Task 3

II.7.37. Найти область сходимости метода Якоби и метода Зейделя для систем с матрицами вида:

б) $$\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & 0 \\ \beta & 0 & \alpha \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{L} + \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{U}$$

1) Метод Якоби

Из семинара: диагональное преобладание => сх-ть метода Якоби

Должно выполняться: $|a_{ii}| \ge \sum_{i \ne j} |a_{ij}| \Rightarrow |\alpha| \ge 2|\beta|$ — условие сходимости метода Якоби (достаточное условие)

Рассмотрим более точный критерий:

Итерационный процесс $$x^{(k+1)} = \underbrace{-D^{-1}(L+U)}_{\text{Обозначим } P} x^{(k)} + D^{-1} b$$ (Если $Ax=b$, где $A = L+D+U$)

$$P = -D^{-1}(L+U) = -\begin{pmatrix} 1/\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1/\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1/\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{\beta}{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\beta}{\alpha} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Метод Якоби сходится <=> все собств. числа λ матрицы P по модулю меньше единицы

$$|P-\lambda E| = 0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -\frac{\beta}{\alpha} \\ 0 & -\lambda & 0 \\ -\frac{\beta}{\alpha} & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - \lambda^3 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 0 \\ \lambda = \frac{\beta}{\alpha} \\ \lambda = -\frac{\beta}{\alpha} \end{array}\right. \Rightarrow \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| < 1 \Rightarrow |\beta| < |\alpha|$$ — у-е сходимости м. Якоби

Получаем, что метод Якоби сходится при $|\alpha| > |\beta|$

2) Метод Зейделя

Помним из семинара: Матрица симметрична и положительно определена => сх-ть метода Гаусса-Зейделя

Должно выполняться по критерию Сильвестра: $$\begin{cases} \alpha > 0 \\ \alpha^2 > 0 \\ \alpha^3 - \alpha\beta^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha > 0 \\ \alpha^2 - \beta^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha > 0 \\ |\beta| < |\alpha| \end{cases}$$ — условие сходимости Гаусса-Зейделя

Теперь точная область сходимости

Итерационный процесс: $$x^{(k+1)} = \underbrace{-(L+D)^{-1} U}_{P} x^{(k)} + (L+D)^{-1} b$$

$$P = -(L+D)^{-1} U = -\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ \beta & 0 & \alpha \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\alpha}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\beta}{\alpha} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{\beta}{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta^2}{\alpha^2} \end{pmatrix}$$

Метод сходится, если $\forall \lambda \hookrightarrow |\lambda| < 1$, где λ - собств. зн. матрицы P

$$|P-\lambda E| = 0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \frac{\beta}{\alpha} \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda + \frac{\beta^2}{\alpha^2} \end{vmatrix} = \lambda^2\left(-\lambda + \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_{1,2} = 0 \\ \lambda_3 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \end{array}\right. \Rightarrow \frac{\beta^2}{\alpha^2} < 1 \Rightarrow \beta^2 < \alpha^2 \Rightarrow |\beta| < |\alpha|$$ ~ у-е сх-ти метода Гаусса-Зейделя

Получаем, что метод Зейделя сходится при $|\beta| < |\alpha|$