

Agrégation des portefeuilles de contrats d'assurance vie

Est-il optimal de regrouper les contrats en fonction de l'âge, du genre, et
de l'ancienneté des assurés?

Pierre-O. Goffard

Université d'été de l'Institut des Actuaires, Juillet 2015

Sommaire

Introduction

Provisions best estimate pour les contrats d'assurance vie de type épargne

Le processus d'agrégation

Backtesting du processus d'agrégation

Un peu de contexte

Solvabilité II

- ▶ Directive de l'UE qui définit un cadre prudentiel pour les compagnies d'assurance,
 - ↪ Réserve de capital afin de réduire le risque d'insolvabilité.
- ▶ Entrée en vigueur au 1^{er} Janvier 2016.

Calcul des provisions *Best Estimate* via un modèle ALM de projections des *cash-flows*

- ▶ Modélise les interactions entre l'actif et le passif,
- ▶ Tient compte de la valeur actuelle des garanties et des engagements.

Le défi des temps de calcul

- ▶ Simulations de Monte-Carlo + Approche contrat par contrat,
- ▶ Portefeuille de contrat AXA France (épargne) \Rightarrow 4 millions,
 - ↪ Consommation importante de ressources informatiques.

Executive Summary

Qu'est ce qu'un *model point*?



Une procédure en deux étapes

Step 1 Algorithme de classification statistique pour regrouper les contrats,

Step 2 Construction d'un contrat représentatif pour chaque groupe.

- ▶ Portefeuille de contrats agrégé de **4000** model points erreur relative sur le BEL de **0.05%**,
- ▶ Méthode officielle de construction des *model points* d'AXA France depuis la clôture de l'exercice 2013.

Valeur actuelle pour un contrat épargne

- ▶ $\{r_a(t)\}_{t \geq 0}$ et $\{r_d(t)\}_{t \geq 0}$ sont des processus stochastiques, régis par une mesure de probabilité \mathbb{P}_f , qui modélisent les taux d'accumulation et d'actualisation.
- ▶ Soit \mathbf{F} un scénario financier généré à partir de \mathbb{P}_f ,

Valeur de l'épargne à l'instant t

$$SV^{\mathbf{F}}(t) = SV(0) \times \exp \left(\int_0^t r_a(s) ds \right),$$

Valeur actuelle de l'épargne à l'instant t

$$PSV^{\mathbf{F}}(t) = SV^{\mathbf{F}}(t) \times \exp \left(- \int_0^t r_d(s) ds \right),$$

La probabilité de sortie

Soit $\tau|\mathbf{F}$ une variable aléatoire continue égale à l'instant de sortie (duration) du contrat causé par:

- ▶ Le décès \Rightarrow Âge et genre de l'assuré,
- ▶ Le rachat \Rightarrow Ancienneté et scénario financier \mathbf{F} .

Soit T l'échéance du contrat ou l'horizon de projection,

- ▶ Le véritable instant de sortie est $\tau|\mathbf{F} \wedge T = \min(\tau|\mathbf{F}, T)$, de loi de probabilité

$$d\mathbb{P}_{\tau|\mathbf{F} \wedge T}(t) = f_{\tau|\mathbf{F}}(t)d\lambda(t) + \overline{F}_{\tau}(T)\delta_T(t).$$

Provision *best estimate* théorique

Moyenne des cash flows sortants pondérés par leur probabilité d'occurrence.

Pour le scénario \mathbf{F} ,

$$\begin{aligned} BEL^{\mathbf{F}}(0, T) &= \mathbb{E} [PSV(\tau | \mathbf{F} \wedge T)] \\ &= \int_0^T SV(0) \times \exp \left[\int_0^t (r_a(s) - r_d(s)) ds \right] d\mathbb{P}_{\tau | \mathbf{F} \wedge T}(t). \end{aligned}$$

Sur l'ensemble des scénarios financiers $(\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_N)$,

$$BEL(0, T) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N BEL^{\mathbf{F}_i}(0, T).$$

Approximations de l'intégrale par une méthode des rectangles,

$$\begin{aligned} BEL^F(0, T) &\approx \left[\sum_{t=0}^{T-1} p(t, t+1) \prod_{k=0}^t \frac{1 + r_a(k, k+1)}{1 + r_d(k, k+1)} \right] SV(0) \\ &+ \left[p(T) \prod_{k=0}^{T-1} \frac{1 + r_a(k, k+1)}{1 + r_d(k, k+1)} \right] SV(0), \end{aligned}$$

où

- ▶ le pas de temps est un an,
- ▶ Horizon de projection est de 30 ans,
- ▶ $p(t, t+1)$ est la probabilité de sortie entre t et $t+1$,
- ▶ $p(T)$ est la probabilité d'atteindre la fin de la projection,
- ▶ $r_a(k, k+1)$ et $r_d(k, k+1)$ désigne les taux forward d'accumulation et d'actualisation.

Aggregation Philosophy

BEL pour le portefeuille (C_1, C_2)

- ▶ Soit C_1 et C_2 deux contrats associés à des probabilités de sortie identiques au cours de la projection,
- ▶ $SV_{MP}(0) = SV_{C_1}(0) + SV_{C_2}(0)$.

Alors

$$BEL_{MP}^F(0, T) = \sum_{i=1}^2 BEL_{C_i}^F(0, T).$$

- ▶ Valorisation exacte du portefeuille (C_1, C_2) !

L'idée est de se rapprocher au maximum de cette propriété d'additivité.

Première Aggrégation

Regroupement des contrats ayant

- ▶ Des probabilités de sortie identiques
- ▶ Des caractéristiques contractuelles identiques (Groupe ALM)
 - ▶ Ligne de produit,
 - ▶ Participation aux bénéfices,
 - ▶ Taux technique,
 - ▶ ...

Initial Portfolio			
Maille ALM	Probability of Surrender	Initial Surrender Value	
Grp_ALM_1	Vector_1	100	●
Grp_ALM_1	Vector_2	200	●
Grp_ALM_1	Vector_3	50	●
Grp_ALM_1	Vector_2	80	●
Grp_ALM_1	Vector_2	3000	●
Grp_ALM_2	Vector_4	5000	●
Grp_ALM_2	Vector_4	200	●
Grp_ALM_2	Vector_5	40000	●
Grp_ALM_3	Vector_6	100	●
Grp_ALM_3	Vector_6	700	●
Grp_ALM_3	Vector_6	9000	●

Portfolio After First Aggregation		
Maille ALM	Probability of Surrender	Initial Surrender Value
Grp_ALM_1	Vector_1	100
Grp_ALM_1	Vector_2	3280
Grp_ALM_1	Vector_3	50
Grp_ALM_2	Vector_4	5200
Grp_ALM_2	Vector_5	40000
Grp_ALM_3	Vector_6	10250

Le problème de classification

Soit

$$\mathcal{P} = \{\mathbf{C}_i\}_{i \in 1, \dots, n}$$

un portefeuille appartenant au même groupe ALM. Le contrat

$$\mathbf{C}_i = (p_i(0, 1), p_i(1, 2), \dots, p_i(T - 1, T), p_i(T)),$$

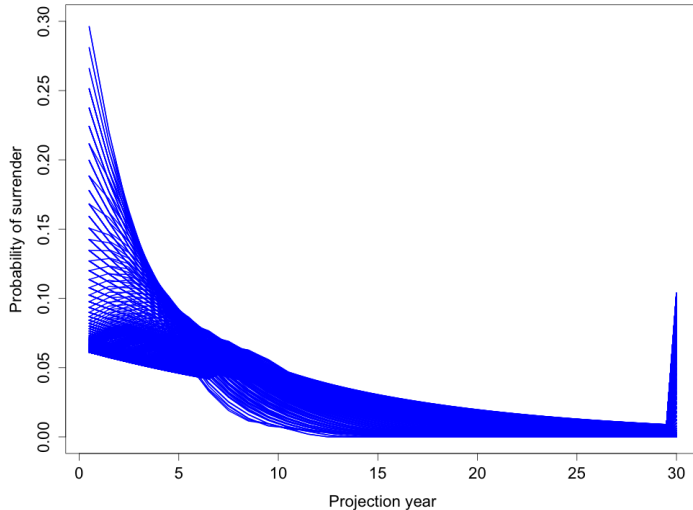
est caractérisé par ses probabilités de sortie qui forment une trajectoire.

- ▶ Abandon de la dépendance au scénario financier,
- ▶ Distance euclidienne en guise de mesure de dissimilarité,
- ▶ Algorithme CAH et KMEANS,
- ▶ Pondération des contrats en fonction de leur provision mathématique initiale

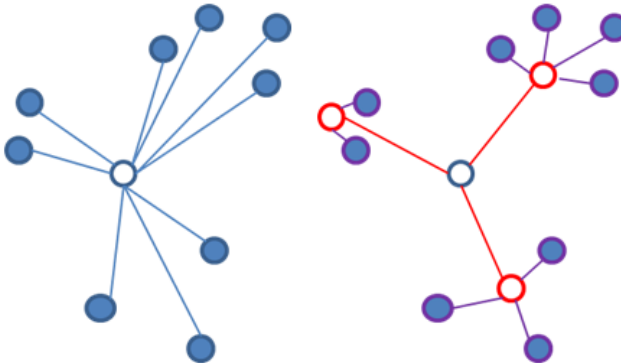
$$w_{\mathbf{C}} = \frac{SV_{\mathbf{C}}(0)}{\sum_{\mathbf{C} \in \mathcal{P}}^n SV_{\mathbf{C}}(0)},$$

- ▶ Ressemblance avec les données longitudinales.

Un *Meli-Melo* de trajectoires



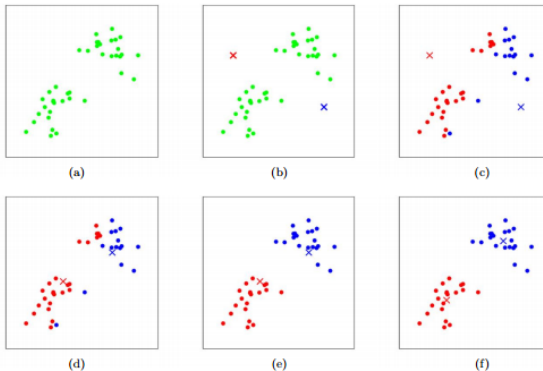
Clustering Philosophy



Inertia = Within-Cluster Inertia + Between-Cluster Inertia

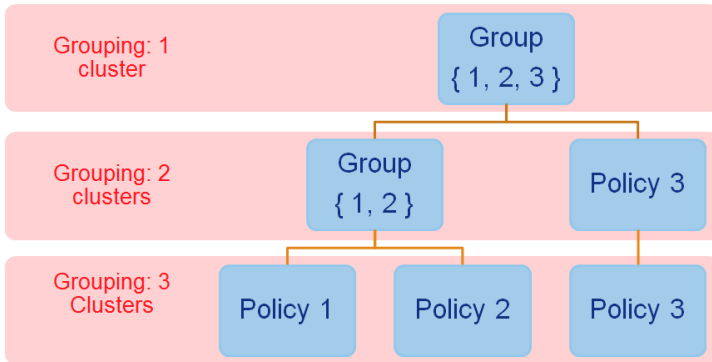
Algorithme K-Means

- Step 1 Nombre de classes,
- Step 2 Initialisation aléatoire des centres,
- Step 3 Chaque individu est assigné au centre le plus proche,
- Step 4 Calcul des nouveaux centres,
- Step 5 Itération des étapes 3 et 4 jusqu'à la convergence.



Classification Ascendante Hierarchique

- Step 1 Regroupement des deux contrats qui minimise l'augmentation d'inertie intra-classe, remplacement par le barycentre,
- Step 2 Itération de l'étape 1 jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'un seul groupe,
- Step 3 Élaguage de l'arbre!

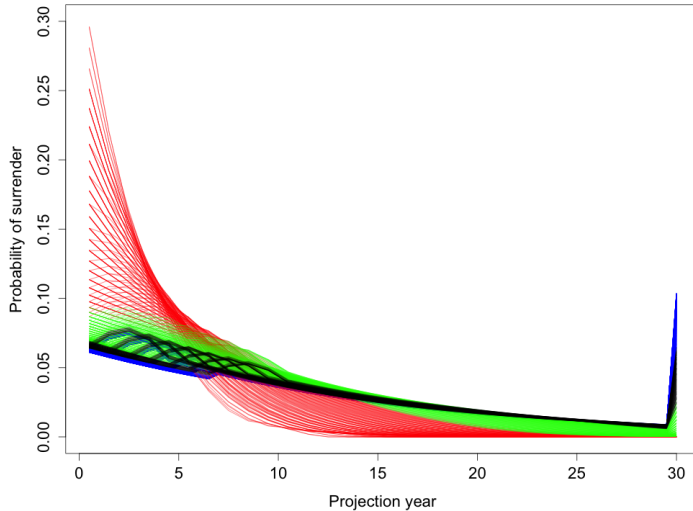


La contrainte du nombre de *model points*

- ▶ Allocation d'un nombre de *model points* par groupe ALM en fonction de leur provision mathématique.
- ▶ Algorithme KMEANS plus adapté,
 - ↪ Le nombre de classe est un paramètre.
- ▶ L'initialisation aléatoire est problématique.
 - ↪ CAH pour déterminer les centres initiaux.

Idée Nombre de *model points* \Rightarrow Compromis entre la provision mathématique et l'hétérogénéité des trajectoire au sein du groupe ALM.

Combination of AHC and K-Means Then BOOM!



Le problème se résume à attribuer un âge et une ancienneté aux MPs.

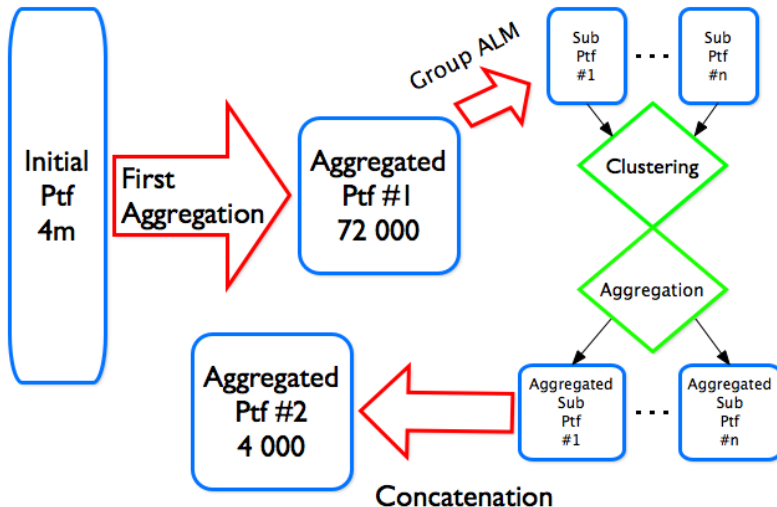
Méthode Naïve

- ▶ Moyenne pondérée par la PM de l'âge et de l'ancienneté au sein de chaque groupe.

Méthode Sioux

- ▶ Génération de toutes les trajectoires possibles,
- ▶ Calcul du barycentre des trajectoires dans chaque groupe,
- ▶ Attribution de la combinaison Âge/Ancienneté associée à la trajectoire la plus proche de la trajectoire barycentrique.

Le processus d'agrégation: Vue d'ensemble



Backtesting:

Quelques chiffres

- ▶ \mathcal{PF}_1 désigne le portefeuille agrégé après la première agrégation,
- ▶ \mathcal{PF}_2 désigne le portefeuille agrégé final.
- ▶ Erreur relative sur la provision *best estimate*,

$$\frac{BEL(\mathcal{PF}_2) - BEL(\mathcal{PF}_1)}{BEL(\mathcal{PF}_1)}.$$

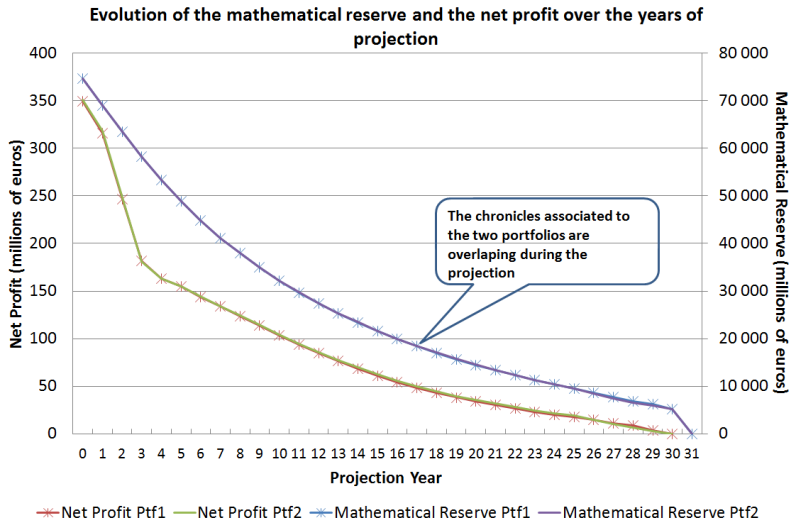
- ▶ Taux de compression,

$$\frac{Card(\mathcal{PF}_2) - Card(\mathcal{PF}_1)}{Card(\mathcal{PF}_1)}.$$

PTF	Nombre de contrats	BEL (millions d'euros)
\mathcal{PF}_1	72 000	72 336
\mathcal{PF}_2	4 000	72 371

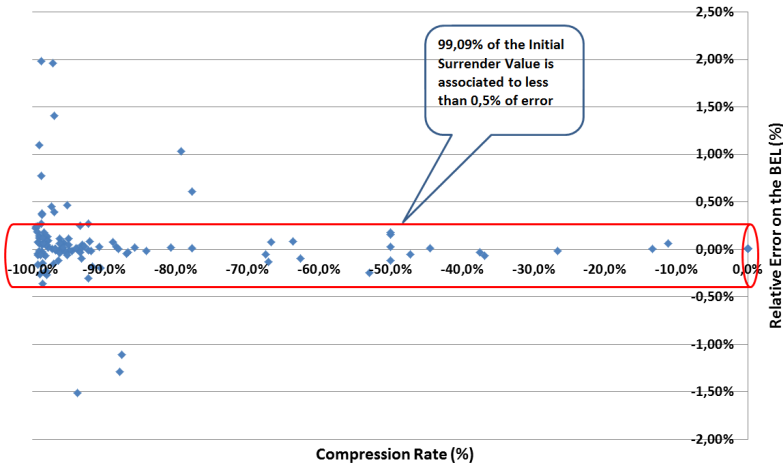
- ▶ Une erreur relative de **0.0485%** soit **35** millions d'euros.
- ▶ Un taux de compression de **-95%** VS \mathcal{PF}_1 et **-99.9%** VS contrat par contrat.

Erreur globale au cours de la projection



Taux de compression VS Erreur relative produit par produit

Relative Error on the BEL by Product Lines



Conclusion et perspectives

Conclusion

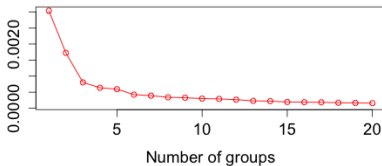
- ▶ la procédure d'agrégation pour les portefeuilles de contrats d'assurance vie individuel de type épargne est efficace,
 - ↪ Facile à implémenter,
 - ↪ Fondée théoriquement et efficace dans la pratique.
- ▶ La procédure d'agrégation joue un rôle clé dans le processus de valorisation d'AXA France
 - ↪ Cela permet une valorisation ALM purement stochastique,
 - ↪ Satisfaisant du point de vue des autorités de contrôle.

Des améliorations sont possibles

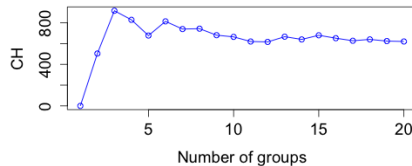
- ▶ Existence de mesures de dissimilarité potentiellement plus adaptées que la distance euclidienne,
- ▶ Relier le niveau d'erreur au nombre de MP
- ▶ Étude du compromis entre la provision mathématique et l'hétérogénéité du groupe ALM pour allouer le nombre de *model points*.

Du nombre de classe optimal

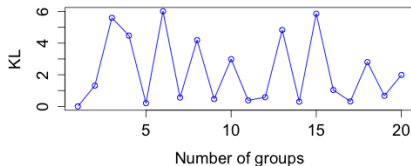
Weighted Within-Cluster Inertia



Calinsky-Harabasz Index



Krzanowski-Lai Index



Silhouette Index

