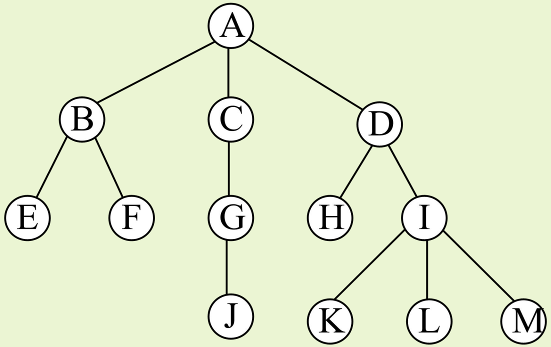
本节主题：

树的性质

性质1

- 性质
  - 树中的节点数等于所有节点的度数加1
- 证明
  - (树的定义)在一棵树中，除树根节点外，每个节点有且仅有一个前驱节点。
  - (理解)每个节点与指向它的一个分支一一对应
  - (推导)除树根之外的节点数等于所有节点的分支数
  - (节点度的定义)节点的子树的个数称为该节点的度
  - (结论)树中的节点数等于所有节点的度数加1



度之和＝分支数

分支数$=n$-1

所以，n＝度之和+1

例：

- 一棵度为4的树T中，若有20个度为4的节点，10个度为3的节点，1个度为2的节点，10个度为1的节点，则树T的叶子节点个数是__________。(2010年全国考研题)

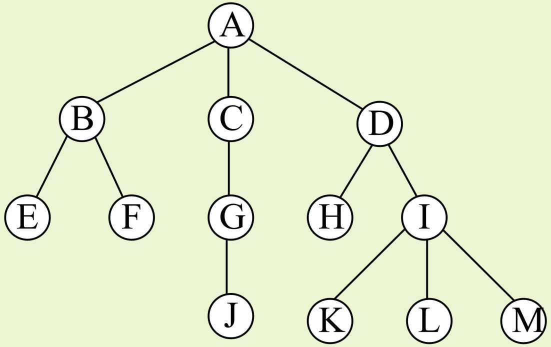
  A. 41　　　　B. 82

  C. 123　　　　D. 122

- 解
  - 树T中的节点数： $20\times4+10\times3+1\times2+10\times1+1=123$
  - 除叶节点（度为0的节点）外的节点数： $20+10+1+10=41$
  - 叶节点个数： $123-41=82$

性质2

- 性质
  - 度为m的树中第i层(i≥1)上至多有m^{i-1}个节点。
- 证明（采用数学归纳法）
  - 对于第一层，因为树中的第一层上只有一个节点，即整个树的根节点，而由i=1代入m^{i-1}，得$m^{1-1}=m^0=1$，有一个节点，显然结论成立。
  - 假设对于第(i-1)层（i＞1）命题成立，即度为m的树中第(i-1)层上至多有m^{i-2}个节点。
  - 根据树的度的定义，度为m的树中每个节点至多有m个孩子节点，所以第i层上的节点数至多为第(i-1)层上节点数的m倍，即至多为$m^{i-2}\times m=m^{i-1}$个，这与命题相同，故命题成立。



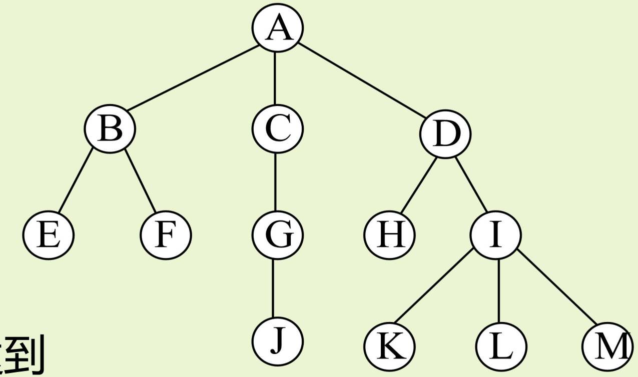
性质3

- 性质
  - 高度为h的m次树至多有 $\dfrac{m^h-1}{m-1}$ 个节点。
- 证明
  - 由性质2可知，第i层上最多节点数为m^{i-1}(i=1,2,…,h)
  - 当高度为 h 的 m 次树（即度为m的树）上每一层都达到最多节点数时，整个 m 次树具有最多节点数。
  - 整个树的最多节点数

    = 每一层最多节点数之和

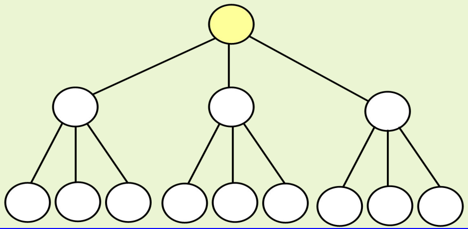
    = $m^0+m^1+m^2+\ldots+m^{h-1}$

    = $\dfrac{m^h-1}{m-1}$

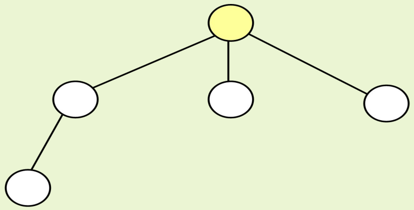


性质4

- 性质
  - 具有 n 个节点的 m 次树的最小高度h为$\lceil \log_m(n(m-1)+1) \rceil$
- 证明
  - 设具有n个节点的m次树的高度为h，若在该树中前h-1层都是满的，即每一层的节点数都等于m^{i-1}个$(1 \le i \le h-1)$，则该树具有最小的高度，第h层（即最后一层）的节点数可能满，也可能不满。
  - 其高度h可计算如下：



m=3，h=3，最多节点情况



m=3，h=3，最少节点情况

性质3 $\frac{m^{h-1}-1}{m-1} < n \le \frac{m^h-1}{m-1}$ 乘(m-1) $m^{h-1}-1 < n(m-1) \le m^h-1$

取对数 $h-1 < \log_m(n(m-1)+1) \le h$ 整理得 $\log_m(n(m-1)+1) \le h < \log_m(n(m-1)+1)+1$

h为整数 $h = \log_m(n(m-1)+1)$ 得证

例

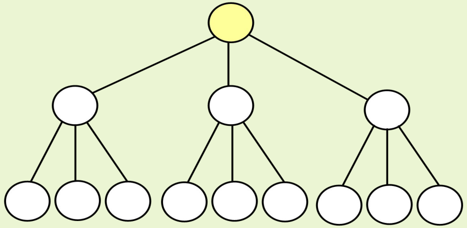
- 问题
  - 含n个节点的三次树的最小高度是多少？最大高度是多少？
- 解
  - 含n个节点的三次树，每个分支结点度都是3时，高度h最小：

$\Rightarrow$ $1+3+9+\ldots+3^{h-2} < n \le 1+3+9+\ldots+3^{h-1}$

$\Rightarrow$ $(3^{h-1}-1)/2 < n \le (3^{h}-1)/2$

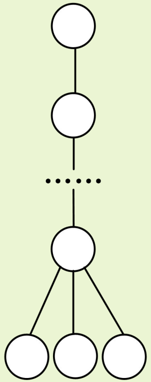
$\Rightarrow$ $3^{h-1} < 2n+1 \le 3^{h}$

$\Rightarrow$ 即：最小高度为 $h = \lceil \log_3(2n+1) \rceil$



高度最小时

  - 最大高度为n-2。



最大高度为n-2