人工智能之机器学习

朴素贝叶斯（Naive Bayes）

主讲人：李老师

思考：

引子：三门问题

参赛者会看见三扇关闭了的门，其中一扇的后面有一辆汽车，选中后面有车的那扇门可赢得该汽车，另外两扇门后面则各藏有一只山羊。当参赛者选定了一扇门，但未去开启它的时候，节目主持人开启剩下两扇门的其中一扇，露出其中一只山羊。主持人其后会问参赛者要不要换另一扇仍然关上的门。问题是：换另一扇门会否增加参赛者赢得汽车的机率？

思考：

1. 最开始的时候，我们对这三扇门之后有什么一无所知，所以我们最好的做法是公平对待三扇门，我们假设$A_n, n = 1, 2, 3$为第n个门之后有汽车，那么我们有$P(A_n) = 1/3$。
2. 假设我们选择门1，主持人打开了门2，这时根据我们打开的门之后是否有汽车，主持人打开的门的概率是会有变化的：如果门1后有汽车，对于一般人（精神正常的人）来说，主持人打开门2和门3的概率基本上应该是一致的，为1/2；如果门2后有汽车，主持人打开门2的概率是0，如果门3后有汽车，主持人打开门2的概率是1。
3. 我们设B为主持人打开了门2，那么我们可以得到：$P(B|A_1) = 1/2$，$P(B|A_2) = 0$，$P(B|A_3) = 1$，也就是2的概率解释。那么我们计算$P(A_1|B)$，这个式子表示我们在得到主持人打开了门2，后面没有汽车这个事实之后，对于$P(A_1)$这个概率的调整：

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B)}$$

，而$P(B)$可以通过全概率公式计算：

$$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3) = 1/2$$

4. 计算得到$P(A_1|B) = 1/3$，这个的含义就是，当我们得到事实B时，我们对先验概率$P(A_n)$的值调整为了后验概率$P(A_n|B)$。当然如上所见，1门后有汽车的整体概率仍然没有变化，其实变化的是$P(A_2|B)$与$P(A_3|B)$，$P(A_2) = 1/3$变成了$P(A_2|B) = 0$，$P(A_3) = 1/3$变成了$P(A_3|B) = 2/3$，提高的概率足够令我们改变自己的决策。

数学回顾：乘法公式、全概率公式、贝叶斯公式

- 条件概率
  - 设A，B为任意两个事件，若P(A)>0，我们称在已知事件A发生的条件下，事件B发生的概率为条件概率，记为P(B|A)，并定义

$$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

- 乘法公式
  - 如果P(A)>0，则P(AB)=P(A)P(B|A)
  - 如果P(A1...An-1)>0，则$P(A_1...A_n) = P(A_1)\ P(A_2|A_1)\ P(A_3|A_1A_2)...P(A_n|A_1...A_n)$

条件概率及三个公式（乘法公式、全概率公式、贝叶斯公式）

- 全概率公式
  - 如果 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$，$A_i A_j = \phi$(对一切$i \neq j$) ，$P(A_i)>0$，则对任一事件B，有

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)$$

  - 全概率公式是用于计算某个“结果” B发生的可能性大小。如果一个结果B的发生总是与某些前提条件 A_i 相联系，那么在计算P(B)时，我们就要用 A_i 对B作分解，应用全概率公式计算P(B)，我们常称这种方法为**全集分解法**。
  - 根据小偷们的资料，计算村子今晚失窃概率的问题：$P(A_i)$表示小偷 i 作案的概率，$P(B|A_i)$表示小偷 i 作案成功的概率，那么P(B)就是村子失窃的概率

条件概率及三个公式（乘法公式、全概率公式、贝叶斯公式）

- 贝叶斯公式（又称逆概公式）
  - 如果 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$，$A_i A_j = \phi$(对一切$i \neq j$)，P(Ai)>0，则对任一事件B，只要P(B)>0，有

$$P(A_j \mid B) = \frac{P(A_j B)}{P(B)} = \frac{P(A_j)P(B \mid A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)} (i, j = 1,2,\ldots,n)$$

  - 如果在B发生的条件下探求导致这一结果的各种“原因” A_j 发生的可能性大小$P(A_j \mid B)$，则要应用贝叶斯公式
  - 若村子今晚失窃，计算哪个小偷嫌疑最大的问题（嫌疑最大就是后验概率最大）

朴素贝叶斯直观理解

- 肤色x1={黑，黄}， 发型x2={卷，直}； 地区label={亚，非}
- 比如告诉你一个人，其肤色=黑，发型=卷，那么你会预测这个人的地区为亚洲还是非洲?

朴素贝叶斯直观理解

- 模型构建：根据资料计算模型参数
  - 亚洲人的比例
  - 非洲人的比例
  - 亚洲人中肤色=黑的比例
  - 亚洲人中肤色=黄的比例
  - 非洲人中肤色=黑的比例
  - 非洲人中肤色=黄的比例
  - 亚洲人中发型=卷的比例
  - 亚洲人中发型=直的比例
  - 非洲人中发型=卷的比例
  - 非洲人中发型=直的比例

朴素贝叶斯直观理解

- 例子
  - 有一个训练集包含100个人，其中有60个非洲人（黑卷*47, 黑直*1, 黄卷*11, 黄直*1），有40个亚洲人（黑卷*1, 黄卷*4, 黄直*35），请训练朴素贝叶斯模型
- 先计算先验概率：

$$P(\text{非洲}) = \frac{60}{100}, P(\text{亚洲}) = \frac{40}{100}$$

- 再计算每一个特征的条件概率：

$$P(\text{黑} \mid \text{非洲}) = \frac{48}{60}, P(\text{黄} \mid \text{非洲}) = \frac{12}{60}, P(\text{直} \mid \text{非洲}) = \frac{2}{60}, P(\text{卷} \mid \text{非洲}) = \frac{58}{60}$$

$$P(\text{黑} \mid \text{亚洲}) = \frac{1}{40}, P(\text{黄} \mid \text{亚洲}) = \frac{39}{40}, P(\text{直} \mid \text{亚洲}) = \frac{35}{40}, P(\text{卷} \mid \text{亚洲}) = \frac{5}{40}$$

朴素贝叶斯直观理解

- 假设新来了一个人【[黑，卷]，地区=？】，请用朴素贝叶斯模型预测这个人的地区。Y表示地区，X表示特征向量，根据贝叶斯公式，并假设特征间独立的假设有：

$$P(Y|X)=\frac{P(Y)\times P(X|Y)}{P(X)} \xrightarrow{\text{条件独立性假设}} P(Y|X)=\frac{P(Y)\times P(X^{(1)}|Y)\times P(X^{(2)}|Y)}{P(X)}$$

- 和特征间独立的假设（朴素），得

$$P(\text{非洲}|\text{黑卷})=P(\text{非洲})P(\text{黑}|\text{非洲})P(\text{卷}|\text{非洲})=\frac{60}{100}\cdot\frac{48}{60}\cdot\frac{58}{60}$$

$$P(\text{亚洲}|\text{黑卷})=P(\text{亚洲})P(\text{黑}|\text{亚洲})P(\text{卷}|\text{亚洲})=\frac{40}{100}\cdot\frac{1}{40}\cdot\frac{5}{40}$$

$$P(X=x|Y=c_k)=P(X^{(1)}=x^{(1)},\cdots,X^{(n)}=x^{(n)}|Y=c_k)=\prod_{j=1}^{n}P(X^{(j)}=x^{(j)}|Y=c_k)$$

- 根据计算结果，模型会将这个人的地区预测为非洲。

朴素贝叶斯算法推导

$$P(y \mid x_1, x_2, \ldots x_m) = \frac{P(y)P(x_1, x_2, \ldots x_m \mid y)}{P(x_1, x_2, \ldots x_m)}$$

- 特征属性之间是独立的，所以得到：$P(x_i \mid y, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m) = P(x_i \mid y)$
- 公式优化得到：

$$P(y \mid x_1, x_2, \ldots x_m) = \frac{P(y)P(x_1, x_2, \ldots x_m \mid y)}{P(x_1, x_2, \ldots x_m)} = \frac{P(y)\prod_{i=1}^{m} P(x_i \mid y)}{P(x_1, x_2, \ldots x_m)}$$

- 在给定样本的情况下，$P(x_1, x_2, \ldots, x_m)$是常数，所以得到：

$$P(y \mid x_1, x_2, \ldots x_m) \propto P(y)\prod_{i=1}^{m} P(x_i \mid y)$$

- 从而：

$$\hat{y} = \arg\max_{y} P(y)\prod_{i=1}^{m} P(x_i \mid y)$$

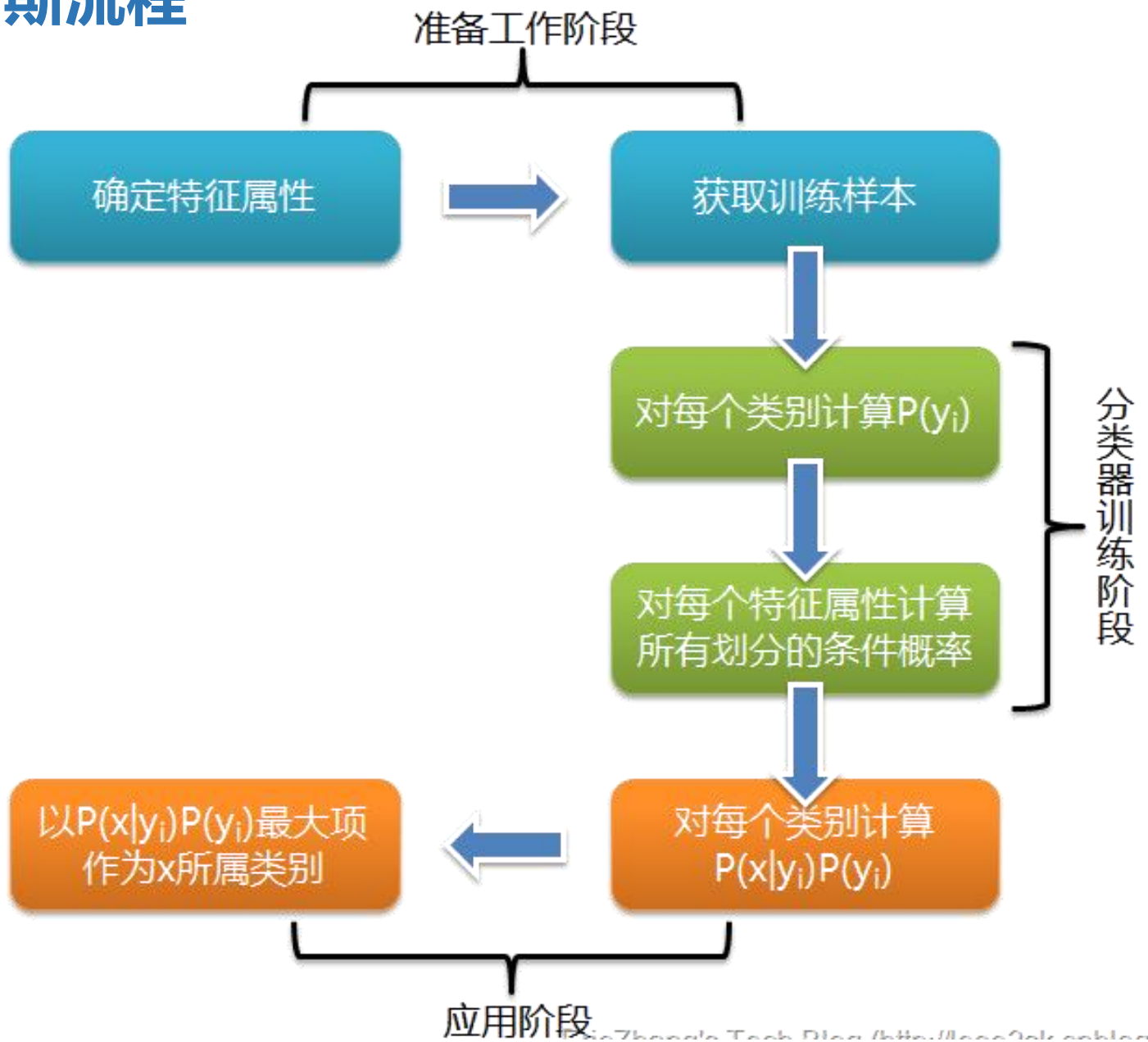
朴素贝叶斯算法流程

- 朴素贝叶斯算法流程/定义如下：
  - 设x={x_1,x_2,…,x_m}为待分类项，其中x_i为x的一个特征属性
  - 类别集合为C={y_1,y_2,…,y_n}
  - 分别计算P(y_1|x),P(y_2|x),….,P(y_n|x)的值（贝叶斯公式）
  - 如果P(y_k|x)=max{P(y_1|x),P(y_2|x),….,P(y_n|x)},那么认为x为y_k类型

$$P(y \mid x_1, x_2, \ldots x_m) = \frac{P(y)P(x_1, x_2, \ldots x_m \mid y)}{P(x_1, x_2, \ldots x_m)}$$

$$P(y \mid x_1, x_2, \ldots x_m) \propto P(y)\prod_{i=1}^{m} P(x_i \mid y)$$

朴素贝叶斯流程


准备工作阶段
确定特征属性
获取训练样本
对每个类别计算P(yi)
对每个特征属性计算
所有划分的条件概率
分类器训练阶段
对每个类别计算
P(x|yi)P(yi)
以P(x|yi)P(yi)最大项
作为x所属类别
应用阶段

高斯朴素贝叶斯

- Gaussian Naive Bayes是指当特征属性为连续值时，而且分布服从高斯分布，那么在计算P(x|y)的时候可以直接使用高斯分布的概率公式：

$$g(x,\eta,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\eta)^2}{2\sigma^2}}$$

$$P(x_i \mid y_k)=g(x_i,\eta_{i,y_k},\sigma_{i,y_k})$$

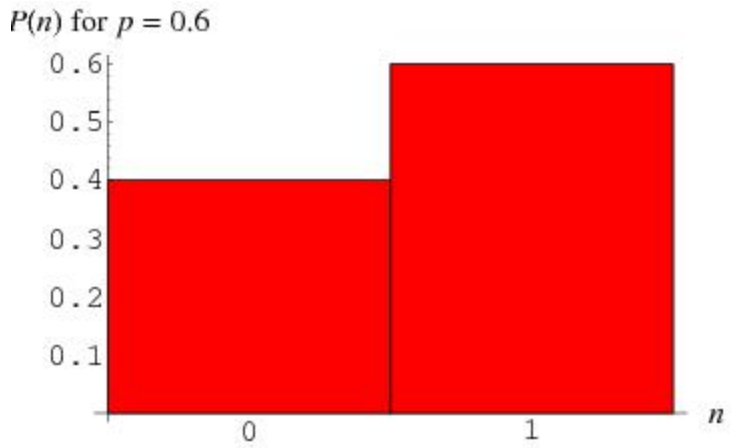
- 因此只需要计算出各个类别中此特征项划分的各个均值和标准差

伯努利朴素贝叶斯

- Bernoulli Naive Bayes是指当特征属性为连续值时，而且分布服从伯努利分布，那么在计算P(x|y)的时候可以直接使用伯努利分布的概率公式：

$$P(x_k \mid y) = P(1 \mid y)x_k + \big(1 - P(1 \mid y)\big)\big(1 - x_k\big)$$

- 伯努利分布是一种离散分布，只有两种可能的结果。1表示成功，出现的概率为p；0表示失败，出现的概率为q=1-p；其中均值为E(x)=p，方差为Var(X)=p(1-p)



多项式朴素贝叶斯

- Multinomial Naive Bayes是指当特征属性服从多项分布(特征是离散的形式的时候)，直接计算类别数目的占比作为先验概率和条件概率。

$$p(y_k)=\frac{N_{y_k}+\alpha}{N+k*\alpha} \qquad p(x_i|y_k)=\frac{N_{y_k,x_i}+\alpha}{N_{y_k}+n_i*\alpha}$$

- N是总样本个数，k是总的类别个数，N_{yk}是类别为yk的样本个数，α为平滑值。
- N_{yk}是类别为yk的样本个数，n_i为特征属性xi的不同取值数目，$N_{yk,xi}$为类别yk中第i维特征的值为xi的样本个数，α为平滑值。
- 当α=1时，称为Laplace平滑，当0<α<1时，称为Lidstone平滑，α=0时不做平滑；平滑的主要作用是可以克服条件概率为0的问题。

朴素贝叶斯有一个问题

- 继续前文的引例，考虑一个这样的问题：
- 假设某人的地区完全依靠其肤色的就能确定，发型是一个对判断地区没有参考价值的特征，假设P(卷|非洲)=0， P(卷|亚洲)=0.001，当来了一个【黑，卷】人的时候，我们算出

$$P(\text{非洲})P(\text{黑}\,|\,\text{非洲})P(\text{卷}\,|\,\text{非洲}) = 0$$

$$P(\text{亚洲})P(\text{黑}\,|\,\text{亚洲})P(\text{卷}\,|\,\text{亚洲}) = 0.00001$$

- 然后被预测为亚洲人，傻了吧？
- 原因：出现某个模型参数为0时，0乘任何数都=0，直接影响到后验概率的计算结果。

拉普拉斯平滑

- 解决这一问题的方法是使用平滑操作，改造先验概率公式：

$$P(\text{非洲}) = \frac{60+\lambda}{100+len\{\text{亚洲，非洲}\}\cdot\lambda} = \frac{60+\lambda}{100+2\cdot\lambda}$$

- 改造每个特征的条件概率公式（这里只列举了2个）：

$$P(\text{黑}\,|\,\text{非洲}) = \frac{48+\lambda}{60+len\{\text{黑,白}\}\cdot\lambda} = \frac{48+\lambda}{60+2\cdot\lambda}$$

$$P(\text{直}\,|\,\text{非洲}) = \frac{2+\lambda}{60+len\{\text{直,卷}\}\cdot\lambda} = \frac{2+\lambda}{60+2\cdot\lambda}$$

- 在随机变量各个取值的频数上赋予一个正数，当时$\lambda=1$，称为拉普拉斯平滑

多项式朴素贝叶斯案例理解

- 对于下列训练数据，使用多项式朴素贝叶斯方式对测试样本(2,M,L)做一个预测判断。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	4
x2	S	M	S	L	S	S	L	L	L	S
x3	L	H	L	H	L	M	H	M	H	M
y	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	1

$$N = 10$$
$$k = 2 \; n_1 = 4$$
$$n_2 = 3 \; n_3 = 3$$

	x1=1	x1=2	x1=3	x1=4	
y=1	2	1	2	1	6
y=-1	1	3	0	0	4
	3	4	2	1	10

	x2=S	x2=M	x2=L	
y=1	2	1	3	6
y=-1	3	0	1	4
	5	1	4	10

	x3=L	x3=M	x3=H	
y=1	1	2	3	6
y=-1	2	1	1	4
	3	3	4	10

多项式朴素贝叶斯案例理解

$$\alpha = 0$$

- 先验概率：

$$p(y=1) = 6/10 = 0.6 \qquad p(y=-1) = 4/10 = 0.4$$

- 条件概率：

$$p(x_1=1|y=1) = \frac{2}{6} \qquad p(x_1=1|y=-1) = \frac{1}{4}$$

$$p(x_1=2|y=1) = \frac{1}{6} \qquad p(x_1=2|y=-1) = \frac{3}{4}$$

$$p(x_1=3|y=1) = \frac{2}{6} \qquad p(x_1=3|y=-1) = 0$$

$$p(x_1=4|y=1) = \frac{1}{6} \qquad p(x_1=4|y=-1) = 0$$

$$p(x_2=S|y=1) = \frac{2}{6} \qquad p(x_2=S|y=-1) = \frac{3}{4}$$

$$p(x_2=M|y=1) = \frac{1}{6} \qquad p(x_2=M|y=-1) = 0$$

$$p(x_2=L|y=1) = \frac{3}{6} \qquad p(x_2=L|y=-1) = \frac{1}{4}$$

多项式朴素贝叶斯案例理解

- 条件概率：

$$p(x_3 = L|y=1) = \frac{1}{6} \qquad p(x_3 = L|y=-1) = \frac{2}{4}$$

$$p(x_3 = M|y=1) = \frac{2}{6} \qquad p(x_3 = M|y=-1) = \frac{1}{4}$$

$$p(x_3 = H|y=1) = \frac{3}{6} \qquad p(x_3 = H|y=-1) = \frac{1}{4}$$

- 样本(2,M,L)的预测概率：

$$\alpha = 0$$

$$p(y=1|x) \propto p(y=1)p(x_1=2|y=1)p(x_2=M|y=1)p(x_3=L|y=1) = \frac{6}{10} * \frac{1}{6} * \frac{1}{6} * \frac{1}{6} = \frac{1}{360}$$

$$p(y=-1|x) \propto p(y=-1)p(x_1=2|y=-1)p(x_2=M|y=-1)p(x_3=L|y=-1) = \frac{4}{10} * \frac{3}{4} * 0 * \frac{2}{4} = 0$$

$$\hat{y} = \arg\max_y \{p(y=1|x), p(y=-1|x)\} = 1$$

多项式朴素贝叶斯案例理解

$$\alpha = 1$$

- 先验概率：

$$p(y=1) = (6+1)/(10+2*1) = 7/12 \qquad p(y=-1) = 5/12$$

- 条件概率：

$$p(x_1=1|y=1) = \frac{3}{10} \qquad p(x_1=1|y=-1) = \frac{2}{8} \qquad p(x_2=S|y=1) = \frac{3}{9} \qquad p(x_2=S|y=-1) = \frac{4}{7}$$

$$p(x_1=2|y=1) = \frac{2}{10} \qquad p(x_1=2|y=-1) = \frac{4}{8} \qquad p(x_2=M|y=1) = \frac{2}{9} \qquad p(x_2=M|y=-1) = \frac{1}{7}$$

$$p(x_1=3|y=1) = \frac{3}{10} \qquad p(x_1=3|y=-1) = \frac{1}{8} \qquad p(x_2=L|y=1) = \frac{4}{9} \qquad p(x_2=L|y=-1) = \frac{2}{7}$$

$$p(x_1=4|y=1) = \frac{2}{10} \qquad p(x_1=4|y=-1) = \frac{1}{8}$$

多项式朴素贝叶斯案例理解

- 条件概率：

$$p(x_3 = L|y = 1) = \frac{2}{9} \qquad p(x_3 = L|y = -1) = \frac{3}{7}$$

$$p(x_3 = M|y = 1) = \frac{3}{9} \qquad p(x_3 = M|y = -1) = \frac{2}{7}$$

$$p(x_3 = H|y = 1) = \frac{4}{9} \qquad p(x_3 = H|y = -1) = \frac{2}{7}$$

- 样本(2,M,L)的预测概率概率：

$$\alpha = 1$$

$$p(y = 1|x) \propto p(y = 1)p(x_1 = 2|y = 1)p(x_2 = M|y = 1)p(x_3 = L|y = 1) = \frac{7}{12} * \frac{2}{10} * \frac{2}{9} * \frac{2}{9} = \frac{7}{1215}$$

$$p(y = -1|x) \propto p(y = -1)p(x_1 = 2|y = -1)p(x_2 = M|y = -1)p(x_3 = L|y = -1) = \frac{5}{12} * \frac{4}{8} * \frac{1}{7} * \frac{3}{7} = \frac{5}{392}$$

$$\hat{y} = \arg\max_y \{p(y = 1|x), p(y = -1|x)\} = -1$$

案例一：鸢尾花数据分类

- 使用高斯朴素贝叶斯API对鸢尾花数据进行分类操作

class sklearn.naive_bayes. **GaussianNB** ¶ [source]

Attributes:

class_prior_ : array, shape (n_classes,)

probability of each class.

各个类别的概率

class_count_ : array, shape (n_classes,)

number of training samples observed in each class.

各个类别的样本数量

theta_ : array, shape (n_classes, n_features)

mean of each feature per class

各个类别中各个特征属性的均值

sigma_ : array, shape (n_classes, n_features)

variance of each feature per class

各个类别中各个特征属性的方差

THANKS