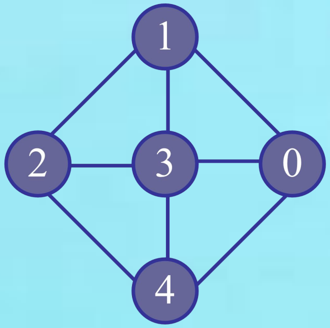
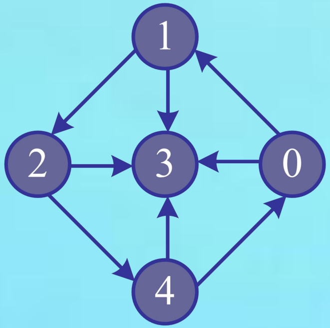
本节主题：

图的基本术语

端点和邻接点

- 在一个无向图中，若存在一条边(i，j)
  - 称顶点i和顶点j为此边的两个**端点**；
  - 称顶点i和顶点j互为**邻接点**。
- 在一个有向图中，若存在一条边<i，j>
  - 称边<i，j>是顶点i的一条**出边**，同时也是顶点j的一条**入边**；
  - 称顶点i为此边的**起始端点**（简称为**起点**），顶点j为**终止端点**（简称**终点**）；
  - 称顶点i 和顶点j 互为**邻接点**。

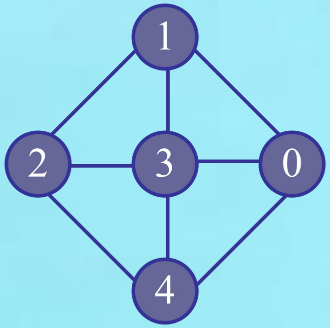


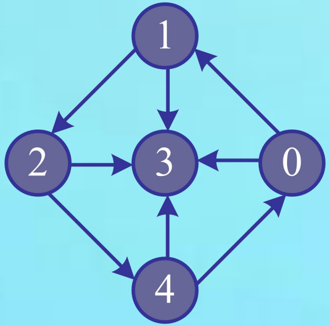


顶点的度、入度和出度

- 在无向图中
  - 顶点所具有的边的数目称为该**顶点的度**。
- 在有向图中
  - 以顶点i为终点的入边的数目，称为该顶点的**入度**。
  - 以顶点i为始点的出边的数目，称为该顶点的**出度**。
  - 一个顶点的入度与出度的和为该**顶点的度**。
- 若一个图中有n个顶点和e条边，每个顶点的度为d_i（1≤i≤n），有

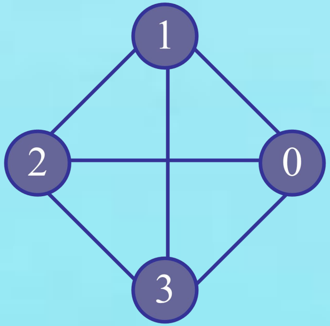
$$e=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d_i$$





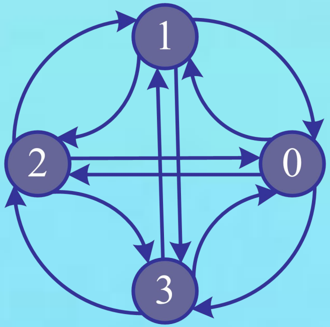
完全图

- 无向图
  - 无向图中的每两个顶点之间都存在着一条边，则称此图为**完全图**。
  - 完全无向图包含有n(n-1)/2条边。



4个顶点的完全无向图，共6条边

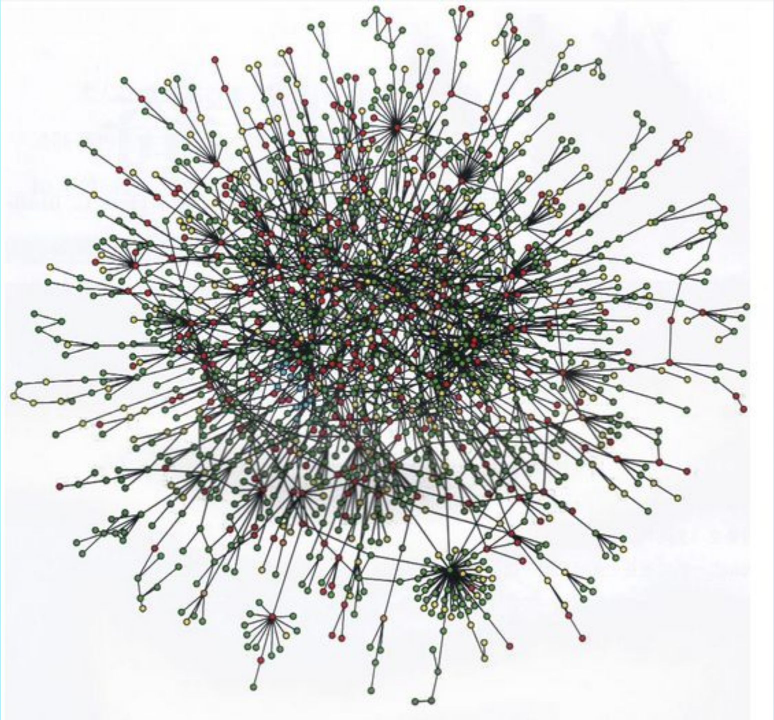
- 有向图
  - 有向图中的每两个顶点之间都存在着方向相反的两条边，则称此图为**完全图**。
  - 完全有向图包含有n(n-1)条边。



4个顶点的完全有向图，共12条边

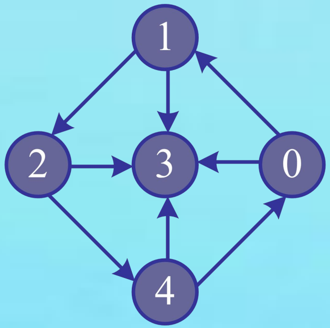
稠密图、稀疏图

- 当一个图接近完全图时，则称为**稠密图**。
- 相反，当一个图含有较少的边数（即当 e<<n(n-1)）时，则称为**稀疏图**。



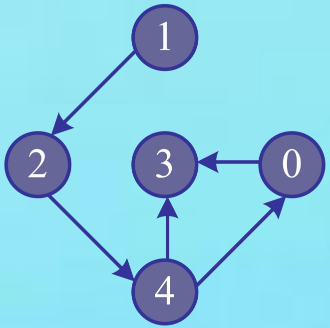
子图

- 设有两个图G=(V，E)和G’=(V’，E’)
- 若V’是V的子集，即V’⊆V，且E’是E的子集，即E’⊆E，则称G’是G的**子图**。
- 例如：图G2是图G1的子图，而图G3不是图G1的子图。



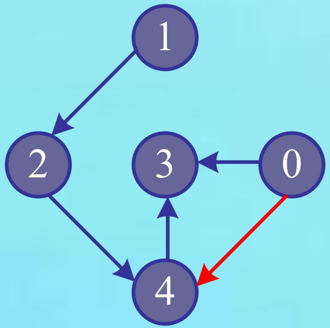
V(G1)={0,1,2,3,4}

E(G1)={<1,2>,<1,3>,<0,1>,<2,3>,
<0,3>,<2,4>,<4,3>,<4,0>}



V(G2)={0,1,2,3,4}

E(G2)={<1,2>,<0,3>,
<2,4>, <4,3>,<4,0>}

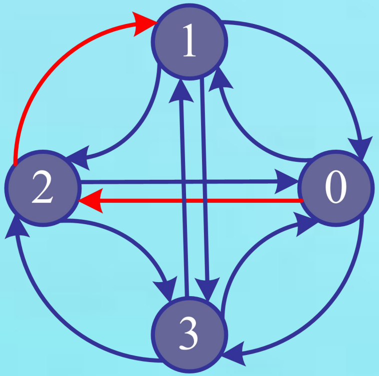


V(G2)={0,1,2,3,4}

E(G2)={<1,2>,<0,1>,<0,3>,
<2,4>, <4,3>,**<0,4>**}

路径和路径长度

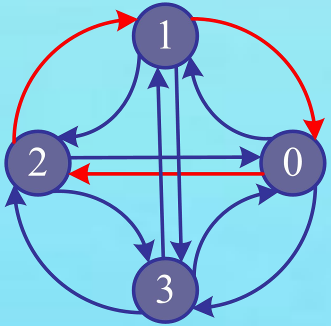
- 在一个图G=(V，E)中，从顶点i到顶点j的一条**路径**是一个顶点序列$(i,i_1,i_2,\ldots,i_m,j)$
  - 若此图G是无向图，则边(i,i_1)，(i_1,i_2)，…，(i_{m-1},i_m)，(i_m,j)属于E(G)；
  - 若此图是有向图，则$\langle i,i_1\rangle$，$\langle i_1,i_2\rangle$，…，$\langle i_{m-1},i_m\rangle$，$\langle i_m,j\rangle$属于E(G)。
- **路径长度**是指一条路径上经过的边的数目。
- 若一条路径上除开始点和结束点可以相同外，其余顶点均不相同，则称此路径为**简单路径**。



(0,2,1)是一条简单路径，路径长度为2

回路或环

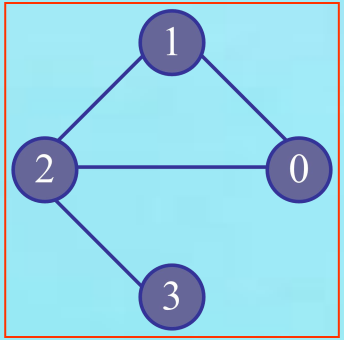
- 若一条路径上的开始点与结束点为同一个顶点，则此路径被称为**回路或环**。
- 开始点与结束点相同的简单路径被称为**简单回路或简单环**。

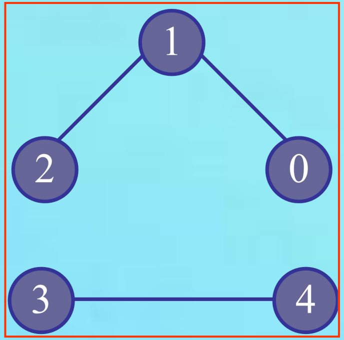


(0,2,1,0)就是一条简单回路，路径长度为3。

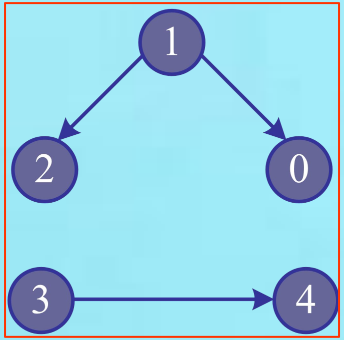
连通、连通图和连通分量

- 在无向图G中，若从顶点i到顶点j有路径，则称**顶点**i和j是**连通**的。
- 若图G中任意两个顶点都连通，则称G为**连通图**，否则称为**非连通图**。
- 无向图G中的极大连通子图称为G的**连通分量**。
  - 任何连通图的连通分量只有一个，即本身
  - 非连通图有多个连通分量。

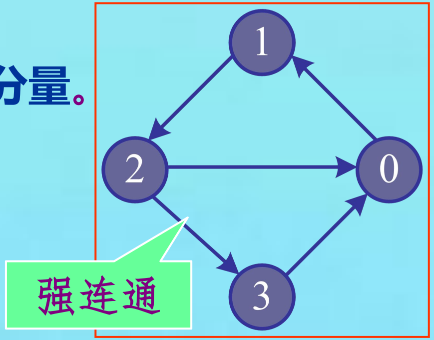


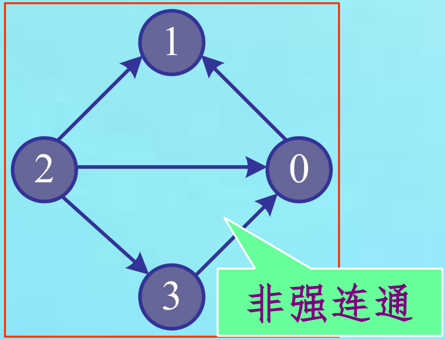


强连通图和强连通分量



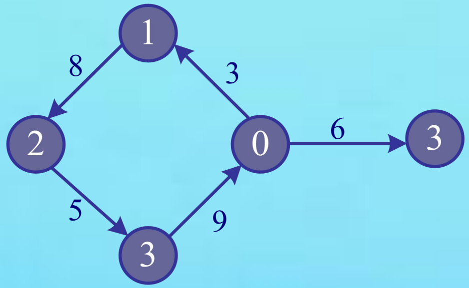
- 在**有向图**G中，若从顶点i到顶点j有路径，则称从顶点i到j是**连通**的。
- 若图G中的任意两个顶点i和j都连通，则称图G是**强连通图**。
- 有向图G中的极大强连通子图称为G的**强连通分量**。
  - 强连通图只有一个强连通分量，即本身；
  - 非强连通图有多个强连通分量。





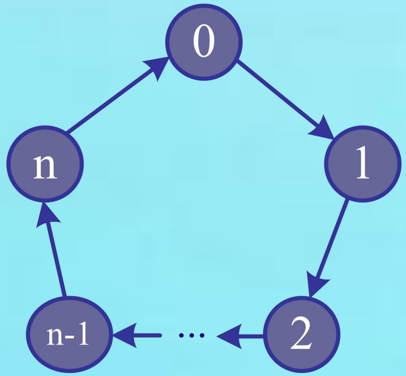
权和网

- 图中每一条边都可以附有一个对应的数值，这种与边相关的数值称为**权**。
- 权可以表示从一个顶点到另一个顶点的距离或花费的代价。
- 边上带有权的图称为**带权图**，也称作**网**。



例

- 问题
  - 有n个顶点的有向强连通图最多需要多少条边？
  - 最少需要多少条边？
- 求解
  - n个顶点的有向强连通图最多有n(n-1)条边（构成一个有向完全图的情况）；
  - 最少有n条边（n个顶点依次首尾相接构成一个环的情况）。



例

- 问题：一个无向连通图中有16条边，所有顶点的度均小于5，度为4的顶点有3个，度为3的顶点有4个，度为2的顶点有2个，则该图有______个顶点。

  A.10　　　　B.11

  C.12　　　　D.13

- 解
  - 设该图有n个顶点，图中度为i的顶点数为n_i（$0 \le i \le 4$）
  - 显然$n_0=0$，$n=3+4+2+n_1+n_0=9+n_1$，而度之和$=4\times3+3\times4+2\times2+n_1=28+n_1$，而度之和$=2e=32$，所以有$28+n_1=32$，得$n_1=4$，$n=9+n_1=13$。本题答案为D。