Intégration L3 Actuariat

Chapitre II: Tribu et mesure

Pierre-Olivier Goffard

Université de Lyon 1
ISFA
pierre-olivier.goffard@univ-lyon1.fr

ISFA
September 26, 2018

I. Les tribus

1. Tribu sur un espace quelconque

Soit Ω un ensemble.

Exemple 1

1. Ω peut-être $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^d$, ou tout autre espace métrique.
2. Si une expérience consiste à lancer deux dés alors

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\}$$

On note $\mathscr{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω

Definition 1 (Algèbre de Boole)

Un sous-ensemble $\mathscr{C}$ de $\mathscr{P}(\Omega)$ est une algèbre (de Boole) sur Ω si

1. $\Omega \in \mathscr{C}$
2. $\mathscr{A}$ est stable par passage au complémentaire,

$$A \in \mathscr{C} \Rightarrow A^c = \Omega / A \in \mathscr{A}.$$

3. $\mathscr{C}$ est stable par réunion finie,

$$A_1, \ldots, A_k \in \mathscr{C} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{k} A_i \in \mathscr{C}.$$

Definition 2 (Tribu, espace mesurable)

Un sous-ensemble $\mathscr{A}$ de $\mathscr{P}(\Omega)$ est une tribu sur Ω si

1. $\Omega \in \mathscr{A}$
2. $\mathscr{A}$ est stable par passage au complémentaire,

$$A \in \mathscr{A} \Rightarrow A^c = \Omega / A \in \mathscr{A}.$$

3. $\mathscr{A}$ est stable par réunion dénombrable,

$$A_i \in \mathscr{A}, \text{ pour } i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathscr{A}.$$

Le couple $(\Omega, \mathscr{A})$ espace mesurable.

$\mathscr{A}$ est parfois appelée σ-algèbre.

Exemple 2 (Exemples de tribu)

- $\{\Omega, \emptyset\}$ est la tribu triviale
- $\mathscr{P}(\Omega)$ est une tribu
- Soit $\Omega = \{a, b, c, d\}$ alors $\{\Omega, \emptyset, a, \{b, c, d\}\}$ est la plus petite tribu contenant a.

Probleme 1

Montrer qu'une tribu est stable par intersection finie, c'est à dire

$$A_1, A_2 \in \mathscr{A} \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \mathscr{A}$$

Definition 3 (Tribu engendrée)

La tribu engendrée par $\mathscr{E} \subset \mathscr{P}(\Omega)$, notée $\sigma(\mathscr{E})$ est l'intersection de toute les tribus contenant $\mathscr{E}$.

Exemple 3

1. Soit $A \in \Omega$ alors $\sigma(A) = \{A, A^c, \emptyset, \Omega\}$
2. Soit $\mathscr{S} = \{S_1, \ldots, S_n\}$ une partition de Ω, c'est à dire que

$$\bigcup_{k=1}^{n} S_k = \Omega, \text{ et } S_i \cap S_j = \emptyset \text{ pour } i \neq j$$

Alors $\sigma(\mathscr{S}) = \left\{\bigcup_{k \in T} S_k \ ; \ T \subset \{1, 2, \ldots, n\}\right\}$

Probleme 2 (Intersection de tribu et tribu trace)

Soit Ω un ensemble.

1. *Montrer que l'intersection quelconque de tribu de Ω est une tribu d'Ω.*
2. *Soit $\mathscr{A}$ une tribu sur Ω et $F \in \Omega$. Montrer que $\mathscr{A}_F = \{A \cap F \ , \ A \in \mathscr{A}\}$ est une tribu sur F.*

2. Tribu borélienne (sur un espace topologique)

Definition 4 (Espace topologique)

Soit E un ensemble. Soit $\mathscr{O}$ une famille de parties de E, appelée ouverts de E, vérifiant

- $\emptyset, E \in \mathscr{O}$,
- Stable par réunion quelconque,
- Stable par intersection finie.

Le couple $(E, \mathscr{O})$ est un espace topologique

Exemple 4 (Ouvert dans un espace métrique)

Si E est un espace métrique alors on peut définir une distance entre $x \in E$ et $y \in E$ par $d(x,y)$. Un ouvert O est une partie de E dont la frontière est vide, ou dont tout les point apartiennent à l'intérieur de O. Concrètement,

$$\forall x \in 0, \exists r > 0 \text{ tel que } B(x,y) = \{y \in E \ ; \ d(x,y) < r\} \subset O$$

On appelle droite achevée de $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Pour $E = \overline{\mathbb{R}}$, les ouverts sont les parties qui pour chaque point x contiennent un intervalle du type $]x-\epsilon, x+\epsilon[$. On note

$$\mathscr{I}_{\mathbb{R}} = \left\{]a,b[, \ -\infty < a \leq b < +\infty\right\},$$

l'ensemble des intervalles ouverts bornées. Il contient $\emptyset$ (cas a=b).

Definition 5 (Tribu borélienne, borélien)

La tribu borélienne est la tribu $\mathscr{B}(E)$ engendré par les ouverts de E. On appelle borélien un ensemble appartenant à cette tribu.

La tribu borélienne $\mathscr{B}(E)$ contient tout les ouverts de E, ainsi que tout les fermés (par passage au complémentaire), les intersections et réunions de suites d'ouverts et de fermés. La tribu borélienne $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par intervalles ouverts de $\mathbb{R}$, c'est la conséquence du lemme suivant.

Lemme 1

Tout ouvert de $\mathbb{R}$ est la réunion d'une suite d'intervalles ouverts

preuve:
Remarquons que l'ensemble

$$\mathscr{I}^* = \left\{ \left] r - \frac{1}{n}, r + \frac{1}{n} \right[\; ; \; r \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

est dénombrable puisqu'il existe une sujection de $\mathbb{Q} \times \mathbb{N}^*$ sur $\mathscr{I}^*$. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$, supposé non vide, et soit $x \in U$. Il existe un $\epsilon > 0$ tel que $]x-\epsilon, x+\epsilon[\subset U$, puis $\exists n \geq 0$ tel que $\frac{1}{n} \leq \frac{\epsilon}{2}$ et enfin un

$$r \in \mathbb{Q} \cap \left] x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right[.$$

On voit alors que

$$x \in \left] r - \frac{1}{n}, r + \frac{1}{n} \right[.$$

A chaque $x \in U$ est associé un intervalle $I_x \in \mathscr{I}^*$ tel que $x \in \mathscr{I}_x \subset U$ si bien que $U = \bigcup_{x \in U} \{x\} \subset \bigcup_{x \in U} I_x \subset U$ et , par suite $\bigcup_{x \in U} I_x = U$. On écrit donc U comme la réunion d'une suite $(I_n) \in \mathscr{I}^*$ qui est aussi une suite de $\mathscr{I}_{\mathbb{R}}$ puisque $\mathscr{I}^* \subset \mathscr{I}_{\mathbb{R}}$.

□

La tribu borélienne $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ peut donc être généré par différents type d'intervalles dont

- $[a, b]$
- $[a, +\infty[$
- $]a, +\infty[$
- $]a, b]$

II. Mesures

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace mesurable.

Definition 6 (Mesure (positive))

On appelle mesure (positive) une application $\mu : \mathscr{A} \mapsto \overline{R}_+$ telle que:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$,

(ii) pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties disjointes de $\mathscr{A}$, on a

$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} A_n. \text{ (} \sigma\text{-additivité)}$$

Definition 7 (Terminologie)

1. Si $\mu(\Omega) < +\infty$ alors μ est une mesure finie
2. Si $\mu(\Omega) = 1$ alors μ est une mesure de probabilité
3. Le triplet $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ est appelé espace mesuré
4. Une mesure signée est une mesure définie comme la différence de deux mesures positives.

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré.

Exemple 5 (Cardinal et masse de Dirac)

1. Soit $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, la mesure $\mu(A) = \mathrm{Card}(A)/6$ est une mesure de probabilité.
2. Soit $\omega \in \Omega$. L'application

$$\delta_\omega : A \in \mathscr{A} \mapsto \delta_\omega(A) = \begin{cases} 1, & \text{si } \omega \in A \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

   est une mesure de probabilité, appelée mesure de Dirac.
3. Sur un ensemble dénombrable Ω (par exemple $\Omega = \mathbb{N}$), la mesure $\sum_{\omega\in\Omega} \delta_\omega$ définie par

$$\sum_{\omega\in\Omega} \delta_\omega(A) = \mathrm{Card}(A) \text{ pour tout } A \in \mathscr{A}.$$

   est appelée mesure de comptage.

Remarque 1 (Choix d'une mesure de probabilité)

Il est possible de définir beaucoup de probabilité sur un espace $(\Omega, \mathscr{A})$. Le choix d'une probabilité revient à choisir un modèle permettant d'appréhender le phénomène étudié. Il découle souvent d'observations et de retour d'expérience. On répète N fois la même expérience et on constate que l'évènement $A \in \mathscr{A}$ se réalise N_A fois. On calibre alors la mesure de probabilité $\mathbb{P}$ telle que

$$\mathbb{P}(A) \approx \frac{N_A}{N}.$$

On entrevoit ici le lien entre probabilité et statistique. Une probabilité est estimée par une proportion.

Definition 8 (Partie négligeable)

$A \in \mathscr{A}$ est négligeable s'il existe $B \in \mathscr{A}$ tel que $A \subset B$ et $\mu(B) = 0$.

Definition 9 (mesure atomique, mesure diffuse)

1. Soit $A \in \mathscr{A}$, on dit que μ est portée par A si $\mu(A^c) = 0$.
2. μ est une mesure atomique si elle est portée par les atomes $\{w \in \Omega\}$
3. μ est une mesure diffuse si $\mu(\{w\}) = 0$ (les atomes $\{w\}$ sont des parties négligeables)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré.

Proposition 1 (Propriété d'un mesure)

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements de $\mathscr{A}$. On a

1. *Si $A_1 \subset A_2$ alors $\mu(A_1) \leq \mu(A_2)$ (monotonie de μ), de plus on a*
$$\mu(A_2/A_1) = \mu(A_2) - \mu(A_1)$$
2. $$\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2) - \mu(A_1 \cap A_2) \text{ (formule inclusion-exclusion)}$$
3. $$\mu\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) \text{ sous } \sigma\text{-additivité)}$$
4. *Si $A_i \subset A_{i+1}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, alors $\mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \lim\limits_{i\to+\infty} \mu(A_i)$*
5. *Si $A_{i+1} \subset A_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, avec $\mu(A_{n_0}) < \infty$ pour un certain n_0, alors $\mu(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \lim\limits_{i\to+\infty} \mu(A_i)$.*

preuve:

1. Soit $A_1 \subset A_2 \subset \mathscr{A}$, on a

   $\mu(A_2) = \mu(\{A_2/A_1\} \cup A_1) = \mu(A_2/A_1) + \mu(A_1) \geq \mu(A_1)$ (car μ est une mesure positive)

   On déduit immédiatement de ce qui précède que $\mu(\{A_2/A_1\}) = \mu(A_2) - \mu(A_1)$

2. Soit $A_1, B_2 \in \mathscr{A}$, on a

$$\begin{aligned}
\mu(A_1 \cup A_2) &= \mu\{A_1 \cup [A_2/(A_1 \cap A_2)]\} \\
&= \mu(A_1) + \mu[A_2/(A_1 \cap A_2)] \\
&= \mu(A_1) + \mu(A_2) - \mu(A_1 \cap A_2)
\end{aligned}$$

3. On a

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) &= \mu\left(A_0 \cup \bigcup_{n\geq 1} A_n\right) \\
&= \mu(A_0) + \mu\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) - \mu\left(A_0 \cap \bigcup_{n\geq 1} A_n\right) \\
&\leq \mu(A_0) + \mu\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) \\
&\leq \mu(A_0) + \mu(A_1) + \mu\left(\bigcup_{n\geq 2} A_n\right) \\
&\dots \\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)
\end{aligned}$$

4. Soit $B_k = A_{k+1}/A_k$ pour $k \geq 0$, on a

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) &= \mu\left(A_0 \cup \bigcup_{k=0}^{+\infty} B_k\right) = \mu(A_0) + \sum_{k=0}^{+\infty} \mu(B_k) = \mu(A_0) + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \mu(B_k) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\mu(A_0) + \sum_{k=0}^{n-1} \mu(B_k)\right] = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)
\end{aligned}$$

5. Soit $B_n = A_{n_0}/A_{n+nn_0}$, pour $n \geq 0$ alors on a

$$\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{n_0}/A_{n+n_0}\right) = \mu\left(A_{n_0}/\bigcap_{n\geq 0} A_{n+n_0}\right) = \mu(A_{n_0}) - \mu\left(\bigcap_{n\geq 0} A_{n+n_0}\right)$$

Donc

$$\mu\left(\bigcap_{n\geq n_0} A_n\right) = \mu(A_{n_0}) - \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\to\infty} [\mu(A_{n_0}) - \mu(B_n)] = \lim_{n\to\infty} \mu(A_{n+n_0}).$$

□

Exemple 6 (Mesure de probabilité conditionelle)

1. Soit $A \in \mathscr{A}$. L'application
$$\mu_A(B) = \mu(A \cap B), \text{ pour } B \in \mathscr{A}$$
est une mesure sur $(\Omega, \mathscr{A})$
2. l'application
$$\frac{\mu_A(B)}{\mu(A)} = \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(A)}, \text{ pour } A, B \in \mathscr{A}$$
est une mesure de probabilité.

Probleme 3

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ *un espace mesuré et deux suite* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{A}$ *telles que* $B_n \subset A_n$.

1. *Montrer que*
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n / \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n/B_n).$$
2. *Montrer que*
$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) - \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} [\mu(A_n) - \mu(B_n)].$$

III. La mesure de Lebesgue

Il est naturel de mesurer un intervalle de $\mathbb{R}$ par sa longueur ou une union d'intervalles disjoints par la somme de leur longueur respective.

Definition 10 ($\mathscr{I}_{\mathbb{R}}$, application longueur)

L'application longueur $l : \mathscr{I}_{\mathbb{R}} \mapsto \mathbb{R}_+$ définie par

$$l(]a,b[) = b - a, \text{ et } l(\emptyset) = 0.$$

L'objectif est de définir une application permettant de mesurer une partie quelconque de $\mathbb{R}$ ou pour être précis les ouverts de $\mathbb{R}$. Comme $\mathbb{R} = \bigcup_{k=1}^{+\infty}]-k,k[$ alors toute partie de $\mathbb{R}$ peut être recouverte. Cette application sera une mesure sur $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ coincidant avec l'application longueur sur les intervalles ouverts.

Theoreme 1 (Caratheodory)

Il existe une et une seule mesure sur $\mathscr{B}(\mathbb{R})$, notée λ, appelée mesure de Lebesgue, telle que

$$\lambda(]a,b[) = b - a, \text{ pour tout } -\infty < a < b < +\infty.$$

preuve (synthétique):

Existence:

Pour une partie $A \subset \mathscr{P}(\mathbb{R})$ on introduit l'instrument de mesure suivant.

Definition 11 (Mesure extérieure de Lebesgue)

On appelle mesure extérieure de Lebesgue dans $\mathbb{R}$ l'application $\lambda^* : \mathbb{R} \mapsto \overline{\mathbb{R}}^+$ définie, pour tout $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$, par

$$\lambda^* = \inf \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} l(I_n) \ ; \ (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{I}_{\mathbb{R}} \text{ et } A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right\}$$

Proposition 2 (Propriétés de λ^*)

L'application λ^* vérifie les propriétés suivantes

1. $\lambda^*(\emptyset) = 0$
2. $\lambda^*(A) \leq \lambda^*(B)$ *pour* $A, B \subset \mathbb{R}$ *telles que* $A \subset B$ *(*λ^* *est monotone).*
3. *Soit* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{P}(\mathbb{R})$ *et* $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ *alors*

   $$\lambda^*(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^*(A_n).$$

   (λ^* *est sous* σ*-additive)*
4. $\lambda^*(]a, b[) = b - a$ *pour tout* $a, b \in \mathbb{R}$ *tels que* $-\infty < a < b < +\infty$.

λ^* n'est pas σ-additive et n'est donc pas une mesure sur $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ On va montrer que λ^* est une mesure si on restreint l'application à $\mathscr{B}(\mathbb{R})$. Concrètement , on montre que λ^* est une mesure sur une tribu $\mathscr{L}$ qui englobe $\mathscr{B}(\mathbb{R})$

Definition 12 (La tribu de Lebesgue $\mathscr{L}$)

Soit

$$\mathscr{L} = \{E \in \mathscr{P}(\mathbb{R}) \ ; \ \lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c)\}, \text{pour tout } A \subset \mathscr{P}(\mathbb{R}),$$

un sous-ensemble de $\mathscr{P}(\mathbb{R})$, appelé tribu de Lebesgue.

Proposition 3 (Propriétés de $\mathscr{L}$)

1. $\mathscr{L}$ *est une tribu sur* $\mathbb{R}$*,*
2. $\lambda^*_{|\mathscr{L}} : \mathscr{L} \mapsto \overline{\mathbb{R}}_+$ *est une mesure.*

Les membres de la tribu $\mathscr{L}$ réalisent un bon partage des parties de $\mathbb{R}$.
preuve:
Il est immédiat que $\mathbb{R} \in \mathscr{L}$ et que $\mathscr{L}$ est stable par passage au complémentaire. De même, on remarque que $\lambda^*(\emptyset) = 0$.

Etape 1. On va montrer que $\mathscr{L}$ est stable par réunion finie et que λ^* vérifie, pour $(E_i)_{i=1,\dots,n}$ telles que $E_i \cap E_j = \emptyset$ pour $i \neq j$,

$$\lambda^*\left(A \cap \bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda^*(A \cap E_i).$$

Soit $E_1, E_2 \subset \mathscr{L}$ et $E = E_1 \cup E_2$. On rappelle que $E \subset \mathscr{L}$ si

$$\lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c)$$

Nous savons que $\lambda^*(A) \leq \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c)$ du fait de la σ sous-additivé de λ^*. Notons que

$$\begin{aligned} \lambda^*(A \cap E) &= \lambda^*[A \cap (E_1 \cup E_2)] \\ &= \lambda^*[(A \cap E_1) \cup (A \cap E_2)] \\ &= \lambda^*[(A \cap E_1) \cup (A \cap E_2 \cap E_1^c)] \\ &\leq \lambda^*(A \cap E_1) + \lambda^*(A \cap E_2 \cap E_1^c). \qquad (1) \end{aligned}$$

Comme $E_2 \subset \mathscr{L}$ et $A \cap E_1^c \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ alors

$$\lambda^*(A \cap E_1^c) = \lambda^*(A \cap E_1^c \cap E_2) + \lambda^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c) = \lambda^*(A \cap E_1^c \cap E_2) + \lambda^*(A \cap E^c). \qquad (2)$$

On a également

$$\lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap E_1) + \lambda^*(A \cap E_1^c). \qquad (3)$$

puisque $E_1 \subset \mathscr{L}$. En ré-injectant (2) et (3) dans l'inégalité (1), on obtient

$$\lambda^*(A) \geq \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c).$$

Supposons que $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ alors

$$\begin{array}{rcl}
\lambda^*(A \cap E) & = & \lambda^*[A \cap (E_1 \cup E_2)] \\
& = & \lambda^*[(A \cap E_1) \cup (A \cap E_2)] \\
& = & \lambda^*\{[(A \cap E_1) \cup (A \cap E_2)] \cap E_1\} + \lambda^*\{[(A \cap E_1) \cup (A \cap E_2)] \cap E_1^c\} \\
& = & \lambda^*(A \cap E_1) + \lambda^*(A \cap E_2)
\end{array}$$

Les deux propriétés se généralisent pour une suite $(E_n)_{n=1,\ldots,n}$ par récurrence.

Etape 2.
Considérons $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{L}$ et $E = \cup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Soit

$$F_0 = E_0 \text{ et } F_n = E_n | (E_n \cap \bigcup_{p=0}^{n-1} F_p)$$

de sorte que $F_0, F_1, \ldots$ appartienent à $\mathscr{L}$, soient disjoints, et vérifient $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. On a

$$\begin{aligned}
\lambda^*(A) &= \lambda^*(A \cap \bigcup_{p=0}^{n} F_p) + \lambda^* \left[A \cap \left(\bigcup_{p=0}^{n} F_p \right)^c \right] \\
&\geq \lambda^*(A \cap \bigcup_{p=0}^{n} F_p) + \lambda^* \left[A \cap E \right] \\
&\geq \sum_{p=0}^{n} \lambda^*(A \cap F_p) + \lambda^* \left[A \cap E \right]
\end{aligned}$$

En passant à la limite lorsque $n \to +\infty$, on obtient

$$\begin{aligned}
\lambda^*(A) &\geq \sum_{p=0}^{+\infty} \lambda^*(A \cap F_p) + \lambda(A \cap E^c) \\
&\geq \lambda^*(A \cap E) + \lambda(A \cap E^c) \text{ sous } \sigma\text{-additivité.}
\end{aligned}$$

ce qui prouve que $E \subset \mathscr{L}$.

On montre maintenant que λ^* est bien une mesure sur $\mathscr{L}$. Soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $E_n \cap E_m = \emptyset$ si $n \neq m$. Comme $\bigcup_{p=0}^n E_p \subset E$ alors

$$\begin{aligned}\lambda^*(A\cap E) &\geq \lambda\left(\bigcup_{p=0}^{n} A\cap E_p\right)\\ &= \sum_{p=0}^{n} \lambda(A\cap E_p).\end{aligned}$$

On obtient $\lambda^*(E) \geq \sum_{p=0}^{+\infty} \lambda^*(E_p)$ en choisissant $A = E$ puis en passant à la limite lorsque $n \to +\infty$. De plus $\lambda^*(E) \leq \sum_{p=0}^{\infty} \lambda^*(E_p)$ en vertu de la sous σ-additivité. On a donc

$$\lambda^*(E) \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^*(E_p).$$

Pour montrer l'existence du théorème (1), il suffit de montrer que $]a,+\infty[\subset \mathscr{L}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ car dans ce cas $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \subset \mathscr{L}$ puisque $]a,+\infty[$ engendre $\mathscr{B}(\mathbb{R})$. Soit $E =]a,+\infty[$, pour $a \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathbb{P}(\mathbb{R})$, on veut montrer que

$$\lambda^*(A) = \lambda^*(A\cap E) + \lambda^*(A\cap E^c). \tag{4}$$

D'après la définition de λ^*, il existe $(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{I}_{\mathbb{R}}$, telle que $A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ et $\lambda^*(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} l(I_n) - \epsilon$. Comme

$$\begin{cases} A\cap E \subset & \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \cap E, \\ A\cap E^c \subset & \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \cap E^c, \end{cases}$$

alors la σ sous-additivité implique que

$$\begin{cases} \lambda^*(A\cap E) \leq & \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^*(I_n \cap E), \\ \lambda^*(A\cap E^c) \leq & \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^*(I_n \cap E^c). \end{cases}$$

On a

$$\begin{aligned} \lambda^*(A\cap E) + \lambda^*(A\cap E^c) & \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^*(I_n\cap E) + \lambda^*(I_n \cap E^c) \\ & = \sum_{n\in\mathbb{N}} l(I_n), \end{aligned}$$

puis $\lambda^*(A\cap E) + \lambda^*(A\cap E^c) \leq \lambda^*(A) + \epsilon$, où ϵ peut être choisi arbitrairement petit. Finalement, $\lambda^*(A) \leq \lambda^*(A\cap E) + \lambda^*(A\cap E^c)$ est une conséquence de la σ sous-additivité, ce qui permet de conclure à l'égalité (4).
Pour l'unicité, on montre que s'il existe une autre mesure m sur $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ telle que $m(]a,b[) = b-a$ alors elle coincide avec λ^*. La proposition suivante est dès lors très utile.

Proposition 4 (Condition suffisante pour l'égalité de deux mesures)

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ *un espace mesurable et* m, μ *deux mesures sur* $\mathscr{A}$. *Supposons qu'il existe* $\mathscr{C} \subset \mathscr{A}$ *tel*

1. $\mathscr{C}$ *engendre* $\mathscr{A}$
2. $\mathscr{C}$ *est stable par intersection fini*
3. *Il existe* $(C_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{C}$ *telle que* $C_n \cap C_m = \emptyset$ *si* $n \neq m$, *et* $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$.
4. $m(C) = \mu(C)$ *pour tout* $C \subset \mathscr{C}$

On a alors $m = \mu$

La preuve se termine en appliquant la proposition (4), avec $\mathscr{C} = \{]a,b]\ ,\ -\infty < a < b < +\infty\}$. On vérifie que

- $\sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{B}(\mathbb{R})$
- $\mathscr{C}$ est stable par intersection
- Considérons la suite
$$F_n =]n, n+1],\ n \in \mathbb{Z}$$
est dénombrable, disjointe et telle que $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} F_n = \mathbb{R}$

- On a par continuité décroissante

$$\begin{aligned} m(]a,b]) &= \lim_{n\to+\infty} m(]a,b+\frac{1}{n}) \\ &= \lim_{n\to+\infty} b-a+\frac{1}{n} \\ &= b-a \\ &= \lambda^*(]a,b]) \end{aligned}$$

On définit alors $\lambda := \lambda^*_{|\mathbb{B}(\mathbb{R})}$

En résumé,

$$\begin{aligned} \lambda^* : \mathscr{P}(\mathbb{R}) \mapsto \overline{\mathbb{R}}^+ \quad &\Rightarrow \quad \lambda^*_{|\mathscr{L}} : \mathscr{L} \mapsto \overline{\mathbb{R}}_+ \text{ est une mesure} \\ &\Rightarrow \quad \lambda := \lambda^*_{\mathscr{B}(\mathbb{R})} : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \mapsto \overline{\mathbb{R}}_+ \text{ est la seule mesure telle que } \lambda(]a,b[) = b-a \\ &\Rightarrow \quad \text{La mesure de Lebesgue} \end{aligned}$$

Remarque 2

λ est une mesure diffuse, par example

- $\lambda(\{x\}) = 0$
- $\lambda(\mathbb{N}) = \lambda(\mathbb{Q}) = 0$

Proposition 5 (Invariance par translation)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $\beta \in \mathbb{R}$ *et* $A \subset \mathscr{B}(\mathbb{R})$. *On a*

$$\lambda(\alpha A + \beta) = |\alpha| \lambda(A).$$