



本节主题:

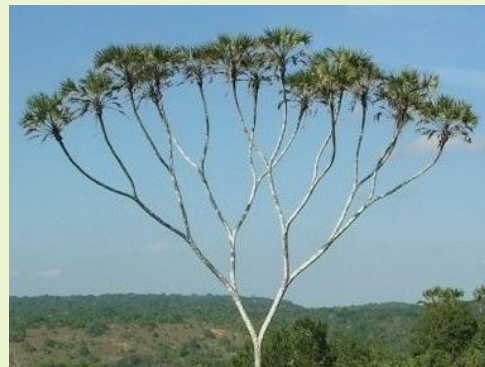
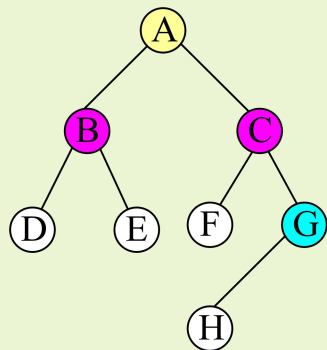
二叉树概念和性质

二叉树

二叉树是有限的节点集合——递归定义

这个集合或者是空。

或者由一个根节点和两棵互不相交的称为左子树和右子树的二叉树组成。



五种基本形态



①空树



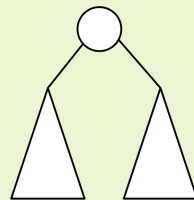
②只含根



③只含左子树



④只含右子树



⑤含左右子树

性质1

性质

非空二叉树上叶节点数等于双分支节点数加1。

证明

设二叉树上叶节点数为 n_0 ，单分支节点数为 n_1 ，双分支节点数为 n_2 ，则总节点数 $n=n_0+n_1+n_2$ 。

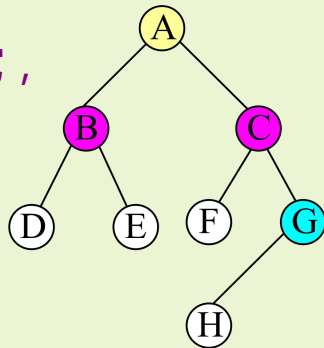
在一棵二叉树中，所有节点的分支数(即度数)等于单分支节点数加上双分支节点数的2倍，即：总的分支数= n_1+2n_2 。

由于二叉树中除根节点以外，每个节点都有唯一的一个分支指向它，因此二叉树中有：总的分支数=总节点数-1。

综合有： $n_1+2n_2=n_0+n_1+n_2-1$

消项有： $n_2=n_0-1$

即： $n_0=n_2+1$



性质2-3

性质2

非空二叉树上第 i 层上至多有 2^{i-1} 个节点，这里应有 $i \geq 1$ 。

证明

由树的性质2可推出

度为 m 的树中第 i 层($i \geq 1$)上至多有 m^{i-1} 个节点

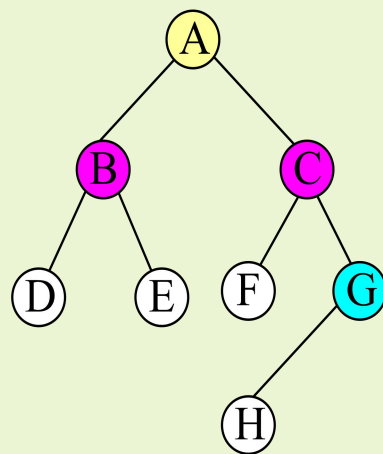
性质3

高度为 h 的二叉树至多有 $2^h - 1$ 个节点 ($h \geq 1$)。

证明

由树的性质3可推出

高度为 h 的 m 次树至多有 $(m^h - 1) / (m - 1)$ 个节点

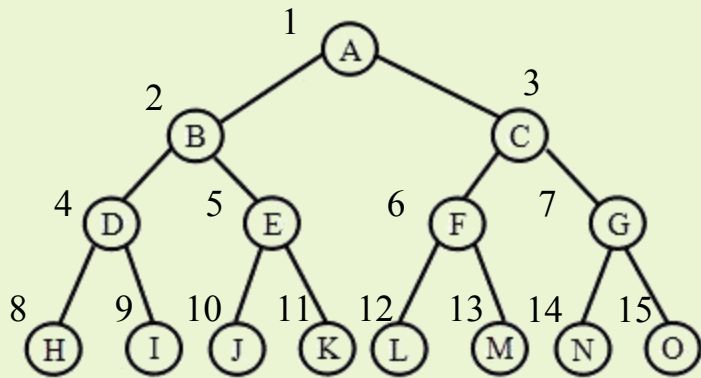


满二叉树

- 在一棵二叉树中,如果所有分支节点都有左孩子节点和右孩子节点,并且叶节点都集中在二叉树的最下一层,这样的二叉树称为**满二叉树**。

特点

- 叶子节点都在最下一层;
- 只有度为0和度为2的节点。
- 对满二叉树节点的连续编号:树根为1,按照层数从小到大、同一层从左到右的次序进行。



- 一旦 n 或 h 确定,树形即确定
- 高度 h 以及 n_0 、 n_1 和 n_2 的关系有:

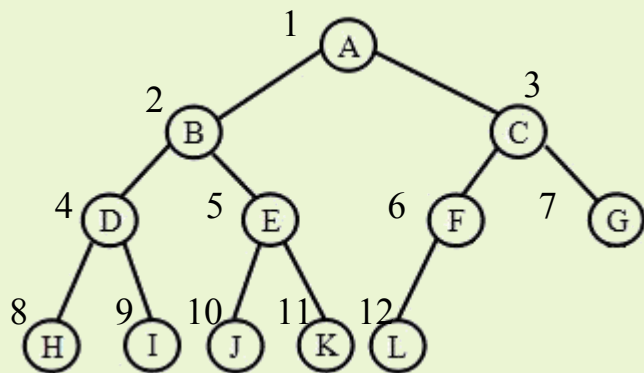
- $h = \log_2(n+1)$
- $n_1 = 0$
- $n = 2^h - 1$
- $n_0 = 2^{h-1}$
- $n_2 = 2^{h-1} - 1$

满二叉树定义(另):

- 一棵高为 h ,且有 $2^h - 1$ 个节点的二叉树称为满二叉树。

完全二叉树

- 若二叉树中最多只有最下面两层的节点的度数可以小于2，并且最下面一层的叶节点都依次排列在该层最左边的位置上，则这样的二叉树称为**完全二叉树**
- 对满二叉树节点的连续编号：树根为1，按照层数从小到大、同一层从左到右的次序进行。



完全二叉树特点：

- 叶子结点只能在层次最大的两层上出现
- 最大层次上的叶子结点，都依次排列在该层最左边的位置上
- 如果有度为1的节点，只能有一个，且该节点只有左孩子，没有右孩子
- 按层编号后，一旦出现某节点（编号为 i ）为叶子结点或只有左孩子，则编号大于 i 的节点，均为叶子节点
- 完全二叉树中一旦 n 确定，其树形就确定了，可以计算出高度 h 以及 n_0 、 n_1 和 n_2 ，其中 $n_1=0$ 或1，当 n 为偶数时， $n_1=1$ ，当 n 为奇数时， $n_1=0$ 。另： $h=\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$ 或 $h=\lceil \log_2(n+1) \rceil$

性质4

□ 性质：对完全二叉树中编号为 i 的节点 ($1 \leq i \leq n$, $n \geq 1$, n 为节点数)：

(1) 若 $i \leq \lfloor n/2 \rfloor$, 即 $2i \leq n$, 则编号为 i 的节点为分支节点, 否则为叶子节点。

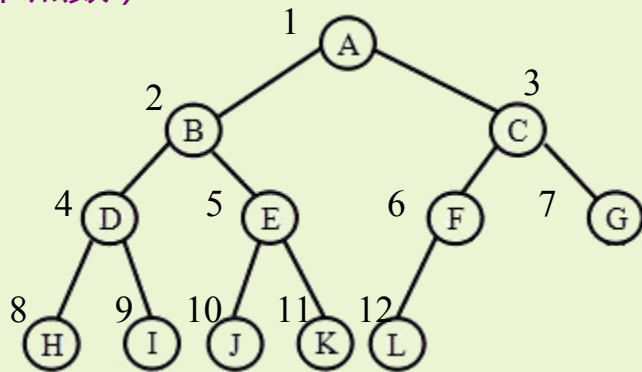
(2) 若 n 为奇数, 则每个分支节点都既有左孩子节点, 也有右孩子节点; 若 n 为偶数, 则编号最大的分支节点只有左孩子节点, 没有右孩子节点, 其余分支节点都有左、右孩子节点。

(3) 若编号为 i 的节点有左孩子节点, 则左孩子节点的编号为 $2i$; 若编号为 i 的节点有右孩子节点, 则右孩子节点的编号为 $(2i+1)$ 。

(4) 除树根节点外, 若一个节点的编号为 i , 则它的双亲节点的编号为 $\lfloor i/2 \rfloor$

▮ 当 i 为偶数时, 其双亲节点的编号为 $i/2$, 它是双亲节点的左孩子节点

▮ 当 i 为奇数时, 其双亲节点的编号为 $(i-1)/2$, 它是双亲节点的右孩子节点。



性质5

性质

具有 n 个 ($n > 0$) 节点的完全二叉树的高度为 $\lceil \log_2(n+1) \rceil$ 或 $\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$ 。

证明

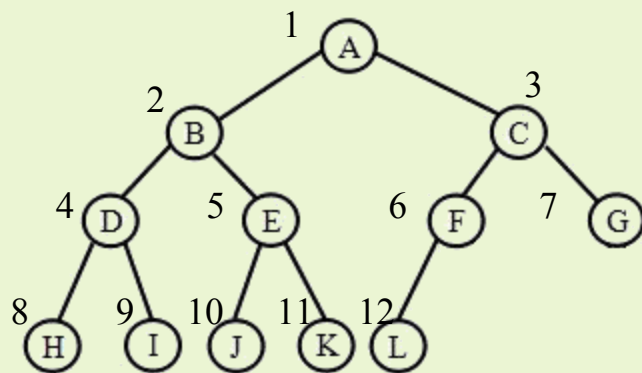
设完全二叉树的高度为 h ，有

$2^{h-1}-1 < n \leq 2^h-1$

即， $2^{h-1} \leq n < 2^h$

于是： $h-1 \leq \log_2 n < h$

因为 h 是整数，故有结论



例

例1

已知一棵完全二叉树的第6层（设根为第1层）有8个叶节点，则该完全二叉树的节点个数最多是_____。（2009年全国考研题）

A. 39

B. 52

C. 111

D. 119

例2

一棵满二叉树中共有 n 个节点，其中有 m 个叶子节点，高度为 h ，则_____。

A. $n=h+m$

B. $h+m=2n$

C. $m=h-1$

D. $n=2^h-1$