k}$为标准粗化网格，即$H_k=2H_{k+1}=(2h_{k+1},2l_{k+1})$。限制算子$I_{k+1}^k$的作用是将$\Omega_{H_k+1}$上的网格函数变换为$\Omega_{H_k}$上的网格函数，其星形离散格式写成如下形式：

$$I_{k+1}^{k}=\begin{bmatrix} r_{-1,1} & r_{0,1} & r_{1,1} \\ r_{-1,0} & r_{0,0} & r_{1,0} \\ r_{-1,-1} & r_{0,-1} & r_{1,-1} \end{bmatrix}_{k+1}^{k}$$

常用的限制算子有全权限制算子和直接限制算子（又称九点限制）

$$I_{k+1}^{k}=\frac{1}{16}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{k+1}^{k} \quad 和\ I_{k+1}^{k}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{k+1}^{k}$$

通常使用的线性限制算子（又称七点限制），它适合三角形上的线性有限元为

$$I_{k+1}^{k}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{k+1}^{k}$$

通常采用半粗化网格$\Omega_{H_k}$，全权限制算子的局部格式性如

$$I_{k+1}^{k}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{k+1}^{k}$$

4. 内插算子的选择

内插算子的作用是将$\Omega_{H_k}$上的网格函数变换为$\Omega_{H_{k+1}}$上的网格函数，它可以写成局部离散格式，此时内插算子写成

$$I_k^{k+1}=\begin{bmatrix} p_{-1,1} & p_{0,1} & p_{1,1} \\ p_{-1,0} & p_{0,0} & p_{1,0} \\ p_{-1,-1} & p_{0,-1} & p_{1,-1} \end{bmatrix}_k^{k+1}$$

粗网格函数值$u_{i,j}^k$经内插算子作用后，被加权地分配到细网格上去。

通常使用的双线性插值算子（标准粗化、红黑粗化）（又称九点延拓）为

$$I_k^{k+1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}_k^{k+1}$$

通常使用的线性插值算子（又称七点延拓），它适合三角形上的线性元为

$$I_k^{k+1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}_k^{k+1}$$

通常对于半粗化网格情形，线性内插算子形如

$$I_k^{k+1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}_k^{k+1}$$

## 3.3 一些重要的性质

本节我们给出有限元空间的一些重要的性质。

1 近似性:

对任何给定的$u\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$，存在$u_k\in M_k$使得

$$\| u-u_k \|_{L^2(\Omega)}+h_k \| u-u_k \|_{H^1(\Omega)} \le c(\lambda,\Omega)h_k^2 \| u \|_{H^2(\Omega)}$$

2 有限元逆不等式:

$$\| u_k \|_{H^1(\Omega)} \le ch_k^{-1} \| u_k \|_{L^2(\Omega)}$$

3 能量模和模$H^1$等价性:

$$\frac{1}{c} \| u \|_{H^1(\Omega)} \le ||| u ||| \le c \| u \|_{H^1(\Omega)}$$

4 椭圆正则性

设存在一个与$f$无关的常数$\alpha$，方程(3.1)的解$u$满足椭圆正则性假设

$$\| u \|_{H^{1+\alpha}} \le c \| f \|_{H^{\alpha-1}}$$

其中$\alpha\in[0,1]$。若$\alpha=1$，则上述式子为完全椭圆正则性假设条件。

5 标准假设条件[19]

C1：设存在一个常数$C_R\ge 1$，使得

$$(u,u)_k \le \lambda_k C_R(\bar{R}_k u,u)_k$$

其中 $\bar{R}=(I-K_k^t K_k)A_k^{-1}$ 或 $\bar{R}=(I-K_k K_k^t)A_k^{-1}$， $\lambda_k$ 是 $A_k$ 的最大特征值。

C2：设 $T_k=R_k A_k P_k$，存在一个与 $k$ 无关的常数 $\theta$（$\theta<2$），使得

$$A(T_k v, T_k v)\le \theta A(v,v)$$

C3：对于 $k>1$，总存在一个与 $k$ 无关的常数 $c$，使得

$$A(T_k v, v)_k \le c\lambda_k^{-1} A(v,v)$$

6 弱假设条件(无正则的逼近性性质)

假设 C4：设存在与 $k$ 无关的常数 $C_1$ 和 $C_2$，使得

$$\|(Q_k-Q_{k-1})u\|_k^2\le c_1\lambda_k^{-1}A;(u,u),\quad k=1,2,\cdots,J$$

$$A(Q_k u, Q_k u)\le c_2 A(u,u),\qquad k=0,1,2\ \cdots J-1$$

假设 C5：设存在一个与 $k$ 无关的常数 $C_R\ge 1$，使得

$$\|u\|_k^2\le \lambda_k C_R(R_k u,u)_k$$

7 弱假设条件(弱正则性、逼近性)[25]

假设 C6：设存在一个常数 $c_0\ge 1$，使得

$$A(v,v)\le c_0[A(P_1 v,v)+\sum_{k=2}^{J}\frac{\|\bar{A}_k\bar{P}_k v\|^2}{\lambda_k}\qquad \forall v\in M_J$$

其中 $\bar{A}_k,\bar{P}_k$ 类似 $A_k,P_k$ 在 $M_J$ 上的定义。

8 引理 1 设 $\lambda_k$ 是 $A_k$ 的最大特征值，$h_k$ 是对应三角剖分 $\tau_k$ 的网格步长，总存在一个与 $k$ 无关的常数 $c_0$，则

$$\lambda_k\le c_0 h_k^{-2}, k=1,2,\cdots,J$$

证明：对任意的 $u_k\in M_k$，$u_k=\sum_{i=1}^{N_k}x_i^k\psi_i^k$，定义它的系数向量离散 $l_2$ 模为

$$\|u_k\|_{l_2}=h_k^2\sum_{i=1}^{N_k}(x_i^k)^2$$

以及相应的内积为

$$(u_k,v_k)_{l_2}=h_k^2\sum_{i=1}^{N_k}x_i^k y_i^k$$

设 $\lambda_i^k$ 和 $\varphi_i^k$ 是双线性形式 $a(\cdot,\cdot)$ 的特征值和特征向量，即对 $\forall \upsilon\in M_k$ 有

$$a(\varphi_i^k,\upsilon)=\lambda_i^k(\varphi_i^k,\upsilon)_{l^2},\ i=1,2,\cdots,N_k$$

由 $a(\cdot,\cdot)$ 的对称性，我们可以假设 $\lambda_i^k$ 和 $\varphi_i^k$ 满足

$$0<\lambda_1^k\le\lambda_2^k\le\cdots\le\lambda_{N_k}^k,\ (\varphi_i^k,\varphi_j^k)=\delta_{i,j}$$

其中 $\delta_{i,j}$ 为 Kronecker 符号。由能量模和模 $H^1$ 等价性

$$\lambda_i^k=\lambda_i^k(\varphi_i^k\varphi_i^k)_{l_2}=a(\varphi_i^k,\varphi_i^k)$$

$$=\|\!|\varphi_i^k|\!\|^2\le c\|\varphi_i^k\|_{H^1}^2\le ch_k^{-2}\|\varphi_i^k\|_{L^2(\Omega)}^2\le ch_k^{-2}$$

对收敛性的分析我们可以由不同的性质与假设得到不同的收敛性。例如由条件 $C4, C5$ 可得下列定理

定理 1[22]设 $R_k$ 满足 $C4$和$C5$,由引言中的对称与非对称多重网格方法收敛,即

$$A((I-B_J A_J)u,u) \le \delta_J A(u,u)$$

$$A((I-B_J A_J)u,(I-B_J A_J)u) \le \delta_J A(u,u)$$

其中 $\delta_J = 1-1/[1+C_2^{1/2}+(C_R C_1)^{1/2}]^2$

下一节我们就无正则性条件下分析对称正定对称椭圆问题的多重网格收敛性。

## 3.4 无正则性椭圆型边值问题多重网格方法

标准的多重网格分析需要同时使用正则性和逼近性假设[20][21],这些假设的证明往往需要用到椭圆偏微分方程解的正则性。有不少文献[23][22] 讨论了在没有正则性假设条件下，只有逼近性性质的前提下的收敛性分析。同时文献[18][25]在明显的弱假设条件下，只需逼近性性质证明就可以收敛。对于 $R_k=\alpha_k^{-2}A^t$(A 是对称正定)光滑子，并不满足文献[29]中的假设 C1，文献[30]对假设 C1 作了适当修改使条件变弱进行了对称正定多重网格收敛分析。本节只考虑具有凸边界区域的椭圆型边值问题，在弱假设条件下，无需椭圆型正则性假设条件，在这种非正则性假设条件下，不但适合上述特殊光滑子，而且也符合一般的光滑子。本节着重分析了在上述特殊光滑子下的对称正定多重网格方法 V 循环的收敛性。在弱假设的条件下的对称正定椭圆型边值问题多重网格方法 V-循环的收敛性证明，对于 W 循环可以参考文献[4][18][27]。

### 3.4.1 概念定义

考虑具有齐次边界条件的二阶椭圆型方程

$$Lu=f \qquad u\in\Omega \tag{3.4.1}$$

$$u=0 \qquad u\in\partial\Omega \tag{3.4.2}$$

其中 $\Omega\in R^2$ 是凸多边形区域。

式(3.4.1)对应的变分弱解形式,求 $u\in H_0^1(\Omega)$,使得

$$A(u,v)=(f,v),\text{其中 } v\in H_0^1(\Omega) \tag{3.4.3}$$

其中 $A(u,v)$ 是对称正定双线性形式，$(\cdot,)$ 表示 $L_2(\Omega)$ 上的内积，$H_0^1(\Omega)$ 表示 sobolev 空间。

设 $M_i\,(i=1,2,\cdots,J)$ 是一列有限维网格函数空间，$M_i$ 上的函数对应于网格剖分 $\tau_i$ 是分片线性连续的，$M_{i-1}\subset M_i$。$\tau_i$ 是区域 $\Omega$ 上的一个拟一致三角形剖分，$\tau_{i+1}$ 是通过连接 $\tau_i$ 上的每个三角形内中点之间的连线得到的，$h_{i+1}$ 和 $h_i$ 是对应三角形剖分 $\tau_{i+1}$ 和 $\tau_i$ 的网格步长，显然 $h_{i+1}=2^{-i}h_1$。

现在定义下列算子，设正交投影算子 $P_k$，$Q_k^0$ 和限制算子 $P_{k-1}^0$。

定义 $P_k$：$H_0^1(\Omega)\to M_k$，$Q_k^0$：$L^2(\Omega)\to M_k$

$$A(P_k u,v)=A(u,v)$$
$$(Q_k^0 u,v)=(u,v),\quad v\in M_k$$

在 $M_k\times M_k$ 上定义了离散内积 $(\cdot,\cdot)_k$

$$A_k:\ M_k\to M_k,\ (A_k u,v)_k=A(u,v),\qquad v\in M_k$$
$$P_{k-1}^0:\ M_k\to M_{k-1},\ (P_{k-1}^0 u,v)_{k-1}=(u,v)_k,\quad v\in M_{k-1}$$

由上面的定义，式（3.4.3）改写为

$$A_k u_k=Q_k^0 f$$

### 3.2.2 算法定义

定义线性映射 $Mg_k(w_k,g_k)$： $M_k\to M_k$，并用来近似 $u_k$ 的解。
若 k=1 时，定义 $Mg_1(w_1,g_1)=A_1^{-1}Q_1^0 f$ 为 $u_1$ 的解
若 k>1 时，假设 $Mg_{k-1}(\cdot,\cdot)$ 已经定义，则 $Mg_k(w_k,g_k)$ 定义如下：
（1）前光滑：

$$x_{k-1}=u_{k-1}+R_k^t(g_{k-1}-A_k u_{k-1})$$

（2）粗网格校正：

$$x_k=x_{k-1}+Mg_{k-1}(0,P_{k-1}^0(g_{k-1}-A_k x_{k-1})$$

（3）后光滑：

$$u_k=Mg_k(w_k,g_k)=x_k+R_k(g_k-A_k x_k)$$

以上算法考虑标准多重网格方法 V 循环，其中 $u_{k-1}$ 为第 $k$ 层网格迭代初值,光滑算子 $R_k$： $M_k\to M_k, k=1,2,\cdots,J$ （$R_k^t$ 为 $R_k$ 之转置），$R_k=\alpha_k^{-2}A^t$（$\alpha_k$ 为大于 A 的最大特征值 $\lambda_k$）,$T_k=R_kA_kP_k$,。
设 $E_0=I$，由文献[7]有

$$E_J=(I-T_J)(I-T_{J-1})\cdots(I-T_1)$$
$$E_k=E_{k-1}(I-T_k)\quad,\ k=1,2,\cdots J$$

接下来对上式两边对 $s=1,2,\cdots,k$ 求和得

$$I-E_k=\sum_{s=1}^{k}E_{s-1}T_s\qquad k=1,2,\cdots,J\tag{3.4.4}$$

定义有关范数和离散内积

设 $A(v,v)=\|\cdot\|_A^2$，$\|T\|_A^2=\sup(A(Tu,v)/(\|u\|_A\|v\|_A))$，$u,v\in M_k$，$T_k$：$M_k\to M_k$
下面给出三个常见的假设

假设 3.1 设线性算子 $Q_k$： $M_J\to M_k$，（k=1,2,⋯J）且有 $Q_J=I$，则存在与 k 无关的常数 c, 使得

$$\|(Q_k-Q_{k-1})u\|_k^2\le c\lambda_k^{-1}A(u,u),\quad k=2,3,\cdots J$$
$$A(Q_ku,Q_ku)\le cA(u,u),k=1,2,\cdots J$$

假设 3. 2 设$T_k = R_k A_k P_k$,存在一个与$k$无关的常数$\theta_2(0<\theta_2<2)$,使得

$$A(T_k v, T_k v) \le \theta_2 A(T_k v, v), \quad \forall v \in M_k$$

假设 3. 3 设$R_k = \alpha_k^{-2} A'$,总存在一个与$k$无关的常数$\theta_1$（$0<\theta_1<2$）,使得

$$A(T_k v, v) \le \theta_1 A(v, v), \quad \forall v \in M_k$$

### 3.2.3 多重网格方法 V 循环收敛性

由 3.3 节性质 8 有定理 3.1

**定理** 3.1 设$\lambda_k$是$A_k$的最大特征值，$h_k$是对应三角剖分$\tau_k$的网格步长，总存在一个与$k$无关的常数$c_0$，则

$$\lambda_k \le c_0\, h_k^{-2}, k = 1,2,\cdots,J$$

引理 3. 1 设$T = R_k A_k P_k$总存在一个与$k$无关的常数$c_3$，使得

$$A(u,u) \le c_3 \sum_{k=1}^{J} A(T_k u, u), \quad \forall u \in M_k$$

证明:
$$A(u,u) = A(u, Q_1 u) + \sum_{k=2}^{J} (A_k P_k u, (Q_k - Q_{k-1})u)_k \le$$

$$A(P_1 u, P_1 u)^{\frac{1}{2}} A(Q_1 u, Q_1 u)^{\frac{1}{2}} + \sum_{k=2}^{J} (A_k P_k u, A_k P_k u)_k^{\frac{1}{2}} ((Q_k - Q_{k-1})u, (Q_k - Q_{k-1}))_k^{\frac{1}{2}} \le$$

$$(A(P_1 u, u) + \sum_{k=2}^{J} \frac{\| A_k P_k u \|_k^2}{\alpha_k^2})^{1/2} \; (A(Q_1 u, Q_1 u) + \sum_{k=2}^{J} \alpha_k^2 \, \| (Q_k - Q_{k-1} \|_k^2)^{1/2}$$

不妨设$\alpha_k = (1+\varepsilon)\lambda_k$，$\varepsilon$是常数。

$$A(u,u) \le$$

$$(A(P_1 u, u) + \sum_{k=2}^{J} \frac{\| A_k P_k u \|_k^2}{\alpha_k^2})^{1/2} \; (A(Q_1 u, Q_1 u) + \sum_{k=2}^{J} \; (1+\varepsilon)^2 \lambda_k^2 \, \| (Q_k - Q_{k-1} \|_k^2)^{1/2}$$

定义$P_1 = T_1$，由假设 3.1 和对 $k$>1,$A(T_k u, u) = (\| A_k P_k u \|_k^2)/\alpha_k^2$,得

$$A(u,u) \le c(1 + (1+\varepsilon)^2 \sum_{k=2}^{J} \lambda_k)\, A(T_k u, u)$$

由定理 3.1

$$A(u,u) \le c(1 + 2c_0 (1+\varepsilon)^2 h_2^{-2})\, A(T_k u, u)$$

$$A(u,u) \le c_3 \sum_{k=1}^{J} A(T_k u, u)$$

其中$c_3 = c(1 + 2c_0(1+\varepsilon)^2 h_2^{-2})$

**引理** 3.2 对$k>1$,设$E_k$如文献[7]所定义,由假设 3.2 得

$$A(T_k E_{k-1} v, E_{k-1} v) \le (2-\theta_2)^{-1} A((2I - T_k) E_{k-1} v, T_k E_{k-1} v)$$

证明：$A((2I - T_k)E_{k-1}v, T_k E_{k-1} v) = 2A(T_k E_{k-1} v, E_{k-1} v) - A(T_k E_{k-1} v, T_k E_{k-1} v) \ge$

$$(2-\theta_2) A(T_k E_{k-1} v, E_{k-1} v)$$

下面分析多重网格方法 V 循环的收敛性

**定理 3.2** 设 $R_k = R_k^t$，$R_k$ 满足假设 3.2,3.3 和引理 3. 1，对所有 $J > 0$，总存在一个与网格参数无关的正数 $C_J > 1$，使得

$$A(E_J v, E_J v) \le (1 - \frac{1}{C_J})\ A(v,v)\text{，其中 } C_J = 2C_0(\frac{1}{2-\theta_2} + \frac{\theta_1\theta_2 C}{2-\theta_2})$$

证明:
$$A(u,u) \le C_0 \sum_{k=1}^{J} A(T_k u, u) \le$$

$$2C_0(\sum_{k=1}^{J} A(T_k E_{k-1} v, E_{k-1} v) + \sum_{k=2}^{J} A(T_k (I - E_{k-1}) v, (I - E_{k-1}) v))$$

先考虑
$$\sum_{k=2}^{J} A(T_k (I - E_{k-1}) v, (I - E_{k-1}) v)) = \sum_{k=2}^{J} A(T_k (v - E_{k-1} v), (v - E_{k-1} v)) =$$

$$\sum_{k=2}^{J}\sum_{m=1}^{k-1}\sum_{n=1}^{k-1} A(T_k T_m E_{m-1} v, T_n E_{n-1} v) \le \sum_{k=2}^{J}\sum_{m=1}^{k-1}\sum_{n=1}^{k-1} \theta_1 A(T_m E_{m-1} v, T_n E_{n-1} v) \le$$

$$\sum_{k=2}^{J}\sum_{m=1}^{k-1}\sum_{n=1}^{k-1} \theta_1 A(T_m E_{m-1} v, T_m E_{m-1} v)^{1/2} A(T_n E_{n-1} v, T_n E_{n-1} v)^{1/2} \le$$

$$(\theta_1 / 2)\sum_{k=2}^{J}\sum_{m=1}^{k-1}\sum_{n=1}^{k-1} (A(T_m E_{m-1} v, T_m E_{m-1} v) + A(T_n E_{n-1} v, T_n E_{n-1} v)) \le$$

$$(\theta_1\theta_2 / 2)\sum_{m=2}^{J}\sum_{k=m+1}^{J-1} (k-1) A(T_m E_{m-1} v, E_{m-1} v) + (\theta_1\theta_2 / 2)\sum_{n=2}^{J}\sum_{k=n+1}^{J-1} (k-1) A(T_n E_{n-1} v, E_{n-1} v)) \le$$

记 $C_m = \sum_{k=m+1}^{J-1} (k-1), C_n = \sum_{k=n+1}^{J-1} (k-1)$

$$\sum_{k=2}^{J} A(T_k (I - E_{k-1}) v, (I - E_{k-1}) v)) \le$$

$$(\theta_1\theta_2 / 2)\sum_{m=1}^{J-1} C_m A(T_m E_{m-1} v, E_{m-1} v) + (\theta_1\theta_2 / 2)\sum_{n=1}^{J-1} C_n A(T_n E_{n-1} v, E_{n-1} v)) \le$$

$$(\theta_1\theta_2)(\sum_{m=1}^{J-1} C_m^2)^{1/2}(\sum_{m=1}^{J-1} A^2 (T_m E_{m-1} v, E_{m-1} v))^{1/2}$$

记 $C = (\sum_{m=1}^{J-1} C_m^2)^{1/2}, C = (\sum_{m=1}^{J-1} C_n^2)^{1/2}$

$$(\sum_{k=2}^{J} A(T_k (I - E_{k-1}) v, (I - E_{k-1}) v)))^2 \le (\theta_1^2\theta_2^2 C^2)(\sum_{m=1}^{J-1} A^2 (T_k E_{m-1} v, E_{m-1} v)) \le$$

由引理 3.2，得

$$(\sum_{k=2}^{J} A(T_k (I - E_{k-1}) v, (I - E_{k-1}) v)))^2 \le$$

$$(\theta_1^2\theta_2^2 C_J^2 (2-\theta_2)^{-2})(\sum_{m=1}^{J-1} A((2I - T_m) E_{m-1} v, E_{m-1} v))^2$$

$$\sum_{k=2}^{J} A(T_k (I - E_{k-1}) v, (I - E_{k-1}) v)) \le (\theta_1 \theta_2 C (2-\theta_2)^{-1})(\sum_{m=1}^{J-1} A((2I - T_m) E_{m-1} v, E_{m-1} v))$$

由引理 3.1，得

$$A(u,u) \le c_3 \sum_{k=1}^{J} A(T_k u, u) \le$$

$$2c_3(\sum_{k=1}^{J} A(T_k E_{k-1}v, E_{k-1}v) + \sum_{k=2}^{J} A(T_k(I - E_{k-1})v, (I - E_{k-1})v))$$

所以
$$A(v,v) \le 2c_3(\frac{1}{2-\theta_2} + \frac{\theta_1\theta_2 C}{2-\theta_2}) \sum_{m=1}^{J-1} A(2I - T_m)E_{m-1}v, T_m E_{m-1}v) =$$

$$2c_3(\frac{1}{2-\theta_2} + \frac{\theta_1\theta_2 C}{2-\theta_2})\ (A(v,v) - A(E_J v, E_J v))$$

$$A((E_J u, E_J u) \le (1 - \frac{1}{C_J})\ A(u,u)$$

其中$C_J = 2c_3(\frac{1}{2-\theta_2} + \frac{\theta_1\theta_2 C}{2-\theta_2}) > 1$

故多重网格方法V循环收敛。

# 第四章 非对称不定二阶椭圆型边值问题协调有限元多重网格方法收敛性

非对称不定二阶椭圆型边值问题的协调有限元多重网格方法,自 A.H.Schatz 开始分析讨论不定双线性形式的解的存在性、唯一性和误差估计[39]起，用 Ritz-Galerkin 有限元方法分析非对称不定二阶椭圆边值问题的解，并且给出了在一定条件下的拟最优误差估计。一直以来，研究协调有限元方法分析非对称不定椭圆型边值问题的文献较少，Bank 在文献[4]中分析了所谓的对称和非对称多重网格法算法，随后 J.Mandel[16],J.wang[10]和 Bramble 等[5]对非对称不定椭圆问题的多重网格法格式作了研究。进入九十年代后，开始出现了 Bramble 等[9][17]Jinchao Xu[20],Jinchao Xu[6][7], Bramble[8][9], J.Wang[10]等人用各种方法讨论了非对称不定椭圆型边值问题。由于不同光滑子所需要的假设是不一样的，选择不同的光滑子往往会得到不同的迭代格式，因而收敛性分析就不一样。

## 4.1 非对称不定问题求解概况

在工程和物理问题中，大量的问题模型是非对称不定椭圆型边值问题。通常对称正定问题的各种正则性、逼近性假设往往不能直接照搬到非对称不定椭圆型边值问题的求解。我们主要考虑低阶项的系数不是很大的情况下的非对称不定椭圆边值问题。对称正定椭圆问题有许多很好的求解方法，但我们不能简单地把这些方法搬到非对称不定椭圆型问题的求解当中去。非对称不定椭圆型边值问题的非对称性质主要是由非对称形式中的低阶项引起的，非对称不定椭圆边值问题的收敛性分析是近些年来研究的一个热点，其难点之处是正则性和逼近性假设，参数$\alpha$的限制以及光滑算子的选择。不少学者利用预预处理技术构造预条件子，用预处理共轭梯度法[9]和重叠型（Schwarz 型）区域分解法[31]求解非对称不定椭圆边值问题。不少文献研究了基于 Bank 提出的标准对称算法，文献[4][16][9]分别对 W 循环，V 循环和同时两种循环作了研究，只要粗网格足够细，可以收敛，但文献[4]给出的 V 循环，即使在完全椭圆正则条件下，随着网格层数的增加会出现坏死。基于文献[6]中提出的对称正定算子的扰动格式的基础上，本章建立了类似文献[8][22]的误差减小算子，构造了一个新的误差减少算子的扰动关系式，结合给出的假设和引理，比较简洁地分析了非对称不定二阶椭圆边值问题的收敛性。

## 4.2 有关概念

考虑具有齐次边界条件的二阶椭圆型方程

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_j}(a_{i,j}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i})+\sum_{i=1}^{2}b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+au=f & u\in\Omega \quad (4.1)\\ u=0 & u\in\partial\Omega \quad (4.2)\end{cases}$$

其中$\Omega\in R^2$是凸多边形区域，对每个$x\in\Omega$，$\{a_{i,j}(x)\}$对称且一致正定。设$b_i(x)\in c^1(\bar{\Omega})$，$|a|<c$，其中 $c$是一个与网格无关的常数。

定义双线性形式$A(u,v)$, $\hat{A}(u,v)$和$D(u,v)$

$$A(u,v)=\sum_{i,j=1}^{2}\int_{\Omega}a_{i,j}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}dx+\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}vdx+\int_{\Omega}auvdx$$

$$\hat{A}(u,v)=\sum_{i,j=1}^{2}\int_{\Omega}a_{i,j}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}dx+\int_{\Omega}uvdx,\quad D(u,v)=\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}vdx+\int_{\Omega}(a-1)uvdx$$

显然$A(u,v)=\hat{A}(u,v)+D(u,v)$，$\hat{A}(u,v)$是对称正定的双线性形式。

式(4.1)对应的变分问题的弱解形式,求 $u\in H_0^1(\Omega)$,使得

$$A(u,v)=(f,v),\forall v\in H_0^1(\Omega) \tag{4.3}$$

其中$(\cdot,\cdot)$表示$L_2(\Omega)$上的内积，$H^1(\Omega)$和$H_0^1(\Omega)$表示 sobolev 空间。

设二次型$D(u,v)$满足下列不等式[7]，式(4.5)由分部积分公式得

$$|D(u,v)|\le C\|u\|_1\|v\| \tag{4.4}$$

$$|D(u,v)|\le C\|u\|\,\|v\|_1 \tag{4.5}$$

其中$\|\cdot\|_1$和$\|\cdot\|$分别表示$H^1(\Omega)$和$L_2(\Omega)$上的范数，C 在不同的位置取值不同。

设$M_i(i=1,2,\cdots J)$是一列有限维网格函数空间，其上网格函数相对于网格剖分$\tau_i$是分片线性连续的，$M_{i-1}\subset M_i$。$\tau_i$是区域$\Omega$上的一个拟一致三角剖分，$\tau_{i+1}$是通过连接$\tau_i$上的每个三角形内中点之间的连线得到的，$h_{i+1}$和$h_i$是对应的网格步长，显然$h_{i+1}=2^{-i}h_1$。

现在定义下列算子，设正交投影算子$P_k$，$Q_k$和限制算子$P_{k-1}^0$对任意的$u\in M_k$。

定义$P_k$： $H_0^1(\Omega)\to M_k$，$Q_k$： $L^2(\Omega)\to M_k$

$$\hat{A}(P_k u,v)=\hat{A}(u,v) \tag{4.6}$$

$$(Q_k u,v)=(u,v),\quad v\in M_k \tag{4.7}$$

$$A_k: M_k\to M_k,\ (A_k u,v)=A(u,v),\quad v\in M_k \tag{4.8}$$

在$M_k\times M_k$上定义了离散内积$(\cdot,\cdot)_k$

$$\hat{A}_k;\ M_k\to M_k,\ (\hat{A}_k u,v)_k=\hat{A}(u,v),\qquad v\in M_k \tag{4.9}$$

$$P_{k-1}^0:\ M_k\to M_{k-1},\ (P_{k-1}^0 u,v)_{k-1}=(u,v)_k,\quad v\in M_{k-1} \tag{4.10}$$

由上面的定义，式(4.3)改写为

$$A_k u_k = Q_k f\text{，}\quad u \in M_k \tag{4.11}$$

定义有关范数和离散内积

设 $\hat{A}(v,v)=\|\cdot\|_1^2$，$\|T\|_{\hat{A}}^2=\sup(\hat{A}(Tu,v)/(\|u\|_1\|v\|_1))$，，$T_k$：$M_k \to M_k$，$(\cdot,\cdot)_k$ 是对应有限维空间 $M_k \times M_k$ 上的内积，有 $(\hat{A}_k u,v)_k = A(u,v)$，$u \in M_k, v \in M_k$。

下面给出三个标准假设条件，光滑子应具有适当的尺度。

假设 1[29] 对于 $k>1$，总存在一个与 $k$ 无关的常数 $C_R$，使得

$$(u,u)_k \le \lambda_k C_R (\bar{R}_k u,u)_k$$

其中 $\bar{R}=(I-\hat{K}_k^*\hat{K}_k)A_k^{-1}$ 或 $\bar{R}=(I-\hat{K}_k\hat{K}_k^*)A_k^{-1}$，$\lambda_k$ 是 $\hat{A}_k$ 的最大特征值，*表示关于内积 $\hat{A}(u,v)$ 共轭。

假设 2 设 $\hat{T}_k=\hat{R}_k\hat{A}_k\hat{P}_k$,存在一个与 $k$ 无关的常数 $c_1$（$0<c_1<1$），使得

$$\hat{A}((I-\hat{T}_k)v,v) \le c_1 \hat{A}(v,v)$$

假设 3[20] 对于 $k>1$，总存在一个与 $k$ 无关的常数 $c_2$，使得

$$(\hat{T}_k v,\hat{T}_k v)_k \le c_2 \lambda_k^{-1} \hat{A}(\hat{T}_k v,v)$$

## 4.3 算法和误差减少算子的推导

定义线性映射 $Mg_k(0,Q_k f)$：$M_k \to M_k$，并用来近似 $u_k$ 的解。

若 k=1 时，定义 $Mg_1(0,Q_1 f)=A_1^{-1}Q_1 f$ 为 $u_1$ 的解

若 k>1 时，设 $Mg_{k-2}(0,Q_{k-1}f)$ 已经定义，则 $Mg_{k-1}(0,Q_{k-1}f)$ 定义如下：

(1) 前光滑：

$$x_k = x_{k-1} + R_k^t(Q_k f - A_k x_{k-1})$$

(2) 粗网格校正：

$$x_{k+1} = x_k + q$$

其中 $q = Mg_{k-1}(0,P_{k-1}^0(Q_k f - A_k x_k))$

我们只考虑前光滑和粗网格校正，其中 $x_{k-1}$ 为第 $k$ 层网格迭代初值，光滑算子 $R_k$：$M_k \to M_k, k=1,2,\cdots,J$（$R_k^t$ 为 $R_k$ 之伴随）,以上算法是只有前光滑步的多重网格方法 V 循环,对于其余情况类似建立。

现在接下来推导误差减少算子，设

$$T_k = (I-K_k)P_k = R_k A_k P_k$$

其中 $K_k = (I - R_k^t A_k)$，$T_1 = P_1$

由算子定义知：$P_{k-1}^0 A_k = A_{k-1}P_{k-1}$，$P_{k-1}P_k = P_{k-1}$

设 $u_k$ 为(4.11)式的解

$$e_k^0 = u_k - x_{k-1}, \quad K_k e_k^0 = u_k - x_k, \quad e_k^1 = u_k - x_{k+1},$$

不妨设 $E_k$ 为第 $k$ 层误差减少算子

$$e_k^1 = E_k e_k^0$$

设 q= $Mg_{k-1}(0, P_k^0(Q_k f - A_k x_k))$ 的近似值为 $\bar{q}$，

$$\begin{aligned}\bar{q} &= A_{k-1}^{-1} P_{k-1}^0 (A_k u_k - A_k x_k) \\ &= A_{k-1}^{-1} P_{k-1}^0 (Q_k f - A_k x_k)\end{aligned}$$

设 $\bar{q} - q = E_{k-1}\bar{q}$，则

$$q = (I - E_{k-1})\bar{q}$$

通过变形得

$$u_k - (x_k + q) = u_k - x_k - (I - E_{k-1}) A_{k-1}^{-1} P_{k-1}^0 (A_k u_k - A_k x_k)$$

$$u_k - x_{k+1} = [(I - (I - E_{k-1}) A_{k-1}^{-1} P_{k-1}^0 A_k](u_k - x_k)$$

由算子定义 $P_{k-1}^0 A_k = A_{k-1} P_{k-1}$ 得：

$$e_k^1 = [(I - (I - E_{k-1}) P_{k-1}](u_k - x_k)$$

于是

$$E_k = [(I - (I - E_{k-1}) P_{k-1}] K_k$$

$$E_k P_k = [(I - (I - E_{k-1}) P_{k-1}] K_k P_k$$

因为

$$\begin{aligned}K_k P_k &= (I - R_k A_k) P_k \\ &= P_k - I + (I - R_k A_k P_k) \\ &= P_k - I + (I - T_k)\end{aligned} \tag{4.12}$$

和

$$E_{k-1} P_{k-1} = (I - B_{k-1} A_{k-1}) P_{k-1} = P_{k-1} - I + (I - B_{k-1} A_{k-1} P_{k-1}) \tag{4.13}$$

把式(4.12)(4.13)代入 $E_k P_k = [(I - (I - E_{k-1}) P_{k-1}] K_k P_k$，得

$$\begin{aligned}E_k P_k &= P_k - B_k A_k P_k = \\ &= (P_k - P_{k-1} + P_{k-1} - I + (I - B_{k-1} A_{k-1} P_{k-1}))\ (P_k - I + (I - T_k)) \\ &= (P_k - I + (I - B_{k-1} A_{k-1} P_{k-1}))\ (P_k - I + (I - T_k))\end{aligned}$$

因为

$$((P_k - I) + (I - B_{k-1} A_{k-1} P_{k-1}))(P_k - I) = 0$$

$$(P_k - I)(I - T_k) = P_k - I$$

所以

$$\begin{aligned}&P_k - B_k A_k P_k = \\ &= P_k - I + (I - B_{k-1} A_{k-1} P_{k-1})\ (I - T_k)\end{aligned}$$

所以

$$I - B_k A_k P_k = (I - B_{k-1} A_{k-1} P_{k-1})(I - T_k)$$

$$I + (E_k - I)P_k = (I + (E_{k-1} - I)P_{k-1})(I - T_k)$$

定义 $E_0 = I$ ，由于 $P_{k-1}(I - P_k) = 0$ 和 $P_J = I$ 有

$$E = E_J = (I - T_J)(I - T_{J-1})\cdots(I - T_1)$$

$$E_k = E_{k-1}(I - T_k), k = 1,2\cdots J \tag{4.14}$$

再考虑对称正定问题 $\hat{A}_k u_k = Q_k f$

类似上面的讨论有

$$\hat{E} = \hat{E}_J = (I - \hat{T}_J)(I - \hat{T}_{J-1})\cdots(I - \hat{T}_1) \tag{4.15}$$

$$\hat{E}_k = \hat{E}_{k-1}(I - \hat{T}_k) \quad k = 1,2\cdots J \tag{4.16}$$

其中 $\hat{T} = (I - \hat{K}_k)\hat{P}_k = \hat{R}_k \hat{A}_k \hat{P}_k$， $\hat{K}_k = I - \hat{R}_k \hat{A}_k, \hat{R}_k$ 是光滑迭代子。

## 4.4 收敛性

引理 1 对 $k > 1$，设 $\hat{E}_k$ 如（4.16）式所定义，由假设 2 得,总存在一个 $c_1 < 1$，

$$\hat{A}(\hat{E}_k v, v) \le c_1^k \hat{A}(v,v)$$

证明： 因为 $\hat{A}((I - \hat{T}_k)v,v) \le c_1 \hat{A}(v,v)$

$$\hat{A}(\hat{E}_k v, v) = \hat{A}((I - \hat{T}_k)(I - \hat{T}_{k-1})\cdots(I - \hat{T}_1)v, v) \le c_1^k \hat{A}(v,v)$$

引理 2[32] 对 $k > 1$，设 $\hat{R}_k$ 满足假设 1、2 和 3，则存在一个与网格层数 $J$ 无关的正常数 $\sigma_1 < 1$，使得

$$\hat{A}(\hat{E}_J v, v) \le \sigma_1 \hat{A}(v,v), \quad v \in M_J$$

引理 3[8] 设 $\hat{T}_k = \hat{R}_k \hat{A}_k \hat{P}_k$ 和 $T_k = R_k A_k P_k$，给定 $c_3 > 0$，总存在一个 $h_0$，对一切 $h_k < h_0$，使得

$$\hat{A}((T_k - \hat{T}_k)v, v) \le c_3 h_k \hat{A}(v,v)$$

引理 4 对 $k > 1$，存在一个常数 $c_5 < 1$，存在一个 $h_0$，对一切 $h_k < h_0$，使得

$$\hat{A}((I - T_k)v, v) \le c_5 \hat{A}(v,v)，其中 c_5 = c_1 + c_3 h_k$$

证明：因为

$$\hat{A}((I - T_k)v, v) = \hat{A}([(I - \hat{T}_k) - (T_k - \hat{T}_k)]v, v) \le$$
$$\hat{A}((I - \hat{T}_k)v, v) + \hat{A}((T_k - \hat{T}_k)v, v)$$

由假设 2 和引理 3，得

$$\hat{A}((I - T_k)v, v) \le c_1 \hat{A}(v,v) + c_3 h_k \hat{A}(v,v) \le c_5 \hat{A}(v,v)，其中 c_5 = c_1 + c_3 h_k$$

引理 5[6] 对给定的 $c_4$>0,总存在某个 $h_0$,对一切 $h_1 < h_0$,使得

$$\hat{A}(\hat{E}_1 v, v) \le c_4 h_1 \hat{A}(v,v)$$

下面分析多重网格方法 V 循环的收敛性

定理 设$R_k=\hat{R}_k$，$R_k$满足假设1、2和3，对所有$h_k<h_0$，总存在$\delta<1$，使得

$$\hat{A}(E_J v,v)\le\delta\hat{A}(v,v)$$

证明:

因为
$$E_k=(I-T_k)(I-T_{k-1})\cdots(I-T_1)$$
$$\hat{E}_k=(I-\hat{T}_k)(I-\hat{T}_{k-1})\cdots(I-\hat{T}_1)$$
$$E_k-\hat{E}_k=(I-T_k)(E_{k-1}-\hat{E}_{k-1})-\hat{E}_{k-1}(T_k-\hat{T}_k)$$
$$\begin{aligned}\hat{A}((E_k-\hat{E}_k)u,u)&=\hat{A}([(I-T_k)(E_{k-1}-\hat{E}_{k-1})-\hat{E}_{k-1}(T_k-\hat{T}_k)]u,u)\\&\le\hat{A}((I-T_k)(E_{k-1}-\hat{E}_{k-1})u,u)+\hat{A}(\hat{E}_{k-1}(T_k-\hat{T}_k)u,u)\\&\le\hat{A}((E_{k-1}-\hat{E}_{k-1})u,u)\ \hat{A}((I-T_k)u,u)+\hat{A}(\hat{E}_{k-1}u,u)\ \hat{A}((T_k-\hat{T}_k)u,u)\end{aligned}$$

由引理3、4得

$$\begin{aligned}\hat{A}((E_k-\hat{E}_k)u,u)\le\hat{A}((E_{k-1}-\hat{E}_{k-1})u,u)(c_1+c_3h_k)+\\\hat{A}(\hat{E}_{k-1}u,u)\ \hat{A}((T_k-\hat{T}_k)u,u)\end{aligned}$$
$$\hat{A}((E_k-\hat{E}_k)u,u)\le\hat{A}((E_{k-1}-\hat{E}_{k-1})u,u)+c_1^{k-1}c_3h_k\ \hat{A}(u,u)$$

两边对$k=2,3,\cdots J$求和

$$\hat{A}((E_J-\hat{E}_J)u,u)\le\hat{A}((E_1-\hat{E}_1)u,u)+\sum_{k=2}^{J}c_1^{k-1}c_3h_k\ \hat{A}(u,u)$$

由引理2得

$$\hat{A}((E_J-\hat{E}_J)u,u)\le\hat{A}((E_1-\hat{E}_1)u,u)+\frac{c_1c_3h_2(1-c_1^{J-2})}{1-c_1}\hat{A}(u,u)$$

$$\hat{A}((E_J-\hat{E}_J)u,u)\le(c_4h_1+\frac{c_1c_3h_2(1-c_1^{J-2})}{1-c_1})\hat{A}(u,u)$$

$$\hat{A}((E_Ju,u)\le(\delta_1+c_4h_1+\frac{c_1c_3h_2(1-c_1^{J-2})}{1-c_1})\hat{A}(u,u)$$

只要粗网格足够细,有

$$\hat{A}((E_Ju,u)\le\delta\hat{A}(u,u)，\text{其中}0<\delta<1,\quad\delta=\delta_1+c_4h_1+\frac{c_1c_3h_2(1-c_1^{J-2})}{1-c_1}$$

故多重网格方法V循环收敛。

# 第五章　无正则性假设非对称不定椭圆边值问题的收敛性

研究非对称不定椭圆边值问题的收敛性往往要一定的正则性条件，到目前为止，只有较少的文献[14][16]研究了在无正则性假设条件下的非对称不定椭圆边值问题多重网格法的收敛性。本节研究了在无正则性假设条件下以 Richardson 为光滑迭代的非对称不定椭圆边值问题的多重网格方法的收敛性。

## 5.1 椭圆边值问题

考虑具有齐次边界条件的非对称不定二阶椭圆型边值问题

$$\begin{cases} -\nabla(\bar{B}\nabla u)+\bar{C}\nabla u+cu=f & (5.1)\\ u=0 & (5.2)\end{cases}$$

其中$\Omega\in R^2$是凸多边形区域，$f\in L^2(\Omega)$,系数$\bar{B}\in(C^1(\bar{\Omega}))^{2\times2}$，$\bar{C}\in(C^1(\Omega))^2$和$c\in C^0(\Omega)$，对每个$x\in\Omega$，$\bar{B}$对称且一致正定。

式(5.1)对应的变分形式,求 $u\in H_0^1(\Omega)$,使得

$$A(u,v)=(f,v) \tag{5.3}$$

其中$v\in H_0^1(\Omega)$,$(\cdot,\cdot)$表示$L_2(\Omega)$上的内积，$H^1(\Omega)$和$H_0^1(\Omega)$表示 sobolev 空间。

定义双线性形式$A(u,v)$,$\hat{A}(u,v)$和$D(u,v)$

$$A(u,v)=\int_\Omega\bar{B}\nabla u\nabla vdx+\int_\Omega\bar{C}\nabla udx+\int_\Omega cuvdx$$

设$A(u,v)=\hat{A}(u,v)+D(u,v)$,其中$\hat{A}(u,v)$是对称正定双线性形式。

设$M_i(i=1,2,\cdots J)$是一列有限维网格函数空间，$M_i$上的函数对应于网格剖分$\tau_i$是分片线性连续的，$M_{i-1}\subset M_i$。$\tau_i$是区域$\Omega$上的一个拟一致三角剖分，$\tau_{i+1}$是通过连接$\tau_i$上的每个三角形内中点之间的连线得到的，$h_{i+1}$和$h_i$是对应的网格步长，显然$h_{i+1}=2^{-i}h_1$。

现在定义下列算子，设正交投影算子$P_k$，$Q_k$和限制算子$P_{k-1}^0$。

$$P_k:\ H_0^1(\Omega)\to M_k,\quad Q_k^0:\ L^2(\Omega)\to M_k\quad A_k:\ M_k\to M_k$$

$$A(P_k u,v)=A(u,v),\quad (Q_k^0u,v)=(u,v),(A_ku,v)=A(u,v),\quad v\in M_k,u\in M_k$$

在$M_k\times M_k$上定义了离散内积$(\cdot,\cdot)$

$$A_k;\ M_k\to M_k,\quad (A_k u,v)_k=A(u,v),\qquad v\in M_k,\ u\in M_k$$

$$P_{k-1}^0:\ M_k\to M_{k-1},\quad (P_{k-1}^0u,v)_{k-1}=(u,v)_k,\quad v\in M_{k-1},u\in M_k$$

由上面的定义，（5.3）式改写为

$$A_k u_k=f_k\qquad (f_k=Q_k^0 f) \tag{5.4}$$

## 5.2 多重网格算法

定义双线性映射$Mg_k(w_k,f_k)$：$M_k \times M_k \to M_k$，并用来近似$u_k$的解。
若 k=1 时，定义$Mg_1(w_1,f_1)=A_1^{-1}f_1$为$u_1$的解
若 k>1 时，假设$Mg_{k-1}(w_k,f_k)$已经定义，则$Mg_k(w_k,f_k)$定义如下：
（1）前光滑：

$$x_{k-1}=u_{k-1}+R_k^t(f_k-A_k u_{k-1})$$

（2）粗网格校正：$x_k=x_{k-1}+q^p$

其中$q^i=q^{i-1}+Mg_{k-1}(0,P_{k-1}^0(f_k-A_k x_{k-1})-A_{k-1}q^{i-1})$，$i=1,2,\cdots p$

（3）后光滑：

$$u_k=Mg_k(w_k,f_k)=x_k+R_k(f_k-A_k x_k)$$

以上算法只考虑前后各一次光滑迭代的标准多重网格方法，$p=1$为 V 循环，$p=2$为 W 循环，其中$u_{k-1}$为第$k$层网格迭代初值，光滑算子$R_k$：$M_k \to M_k$，$k=1,2,\cdots J$，$R_k=\omega\lambda_k^{-1}I$（$R_k^t$为$R_k$之伴随，$\lambda_k$是$A_k$的谱，$0<\omega<1$）。
由文献[037]有，标准多重网格方法的误差减少因子为$E$

$$E_J=(I-T_J)(I-T_{J-1})\cdots(I-T_1) \tag{5.5}$$

$$E_k=E_{k-1}(I-T_k) \qquad k=2,\cdots J \tag{5.6}$$

$$E=E_J\,E_J^t$$

其中$T_k=R_k A_k P_k$。

再考虑对称正定问题 $\hat{A}_k\,u_k=f_k$

类似上面的讨论，标准多重网格方法的误差减少因子为$\hat{E}$

$$\hat{E}_J=(I-\hat{T}_J)(I-\hat{T}_{J-1})\cdots(I-\hat{T}_1) \tag{5.7}$$

$$\hat{E}_k=(I-\hat{T}_k)\hat{E}_{k-1} \quad k=2\cdots J \tag{5.8}$$

$$\hat{E}=\hat{E}_J\,\hat{E}_J^t$$

其中$\hat{T}_k=\hat{R}_k\,\hat{A}_k\,\hat{P}_k$，类似有$\hat{R}_k$是光滑迭代子,$\hat{P}_k$是投影算子。

## 5.3 假设与重要定理

定义有关范数和离散内积

设 $\hat{A}(v,v)=\|\cdot\|_1^2$，$\|T\|_{\hat{A}}^2=\sup(\hat{A}(Tu,v)/(\|u\|_1\|v\|_1)$，$T_k$：$M_k \to M_k$，$(\cdot,\cdot)_k$

是对应有限维空间$M_k \times M_k$上的内积，有$(\hat{A}_k\,u,v)_k=\hat{A}(u,v)$ ，$u\in M_k, v\in M_k$。

引理 1[8]设$T_k=R_k A_k P_k$和$\hat{T}_k=\hat{R}_k\,\hat{A}_k\,\hat{P}_k$，对$k\ge 1$, 总存在一个与$k$无关的$c_1,c_2\ \varepsilon$和$h_1$，对任意$h_k \le h_1(\varepsilon)$，使得

$$\hat{A}((T_k-\hat{T}_k)u,u)\le c_1 h_k \hat{A}(u,u)\,,k\ge 2$$

$$\hat{A}((T_1-\hat{T}_1)u,u)\le c_2\varepsilon\hat{A}(u,u)\,,k=1$$

假设[8]1 设$\hat{T}_k=\hat{R}_k\,\hat{A}_k\,\hat{P}_k$,存在一个与$k$无关的常数$\theta_1(0<\theta_1<2)$,使得

$$\hat{A}(\hat{T}_k v,\hat{T}_k v)\le\theta_1\hat{A}(\hat{T}_k v,v),$$
$$\hat{A}(\hat{T}_k v,\hat{T}_k v)\le\theta_1^2\hat{A}(v,v),\ \forall v\in M_k$$

引理 2 设$T_k=R_kA_kP_k$,存在一个与$k$无关的常数$\theta_2$,使得

$$\hat{A}(T_kv,T_kv)\le\theta_2\hat{A}(T_kv,v),\quad\forall v\in M_k$$

证明：由引理 1,假设 1 和 Schwarz 不等式，得

$$\hat{A}(T_kv,T_kv)=\hat{A}((T_k-\hat{T}_k+\hat{T}_k)v,(T_k-\hat{T}_k+\hat{T}_k)v)\le$$
$$\hat{A}((T_k-\hat{T}_k)v,(T_k-\hat{T}_k)v)+2\hat{A}((T_k-\hat{T}_k)v,\hat{T}_k v)+\hat{A}((\hat{T}_k v,\hat{T}_k v)\le$$
$$((\hat{A}((T_k-\hat{T}_k)v,(T_k-\hat{T}_k)v))^{1/2}+(\hat{A}(\hat{T}_k v,\hat{T}_k v))^{1/2})^2$$

当$k>1$时 $\quad\hat{A}(T_kv,T_kv)\le((c_1h_k+\theta_1)^2A(v,v)\le(c_1h_1+\theta_1)^2A(v,v)$

当$k=1$时 $\quad\hat{A}(T_kv,T_kv)\le((c_2\varepsilon+\theta_1)^2A(v,v)\le(c_2\varepsilon+\theta_1)^2A(v,v)$

取$\theta_2^2=\min((c_1h_1+\theta_1)^2,(c_2\varepsilon+\theta_1)^2)$, 所以

$$\hat{A}(T_kv,T_kv)\le\theta_2^2\hat{A}(v,v),\quad\forall v\in M_k$$

$$\hat{A}(T_kv,T_kv)\le\theta_2\hat{A}(T_kv,v),\quad\forall v\in M_k$$

假设 2 设线性算子$Q_k$：$M_J\to M_k$，（$k$=1,2,$\cdots J$）且有$Q_J=I$，则存在与 k 无关的常数 c, 使得

$$\|(Q_k-Q_{k-1})u\|_k^2\le c\lambda_k^{-1}A(u,u),\quad k=2,3,\cdots J$$
$$A(Q_ku,Q_ku)\le cA(u,u),k=1,2,\cdots J$$

定理 1 设$\hat{T}=\hat{R}_k\hat{A}_k\hat{P}_k$总存在一个与$k$无关的常数$c_3$，使得

$$\hat{A}(u,u)\le c_3\sum_{k=1}^{J}\hat{A}(\hat{T}_k u,u),\quad\forall u\in M_k$$

证明：
$$\hat{A}(u,u)=\hat{A}(u,Q_1u)+\sum_{k=2}^{J}(A_kP_ku,(Q_k-Q_{k-1})u)_k\le$$
$$(\hat{A}(P_1u,u)+\sum_{k=2}^{J}\frac{\omega\|A_kP_ku\|_k^2}{\lambda_k})^{1/2}(\hat{A}(Q_1u,Q_1u)+\sum_{k=2}^{J}\frac{\lambda_k}{\omega}\|(Q_k-Q_{k-1}\|_k^2)^{1/2}$$

由假设 3,定义$P_1=T_1$和对 k>1,$\hat{A}(T_ku,u)=\dfrac{\|A_kP_ku\|_k^2}{\lambda_k}$,得

$$\hat{A}(u,u)\le c_3\sum_{k=1}^{J}\hat{A}(\hat{T}_k u,u)$$

其中$c_3=(c+c(J-2)/\omega)$

引理 3 对$k>1$,设$E_k$如式（5.6）所定义，由引理 2 得

$$\hat{A}(T_kE_{k-1}v,E_{k-1}v)\le(2-\theta_2)^{-1}\hat{A}((2I-T_k)E_{k-1}v,T_kE_{k-1}v)$$

证明：
$$\hat{A}((2I-T_k)E_{k-1}v,T_kE_{k-1}v)=2\hat{A}(T_kE_{k-1}v,E_{k-1}v)-\hat{A}(T_kE_{k-1}v,T_kE_{k-1}v)\ge$$
$$(2-\theta_2)\hat{A}(T_kE_{k-1}v,E_{k-1}v)$$
$$\hat{A}(T_kE_{k-1}v,E_{k-1}v)\le(2-\theta_2)^{-1}\hat{A}((2I-T_k)E_{k-1}v,T_kE_{k-1}v)$$

定理 2 设$T_k = R_k A_k P_k$和$\hat{T}_k = \hat{R}_k \hat{A}_k \hat{P}_k$，总存在一个与$k$无关的常数$c_4$，使得

$$\hat{A}(u,u) \le c_4 \sum_{k=1}^{J} \hat{A}(T_k u,u) \quad , \quad \forall u \in M_k$$

证明：
$$\hat{A}(\hat{T}_k u,u) = \hat{A}((\hat{T}_k - T_k + T_k)u,u) \le \hat{A}((\hat{T}_k - T_k)u,u) + \hat{A}(T_k u,u)$$

由定理 1 和引理 1，得

$$\sum_{k=1}^{J} \hat{A}(\hat{T}_k u,u) \le \sum_{k=1}^{J} \hat{A}((\hat{T} - T_k)u,u) + \sum_{k=1}^{J} \hat{A}(T_k u,u) \le$$

$$(c_2 \varepsilon + \sum_{k=2}^{J} c_1 h_k) \hat{A}(u,u) + \sum_{k=1}^{J} \hat{A}(T_k u,u)$$

$$(1/c_3) \hat{A}(u,u) \le (c_2 \varepsilon + \sum_{k=2}^{J} c_1 h_k) \hat{A}(u,u) + \sum_{k=1}^{J} \hat{A}(T_k u,u)$$

$$\hat{A}(u,u) \le c_4 \sum_{k=1}^{J} \hat{A}(T_k u,u)$$

其中$c_4 = (1 - \varepsilon\ c_2 c_3 - 2c_1 c_3 (1-(1/2)^{J-2}) h_2)/c_3$

接下来，我们给出标准多重网格 V 循环的收敛性分析。

## 5.4 V 循环收敛性

定理 3 设$R_k$满足引理 2、3 和定理 2,对所有$J > 0$，总存在一个与网格尺度无关的正数$C > 1$，使得

$$\hat{A}((E_J u, E_J u) \le (1 - \frac{1}{C}) \hat{A}(u,u)\text{，其中 } C = 2c_4 (\frac{1}{2-\theta_2} + \frac{\theta_2^2 C_J}{2-\theta_2})$$

证明：
$$\hat{A}(u,u) \le c_4 \sum_{k=1}^{J} \hat{A}(T_k u,u) \le$$

$$2c_4 (\sum_{k=1}^{J} \hat{A}(T_k E_{k-1} v, E_{k-1} v) + \sum_{k=2}^{J} \hat{A}(T_k (I - E_{k-1}) v, (I - E_{k-1}) v))$$

先考虑
$$\sum_{k=2}^{J} \hat{A}(T_k (I - E_{k-1}) v, (I - E_{k-1}) v)) = \sum_{k=2}^{J} \hat{A}(T_k (v - E_{k-1} v), (v - E_{k-1} v)) =$$

$$\sum_{k=2}^{J} \sum_{m=1}^{k-1} \sum_{n=1}^{k-1} \hat{A}(T_k T_m E_{m-1} v, T_n E_{n-1} v) \le \sum_{k=2}^{J} \sum_{m=1}^{k-1} \sum_{n=1}^{k-1} \theta_2 \hat{A}(T_m E_{m-1} v, T_n E_{n-1} v) \le$$

$$\sum_{k=2}^{J} \sum_{m=1}^{k-1} \sum_{n=1}^{k-1} \theta_2 \hat{A}(T_m E_{m-1} v, T_m E_{m-1} v)^{1/2} \hat{A}(T_n E_{n-1} v, T_n E_{n-1} v)^{1/2} \le$$

$$(\theta_2/2) \sum_{k=2}^{J} \sum_{m=1}^{k-1} \sum_{n=1}^{k-1} (\hat{A}(T_m E_{m-1} v, T_m E_{m-1} v) + \hat{A}(T_n E_{n-1} v, T_n E_{n-1} v)) \le$$

$$(\theta_2^2/2) \sum_{m=2}^{J} \sum_{k=m+1}^{J-1} (k-1) \hat{A}(T_m E_{m-1} v, E_{m-1} v) + (\theta_2^2/2) \sum_{n=2}^{J} \sum_{k=n+1}^{J-1} (k-1) \hat{A}(T_n E_{n-1} v, E_{n-1} v)) \le$$

记$C_m = \sum_{k=m+1}^{J-1} (k-1)$，$C_n = \sum_{k=n+1}^{J-1} (k-1)$

$$\sum_{k=2}^{J} \hat{A}(T_k (I - E_{k-1}) v, (I - E_{k-1}) v)) \le$$

$$(\theta_2^2/2)\sum_{m=1}^{J-1}C_m A(T_m E_{m-1}v,E_{m-1}v)+(\theta_2^2/2)\sum_{n=1}^{J-1}C_n A(T_n E_{n-1}v,E_{n-1}v))\le$$

$$(\theta_2^2)(\sum_{m=1}^{J-1}C_m^2)^{1/2}(\sum_{m=1}^{J-1}\hat{A}^2(T_m E_{m-1}v,E_{m-1}v))^{1/2}$$

记 $C_J=(\sum_{m=1}^{J-1}C_m^2)^{1/2}$

$$(\sum_{k=2}^{J}\hat{A}(T_k(I-E_{k-1})v,(I-E_{k-1})v)))^2\le(\theta_2^4C_J^2)(\sum_{m=1}^{J-1}\hat{A}^2(T_k E_{m-1}v,E_{m-1}v))\le$$

由引理 2，得

$$(\sum_{k=2}^{J}\hat{A}(T_k(I-E_{k-1})v,(I-E_{k-1})v)))^2\le(\theta_2^4C_J^2(2-\theta_2)^{-2})(\sum_{m=1}^{J-1}\hat{A}((2I-T_m)E_{m-1}v,E_{m-1}v))^2$$

$$\sum_{k=2}^{J}\hat{A}(T_k(I-E_{k-1})v,(I-E_{k-1})v))\le(\theta_2^2C_J(2-\theta_2)^{-1})(\sum_{m=1}^{J-1}\hat{A}((2I-T_m)E_{m-1}v,E_{m-1}v))$$

由引理 3，得

$$\hat{A}(u,u)\le c_4\sum_{k=1}^{J}\hat{A}(T_k u,u)\le$$

$$2c_4(\sum_{k=1}^{J}\hat{A}(T_k E_{k-1}v,E_{k-1}v)+\sum_{k=2}^{J}\hat{A}(T_k(I-E_{k-1})v,(I-E_{k-1})v))$$

所以 $$\hat{A}(v,v)\le 2c_4(\frac{1}{2-\theta_2}+\frac{\theta_2^2C_J}{2-\theta_2})\sum_{m=1}^{J-1}\hat{A}(2I-T_m)E_{m-1}v,T_m E_{m-1}v)=$$

$$2c_4(\frac{1}{2-\theta_2}+\frac{\theta_2^2C_J}{2-\theta_2})(\hat{A}(v,v)-\hat{A}(E_Jv,E_Jv))$$

只要粗网格足够细

$$\hat{A}((E_Ju,E_Ju)\le(1-\frac{1}{C})\hat{A}(u,u)\text{，其中 }C=2c_4(\frac{1}{2-\theta_2}+\frac{\theta_2^2C_J}{2-\theta_2})>1$$

故多重网格方法 V 循环收敛。

# 参考文献

[1] N.S.Bakhvalov. On the convergence of a relaxation method with natural constraints on the elliptic operator. Zh.Vychisl.Mat.mat.Fiz,6(1996):861-885.

[2] W.Hackbusch.The convergence of a multi-grid iteration applied to finite element equations.Report Universitat zu Koln,July,1977.

[3] R.A.Nicolaides. On multi-grid convergence in the indefinite case. Math.Comp. 1978.Vol.32, No.144: 1082-1086.

[4] R.E.Bank. A comparision of two multilevel iterative methods for nonsymmetric and indefinite elliptic finite element equation]. J.Numer.Anal, 18(1981):724-743.

[5] J.H.Bramble,J.E.Pascial,Jinchao.Xu. The analysis of multigrid algorithms for nonsymmetric and indefinite elliptic problems. Math Comp, 1988,Vol.51,Number.184: 389-414.

[6] Jinchao Xu. An class of irerative methods for nonselfadjoint or indefinite problems. J.Numer. Anal ,1992,Vol.29,N0.2: 303-319.

[7] Jinchao.Xu, Xiaochuan. Cai. A precondition GMRES method for nonsymmetric or indefinite problems. Math Comp,1992,Vol.59,No.200:311-319.

[8] J.H.Bramble,K.Y.Kwak,J.E.Pasciak. Uniform convergence of multigrid V-cycle iterations for indefinite and nonsymmetric problems. J.Number.Anal,1994,Vol.31,N0.6:1746-1763.

[9] J.H.Bramble,Z.Leyk,J.E.Pascial. Iterative schemes for nonsymmetric and indefinite elliptic boundary value problems. Math Comp,1993,Vol.60,No.201:1-22.

[10] J.Wang,. Convergence analysis of multigrid algorithms for non-selfadjoint and indefinite elli -ptic problems.In Proceedings of the 5'th Copper Mountain Conference on Multigrid Methods 1991.

[11]Asktrakhantsev.G.P. An iterative method of solving elliptic net problems. USSR.Comput. Math.Phys.11(1971):171-182.

[12] A.Brandt. Multi-level adaptive technique (MLAT)for fast numerical solution to boundary ualue problems. Lecture. Notes. In. Phys,18(1973):22-89.

[13] R.E.Bank,T.F.Dupont. An optimal order process for solving elliptic finite element equations. Math comp,1981,Vol.36,No.153:35-51.

[14] Junping Wang. Convergence analysis of the Schwarz algorithm and multilevel decomposition iterative methods II :nonselfadjoint and indefinite elliptic problems. J.Numer. Anal, 1993,Vol.30, N0.4:953-970.

[15] Junping Wang. Convergence analysis of the multigrid algorithm for nonselfadjoint and indefinite elliptic problems. J.Numer.Anal,1993,Vol.30,No.1:275-285.

[16] J.Mandel. Multigrid convergence for nonsymmetric indefinite variational problems and one smoothing step. Appl. Math.Comp,19(1986):201-216.

[17]J.H.Bramble. Preconditioned iterative methods for nonselfadjoint or indefinite elliptic boundary value problems,in Unification of Finite Element Methods.H.Kardestuncer,ed.。Elsevier Science Publ.North-Holland, New York,1984:167-184.

[18] W. Hackbush. Multi-grid Methods and Applications. Springer-Verlag,1985.

[19] J.H.Bramble,J.E.Pasciak. The analysis of smoother for multigrid algorithms. Math Comp, 1993,Vol.58,No.198:467-488.

[20] J H Bramble,J.E.Pasciak. New convergence estimates for multigrid algorithms. Math Comp. 1987,Vol.49, No.180:311-329.

[21] J.Mandel,S.F.McCormick,R.E. Bank. Variational multigrid theory, Multigrid Methods. SIAM,Philadelphia,PA,1987:131-187.

[22] J.H.Bramble,J.E.Pasciak,Junping.Wang,et al. Convergence estimates for mulitgrid algorithms without regul-arity assumptions]. Math Comp,1991,Vol.57,No.195:23-45.

[23] J.H.Bramble,J.E.Pasciak,Jinchao Xu. Parallel multilevel preconditioners. Math Comp, 1990, Vol.55,No.191:1-22.

[24] D.Bai, A.Brandt. Local mesh refinement multilevel techniques. J.Sci.Stat.Comput.8(1987) :109-134.

[25] J.H.Bramble,J.E.Pasciak. New estimates for multilevel algorithms including the V-cycle. Math Comp,1993,Vol.60,No.202:447-471.

[26] W.Briggs.Multigrid tutorial. Philadelghia,1987.

[27] U.Trottenberg ,A.Brandt,P.Oswald,K.Stüben,et al. Multigrid. Academic Press, 2001.

[28] McCormick S ed. Multigrid methods,fronties in applied mathematics. Vol.5, Philadelphia, 1987.

[29] J.H.Bramble,J.E.Pasciak. The analysis of smoothers for multigrid algorithms. Math Comp. 1992,Vol.58, No. 198:467-488.

[30] K.S.Kang,et al. Convergence estimates for multigrid algorithms. Computers. Math.Applic, 1997,Vol.34,No.9:15-22.

[31] J.H.Bramble,J.E.Pasciak,Junping.Wang,et al. Convergence estimates for product iterative methods with applications to domain decomposition. Math Comp, 1991, Vol.57, No.195: 1-21.

[32] McCormick. S, Ruge .J. Multigrid methods for variational problems. J.Numer.Anal, 1982 (19):924—929.

[33] 刘超群. 多重网格法及其在计算流体力学中的应用. 清华大学出版社,1995.

[34] 谢德宣. 多重网格迭代分析的基本假设及收敛率估计.湖南大学学报, 1990,Vol.17,No. 2:103-112.

[35] McCormick S. Multigrid methods for Variational problems. J.Number.Anal,1984 (21): 255-

263.

[36] 曹志浩. 多格子方法.复旦大学出版社. 1989.

[37] Fedorenko.R.P.A. A relaxing method for solving elliptic difference equations. USSR. Com -put.Math. Phys.4(1961):1092-1096.

[38] Fedorenko.T.P. The speed of convergence of one iterative process equations. USSR.Comput. Math.and Math .Phys.4(1964):227-235.

[39] A.H.Schatz An observation concerning Ritz-Galerkin methods with indefinite bilinear forms. Math Comp,1974,Vol.28,No.128:959-962.

# 致谢

在短暂的硕士研究生学习生活中，我得到了来自导师、亲人、朋友及同学对我各方面得关怀及帮助，使我得以顺利走过这一人生道路重要的旅程。在我人生的旅途中留下了许多美好的回忆和难以忘怀的经历，我深深地感谢他们，并将以此激励自己不断进取，自强不息！

首先衷心感谢我的导师钟尔杰教授。在我学习生活中，他给予我细心关怀和极大的精神鼓励，在他悉心的指导下才使本文得以顺利完成。导师严谨的治学态度、渊博的专业知识、高度的敬业精神深深地影响着我。在此，谨向导师表示衷心的感谢和崇高的敬意！

同时，对给予我大力支持和帮助过我的应用数学学院领导、老师们表示衷心的感谢！对杨春老师给我提供资料在此深表谢意！

在学习期间，我要感谢我的父母、爱人、同学和朋友，他们的关心和支持始终激励我勤奋学习，不断进取！

衷心感谢所有关心、帮助和支持过我的人们！

# 个人简历及研究成果

罗志强，男，生于73年10月9日，电子科技大学应用数学学院2002级计算数学研究生。主要从事偏微分方程数值解等方面的研究。导师：钟尔杰副教授。

在校期间研究成果：

1. 罗志强, 钟尔杰. 任意多边形面积公式的推导及其应用. 大学数学，录用.
2. 罗志强, 钟尔杰. 多重网格方法误差迭代分析. 电子科大学报，录用.
3. 罗志强, 钟尔杰. 非对称不定椭圆边值问题多重网格方法的收敛分析. 电子科大学报，录用.
4. 罗志强, 钟尔杰. 非正则性多重网格法收敛估计. 哈尔滨理工大学学报,初审.
5. 罗志强, 钟尔杰. 以 Richardson 为光滑化的非对称不定椭圆边值问题多重网格法收敛性. 四川师范大学学报,初审.