EXAMEN DEUXIÈME SESSION

Théorie de la mesure et intégration– 2020-2021
Pierre-O Goffard

Instructions: On éteint et on range son téléphone.

- La calculatrice et les appareils éléctroniques ne sont pas autorisés.
- Vous devez justifier vos réponses de manière claire et concise.
- Vous devez écrire de la manière la plus lisible possible. Souligner ou encadrer votre réponse finale.

Question:	1	2	3	4	5	6	Total
Points:	1	3	6	2	6	2	20
Score:							

1. (1 point) Soient $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$, $i = 1, 2, 3$, trois espaces mesurables. Soient $f : \Omega_1 \mapsto \Omega_2$ et $g : \Omega_2 \mapsto \Omega_3$ deux applications mesurables. Monter que l'application $g \circ f$ est une application mesurable de $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ vers $(\Omega_3, \mathcal{A}_3)$

   Solution: Voir le cours

2. (a) (1 point) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesurable et $B \in \mathcal{A}$ tel que $0 < \mu(B) < \infty$. Montrer que l'application

   $$\mu_B(A) = \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(B)},\ A \in \mathcal{A},$$

   est une mesure de probabilité.

   Solution: Voir le cours

   (b) (2 points) Supposons que $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et

   $$\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \delta_k$$

où δ_k est la mesure de Dirac en $k \in \mathbb{N}$, définie par

$$\delta_k(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Soit $B = 2\mathbb{N}$ (les entiers pairs). Calculer $\mu(B)$ et montrer que

$$\mu_B = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{4^k} \delta_{2k}.$$

Solution: On a

$$\mu(B) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{2k\}\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{4}\frac{1}{1 - 1/4} = 1/3$$

Soit $A \in \mathcal{A}$ alors

$$\mu_B(A) = 3 \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{2^{2k}} \delta_{2k}(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{3}{4^k} \delta_{2k}(A)$$

3. L'objectif est de montrer que

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$$

(a) (1 point) Montrer que $x \mapsto 1/x^x \mathbb{I}_{]0,1[}$ est intégrable.

Solution: Il s'agit d'une fonction continue sur un intervalle borné.

(b) (2 points) Montrer que (en justifiant les étapes)

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^x} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-x \ln x)^n}{n!} \mathrm{d}x$$

Solution: On a

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^x} = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x \ln x)^n}{n!} \mathrm{d}x$$

On inverse ensuite les signes somme et intégrale via le théorème de Beppo-Lévi (convergence monotone)

(c) (2 points) Pour tout $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, on pose

$$I_{m,n} = \int_0^1 x^n (\ln x)^m \mathrm{d}x$$

Montrer par récurrence sur $m \in \mathbb{N}$ que

$$I_{m,n} = (-1)^m \frac{m!}{(n+1)^{m+1}}.$$

Solution: On a

$$I_{0,n} = \frac{1}{n+1}$$

donc la propriété est vérifiée au rang 0. Supposons la propriété vérifiée au rang m, qu'en est il au rang $n+1$? On a

$$I_{m+1,n} = \int_0^1 x^n (\ln x)^{m+1} \mathrm{d}x \overset{IPP}{=} -\frac{m+1}{n+1} \int_0^1 x^n (\ln x)^m \mathrm{d}x = (-1)^{m+1} \frac{(m+1)!}{(n+1)^{m+1}}$$

et la propriété est vérifiée au rang $m+1$.

(d) (1 point) Conclure.

Solution: On remarque que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-x \ln x)^n}{n!} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} I_{n,n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}.$$

4. (2 points) Calculer, en justifiant,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,\infty[} \frac{e^{-nx^2}}{n} \mathrm{d}\lambda(x).$$

Solution: Les fonctions

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx^2}}{n}, \ n \geqslant 0,$$

sont intégrables et converge simplement vers 0. De plus, on a $|f_n(x)| < e^{-x}$. On en déduit par convergence dominée que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,\infty[} \frac{e^{-nx^2}}{n} \mathrm{d}\lambda(x) = 0.$$

5. Pour $n \geqslant 1$ et $x > 0$, on pose

$$I_n(x) = \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(x^2+t^2)^n}$$

(a) (1 point) Calculer $I_1(x)$

Solution:

$$I_1(x) = \frac{\pi}{2x}$$

(b) (1 point) Montrer que $x \mapsto I_n(x)$ est continue

Solution: On note $f(t,x) = (x^2+t^2)^{-n}$. La fonction $t \mapsto f(t,x)$ est intégrable sur $(0,+\infty)$. De plus $f(t,x) < t^{-2}$ pour tout $x > 0$ donc $I_n(x)$ est continue.

(c) (2 points) Montrer que $x \mapsto I_n(x)$ est dérivable et trouver une relation entre $I'_n(x)$ et $I_{n+1}(x)$.

Solution: La fonction $t \mapsto \frac{\partial}{\partial x} f(t,x) = -2nx^2(t^2+x^2)^{-n-1}$ est intégrable sur $(0,\infty)$ et pour $x \in [a,b]$ avec $0 < a < b < \infty$ on a

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} f(t,x) \right| \leqslant \frac{2bn}{(a^2+t^2)^{n+1}}$$

On peut choisir a et b arbitrairement proche de 0 et ∞ respectivement donc $I_n(x)$ est bien dérivable. On a de plus

$$I'_n(x) = -nxI_n(x) \text{ (IPP)}$$

(d) (2 points) Montrer par récurrence l'existence d'une suite $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ telle que

$$I_n(x) = \frac{\lambda_n}{x^{2n-1}},$$

Donner la valeur de λ_n en fonction de n (avec des factoriels).

Solution: Au rang 1, la propriété est vérifié avec $\lambda_1 = \pi/2$. Supposons la propriété vérifiée au rang n, qu'en est il au rang $n+1$? On a

$$I_{n+1}(x) = -\frac{I'_n(x)}{nx} = \lambda_n \frac{2n-1}{n} \frac{1}{x^{2n+1}}.$$

La propritété est vérifiée au rang $n+1$. On a

$$\lambda_n = \frac{2n-3}{n-1}\lambda_{n-1}\lambda_{n-1} = \frac{(2n-2)!}{2^{n-1}(n-1)!}\frac{\pi}{2}$$

6. (2 points) Calculer l'intégrale

$$\int\int_{\mathcal{D}} \frac{3y}{\sqrt{1+(x+y)^3}} \mathrm{d}\lambda(x,y),$$

où $\mathcal{D} = \{x, y > 0 \; x+y < a\}$, avec $a \in \mathbb{R}$. On pourra utiliser le changement de variable $(u,v) := (x,y) \mapsto \phi(x,y) = (x+y, x-y)$.

Solution: On applique la formule de changement de variable

$$\int\int_{\mathcal{D}} \frac{3y}{\sqrt{1+(x+y)^3}} \mathrm{d}\lambda(x,y) = \frac{3}{4}\int_0^a \int_0^u \frac{u-v}{\sqrt{1+u^3}} \mathrm{d}\lambda(u,v) = \frac{\sqrt{1+a^3}-1}{4}$$

FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

Fonction	Ensemble de définition	Dérivée
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$
$\tan x$	$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]n\pi - \pi/2, n\pi + \pi/2[$	$1 + \tan^2 x$
$\arccos x$	$[-1, 1]$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arcsin x$	$[-1, 1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$

<u>Quelques identités</u>: Pour $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$
$$\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$$