CAPÍTULO 3: TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER

Transformada de Fourier

$$X(f)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}\,dt$$

Transformada Discreta de Fourier

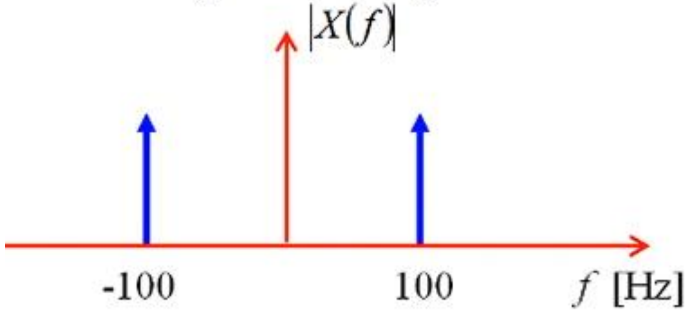
$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi\frac{kn}{N}} \qquad k=0,1,\ldots,N-1$$

EJEMPLO

$$x(t)=\cos(2\pi f_0 t) \qquad f_0=100\ \text{Hz} \quad f_s=1000\ \text{Hz}$$

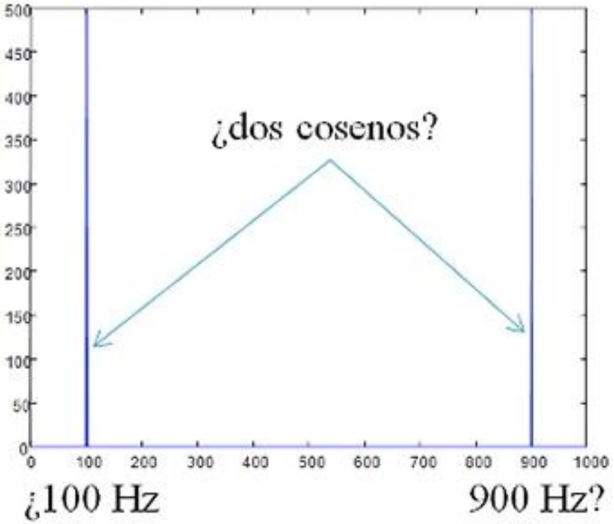
TF de la señal:

$$X(f)=\frac{1}{2}\delta(f-f_0)+\frac{1}{2}\delta(f+f_0)$$




```
clear all

% Generación de la señal
% discreta en el tiempo

f0=100 % Hz
fs= 1000 % Hz
n=0:999;
x=cos(2*pi*(f0/fs)*n);

%obtención de la TDF
Xk=fft(x);
plot(abs(Xk))
```

TDF de la señal:



Transformada de Fourier

$$X(f)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}\,dt$$

Transformada Discreta de Fourier

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi\frac{kn}{N}} \quad k=0,1,\ldots,N-1$$

PROCESOS INVOLUCRADOS:

- Muestreo temporal:

$$x(t) \quad \rightarrow \quad x(nT_s) \quad -\infty<n<\infty$$

- Señales discretas en el tiempo de duración finita:

$$x(nT_s) \quad -\infty<n<\infty \quad \rightarrow \quad x(nT_s) \quad 0<n<N-1$$

- Muestreo del espectro:

$$X(f) \quad -\infty<f<\infty \quad \rightarrow \quad X(k\Delta f) \quad 0<k<N-1$$

¿Implicaciones?

3.1 Transformada de Fourier Discreta en el Tiempo (TFDT)

- Muestreo temporal:

$$x(t) \;\rightarrow\; x(nT_s) \quad -\infty < n < \infty$$

Transformada de Fourier

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

Transformada de Fourier Discreta en el Tiempo

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) e^{-j2\pi fnT_s} \quad -\infty < f < \infty$$

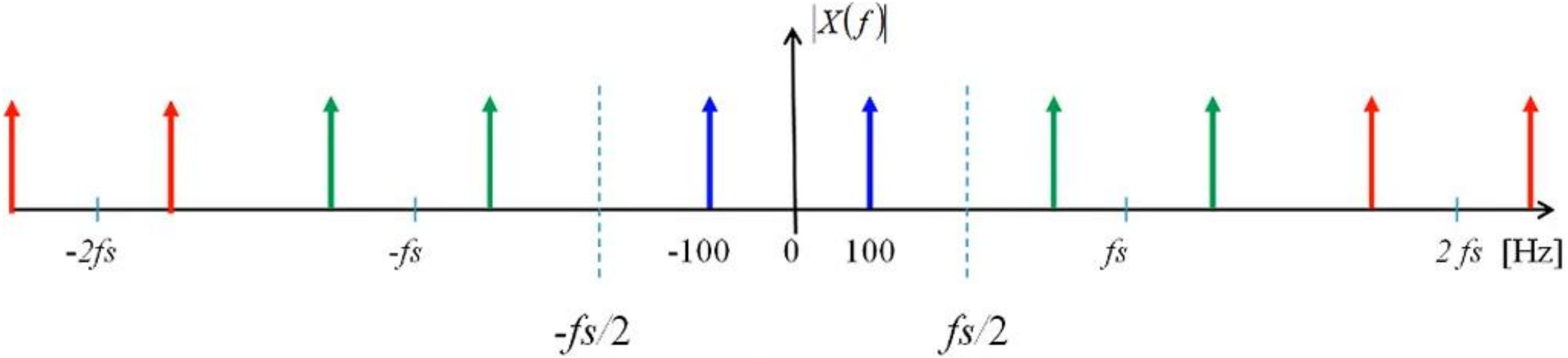
Si consideramos, en general, un T_s=1 (un espaciamiento unitario entre cada muestra):

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j2\pi fn} \qquad \text{o} \qquad X(e^{j\omega}) = X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

Primero que nada recordemos cuál es el espectro de una señal discreta en el tiempo, utilicemos de nuevo el ejemplo anterior:

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t) \quad f_0 = 100 \text{ Hz} \quad f_s = 1000 \text{ Hz}$$
$$x(nTs) = \cos(2\pi f_0 nTs) = \cos(\pi (f_0 / f_s) n)$$

$$X_{nT_s}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2}\delta(f - kf_0) + \frac{1}{2}\delta(f + kf_0) \right]$$



Muestreo temporal $\Rightarrow$ Periodización del espectro

¿Cumple con esto la Transformada de Fourier Discreta en el Tiempo? Determinando si es periódica o no:

$$X(\omega+\omega_T)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j(\omega+\omega_T)n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega_T n}e^{-j\omega n}$$

$$e^{-j\omega_T n}=\cos(\omega_T n)-j\mathrm{sen}(\omega_T n)=1$$

$$\Rightarrow \omega_T n=2\pi k \quad \Rightarrow \omega_T=2\pi k$$

De esto, el espectro dado por la TFDT se repite cada $2\pi k$:

$$\boxed{X(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}=X(\omega+2\pi k)}$$

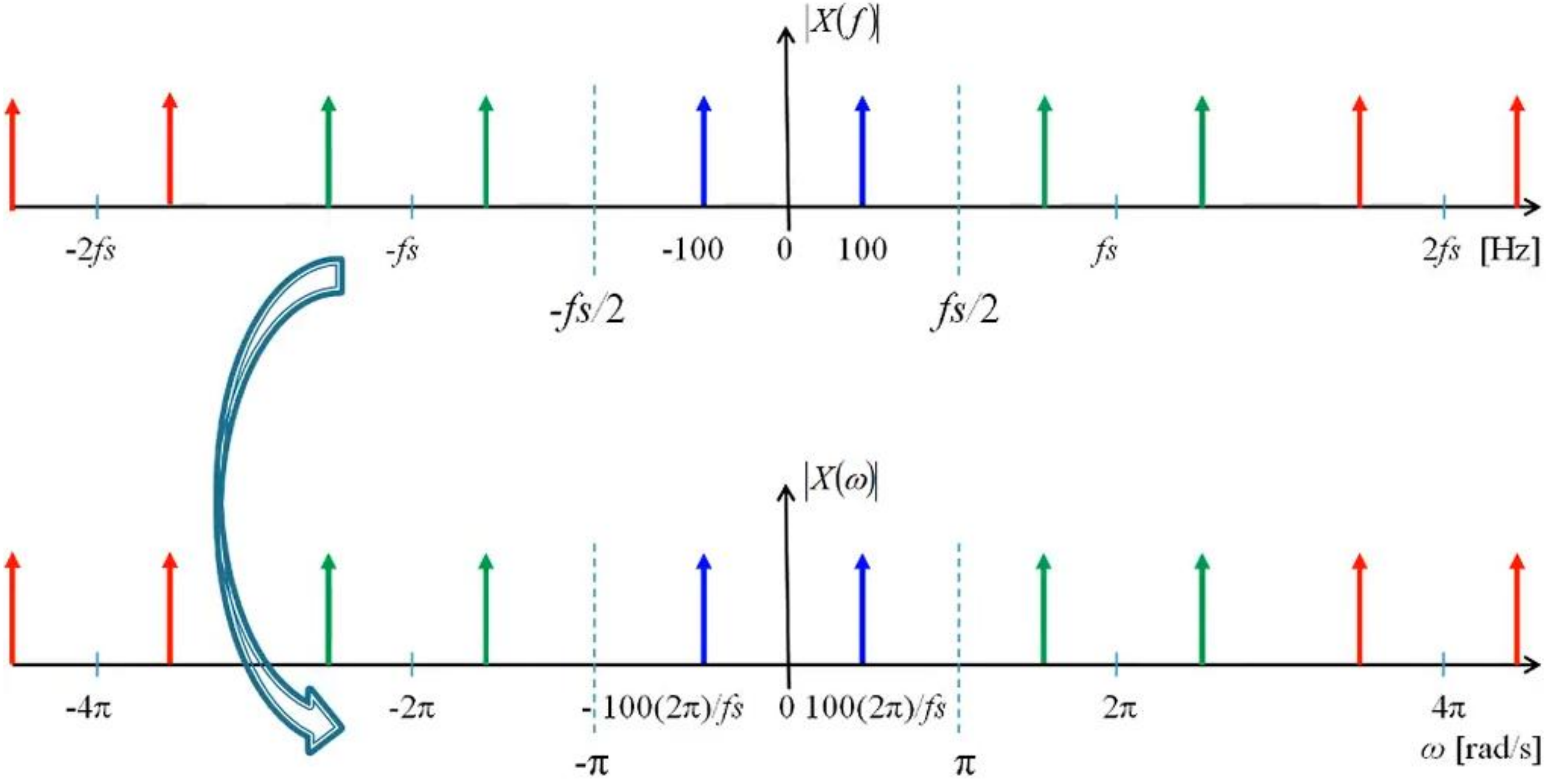
Entonces si incluimos un *Ts* diferente de 1 en la formula de la TFDT, obtenemos que el espectro se repite cada múltiplo entero de *fs*:

$$X(f+f_T)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j2\pi(f+f_T)nT_s}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j2\pi f_T nT_s}e^{-j2\pi fnT_s}$$

$$e^{-j2\pi f_T nT_s}=\cos(2\pi f_T nT_s)-j\,\mathrm{sen}(2\pi f_T nT_s)=1$$

$$\Rightarrow 2\pi f_T nT_s=2\pi k \quad \Rightarrow \boxed{f_T=\frac{k}{T_s}=kf_s}$$

Muestreo temporal ⇒ Periodización del espectro

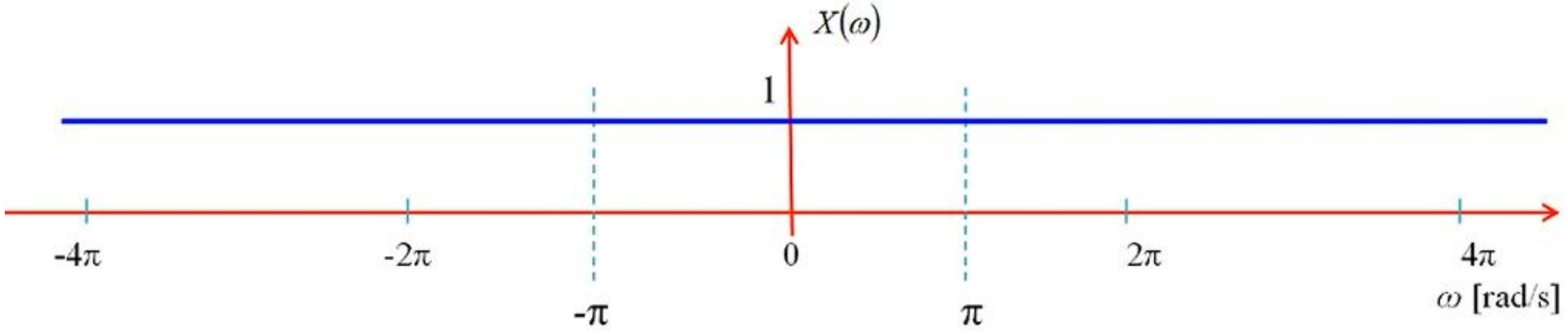


Las dos escalas frecuenciales, en Hz o rad/s, son coincidentes

Ejemplos de la TFDT

$$x(n) = \delta(n)$$

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n) e^{-j\omega n} = e^{-j\omega(0)} = 1$$



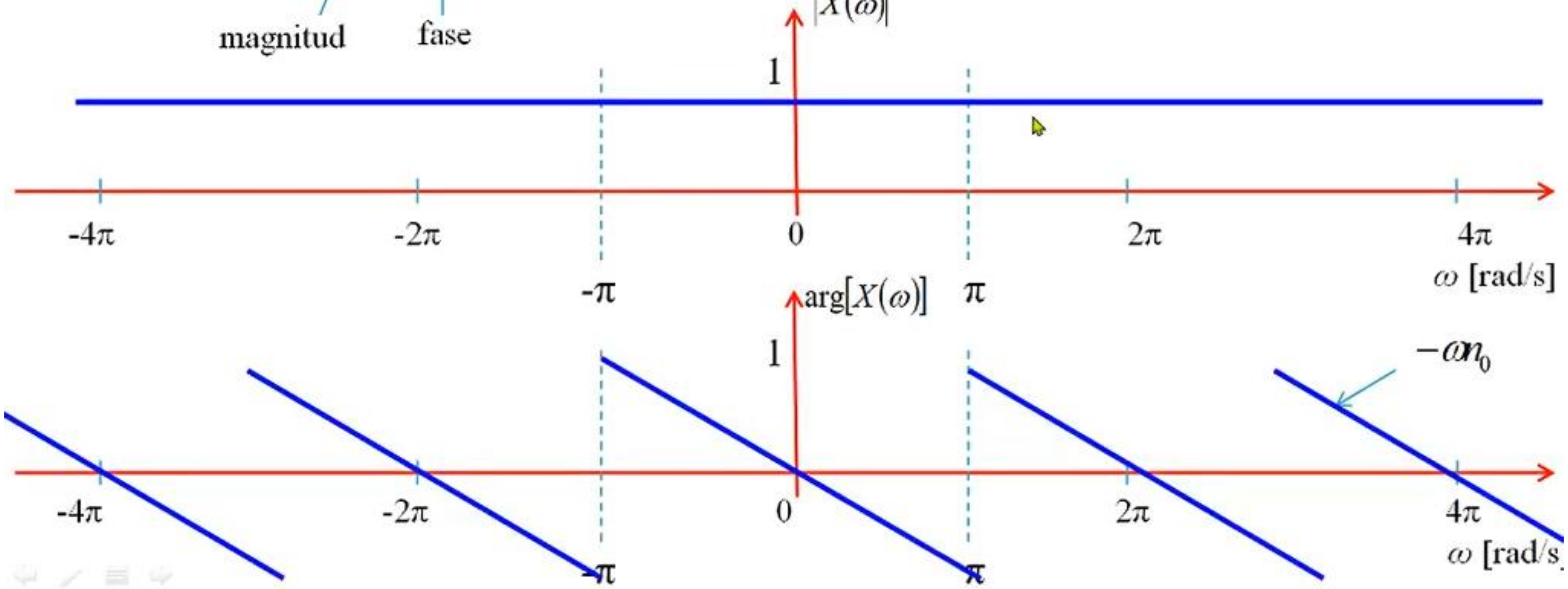
Espectro similar al de una delta de Dirac

Ejemplos de la TFDT

$$x(n)=\delta(n-n_0)$$

$$X(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(n-n_0)e^{-j\omega n}=e^{-j\omega(n_0)}$$

$$X(\omega)=\underbrace{(1)}_{\text{magnitud}}e^{\overbrace{-j\omega n_0}^{\text{fase}}}=|X(\omega)|e^{j\arg[X(\omega)]}$$

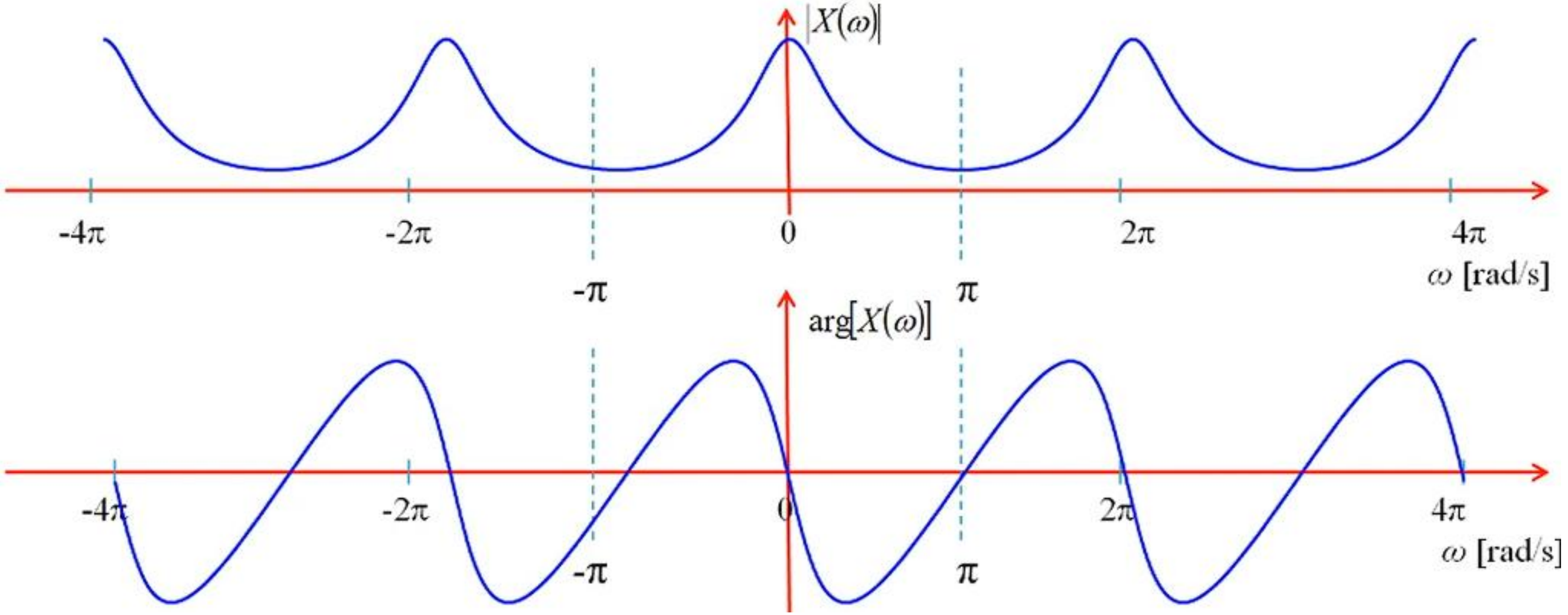


Ejemplos de la TFDT

$$x(n) = a^n u(n) \quad |a| < 1$$

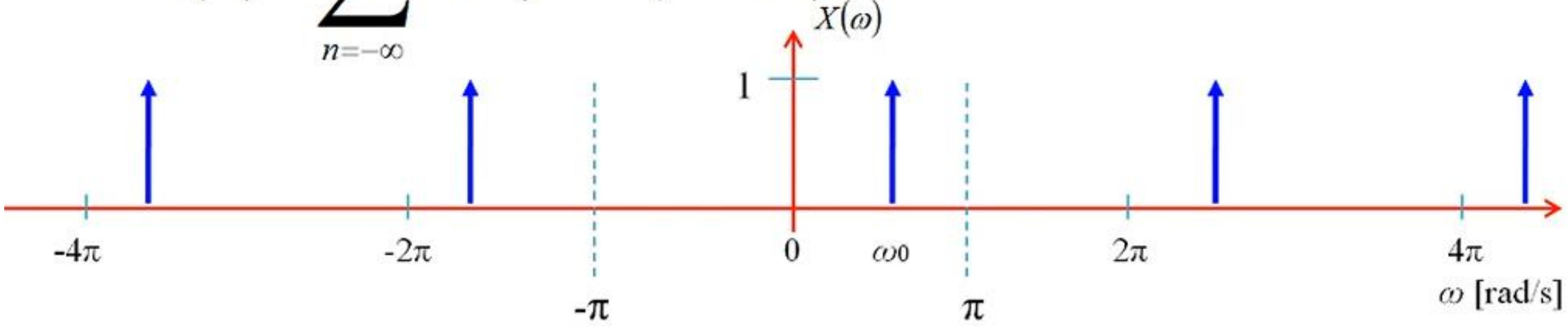
$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a e^{-j\omega}\right)^n$$

$$X(\omega) = \frac{\left(a e^{-j\omega}\right)^0 - \left(a e^{-j\omega}\right)^\infty}{1 - a e^{-j\omega}} = \frac{1}{1 - a e^{-j\omega}}$$



Ejemplos de la TFDT

$$X(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}2\pi\delta(\omega-\omega_0+2\pi k)$$



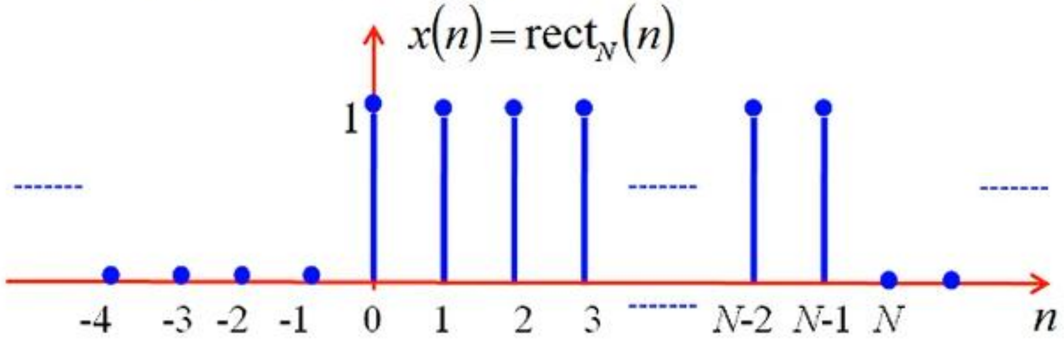
$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}2\pi\delta(\omega-\omega_0+2\pi k)e^{j\omega n}d\omega$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\delta(\omega-\omega_0)e^{j\omega n}d\omega=e^{j\omega_0 n}$$

$$\boxed{x(n)=e^{j\omega_0 n}=\cos(\omega_0 n)+j\mathrm{sen}(\omega_0 n)}$$

Ejemplos de la TFDT

$$x(n)=\mathrm{rect}_N(n)=u(n)-u(n-N)$$



$$X(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{rect}_N(n)e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{N-1}(1)e^{-j\omega n}$$

$$X(\omega)=\frac{e^{-j\omega(0)}-e^{-j\omega(N-1+1)}}{1-e^{-j\omega}}=\frac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{-j\omega}}=\frac{e^{-j\omega\frac{N}{2}}\left[e^{j\omega\frac{N}{2}}-e^{-j\omega\frac{N}{2}}\right]}{e^{-j\frac{\omega}{2}}\left[e^{j\frac{\omega}{2}}-e^{-j\frac{\omega}{2}}\right]}$$

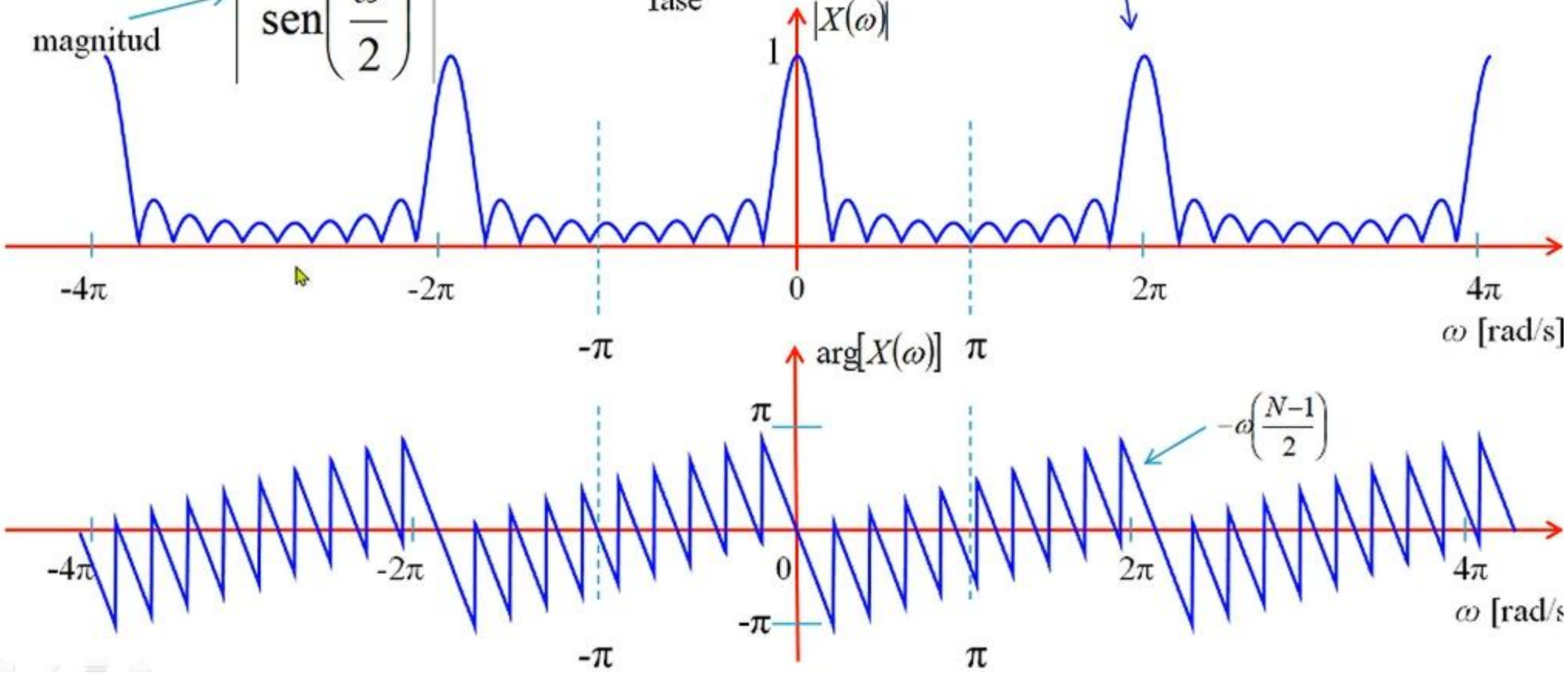
$$X(\omega)=e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)}\frac{\operatorname{sen}\left(\omega\frac{N}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{2}\right)}=|X(\omega)|e^{j\arg[X(\omega)]}$$

Función de Dirichlet (muy parecida a un seno cardinal, sinc)

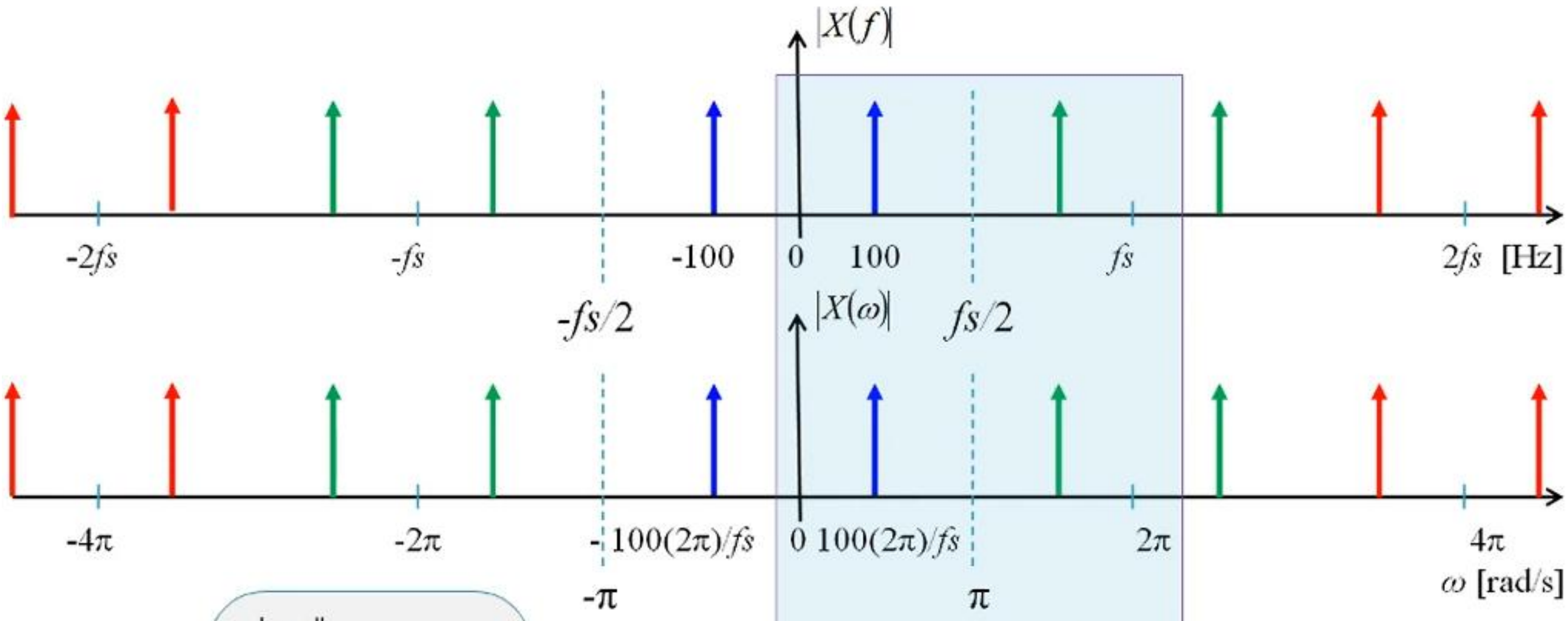
$$X(\omega)=\left|\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right|e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)}$$

magnitud

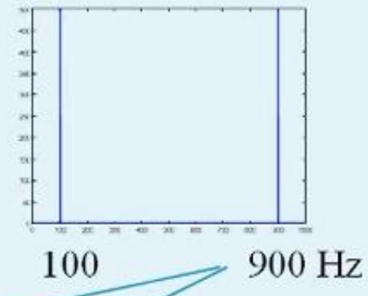
fase



Muestreo temporal → Periodización del espectro




```
clear all

% Generación de la señal
% discreta en el tiempo

f0=100 % Hz
fs= 1000 % Hz
n=0:999;
N=length(n);
x=cos(2*pi*(f0/fs)*n);

%obtención de la TDF
Xk=fft(x);
f=(0:N-1)*(fs/N);
plot(f,abs(Xk))
```



¡Crear eje de frecuencias!

3.2 *Ventaneo* de la señal discreta en el tiempo

- Señales discretas en el tiempo de duración finita:

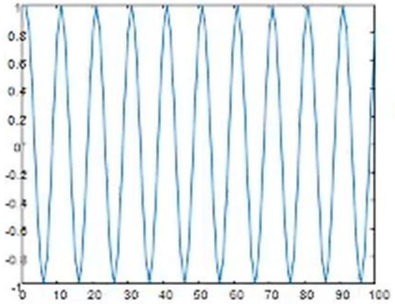
$$x(nT_s) \quad -\infty < n < \infty \quad \rightarrow \quad x(nT_s) \quad 0 < n < N-1$$

Transformada de Fourier Discreta en el Tiempo

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \quad \Rightarrow \quad X(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\omega n}$$

EJEMPLO

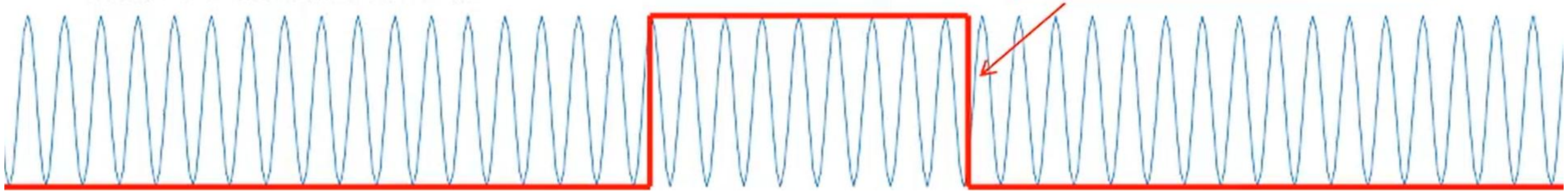
$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t) \quad f_0 = 100 \text{ Hz} \quad f_s = 1000 \text{ Hz}$$



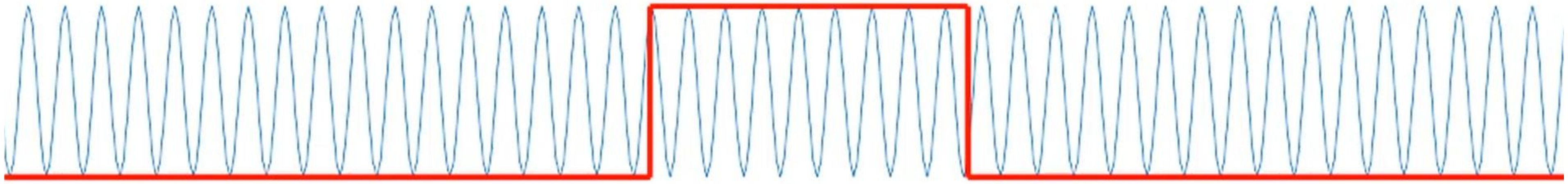
señal de duración finita

señal de duración infinita

ventana de truncamiento



señal de duración infinita



$$x_T(nT_s) = x(nT_s)w(nT_s)$$

$$x_T(n) = x(n)w(n)$$

ventana de truncamiento

Obteniendo la TFDT de la señal truncada y utilizando la propiedad de convolución:

$$X_T(\omega) = \mathrm{TFDT}\{x(n)\} * \mathrm{TFDT}\{w(n)\}$$

$$X_T(\omega) = X(\omega) * W(\omega)$$

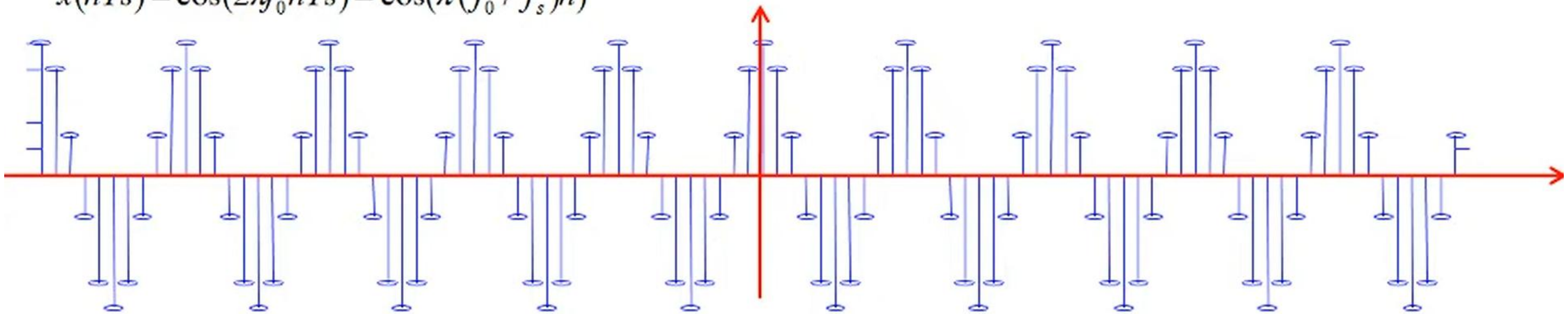
Espectro Original de la señal sin truncar

Espectro de la ventana de truncamiento

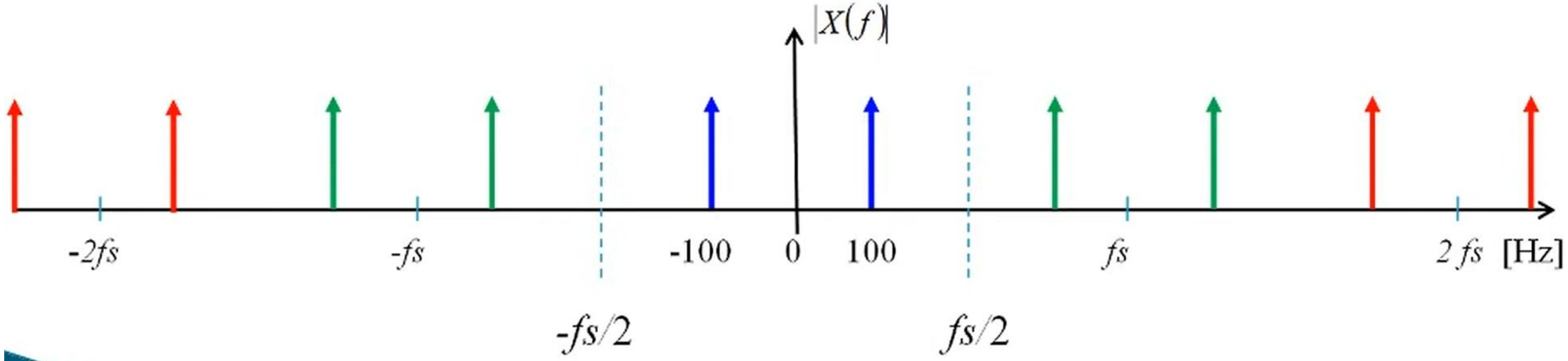
EJEMPLO

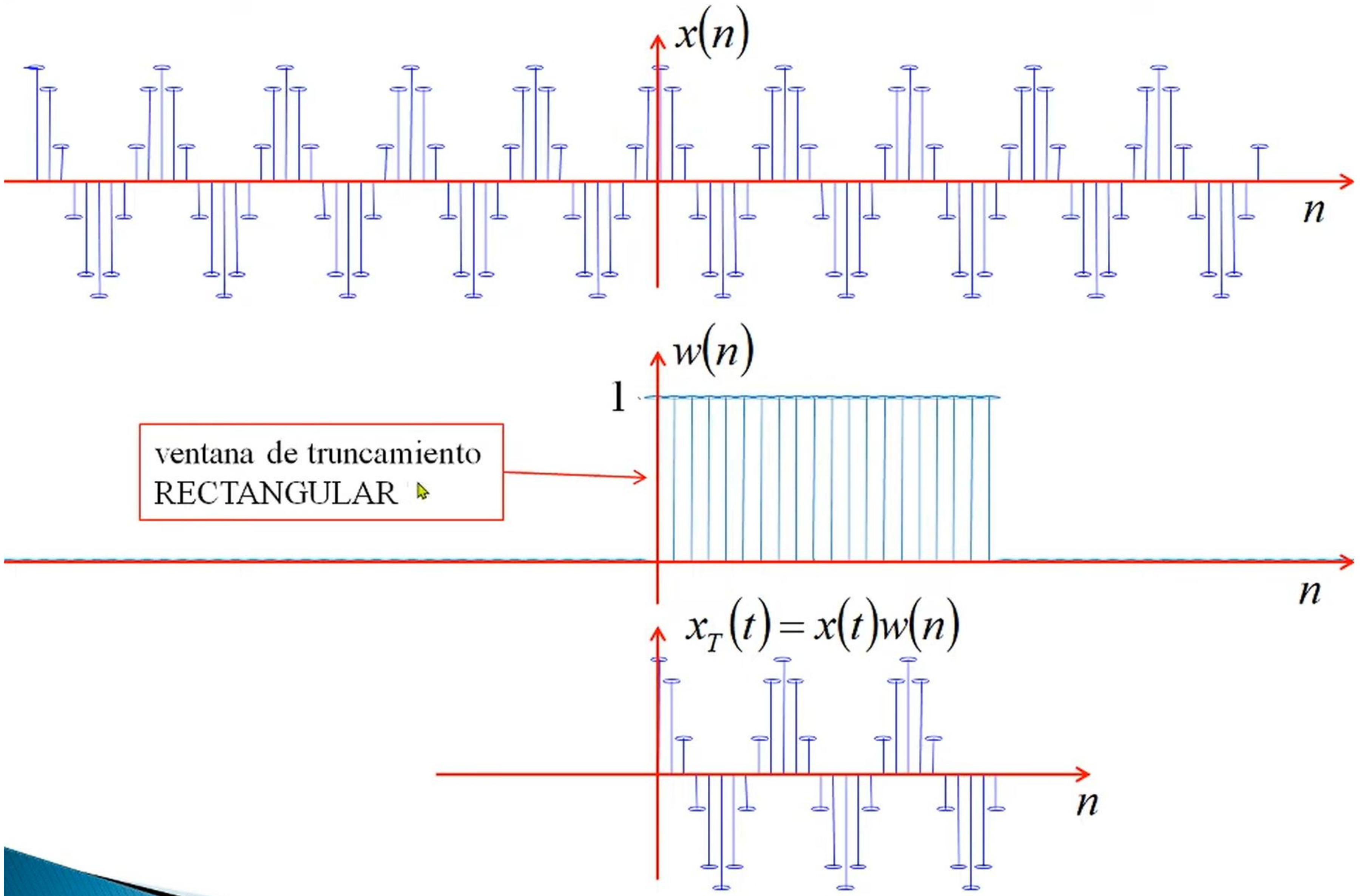
$$x(t)=\cos(2\pi f_0 t) \quad f_0=100\ \text{Hz} \quad f_s=1000\ \text{Hz}$$

$$x(nTs)=\cos(2\pi f_0 nTs)=\cos(\pi(f_0/f_s)n)$$

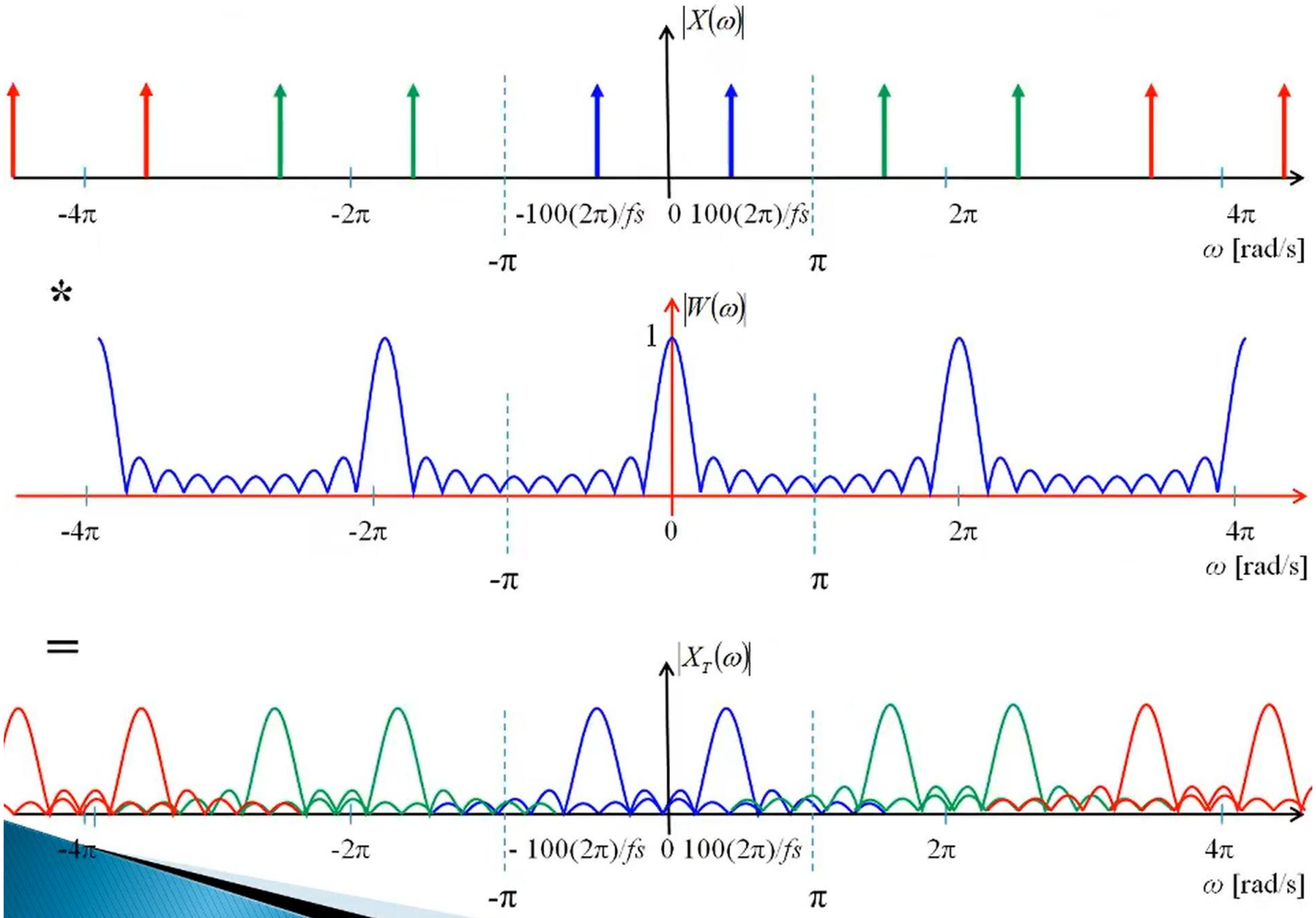


$$X_{nT_s}(f)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2}\delta(f-f_0-kf_s)+\frac{1}{2}\delta(f+f_0+kf_s)\right] \quad ó \quad X(\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\pi\delta(\omega-\omega_0-2\pi k)+\pi\delta(\omega+\omega_0+2\pi k)\right]$$





x(n)
n
w(n)
1
ventana de truncamiento
RECTANGULAR
n
x_T(t) = x(t)w(n)
n



$|X(\omega)|$
-4π
-2π
-100(2π)/fs
0 100(2π)/fs
2π
4π
ω [rad/s]
-π
π
*
$|W(\omega)|$
1
-4π
-2π
0
2π
4π
ω [rad/s]
-π
π
=
$|X_T(\omega)|$
-4π
-2π
- 100(2π)/fs
0 100(2π)/fs
2π
4π
ω [rad/s]
-π
π

En este caso:

$$X_T(\omega) = \text{TFDT}\{x(n)\} * \text{TFDT}\{w(n)\}$$

$$X_T(\omega) = X(\omega) * W(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\pi\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k) + \pi\delta(\omega + \omega_0 + 2\pi k)\right) * \left[e^{-j\omega\frac{(N-1)}{2}} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{2}\right)} \right]$$

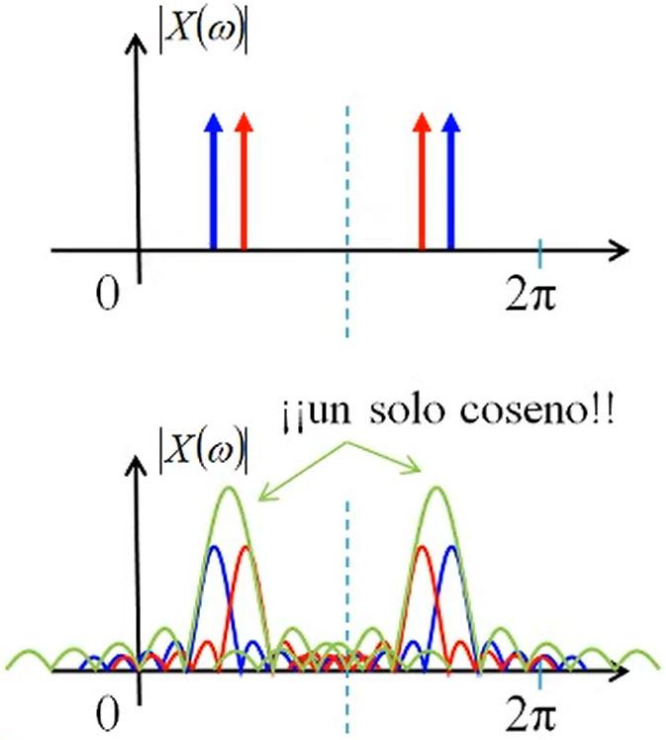
$$|X_T(\omega)| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\pi \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{(\omega - \omega_0 - 2\pi k)N}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{(\omega - \omega_0 - 2\pi k)}{2}\right)} + \pi \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{(\omega + \omega_0 + 2\pi k)N}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{(\omega + \omega_0 + 2\pi k)}{2}\right)} \right)$$

3.3 Observación (resolución) Espectral

Con base en lo anterior, se presenta un **gran problema**:

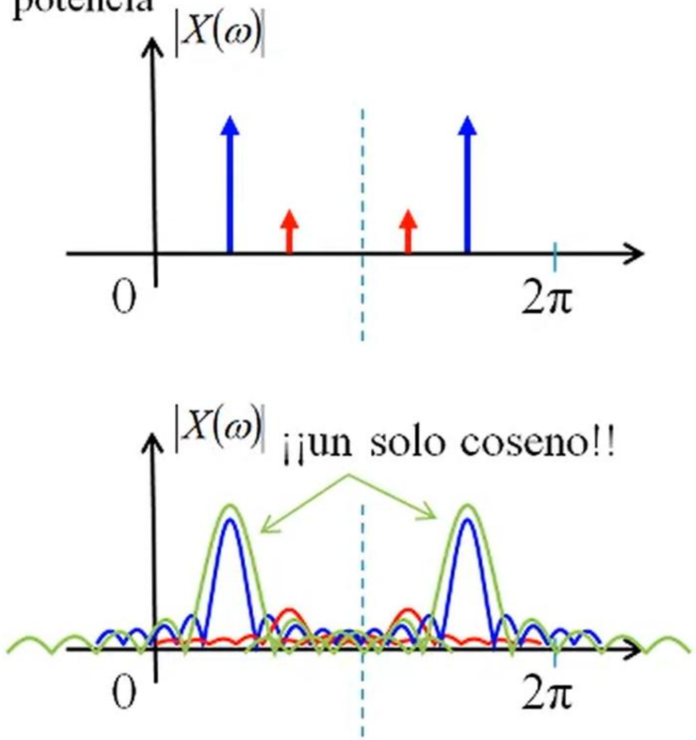
EJEMPLO 1

suma de dos cosenos muy cercanos



EJEMPLO 2

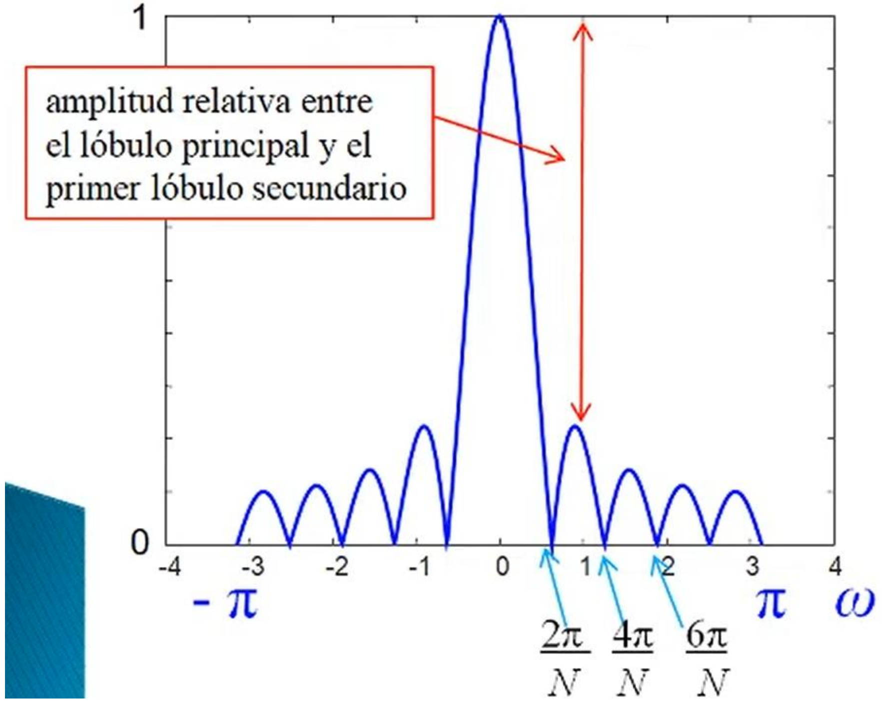
suma de dos cosenos, uno de ellos con poca potencia

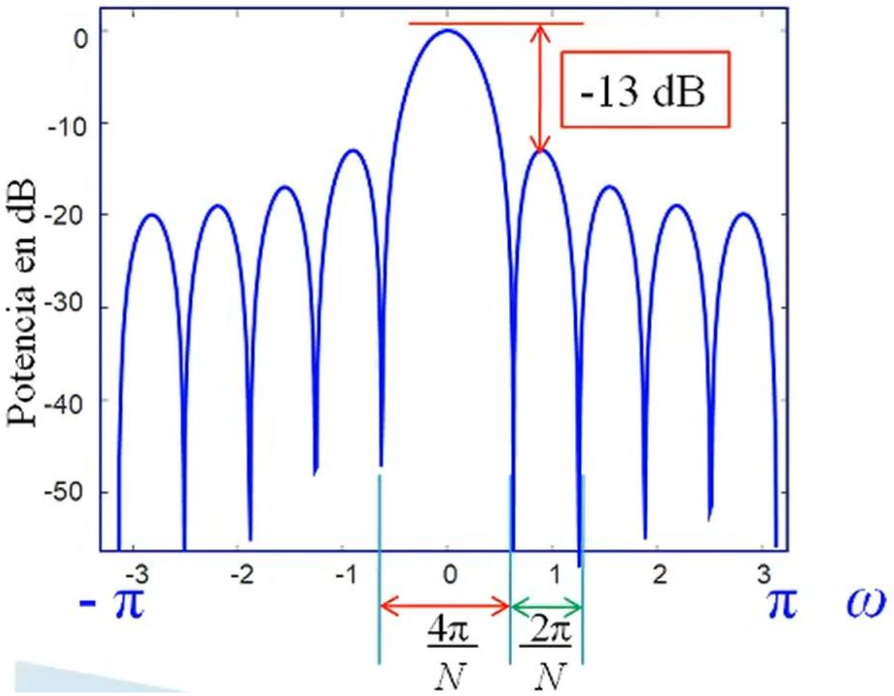


Analicemos en detalle el espectro de la ventana rectangular

$$\left|W(\omega)\right| = \left|\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right|$$

y grafiquémoslo en un solo periodo [- π, π] (ó [-f_s/2, f_s/2])



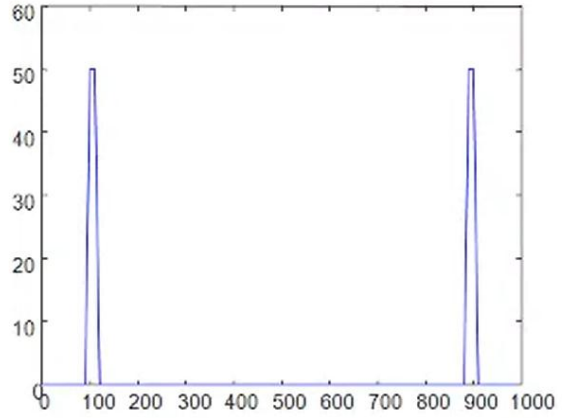


De aquí, el poder separar dos frecuencias cercanas depende del número de puntos N de la señal discreta (truncada), sin embargo separar dos frecuencias cercanas con diferentes potencias depende además de la amplitud relativa entre el lóbulo principal y el primer lóbulo secundario.

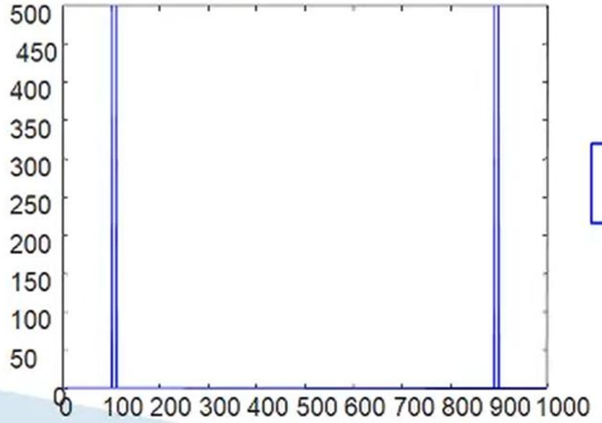
EJEMPLO: Cosenos de frecuencias cercanas y de la misma potencia

$$x(t)=\cos(2\pi f_0 t)+\cos(2\pi f_1 t) \quad f_0=100 \text{ Hz} \;\; f_1=110 \text{ Hz} \;\; f_s=1000 \text{ Hz}$$

```
clear all

% Generación de la señal discreta en
% el tiempo

f0=100  % Hz coseno 1
f1=110  % Hz coseno 2
fs= 1000 % Hz frec. Muestreo

N=100; % número de puntos
n=0:N-1;
x=cos(2*pi*(f0/fs)*n)+cos(2*pi*(f1/fs)*n);

%obtención de la TDF
Xk=fft(x);
f=(0:N-1)*(fs/N);
plot(f, abs(Xk))
```



N=100 puntos

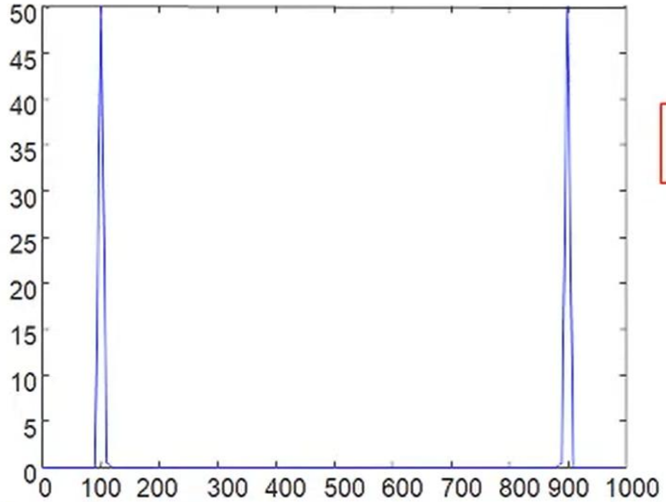


N=1000 puntos

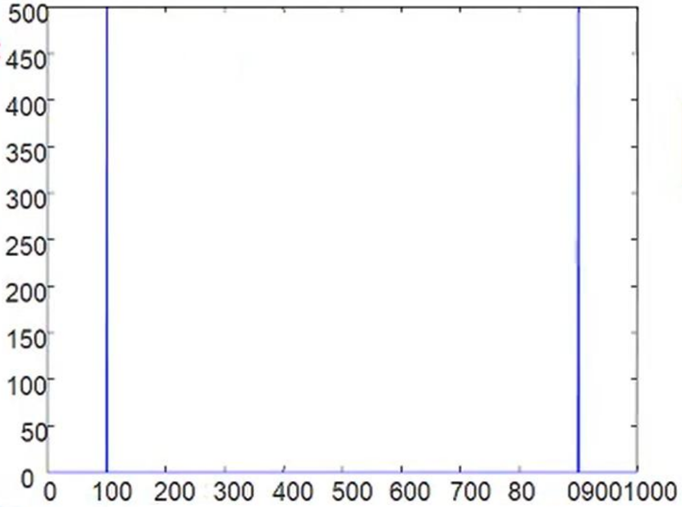
EJEMPLO: Cosenos de frecuencias cercana y diferentes potencias

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t) + \cos(2\pi f_1 t) \quad f_0 = 100 \text{ Hz} \;\; f_1 = 110 \text{ Hz} \;\; f_s = 1000 \text{ Hz}$$

```
clear all

% Generación de la señal discreta en
% el tiempo

f0=100  % Hz coseno 1
f1=110 % Hz coseno 2
fs= 1000 % Hz frec. Muestreo

N=1000; % número de puntos
n=0:N-1;
x=cos(2*pi*(f0/fs)*n)+0.0001*cos(2*pi*(f1/fs)*n);

%obtención de la TDF
Xk=fft(x);
f=(0:N-1)*(fs/N);
plot(f, abs(Xk))
```

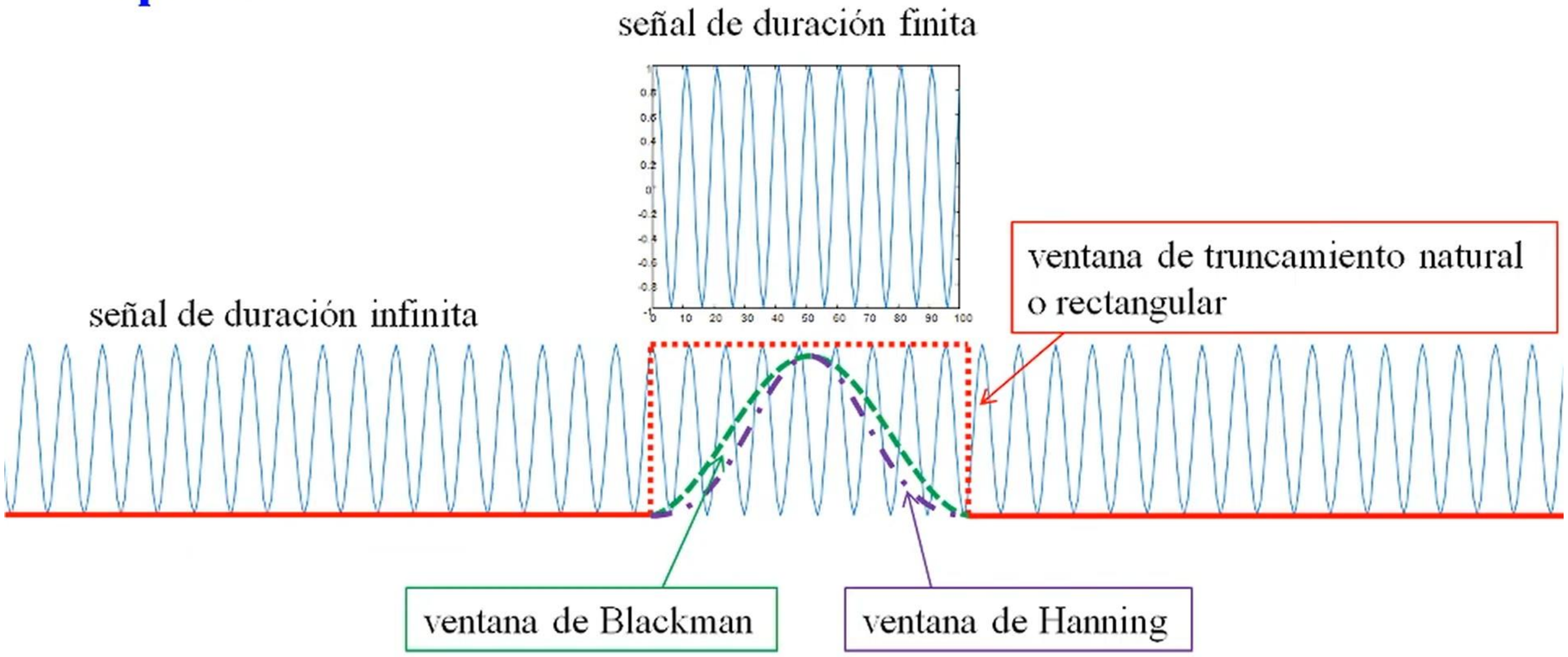


N=100 puntos



N=1000 puntos

¿Es posible tener una solución a este problema de **Resolución Espectral**?



¡Utilizar otras ventanas de ponderación!

Ventanas de ponderación (algunas)

Rectangular

$$w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le M, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Bartlett (triangular)

$$w[n] = \begin{cases} 2n/M, & 0 \le n \le M/2, \\ 2 - 2n/M, & M/2 < n \le M, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Hanning

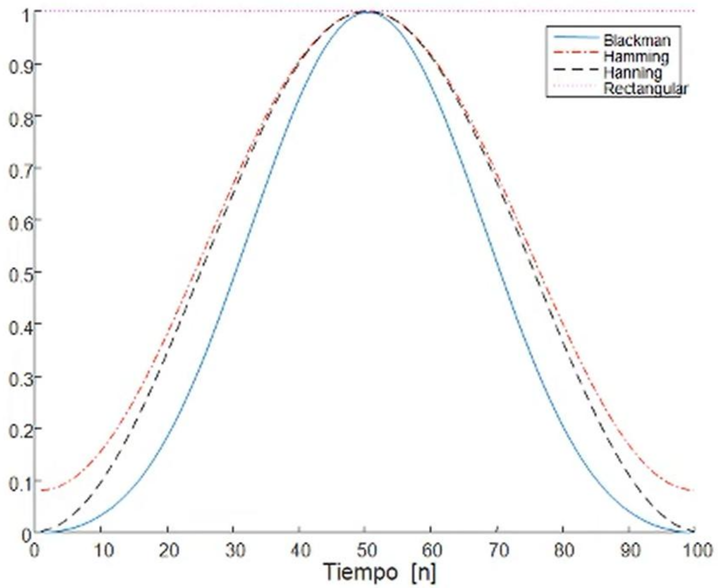
$$w[n] = \begin{cases} 0.5 - 0.5\cos(2\pi n/M), & 0 \le n \le M, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

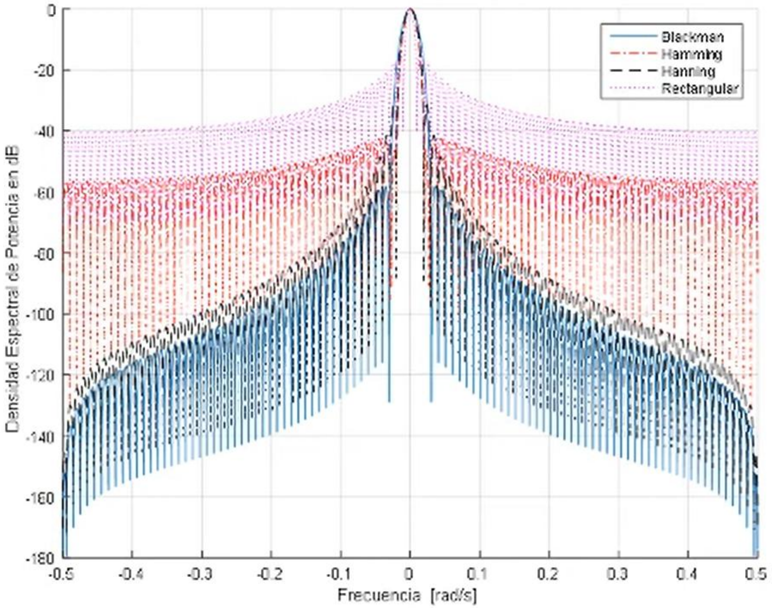
Hamming

$$w[n] = \begin{cases} 0.54 - 0.46\cos(2\pi n/M), & 0 \le n \le M, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

TABLE 7.1 COMPARISON OF COMMONLY USED WINDOWS

Type of Window	Peak Side-Lobe Amplitude (Relative)	Approximate Width of Main Lobe	Peak Approximation Error, $20 \log_{10} \delta$ (dB)	Equivalent Kaiser Window, β	Transition Width of Equivalent Kaiser Window
Rectangular	−13	$4\pi/(M+1)$	−21	0	$1.81\pi/M$
Bartlett	−25	$8\pi/M$	−25	1.33	$2.37\pi/M$
Hanning	−31	$8\pi/M$	−44	3.86	$5.01\pi/M$
Hamming	−41	$8\pi/M$	−53	4.86	$6.27\pi/M$
Blackman	−57	$12\pi/M$	−74	7.04	$9.19\pi/M$





Observación espectral con Matlab

Programa ventanas.m

Inicio

```
clear all
fs=1;
N=100;
x=blackman(N);
x2=hamming(N);
x3=hanning(N);
x4=ones(1,N);
hold on
plot(x)
plot(x2,'r-.')
plot(x3,'k--')
plot(x4,'m:')
xlabel('Tiempo  [n]')
legend('Blackman','Hamming','Hanning','Recta
ngular')
hold off
```

Continuación

```
%espectro
N1=10000;
f=(-N1/2:N1/2-1)*(fs/N1);
y=fftshift(fft(x,N1));
y2=fftshift(fft(x2,N1));
y3=fftshift(fft(x3,N1));
y4=fftshift(fft(x4,N1));

figure(2)
hold on
plot(f,20*log10(abs(y)/max(abs(y))))
plot(f,20*log10(abs(y2)/max(abs(y2))),'r-.')
plot(f,20*log10(abs(y3)/max(abs(y3))),'k--')
plot(f,20*log10(abs(y4)/max(abs(y4))),'m:')

grid
xlabel('Frecuencia  [rad/s]')
ylabel('Densidad Espectral de Potencia en dB')
legend('Blackman','Hamming','Hanning','Rectang
ular')
hold off
```