TD 5: INTÉGRALE STOCHASTIQUE

Calcul stochastique M1 DUAS– Semestre 2
P.-O. Goffard

---

1. Montrer que pour f fonction déterministe, de carré intégrable,
$$\mathbb{E}\left(B_t\int_0^{\infty}f(s)\mathrm{d}B_s\right)=\int_0^t f(s)\mathrm{d}s$$
2. Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus dont la dynamique est donnée par
$$\mathrm{d}X_t=(1-2X_t)\mathrm{d}t+3\mathrm{d}B_t.$$
   (a) Utiliser la formule d'Ito pour trouver $\mathrm{d}(\mathrm{e}^{rt}X_t)$
   (b) Choisissez r de façon à simplfier l'expression l'expression du drift (devant $\mathrm{d}t$). Calculer la moyenne puis la moyenne asymptotique ($t\to\infty$) du processus.
3. Soit un processus X de dynamique
$$\mathrm{d}X_t=\mathrm{d}t+2\sqrt{X_t}\mathrm{d}B_t,\text{ avec } X_0=x_0.$$
   Montrer que le processus $X_t=(B_t+x_0)^2$ est une solution.
4. Soit le processus X de dynamique
$$\begin{cases}\mathrm{d}X_t=\dfrac{X_t}{t-1}\mathrm{d}t+\mathrm{d}B_t, & 0\leq t<1,\\ X_0=0.\end{cases}$$
   (a) Montrer que
$$X_t=(1-t)\int_0^t\frac{\mathrm{d}B_s}{1-s}$$
   (b) Montrer que X est un processus gaussien. Calculer sa fonction espérance et covariance
   (c) Montrer que $\lim\limits_{t\to 1}X_t=0$ dans $\mathcal{L}^2$
5. Soit X un processus de dynamique
$$\mathrm{d}X_t=X_t\mu\mathrm{d}t+X_t\sigma\mathrm{d}B_t$$
   (a) Calculer
$$\mathbb{E}\left[(X_T-K)_+\right]$$
   Il s'agit du *pay-off* espéré d'un call européen de maturité $T>0$ et de prix d'exercice $K>0$ dérivé l'actif X. Donner la réponse en fonction de X_0,K,T,μ,σ,ϕ (dfr de la loi normale centrée-réduite) et
$$d_1=\left[\ln(K/X_0)-\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)T\right]\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}.$$
   (b) Montrer que $Y_t=\mathrm{e}^{-\mu t}X_t,\ t\geq 0$ est une martingale.