

# MAD M1 Actuariat/ES

## Chapitre II: Chaîne de Markov

Pierre-Olivier Goffard

**Université de Lyon 1**  
**ISFA**

`pierre-olivier.goffard@univ-lyon1.fr`

ISFA  
October 19, 2018

## I. Premières définitions

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un processus stochastique, défini sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , à valeurs dans un espace d'état fini ou dénombrable  $E$ .

### Exemple 1 (A propos de l'espace d'état)

$E$  peut-être

- $\{a, b, c, d\}$
- $\mathbb{N}$  ou  $\mathbb{Z}$

### Définition 1 (Chaîne de Markov)

Le processus  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une chaîne de Markov si

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n, \dots, X_1 = x_1, X_0 = x_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n),$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $(x_0, x_1, \dots, x_{n+1}) \in E^{n+2}$ . La valeur future du processus ne dépend que de l'état à l'instant présent.

Un évènement  $(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n)$  est une trajectoire du processus  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . La vraisemblance d'une telle trajectoire est donnée par

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) &= \mathbb{P}(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0) \mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}) \\ &= \mathbb{P}(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}) \mathbb{P}(X_{n-1} = x_{n-1} | X_{n-2} = x_{n-2}) \\ &\times \mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_{n-2} = x_{n-2}) \\ &= \mathbb{P}(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}) \mathbb{P}(X_{n-1} = x_{n-1} | X_{n-2} = x_{n-2}) \\ &\dots \mathbb{P}(X_1 = x_1 | X_0 = x_0) \mathbb{P}(X_0 = x_0) \\ &= Q_n(x_{n-1}, x_n) Q_{n-1}(x_{n-2}, x_{n-1}) \dots Q_1(x_0, x_1) \mu(x_0), \end{aligned}$$

où

- $\mu(x) := \mathbb{P}(X_0 = x)$  est une loi de probabilité sur  $E$  appelée loi initiale de la chaîne de Markov  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
- $Q_n(x, y) = \mathbb{P}(X_n = y | X_{n-1} = x)$  forme une suite de loi de probabilité sur  $E$  telle que

$$\begin{cases} Q_n(x, y) \geq 0, & (x, y) \in E^2 \\ \sum_{y \in E} Q_n(x, y) = 1, & x \in E \end{cases}, \text{ pour tout } n \geq 1,$$

appelée probabilité de transition de  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Lorsque les probabilités de transition dépendent de l'instant considéré alors on parle de chaîne de Markov non-homogène. Dans ce cours, on traitera majoritairement de chaîne de Markov homogène.

### Definition 2 (Matrice sto et chaîne de Markov homogène)

- ① Une matrice  $(Q(x,y))_{(x,y) \in E^2}$  est dite stochastique si

$$\begin{cases} Q(x,y) \geq 0, & (x,y) \in E^2 \\ \sum_{y \in E} Q(x,y) = 1, & x \in E \end{cases}, \text{ pour tout } n \geq 1.$$

- ② Une chaîne de Markov  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est homogène si

$$\mathbb{P}(X_n = y | X_{n-1} = x) = Q(x,y), \text{ pour tout } (n,x,y) \in \mathbb{N} \times E^2.$$

Les probabilités de transitions sont dites stationnaires, et la matrice  $(Q(x,y))_{(x,y) \in E^2}$  est appelée matrice de transition.

## Exemple 2 (Espace d'état fini)

Soit  $E = \{1, \dots, K\}$  l'espace d'état (fini) d'une chaîne de Markov homogène  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Elle est entièrement déterminée par la donnée de

- sa loi initiale  $\mu(\cdot)$
- sa matrice de transition

$$Q = \begin{pmatrix} Q(1,1) & \dots & Q(1,K) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q(K,1) & \dots & Q(K,K) \end{pmatrix}$$

On associe souvent à la matrice de transition d'une chaîne de Markov (homogène, sur un espace d'état fini) un graphe étiqueté et orienté.

### Exemple 3 ((La chaine météo))

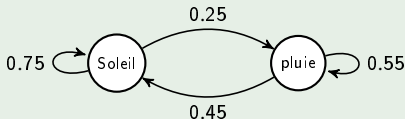
Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un processus à valeur dans l'espace d'état {soleil, pluie} indiquant le temps qu'il fait heure par heure. On suppose que

- S'il fait beau maintenant alors on est sûr qu'il fait beau l'heure d'après à 75%
- S'il pleut maintenant alors on est sûr qu'il pleut l'heure d'après à 45%

La matrice de transition est donnée par

$$Q = \begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.55 & 0.45 \end{pmatrix}$$

et le graphe associé est



#### Exemple 4 (Pierre-O's life back in California)

Soit une chaîne de Markov homogène  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  indiquant la position de Pierre-O à un instant donnée. Il peut se trouver initialement dans un de ces trois endroits de manière équiprobable

- chez lui (Home)
- au travail (Uni)
- dans l'eau (Surf)

On suppose que d'un instant à l'autre il change d'endroit. De chez lui, il a une chance sur trois d'aller surfer. Du travail, il peut aller surfer ou retourner à la maison de manière équiprobable. Quand il est dans l'eau alors il retourne assurément chez lui.

- 1 Donner la loi initiale
- 2 Donner la matrice de transition
- 3 Donner le graphe

### Exemple 5 (La marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ )

Soit  $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variable aléatoire i.i.d. distribuées comm  $\xi$  de loi de probabilité

$$\mathbb{P}(\xi = 1) = p, \text{ et } \mathbb{P}(\xi = -1) = 1 - p.$$

Le processus  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définit par

$$X_n = x_0 + \sum_{i=1}^n \xi_i, \text{ pour } n \geq 1, \text{ avec } x_0 \in \mathbb{Z},$$

est une chaine de Markov homogène de matrice de transition

$$Q(x, y) = \begin{cases} p & \text{si } y = x + 1 \\ 1 - p & \text{si } y = x - 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



### Proposition 1 (Protocole générateur de chaîne de Markov)

Soit  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires i.i.d.,

- sur un espace mesurable  $G$ ,
- distribuées comme  $U$ ,
- indépendantes de  $X_0$ ,

et une application mesurable  $F : E \times G \mapsto E$ . Le processus  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définit par

$$X_{n+1} = F(X_n, U_{n+1})$$

est une chaîne de Markov homogène.

preuve:

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $x_0, \dots, x_{n+1} \in E$ . Posons  $A_n = \{X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n\}$ , alors on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | A_n) &= \mathbb{P}(F(X_n, U_{n+1})) = x_{n+1} | A_n] \\ &= \mathbb{P}(F(x_n, U_{n+1})) = x_{n+1} | A_n] \\ &= \mathbb{P}(F(x_n, U_{n+1})) = x_{n+1}] \\ &= \mathbb{P}(F(x_n, U)) = x_{n+1}].\end{aligned}$$

Le processus  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une chaîne de Markov homogène de matrice de transition

$$Q(x, y) = \mathbb{P}(F(x, U) = y), \quad \forall (x, y) \in E^2.$$



### Exemple 6 (Inventaire)

Entre deux instants, une usine fabrique  $q \in \mathbb{N}^*$  pièces. Les clients achètent  $D_{n+1}$  entre les instants  $n$  et  $n+1$ . On suppose que  $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$  forme une suite de variables aléatoires discrètes i.i.d. On note

$$X_{n+1} = \max(X_n + q - D_{n+1}, 0) = F(X_n, D_{n+1}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

le nombre de pièces en stock.  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une chaîne de Markov homogène de transition

$$\begin{cases} Q(x, 0) = \mathbb{P}(D_1 \geq x + q), \\ Q(x, y) = \mathbb{P}(D_1 = x + q - y), \quad 0 < y < x + q. \end{cases}$$

Lorsque l'espace d'état  $E$  est fini, la loi initiale est donnée par un vecteur  $\mu$  de dimension  $\text{Card}(E)$ . On désigne par  $\mathbf{Q}^n$  la matrice de transition  $\mathbf{Q}$  élevée à la puissance  $n$ . On note

$$\mu \mathbf{P}^n(y) = \sum_{x \in E} \mu(x) \mathbf{P}^n(x, y)$$

## Proposition 2 (Petits calculs)

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une chaîne de Markov homogène, d'espace d'états  $E$ , de loi initiale  $\mu$  et de matrice de transition  $\mathbf{Q}$ . On a les formules suivantes

① Pour tout  $(x_0, \dots, x_n) \in E^{n+1}$ ,

$$\mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = \mu(x_0) \mathbf{Q}(x_0, x_1) \dots \mathbf{Q}(x_{n-1}, x_n)$$

② Pour tout  $(x, y) \in E^2$  et  $p \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathbb{P}(X_{n+p} = y | X_p = x) = \mathbf{Q}^n(x, y)$$

③

$$\mathbb{P}(X_n = y) = \mu \mathbf{Q}^n(y)$$

preuve:

①

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) &= \mathbb{P}(X_n = x_n | X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}) \\ &\times \mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}) \\ &= \mathbb{P}(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}) \mathbb{P}(X_{n-1} = x_{n-1} | X_{n-2} = x_{n-2}) \\ &\dots \mathbb{P}(X_1 = x_1 | X_0 = x_0) \mathbb{P}(X_0 = x_0) \\ &= \mathbf{Q}(x_{n-1}, x_n) \mathbf{Q}(x_{n-2}, x_{n-1}) \dots \mathbf{Q}(x_0, x_1) \mu(x_0) \end{aligned}$$

on retrouve la formule annoncée après ré-arrangements des termes dans le produit.

2

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(X_{n+p} = y | X_p = x) &= \sum_{x_{p+1}, \dots, x_{n+p-1} \in E} \mathbb{P}(X_{n+p} = y, X_{n+p-1} = x_{n+p-1}, \dots, X_{p+1} = x_{p+1} \\
 &\quad | X_p = x) \\
 &= \sum_{x_{p+1}, \dots, x_{n+p-1} \in E} \mathbf{Q}(x, x_{p+1}) \dots \mathbf{Q}(x_{n+p-1}, y) \\
 &= \mathbf{Q}^n(x, y)
 \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} \quad \mathbb{P}(X_n = y) = \sum_{x \in E} \mathbb{P}(X_n = y | X_0 = x) \mathbb{P}(X_0 = x) = \mu \mathbf{Q}^n(y).$$

□

## II. Simulation et calculs matriciels en Python

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une chaîne de Markov homogène sur  $E$ , de matrice de transition  $\mathbf{Q}$ .

### Definition 3 (Etat absorbant)

Un état  $x \in E$  est dit absorbant si  $Q(x, x) = 1$ .

#### Definition 4 (Loi Catégorielle)

La loi catégorielle est la loi de probabilité d'une variable aléatoire discrete  $X$  à valeurs dans  $\{1, \dots, K\}$  valeurs distinctes telles que

$$\mathbb{P}(X = 1) = p_1, \dots, \mathbb{P}(X = K) = p_K,$$

avec

$$p_i \geq 0, \text{ pour } i = 1, \dots, K \text{ et } \sum_{i=1}^K p_i = 1.$$

On note  $X \sim \text{Cat}(p_1, \dots, p_K)$

### Exemple 7 (Chaîne de Markov à 5 états)

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une chaîne de Markov homogène sur  $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , de matrice de transition

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/8 & 1/4 & 0 & 1/8 \\ 1/4 & 1/2 & 1/8 & 1/8 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et de loi initial  $\mu = (0, 1/3, 1/3, 1/3, 0)$ .

- ❶ Cette chaîne de Markov admet-elle des états absorbant? Si oui, lesquels?
- ❷ Donner la loi de probabilité de  $X_4$ , c'est à dire  $\mathbb{P}(X_4 = x)$ ,  $\forall x \in E$
- ❸ On note par  $A$  l'ensemble des états absorbants et

$$\tau_A = \inf\{n \in \mathbb{N} ; X_n \in A\}$$

le temps d'absorption de la chaîne. Calculer  $\mathbb{E}(\tau_A)$  par simulation.

- ❹ Quel est l'état d'absorption le plus probable?

### III. Irréductibilité, périodicité, transience, et récurrence

#### 1. Etats accessibles, communiquants, classes ouvertes/fermées, chaîne irréductible

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une chaîne de Markov homogène d'espace d'état  $E$  et de matrice de transition  $\mathbf{Q}$ .

##### Definition 5 ( $x \rightsquigarrow y$ )

L'état  $y \in E$  est accessible depuis l'état  $x \in E$  s'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que

$$Q^n(x, y) > 0.$$

##### Proposition 3 (La relation d'accessibilité)

Soient  $x, y, z \in E$ ,

- $x \rightsquigarrow x$ ,
- Si  $x \rightsquigarrow y$  et  $y \rightsquigarrow z$  alors  $x \rightsquigarrow z$ .

Sur le graph, cela signifie qu'il existe un chemin de  $x$  à  $y$ .

##### Definition 6 (Etats communiquants)

Soient  $x, y \in E$ . Si  $x \rightsquigarrow y$  et  $y \rightsquigarrow x$  alors  $x$  et  $y$  communiquent. On note  $x \leftrightarrow y$ .

### Definition 7 (Classes d'équivalence)

Une classe d'équivalence est un sous-ensemble  $\mathcal{C} \subset E$  formé d'états communiquant. Formellement

$$\mathcal{C} = \{x, y \in E ; x \leftrightarrow y\}$$

### Remarque 1

- ① On parle de classe d'équivalence car la relation de communication est symétrique, réflexive, et transitive.
- ② l'ensemble des classes d'équivalence forme une partition de l'espace d'état. Ce sont les classes irréductibles de la chaîne de Markov.

### Definition 8 (Irréductibilité)

La chaîne de Markov  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est irréductible si pour tout  $(x, y) \in E^2$ , il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que

$$Q^n(x, y) = \mathbb{P}(X_n = y | X_0 = x)$$

En remarquant que

$$Q^n(x, y) = \sum_{x_1, \dots, x_{n-1}} Q(x, x_1) \dots Q(x_{n-1}, y),$$

on constate l'existence d'une trajectoire de probabilité d'occurrence non nulle avec l'existence de  $x_i, i = 0, \dots, n-1$  tel que  $Q(x_i, x_{i+1}) > 0$  (en convenant que  $x_0 = x$  et  $x_n = y$ ).



## Remarque 2

Dans une chaîne irréductible tous les états communiquent. L'espace d'état est une classe d'équivalence.

## Definition 9 (Classe d'équivalence ouverte/fermé)

Une classe (d'équivalence)  $\mathcal{C}$  est

- ouverte si pour tout  $x \in \mathcal{C}$  il existe  $y \in E/\mathcal{C}$  et  $n \in \mathbb{N}$  tels que  $Q^n(x, y) > 0$ ,
- fermée sinon.

## Exemple 8

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une chaîne de Markov homogène d'espace d'état  $\{1, 2, 3, 4\}$  et de matrice de transition

$$Q = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 1 Combien de classe d'équivalence?
- 2  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est-elle une chaîne irréductible?
- 3 Distinguer les classes ouvertes et fermées.

### Remarque 3

On peut définir une sous-chaine de Markov irréductible à partir d'une classe fermée.

### Definition 10 (La périodicité d'un état)

La période d'un état  $x \in E$  est défini par

$$\begin{aligned} d(x) &= \text{pgcd}\{n \in \mathbb{N}^* ; Q^n(x, x)\} \\ &= \text{pgcd}\{\text{Longueur des trajectoires menant de } x \text{ à } x\} \end{aligned}$$

Si  $d(x) = 1$  alors  $x$  est un état apériodique.

### Remarque 4

- ❶ Si  $Q(x, x) > 0$  alors  $x$  est apériodique.
- ❷ Si  $x \leftrightarrow y$  alors  $d(x) = d(y)$
- ❸ Soit  $\mathcal{C}$  une classe d'équivalence, alors la période d'un état  $x \in \mathcal{C}$  est la période de la classe d'équivalence  $\mathcal{C}$ .

### Exemple 9

Soit  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une chaîne de Markov homogène  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  de matrice de transition

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

- ❶ Chaîne irréductible? Combien de classes d'équivalence? Ouvertes ou fermées?
- ❷ Donner la période de chaque état?

## 2. Etats récurrents, états transients

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une chaîne de Markov homogène d'espace d'état  $E$ . On notera la probabilité et l'espérance conditionnelle de  $X_n$  sachant  $X_0 = x$  de la façon suivante

$$\mathbb{P}(X_n = y | X_0 = x) = \mathbb{P}_x(X_n = y), \quad y \in E, \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(X_n | X_0 = x) = \mathbb{E}_x(X_n).$$

### Definition 11 ( $T_x$ , $S_x$ , et $N_x$ )

Soit  $x \in E$ , on note

- ❶  $T_x = \inf\{n \in \mathbb{N} ; X_n = x\}$  est le temps d'atteinte de l'état  $x$ ,
- ❷  $S_x = \inf\{n \geq 1 ; X_n = x\}$  est le temps de retour à l'état  $x$  (en supposant que  $X_0 = x$ ),
- ❸  $N_x = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{X_n = x\}}$  le nombre de passage par l'état  $x$  (sans compter le point de départ).

### Definition 12 (Etat récurrent/transient)

- ❶ Un état  $x \in E$  est récurrent si

$$\mathbb{P}_x(S_x < \infty) = 1$$

- ❷ Un état  $x \in E$  est transient

$$\mathbb{P}_x(S_x = \infty) > 0$$

Un état est transient lorsqu'il n'est pas récurrent.

Si  $x \in E$  est un état récurrent, alors on est sûr que la chaîne repassera par  $x$ . Si  $x$  est transitoire alors il existe un événement, de probabilité non nulle, pour lequel la chaîne ne repasse pas par  $x$ .

### Theoreme 1 (Caractérisation de la récurrence et de la transience)

Les assertions suivantes sont équivalentes

- ①  $x \in E$  est récurrent  $\Leftrightarrow \mathbb{P}_x(N_x = \infty) = 1$  et  $\sum_{n=1}^{+\infty} Q^n(x, x) = \infty$
- ②  $x \in E$  est transient  $\Leftrightarrow \mathbb{P}_x(N_x < \infty) = 1$  et  $\sum_{n=1}^{+\infty} Q^n(x, x) < \infty$ . De plus, on a

$$\mathbb{P}_x(N_x = k) = \mathbb{P}(S_x = \infty) [1 - \mathbb{P}(S_x = \infty)]^{k-1}, k = 1, 2, \dots, \text{ (Distribution géométrique).}$$

preuve:

On commence par remarquer que pour  $x, y \in E$ ,

$$\mathbb{E}_y(N_x) = \mathbb{E}_y \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{I}_{\{X_n = x\}} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}_y(\mathbb{I}_{\{X_n = x\}}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}_y(X_n = x) = \sum_{n=1}^{+\infty} Q^n(y, x).$$

Posons  $F_n = \{X_n = x, X_m \neq x; m \geq n+1\}$  et  $G = \{X_n \neq x; n \geq 1\}$ , on a

$$\{N_x < \infty\} = G \cup \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n.$$

Comme les événements ci-dessus sont disjoints alors

$$\mathbb{P}_x(N_x < \infty) = \mathbb{P}_x(G) + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}_x(F_n). \quad (1)$$

Or

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x(F_n) &= \mathbb{P}_x(X_n = x, X_m \neq x ; m \geq n+1) \\ &= \mathbb{P}(X_n = x, X_m \neq x ; m \geq n+1 | X_0 = x) \\ &= \mathbb{P}(X_m \neq x ; m \geq n+1 | X_n = x, X_0 = x) \mathbb{P}(X_n = x | X_0 = x) \\ &= \mathbb{P}(X_m \neq x ; m \geq n+1 | X_n = x) \mathbb{P}_x(X_n = x) \text{ (propriété de Markov)} \\ &= \mathbb{P}_x(X_n \neq x ; n \geq 1) \mathbb{P}_x(X_n = x) \text{ (Homogénéité)} \\ &= \mathbb{P}_x(G) Q^n(x, x)\end{aligned}$$

En substituant dans l'équation (1), il vient

$$\mathbb{P}_x(N_x < \infty) = \mathbb{P}_x(G) \left[ 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} Q^n(x, x) \right] = \mathbb{P}_x(G) [1 + \mathbb{E}_x(N_x)]$$

- Si  $x$  est récurrent alors  $\mathbb{P}_x(G) = 0$ , par suite  $\mathbb{P}_x(N_x < \infty) = 0$ ,  $\mathbb{P}_x(N_x = \infty)$ . Cela implique  $\mathbb{E}_x(N_x) = \sum_{n=1}^{+\infty} Q^n(x, x) = \infty$ .
- Si  $x$  est transient alors  $\mathbb{P}_x(G) > 0$  et

$$\mathbb{E}_x(N_x) = \frac{\mathbb{P}_x(N_x < \infty)}{\mathbb{P}_x(G) > 0} - 1 < \infty$$

ce qui implique que  $\sum_{n=1}^{+\infty} Q^n(x, x) < \infty$  et  $\mathbb{P}_x(N_x < \infty) = 1$

Supposons que  $x$  soit transient. Pour montrer que  $N_x$  suit une loi géométrique, nous avons besoin du lemme suivant

### Lemme 1

$$\mathbb{P}_x(N_x = 0) = \mathbb{P}(S_x = \infty) \text{ et } \mathbb{P}_x(N_x = k | S_x < \infty) = \mathbb{P}_x(N_x = k - 1), \text{ pour } k \geq 1.$$

preuve:

L'égalité  $\mathbb{P}_x(N_x = 0) = \mathbb{P}(S_x = \infty)$  est évidente au vu de la définition de  $S_x$ . Nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x(N_x = k | S_x < \infty) &= \mathbb{P}_x(N_x = k | S_x < \infty, X_0 = x) \\ &= \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} = k | S_x < \infty, X_{S_x} = x, X_0 = x\right) \\ &= \mathbb{P}\left(1 + \sum_{k=S_x+1}^{+\infty} = k | S_x < \infty, X_{S_x} = x\right) \\ &= \mathbb{P}\left(1 + \sum_{k=S_x+1}^{+\infty} = k | S_x < \infty, X_{S_x} = x\right) \\ &= \mathbb{P}(N_x = k - 1) \end{aligned}$$

□

Par application du lemme, il vient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x(N_x = k) &= \mathbb{P}_x(N_x = k | S_x < \infty) \mathbb{P}_x(S_x < \infty) \\ &= \mathbb{P}_x(N_x = k - 1) \mathbb{P}_x(S_x < \infty) \\ &= \mathbb{P}_x(N_x = k - 1 | S_x < \infty) \mathbb{P}_x(S_x < \infty)^2 \\ &= \mathbb{P}_x(N_x = k - 2) \mathbb{P}_x(S_x < \infty)^2 \\ &= \dots \\ &= \mathbb{P}_x(N_x = 0) \mathbb{P}_x(S_x < \infty)^k. \\ &= \mathbb{P}_x(S_x = \infty) \mathbb{P}_x(S_x < \infty)^k.\end{aligned}$$

### Remarque 5

Une chaîne de Markov irréductible, à espaces d'états fini, est récurrente au sens où tout les états sont récurrents.

Les états d'une classe ouverte sont transients, ceux d'une classe fermée sont récurrents.

### Définition 13 (Filtration)

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé. Une filtration  $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de sous-tribus de  $\mathcal{F}$  telle que  $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$



### Exemple 10

La filtration  $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n)$  est la filtration naturelle de  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Ce sont les tribus engendré par toutes les trajectoires passées de  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

### Definition 14 (Temps d'arrêt)

Un temps d'arrêt  $\tau$  est une variable aléatoire telle que  $\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

### Exemple 11

$T_x$  et  $S_x$  sont des temps d'arrêts.

### Theoreme 2 (Propriété de Markov forte)

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une chaîne de Markov homogène et  $\tau$  un  $\mathcal{F}_n$ -temps d'arrêt alors  $(\hat{X}_n = X_{\tau+n})_{n \in \mathbb{N}}$  de loi initiale  $\hat{\mu} \stackrel{\mathcal{D}}{=} X_\tau$  et de même probabilités de transition que  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

### III. Récurrence positive et loi invariante

#### 1. Récurrence positive

Soit une chaîne de Markov  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  homogène et irréductible sur un espace d'état  $E$ .

#### Proposition 4 (Temps moyen passé en $x$ )

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{X_k=x} = \frac{1}{\mathbb{E}_x(S_x)} \text{ p.s.}$$

On distingue deux cas

- Soit  $\mathbb{E}_x(S_x) < \infty$ ,  $\forall x \in E$  alors la chaîne est récurrente positive
- Soit  $\mathbb{E}_x(S_x) = \infty$ ,  $\forall x \in E$  alors la chaîne est transiente ou récurrente nulle

preuve

Posons  $m(n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{X_k=x}$ . Si la chaîne est transiente alors  $\mathbb{P}(S_x = \infty) > 0$ ,  $\forall x \in E$  et donc  $\mathbb{E}_x(S_x) = \infty$ . De plus on remarque que  $\forall \omega \in \Omega$   $m(n)[\omega]$  (on comprend  $\Omega$  comme l'ensemble des trajectoires possibles du processus) devient constant pour  $n$  suffisamment grand (comme  $x$  est transient alors au bout d'un moment la chaîne ne visite plus  $x$ ), cela implique que  $m(n)/n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  p.s.

Supposons la chaîne récurrente, on introduit la suite de variables aléatoires

$$S_k = \inf\{n > S_{k-1} ; X_n = x\}, \quad k \geq 1$$

qui représente les temps de  $k^{\text{eme}}$  retour en  $x$ . On convient que  $S_0 = 0$  et  $S_1 = S_x$ . Soit  $\delta_k^S = S_k - S_{k-1}$ ,  $k \geq 1$  les temps séparant deux passages par  $x$  consécutifs.

## Lemme 2

$(\Delta_n^S)_{n \geq 1}$  est une i.i.d. de variables aléatoires distribuées comme  $S_x | X_0 = x$

preuve: On va se contenter de montrer le résultat pour les deux premiers délais. On a pour  $p, q \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x(S_1 = p, \Delta_2^S = q) &= \mathbb{P}(\Delta_2^S = q | S_1 = p, X_0 = x) \mathbb{P}_x(S_1 = p) \\ &= \mathbb{P}(X_{p+q} = x, \bigcap_{k=p+1}^{p+q-1} \{X_k \neq x\} | X_p = x, \bigcap_{k=1}^{p-1} \{X_k \neq x\}, X_0 = x) \mathbb{P}_x(S_1 = p) \\ &= \mathbb{P}(X_{p+q} = x, \bigcap_{k=p+1}^{p+q-1} \{X_k \neq x\} | X_p = x) \mathbb{P}_x(S_1 = p) \\ &= \mathbb{P}(X_q = x, \bigcap_{k=1}^{q-1} \{X_k \neq x\} | X_0 = x) \mathbb{P}_x(S_1 = p) \\ &= \mathbb{P}_x(S_1 = q) \mathbb{P}_x(S_1 = p) = \mathbb{P}_x(S_x = q) \mathbb{P}_x(S_x = p)\end{aligned}$$

□

En vertu de la loi forte des grands nombres, il vient

$$\frac{S_n}{n} = \frac{\sum_{k=1}^n \Delta_k^S}{n} \rightarrow \mathbb{E}_X(S_X) \text{ p.s.}$$

Comme  $x$  est récurrent alors  $m(n) \rightarrow \infty$  et

$$\frac{S_{m(n)}}{m(n)} \rightarrow \mathbb{E}(S_X)$$

Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $m(n)[\omega] = l$ , on a  $S_l[\omega] \leq n \leq S_{l+1}[\omega]$  (On retourne  $l$  fois en  $x$  avant  $n$  puis la  $l+1^{\text{me}}$  visite a lieu après  $n$ ). Par suite,

$$\frac{S_{m(n)}}{m(n)} \leq \frac{n}{m(n)} \leq \frac{S_{m(n)+1}}{m(n)} = \frac{S_{m(n)+1}}{m(n)+1} \frac{m(n)+1}{m(n)}$$

Théorème des gendarmes  $\Rightarrow \frac{n}{m(n)} \rightarrow \mathbb{E}_X(S_X)$ .

Vérifions que si  $\mathbb{E}_X(S_X) = \infty$  alors  $\mathbb{E}_Y(S_Y) = \infty$ ,  $\forall Y \in E$ .

Notons que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}_Y \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{X_k=Y} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Q^k(y, y)$$

d'une part et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}_Y \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{X_k=Y} \right) = \frac{1}{\mathbb{E}_Y(S_Y)}$$

en vertu du théorème de convergence dominée et le résultat de convergence précédent d'autre part. L'irréductibilité de la chaîne entraîne l'existence de  $r, s \geq 1$  tels que  $Q^r(x, y) > 0$  et  $Q^s(y, x) > 0$ . On remarque que  $Q^{r+k+s}(x, x) \geq Q^r(x, y) Q^k(y, y) Q^s(y, x)$  puis

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Q^k(y, y) \leq \frac{1}{n Q^r(x, y) Q^s(y, x)} \sum_{k=1}^n Q^{r+k+s}(x, x) \rightarrow 0.$$

On en déduit que  $\mathbb{E}_y(S_y) = \infty$ . On peut montrer de manière équivalente que  $E_x(S_x) < \infty \Rightarrow E_y(S_y) < \infty, y \in E$

□

#### Remarque 6

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Q^k(x, x) \rightarrow \begin{cases} +\infty, & \text{récurrence nulle,} \\ 1/\mathbb{E}_x(S_x), & \text{récurrence positive.} \end{cases}$$

## 2. Loi invariante et stabilisation de la chaîne de Markov

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une chaîne de Markov irréductible sur un espace d'état  $E$ , de matrice de transition  $\mathbf{Q}$ .

### Definition 15 (Loi invariante)

Soit  $\mathbf{Q}$  la matrice de transition sur  $E$ . Une probabilité  $\pi$  est invariante si  $\pi \mathbf{Q} = \pi$ .

### Remarque 7

- 1 La notion de probabilité invariante est liée à la notion de stationnarité (comportement de la chaîne de Markov à horizon de temps long). En effet, si la loi initiale vérifie  $\mu = \pi$  alors  $\mu \mathbf{Q}^n = \mu$ . La loi de  $X_n$  est indépendante de  $n$ .
- 2 Une mesure invariante  $\pi$  sur  $E$  n'est pas nécessairement unique, en effet  $\lambda \pi$ , pour  $\lambda \in \mathbb{R}$  est aussi invariante. Si  $0 < \sum_{x \in E} \pi(x) < \infty$ , on normalise pour obtenir une mesure de probabilité avec

$$\frac{\pi(x)}{\sum_{x \in E} \pi(x) < \infty}$$

### Definition 16 (Chaine de Markov réversible)

$(X_{n \in \mathbb{N}})$  est dite réversible si

$$(X_1, \dots, X_T) \stackrel{\mathcal{D}}{=} (X_T, \dots, X_1), \quad \forall T \in \mathbb{N}.$$

Soit  $\lambda$  une mesure de probabilité sur  $E$

### Definition 17 (Chaine de Markov réversible)

$\lambda$  réversible si

$$\lambda(x)Q(x, y) = \lambda(y)Q(y, x), \quad \forall x, y \in E.$$

### Lemme 3

$\lambda$  est réversible  $\Rightarrow \lambda$  est invariante .

### Theoreme 3

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une chaine de Markov irréductible.

- (i) *Transiente ou récurrente nulle  $\Rightarrow$  Pas de probabilité invariante*
- (ii) *Récurrente positive  $\Rightarrow$  Probabilité invariante unique telle que*  
 $\pi(x) = 1/\mathbb{E}_x(S_x), \quad \forall x \in E$

preuve: D'après la Proposition 4 et la convergence dominée, on a

$$\mathbb{E}_\mu \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{I}_{X_k=x} \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{P}_\mu(X_k=x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mu Q^k(x) \rightarrow \frac{1}{\mathbb{E}_x(S_x)} := \pi(x)$$

pour toute loi initiale  $\mu$  et en particulier  $\forall x, y \in E$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mu Q^k(y, x) \rightarrow \pi(x).$$

- (i) Supposons la chaîne transiente ou récurrente nulle. Supposons l'existence d'une probabilité variable  $\mu$  alors on a  $\mathbb{P}_\mu(X_k=x) = \mu(x)$ ,  $\forall x \in E$  et d'autre part

$$\mathbb{E}_\mu \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{I}_{X_k=x} \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{P}_\mu(X_k=x) \rightarrow 0.$$

On en déduit que nécessairement  $\mu(x) = 0$ ,  $\forall x \in E$ , ce qui est impossible pour une probabilité.



(ii) Supposons que la chaîne soit récurrente positive. Par les mêmes arguments que précédemment, on a que s'il existe  $\mu$  probabilité invariante alors  $\mu = \pi$  ce qui implique son unicité. Nous devons vérifier que  $\pi$  est bien une probabilité invariante, pour l'instant nous savons simplement que  $\pi(x)$ ,  $x \in E$ . On a, par le lemme de Fatou, l'inégalité

$$\begin{aligned} \sum_{x \in E} \pi(x) &= \sum_{x \in E} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mu Q^k(x) \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{x \in E} \mu Q^k(x) \\ &= 1 \end{aligned}$$

et par les mêmes arguments

$$\begin{aligned} \sum_{x \in E} \pi(x) Q(x, y) &= \sum_{x \in E} Q(x, y) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mu Q^k(x) \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mu Q^{k+1}(y) \\ &= \mu(y) \end{aligned}$$

Or nous savons que

$$\begin{aligned} \sum_{y \in E} \sum_{x \in E} \pi(x) Q(x, y) &= \sum_{x \in E} \pi(x) \sum_{y \in E} Q(x, y) \\ &= \sum_{x \in E} \pi(x) \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure que  $\pi(x)Q(x,y) = \pi(y)$  car  $\sum_{y \in E} \pi(y) < \infty$ .  $\pi$  est bien une mesure invariante, est-elle une probabilité?

$$\begin{aligned}\pi(x) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \pi Q^n(x) \\ &= \sum_{y \in E} \pi(y) \frac{1}{n} \sum Q^n(y, x) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi(x) \sum_{y \in E} \pi(y) \text{ (Convergence dominée)}\end{aligned}$$

ce qui implique que  $\sum_{y \in E} \pi(y) = 1$

### Remarque 8

Nous venons de montrer que pour une chaîne irréductible, récurrente positive, la suite  $(\pi Q^n(x))$  converge en moyenne de Césaro vers  $\pi(x)$  avec

$$\frac{\mu Q(x) + \mu Q^2(x) + \dots + \mu Q^n(x)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi(x).$$

Mais que dire de la convergence de  $\mu Q^n(x) = \mathbb{P}_\mu(X_n = x)$  au sens usuel? La chaîne de Markov  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge-t-elle en loi vers une variable aléatoire  $X_\infty$ ? Cette convergence est établie sous réserve d'apériodicité.

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une chaîne de Markov irréductible, récurrente positive.

### Proposition 5

*Si  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est apériodique alors il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$  on a*

$$Q^n(x, y) > 0 \text{ pour tout } x, y \in E.$$

preuve:

Soit  $I(x) = \{n \in \mathbb{N}^* ; Q^n(x, x) > 0\}$ . On note que si  $p, q \in I(x)$  alors  $p + q \in I(x)$ .

### Lemme 4

*Soit un ensemble  $A \subset \mathbb{N}^*$ , stable par addition de pgcd égal à 1 alors  $A$  contient tout les entiers plus grand que  $N$ .*

preuve:

Soit  $A' = A \cup \{0\}$ , alors  $A' - A'$  est un sous groupe de  $\mathbb{Z}$  qui est donc de la forme  $d\mathbb{Z}$ , avec  $d$  le plus petit élément non nul de  $A'$ . Comme  $A'$  contient  $A$  alors  $d$  divise tout les éléments de  $A$  donc  $d = 1$ . On en déduit qu'il existe  $a, b \in A'$  tels que  $a + 1 = b$ .

Nécessairement,  $a \in A$ ,

- si  $b = 0$  alors  $a = 1$  et  $A$  contient tout les entiers naturels
- Si  $b \in A$  alors  $N = b^2$  convient car pour  $n \geq N$ , on a pour  $0 \leq r < b$ ,

$$n = b^2 + bq + r = b(q + 1 - r) + (b + 1)r \in A$$

□

$I(x) \subset \mathbb{N}$  est stable par addition, il existe  $n_1 \in \mathbb{N}$  tel que  $I(x)$  contient tout les entiers supérieurs à  $n_1$  et  $Q^n(x, x) > 0$  pour tout  $n \geq n_1$ . Par irréductibilité, on a aussi pour tout  $z, y \in E$  l'existence de  $n_2, n_3 \in \mathbb{N}$  tels que  $Q^{n_2}(z, x) > 0$  et  $Q^{n_3}(x, y) > 0$ . On en déduit que

$$Q^{n_2+n_3}(z, y) \geq Q^{n_2}(z, x)Q^{n_3}(x, y) > 0$$

On choisit alors  $N = n_1 + n_2 + n_3$ .

### Definition 18 (Chaîne de Markov couplée)

Soit  $(X'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une copie indépendante de  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , on appelle  $((X_n, X'_n))_{n \in \mathbb{N}}$  la chaîne couplée.

- $(X_n, X'_n)$  est une chaîne de Markov sur  $E \times E$  de matrice de transition  $\overline{Q}[(x, x'), (y, y')] = Q(x, y)Q(x', y')$
- Soit  $\mu$  et  $\nu$  les lois initiales respectives de  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(X'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  alors la loi initiale de  $((X_n, X'_n))_{n \in \mathbb{N}}$  est la mesure produit  $\mu \otimes \nu$

### Proposition 6

*Si  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une chaîne de Markov irréductible, récurrente positive et apériodique alors la chaîne couplée  $((X_n, X'_n))_{n \in \mathbb{N}}$  est irréductible et récurrente positive.*

preuve:

On vérifie que, il existe  $N \in \mathbb{N}$  telle que  $\forall n \geq N$

$$\overline{Q}^n[(x, x'), (y, y')] = Q^n(x, y)Q^n(x', y') > 0$$

d'après la Proposition 5.  $((X_n, X'_n))_{n \in \mathbb{N}}$  est donc irréductible. On note ensuite que

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \overline{Q}^k[(x, x'), (y, y')] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Q^k(x, y)Q^k(x', y') \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Q^k(x, y) < \infty$$

et donc que  $((X_n, X'_n))_{n \in \mathbb{N}}$  est récurrente positive.

## Theoreme 4

Si  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est apériodique alors la chaîne se stabilise au sens où, pour toutes lois initiales  $\mu, \nu$  sur  $E$ , on a

$$\sup_{y \in E} |\mu Q^n(y) - \nu Q^n(y)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

et en particulier

$$\mu Q^n(y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi(y).$$

preuve:

Soit  $((X_n, X'_n))_{n \in \mathbb{N}}$  la chaîne couplée de  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de loi initiale  $\mu \otimes \nu$  et  $\tau_x = \inf\{n \in \mathbb{N}^* ; (X_n, X'_n) = (x, x)\}$ . On a

$$\begin{aligned} \mu Q^n(y) &= \mathbb{P}_{\mu \otimes \nu}(X_n = y) \\ &= \mathbb{P}_{\mu \otimes \nu}(X_n = y, \tau_x > n) + \sum_{k=1}^n \mathbb{P}_{\mu \otimes \nu}(X_n = y, \tau_x = k) \\ &= \mathbb{P}_{\mu \otimes \nu}(X_n = y, \tau_x > n) + \sum_{k=1}^n \mathbb{P}_{\mu \otimes \nu}(X_n = y, X_k = x, \tau_x = k) \\ &= \mathbb{P}_{\mu \otimes \nu}(X_n = y, \tau_x > n) + \sum_{k=1}^n \mathbb{P}_{\mu \otimes \nu}(X_n = y | X_k = x) \mathbb{P}_{\mu \otimes \nu}(\tau_x = k) \\ &= \mathbb{P}_{\mu \otimes \nu}(X_n = y, \tau_x > n) + \sum_{k=1}^n \mathbb{P}_x(X_{n-k} = y) \mathbb{P}_{\mu \otimes \nu}(\tau_x = k) \end{aligned}$$

d'une part et

$$\nu Q^n(y) = \mathbb{P}_{\mu \otimes \nu}(X'_n = y, \tau_x > n) + \sum_{k=1}^n \mathbb{P}_x(X'_n = y) \mathbb{P}_{\mu \otimes \nu}(\tau_x = k)$$

d'autre part. On en déduit que

$$|\mu Q^n(y) - \nu Q^n(y)| = |\mathbb{P}_{\mu \otimes \nu}(X_n = y | \tau_x > n) - \mathbb{P}_{\mu \otimes \nu}(X'_n = y | \tau_x > n)| \mathbb{P}_{\mu \otimes \nu}(\tau_x > n) \leq K \mathbb{P}_{\mu \otimes \nu}(\tau_x > n)$$

avec  $K$  une constante. On constate que

$$\mu Q^n(y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi(y).$$

en choisissant  $\nu = \pi$ .

### Proposition 7 (Loi stationnaire et espace d'état fini)

*Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une chaîne de Markov homogène dont l'espace d'état est fini.*

- *Il existe au moins une loi stationnaire*

*Si la chaîne  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est irréductible alors cette loi est unique.*

Idée de la preuve:

On montre que 1 est une valeur propre et que l'on peut trouver un vecteur propre vérifiant les conditions pour être une loi de probabilité. Si la chaîne est irréductible, les états sont récurrents positifs et la loi invariante est donc unique.

### Exemple 12 ( $\pi = (\pi_1 \ \pi_2 \ \pi_3)$ )

Soit  $\{X_t ; t \in \mathbb{N}\}$  une chaîne de Markov homogène sur un espace d'état  $E = \{1, 2, 3\}$  et de matrice de transition

$$Q = \begin{pmatrix} 3/5 & 2/5 & 0 \\ 1/5 & 3/5 & 1/5 \\ 0 & 3/5 & 2/5 \end{pmatrix}.$$

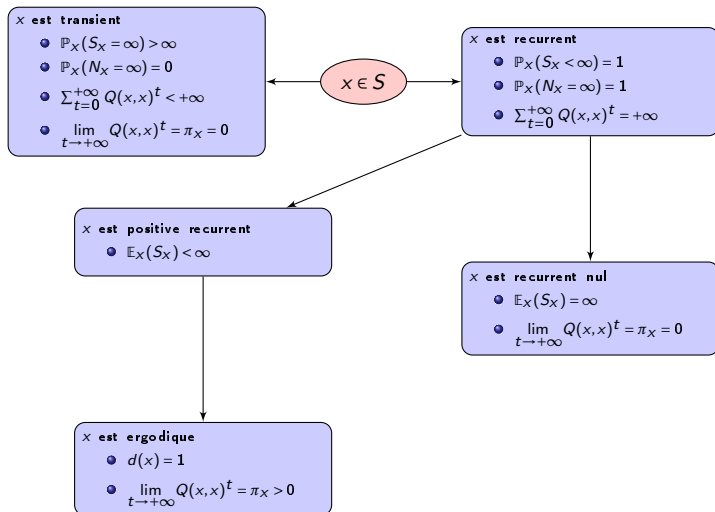
- ❶ Justifiez l'existence et l'unicité d'une loi invariante
- ❷ Pour chaque  $x \in E$ , donnez  $\pi_x$  en résolvant  $\begin{cases} \pi \cdot Q = \pi, \\ \sum_{x \in E} \pi_x = 1. \end{cases}$
- ❸ pour chaque  $x \in S$ , donnez  $\mathbb{E}_x(S_x)$ .

Solution:

- ❶ La chaîne de Markov est irréductible avec un espace d'état fini  
→ Il existe une unique distribution stationnaire
- ❷ La loi de probabilité invariante est obtenue en résolvant le système  $\begin{cases} \pi \cdot Q = \pi, \\ \sum_{x \in E} \pi_x = 1, \end{cases}$  et  $\pi = (3/11 \ 6/11 \ 2/11)$ .
- ❸ On en déduit que  $\mathbb{E}_1(S_1) = 11/3$ ,  $\mathbb{E}_2(S_2) = 11/6$  and  $\mathbb{E}_3(S_3) = 11/2$ .



# Classification d'un état



Que peut-on dire d'une chaîne de Markov qui n'est pas irréductible?

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une chaîne de Markov homogène sur un espace d'état fini. Ce dernier se divise en  $k = k_1 + k_2$  classes d'équivalence avec  $O_1, \dots, O_{k_1}$  les classes ouvertes et  $F_1, \dots, F_{k_2}$  les classes fermées.

- $x \in \bigcup_{i=1}^{k_1} O_i$  alors  $x$  est transient et  $\pi(x) = 0$
- Pour chaque classe fermée  $F_i$ ,  $i = 1, \dots, k_2$ ,
  - On définit une sous matrice de transition  $Q_{F_i}$ , de loi stationnaire unique  $\pi_{F_i}$
  - On définit le vecteur  $\Pi_{F_i} = \begin{pmatrix} 0 & \pi_{F_i} & 0 \end{pmatrix}$  de dimension  $\text{Card}(E)$ .

Les lois stationnaires de  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admettent la forme suivante

$$\pi = \sum_{i=1}^{k_2} \alpha_i \Pi_{F_i}, \text{ avec } \begin{cases} 0 \leq \alpha_i \leq 1 \\ \sum_{i=1}^{k_2} \alpha_i = 1 \end{cases}$$

S'il n'y a qu'une seule classe fermée ( $k_2 = 1$ ) alors la loi stationnaire est unique et  $\alpha_1 = 1$ .

### Exemple 13

Soit  $\{X_t ; t \in \mathbb{N}\}$  une chaîne de Markov sur un espace d'état  $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  and de matrice de transition

$$Q = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- ❶  $\{X_t ; t \in \mathbb{N}\}$  est-elle irréductible, combien de classe de communication, ouvertes/fermées?
- ❷ Donnez la forme générale des lois invariantes.

Solution:

- ❶ La chaîne n'est pas irréductible
  - Une classe ouverte  $O_1 = \{1, 2\}$ ,  $\pi_1 = \pi_2 = 0$
  - Deux classes fermées  $C_1 = \{3, 4\}$  and  $C_2 = \{5\}$ 
    - de lois invariantes  $\pi_1 = (1/3 \ 2/3)$  and  $\pi_2 = (1)$

2 Soient

$$\Pi_{C_1} = (0 \ 0 \ 1/3 \ 2/3 \ 0),$$

et

$$\Pi_{C_2} = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1).$$

Les lois invariantes de  $\{X_t ; t \in \mathbb{N}\}$  sont de la forme

$$\pi = \alpha \Pi_{C_1} + (1 - \alpha) \Pi_{C_2}, \text{ pour tout } \alpha \in [0, 1].$$

### 3. Théorèmes ergodiques

Le théorème ergodique pour les chaînes de Markov est l'analogue de la loi des grands nombres pour les variables aléatoires iid. Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une chaîne de Markov homogène irréductible et récurrente positive sur un espace d'état  $E$  et de loi invariante  $\pi$ . Le résultat suivant est démontré dans le cas où l'espace d'état est fini

#### Théorème 5 (Théorème ergodique)

Soit  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\int |f| d\pi = \sum_{x \in E} f(x)\pi(x) < \infty$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(X_k) = \int f(X) d\pi$$

preuve:

Supposons l'espace d'état fini, alors

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(X_k) = \sum_{x \in E} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x) \mathbb{I}_{X_k=x} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{x \in E} f(x) \pi(x)$$

#### Remarque 9 (Algorithme MCMC)

Les méthodes de simulation de Monte Carlo par chaîne de Markov consiste à estimer l'intégrale  $\int f(X) d\pi$  par  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(X_k)$ , où  $X_1, \dots, X_n$  sont les points d'une trajectoire d'une chaîne de Markov dont la loi invariante est  $\pi$ .

## Corollaire 1

Soit  $\nu$  une mesure de probabilité sur  $E^{m+1}$  définie par

$$\nu(x_1, \dots, x_{m+1}), \quad x_1, \dots, x_{m+1} \in E^{m+1}.$$

Si  $g : E^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction telle que  $\int |g| d\nu < \infty$  alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g(X_k, X_{k+1}, \dots, X_{k+m}) = \int g d\nu \text{ p.s..}$$

Idée de la preuve:

$\forall m \geq 1$ , on montre que

$$Z_k = (X_k, \dots, X_{k+m}), \quad k \in \mathbb{N}$$

est une chaîne de Markov irréductible sur

$$F = \{(x_1, \dots, x_{m+1}) \in E^{m+1} ; Q(x_i, x_{i+1}), 1 \leq i \leq m\}$$

On montre que  $\nu$  est la seule loi invariante puis le résultat suit par application du théorème ergodique.

### Remarque 10

Une démonstration du théorème ergodique consiste à remarquer que les trajectoires entre deux passages par  $x$  (appelées excursions) de la forme

$$(X_{S_n}, X_{S_n+1}, \dots, X_{S_{n+1}-1})$$

sont les réalisations d'une variable aléatoire i.i.d. puis à appliquer la loi des grands nombre.

### V. La marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

La marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}$  est une chaîne de Markov  $(X_n)$  dont l'espace d'état est  $\mathbb{Z}$  définie par

$$X_n = X_{n-1} + \xi_n, \quad n \geq 1.$$

où  $\xi_1, \xi_2, \dots$ , sont des variables aléatoires i.i.d. distribuées comme  $\xi$  avec

$$\mathbb{P}(\xi = 1) = p \text{ et } \mathbb{P}(\xi = -1) = 1 - p.$$

#### Theoreme 6

*La marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}$  est irréductible et*

- *Récurrente si  $p = 1/2$ .*
- *Transiente sinon.*

preuve:

Pour montrer ce résultat, on étudie la distribution du temps  $S_0$  de retour à 0. On a

$$\mathbb{P}_0(S_0 < \infty) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(S_0 = n).$$

On remarque que les trajectoires allant de 0 à 0 sont nécessairement de longueur paire et

$$\mathbb{P}(S_0 = 2n+1) = 0, \text{ pour } n = 0, 1, \dots$$

et

$$\mathbb{P}_0(S_0 < \infty) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(S_0 = 2n).$$



On a exactement  $\binom{2n}{n}$  trajectoires possibles, celle qui nous intéresse (pour lesquels  $S_0 = 2n$ ) sont celles qui ne repassent pas par 0 entre l'instant 0 et  $2n$  (On parle d'excursions). Leur nombre est donné par

$$2 \times C_{n-1} = 2 \times \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} \quad (2)$$

### Definition 19 (Nombre de Catalan)

Les nombres de Catalan sont définis par

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}, \text{ pour } n \geq 0,$$

et vérifie

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^n C_k C_{n-k} \text{ pour } n \geq 1 \quad (3)$$

### Exemple 14 (Mots de Dyck)

$C_n$  correspond aux nombre de mots de  $2n$  lettres comprenant respectivement  $n$  A et  $n$  B, tels que lu de gauche à droite le nombre de A demeure supérieur ou égal au nombre de B. La relation de récurrence (3) s'explique par le fait qu'un mot de Dyck contenant plus de deux lettres est obtenu par la concaténation de deux mots de Dyck.

Dans le problème considéré, on s'intéresse aux nombres de mots tels que le nombre de  $A$  (interprétés comme des  $+1$ ) soit strictement supérieur au nombre de  $B$  (interprétés comme des  $-1$ ). Alors notre mot commence nécessairement par un  $A$  et fini sur un  $B$ . La portion entre ce  $A$  et ce  $B$  est un mot de Dyck contenant  $2n-2$  lettres. On a  $C_{n-1}$  possibilités. Le facteur 2 dans (2) s'explique par la symétrie du problème puisque l'on peut considérer les trajectoires dans lesquels les  $-1$  dominent les  $+1$ . La probabilité d'une trajectoire quelconque de longueur  $2n$  contenant  $n+1$  et  $n-1$  est donnée par  $p^n(1-p)^n$ , on en déduit que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_0 < \infty) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(S_0 = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} 2 C_{n-1} [p(1-p)]^n \\ &= 2p(1-p) \sum_{k=0}^{+\infty} C_n [p(1-p)]^n = 2p(1-p) C[p(1-p)],\end{aligned}\quad (4)$$

où  $C(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n$ . Or, on a

$$\begin{aligned}C(x) &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n x^n = 1 + x \sum_{n=0}^{+\infty} C_{n+1} x^n \\ &= 1 + x \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n C_k C_{n-k} x^n = 1 + x \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=k}^n C_k C_{n-k} x^n \\ &= 1 + x \sum_{k=0}^{+\infty} C_k \sum_{n=0}^n C_n x^{n+k} = 1 + x C(x)^2\end{aligned}$$

Par suite,  $C(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$ . En substituant dans (4), on obtient

$$\mathbb{P}(S_0 < \infty) = 1 - |1 - 2p|$$

On en déduit que si  $p \neq 1/2$  alors  $\mathbb{P}(S_0 < \infty) < 1$  et la chaîne est transiente sinon  $\mathbb{P}(S_0 < \infty) = 1$  et la chaîne est récurrente.

### Remarque 11 (Divergence lorsque $p \neq 1/2$ )

Dans le cas d'une chaîne de Markov  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sur un espace ordonné et dénombrable (comme  $\mathbb{N}$  ou  $\mathbb{Z}$ ), si la chaîne est transiente alors elle diverge vers  $\infty$ . Par exemple dans le cas de la chaîne aléatoire sur  $\mathbb{Z}$ , on a par la loi des grands nombre

$$\frac{X_n}{n} = \frac{X_0}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2p - 1.$$

On en déduit que

$$X_n \rightarrow \begin{cases} -\infty, & \text{si } p < 1/2, \\ 0, & \text{si } p = 1/2, \\ +\infty, & \text{si } p > 1/2. \end{cases}$$

### Exemple 15 (Le problème de la ruine du parieur)

Un joueur entre dans un casino avec  $x$ \$ en poche, il paye 1\$ pour participer,

- Il gagne et remporte 2\$ avec une probabilité  $p$
- Il perd avec une probabilité  $q = 1 - p$

sa richesse après chaque partie est modélisée par un processus  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . On suppose qu'il rentre chez lui si sa richesse devient nulle ou atteint un niveau  $a \geq x$ . On note  $\phi(x, a)$  la probabilité qu'il rentre à la maison ruiné.

### Proposition 8

*La probabilité de ruine est donnée par*

$$\phi(x, a) = \frac{(q/p)^x - (q/p)^a}{1 - (q/p)^a}.$$

preuve:

On note que

$$\phi(a, a) = 0 \text{ et } \phi(0, a) = 1$$

Soit  $0 < x < a$ , lors de la première partie,

- Il perd avec probabilité  $q$  et repart avec un niveau de richesse  $x - 1$ ,
- Il gagne avec probabilité  $p$  et repart avec un niveau de richesse  $x + 1$ .

On en déduit que

$$\phi(x, a) = p\phi(x+1, a) + q\phi(x-1, a) \quad (5)$$

De plus, comme  $p+q=1$  alors

$$\phi(x, a) = p\phi(x, a) + q\phi(x, a). \quad (6)$$

L'opération (5)-(6) donne

$$\phi(x+1, a) - \phi(x, a) = \frac{q}{p} [\phi(x, a) - \phi(x-1, a)]. \quad (7)$$

Soit

$$u_k = \phi(k+1, a) - \phi(k, a), \quad k = 0, \dots, a-1$$

en remplaçant dans (7) cela donne

$$u_k = \left(\frac{q}{p}\right) u_{k-1} = \dots = \left(\frac{q}{p}\right)^k u_0. \quad (8)$$

En sommant (8) pour  $k$  allant de 1 à  $a-1$ , on obtient

$$-\phi(1, a) = [1 - \phi(1, a)] \frac{q/p - (q/p)^a}{1 - q/p} \Leftrightarrow \phi(1, a) = \frac{q/p - (q/p)^a}{1 - (q/p)^a} \quad (9)$$

En sommant (8) pour  $k$  allant de 1 à  $x-1$ , on obtient

$$\phi(x, a) - \phi(1, a) = [1 - \phi(1, a)] \frac{q/p - (q/p)^x}{1 - q/p} \quad (10)$$

L'insertion de (9) dans (10) donne

$$\phi(x, a) = \frac{(q/p)^x - (q/p)^a}{1 - (q/p)^a}$$

□

## Exemple 16 (Le problème de la double dépense dans les transactions validées par *blockchain*)

Marie achète un bien à Julien en l'échange de 10 BTCs.

- Julien attends que la transactions intègre un bloc, voir que plusieurs blocs soient créés avant d'expédier le bien.
- Une fois le bien reçu, Marie émet un transaction transférant les mêmes BTCs vers un porte-monnaie lui appartenant.
- Des mineurs malhonnêtes travaillent sur une chaine concurrente à la chaine de bloc principale
  - les deux chaines sont identiques à la transaction frauduleuse prêt.
- Si la chaine malhonnête rattrape la chaine principale (en termes de nombre de bloc) alors la transaction de Marie à Julien est remplacée par la transaction de Marie à elle-même.

On modélise par  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la différence entre les nombres de blocs dans la chaine honnête et malhonnêtes à l'instant  $n$ , on suppose qu'à chaque instant un bloc est créé, il rejoint

- La chaine honnête avec probabilité  $p$ ,
- La chaine malhonnête avec probabilité  $q = 1 - p$ .

On suppose que la chaine honnêtes a  $x$  blocs d'avance. La probabilité de succès de la double dépense est donnée par

$$\psi(x) = \mathbb{P}(X_n = 0, \text{ pour un certain } n \in \mathbb{N} | X_0 = x) = \lim_{a \rightarrow +\infty} \phi(x, a) = \left(\frac{q}{p}\right)^x.$$

Pour plus de détails, on pourra lire le *white paper* de Satoshi Nakamoto [4]

Mes notes se basent sur les documents [5, 2, 1, 3].



Maryann Hohn.

*PSTAT160A: Applied Stochastic Processes - Lecture notes.*  
2017.



Nabil Kazi-Tani.

*Modèles aléatoires discrets - Cours scannés ISFA.*  
2017.



J. Lacroix and P. Priouret.

*Probabilités approfondies- Polycopié de cours.*  
Université Pierre et Marie Curie, 2005-2006.



Satoshi Nakamoto.

Bitcoin: A peer-to-peer electronic cash system.  
2008.  
<https://bitcoin.org/bitcoin.pdf>.



Lionel Truquet.

*Statistique des processus 3A - Note de cours.*  
[http://www.ensai.fr/files/\\_media/documents/Enseignants%20chercheurs%20-%20doctorants/ltruquet%20-%20documents/polystatdesprocessus2.pdf](http://www.ensai.fr/files/_media/documents/Enseignants%20chercheurs%20-%20doctorants/ltruquet%20-%20documents/polystatdesprocessus2.pdf).