TD 2: PROCESSUS EN TEMPS CONTINU ET MARTINGALE

Calcul stochastique M1 DUAS– Semestre 2
P.-O. Goffard

---

1. (a) (2 points) Soit $(N_t)_{t\geq 0}$ un processus de Poisson d'intensité λ. Le processus

$$X_n = N_n,\ n \geq 0$$

définit-il une chaine de Markov? Justifier votre réponse, s'il s'avère que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaine de Markov alors on donnera sa matrice des transition et son espace d'état.

(b) (2 points) Soit le processus

$$M_t = U_1 + \ldots + U_{N_t}$$

où $U_1, \ldots, U_{N_t}$ sont iid de loi normale Normal(μ, σ^2) et indépendants de $(N_t)_{t\geq 0}$. Montrer que

$$\mathbb{E}\left(\frac{M_t}{N_t}\Big|N_t > 0\right) = \frac{\mathbb{E}(M_t)}{\mathbb{E}(N_t)}$$

2. Soit $(M_t)_{t\geq 0}$ une martingale telle que $\mathbb{E}(M_t^2) < \infty$ pour tout $0 \leq s < t$.

(a) Montrer que

$$\mathbb{E}\left[(M_t - M_s)^2\right] = \mathbb{E}(M_t^2) - \mathbb{E}(M_s^2)$$

(b) En déduire que $t \mapsto \phi(t) = \mathbb{E}(M_t^2)$ est croissante.

3. Soit $(M_t)_{t\geq 0}$ une martingale continue telle que $M_0 = a$ et $\lim\limits_{t\to\infty} M_t = 0$. Montrer que $\sup\limits_{t\geq 0} M_t \sim \frac{a}{U}$, où $U \sim \mathsf{Unif}([0,1])$.

<u>Indication:</u> Quel est le lien entre $\sup\limits_{t\geq 0} M_t$ et

$$\tau_y^+ = \inf\{t \geq 0\ ;\ M_t > y\},\ \text{pour } y > a.$$

4. Les longueurs de deux branches concurrentes de la blockchain sont modélisées par deux processus de Poisson $(N_t)_{t\geq 0}$ et $(M_t)_{t\geq 0}$ indépendants, d'intensité respectives λ et μ. On se place dans le scénario d'une attaque par double dépense et on suppose que la branche malhonnête est celle dont la longueur est modélisée par M. Les mineurs malhonnêtes ne détiennent pas la majorité des ressources de calculs ce qui se traduit par $\mu < \lambda$. La branche honnête possède $z \geq 0$ bloc d'avance sur la chaine malhonnête. La double dépense se produit si la chaine malhonnête rattrape la chaine honnête, c'est à dire à l'instant aléatoire

$$\tau_z = \inf\{t \geq 0\ ;\ z + N_t - M_t = 0\}.$$

On définit la probabilité d'une double dépense par

$$\phi(z) = \mathbb{P}(\tau_z < \infty).$$

On définit le processus $Y_t = M_t - N_t,\ t \geq 0$.

(a) Y est-il un processus de Lévy?

(b) Que vaut $\lim\limits_{t\to\infty} Y_t$?

(c) Donner l'exposant de Laplace

$$\kappa(\theta) = \log \mathbb{E}(e^{\theta Y_1}).$$

de Y.

(d) Montrer que

$$\phi(z) = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^z.$$

Indication: Il faut trouver $\theta^* > 0$ tel que $\mathrm{e}^{\theta^* Y_t}$ soit une martingale puis appliquer le théorème du temps d'arrêt optimal.