基于程函方程的 $2D$ 射线追踪

刘在旺

2021 年 12 月 29 日

考虑一个速度模型

$$v(x,z) = 1000 - 0.5z + 0.25x, \quad (x,z) \in [0,8000] \times [-4000,0]$$

使用特征线法，可以将程函方程转化为一组常微分方程

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} &= v(x,z)p_x \\ \frac{dp_x}{ds} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{v(x,z)}\right) \\ \frac{dz}{ds} &= v(x,z)p_z \\ \frac{dp_z}{ds} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{v(x,z)}\right) \\ \frac{dT}{ds} &= \frac{1}{v(x,z)} \end{cases} \tag{1}$$

期中 x 和 y 是射线所在位置，p_x 和 p_z 为方向余弦。给定初始条件 $x_0, y_0, p_{x_0} = \frac{\sin\theta}{v(x_0,z_0)}, p_{z_0} = \frac{\cos(\theta)}{v(x_0,z_0)}$，其中 θ 是射线与竖直方向夹角。

显然，(1) 中最后一个方程没有耦合在系统中，我们只做射线追踪时可以不计算走时。记

$$\begin{cases} \vec{y} = (x,z,p_x,p_z)^T \\ f_1(\vec{y}) = v(x,z)p_x \\ f_2(\vec{y}) = v(x,z)p_z \\ f_3(\vec{y}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{v(x,z)}\right) \\ f_4(\vec{y}) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{v(x,z)}\right) \\ \vec{f}(\vec{y}) = (f_1,f_2,f_3,f_4)^T \end{cases} \tag{2}$$

显然得到

$$\frac{d\vec{y}}{ds} = \vec{f}(\vec{y}) \tag{3}$$

接下来采取四阶龙格库塔方法求解 (3) 方程，设射线的步长为 h，我们可以得到迭代公式

$$\begin{cases} \vec{y}_{n+1} = \vec{y}_n + \frac{h}{6}(\vec{K}_1 + 2\vec{K}_2 + 2\vec{K}_3 + \vec{K}) \\ \vec{k}_1 = \vec{f}(\vec{y}_n) \\ \vec{k}_2 = \vec{f}(\vec{y}_n + \frac{h}{2}\vec{k}_1) \\ \vec{k}_3 = \vec{f}(\vec{y}_n + \frac{h}{2}\vec{k}_2) \\ \vec{k}_4 = \vec{f}(\vec{y}_n + \vec{k}_3) \end{cases}$$