Task 1

П.7.16. Пусть **B** — невырожденная матрица, $\|\bullet\|$ — некоторая норма в пространстве векторов размерности N. Доказать, что $\|\mathbf{x}\|^* = \|\mathbf{Bx}\|$ также является нормой в пространстве векторов. Какая норма в пространстве матриц порождается нормой $\|\mathbf{x}\|_*$ в пространстве векторов?

▷ Проверим для $\|x\|^*$ св-ва норм:

1) Неотрицательность: $\|x\|^* = \|Bx\| \geq 0$ (для норм $\|\cdot\|$) $\Rightarrow \|x\|^* \geq 0 \ \forall x$

2) Равенство нулю: $\|x\|^* = 0 \Rightarrow \|Bx\| = 0 \Rightarrow Bx = 0 \Rightarrow x = 0$ (т.к. B невырожденная)

$x = 0 \Rightarrow Bx = 0 \Rightarrow \|Bx\| = 0 \Rightarrow \|x\|^* = 0$

Получаем $\|x\|^* = 0 \iff x = 0$

3) Скалярный множитель: $\|\alpha x\|^* = \|\alpha(Bx)\| = |\alpha| \cdot \|Bx\| = |\alpha| \cdot \|x\|^* \Rightarrow \|\alpha x\|^* = |\alpha| \|x\|^*$

4) Неравенство треугольника: $\|x+y\|^* = \|B(x+y)\| = \|Bx + By\| \leq \|Bx\| + \|By\| = \|x\|^* + \|y\|^* \Rightarrow \|x+y\|^* \leq \|x\|^* + \|y\|^*$

Выполнены все условия норм $\Rightarrow \|x\|^*$ – норма в пр-ве векторов

Рассмотрим норму в пр-ве матриц порожденную нормой $\|x\|^*$

$$\|A\|^* = \sup_{\|x\|^* \neq 0} \frac{\|Ax\|^*}{\|x\|^*} = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|BAx\|}{\|Bx\|} = \sup_{\|y\| \neq 0} \frac{\|BAB^{-1}y\|}{\|y\|}$$ – подчиненная норма $\|BAB^{-1}\|$

$y = B^{-1}x$ (существ. т.к. B невырождена)

Получаем $\|A\|^* = \|BAB^{-1}\|$

норма подч. $\|\cdot\|^*$ норма подч. $\|\cdot\|$