

Integration Of Functions Homework 2

MinWook Kang

January 14, 2023

1 Implement Your Own fixed quad in [-1, 1]

우리는 앞 부분에서, 해를 추정하는 Root Finding Method를 공부했다. 그리고 이번 챕터에서는 Rimann Sum, Trapezoid Rule, Simpson's Rule 그리고 Gaussian Quadrature을 통하여 어떤 함수 f 가 주어졌을 때, 우리가 원하는 범위 안에서의 적분 값을 실제의 적분 값과 매우 비슷하게 추정할 수 있는 방법을 배웠다. 이것으로 실제로 적분이 필요한 문제들에 대해 접근해 보겠다.

1.1 Problem Recognition

SciPy 모듈에서 fixed quad를 사용하면, Gaussian Quadrature 의 방식으로 원하는 적분 범위 안에서의 적분 값을 유추할 수 있다. 하지만, 이 모듈을 사용하지 않고, 모듈을 만들어서 문제에 적용하는 것을 보일 것이다.

$$\int_{-1}^1 e^x dx = e - e^{-1} \approx 2.3504023872876029138 \quad (1)$$

$F(x) = e^x$ 를 $[-1, 1]$ 로 적분하게 되면 나오는 값을 구하는 모듈을 만들어야 한다. Gauss-Legendre 방식에 의하면, $[-1, 1]$ 에서 N 에 대한 x_i 값과 w_i 값을 알고 이것을 곱하여 더하게 되면,

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) \equiv G_n(f) \quad (2)$$

위의 공식에 따라, $[-1, 1]$ 사이의 적분 값을 추산할 수 있다. 따라서 우리는 먼저 x_i 값과 w_i 값을 구해줄 것이다. 그러기 위해서는 우선, 임의의 숫자 N 에 대한 르장드르 다항식의 해가 필요한데, 이는 SciPy 모듈에서 roots.legendre 을 통해 쉽게 구할 수 있다. 먼저 roots.legendre를 보면, 르장드르 다항식에 들어가는 임의의 숫자 N 에 대하여 해 roots 와 무게 weights 값을 알려주는 모듈이다. 만약 N 의 값에 3을 대입하면 아래처럼 구할 수 있다.

```
1 from scipy.special import roots_legendre , eval_legendre
  roots , weights = roots_legendre(3)
3 roots , weights
5 (array([-0.77459667,  0.          ,  0.77459667]),
  array([0.55555556,  0.88888889,  0.55555556]))
```

1.2 Development of a solution

def 함수를 이용하여 `min_fixed_only_quad(f, N)` 함수를 정의하고, roots 와 weights인수를 xi 와 wi 로 저장한 후, zip 함수를 통하여 각 열마다 묶어준 다음, 각각의 (w_i, x_i) 의 묶음에 따라 식 $w * (f(x))$ 계산한다. 그후 묶음에 대한 이 식들을 더해줌으로서 위의 (2)를 파이썬으로 구현할 것이다. 먼저 $F(x) = e^x$ 이고, 적분 범위는 $[-1, 1]$ 이라고 하면 다음과 같다.

```
def f(x):
    return np.exp(x)

def min_fixed_only_quad(f, N):
    roots, weights = roots_legendre(N)
    xi = roots
    wi = weights
    return sum(w*(f(x)) for w, x in zip(wi, xi))

print(f"""
n = 1: I = {min_fixed_only_quad(f, 1)}, Abs error = {(f(1) - f(-1)) -
    min_fixed_only_quad(f, 1)}
n = 2: I = {min_fixed_only_quad(f, 2)}, Abs error = {(f(1) - f(-1)) -
    min_fixed_only_quad(f, 2)}
n = 3: I = {min_fixed_only_quad(f, 3)}, Abs error = {(f(1) - f(-1)) -
    min_fixed_only_quad(f, 3)}
n = 4: I = {min_fixed_only_quad(f, 4)}, Abs error = {(f(1) - f(-1)) -
    min_fixed_only_quad(f, 4)}
n = 5: I = {min_fixed_only_quad(f, 5)}, Abs error = {(f(1) - f(-1)) -
    min_fixed_only_quad(f, 5)}
""")

n = 1: I = 2.0, Abs error = 0.35040238728760276
n = 2: I = 2.3426960879097307, Abs error = 0.007706299377872039
n = 3: I = 2.3503369286800115, Abs error = 6.54586075912178e-05
n = 4: I = 2.3504020921563766, Abs error = 2.9513122612456755e-07
n = 5: I = 2.350402386462826, Abs error = 8.247766913882515e-10
```

1.3 Execution and Assessment

이때, 우리는 실제 값과의 차이를 비교하기 위하여 $f(1) - f(-1)$ 값에다가 추산한 값을 빼서, N 에 따라서 얼마큼 오차가 날 수 있는지 확인해 볼 것이다. 먼저 SciPy package의 `fixed_quad`로 계산한

결과는 다음과 같다.

```
1 n = 1: approx = (2.0, None)
  n = 2: approx = (2.3426960879097307, None)
3 n = 3: approx = (2.3503369286800115, None)
  n = 4: approx = (2.350402092156377, None)
5 n = 5: approx = (2.350402386462826, None)
```

이 두 값을 빼보면, $N = 4$ 인 경우 $-4.440892098500626e-16$ 를 제외하고는 0으로 맞아 떨어지는 것을 볼 수 있다. $N=4$ 인 경우에도, 수가 매우 작으므로, 0이라 봐도 무방하다. 하지만 위의 함수는 범위가 $[-1, 1]$ 로 정해져 있기 때문에, 이를 변수변환을 통해 어느 구간에서도 적분 값을 추산할 수 있는 모듈을 만들 것이다.

2 Own fixed quad in any range

2.1 Problem Recognition

위의 상황에서는 범위가 $[-1, 1]$ 을 만족하는 상황에서만 적분 값을 구할 수 있었다. 그럼 만약, 적분 범위가 아래와 같은 식일 경우는 어떻게 구할 수 있을까? 이는 적분의 범위를 변수변환을 통하여 바꾸어 주면 된다.

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx \quad (3)$$

먼저 Gauss' Method에 따르면, x 와 dx 는 아래처럼 바꾸어도 무방하다.

$$t = \frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2} \quad , \quad dt = \frac{b-a}{2}dx \quad (4)$$

2.2 Development of a solution

변수 변환을 통해 적분 범위는 dt 에 대해서 $[-1, 1]$ 을 만족하게 된다. 그러면 위의 함수를 조금 변형하면 똑같이 적분을 시킬 수 있다. 위의 def 함수에서, x 를 t 에 대한 식으로 바뀌어지고, 함수에 $(b-a)/2$ 를 곱하게 해주면 되므로, 위의 식을 $F(x) = \frac{4}{1+x^2}$, 적분 범위는 $[0, 1]$ 로 잡고 계산하면 다음과 같다.

```
1 def f(t):
    return np.exp(t)
```

```

3
def min_fixed_any_range(f, a, b, n):
5     g = lambda x: (b - a)/2 * f((b-a)/2*x + (a+b)/2)
        roots, weights = roots_legendre(n)
7     xi = roots
        wi = weights
9     return sum(w*(g(x)) for w, x in zip(wi, xi))

```

먼저 def로 선언한 함수를 보면 인수를 4개로 두었는데, 이는 구하고자 하는 함수의 범위를 나타내며, 변수 변환을 통해 원하는 $[a, b]$ 의 적분 값을 구할 수 있다. 또한 $g(x)$ 라는 함수에 대해 lambda를 통하여 아래의 식을 새롭게 정의 하였다.

$$g(x) = \frac{b-a}{2} f\left(\frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}\right) \quad (5)$$

이는 $f(t)$ 에서 $t = \frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}$ 을 대입한 것이다. 또한, $\frac{b+a}{2}$ 는 적분 범위를 벗어날 수 있기 때문에, 적분을 나중에 해주고, $\frac{b+a}{2}$ 를 곱해줌으로써, $g(x)$ 에 대하여 위의 코드가 성립됨을 볼 수 있다. 그리고 section 1에서 본 것과 같이, $\text{zip}(wi, xi)$ 에 대하여 각각의 w, x 값을 할당하여 $g(x)$ 와 w 를 곱한 것을 더해지게 되면, 우리가 구하고자 한 적분 값을 구할 수 있게 된다. 위의 코드로 인한 결과를 보면 다음과 같다.

2.3 Execution and Assessment

```

1 print(f"""
n = 1: I = {min_fixed_any_range(f, -1, 1, 1)}, Abs error = {(f(1) - f(-1)) -
        min_fixed_any_range(f, -1, 1, 1)}
3 n = 2: I = {min_fixed_any_range(f, -1, 1, 2)}, Abs error = {(f(1) - f(-1)) -
        min_fixed_any_range(f, -1, 1, 2)}
n = 3: I = {min_fixed_any_range(f, -1, 1, 3)}, Abs error = {(f(1) - f(-1)) -
        min_fixed_any_range(f, -1, 1, 3)}
5 n = 4: I = {min_fixed_any_range(f, -1, 1, 4)}, Abs error = {(f(1) - f(-1)) -
        min_fixed_any_range(f, -1, 1, 4)}
n = 5: I = {min_fixed_any_range(f, -1, 1, 5)}, Abs error = {(f(1) - f(-1)) -
        min_fixed_any_range(f, -1, 1, 5)}
7 """)
9 n = 1: I = 2.0, Abs error = 0.35040238728760276

```

```

n = 2: I = 2.3426960879097307, Abs error = 0.007706299377872039
11 n = 3: I = 2.3503369286800115, Abs error = 6.54586075912178e-05
n = 4: I = 2.3504020921563766, Abs error = 2.9513122612456755e-07
13 n = 5: I = 2.350402386462826, Abs error = 8.247766913882515e-10

```

실제의 값 Abs error에 우리가 만든 모듈의 차를 구했을때, N 의 값, 즉 legendre 다항식의 차수가 충분하지 않았을 때, error의 폭이 커짐을 볼 수 있고, N이 커질 수록 0에 수렴하는 것을 볼 수 있다. 이와 관련하여 오차를 줄이는 방법에서도 논하여 보겠다.

3 reduce the error 1

3.1 Problem Recognition

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx \quad (6)$$

위의 함수의 실제 근은 π 이다. 위의 함수에서 N의 값을 임의로 지정하지 않고, 원하는 오차 범위 내에서 적분을 근사적으로 구하려면 어떻게 해야 할까? 즉, 오차 범위는 10^{-5} 보다 크면 안되고, $F(x) = \frac{4}{1+x^2}$ 에서 $[0, 1]$ 까지의 적분값을 유추해야 한다.

3.2 Development of a solution

우리는 앞서서 Root Finding에서도 똑같이 이용한 방식을 이용할 수 있다. 바로 위에서 구한, 실제 값에 결과값을 뺀 오차가 우리가 설정한 범위보다 작아질 때 까지 N을 1씩 증가시키면서 반복시키면 된다. while문을 통하여, current_acc 가 우리가 정한 target_acc보다 작아질 때 까지 반복시킨다. 또한, N의 범위도 지정해 주어, 작아졌음에도 계속해서 반복되는 것을 막는다. 이를 코드로 구현하면 다음과 같다.

```

1 exact_value = np.pi
  target_acc = 10**(-5)
3
  current_acc = 1
5 N = 2
  result = 0
7 while current_acc > target_acc and N < 20:
    result = min_fixed_any_range(lambda x: 4/(1 + x*x), 0, 1, n=N)
9    current_acc = abs(exact_value - result)

```

```

    N += 1

11
print(f"approximate value = {result}, number of sample points = {N}")
13 print(f"Abs error = {exact_value - result}")

```

3.3 Execution and Assessment

```

1 approximate value = 3.141592639884753, number of sample points = 6
Abs error = 1.3705040213807251e-08

```

우리가 원하던 결과 값이 구해졌음을 알 수 있다. 우리가 정한 오차 범위인 10^{-5} 보다 Abs error 값이 더 작은 것을 볼 수 있고, N의 횟수 또한 20보다 작은 6번만에 구해졌음을 볼 수 있다. 마찬가지로 다른 문제에도 이를 적용해보자.

4 reduce the error 2

4.1 Problem Recognition

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx \quad (7)$$

이 식에서 오차는 10^{-7} 보다 작으며, $N < 100$ 을 만족하는 적분 값을 구해보자. $F(x) = \frac{1}{x}$ 를 $[1, 2]$ 에서 적분하게 되면 정확히 1 이 나온다.

4.2 Development of a solution

위와 동일한 방법으로, 적분 범위와 오차만 바꾸어 준다. 또한, $N < 100$ 이므로 반복 횟수도 100 이하가 되게끔 조정해준다.

```

exact_value = np.log(2)
2 target_acc = 10**(-7)

4 current_acc = 1
N = 2
6 result = 0

```

```

while current_acc > target_acc and N < 100:
    result = min_fixed_any_range(lambda x: 1/x, 1, 2, n=N)
    current_acc = abs(exact_value - result)
    N += 1

print(f"approximate value = {result}, number of sample points = {N}")
print(f"Abs error = {exact_value - result}")

```

4.3 Execution and Assessment

```

approximate value = 0.6931471578530402, number of sample points = 6
Abs error = 2.270690513395124e-08

```

우리가 원하는 방향으로, 적분값을 구했다. 이번에는 Error Function에서 [0.3]의 범위내에서 추산한 적분의 값이 실제로 Error Function에서 구한 적분의 값과 어느정도 차이가 있는지 확인해 볼 것이다.

5 Error Function

5.1 Problem Recognition

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (8)$$

Error Function에서 실제 [0, 3]까지를 값을 구하고, 이것을 선으로 구현하고 빨간색 점으로는 우리가 추산한 Error Function의 값을 찍어서, [0, 3]까지 오차의 차이나 정도의 변화가 있는지 눈으로 확인할 것이다. 그러기 위해선 우선, Error Function의 실제 값을 알아야 한다. 또한 우리가 이제껏 구했던 방식과 달리, [0, 3]의 범위를 $[x, x + i]$ 처럼 적절하게 잘라, 잘라낸 작은 사이의 적분값을 구한 후, 이를 원하는 범위까지 계속해서 더하는 방식으로 적분을 표현할 것이다. 만약, 잘라낸 작은 사이의 적분값만 구한후 (즉, $[x, x + i]$ 사이에서의) 그래프로 나열하게 되면, 원하는 범위 전까지의 [0, x]까지의 적분 값은 사라지고, $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{x+i} e^{-t^2} dt$ 값만 구해질 것이기 때문에 반드시 구했던 모든 적분 값을 중복해서 더해주는 것을 유의해야 한다.

5.2 Development of a solution

먼저 partition 변수를 지정하여 [0, 3] 까지의 적절한 갯수 31개로 나누어 준다. 그리고 zip 함수를 통해 각각의 (a, b)쌍으로 잘게 범위를 쪼개어, 이때의 적분 값을 구한 것을 partial_sum에 저장하여, 이 리스트를 np.cumsum 해줌으로써, 위에서 말한 적분 값을 중복해서 더해줄 것이다. 이를 코드로 구현하면,

```
from scipy import special
2
partition = np.linspace(0, 3, 31)
4 partial_sums = [
    min_fixed_any_range(lambda t: np.exp(-t*t), a, b, n=5)
6     for (a, b) in zip(partition[:-1], partition[1:])
]
8
xs = partition
10 approx_erf = np.cumsum(partial_sums) * 2/np.sqrt(np.pi)
approx_erf = np.hstack(([0], approx_erf)) # erf(0) = 0
12
x_exact = np.linspace(0, 3, 200)
14 y_exact = special.erf(x_exact)

16 plt.figure()

18 plt.plot(x_exact, y_exact, "-k", label="exact")
plt.plot(xs, approx_erf, ".:r", lw=1, label="approx")
20 plt.legend()

22 plt.show()
```

5.3 Execution and Assessment

Figure1을 보면 우리가 원하는 대로 그래프가 그려졌음을 볼 수 있다. 이때 그래프의 오차를 계산하면 다음과 같다.

```
0.00000000e+00, 0.00000000e+00, 0.00000000e+00, 6.93889390e-18,
2      0.00000000e+00, 0.00000000e+00, 2.77555756e-17, 4.16333634e-17,
      2.77555756e-17, 2.77555756e-17, 0.00000000e+00, 2.77555756e-17,
```

4	0.00000000e+00,	2.77555756e-17,	2.77555756e-17,	5.55111512e-17,
	1.11022302e-16,	5.55111512e-17,	1.11022302e-16,	5.55111512e-17,
6	0.00000000e+00,	5.55111512e-17,	0.00000000e+00,	0.00000000e+00,
	5.55111512e-17,	0.00000000e+00,	5.55111512e-17,	0.00000000e+00,
8	0.00000000e+00,	0.00000000e+00,	0.00000000e+00,	0.00000000e+00,
	0.00000000e+00,	0.00000000e+00,	0.00000000e+00,	0.00000000e+00,
10	0.00000000e+00,	1.11022302e-16,	0.00000000e+00,	1.11022302e-16,
	0.00000000e+00,	1.11022302e-16,	1.11022302e-16,	1.11022302e-16,
12	1.11022302e-16,	1.11022302e-16,	0.00000000e+00,	-1.11022302e-16,

N= 5로 두고 그림을 그렸지만, 만약 N의 값을 바꾸어 주게 된다면, 예상할 수 있듯이, 오차가 좀 더 벌어짐을 볼 수 있다. 예를 들어, 오차를 더 정확하게 보기 위해, 적분하고자 하는 값을 $[0, 3]$ 에서 $[0, 20]$ 으로 바꾸어 주고, N의 값을 1, 2, 3, 4 로 두고 그림을 각각 그려보면 다음과 같다.

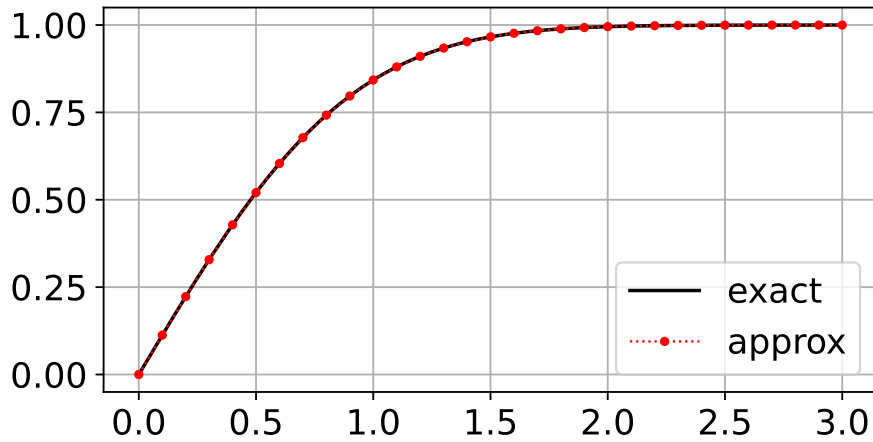


Figure 1: *ErrorFunction*

이처럼, 우리의 예상대로 N의 값이 커질 수록 더 abs error 값이 줄어들면서 실제 값과 유사하게 적분이 될 수 있음을 볼 수 있다.

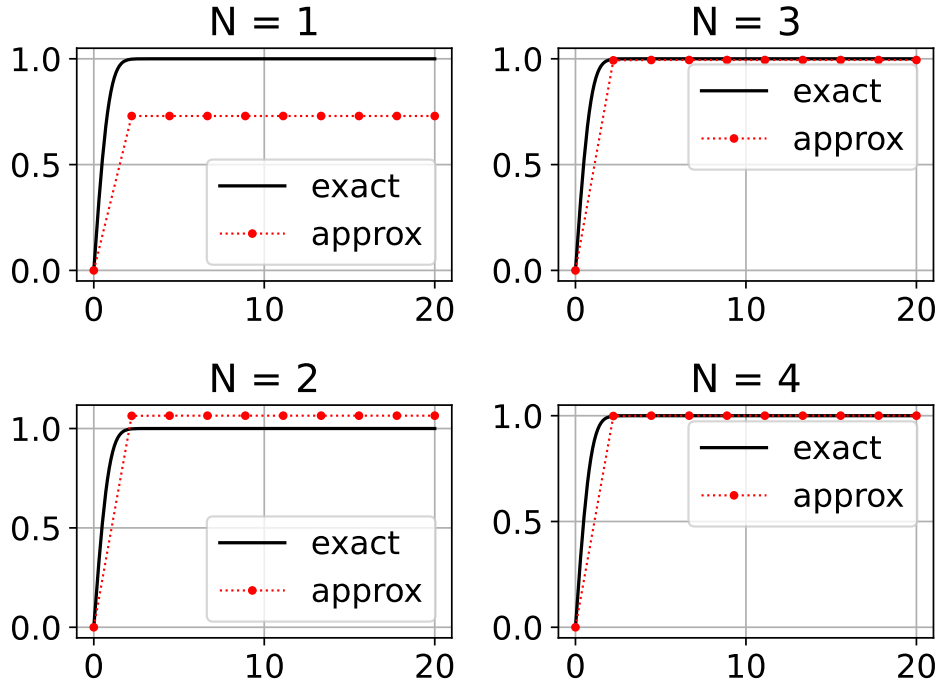


Figure 2: *ErrorFunction_for_N = 1, 2, 3, 4*

6 Double Integral

6.1 Problem Recognition

$$I = \int_1^2 \int_0^1 y^x dx dy \approx 1.2292741342880657562 \quad (9)$$

이번에는 함수 I를 구해야 하는데, dx 와 dy 에 대하여 각각의 범위에 대해 적분을 시켜주려고 한다. $Y(x)$ 를 적분하려면, 먼저 dx 에 대하여 적분을 해준 뒤, y 에 대하여 적분을 해주어야 한다.

6.2 Development of a solution

먼저 우리는 x 에 대한 식을 y 의 변수와 함께 저장하는 함수를 지정해 주어야 한다. 즉, x 값이 변하더라도 y 값은 변하지 않는 함수를 만들고, 그 함수에서 x 에 대하여 $[0, 1]$ 의 범위를 적분해 준다. 그리고 다시 y 에 대해 $[1, 2]$ 범위를 적분해주면서 이차 적분을 풀어줄 수 있다.

즉, 초기의 $F(x)$ 는 x 에 대한 함수로 잡는다. 그리고 x 에 대하여 적분을 하면 $F(y)$ 와 같으므로, 이를 다시 y 에 대하여 적분을 한다. 이를 코드로 구현하면 다음과 같다.

6.3 Execution and Assessment

```
def inner_sum(y):  
    return min_fixed_any_range(lambda x: y**x, 0, 1, 11)  
  
outer_sum = min_fixed_any_range(inner_sum, 1, 2, 11)  
  
print("approximatio = {}, absolute error = {}"  
      .format(outer_sum, abs(outer_sum - 1.2292741342880657562)))  
  
approximatio = 1.229274134361613, absolute error = 7.354716835550335e-11
```

실제 값과의 차를 구하면 0에 수렴할 정도로 작은 것을 볼 수 있다. 이것으로 SciPy 모듈의 fixed quad 모듈을 사용하지 않고, 직접 모듈을 만들어서 문제에 적용해 보았다.

7 Orthogonality of Legendre polynomials

7.1 Problem Recognition

다음 Legendre 다항식의 직교성을 증명하여라.

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{mn} \quad (10)$$

이 문제는 m 과 n 이 임의의 정수일 때, $[-1, 1]$ 에서 Legendre 다항식 $P_m(x)$ 과 $P_n(x)$ 의 곱을 적분하였을 때, $m = n$ 이면 $\frac{2}{2n+1}$, 다르면 0 이 되는 것을 통하여, 다항식의 직교성을 증명하라는 문제이다. 이 문제를 풀기 위해서는 먼저, $P_m(x)$ 와 $P_n(x)$ 의 곱을 구하고, 그 값을 $[-1, 1]$ 에 대하여 적분을 시켜주면 된다. 이때, m, n 은 임의의 정수이기 때문에, 같은 때와 다를 때를 나누어 확인해야 한다. 이는 δ_{mn} 의 특성을 유의해야 한다.

즉, 두가지 조건을 정리하면 다음과 같다.

- $n = m$ 인 경우, $\int_{-1}^1 (P_n(x))^2 dx - \frac{2}{2n+1} = 0$ 이 만족되어야 한다.
- $n \neq m$ 인 경우, $\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx = 0$ 이 만족되어야 한다.

7.2 First Condition

먼저 첫번째 조건이 성립하는지를 풀기 위해서, `legendre(m)` 을 이해하면, m 에 어떠한 임의의 정수를 넣었을 때, 르장드르 다항식을 나타내는 함수이다. 유의해야 할 것은, `legendre()` 모듈은 함수를 나타내는 것이다. 따라서, 우리는 $F_m(x) = \text{Legendre}(m, x)$ 로 잡고, 원하는 문제를 풀 수 있다. 르장드르 모듈에서는 따로 x 를 인자로 두지 않기 때문에, $F_m(x) = \text{Legendre}(m, x)$ 로 나타내지 않고, `Legendre(m)`으로 나타내면 된다. 이와 관련하여 몇가지 코드를 확인하면,

```
1 import random
n, m = random.randint(0,10), random.randint(0,10)
3
def P_m(m):
5     return min_fixed_any_range(legendre(m), -1, 1, 10)
print(legendre(m) )
7
4          3          2
9 4.375 x + 4.857e-16 x - 3.75 x + 2.429e-16 x + 0.375
```

이렇게 위에서 언급했던 것 처럼, m 에 임의의 정수를 넣으면 르장드르 다항식을 보여주는 함수이다. 이때, 르장드르 다항식은, m 에 따라서 짝함수와 홀함수가 결정되는데, 위의 식에서는 x^3 처럼 홀수 차수 항을 볼 수 있지만 계수는 0이므로 고려하지 않아도 된다. 이제 무작위의 n , m 에 대해서 $n = m$ 이 성립할 때, 위의 조건에 만족하는지 확인할 것이다.

```

1 import random
2 def P_m_P_M(m,n):
3     return legendre(m) * legendre(n)
4 for i in range(10):
5     n = random.randint(0,11)
6     m = n
7     print(f"n = {n}, m = {m}")
8     print((2 / (2 * n + 1)) - min_fixed_any_range(P_m_P_M(m,n), -1, 1, 30))
9
10 n = 4, m = 4
11 -8.520961713998076e-15
12 n = 9, m = 9
13 -4.3921810632951974e-13
14 n = 10, m = 10
15 -4.626687921671646e-12
16 n = 6, m = 6
17 -1.6375789613221059e-15
18 n = 1, m = 1
19 -5.329070518200751e-15
20 n = 0, m = 0
21 0.0
22 n = 6, m = 6
23 -1.6375789613221059e-15
24 n = 9, m = 9
25 -4.3921810632951974e-13
26 n = 2, m = 2
27 -6.827871601444713e-15
28 n = 10, m = 10
29 -4.626687921671646e-12

```

범위를 $[0, 10]$ 으로 두고 계산하였지만, 만약, 범위가 10이상 커지게 되면 르장드르 다항식의 차수가 많아지게 되면서, 이를 적분하는데 많은 오차가 발생하게 된다. 따라서 이를 막으려면, 적분을 추산하는

함수의 N의 크기가 더욱 커져야 한다. 만약, 범위를 [10, 21] 로 두고, $N = 5$ 인 경우,

```

1 n = 14, m = 14
  -6.884520453720455e-10
3 n = 21, m = 21
  -0.00011664384684553081
5 n = 21, m = 21
  -0.00011664384684553081
7 n = 18, m = 18
  -4.849815616859987e-06
9 n = 21, m = 21
  -0.00011664384684553081
11 n = 17, m = 17
   7.57868260294059e-07
13 n = 10, m = 10
  -4.626687921671646e-12
15 n = 15, m = 15
  -4.713122087052213e-09
17 n = 15, m = 15
  -4.713122087052213e-09
19 n = 21, m = 21
  -0.00011664384684553081

```

이처럼, Legendre 다항식의 차수가 21에 가까워 질 수록, 오차 값이 커져버리는 경우가 발생할 수 있다. 따라서 적분 값을 추산할 때, N의 값을 조절하면서 맞추어 줄 수 있다. 정리하면, 우리가 적절하게 정한 오차 범위내에서 $n = m$ 을 가정하여 계산했을 경우, 우리가 초기에 설정한 첫번째 조건에 성립하는 것을 볼 수 있다. 그러면 두번째 조건이 타당한지를 확인해 볼 것이다.

7.3 Second Condition

두번째 조건은, $n \neq m$ 인 경우, $\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx = 0$ 이 만족되어야 한다. 이를 확인하기 위해선, 위에서 사용한 방식에서, n 과 m을 다르게 배치하므로써, 문제를 해결할 수 있다.

```

import random
2
def P_m_P_M(m,n):
4     return legendre(m) * legendre(n)
6
for i in range(10):

```

```

8      n = random.randint(0,11)
      m = random.randint(1,12) - 1
      print(f"n = {n}, m = {m}")
10     print(min_fixed_any_range(P.m.P_M(m,n), -1, 1, 30))

12 n = 2, m = 5
    -2.0990154059319366e-16
14 n = 5, m = 8
    1.215954420485943e-14
16 n = 3, m = 11
    1.8747243341055153e-13
18 n = 6, m = 9
    -2.9786936805997755e-14
20 n = 8, m = 6
    2.3614790678472275e-14
22 n = 6, m = 0
    8.934693263018545e-15
24 n = 6, m = 11
    2.1583342751929635e-13
26 n = 4, m = 5
    -8.795048023202412e-16
28 n = 8, m = 4
    8.455042221910958e-15
30 n = 11, m = 5
    1.5622919624647125e-13

```

이때 우리는 n, m 을 서로 다른 정수로 표현하기 위해서 -1 을 취했는데, n 과 m 은 무작위 정수이므로 $n < m$ 이나 $n > m$ 에 대하여 고려할 필요가 없다. ($n = m, m = n$ 을 대입하면 똑같다.) 따라서 이 결과값을 확인하면 모두 0에 수렴하기 때문에, 우리가 초기에 설정한 두번째 조건에도 만족하는 것을 볼 수 있다.

7.4 Execution and Assessment

초기에 결정한 두가지 조건

- $n = m$ 인 경우, $\int_{-1}^1 (P_n(x))^2 dx - \frac{2}{2n+1} = 0$ 이 만족되어야 한다.
- $n \neq m$ 인 경우, $\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx = 0$ 이 만족되어야 한다.

가 성립하므로 따라서 우리는

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{mn} \quad (11)$$

이 성립함을 증명할 수 있고 따라서 두 르장드르 다항식은 직교성을 가진다는 것을 확인할 수 있다.

8 Orthogonality of Bessel functions

8.1 Problem Recognition

이번에는 베셀 함수의 직교성을 증명하는 문제이다. 우리는 Bessel 함수에서 α 와 β 가 J_p 이 영점이라면, α 와 β 가 같은 경우와 다른 경우의 값이 아래의 조건에 만족하는지 확인해 볼 것이다.

$$\int_0^1 J_p(\alpha x) J_p(\beta x) x dx = \frac{1}{2}(J_{p+1})^2(\alpha) = \frac{1}{2}(J_{p-1})^2(\alpha) = \frac{1}{2}(J'_p)^2(\alpha), \quad \alpha = \beta \quad (12)$$

$$\int_0^1 J_p(\alpha x) J_p(\beta x) x dx = 0, \quad \alpha \neq \beta \quad (13)$$

유의해야 할 것은 바로, (12) 식에서 볼 수 있는데, $J_p^2(\alpha)$ 값을 유추해야 한다. 이는 Sympy 의 Derivative() 모듈을 통해 도함수를 구할 수 있으나, 베셀함수의 특징을 생각하면, 어렵지 않게 유추할 수 있다. 바로, 베셀 함수의 반복 관계를 이용하면 된다. 베셀 함수의 반복 관계를 잠시 인용하면,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^p J_p(x)) &= x^p J_{p-1}(x) \\ \frac{d}{dx}(x^{-p} J_p(x)) &= -x^{-p} J_{p+1}(x) \\ J_{p-1}(x) + J_{p+1}(x) &= \frac{2p}{x} J_p(x) \end{aligned} \quad (14)$$

$$J_{p-1}(x) - J_{p+1}(x) = 2J'_p(x) = -\frac{p}{x} J_p(x) + J_{p-1}(x) \frac{p}{x} J_p(x) - J_{p+1}(x)$$

이 관계중에서 우리는 $J_{p-1}(x) - J_{p+1}(x) = 2J'_p(x)$ 을 이용하여 베셀 함수의 도함수를 구할 것이다.

8.2 Development of a solution

이제, 앞서서 legendre 다항식의 직교성을 구한 것 처럼 두가지의 조건을 성립하는지 확인할 것이다. 조건은 다음과 같다.

- $\alpha = \beta$ 의 경우,

$$G(x) = \int_0^1 J_p(\alpha x) J_p(\beta x) x dx - \frac{1}{2}(J_{p+1})^2(\alpha) = 0$$

$$H(x) = \frac{1}{2}(J_{p-1})^2(\alpha) - \frac{1}{2}(J'_p)^2(\alpha) = 0. \text{ 을 만족해야 한다.}$$

- $\alpha \neq \beta$ 인 경우, $I(x) = \int_0^1 J_p(\alpha x) J_p(\beta x) x dx = 0. \text{ 을 만족되어야 한다.}$

베셀함수는 Scipy의 special.jn 모듈을 통하여 베셀 함수를 나타낼 수 있다. 하지만 유의할 것은,

위의 르장드르 방정식과 달리, x 값을 따로 설정해 주어야 한다. 또한, 베셀 함수의 해를 구해야 한다. 이는 `Scipy.special` 에서 `jn_zeros` 모듈을 통해 구할 수 있다. 우리는 이 모듈을 통해 무작위의 p 의 베셀 함수의 해를 구할 것이다. 이때, `jn_zeros`에는 두가지 인수가 들어갈 수 있는데, `jn_zeros(n, N)` 중에서 n 은 베셀 함수의 차수 p 이고, N 은 해의 갯수를 나타낸다.

먼저, $n = [0, 10]$ 사이의 정수중에서 임의의 숫자 n 을 만들고, 베셀 함수의 n 차 식의 해 10개를 만들어, 변수 a, b 에 `random.choice()` 를 통하여 저장한다. 변수 a, b 는 베셀 함수의 α, β 하는 값으로, `special.jn(n, a * x)` 와 `special.jn(n, b * x)` 함수의 적분값은 앞서 만든 `min_fixed_any_range`를 통하여 두 베셀 함수의 곱의 $[0, 1]$ 사이에서의 적분 값을 구해줄 것이다. 그리고 위 조건에서 $G(x)$ 와 $H(x)$ 그리고 $I(x)$ 가 0이 되는지를 확인해 볼 것이다. 반복 횟수는 총 10번으로 하고, 무작위 10개의 n 에 따라서 코드를 구현해보기로 한다.

```

1 import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
3 plt.rcParams.update({'font.size': 15})
from scipy import optimize
5 from sympy import *
from scipy.special import jn_zeros
7
x_zeros = []
9
#0~1 Solution
11 x_zeros = []
for i in range(10):
13     n = random.randint(0,11)
    a = random.choice(jn_zeros(n, 10))
15     b = random.choice(jn_zeros(n, 10))
    result = min_fixed_any_range(lambda x: x * special.jn(n, a * x) * special.jn(n,
17     b * x)
                                , 0, 1, 100)
    #j`p(a) used by Recursion Relations
19     third_hand = (special.jn(n - 1, a) - special.jn(n + 1, a)) / 2
21
    d1 = 1/2 * (special.jn(n + 1, a))**2 - (1/2 * (special.jn(n - 1, a))**2)# 1st
    hand - 2nd hand
    d2 = 1/2 * (special.jn(n + 1, a))**2 - (1/2 * (third_hand)**2) #2nd hand - 3rd
    hand
23
    if a == b:

```

```

25     print(f"""a = b = {a},
           p = {n},
27     G(x) = 1st hand - 2nd hand = {d1},
           H(x) = 2nd hand - 3rd hand = {d2}""")
29     print('-'*50)
           else:
31         print(f"""a = {a}, b = {b}, p = {n},
           I(x) = {result}""")
33         print('-'*50)

```

8.3 Execution and Assessment

```

1 a = 19.61596690396692, b = 40.11182327095424, p = 11,
  I(x) = -1.0983110328872428e-17
3 -----
a = 13.589290170541217, b = 20.320789213566506, p = 6,
5 I(x)= -1.7686528310885834e-17
-----
7 a = 19.615858510468243, b = 32.189679910974405, p = 1,
  I(x) = -2.0534590427073046e-17
9 -----
a = b = 28.62661830729114,
11 p = 5,
  G(x) = 1st hand - 2nd hand = 0.0,
13 H(x) = 2nd hand - 3rd hand = 0.0
-----
15 a = 28.62661830729114, b = 38.15986856196713, p = 5,
  I(x) = 1.3329975556429909e-17
17 -----
a = b = 19.615858510468243,
19 p = 1,
  G(x) = 1st hand - 2nd hand = -6.938893903907228e-18,
21 H(x) = 2nd hand - 3rd hand = -6.938893903907228e-18
-----
23 a = b = 13.015200721698434,
  p = 3,

```

```

25 G(x) = 1st hand - 2nd hand = -7.979727989493313e-17,
    H(x) = 2nd hand - 3rd hand = -3.8163916471489756e-17
27 -----
    a = 7.015586669815619, b = 16.470630050877634, p = 1,
29 I(x) = 1.0906488304388306e-17
    -----
31 a = 27.19908776598125, b = 24.01901952477111, p = 4,
    I(x) = 2.692116148956487e-17
33 -----
    a = 14.37253667161759, b = 24.01901952477111, p = 4,
35 I(x) = 2.397629732142272e-17

```

위에서 구한 베셀 함수 조건 $G(x)$ 와, $H(x)$ 의 실행 결과는 다음과 같다. 조건문에 의하여, α 와 β 값이 같으면, $G(x)$ 와 $H(x)$ 값이 0으로 나오고, α 와 β 값이 다르면 $I(x)$ 값이 0으로 나오는 것을 확인할 수 있다. 따라서 위에서 말한 조건 두가지가 모두 성립하므로, J_p 의 영점에 따라 직교성을 보인다는 것을 증명하였다.

9 Table of Gauss-Legendre Quadrature Coefficients

9.1 Problem Recognition

앞서서 구한 `min_fixed.any_range` 함수는 SciPy function의 `scipy.special.roots_legendre`를 통하여 구한 x_i 와 w_i 값을 이용하여 Gauss-Legendre 방식으로 $[a, b]$ 사이의 범위의 적분 값을 추산하였다. 그러면 이번에는 x_i 와 w_i 값을 Scipy function이 아닌, Root Finding에서 다른 해를 추산하는 방식으로 계산하여 값을 구해보도록 할 것이다. 문제를 접근하기전 조건은 다음과 같다.

- Legendre 다항식은 `scipy.special.legendre`를 통하여 사용할 수 있다.
- P_n 에서 $[-1, 1]$ 에서 0을 만족하는 해를 찾을때, `scipy.optimize.root_scalar` 또는 앞서서 다른 Root Finding의 예제 코드를 이용할 수 있다
 - 근에는 0이 포함되어야 한다.
 - 근은 y 축에 대하여 대칭을 이룬다
 - 근은 n 에 대하여 $[-1, 1]$ 을 bracket으로 두어, $\{-1, \dots, x_i^{(n-1)}, \dots, 1\}$ 범위내에서 $x_1^{(n)} \in (-1, x_1^{(n-1)})$ 와 $x_2^{(n)} \in (x_1^{(n-1)}, x_2^{(n-1)})$ 를 만족해야 한다.
- Weights는 다음의 공식을 이용하여라.

$$w_i = \frac{2(1-x_i^2)}{n^2 P_{n-1}'(x_i)}$$

위에서 구한 근을 `scipy.special.roots_legendre`와 비교하여 계산값을 확인해 보자. 먼저 근을 구하기 위해, `optimize.root_scalar`를 사용하여 근을 계산할 것이다. bracket을 정했기 때문에, bisection 방법과 secant 방법 등을 이용할 수 있지만, 이때 bisection의 경우, 함수가 $[-1, 1]$ 범위 내에서 경계의 값 두 개의 부호가 같을 경우 사용할 수 없기 때문에, secant 방법을 사용한다.

9.2 Development of a solution

```
1 import random
3 def frank(n, x):
    leg = legendre(n)
    p_n = leg(x)
    return p_n
7
9 def N(n):
```

```

N = n
11 partition = np.linspace(-1, 1, 10 * n)
    sollist = []
13 sollist_1 = []
    a = []
15 wlist = []

17 for (l, r) in zip(partition[:-1], partition[1:]):
    sol = optimize.root_scalar(legendre(N), x0 = l, x1 = r,
19                             method = 'secant')

21    sollist.append(abs(round(sol.root, 7)))

23    sollist_1 = [i for i in sollist if abs(i) > 10e-5 and abs(i) < 1 and abs(i) >
0.0617]

25    for i in range(len(sollist_1)):
        for j in sollist_1:
27            if j - sollist[i] < 0.01 and j * sollist[i] > (sollist[i])**2:
                if j == sollist[i]:
29                    continue
                sollist_1.remove(j)
31

a = list(set(sollist_1))
33 a2 = []
    if N % 2 != 0:
35        a.append(0)

37    for x in a:
        if x != 0:
39            a2.append(-1 * x)

41    b = a + a2
    for x in b:
43        w = (2 * (1 - x**2)) / (N**2 * frank(N-1, x)**2)
        wlist.append(w)
45
47

```

```
49     return(b, wlist , len(b))
```

9.3 Execution and Assessment

```
1  N(1)
   ([0] , [2.0] , 1)
3
5  N(2)
   ([0.5773503 , -0.5773503], [0.9999998399046123, 0.9999998399046123], 2)
7
9  N(3)
   ([0.7745967 , 0 , -0.7745967],
11  [0.5555552908284657, 0.8888888888888885, 0.5555552908284658],
13  3)
15
17 N(11)
   ([0.8870626 ,
19   0.730152 ,
21   0.2695432 ,
23   0.5190961 ,
25   0.1375864 ,
27   0 ,
29   -0.8870626 ,
31   -0.730152 ,
   -0.2695432 ,
   -0.5190961 ,
   -0.1375864] ,
   [0.12558036655571 ,
   0.1862902499023628 ,
   0.2628044637583425 ,
   0.2331938807413568 ,
   18.53831023130149 ,
   0.2729250867779006 ,
   0.1255803665557089 ,
   0.186290249902364 ,
```


	0.26280446375834254,
33	0.23319388074135666,
	18.53831023130156],
35	11)
37	N(20)
	([0.9122344,
39	0.839117,
	0.6360537,
41	0.7463319,
	0.4436109,
43	0.510867,
	0.3737061,
45	0.2277859,
	0.0765265,
47	−0.9122344,
	−0.839117,
49	−0.6360537,
	−0.7463319,
51	−0.4436109,
	−0.510867,
53	−0.3737061,
	−0.2277859,
55	−0.0765265],
	[0.06267245254242511,
57	0.08327646207685989,
	0.11819442975809738,
59	0.10193016641167287,
	0.5619873869287483,
61	0.13168864590801288,
	0.14209608006508162,
63	0.1491729129292063,
	0.15275339756771986,
65	0.06267245254242489,
	0.08327646207686057,
67	0.118194429758097,
	0.10193016641167345,
69	0.5619873869287483,
	0.13168864590801257,

71	0.14209608006508156,
	0.14917291292920637,
73	0.1527533975677196],
	18)