

# Trabajo Práctico 3: Problemas NP-Complejos para la defensa de la Tribu del Agua

Facultad de Ingeniería de la Universidad de  
Buenos Aires

Teoría de Algoritmos

Cátedra Buchwald-Genender



Gómez Belis, Sofía  
Padrón: 109358  
email: sgomezb@fi.uba.ar

Llanos Pontaut,  
Valentina  
Padrón: 104413  
email: vllanos@fi.uba.ar

Orsi, Tomas Fabrizio  
Padrón: 109735  
email: torsi@fi.uba.ar

## Índice

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>2</b>
1.1	Descripción y objetivo . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Demostración de problema NP-Completo</b>	<b>2</b>
2.1	Problema en NP . . . . .	3
2.2	Problema 2-Partition . . . . .	4
2.2.1	Problema en NP . . . . .	4
2.2.2	Reducción . . . . .	5
2.3	Reducción del Problema del Balanceo de Carga . . . . .	6
2.3.1	Introducción . . . . .	6
2.3.2	Demostración de problema NP-Completo . . . . .	7
2.3.3	Desarrollo . . . . .	8
2.4	Reducción del Problema 2-Partition . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Complejidad algorítmica</b>	<b>11</b>
3.1	Complejidad lectura de archivos . . . . .	11
3.2	Complejidad algoritmo de Backtracking . . . . .	12
3.3	Complejidad algoritmo de Programación Lineal . . . . .	14
3.4	Complejidad algoritmo de Aproximación . . . . .	14
3.5	Efecto de las variables sobre el algoritmo . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Ejemplos de ejecución</b>	<b>14</b>
4.1	Ejecución del programa . . . . .	15
<b>5</b>	<b>Mediciones de tiempo</b>	<b>16</b>
5.1	Algoritmo de backtracking . . . . .	16
5.2	Algoritmo de programación lineal . . . . .	16
5.3	Algoritmo de aproximación . . . . .	16
<b>6</b>	<b>Conclusión</b>	<b>16</b>

# 1 Introducción

## 1.1 Descripción y objetivo

Continuando con el ataque de la Nación del Fuego sobre el resto de las naciones, esta vez es la Tribu del Agua la que requiere de nuestra ayuda para defenderse.

Cada maestro agua tiene una fuerza o habilidad positiva  $x_i$ , y contamos con el conjunto de todos los valores  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Basándonos en estos, el maestro Pakku desea separar los maestros en  $k$  grupos  $(S_1, S_2, \dots, S_k)$  parejos tal que cuando un grupo se cansa, entrará el siguiente en el combate, obteniendo un ataque constante que les permita salir victoriosos, aprovechando también la ventaja del agua por sobre el fuego.

Para que los grupos estén lo más parejos posibles, nos han encomendado minimizar la adición de los cuadrados de las sumas de las fuerzas de los grupos:

$$\min \sum_{i=1}^k \left( \sum_{x_j \in S_i} x_j \right)^2$$

En este trabajo desarrollaremos algoritmos de backtracking, programación lineal y posibles aproximaciones buscando resolver el problema de optimización planteado con el objetivo de ayudar a los maestros de la Tribu del Agua a derrotar a la Nación del Fuego. También nos dedicaremos a demostrar que el problema de la tribu del agua es NP-Completo.

## 2 Demostración de problema NP-Completo

Los problemas NP-Completo son los problemas más difíciles de NP. Cualquier problema en NP puede ser reducido a uno NP-Completo.

Para demostrar que el problema de la Tribu del Agua es NP-Completo, primero debemos demostrar que se encuentra en NP. Posteriormente, si logramos hacer una reducción polinomial de un problema NP-Completo a éste, entonces esto implica que también se trata de un problema NP-Completo. Ésto se debe a que la reducción  $Y \leq_p X$  implica que la dificultad de resolver  $Y$  se reduce polinomialmente a la dificultad de resolver  $X$ , o que  $X$  es al menos tan difícil de resolver como  $Y$ . Si  $Y$  es un problema NP-Completo, entonces  $X$  es al menos tan difícil de resolver como un problema NP-Completo.

Para realizar la demostración y la reducción, necesitamos basarnos en el problema de decisión:

Dados una secuencia de  $n$  fuerzas de maestros agua  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , y dos números  $k$  y  $B$ , ¿existe una partición en  $k$  subgrupos  $(S_1, S_2, \dots, S_k)$  tal que:

$$\sum_{i=1}^k \left( \sum_{x_j \in S_i} x_j \right)^2 \leq B$$

y cada elemento  $x_i$  esté asignado a solamente un grupo?

## 2.1 Problema en NP

Un problema se encuentra en NP si existe un certificador eficiente para el mismo. Es decir, si puede ser verificado o validado en tiempo polinomial.

Tenemos los siguientes datos:

- Habilidades de los maestros  $\rightarrow$  se presentan en forma de tupla (nombre maestro, fuerza)
- Cantidad de subconjuntos  $\rightarrow k$
- Cota del coeficiente  $\rightarrow B$
- Resultado a validar  $\rightarrow$  subconjuntos  $S_i$  que contienen los nombres de los maestros del grupo correspondiente

También tenemos las siguientes restricciones:

- Cada maestro debe estar asignado a un solo grupo
- El resultado debe contener  $k$  grupos
- La sumatoria resultante debe ser a lo sumo  $B$

Dados estos datos y restricciones, proponemos el siguiente certificador.

```
1 def validador_problema_tribu_del_agua(habilidades_maestros_agua, k, B, S):
2     if len(S) != k: #O(1)
3         return False
4     suma = 0 #O(1)
5     maestros = set() #O(1) Cada maestro debe estar en solo un grupo
6     dic_habilidades = dict() #O(1)
7
8     for info_maestro in habilidades_maestros_agua: #O(n)
9         maestro, habilidad = info_maestro #O(1)
10        dic_habilidades[maestro] = habilidad #O(1)
11
12    # O(n * k)
13    for grupo in S: # k grupos: O(k)
14        suma_grupo = 0 #O(1)
15        if len(grupo) == 0:
16            return False
17        for maestro in grupo: # En el peor caso O(n)
18            if maestro in maestros or maestro not in dic_habilidades:
19                return False # El maestro dado está en más de un grupo
20            maestros.add(maestro) #O(1)
21            suma_grupo += dic_habilidades[maestro] #O(1)
```

```

22         suma += suma_grupo ** 2 #O(1)
23
24     if suma > B: # O(1)
25         return False
26
27     for maestro, _habilidad in habilidades_maestros_agua: #O(n)
28         if maestro not in maestros: # O(1)
29             return False # No tiene grupo asignado
30
31     return True

```

Para que el verificador presentado pueda ser considerado un certificador eficiente, debe ejecutarse en tiempo polinomial. Por lo tanto, procedemos a explicar y justificar la complejidad del código.

Realizamos operaciones aritméticas, asignaciones y verificaciones. Todas estas son operaciones  $O(1)$  puesto que consumen tiempo constante según la documentación oficial. Recorremos dos veces la lista de maestros y habilidades con diferentes propósitos. Como contiene  $n$  tuplas, cada ciclo `for` tiene un costo  $O(n)$ . Con el objetivo de obtener la adición de los cuadrados de las sumas de las fuerzas de los grupos y compararla con  $B$ , tenemos dos ciclos anidados. El segundo recorre los maestros de un grupo que, en el peor caso, son  $n$ . Esto se realiza  $k$  veces, por lo que en total es  $O(k \times n)$ .

Entonces,

$$T(n) = O(1) + 2 \cdot O(n) + O(k \times n) = O(k \times n)$$

En el peor caso,  $k = n$  y

$$T(n) = O(n \times n) = O(n^2)$$

Ambas cotas,  $O(k \times n)$  y  $O(n^2)$  conllevan tiempo polinomial. Por lo tanto, podemos afirmar que existe un certificador eficiente para el problema de la Tribu del Agua y entonces este problema está en NP.

## 2.2 Problema 2-Partition

Para demostrar que el problema de la tribu del agua es NP-Completo haremos uso del problema 2-Partition. Este se define de la siguiente manera: se tiene un conjunto de  $n$  elementos, cada uno con un valor, y se desea separarlos en 2 subconjuntos tal que la suma de los valores de cada uno sea igual para ambos. Procederemos a justificar que se trata de un problema NP-Completo.

### 2.2.1 Problema en NP

Enunciamos el problema de decisión asociado: dado un conjunto  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , ¿existen dos subconjuntos  $A_1$  y  $A_2$  tales que  $\sum_{a \in A_1} a = \sum_{a \in A_2} a$ ?

A continuación mostramos la implementación de un validador:

```

1 def validador_2_partition(valores, s1, s2):
2     if sum(s1) != sum(s2) or len(s1) >= len(valores) or len(s2) >= len(valores):
3         return False
4
5     apariciones = {}
6     for elemento in s1:
7         apariciones[elemento] = apariciones.get(elemento, 0) + 1
8
9     for elemento in s2:
10        apariciones[elemento] = apariciones.get(elemento, 0) + 1
11
12    valores_no_repetidos = {}
13    for valor in valores:
14        nuevoValor = valores_no_repetidos.get(valor, 0) + 1
15        valores_no_repetidos[valor] = nuevoValor
16
17    if len(apariciones) != len(valores_no_repetidos):
18        return False
19
20    for valor, cantidad in apariciones:
21        if valor not in valores_no_repetidos:
22            return False
23        elif valores_no_repetidos[valor] != cantidad:
24            return False
25
26    return True

```

Hay tres ciclos `for`. Uno de ellos recorre todos los valores del conjunto. Considerando que hay  $n$ , es una operación  $O(n)$ . Los conjuntos  $A_1$  y  $A_2$  deberían contener en total  $n$  elementos, pudiendo uno de ellos tener hasta  $n-1$ . En total, ambos conllevan  $O(n)$ . Por lo tanto, la complejidad temporal del validador es  $O(n)$ , constituyendo un certificador eficiente. Como el problema 2-Partition puede ser verificado en tiempo polinomial, podemos afirmar que se encuentra en NP.

### 2.2.2 Reducción

Como hemos visto en clase, el problema de subset sum es NP-Completo. Utilizaremos esta conclusión para demostrar que 2-Partition también lo es.

Dado un conjunto de números  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  y un número  $V$ , queremos saber si hay un subconjunto de  $S$  cuya suma sea igual a  $V$ .

Para realizar la reducción  $SS \leq_p 2P$ , con  $SS$  haciendo referencia a subset sum y  $2P$  a 2-Partition, debemos definir cuál es la entrada (conjunto) de la caja negra que resuelve 2-Partition. Sea  $s = \text{sum}(S)$  la suma de los valores del conjunto  $S$ , definimos  $S' = S \cup \{s - 2 \cdot V\}$ . Aplicamos el algoritmo en  $S'$ . Agregar un elemento a un conjunto es  $O(1)$ , mientras que si se desea copiar  $S$

para no modificarlo, la operación es lineal en el tamaño del set. Por lo tanto, esta transformación es polinomial.

Si  $T \subseteq S$  es un subconjunto con suma  $V$ :

- Sea  $O = S \setminus T$ , con suma  $o = s - V$ , los elementos que “sobran”.
- Sea  $T' = T \cup \{s - 2 \cdot V\}$ , cuya suma es  $V + (s - 2 \cdot V) = s - V$ . Es el subconjunto buscado, unido con el valor agregado a  $S$ .
- $O \cup T' = S'$

Entonces, la suma de  $T'$  y  $O$  es la misma,  $s - V$ , lo que significa que podemos dividir  $S'$  en dos subconjuntos con la misma suma.

Luego, existe un subset sum de valor  $V$  en  $S$  si y solo si existe un 2-Partition en  $S'$ :

→ Si existe un conjunto de números en  $S$  que suman  $V$ , entonces los números restantes en  $S$  suman  $s - V$ . Por lo tanto, existe una partición de  $S'$  en dos tal que cada partición suma  $s - V$ :  $O = S \setminus T$  y  $T' = T \cup \{s - 2 \cdot V\}$ .

← Digamos que existe una partición de  $S'$  en dos conjuntos tal que la suma de cada conjunto es  $s - V$ . Uno de estos conjuntos contiene el número  $s - 2 \cdot V$ . Eliminando este número, obtenemos un conjunto de números cuya suma es  $V$ , y todos estos números están en  $S$ .

Como esta reducción conlleva una transformación polinomial, **podemos afirmar que 2-Partition es un problema NP-Completo.**

Ejemplo 1: La entrada de Subset Sum es  $S = \{3, 1, 4, 2, 2\}$  y  $V = 6$ . Como la suma de los valores de  $S$  es 12, agregamos el elemento  $12 - 2 \cdot 6 = 0$   $S' = \{3, 1, 4, 2, 2, 0\}$ . Este conjunto puede ser particionado en  $\{3, 1, 2\}$  y  $\{4, 2, 0\}$ , ambas con suma 6, donde  $T = \{3, 1, 2\}$  es un subconjunto de  $S$  que suma 6. Por lo tanto, la caja negra que resuelve el problema de partición, nos devolverá que es posible encontrar un subset sum que sume  $B$ .

Ejemplo 2: La entrada de Subset Sum es  $S = \{5, 3, 2, 7\}$ , que suma 17, y  $V = 10$ . Agregamos el valor  $17 - 2 \cdot 10 = -3$ . Entonces,  $S' = \{5, 3, 2, 7, -3\}$  y se puede dividir en  $\{7\}$  y  $\{2, 5, 3, -3\}$ , donde  $T = \{2, 5, 3\}$  es el subconjunto que suma 10. Nuevamente existe solución. En cambio, si  $V = 6$ , tendríamos  $S' = \{5, 3, 2, 7, 5\}$  no puede dividirse en dos subconjuntos que sumen  $\frac{22}{2=11}$ , por lo que no existirá un subset sum con  $V = 6$  en  $S$ .

## 2.3 Reducción del Problema del Balanceo de Carga

### 2.3.1 Introducción

Habiendo establecido que el problema pertenece a NP, ahora vamos a realizar una reducción de un problema NP-Completo a este problema. Para esta reducción, decidimos utilizar el problema del Balanceo de Carga (que llamaremos B.C.) al problema de la tribu del agua (que llamaremos T.A.). Esto es decir, nuestra reducción polinomial va a ser de la forma:

$$BC \leq_p TA$$

BC plantea lo siguiente: *Dadas  $m$  Máquinas y un conjunto  $n$  de trabajos, donde cada trabajo  $j$  toma un tiempo  $T_j$ , se desea asignar el trabajo en las Máquinas de forma balanceada. Dada una asignación  $A(i)$  para la Máquina  $i$ , su tiempo de trabajo es:  $T_i = \sum_{j \in A(i)} t_j$ . Y queremos encontrar la asignación que minimice el máx valor de  $T_i$ , que también representa el tiempo que se tardará en finalizar todos los trabajos.*

Si escribimos en forma de ecuación lo que plantea BC, obtenemos la siguiente expresión:

$$\min(\max(\sum_{j \in A(i)} t_j))$$

La versión de decisión de este problema dice: Dado un numero  $m$  de maquinas, una serie  $n$  de trabajos, y un numero  $C$ , determinar si existe un asignación de trabajos en las  $m$  maquinas, tal que el máximo  $T_i$  sea menor o igual a  $C$ .

Cabe destacar que en clase nosotros estudiamos al problema de BC como un problema NP-Hard; resta aun demostrar que es un problema NP-Completo. Vamos a resolver esto en la próxima sección.

### 2.3.2 Demostración de problema NP-Completo

Para demostrar que BC es un problema NP-Completo, vamos a usar el problema 2P (el cual demostramos que es NP completo en Reducción). Es decir, vamos a realizar la reducción

$$2P \leq_p TA$$

Nosotros partimos de una serie de números  $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  que es la entrada de 2-Partition. Por cada número  $a_i$  definimos un trabajo  $n$  con duración  $a_i$ . Luego, por cada uno de los dos subconjunto  $S_i$ , definimos una maquina  $m_i$ . Finalmente, decimos que nuestro valor  $C$  va a ser la mitad de la suma de todos los  $a_i$ .

Cuando le pasemos este nuevo problema al validador de BC, este nos va a decir si es posible partir el conjunto en dos subconjuntos. Esto se debe a que solo va a ser posible partir el conjunto en dos si, como mucho, cada subconjunto tiene exactamente la mitad de la suma.

Podemos afirmar entones, que existe un 2-Partition de  $S$  si y solo si el mínimo valor  $T_i$  resultante de las máquinas es a lo sumo  $C$ .

→ Si existe una solución para el problema de 2-partition, entonces existe una solución para el problema de balanceo de carga. Si tenemos 2 subconjuntos  $S_1$  y  $S_2$  tales que ambos tienen la misma suma,  $C = \frac{\text{sum}(S)}{2}$ , entonces existe una asignación de trabajos en 2 máquinas distintas tal que el  $T_i$  de cada una sea exactamente  $C$ . Esto se debe a que los valores  $a_i$  representan los tiempos de cada trabajo. Cualquier otra asignación no sería mínima. Como se tienen 2 máquinas, si quitamos trabajo de una para asignárselo a la otra, la segunda tendría  $T_i > C$  necesariamente porque en total la suma de los  $a_i$  es  $2 \cdot C$ .



← Si existe una solución que permita minimizar el  $T_i$  máximo de las máquinas, significa que este valor es a lo sumo  $C$ , debido a la definición del problema de decisión.  $A(i) = (\sum_{i \in m_i} a_i)$ , con  $T_i = \max A(i)$ . A la vez,  $A(m_1) + A(m_2) = \text{sum}(S)$

porque las asignaciones están formadas por los valores  $a_i$  y todos los trabajos son asignados. Como  $C = \frac{\text{sum}(S)}{2}$ , entonces  $A(m_1) + A(m_2) = 2 \cdot C$ . Ningun  $A(i)$  puede ser mayor a  $C$  porque asumimos que existe solución. Tampoco pueden ser menores a ese valor ya que no se cumpliría  $A(m_1) + A(m_2) = \text{sum}(S)$ . Por lo tanto,  $A(m_1) = A(m_2) = C$ . Esto significa que  $S$  se puede dividir en 2 subconjuntos tales que su suma sea igual y la mitad de la total del conjunto.

Ejemplo: consideramos el conjunto  $S = \{3, 1, 1, 2, 2, 1\}$ . Asignamos los trabajos 3, 1, 1, 2, 2, 1 a 2 máquinas  $m_1$  y  $m_2$  tal que el tiempo máximo de cada una sea menor o igual a  $\frac{3+1+1+2+2+1}{2} = \frac{10}{2} = 5$ . El algoritmo que resuelve el problema de decisión de BC nos indicará que existe solución ( $\{3, 1, 1\}$  y  $\{2, 2, 1\}$ ), por lo que existe una partición en 2 subconjuntos.

Con esto mostramos que el problema BC es un problema NP-Completo. En la próxima sección usaremos este hecho para demostrar que TA también pertenece a los problemas NP-Completo.

### 2.3.3 Desarrollo

El problema de decisión de BC busca minimizar el máximo valor de las máquinas, mientras que TA busca lograr que todos los subgrupos tengan una duración pareja. La pregunta entonces es: ¿Hay relación entre estas dos búsquedas? ¡La respuesta es que sí! Buscar minimizar el máximo valor de las máquinas, está implícitamente buscando lograr que todas las máquinas tengan una duración pareja. Para reducir el tiempo de uso de una máquina, se le tiene que dar alguno de sus trabajos a otra máquina. Cuantos más trabajos se puedan pasar a otra máquina (sin que esta se convierta en la nueva máquina de mayor duración), más se va a lograr minimizar el valor máximo de las máquinas. Esto implica que en el momento que se tenga todas las máquinas con similares  $T_i$ , es el momento en donde va a estar el mínimo valor máximo de  $T_i$ .

Basándonos en esto, podemos realizar la siguiente reducción: Por cada trabajo  $n_i$ , definimos un maestro agua  $x_i$ , donde la habilidad será el tiempo de ejecución del mismo. Por cada máquina  $m_i$  definimos un subgrupo  $S_i$  ( $m$  sería nuestro  $k$ ). Luego tenemos  $C$ , el cual representa una cota máxima para el máximo valor de  $T_i$ . Para transformarlo a  $B$  en tiempo polinomial, tenemos que elevar  $C$  al cuadrado y sumarle a este nuevo valor todos los otros valores de  $T_i$  al cuadrado. Como todos los  $T_i$  deben ser a lo sumo  $C$  para que exista solución, podemos establecer  $B = k \cdot C^2$ . Esto nos va a dar una cota equivalente al problema de decisión de TA.

Entonces, después de realizar estas transformaciones, le tenemos que pasar esta instancia de problema a la caja negra que resuelve el problema de decisión de TA, la cual nos va a decir si la solución existe o no. Esto implica que, si existe una asignación de trabajos en  $m$  máquinas cuyo  $T_i$  máximo sea a lo sumo  $C$ , entonces los maestros de la tribu del agua pueden formar  $k$  grupos cuyas

habilidades son parejas.

→ Si el máximo valor de  $T_i$  es a lo sumo  $C$ , significa que existen  $m$  conjuntos de trabajo cuya suma de tiempos es menor o igual a  $C$ . Como  $B = k \cdot C^2$  y efectivamente se pueden obtener  $m = k$  grupos, existe una asignación cuya adición de los cuadrados de la suma de cada uno sea a lo sumo  $B$ . Como la suma de un grupo representa su  $T_i$ , es posible que algunos  $T_i$  sean estrictamente menores que  $C$  (no se tratan de la máquina con mayor trabajo) en cuyo caso el resultado será menor a  $B$ .

← Supongamos que hemos particionado a los maestros del agua en  $k$  grupos tal que:

$$\sum_{i=1}^k \left( \sum_{x_j \in S_i} x_j \right)^2 \leq k \cdot C^2$$

Demostraremos por qué ésto implica que existen asignaciones en máquinas donde  $\max T_i \leq C$  mediante ejemplos. Supongamos que se tienen los tiempos de trabajos  $\{2, 3, 4, 6, 2, 2\}$ , 3 máquinas y  $C = 7$ . Existe la siguiente solución para el problema de balanceo de carga:  $m_1 = (6)$ ,  $m_2 = (2, 4)$ ,  $m_3 = (2, 2, 3)$ . Para el problema de la tribu del agua también existirá solución. Por ejemplo,  $S_1 = \{2, 6\}$ ,  $S_2 = \{2, 3\}$ ,  $S_3 = \{2, 4\}$  es una solución válida porque  $8^2 + 5^2 + 6^2 = 125 \leq 3 \cdot 7^2 = 147$ . Sin embargo, la solución mínima es  $S_1 = \{6\}$ ,  $S_2 = \{2, 4\}$ ,  $S_3 = \{2, 2, 3\}$  con coeficiente  $121 < 125$ . Si el algoritmo encuentra primero la primera solución, la caja negra nos devolvería **True** directamente, no cumpliendo que cada grupo tenga a lo sumo una suma  $C$ . Como sabemos que el problema BC tiene solución, no nos hacemos problema.

Veamos ahora un ejemplo en el que no existe solución para BC. Tenemos los trabajos  $\{2, 3, 2, 3, 2, 3\}$ , 3 máquinas y  $C = 4$ . La asignación  $m_1 = (2, 3)$ ,  $m_2 = (2, 3)$ ,  $m_3 = (2, 3)$  tiene tiempos  $T_i = 5 > C$ . Puede haber una máquina con  $T_i$  2, 3 o 4, pero eso significará que las restantes excedan aun más a  $C$ . Por ejemplo, si  $m_1 = (2, 2)$ ,  $m_2 = (3, 3)$ ,  $m_3 = (2, 3)$  el máximo  $T_i$  ahora es 6. Por lo tanto, no tiene solución. El problema de la tribu del agua intentaría crear  $S_1 = \{2, 3\}$ ,  $S_2 = \{2, 3\}$ ,  $S_3 = \{2, 3\}$  porque tiene coeficiente mínimo, pero  $5^2 + 5^2 + 5^2 = 75 > 3 \cdot 4^2 = 48$ . Entonces, tampoco tendría solución. De manera análoga y retomando el primer ejemplo, sabemos que si  $C = 6$  no existe solución para el problema de balanceo de carga y nuestra asignación con suma mínima 121 es mayor a  $k \cdot C = 3 \cdot 6 = 108$ .

## 2.4 Reducción del Problema 2-Partition

Como hemos demostrado que el Problema 2-Partition es NP-Completo, lo utilizaremos para realizar una segunda reducción y comprobar nuevamente que el problema de la tribu del agua es también NP-Completo. Además, debido a la propiedad transitiva de las reducciones tenemos que, como  $2P \leq_p BC$  y  $BC \leq_p TA$ , entonces  $2P \leq_p TA$ .

Dados los datos de entrada del problema de 2-Partition,  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , podemos realizar la siguiente transformación polinomial que nos permitirá re-

resolver el problema de decisión asociado (y enunciado previamente) utilizando la caja negra que resuelve el de la tribu del agua:

- $k = 2$  porque según la definición de 2-Partition necesitamos dividir el conjunto en dos grupos.
- La fuerzas de los maestros  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  serán  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ .
- $B$  es el valor obtenido cuando las sumas de los elementos en cada subconjunto son iguales. Es decir, suponiendo que el problema de decisión de 2-Partition tiene solución y sabiendo que en ese caso la suma de cada subconjunto es  $s = \frac{\text{sum}(A)}{2}$ , entonces  $B = s^2 + s^2$ .

Esta transformación requiere recorrer el conjunto  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  para crear las tuplas (maestro, habilidad), lo cual implica una operación  $O(n)$ , que es polinomial.

El problema original de la partición tiene una solución si y solo si es posible obtener dos grupos de maestros tal que la adición de los cuadrados de las sumas de las habilidades en cada grupo sea mínima y menor o igual a  $B$ .

→ Si el conjunto  $A$  puede ser particionado en 2 subconjuntos tales que la suma de los elementos en cada uno sea igual, significa que los 2 grupos de maestros estarán perfectamente parejos. Obtener conjuntos de habilidades parejas es justamente el objetivo de minimizar la adición de los cuadrados de las sumas de las fuerzas. En este caso, los cuadrados de las sumas serán iguales y, por lo tanto, la suma de los mismos será mínima. Si resolviéramos el problema de decisión para  $V > B$ , también llegaríamos a la conclusión de que existe solución. En cambio, si  $V = B - 1$ , no se puede resolver. Por lo tanto,  $B$  es el coeficiente mínimo.

← Si existe una solución del problema de la tribu del agua, significa que se puede dividir a los maestros en 2 grupos tal que la adición de los cuadrados de las sumas de cada uno es a lo sumo  $B$ . Como  $B$  es el resultado de sumar dos veces  $s^2$ , esto implica que los 2 subconjuntos tienen suma  $s$ , por lo que el problema de 2-partition tiene solución.

Ejemplo:  $A = \{1, 2, 3\}$ . Realizando la transformación,  $k = 2$ ,  $B = (\frac{6}{2})^2 + (\frac{6}{2})^2 = 18$  y  $\text{maestros} = \{("", 1), ("", 2), ("", 3)\}$ . Los nombres de los maestros no nos interesan porque no queremos obtener una solución para 2-Partition, sino saber si existe una. Existen múltiples combinaciones de valores para los dos subconjuntos, pero nos quedaremos con la que minimice la suma de los cuadrados, respetando que debe ser a lo sumo  $B$ ,

1.  $S_1 = 1$  y  $S_2 = 2, 3 \rightarrow$  El coeficiente es  $1^2 + (2 + 3)^2 = 26 > B$ . No es solución.
2.  $S_1 = 1, 2$  y  $S_2 = 3 \rightarrow$  El coeficiente es  $(1 + 2)^2 + 3^2 = 18 = B$ . Es solución.
3.  $S_1 = 1, 3$  y  $S_2 = 2 \rightarrow$  El coeficiente es  $(1 + 3)^2 + 2^2 = 20 > B$ . No es solución.

Como existe solución para el problema de la tribu del agua, entonces también la existe para 2-Partition.

De esta forma, hemos demostrado que el problema de la tribu del agua es al menos tan difícil como el problema de partición, que es NP-completo. Como la reducción realizada es polinomial, podemos afirmar que el problema de la tribu del agua es también NP-Completo.

### 3 Complejidad algorítmica

El problema de optimización de la tribu del agua fue resuelto utilizando distintas técnicas de programación. En las próximas secciones presentaremos el código correspondiente y analizaremos la complejidad temporal de cada uno de los algoritmos planteados:

- Backtracking
- Programación Lineal
- Aproximación propuesta por la cátedra
- Aproximación adicional

#### 3.1 Complejidad lectura de archivos

A continuación mostramos la función principal de lectura de archivos.

```
9 algoritmos = {
10     FLAGBACKTRACKING : problema_tribu_del_agua_bt
11 }
12
13 def generarTestDe(archivo):
14     k = None
15     maestros_y_habilidades = []
16
17     with open(archivo, "r") as file:
18         for i, line in enumerate(file):
19             line = line.strip()
20             if line.startswith("#"):
21                 continue
22             if k is None:
23                 k = int(line)
24                 continue
```

La función lee la línea que contiene la cantidad de conjuntos de maestros a crear. Una vez hecho eso, lee  $n$  líneas para almacenar los distintos valores  $x_i$  de tuplas (nombre, habilidad). Esto tiene una complejidad temporal  $O(n)$ .

### 3.2 Complejidad algoritmo de Backtracking

Nuestro algoritmo de backtracking utiliza la siguiente función auxiliar para calcular la adición de los cuadrados de la suma de las habilidades de cada grupo:

```
47 def sumatoria(grupos):
48     suma = 0
49     for grupo in grupos:
50         suma_grupo = 0
51         for _maestro, habilidad in grupo:
52             suma_grupo += habilidad
53         suma += suma_grupo ** 2
54     return suma
```

Esta función recorre los  $k$  grupos para calcular la suma pedida. En el peor caso, la cantidad de maestros de un grupo puede ser  $n$  (con  $k = 1$ ), por lo que tiene un costo proporcional a  $n \cdot k$ . Diremos entonces, que la complejidad temporal de esta porción de código es  $O(n \cdot k)$ , con  $k \leq n$  puesto que si  $k > n$ , nuestro algoritmo completo se ejecuta en  $O(1)$ .

A continuación mostramos otras funciones que utiliza el código principal:

```
56 def caso_k_igual_a_n(maestros_y_habilidades):
57     suma = 0
58     grupos = []
59     for maestro, habilidad in maestros_y_habilidades:
60         grupos.append({maestro})
61         suma += habilidad**2
62     return grupos, suma
63
64 def obtener_resultado(S_con_habilidades):
65     resultado = []
66
67     for i in range(len(S_con_habilidades)):
68         grupo = set()
69         for maestro, _ in S_con_habilidades[i]:
70             grupo.add(maestro)
71         resultado.append(grupo)
72
73     return resultado
```

Como sabemos que si  $n = k$  cada grupo tendrá únicamente un maestro, decidimos que en ese caso particular no se aplique el algoritmo de backtracking. En su lugar, resolvemos la asignación con la función `caso_k_igual_a_n` que itera sobre la lista de maestros, implicando un costo de  $O(n)$ . Esto nos permitió disminuir notablemente el tiempo de ejecución cuando  $n = k$ .

Por otro lado, como necesitamos la habilidad de cada maestro para poder minimizar la función objetivo, nuestro algoritmo tiene en cuenta grupos con

el nombre y la fuerza de cada maestro. Luego los filtramos para quedarnos únicamente con los nombres. Éste es el objetivo de `obtener_resultado`. Su complejidad temporal es  $O(n \cdot k)$ , debido al mismo análisis que el de la función `sumatoria`.

Analizaremos ahora el código principal:

```

1 def problema_tribu_del_agua_bt(maestros_y_habilidades, k):
2     n = len(maestros_y_habilidades)
3
4     if k > n:
5         return None
6
7     if k == 0:
8         return [], 0
9
10    if k == n:
11        return caso_k_igual_a_n(maestros_y_habilidades)
12
13    S = [set() for _ in range(k)]
14    maestros_y_habilidades = sorted(maestros_y_habilidades,
15                                    key=lambda x: -x[1])
16
17    S_con_habilidades, coeficiente = problema_tribu_del_agua_bt_recur(
18        maestros_y_habilidades, k, 0, list(S), list(S), float('inf'))
19
20    resultado = obtener_resultado(S_con_habilidades)
21
22    return resultado, coeficiente
23
24
25 def problema_tribu_del_agua_bt_recur(maestros_y_habilidades,
26 k, indice_actual, S_actual, mejor_S, mejor_suma):
27
28     if indice_actual == len(maestros_y_habilidades):
29         suma_actual = sumatoria(S_actual)
30         if suma_actual < mejor_suma:
31             return list(map(set, S_actual)), suma_actual
32         return list(map(set, S_actual)), mejor_suma
33
34     for grupo in S_actual:
35         grupo.add(maestros_y_habilidades[indice_actual])
36         if sumatoria(S_actual) < mejor_suma:
37             nuevo_S, nueva_suma = problema_tribu_del_agua_bt_recur(
38                 maestros_y_habilidades, k, indice_actual+1, S_actual,
39                 mejor_S, mejor_suma)
40

```

```

41         if nueva_suma < mejor_suma:
42             mejor_S, mejor_suma = nuevo_S, nueva_suma
43             grupo.remove(maestros_y_habilidades[indice_actual])
44
45     return mejor_S, mejor_suma

```

Si  $k > n$  no existe solución y si  $k = 0$  no podemos formar grupos. En ambos casos el algoritmo funciona en  $O(1)$ . Sin embargo, se tratan de casos particulares. Procederemos a explicar el caso general.

En la línea 14 ordenamos el conjunto de maestros por mayor habilidad con el algoritmo Timsort cuya complejidad es  $O(n \cdot \log(n))$ , siendo  $n$  la cantidad de maestros de la tribu que se enfrentarán a la Nación del Fuego. Crear los grupos vacíos en la línea 13 es una operación lineal en la cantidad de grupos  $k$ , es decir,  $O(k)$ .

La solución del problema viene dada por la función recursiva `problema_tribu_del_agua_bt_recur`. Su objetivo es probar todas las combinaciones de asignaciones de maestros a los grupos de forma tal de minimizar la adición de los cuadrados de la suma de las habilidades de cada uno. Para cada maestro comprueba si, al asignarlo al grupo  $i \in [0, k - 1]$ , se puede obtener una combinación con una suma menor a la actual. Caso contrario, poda y prueba con el siguiente grupo. Iniciamos con una suma con valor infinito. La cantidad de posibles asignaciones es  $k^n$  pues para cada uno de los  $n$  maestros hay  $k$  opciones de grupos. Por lo tanto, la complejidad de esta función y del algoritmo en general es exponencial, más específicamente  $O(k^n)$ .

### 3.3 Complejidad algoritmo de Programación Lineal

### 3.4 Complejidad algoritmo de Aproximación

### 3.5 Efecto de las variables sobre el algoritmo

## 4 Ejemplos de ejecución

En la carpeta `ejemplos_adicionales` se pueden encontrar distintos casos de prueba que agregamos con el objetivo de comprobar la correctitud de los algoritmos propuestos. A continuación detallamos cada uno:

- `uno_por_grupo.txt` → En este caso  $k = n$ , por lo que cada maestro será asignado a un grupo distinto.
- `habilidades_similares.txt` → Los maestros tienen habilidades distintas, pero parejas.
- `habilidades_ascendentes.txt` → Las tuplas de maestros vienen ordenadas ascendentemente según la fuerza.
- `habilidades_descendentes.txt` → Las tuplas de maestros vienen ordenadas descendientemente según la fuerza.

- `habilidades_iguales.txt` → Los maestros tienen la misma habilidad.
- `grupos_parejos.txt` → Las habilidades de los maestros son tales que, al realizar la asignación, cada grupo tendrá la misma suma.
- `una_habilidad_alta.txt` → Uno de los maestros tiene una habilidad muy alta en comparación con la del resto.
- `k_menor_a_n.txt` → Caso general cuando  $k < n$ .

De forma adicional, agregamos la posibilidad de ejecutar los ejemplos utilizados para las mediciones. Los mismos se encuentran en `ejemplos_mediciones`. Por defecto, al ejecutar todos los tests solo se ejecutan aquellos en los que  $k \neq 0$ ,  $k \leq 9$  y  $n \leq 10$ .

## 4.1 Ejecución del programa

En esta sección explicaremos las distintas formas de ejecutar el programa.

- `python3 codigo/main.py`: ejecutará todos los casos de prueba existentes y mostrará los grupos formados, el coeficiente resultante y el tiempo de ejecución para cada algoritmo. Se ejecutan los ejemplos adicionales, los de las mediciones y los provistos por la cátedra.
- `python3 codigo/main.py ruta_a_ejemplo`: procesará los datos del archivo dado y ejecutará todos los algoritmos, mostrando el resultado de cada uno, así como su tiempo de ejecución.
- `python3 codigo/main.py ruta_a_ejemplo --flag`: ejecutará el algoritmo según el flag utilizado. Si es inválido, por defecto actúa como el anterior.
  - bt → Backtracking
  - pl → Programación Lineal
  - a1 → Algoritmo de aproximación propuesto por la cátedra
  - a2 → Algoritmo de aproximación adicional
- `python3 codigo/main.py --flag`: Ejecuta todos los tests usando el algoritmo propuesto. Si es inválido, por defecto se comporta como si no tuviera el flag.
- `python3 codigo/main.py N`: Ejecuta los tests usando todos los algoritmos, pero limita los ejemplos de la cátedra a N. El objetivo es poder ejecutar la mayor cantidad de tests en un tiempo menor.
- `python3 codigo/main.py N --flag`: Se comporta como el anterior, pero solo ejecuta los tests con el algoritmo indicado.

Recomendamos utilizar:

- `python3 codigo/main.py ruta_a_ejemplo`
- `python3 codigo/main.py N --flag`

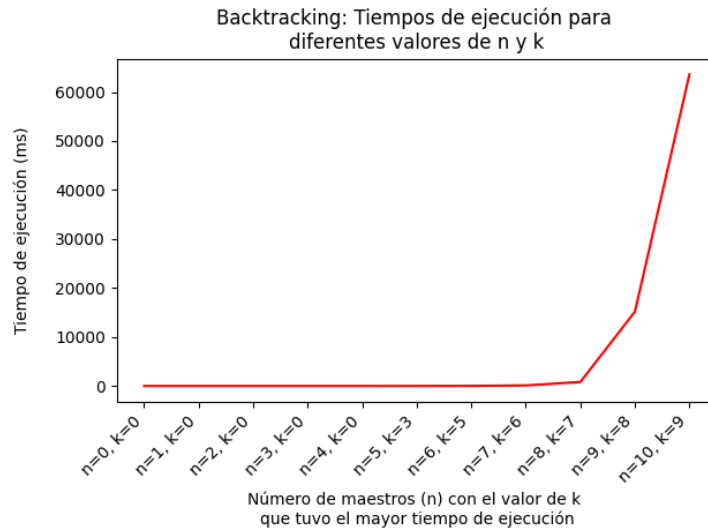


## 5 Mediciones de tiempo

Para corroborar la complejidad algorítmica de los algoritmos implementación, realizamos una serie de tests. Probamos distintas combinaciones de  $n$  y  $k$ , para  $n \in [0, 10]$  y  $k \in [0, n]$ . Para cada  $n$  tomamos en cuenta la combinación de  $n$  y  $k$  con mayor tiempo de ejecución. El código que usamos para generar los tests se encuentran en el archivo `codigo/grafico_complejidad.py`.

### 5.1 Algoritmo de backtracking

Con el algoritmo de backtracking obtuvimos los siguientes resultados:



Como podemos observar en la tendencia de la curva, el tiempo de ejecución aumenta exponencialmente con la cantidad de maestros  $n$  y también depende de  $k$ . El tiempo más alto ocurre cuando  $k$  se acerca a  $n$ , con  $k < n$  (es lineal cuando  $k = n$ ). Para valores pequeños de estas variables el algoritmo es relativamente rápido. Sin embargo, al incrementarlas no se vuelve práctico debido a que el tiempo no crece polinomialmente, sino exponencialmente. Esto corrobora el análisis de la complejidad planteado previamente.

### 5.2 Algoritmo de programación lineal

### 5.3 Algoritmo de aproximación

## 6 Conclusión