TD 1: MARCHE ALÉATOIRE ET MARTINGALE EN TEMPS DISCRET.

Calcul stochastique M1 DUAS– Semestre 2

P.-O. Goffard

---

1. Une urne contient N boules, dont $0 < a < N$ boules blanches et $b = N - a$ boules noires. A chaque pas de temps, on tire une boule au hasard dans l'urne.

   - Si la boule est blanche on remet la boule blanche et on rajoute une boule blanche.
   - Si cette boule est noire, on replace la boule noire dans l'urne eton rajoute une boule noire.

   On répète ce procédé et on s'intéresse aux processus $(Y_n)_{n\geq 0}$ et $(X_n)_{n\geq 0}$ qui correspondent respectivement aux nombres et à la proportion de boules blanches dans l'urne après n tirage.

   (a) Exprimer X_n en fonction de Y_n.

   Solution: $X_n = \dfrac{Y_n}{N+n}$

   (b) Soit $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$, calculer $\mathbb{P}(Y_{n+1} = Y_n + 1|\mathcal{F}_n)$ et $\mathbb{P}(Y_{n+1} = Y_n|\mathcal{F}_n)$.

   Solution: $\mathbb{P}(Y_{n+1} = Y_n + 1|\mathcal{F}_n) = \dfrac{Y_n}{N+n}$ et $\mathbb{P}(Y_{n+1} = Y_n|\mathcal{F}_n) = \dfrac{N+n-Y_n}{N+n}$

   (c) Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une $\mathcal{F}_n$-martingale. Quel conclusion intéressante au sujet de la proportion moyenne de boule blanche dans l'urne peut-on tirer de cela?

   Solution:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}\left[\frac{Y_{n+1}}{N+n+1}|\mathcal{F}_n\right] \\
&= \frac{1}{N+n+1}\left[(Y_n+1)\frac{Y_n}{N+n} + Y_n\frac{N+n-Y_n}{N+n}\right] \\
&= \frac{Y_n}{N+n} = X_n
\end{aligned}
$$

   (d) Supposons que $a = b = 1$, montrer par récurrence sur $n \geq 0$ que $Y_n \sim \mathsf{Unif}(\{1, \ldots, n+1\})$

   Solution: Si $a = b = 1$ alors $N = 2$. On raisonne par récurrence, $Y_0 = 1 \sim \mathsf{Unif}(\{1\})$, la propriété est vérifiée au rang $n = 0$.

   Supposons la propriété vraie au rang n, qu'en est il au rang $n+1$?

Par la formules des probabilités totale, on a pour $k \geq 2$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y_{n+1}=k) &= \sum_{l=1}^{n+1} \mathbb{P}(Y_{n+1}=k|Y_n=l)\frac{1}{n+1} \\
&= \mathbb{P}(Y_{n+1}=k|Y_n=k)\frac{1}{n+1} + \mathbb{P}(Y_{n+1}=k|Y_n=k-1)\frac{1}{n+1} \\
&= \frac{2+n-k}{2+n}\frac{1}{n+1} + \frac{k-1}{2+n}\frac{1}{n+1} \\
&= \frac{1}{n+2}
\end{aligned}$$

Pour $k=1$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y_{n+1}=1) &= \sum_{l=1}^{n+1} \mathbb{P}(Y_{n+1}=1|Y_n=l)\frac{1}{n+1} \\
&= \mathbb{P}(Y_{n+1}=1|Y_n=1)\frac{1}{n+1} \\
&= \frac{2+n-1}{2+n}\frac{1}{n+1} \\
&= \frac{1}{n+2}
\end{aligned}$$

La propriété est ainsi vérifiée au rang $n+1$.

(e) En déduire la loi de X_n et de X_∞ après en avoir justifié l'existence.
Indication: Pour la loi de X_∞, il faut étudié la limite de $\mathbb{E}(e^{\theta X_n})$ lorsque $n \to \infty$.

Solution: On a

$$\mathbb{P}\left(X_n = \frac{k}{n+2}\right) = \frac{1}{n+1}, \text{ pour } k = 1, \ldots, n+1.$$

Comme $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale positive et bornée (par 1) alors elle converge presque sûrement. On a

$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\theta X_n}) = \frac{1}{n+1}\mathrm{e}^{\theta/(n+1)}\frac{1-\mathrm{e}^{\theta}}{1-\mathrm{e}^{\theta/(n+1)}} \to \frac{\mathrm{e}^{\theta}-1}{\theta} \text{ lorsque } n \to \infty.$$

C'est la loi uniforme (continue) sur $(0,1)$.

2. Le processus de branchement permet de suivre l'évolution d'une population. Soit X une variable aléatoire de comptage telle que

$$\mathbb{P}(X=0) > 0 \text{ et } \mathbb{E}(X) < \infty.$$

X correspond au nombre d'enfants d'un individu. On définit une suite (à deux indices) de variables aléatoires

$$\left(X_r^{(n)}\right)_{n,r\in\mathbb{N}}$$

indépendantes et distribuées comme X de sorte que $X_r^{(n+1)}$ désigne le nombre de descendants (membre de la génération $n+1$) de l'individu r (qui appartient à la génération n). Le processus

$(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$Z_0 = 1,\ Z_n = X_1^{(n)} + \ldots + X_{Z_{n-1}}^{(n)}$$

correspond à la taille de la génération n.

(a) On note $\mu = \mathbb{E}(X)$, le nombre d'enfant moyen par individu. Montrer que

$$\mathbb{E}(Z_n) = \mu^n.$$

En déduire la limite de $\mathbb{E}(Z_n)$ en fonction des valeur de μ.

Solution: On a

$$\mathbb{E}(Z_n) = \mathbb{E}(\sum_i^{Z_{n-1}} X_i^{(n)}) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(\sum_i^{Z_{n-1}} X_i^{(n)}|Z_{n-1})] = \mathbb{E}(Z_{n-1})\mu = \ldots = \mathbb{E}(Z_0)\mu^n = \mu^n$$

On en déduit que

$$\begin{cases} \mathbb{E}(Z_n) \to \infty & \text{si } \mu > 1 \\ \mathbb{E}(Z_n) \to 1 & \text{si } \mu = 1 \\ \mathbb{E}(Z_n) \to 0 & \text{si } \mu < 1 \end{cases}$$

(b) Montrer que

$$M_n = Z_n/\mu^n, n \geq 0$$

est une martingale.

Solution:

$$\mathbb{E}(M_n|\mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{E}(Z_n|\mathcal{F}_{n-1})/\mu^n = Z_{n-1}\mu/\mu^n = M_{n-1}.$$

(c) Soit

$$G_X(\theta) = \mathbb{E}(\theta^X),$$

la fonction génératrice des probabilités de X. Montrer que

$$G_{Z_n}(\theta) = G_{Z_{n-1}}[G_X(\theta)]$$

puis que c'est équivalent à

$$G_{Z_n}(\theta) = G_X[G_{Z_{n-1}}(\theta)].$$

Solution: On a

$$\begin{aligned}
G_{Z_n}(\theta) &= \mathbb{E}(\theta^{Z_n}) \\
&= \mathbb{E}(\theta^{\sum_i^{Z_{n-1}} X_i^{(n)}}) \\
&= \mathbb{E}[\mathbb{E}(\theta^{\sum_i^{Z_{n-1}} X_i^{(n)}} | Z_{n-1})] \\
&= \mathbb{E}[\prod_i^{Z_{n-1}} \mathbb{E}(\theta^{X_i^{(n)}})] \\
&= \mathbb{E}[\prod_i^{Z_{n-1}} \mathbb{E}(\theta^{X})] \\
&= \mathbb{E}[\mathbb{E}(\theta^X)^{Z_{n-1}}] \\
&= \mathbb{E}[\mathbb{E}(\theta^X)^{Z_{n-1}}] \\
&= G_{Z_{n-1}}[G_X(\theta)].
\end{aligned}$$

On en déduit

$$G_{Z_n}(\theta) = G_{Z_{n-1}}[G_X(\theta)] = G_X \circ G_X \circ \ldots G_X(\theta) = G_X[G_{Z_{n-1}}(\theta)].$$

(d) Soit

$$\pi_n = \mathbb{P}(Z_n = 0), \ n \geq 1,$$

la probabilité que la population soit éteinte à la génération n. Quel est le lien entre π_n et $G_{Z_n}(\theta)$?

Solution: $\pi_n = G_{Z_n}(0)$

(e) En déduire que

$$\pi_n = G_X(\pi_{n-1}).$$

Solution: On évalue $G_{Z_n}(\theta) = G_X[G_{Z_{n-1}}(\theta)]$ en $\theta = 0$.

(f) Montrer que π_n est une suite convergente. Quelle est l'interprétation de $\pi = \lim \pi_n$?

Solution: On a $\{Z_{n-1} = 0\} \subset \{Z_n = 0\}$ donc $\pi_n \geq \pi_{n-1}$. (π_n) est une suite croissante et bornée (par 1), donc elle converge. Sa limite π correspond à la probabilité que la population s'éteigne un un jour. $1 - \pi$ est la probabilité que la population ne s'éteigne jamais.

(g) Quel est le lien entre $\mu = \mathbb{E}(X)$ et $G_X(\theta)$?

Solution: $\mu = G'_X(1)$

(h) Déduire des questions c),d) et f) que

$$\begin{cases} 0 < \pi < 1, & \text{si } \mu < 1, \\ \pi = 1. & \text{si } \mu \geq 1. \end{cases}$$

Indication: le raisonnement s'appuie sur une étude de la fonction G_X sur $[0,1]$.

Solution: On observe que π est solution de

$$\pi = G_X(\pi),$$

en passant

$$\pi_n = G_X(\pi_{n-1}),$$

à la limite. On note que $G_X(0) = \mathbb{P}(X=0) \in (0,1)$ et $G_X(1) = 1$. De plus, $G'_X(\theta) \geq 0$ et $G'_X(\theta) \geq 0$ pour $\theta \in [0,1]$. Soit $f(\theta) = G_X(\theta) - \theta$, $f'(\theta) = G'_X(\theta) - 1$ et $f'(\theta) = G''_X(\theta)$. On en déduit que $f'(\theta) \in [-1, \mu - 1]$.

- Si $\mu \leq 1$ alors f est strictement croissante sur $[0,1]$ et $f(\pi) = 0$ n'a pas de solution < 1.
- Si $\mu > 1$, il existe θ^* tel que $f(\theta^*) < 0$ et donc $\pi \in [0, \theta^*]$ tel que $f(\pi) = 0$.