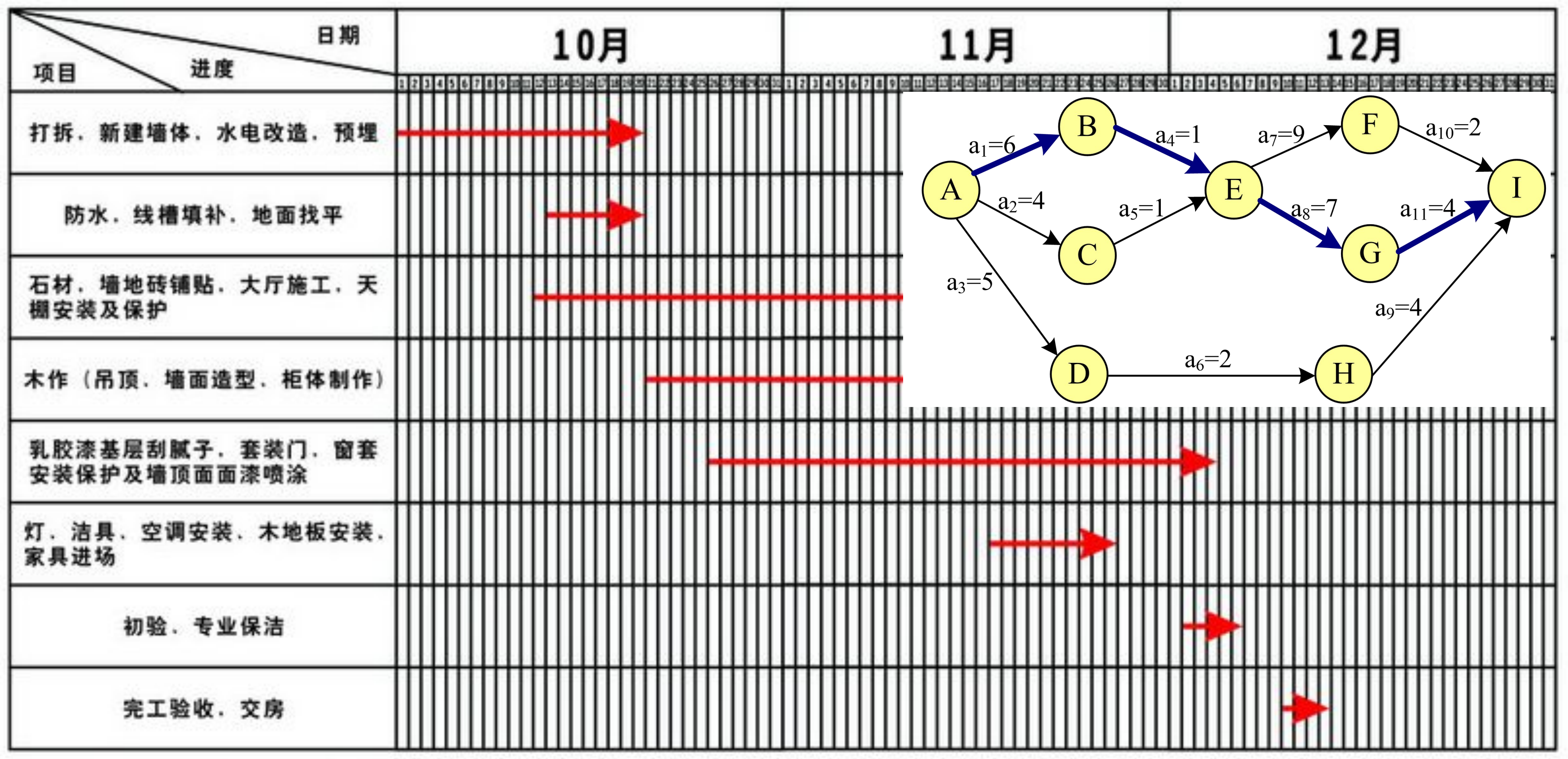
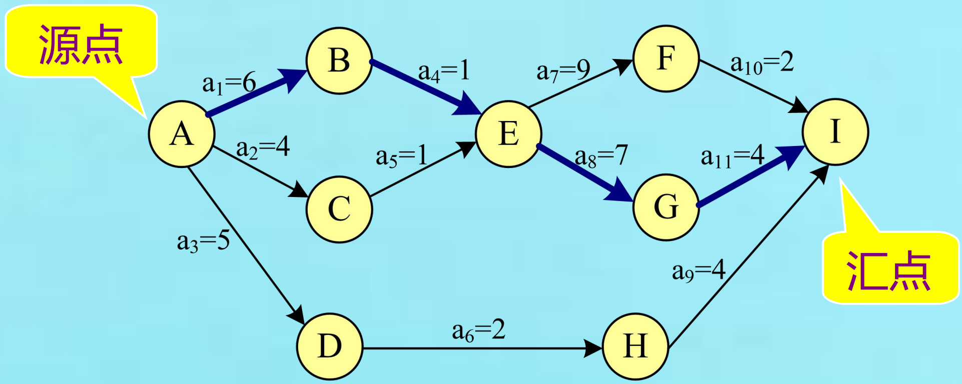
本节主题：

AOE网与关键路径

应用领域：工程进度规划与管理



AOE网



- 用带权有向图（DAG）描述工程的预计进度
  - 顶点表示**事件**
  - 有向边表示**活动**
  - 边e的权c(e)表示完成活动e所需的时间（比如天数），或者说活动e持续时间
- 图中入度为0的顶点（源点）表示工程的开始事件（如开工仪式），出度为0的顶点（汇点）表示工程结束事件，这样的有向图为**AOE网（Activity On Edge）**。
- 整个工程完成的时间为：从有向图的源点到汇点的最长路径
  - 具有最大长度的路径叫**关键路径**，该路径上的活动为**关键活动**。
  - 在一个AOE网中，可以有不止一条的关键路径。
  - 关键路径上边的权值增加 将使有向图上的最长路径的长度增加。
- 关键路径的意义？

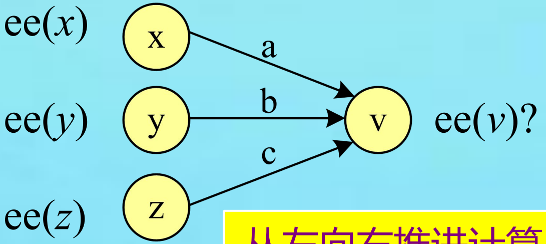
如何求关键路径？
求源点到汇点
的最长路径？
Dijkstra算法？

事件的开始时间

- 事件v的最早开始时间（early event）
  - 源点事件的最早开始时间为0。
  - 任一事件v的最早开始时间 ee(v)等于到达这一事件的路径的最大值

$$\mathrm{ee}(v)=\begin{cases}0,\ v\text{是源点}\\ \underset{<w,v>}{\mathrm{MAX}}\{\mathrm{ee}(w)+\mathrm{c}(<w,v>)\},\ v\text{非源点}\end{cases}$$

- 例



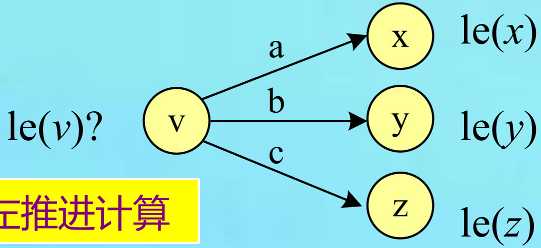
从左向右推进计算

$\mathrm{ee}(v)=\mathrm{MAX}\{\mathrm{ee}(x)+\mathrm{a},\ \mathrm{ee}(y)+\mathrm{b},\ \mathrm{ee}(z)+\mathrm{c}\}$

- 事件v的最迟开始时间（late event）
  - 在不影响整个工程进度的前提下，事件v必须发生的时间
  - 事件v的最迟开始时间le(v)应基于后面事件的最迟开始时间推算

$$\mathrm{le}(v)=\begin{cases}\mathrm{ee}(v),\ v\text{是汇点}\\ \underset{<v,w>}{\mathrm{MIN}}\{\mathrm{le}(w)-\mathrm{c}(<v,w>)\},\ v\text{非汇点}\end{cases}$$

- 例



从右向左推进计算

$\mathrm{le}(v)=\mathrm{MIN}\{\mathrm{le}(x)-\mathrm{a},\ \mathrm{le}(y)-\mathrm{b},\ \mathrm{le}(z)-\mathrm{c}\}$

活动的开始时间

- 活动a的最早开始时间e(a)
  - 指该活动起点x事件的最早开始时间，即：

    e(a)=ee(x)
- 活动a的最迟开始时间l(a)
  - 指该活动终点y事件的最迟开始时间与该活动所需时间之差，即：

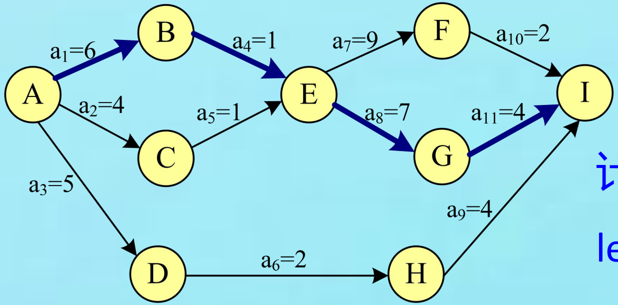
    l(a)=le(y)-c
- 关键活动
  - 对于每个活动a，求出d(a)=l(a)-e(a)
  - 若d(a)为0，则称活动a**为关键活动**。

- AOE网中关键路径求解算法

1. 求每一事件的最早开始时间ee(v)
2. 求每一事件的最迟开始时间le(v)
3. 求每一活动的最早开始时间e(a)
4. 求每一活动的最迟开始时间l(a)
5. 输出关键活动

在拓扑排序指导下进行

示例



计算各事件的ee(v)

$ee(A)=0$

$ee(B)=ee(A)+c(a_1)=6$

$ee(C)=ee(A)+c(a_2)=4$

$ee(D)=ee(A)+c(a_3)=5$

$ee(E)=MAX(ee(B)+c(a_4), ee(C)+c(a_5)\}$
$=MAX\{7, 5\}=7$

$ee(F)=ee(E)+c(a_7)=16$

$ee(G)=ee(E)+c(a_8)=14$

$ee(H)=ee(D)+c(a_6)=7$

$ee(I)=MAX\{ee(F)+c(a_{10}), ee(G)+c(a_{11}), ee(H)+c(a_9)\}$
$=MAX(18, 18, 11\}=18$

计算各事件的le(v)如下：

$le(I)=ee(I)=18$

$le(F)=le(I)-c(a_{10})=16$

$le(G)=le(I)-c(a_{11})=14$

$le(H)=le(I)-c(a_9)=14$

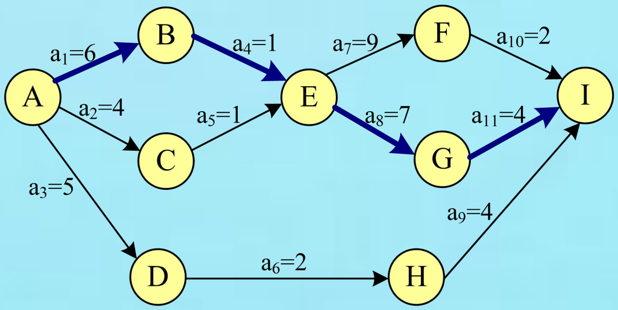
$le(E)=MIN(le(F)-c(a_7),le(G)-c(a_8)\}$
$=\{7,7\}=7$

$le(D)=le(H)-c(a_6)=12$

$le(C)=le(E)-c(a_5)=6$

$le(B)=le(E)-c(a_4)=6$

$le(A)=MIN(le(B)-c(a_1), le(C)-c(a_2), le(D)-c(a_3)\}$
$=\{0，2，7\}=0$



事件	最早ee	最晚le
A	0	0
B	6	6
C	4	6
D	5	12
E	7	7
F	16	16
G	14	14
H	7	14
I	18	18

关键活动有a_{11}、a_{10}、a_8、a_7、a_4、a_1
关键路径有两条：A - B - E - F - I和A - B - E - G - I。

计算各活动的e(a)、l(a)和d(a)如下：

活动a_1：$e(a_1)=ee(A)=0$, $l(a_1)=le(B)-6=0$, $d(a_1)=0$

活动a_2：$e(a_2)=ee(A)=0$, $l(a_2)=le(C)-4=2$,$d(a_2)=2$

活动a_3：$e(a_3)=ee(A)=0$, $l(a_3)=le(D)-5=7$, $d(a_3)=7$

活动a_4：$e(a_4)=ee(B)=6$, $l(a_4)=le(E)-1=6$, $d(a_4)=0$

活动a_5：$e(a_5)=ee(C)=4$, $l(a_5)=le(E)-1=6$, $d(a_5)=2$

活动a_6：$e(a_6)=ee(D)=5$, $l(a_6)=le(H)-2=12$, $d(a_6)=7$

活动a_7：$e(a_7)=ee(E)=7$, $l(a_7)=le(F)-9=7$, $d(a_7)=0$

活动a_8：$e(a_8)=ee(E)=7$, $l(a_8)=le(G)-7=7$, $d(a_8)=0$

活动a_9：$e(a_9)=ee(H)=7$, $l(a_9)=le(G)-4=10$, $d(a_9)=3$

活动a_{10}：$e(a_{10})=ee(F)=16$, $l(a_{10})=le(I)-2=16$, $d(a_{10})=0$

活动a_{11}：$e(a_{11})=ee(G)=14$, $l(a_{11})=le(I)-4=14$, $d(a_{11})=0$

算法分析

- 设AOE网有n个事件，e个活动，则算法的主要执行是
  - 进行拓扑排序：时间复杂度是O(n+e)
  - 求每个事件的ee值和le值：时间复杂度是O(n+e)
  - 根据ee值和le值找关键活动：时间复杂度是O(n+e)
- 整个算法的时间复杂度是O(n+e)

思考题

（1）在一个AOE网中，关键路径是否是最长的路径？

（2）在一个AOE网中，缩短任一关键活动的时间，是否会缩短整个工程的时间？

（3）在一个AOE网中，若缩短某一关键活动的时间可以缩短整个工程的时间，那么是否可以无限地缩短其时间，以使整个工程的时间相应地缩短呢？