Task 2

II.9.2. Дана система линейных алгебраических уравнений $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Оценить максимально точно относительную погрешность $\|\Delta\mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}\|$ в заданной норме. Найти вектор ошибки $\Delta\mathbf{b}$, на котором эта оценка достигается. При каком $\Delta\mathbf{b}$ относительная ошибка $\|\Delta\mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}\|$ будет минимальной? Найти ее.

а) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 101 & 110 \\ 110 & 122 \end{pmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 312 \\ 342 \end{pmatrix}$; $\dfrac{\|\Delta\mathbf{b}\|_1}{\|\mathbf{b}\|_1} = 0.01$, $\|\mathbf{x}\|_1 = \max_i |x_i|$;

▷ $\left.\begin{array}{l} Ax = b \\ A(x+\Delta x) = b + \Delta b \end{array}\right\} A\Delta x = \Delta b \Rightarrow \Delta x = A^{-1}\Delta b$

$$\frac{\|\Delta x\|_1}{\|x\|_1} = \frac{\|A^{-1}\Delta b\|_1}{\|x\|_1} \le \frac{\|A^{-1}\|_1}{\|x\|_1}\frac{\|\Delta b\|_1}{\|b\|_1}\|b\|_1 = \|A^{-1}\|_1 \frac{\|\Delta b\|_1}{\|b\|_1}\frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} \le \underbrace{\|A\|_1 \|A^{-1}\|_1}_{\mu(A)} \frac{\|\Delta b\|_1}{\|\Delta b\|_1}$$

$\le \|A\|_1$, т.к. $\|A\|_1 - \sup\limits_{\|x\|\neq 0} \dfrac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1}$

Итого получаем $\dfrac{\|\Delta x\|_1}{\|\Delta x\|_1} \le \mu(A) \dfrac{\|\Delta b\|_1}{\|b\|_1}$

Найдем $\mu(A)$ - число обусловленности: $\mu(A) = \|A\|_1 \cdot \|A^{-1}\|_1$, где $\|A\|_1 = \max\limits_i \sum\limits_j |a_{ij}|$

Тогда $\|A\|_1 = 232$

$\left.\begin{array}{l} \|A\|_1 = 232 \\ A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} 101 & -110 \\ -110 & 122 \end{pmatrix} \Rightarrow \|A^{-1}\| = \dfrac{1}{222}\cdot 232 = \dfrac{116}{111} \end{array}\right\}$ Получаем $\mu(A) = 232 \cdot \dfrac{116}{111} \approx 245{,}45$

$\det A = 222$

Тогда $\dfrac{\|\Delta x\|_1}{\|x\|_1} \le 245{,}45 \cdot 0{,}01 \Rightarrow \dfrac{\|\Delta x\|_1}{\|x\|_1} \le 2{,}4545$

Найдем вектор Δb на которая эта ошибка достигается: Δb должен быть параллелен $\underbrace{\text{собственному вектору с } \lambda = \lambda_{min}}_{\text{обозначим } u}$

$\lambda_{min} = 1$

$$Au = \lambda_{min} u \Rightarrow (A - \lambda_{min}E)u = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 100 & 110 \\ 110 & 121 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 110 & 121 \\ 110 & 121 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 110 & 121 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 110u_1 + 121u_2 = 0 \Rightarrow u_1 + 1{,}1u_2 = 0 \Rightarrow u = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{10}{11} \end{pmatrix}$$

Тогда $\Delta b = ku \Rightarrow \|\Delta b\|_1 = \|ku\|_1 = |k|\,\|u\|_1 = |k| \cdot \max\{|\tfrac{1}{10}|, |-1|\} = |k|$

$\|b\|_1 = \max\{|312|, |342|\} = 342$

Получаем $\dfrac{\|\Delta b\|_1}{\|b\|_1} = \dfrac{|k|}{342} = 0{,}01 \Rightarrow |k| = 3{,}42 \Rightarrow$ Достигается при $\Delta b = \begin{pmatrix} 3{,}42 \\ -\frac{342}{110} \end{pmatrix}$ или $\Delta b = \begin{pmatrix} -3{,}42 \\ \frac{342}{110} \end{pmatrix}$

Минимальная ошибка достигается на Δb, если Δb параллелен $\underbrace{\text{собственному вектору с } \lambda = \lambda_{max}}_{\text{обозначим } v}$

$$Av = \lambda_{max} v \Rightarrow (A - \lambda_{max}E)v = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -121 & 110 \\ 110 & -100 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 11 & -10 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 11v_1 - 10v_2 = 0 \Rightarrow v = \begin{pmatrix} \frac{10}{11} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\left.\begin{array}{l} \Delta b = kv \Rightarrow \|\Delta b\| = |k| \cdot \cancel{\|v\|}^{1} = |k| \\ \|b\| = 342 \end{array}\right\} \Rightarrow |k| = 3{,}42 \Rightarrow$ ошибка минимальна при $\Delta b = \begin{pmatrix} \frac{342}{110} \\ 3{,}42 \end{pmatrix}$ или $\Delta b = \begin{pmatrix} -\frac{342}{110} \\ -3{,}42 \end{pmatrix}$

◀