

# MAD M1 Actuariat/ES

## Chapitre IV: Processus de Poisson

Pierre-Olivier Goffard

Université de Lyon 1  
ISFA  
`pierre-olivier.goffard@univ-lyon1.fr`

ISFA  
December 17, 2019

## I. Processus de Poisson

On souhaite construire un processus stochastique en temps continu permettant le décompte d'évènement au cours du temps. On considère des évènements du type

- tremblement de terre
- accident de voiture
- arrivée d'un client dans un magasin

Soit une variable aléatoire  $N_t$  à valeur entière à l'instant  $t \in [0, +\infty)$ . On suppose que le processus démarre à 0, avec  $N_0 = 0$ , et augmente en effectuant des sauts de hauteur 1. Voici un exemple de trajectoire d'un tel processus.

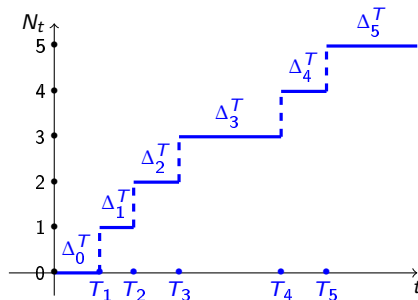


Figure: Evolution du processus de comptage  $\{N_t ; t \geq 0\}$ .

## Definition 1 (Processus de comptage)

Un processus de comptage  $(N_t)_{t \geq 0}$  est un processus stochastique en temps continu qui compte les occurrences d'un certain événement dans le temps tel que

$$N_0 = 0 \text{ and } N_t = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{T_k \leq t}.$$

où  $T_1, T_2, T_3, \dots$  sont les temps d'arrivées, on convient que  $T_0 = 0$ . On définit la suite des temps inter-arrivées  $\Delta_0^T, \Delta_1^T, \Delta_2^T, \dots$  comme différence des temps d'arrivée avec

$$\Delta_k^T = T_{k+1} - T_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

- Cela correspond au temps entre le  $(k+1)^{\text{ème}}$  et le  $k^{\text{ème}}$  événement.
- On parle parfois de temps de séjour de  $(N_t)_{t \geq 0}$  dans l'état  $k$
- Le temps d'arrivée est donné par la somme des temps d'inter-arrivées avec  $T_n = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k^T$ .

### Definition 2 (Processus de Poisson)

Un processus de comptage  $(N_t)_{t \geq 0}$  est un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$  si ses temps inter-arrivée  $(\Delta_n^T)_{n \geq 1}$  forme une suite i.i.d. de variables aléatoires de loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ .

### Definition 3 (Loi exponentielle)

La variable aléatoire  $\tau$  suit une loi exponentielle  $\text{Exp}(\lambda)$  si elle admet pour densité

$$f_\tau(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t > 0.$$

Sa fonction génératrice des moments s'écrit

$$M_\tau(s) = \mathbb{E}(e^{s\tau}) = \frac{\lambda}{\lambda - s}, \quad s \in ]-\infty, \lambda[.$$

### Proposition 1 (Loi sans mémoire)

La loi exponentielle est dite sans mémoire, c'est à dire si  $\tau \sim \text{Exp}(\lambda)$  alors

$$\mathbb{P}(\tau > t + s | \tau > t) = \mathbb{P}(\tau > s), \quad s, t > 0.$$

preuve:

On utilise la formule de Bayes avec

$$\mathbb{P}(\tau > t+s | \tau > t) = \frac{\mathbb{P}(\tau > t | \tau > t+s) \mathbb{P}(\tau > t+s)}{\mathbb{P}(\tau > t)} = \frac{1 \times e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = \mathbb{P}(\tau > s).$$

#### Definition 4 (Loi de Dirichlet)

Soient  $U_1, \dots, U_n$   $n$  v.a. i.i.d. de loi uniforme sur l'intervalle  $[a, b]$  alors la loi jointe des statistiques d'ordre  $(U_{1:n}, \dots, U_{n:n})$  de l'échantillon est une loi de Dirichlet  $D_n([a, b])$ , avec

$$f_{(U_{1:n}, \dots, U_{n:n})}(u_1, \dots, u_n) = \frac{n!}{(b-a)^n} \mathbb{I}_{a < u_1 < \dots < u_n < b}(u_1, \dots, u_n).$$

preuve:

Soit  $g: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}_+$  une fonction mesurable bornée. On note que

$$\mathbb{E}[g(U_{1:n}, \dots, U_{n:n})] = \mathbb{E} \left[ \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} g(U_{\sigma(1)}, \dots, U_{\sigma(n)}) \mathbb{I}_{U_{\sigma(1)} < \dots < U_{\sigma(n)}} \right]$$

où  $\mathcal{S}_n$  désigne l'ensemble des permutations de  $\{1, \dots, n\}$  puis

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ g(U_{\sigma(1)}, \dots, U_{\sigma(n)}) \mathbb{I}_{U_{\sigma(1)} < \dots < U_{\sigma(n)}} \right] &= \mathbb{E} \left[ g(U_1, \dots, U_n) \mathbb{I}_{U_1 < \dots < U_n} \right] \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(u_1, \dots, u_n) \mathbb{I}_{u_1 < \dots < u_n} \frac{1}{(b-a)^n} d\lambda_n(u_1, \dots, u_n) \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\mathbb{E}[g(U_{1:n}, \dots, U_{n:n})] = \int_{\mathbb{R}^n} g(u_1, \dots, u_n) \mathbb{I}_{u_1 < \dots < u_n} \frac{n!}{(b-a)^n} d\lambda_n(u_1, \dots, u_n).$$

## Proposition 2

Soient  $\tau_1, \dots, \tau_n$  des v.a. i.i.d. de loi exponentielle  $\text{Exp}(\lambda)$ , on définit la suite de v.a.  $T_k = \sum_{i=1}^k \tau_i, k = 1, \dots, n$ .

- ①  $T_k \sim \text{Erl}(k, \lambda)$ , avec

$$f_{T_k}(t) = \frac{t^{k-1} e^{-\lambda t} \lambda^k}{(k-1)!}, \quad t > 0.$$

- ② La loi jointe de  $(T_1, \dots, T_n)$  admet pour densité

$$f_{(T_1, \dots, T_n)}(t_1, \dots, t_n) = \lambda^n e^{-\lambda t_n} \mathbb{I}_{0 < t_1 < \dots < t_n}(t_1, \dots, t_n)$$

- ③  $[(T_1, \dots, T_n) | T_{n+1} = t] \sim D_n([0, t])$   
 ④ La loi jointe de  $[(T_1/T_{n+1}, \dots, T_n/T_{n+1}) | T_{n+1}]$  est indépendante de  $T_{n+1}$  et admet la même densité qu'une Dirichlet  $D_n([0, 1])$ .

preuve:

- ① Par récurrence sur  $k$ , au rang  $k = 1$  on a  $\tau_1 = T_1$  et la propriété est vérifiée. Supposons la propriété vérifiée au rang  $k$  qu'en est il au rang  $k+1$ . On note que  $T_{k+1} = T_k + \tau_{k+1}$  puis

$$\begin{aligned} f_{T_{k+1}}(t) &= \int_0^t f_{T_k}(x) f_{\tau_{k+1}}(t-x) dx \\ &= \int_0^t \frac{x^{k-1} e^{-\lambda x} \lambda^k}{(k-1)!} \lambda e^{-\lambda(t-x)} dx \\ &= \frac{e^{-\lambda t} \lambda^{k+1}}{(k-1)!} \frac{t^k}{k} = \frac{t^k e^{-\lambda t} \lambda^{k+1}}{k!} \end{aligned}$$

- ② Soit  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  mesurable et bornée, alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[g(T_1, \dots, T_n)] &= \mathbb{E}[g(\tau_1, \tau_1 + \tau_2, \dots, \tau_1 + \dots + \tau_n)] \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(t_1, \dots, t_1 + \dots + t_n) f_{(\tau_1, \dots, \tau_n)}(t_1, \dots, t_n) d\lambda_n(t_1, \dots, t_n) \end{aligned}$$

On utilise la formule de changement de variable avec

$$\Phi: (u_1, \dots, u_n) \mapsto (u_1, u_2 - u_1, \dots, u_n - u_{n-1}) := (t_1, \dots, t_n),$$

$\Phi(\mathbb{R}_+ \times \dots \times \mathbb{R}_+) = \mathbb{R}^n$  et  $\left| \frac{d\Phi}{du} \right| = 1$ . Il vient

$$\mathbb{E}[g(T_1, \dots, T_n)] = \int_{\mathbb{R}^n} g(u_1, \dots, u_n) \lambda^n e^{-\lambda u_n} \mathbb{1}_{0 < u_1 < \dots < u_n} du_1, \dots, du_n$$

4 On a

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[g(T_1, \dots, T_n) | T_{n+1} = t] &= \int g(t_1, \dots, t_n) f_{T_1, \dots, T_n | T_{n+1}}(t_1, \dots, t_n | t) d\lambda_n(t_1, \dots, t_n) \\
 &= \int g(t_1, \dots, t_n) \frac{f_{T_1, \dots, T_n, T_{n+1}}(t_1, \dots, t_n, t)}{f_{T_{n+1}}(t)} d\lambda_n(t_1, \dots, t_n) \\
 &= \int g(t_1, \dots, t_n) \frac{n!}{t^n} d\lambda_n(t_1, \dots, t_n).
 \end{aligned}$$

4 On a

$$\begin{aligned}
 &\mathbb{E}[g(T_1/T_{n+1}, \dots, T_n/T_{n+1}) | T_{n+1}] \\
 &= \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}_+^n} g(t_1/t_{n+1}, \dots, t_n/t_{n+1}) f_{T_1, \dots, T_n | T_{n+1}}(t_1, \dots, t_n | t_{n+1}) \\
 &\times f_{T_n}(t_{n+1}) d\lambda_n(t_1, \dots, t_n) d\lambda(t_{n+1}) \\
 &= \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}_+^n} g(t_1/t_{n+1}, \dots, t_n/t_{n+1}) \frac{n!}{t_{n+1}^n} \mathbb{1}_{0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1}}(t_1, \dots, t_n) \\
 &\times f_{T_n}(t_{n+1}) d\lambda_n(t_1, \dots, t_n) d\lambda(t_{n+1}) \\
 &= \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}_+^n} g(u_1, \dots, u_n) n! \mathbb{1}_{0 < u_1 < \dots < u_n < 1}(u_1, \dots, u_n) \\
 &\times f_{T_n}(t_{n+1}) d\lambda_n(u_1, \dots, u_n) d\lambda(t_{n+1}).
 \end{aligned}$$



## Remarque 1

① On a  $N_t \sim \text{Pois}(\lambda t)$  avec

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_t = n) &= \mathbb{P}(T_n \leq t, T_{n+1} > t) \\&= \mathbb{P}(T_n \leq t, T_n + \Delta_{n+1}^T > t) \\&= \int_0^t \int_{t-x}^{+\infty} f_{T_n, \Delta_{n+1}^T}(x, y) dy dx \\&= \int_0^t \int_{t-x}^{+\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda x} x^{n-1}}{(n-1)!} \lambda e^{-\lambda y} dy dx \\&= \int_0^t \frac{\lambda^n e^{-\lambda x} x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda(t-x)} dx \\&= \frac{\lambda^n e^{-\lambda t}}{(n-1)!} \int_0^t x^{n-1} dx \\&= \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}.\end{aligned}$$

②  $\mathbb{E}(N_t) = \text{Var}(N_t) = \lambda t$

## Remarque 2 (Processus de renouvellement)

Un processus de comptage dont les temps inter-arrivée sont **i.i.d.** est un processus de renouvellement.

## Proposition 3 (Caractérisation du processus de Poisson)

On a équivalence entre les assertions suivantes

- ① Le processus  $(N_t)_{t \geq 0}$  est un processus de Poisson
- ② Le processus  $(N_t)_{t \geq 0}$  a
  - (i) des accroissements indépendants, soit pour  $0 < t_1 \leq \dots \leq t_n$ , les variables aléatoires
 
$$N_{t_1}, N_{t_2} - N_{t_1}, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$$
 sont indépendantes.
  - (ii) des accroissements stationnaires au sens où la distribution du nombre d'évènements durant un intervalle de longueur  $s > 0$  ne dépend que de  $s$ . En fait, on peut montrer que pour  $s, t \geq 0$ , on a

$$N_{t+s} - N_t \sim \text{Pois}(\lambda s)$$

Les processus stochastiques à accroissements indépendants et stationnaires sont les processus de Lévy. Le processus de Poisson est le seul processus de comptage de Lévy.

Preuve:

$1 \Rightarrow 2$

Supposons que  $(N_t)_{t \geq 0}$  soit un processus de Poisson et soient  $0 < t_1 < \dots < t_n$  des instants. On calcul la probabilité jointe

$$\mathbb{P}(N_{t_1} = j_1, N_{t_2} - N_{t_1} = j_2, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}} = j_n)$$

avec  $j_1, \dots, j_n \in \mathbb{N}$ , que l'on ré-écrit

$$\mathbb{P}(T_{k_1} < t_1 < T_{k_1+1}, T_{k_2} < t_2 < T_{k_2+1}, \dots, T_{k_n} < t_n < T_{k_n+1}),$$

où  $k_i = j_1 + \dots + j_i, i = 1, \dots, n$ . On en déduit en conditionnant par rapport au valeur de  $T_{k_n+1}$  que

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(T_{k_1} < t_1 < T_{k_1+1}, T_{k_2} < t_2 < T_{k_2+1}, \dots, T_{k_n} < t_n < T_{k_n+1}) \\ &= \int_{t_n}^{+\infty} \mathbb{P}(T_{k_1} < t_1 < T_{k_1+1}, T_{k_2} < t_2 < T_{k_2+1}, \dots, T_{k_n} < t_n | T_{k_n+1} = t) f_{T_{k_n+1}}(t) d\lambda(t) \\ &= \int_{t_n}^{+\infty} \binom{k_n}{j_1, \dots, j_n} \left(\frac{t_1}{t}\right)^{j_1} \left(\frac{t_2 - t_1}{t}\right)^{j_2} \dots \left(\frac{t_n - t_{n-1}}{t}\right)^{j_n} \frac{e^{-\lambda t} t^{k_n} \lambda^{k_n+1}}{k_n!} d\lambda(t) \\ &= \frac{e^{-\lambda t_1} (t_1)^{j_1}}{j_1!} \frac{(t_2 - t_1)^{j_2} e^{-\lambda(t_2 - t_1)}}{j_2!} \dots \frac{(t_n - t_{n-1})^{j_n} e^{-\lambda(t_n - t_{n-1})}}{j_n!} \end{aligned}$$

$2 \Rightarrow 1$

On montre que le vecteur des temps d'arrivée  $(T_1, \dots, T_n)$  admet pour densité

$$f_{T_1, \dots, T_n}(t_1, \dots, t_n) = \lambda^n e^{-\lambda t_n} \mathbb{1}_{0 < t_1 < \dots < t_n}. \quad (1)$$

Soit  $t_1, \dots, t_n$  et  $h$  des réels positifs telles que

$$t_1 < t_1 + h < t_2 < \dots < t_n < t_n + h,$$

on a

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(t_1 < T_1 < t_1 + h, \dots, t_n < T_n < t_n + h) \\ = & \mathbb{P}(N_{t_1} = 0, N_{t_1+h} - N_{t_1} = 1, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}+h} = 0, N_{t_n+h} - N_{t_n} \geq 1) \\ = & e^{-\lambda t_1} e^{-\lambda h} \lambda h e^{-\lambda[t_2 - (t_1+h)]} e^{-\lambda h} \lambda h \dots e^{-\lambda[t_n - (t_{n-1}+h)]} [1 - e^{-\lambda h}] \\ = & e^{-\lambda t_n} \lambda^{n-1} h^{n-1} [1 - e^{-\lambda h}] \end{aligned}$$

On divise par  $h^n$  puis on laisse  $h$  tendre vers 0 pour obtenir (1). Il ne reste plus qu'à appliquer la formule de changement de variables pour constater que la loi jointe de  $(\Delta_1^T, \dots, \Delta_n^T)$  est celle d'un  $n$ -uplets de  $n$  variables iid de loi exponentielles.

□

**Proposition 4 (La distribution de  $T_1, \dots, T_n | N_t = n$ )**

*Sachant que  $\{N_t = n\}$ , les instants de saut  $T_1, \dots, T_n$  admettent la même distribution que les statistiques d'ordre associées à un échantillon de  $n$  variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur  $[0, t]$ , concrètement*

$$T_1, \dots, T_n | N_t = n \sim U_{1:n}(0, t), \dots, U_{n:n}(0, t)$$

preuve:

On a

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E}[g(T_1, \dots, T_n) | N_t = n] \\
 = & \frac{\mathbb{E}[g(T_1, \dots, T_n) \mathbb{1}_{N_t = n}]}{\mathbb{P}(N_t = n)} \\
 = & \frac{n!}{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} g(t_1, \dots, t_n) \mathbb{1}_{t_n \leq t < t_{n+1}}(t_n, t_{n+1}) f_{T_1, \dots, T_{n+1}}(t_1, \dots, t_{n+1}) d\lambda(t_1, \dots, t_{n+1}) \\
 = & \frac{n!}{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_t^{+\infty} g(t_1, \dots, t_n) \mathbb{1}_{0 < t_1 < \dots < t_n \leq t}(t_1, \dots, t_n) \frac{n!}{t_{n+1}^n} \\
 \times & \frac{e^{-\lambda t_{n+1}} \lambda^{n+1} t_{n+1}^n}{n!} d\lambda(t_{n+1}) d\lambda(t_1, \dots, t_n) \\
 = & \frac{n!}{e^{-\lambda t} t^n} \int_{\mathbb{R}^n} g(t_1, \dots, t_n) \mathbb{1}_{0 < t_1 < \dots < t_n \leq t}(t_1, \dots, t_n) d\lambda(t_1, \dots, t_n) \\
 \times & \int_t^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t_{n+1}} d\lambda(t_{n+1}) \\
 = & \int_{\mathbb{R}^n} g(t_1, \dots, t_n) \frac{n!}{t^n} \mathbb{1}_{0 < t_1 < \dots < t_n \leq t}(t_1, \dots, t_n) d\lambda(t_1, \dots, t_n)
 \end{aligned}$$

### Remarque 3 (Algorithme de simulation)

Pour simuler la trajectoire d'un processus de Poisson  $\{N_t ; t \geq 0\}$  d'intensité  $\lambda$  jusqu'à l'instant  $t$ ,

- ① On simule le nombre d'évènement  $N_t$  de loi de Poisson  $\text{Pois}(\lambda t)$
- ② On simule un échantillon  $U_1(0, t), \dots, U_n(0, t)$  de  $n$  variables aléatoires **i.i.d.** de loi uniforme sur  $[0, t]$  et on les trie de manière croissante pour obtenir les statistiques d'ordre

$$U_{1:n}(0, t), \dots, U_{n:n}(0, t)$$

- ③ Les temps de saut sont alors donnés par

$$T_k = U_{k:n}(0, t) \text{ pour } k = 1, \dots, n.$$

## Exemple 1

On suppose que le nombre de tremblements de terre en Californie depuis le 1er janvier 2017 suit un processus de Poisson  $(N_t)_{t \geq 0}$ . Supposons que l'unité de temps est l'année et que le nombre moyen de tremblements de terre par an est de 20.

- ❶ Quelle est la probabilité d'observer entre 39 et 41 tremblements de terre dans les deux prochaines années.
- ❷ Quelle est la probabilité d'observer au moins un tremblement de terre dans les trois prochains mois.

L'intensité de  $N_t$  est  $\lambda = 20$ .

❶

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_2 \in \{39, 40, 41\}) &= \mathbb{P}(N_2 = 39) + \mathbb{P}(N_2 = 40) + \mathbb{P}(N_2 = 41), \\ &= e^{-40} \frac{(40)^{39}}{39!} + e^{-40} \frac{(40)^{40}}{40!} + e^{-40} \frac{(40)^{41}}{41!}\end{aligned}$$

❷

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_{0.25} \geq 1) &= 1 - \mathbb{P}(N_{0.25} = 0), \\ &= 1 - e^{-5},\end{aligned}$$



## Proposition 5 (Somme de deux processus de Poisson)

Soient  $\{N_t ; t \geq 0\}$  et  $\{M_t ; t \geq 0\}$  deux processus de Poisson indépendants d'intensité respectives  $\lambda$  et  $\mu$ , alors le processus  $\{X_t ; t \geq 0\}$  défini par

$$X_t = N_t + M_t, \text{ for } t \geq 0,$$

est un processus de Poisson d'intensité  $\lambda + \mu$ . Le résultat se généralise à la somme de  $n$  processus de Poisson.

## Remarque 4 (Généralisation courante du processus de Poisson)

- ❶ Lorsque l'intensité est une variable aléatoire  $\Lambda$ , on parle de processus de Poisson mélange.
- ❷ Lorsque l'intensité est une fonction du temps, on parle de processus de Poisson non-homogène. On a alors

$$N(t) \sim \text{Pois}[\lambda(t)],$$

avec  $\lambda : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ .

Dans les deux cas, on perd les propriétés d'accroissement indépendants et stationnaires

Exemple 2 (Croissance des *blockchain*)

Retour sur le problème de la double dépense: On modélise par

- $(z + N_t)_{t \geq 0}$  le nombre de blocs dans la chaîne honnête, où  $z \in \mathbb{N}^*$
- $(M_t)_{t \geq 0}$  le nombre de blocs dans la chaîne malicieuse

Soit  $\tau_z = \inf\{t \geq 0 ; z + N_t = M_t\}$  le temps de succès de la double dépense. Si  $(N_t)$  et  $(M_t)$  sont des processus de Poisson d'intensité respective  $\lambda$  et  $\mu$  alors la probabilité de succès de la double dépense est donnée par

$$\mathbb{P}(\tau_z < \infty) = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^z.$$

Voir Goffard [2]. Un bon exercice consiste à évaluer par simulation  $\mathbb{P}(\tau_z < t)$ , la probabilité de double dépense avant l'instant  $t \geq 0$ .

### III. Processus de Poisson composé

#### Definition 5 (Distribution composée)

La variable aléatoire

$$X = \sum_{k=1}^N U_k,$$

où

- $N$  est une variable aléatoires de comptage
- $(U_k)_{k \geq 1}$  est une suite de variables aléatoires positives, **i.i.d.** de densité  $f_U$ , et indépendante de  $N$ .

admet une distribution composée. La loi de probabilité de  $X$  est donnée par

$$d\mathbb{P}_X(x) = \mathbb{P}(N=0)\delta_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} f_U^{*k}(x)\mathbb{P}(N=k),$$

#### Remarque 5 (Interprétation actuarielle)

Modèle fréquence/coût classique en assurance non-vie, sur une période d'exercice donnée,

- $N$  représente le nombre de sinistres,
- $U_1, \dots, U_N$  représente les montants de sinistres.

## Proposition 6

La fonction génératrice des moments de  $X$  est donnée par

$$\mathcal{M}_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \mathcal{G}_N[\mathcal{M}_U(t)], \quad t \in \mathbb{R}.$$

où  $\mathcal{G}_N(t) = \mathbb{E}(t^N)$  désigne la fonction génératrice des probabilités de  $N$ . On en déduit que

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(U) \text{ et } \text{Var}(X) = \mathbb{E}(U)^2 \text{Var}(N) + \mathbb{E}(N) \text{Var}(U).$$

preuve:

On a

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_X(t) &= \mathbb{E}(e^{tX}) = \mathbb{E}\left(e^{t \sum_{k=1}^N U_k}\right) \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(e^{t \sum_{k=1}^N U_k} \mid N\right)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(e^{t \sum_{k=1}^n U_k} \mid N=n\right) \mathbb{P}(N=n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(e^{t \sum_{k=1}^n U_k} \mid N=n\right) \mathbb{P}(N=n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(e^{tU}\right)^n \mathbb{P}(N=n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(e^{tU}\right)^n \mathbb{P}(N=n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{M}_U(t)^n \mathbb{P}(N=n) = \mathcal{G}_N[\mathcal{M}_U(t)]. \end{aligned}$$

L'expression de l'espérance et de la variance s'obtient alors par dérivation et évaluation en 0.

## Definition 6 (Processus de Poisson composé)

Soit

- $(N_t)_{t \geq 0}$  un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$ ,
- $(U_k)_{k \geq 1}$  une suite **i.i.d.** de variables aléatoires positives indépendante de  $N_t$ .

Le processus stochastique  $\{X_t ; t \geq 0\}$  défini par

$$X_t = \sum_{k=1}^{N_t} U_k, \text{ for } t \geq 0,$$

est un processus de Poisson composé.

## Remarque 6

Le processus de Poisson composé est une généralisation du processus de Poisson permettant des sauts de hauteur aléatoire.

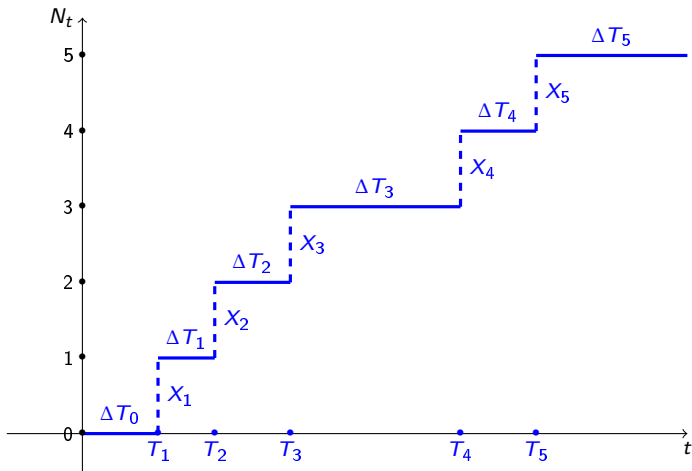


Figure: Evolution du processus  $(X_t)_{t \geq 0}$ .

### Proposition 7

Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  un processus de Poisson composé, on a

$$\mathbb{E}(X_t) = \lambda t \mathbb{E}(U) \text{ and } \mathbb{V}(S_t) = \lambda t \mathbb{E}(U^2).$$

### Exemple 3 (Le modèle de Cramer-Lundberg)

Une compagnie d'assurance est supposée capable de suivre l'évolution de sa réserve financière continuellement dans le temps. On suppose que

- Le nombre de sinistre  $(N_t)_{t \geq 0}$  enregistrés jusqu'à  $t$ , est un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$ .
- Les sinistres  $(U_k)_{k \geq 1}$  sont modélisés par une suite **i.i.d.** de variables aléatoires positives indépendantes de  $N_t$ .

Les engagements de la compagnie d'assurance à l'instant  $t$  s'élèvent à

$$X_t = \sum_{k=1}^{N_t} U_k, \quad t \geq 0,$$

qui est un processus de Poisson composé. De plus, La compagnie

- dispose d'une réserve initiale de montant  $u \geq 0$
- récupère les primes linéairement dans le temps à un taux  $c > 0$ 
  - Typiquement, les primes compensent le cout moyen des assurés par unité de temps avec

$$c = (1 + \eta) \mathbb{E}(X_1), \text{ avec } \eta > 0.$$

Finalement la réserve financière de la compagnie d'assurance est donnée par

$$R_t = u + ct - X_t, \quad t \geq 0.$$



On note  $\tau_u = \inf\{t \geq 0 ; R_t \leq 0\}$  l'instant de ruine et la probabilité de ruine

$$\psi(u, T) = \mathbb{P}(\tau_u < T)$$

pour un horizon de temps  $T$ . Pour plus d'informations, on pourra consulter le livre d'Asmussen et Albrecher [1].

### Problème 1

*On suppose que les sinistres sont distribués suivant une loi Gamma  $\Gamma(\alpha, \beta)$ , donnez la moyenne et la variance de  $X_t$  en fonction de  $\lambda, \alpha$  et  $\beta$ .*

Mes notes se basent sur les documents [5, 4, 3].



Søren Asmussen and Hansjörg Albrecher.  
*Ruin probabilities*.  
World Scientific Publishing Co Pte Ltd, 2010.



Pierre-Olivier Goffard.  
Fraud risk assessment within blockchain transactions.  
2018.  
[http://pierre-olivier.goffard.me/Publications/  
FraudRiskAssessmentWithinBlockChainTransaction\\_Goffard0218.pdf](http://pierre-olivier.goffard.me/Publications/FraudRiskAssessmentWithinBlockChainTransaction_Goffard0218.pdf).



Maryann Hohn.  
*PSTAT160A: Applied Stochastic Processes - Lecture notes*.  
2017.



Nabil Kazi-Tani.  
*Modèles aléatoires discrets - Cours scannés ISFA*.  
2017.



Lionel Truquet.  
*Statistique des processus 3A - Note de cours*.  
[http://www.ensai.fr/files/\\_media/documents/Enseignants%20chercheurs%  
20-%20doctorants/ltruquet%20-%20documents/polystatdesprocessus2.pdf](http://www.ensai.fr/files/_media/documents/Enseignants%20chercheurs%20-%20doctorants/ltruquet%20-%20documents/polystatdesprocessus2.pdf).