PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES

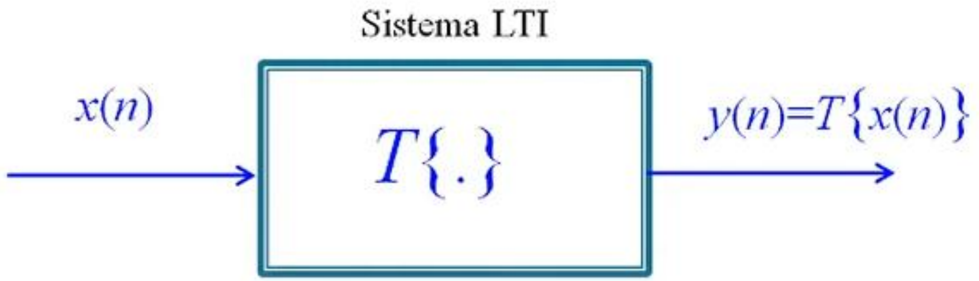
Ingeniería en Electrónica y Telecomunicaciones

IET 802

Dr. Alan David Blanco Miranda

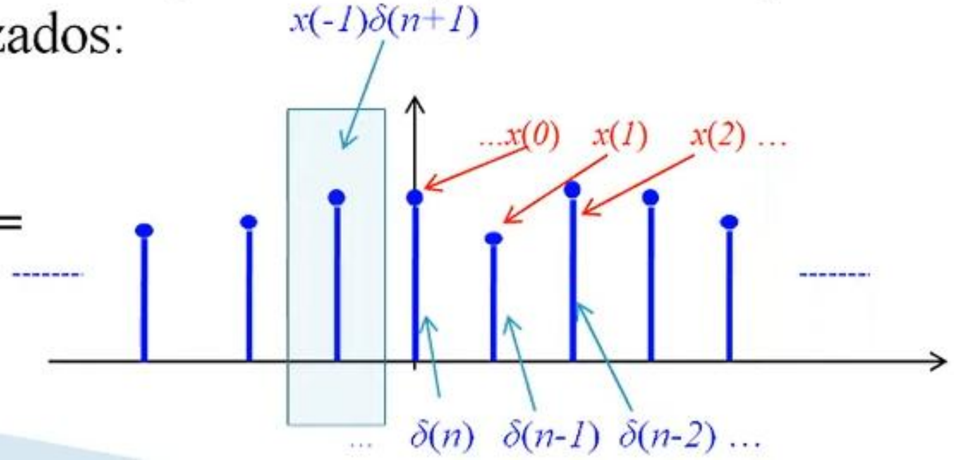
2.4 Sistemas Lineales e Invariantes en el Tiempo (LIT)

Los sistemas discretos que poseen simultáneamente las propiedades de linealidad e invarianza en el tiempo son de crucial importancia en este curso. Consideremos estos sistemas:



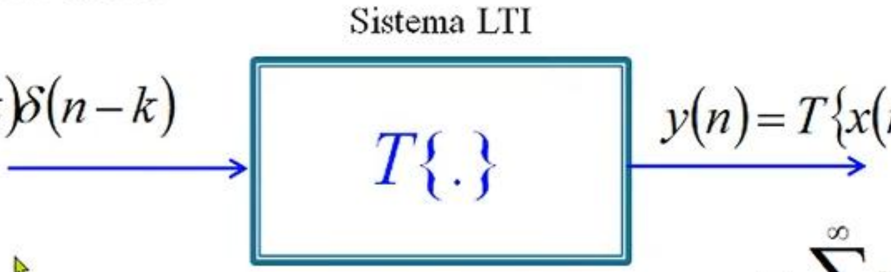
Cualquier sucesión $x(n)$ puede ser representada por una suma ponderada de impulsos unitarios desplazados:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) \quad =$$



Con base en esto:

$$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)\delta(n-k)$$



valores constantes

$$y(n)=T\{x(n)\}=T\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)\delta(n-k)\right\}$$

aplicando la propiedad de linealidad

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)T\{\delta(n-k)\}$$

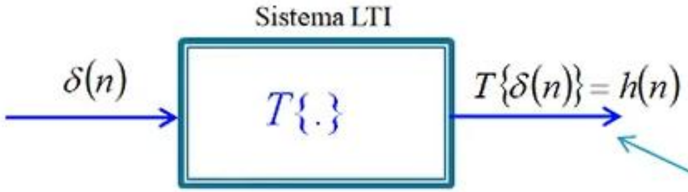
Ahora bien dado que el sistema es invariante en el tiempo

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)T\{\delta(n-k)\}$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k-n)T\{\delta(n-k-n)\}$$

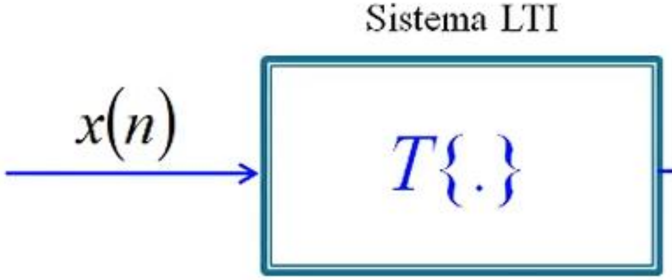
$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k-n)T\{\delta(-k)\}$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(n-k)\underbrace{T\{\delta(k)\}}$$



respuesta al impulso

Finalmente tenemos:



$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)h(n)$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

$$y(n) = x(n) * h(n) = h(n) * x(n)$$

Suma de Convolución o Convolución Discreta

$$\boxed{y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)}$$

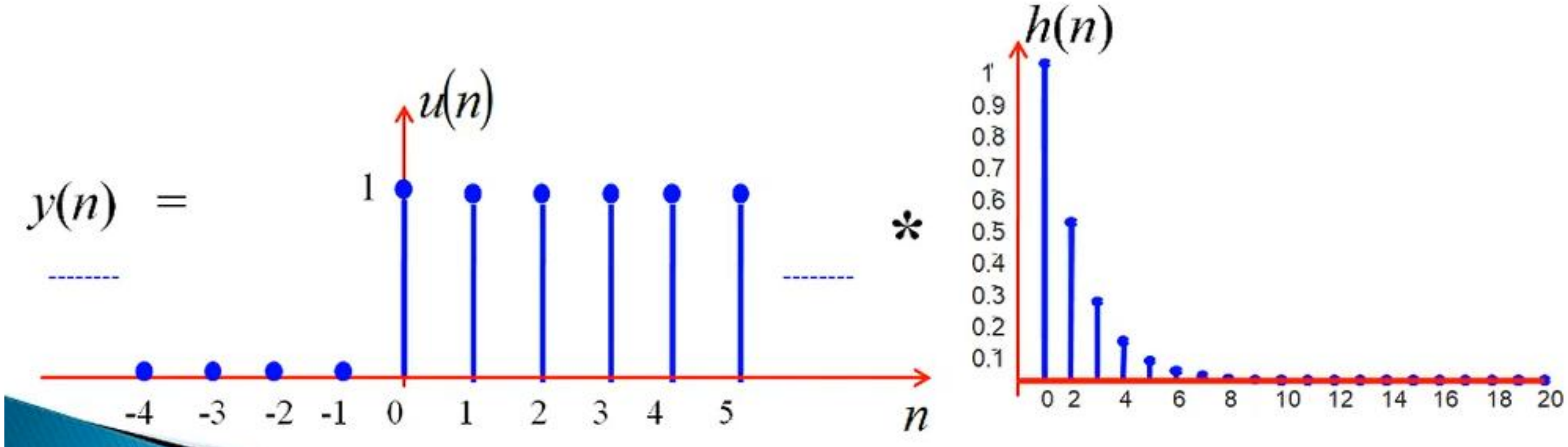
Cualquier sistema LIT es completamente caracterizado por su respuesta al impulso

2.5 Convolución Discreta: implementación

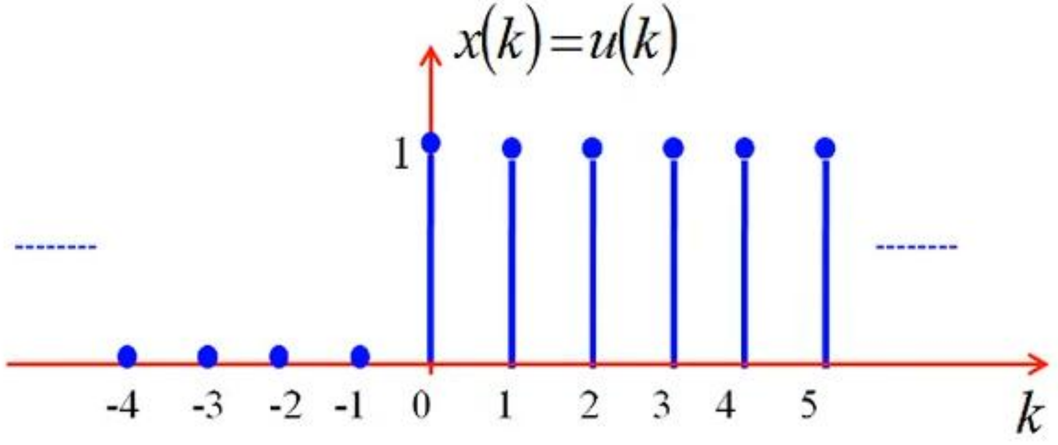
Si se conoce perfectamente la respuesta al impulso de un sistema LIT, se puede obtener la salida de éste ante cualquier entrada resolviendo la suma de convolución, a través de los siguientes pasos:

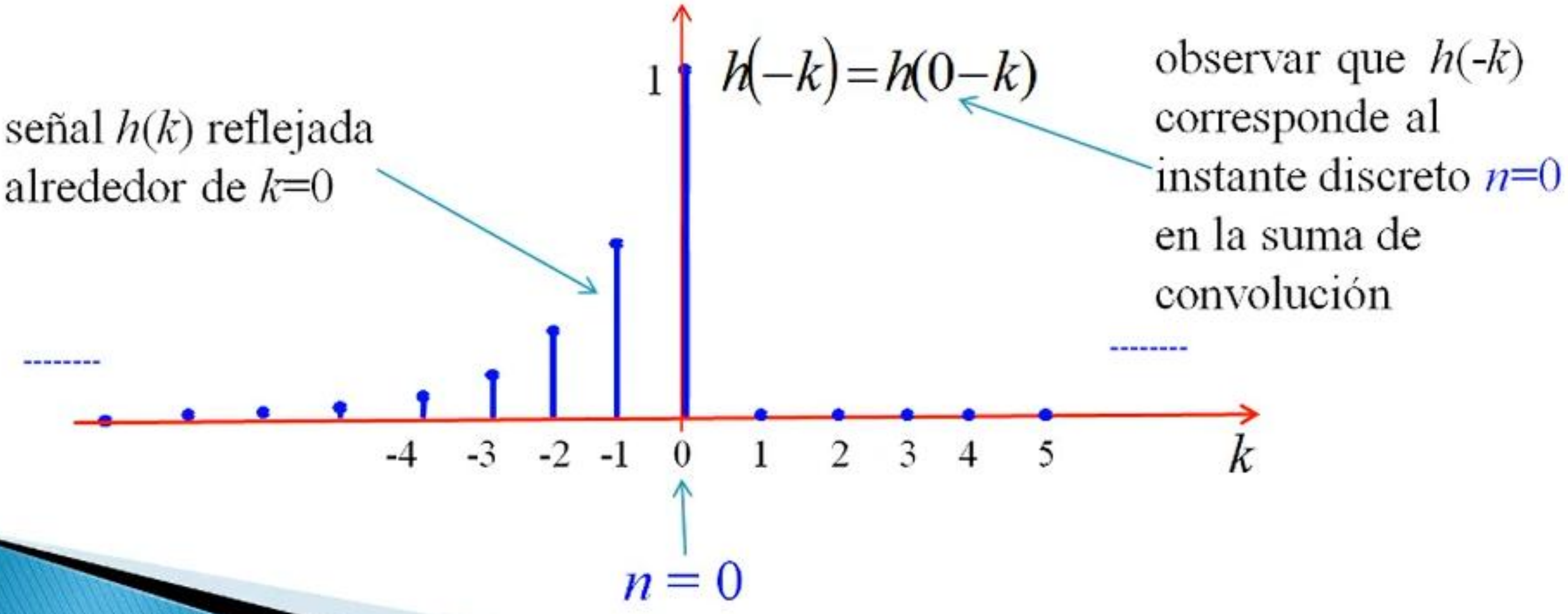
$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

Consideremos las señales siguientes: $x(n) = u(n) \quad h(n) = (0.5)^n u(n)$

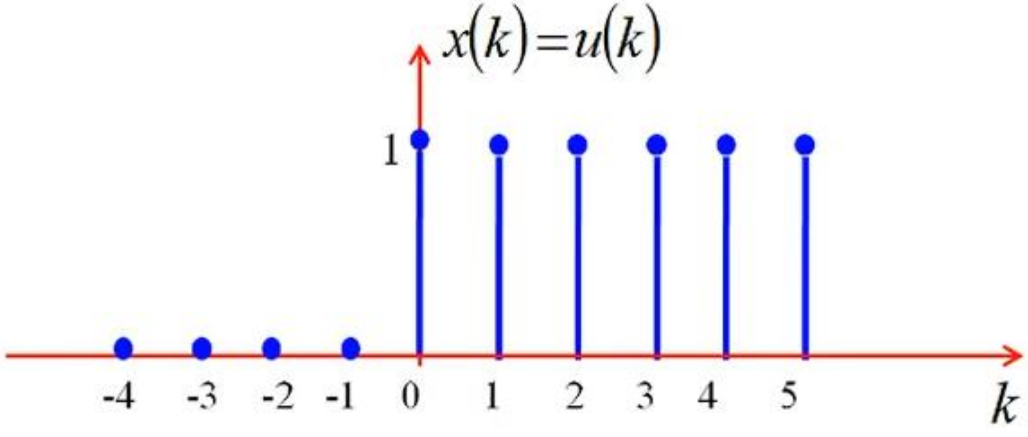


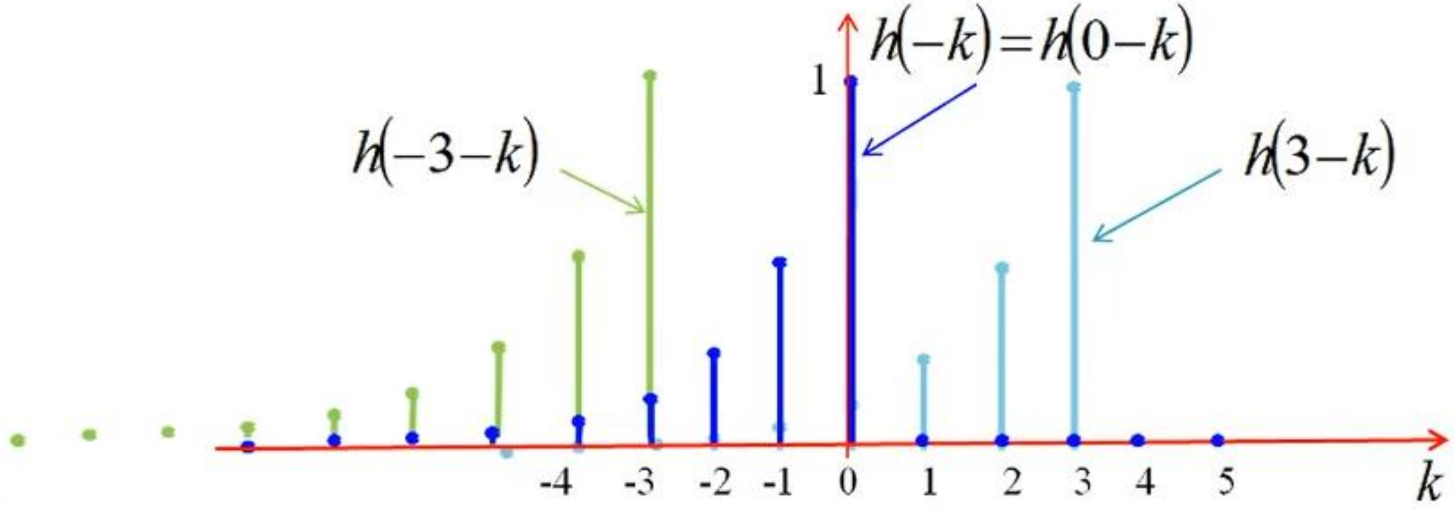
Paso 1: Alinear las señales $x(k)$ y $h(-k)$





Paso 2: Considerar la variable de tiempo discreta n para obtener $h(n\text{-}k)$





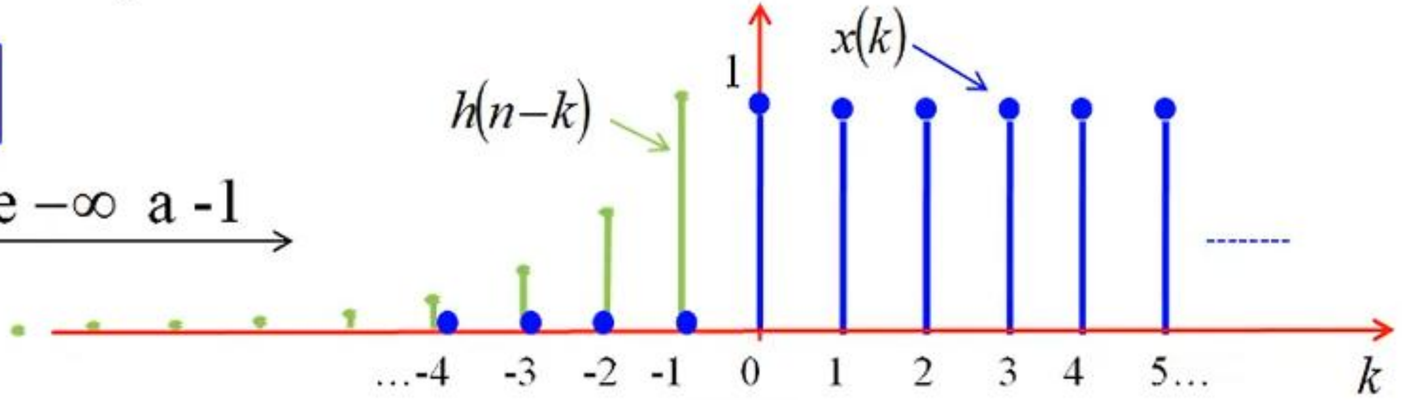
variar n de $-\infty$ a ∞

Paso 3: Observar las interacciones entre $x(k)$ y $h(n\text{-}k)$ y para cada una ellas obtener la suma discreta correspondiente.

En el caso de nuestro ejemplo, podemos identificar dos casos (interacciones):

Caso 1:

n de $-\infty$ a -1



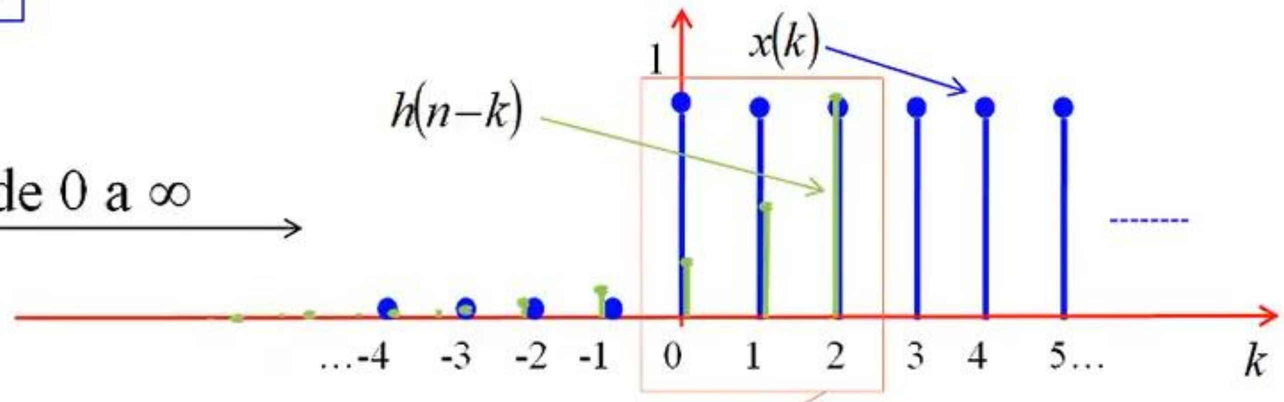
$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}u(k)h(n-k)=\sum_{k=0}^{\infty}h(n-k)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(0)=0$$

$$\boxed{y(n)=0 \qquad -\infty<n\leq -1}$$

Caso 2:

n de 0 a ∞



$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}u(k)h(n-k)=\sum_{k=0}^{\infty}h(n-k)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(0.5)^k \quad 0\le n<\infty$$

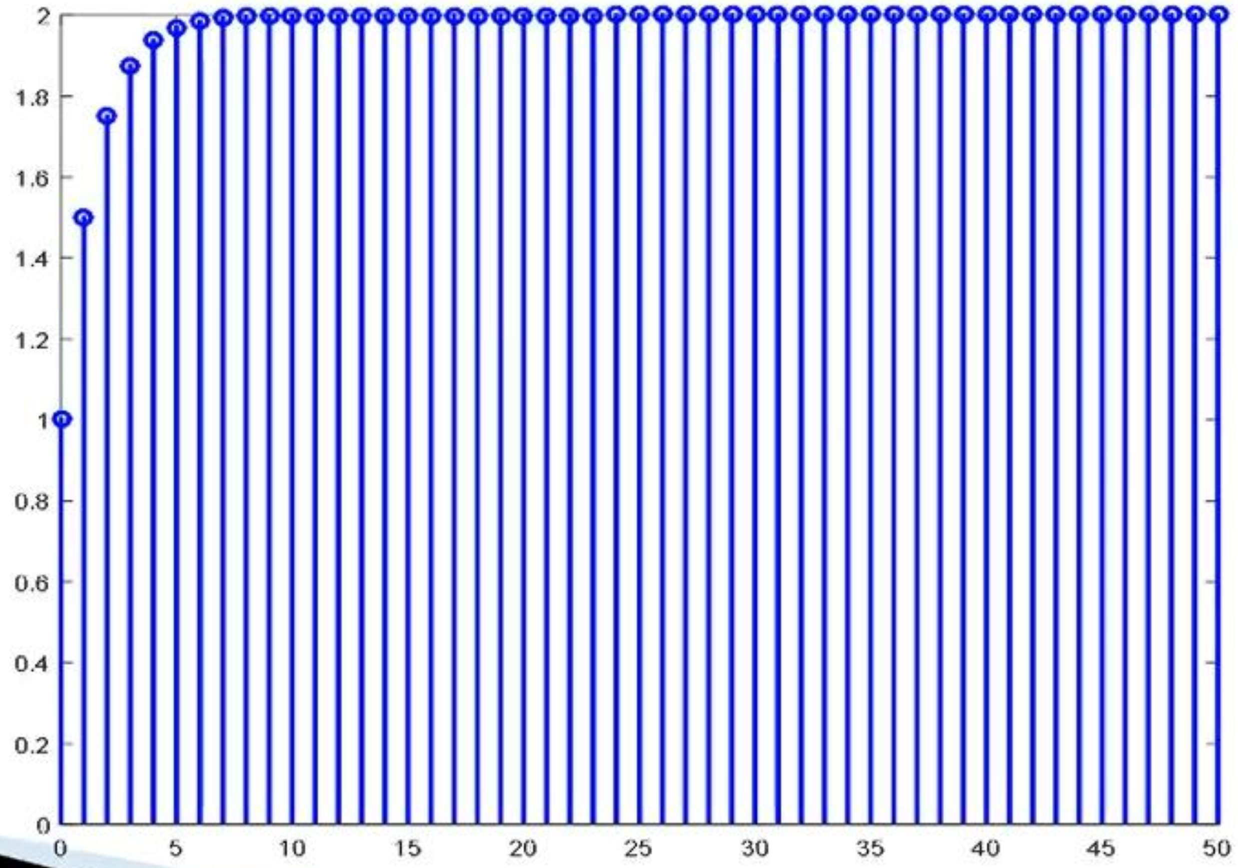
$$=\sum_{k=0}^{n}(0.5)^k=\frac{(0.5)^0-(0.5)^{n+1}}{1-0.5}=\frac{1-(0.5)^{n+1}}{0.5}$$

$$\boxed{y(n)=2-\left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad 0\le n<\infty}$$

$$\boxed{\sum_{k=M}^{N}a^k=\frac{a^M-a^{N+1}}{1-a} \qquad \text{si } |a|<1}$$

Paso 4: Dibujar la señal de salida.

$$y(n)=\begin{cases} 0 & -\infty < n \leq -1 \\ 2-(0.5)^n & 0 \leq n < \infty \end{cases}$$



2.6 Ejercicios sobre la convolución discreta

Determina la señal de salida $y(n)$ de los siguientes sistemas discretos en el tiempo:

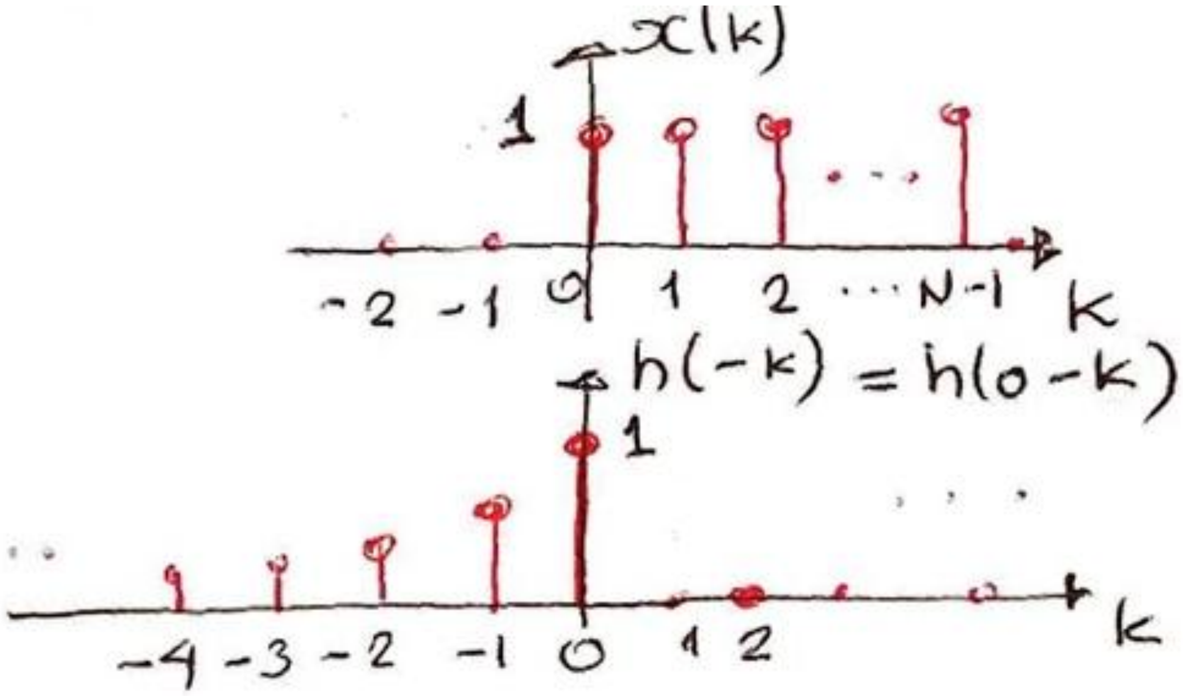
a) $x(n) = u(n) - u(n-N) \quad h(n) = a^n u(n) \quad |a| < 1$

b) $x(n) = u(n) - u(n-N) \quad h(n) = u(n) - u(n-N)$

c) $x(n) = a^n u(n) \quad h(n) = b^n u(n) \quad |a| < 1, \quad |b| < 1$

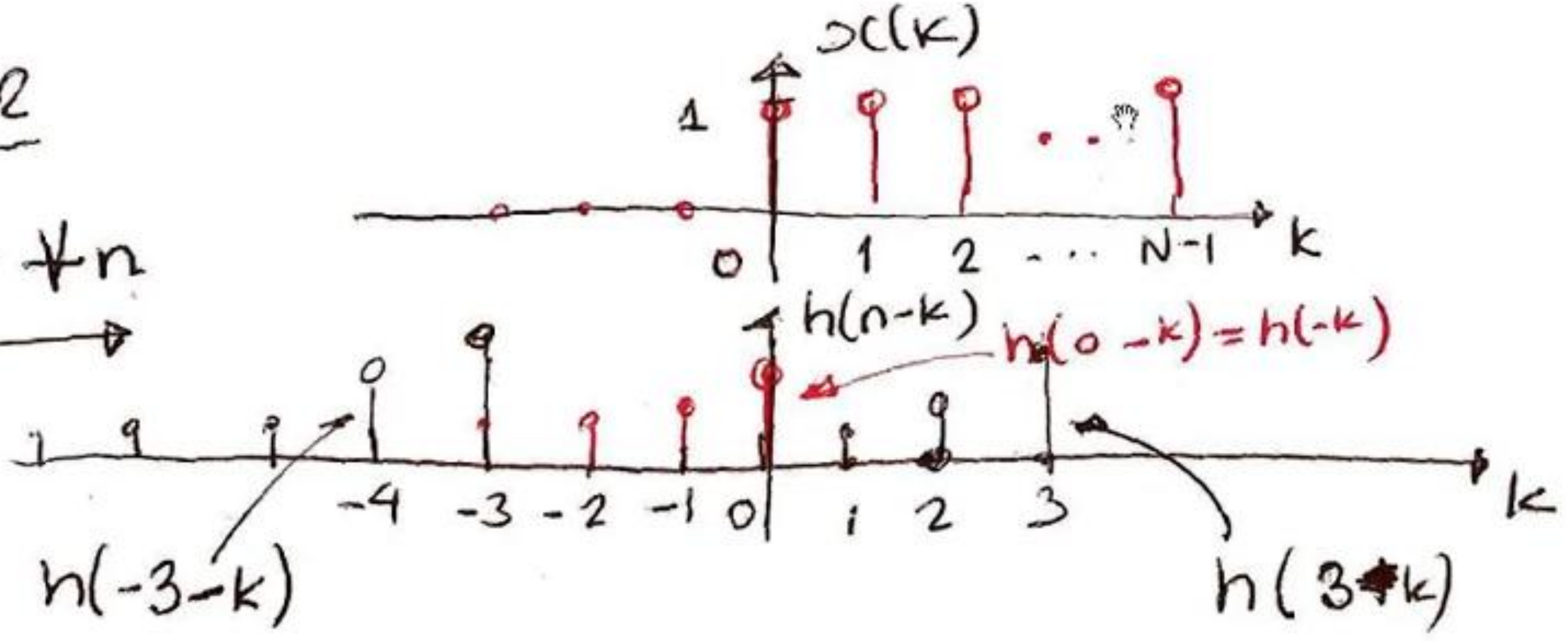
d) $x(n) = 2\delta(n-1) - 0.5\delta(n-3) \quad h(n) = -3\delta(n-1) + \delta(n+2)$

Paso 1



Paso 2

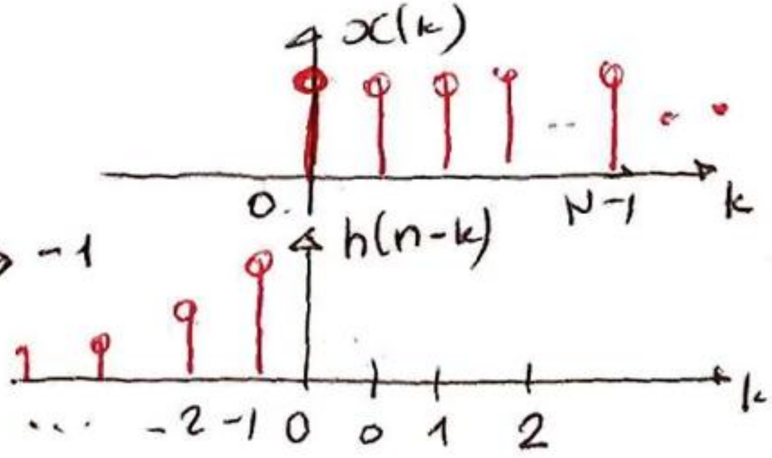
desplazar $\forall n$



<u>Paso 3</u> Observar las posibles interacciones de $x(k)$ y $h(n-k)$ y obtener la suma de convolución correspondiente.

<u>caso 1.</u>

$-\infty \xrightarrow{n} -1$

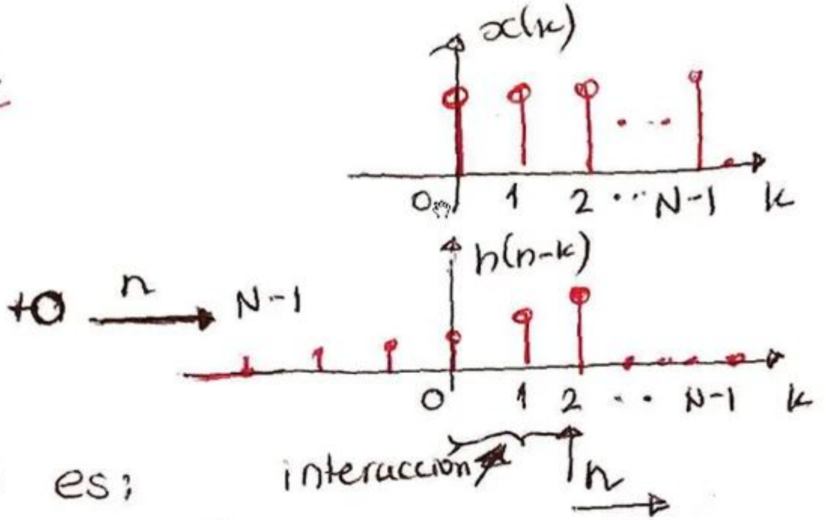


$-\infty < n \leq -1$

Los productos de ambas señales son siempre CERO

$$\Rightarrow \boxed{y(n) = 0 \quad -\infty < n \leq -1}$$

caso 2



En este caso las interacciones ocurren entre 0 y N-1 hasta que la exponencial coincide con N-1.

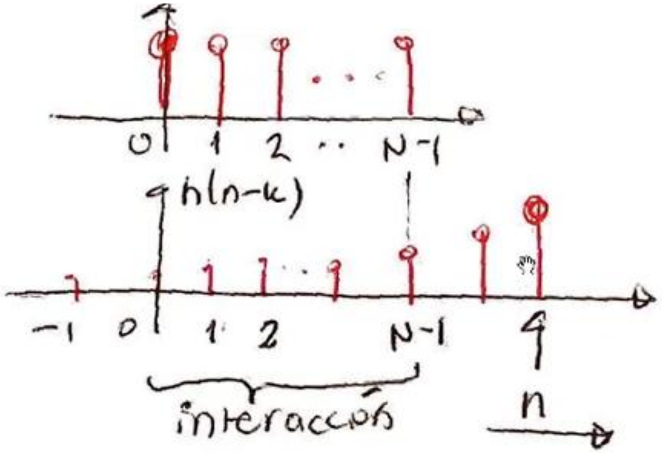
Esto es;

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\, h(n-k) = \sum_{k=0}^{n} (1)\, a^{k} \qquad 0 \leq n \leq N-1$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n} a^{k} \qquad |a| < 1 \quad \text{esta serie converge a:}$$

$$y(n) = \frac{a^{0} - a^{n+1}}{1-a} = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \qquad |a|<1 \quad 0 \leq n \leq N-1$$

Caso 3



La exponencial está saliendo del pulso rectangular.

La interacción existe entre $0 \leq k \leq N-1$

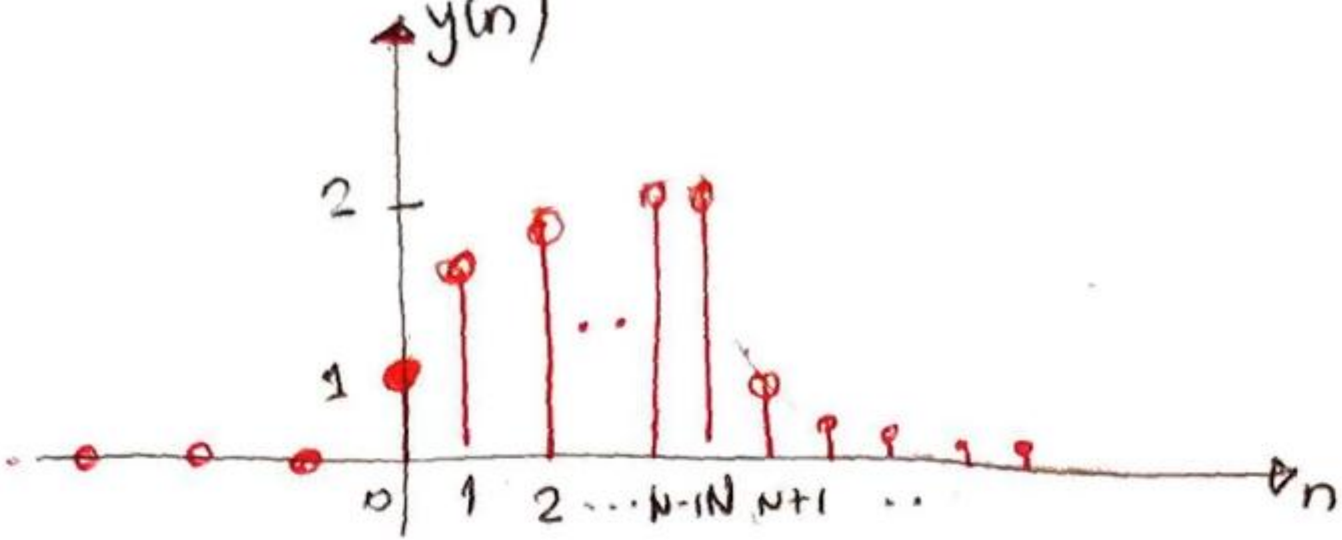
De aquí:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} (1)\, a^{n-k} \qquad N \leq n < \infty$$

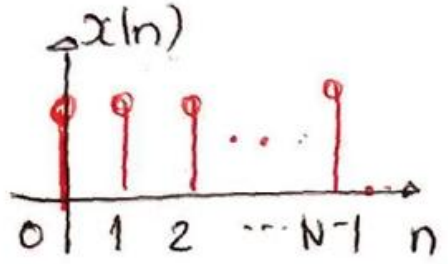
$$y(n) = a^n \sum_{k=0}^{N-1} a^{-k} = a^n \sum_{k=-(N-1)}^{0} a^{k} = a^n \, \frac{a^{-(N-1)} - a^{0+1}}{1-a}$$

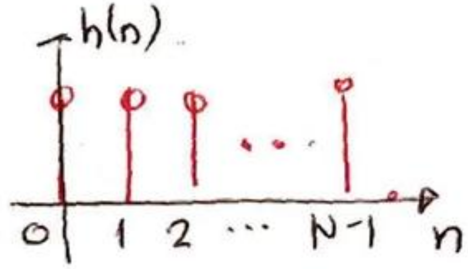
$$\boxed{y(n) = a^n \, \frac{a^{-(N-1)} - a}{} \qquad N \leq n < \infty}$$

Paso 4



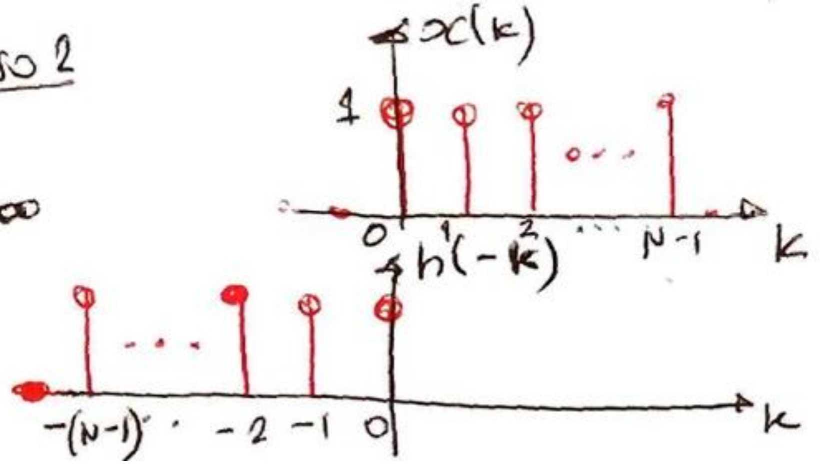
b) $x(n) = \text{rect}_N(n)$ $\quad$ $h(n) = \text{rect}_N(n)$





Paso 1 + Paso 2

$-\infty \xrightarrow{n} \infty$



Paso 3

$\overset{\uparrow}{n=0} \longrightarrow$

Caso 1

$$\boxed{y(n) = 0 \qquad -\infty < n \leq -1}$$

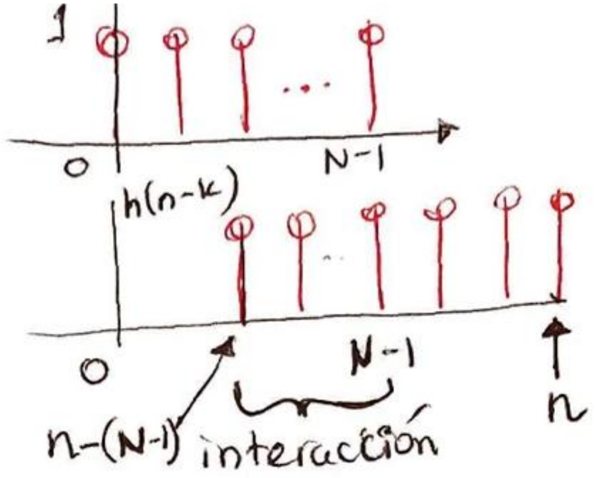
Caso 2

Los dos pulsos se traslapan hasta que uno queda perfectamente alineado con el otro:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\, h(n-k) = \sum_{k=0}^{n} (1)(1) = \sum_{k=0}^{n} (1) \qquad 0 \leq n \leq N-1$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y(n) = n+1 \qquad 0 \leq n \leq N-1}$$

Caso 5

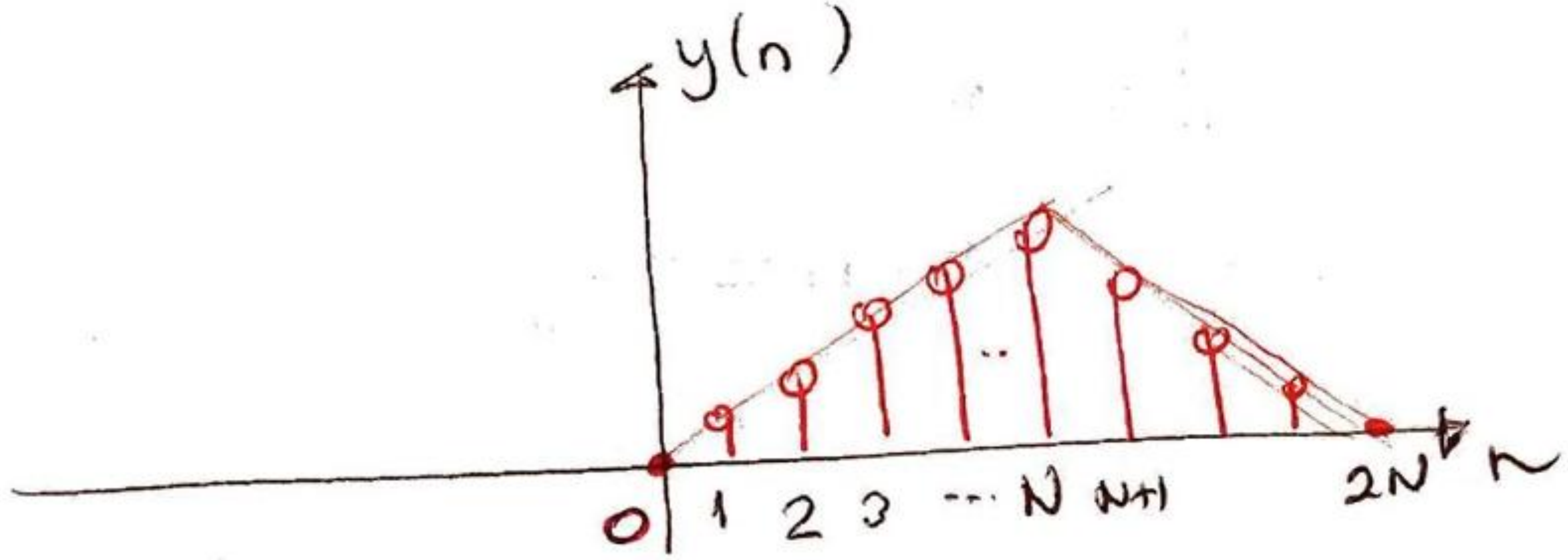


De aquí:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\, h(n-k) = \sum_{k=n-(N-1)}^{N-1} (1)(1) \qquad N \leq n < 2N$$

$$\boxed{y(n) = 2N - n \qquad N \leq n < 2N}$$

PASO 4



PROGRAMA EN PYTHON

2.8 Estabilidad y Causalidad de Sistemas LIT

Además de la linealidad y la invarianza en el tiempo, la necesidad de tener en la práctica sistemas reales implica que éstos sean causales (realizables) y estables.

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

Para que el sistema sea causal la señal de salida no puede depender de valores futuros de la entrada, pero tampoco de valores futuros de la respuesta al impulso, por esto:

$$\boxed{h(n) = 0 \quad n < 0}$$

Por el reflejo de la señal $h(k)$ alrededor de n=0, i.e. $h(-k)$

<u>La respuesta al impulso debe ser estrictamente cero para los valores negativos del tiempo</u>

Para que el sistema sea estable la señal de salida debe estar acotada cuando la entrada está acotada, esto es:

$$|x(n)| < \infty \rightarrow |y(n)| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \right|$$

$$|y(n)| \leq \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k) \right| \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \right|$$

Entrada acotada

Esto implica que:

$$\boxed{\left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) \right| < \infty}$$

<u>La respuesta al impulso debe ser acotada (absolutamente sumable)</u>