INTÉGRATION

Intégration L3– 2020
Pierre-Olivier Goffard et Colin Jahel

---

1. Calculer les limites suivantes
   (a) $\lim_n \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \sin(\frac{1}{nx})\mathrm{d}x$
   (b) $\lim_n \int_0^1 \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \mathrm{d}x$
   (c) $\lim_n \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\frac{x}{n})\frac{n}{(x^2+2)x}\mathrm{d}x$
   (d) $\lim_k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}\frac{1}{1-nk}$
   (e) $\lim_k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} \arctan(\frac{n}{k})$

   Indication : Utiliser la mesure de comptage.

   Solution: Théorème de convergence dominée.

   (a) $\frac{1}{\sqrt{x}} \sin(\frac{1}{nx}) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ qui est intégrable, et $\frac{1}{\sqrt{x}} \sin(\frac{1}{nx}) \to 0$, donc par $\lim_n \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \sin(\frac{1}{nx})\mathrm{d}x = 0$

   (b) $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq 1$ et la fonction constante égale à 1 est intégrable sur $[0, 1]$. De plus $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \to e^{-x}$.
   $$\int_0^1 \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \mathrm{d}x \to \int_0^1 e^{-x} = 1 - e^{-1}.$$

   (c) On utile le fait que $\sin(x) \leq x$, donc on a $\left|\sin(\frac{x}{n})\frac{n}{(x^2+2)x}\right| \leq \frac{1}{x^2+2}$, or $x \mapsto \frac{1}{x^2+2}$ est intégrale sur $\mathbb{R}$, de plus $\sin(\frac{x}{n})\frac{n}{(x^2+2)x} \to \frac{1}{x^2+2}$ donc $\lim_n \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\frac{x}{n})\frac{n}{(x^2+2)x}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}[\arctan(x)]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

   Pour les deux questions suivantes, on utilise la mesure de comptage sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

   (d) $\left|\frac{1}{n^2}\frac{1}{1-nk}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ qui est sommable. De plus, $\frac{1}{n^2}\frac{1}{1-nk} \to_k 0$, donc $\lim_k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}\frac{1}{1-nk} = 0$.

   (e) $\left|\frac{1}{4^n} \arctan(\frac{n}{k})\right| \leq \frac{1}{4^n}\frac{\pi}{2}$ qui est sommable. De plus, $\frac{1}{4^n} \arctan(\frac{n}{k}) \to_k 0$, donc
   $$\lim_k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} \arctan(\frac{n}{k}) = 0.$$

2. A l'aide du théorème de Beppo Levi, calculer $\lim \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x}\mathrm{d}x$.

   Indication : Étudier $g_n\colon x \mapsto (n + 1)\ln\left(1 - \frac{x}{n+1}\right) - n\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)$.

Solution: On remarque que pour tout $x \in [0, n]$, $\frac{f_{n+1}}{f_n}(x) = \exp(g_n(x))$. On étudie donc g_n.

$$\begin{aligned} g_n'(x) &= -\frac{1}{1 - \frac{x}{n+1}} + \frac{1}{1 - \frac{x}{n}} \\ &= \frac{n(n+1-x) - (n+1)(n-x)}{(n-x)(n+1-x)} \\ &= \frac{x}{(n-x)(n+1-x)} \geq 0. \end{aligned}$$

Donc g_n est croissante et $g_n \geq 0$ et la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

De plus, on sait que $f_n(x) \to \exp(-x)\exp(\alpha x)$, donc

$$\int_0^\infty f_n(x)\mathrm{d}x \to \int_0^\infty e^{(1-\alpha)x}\mathrm{d}x = \frac{1}{1-\alpha}.$$

3. (a) La somme de fonctions intégrables est elle intégrable ?
   (b) Une fonction de carré intégrable est elle intégrable ? Le carré d'une fonction intégrable est il intégrable ?
   (c) Soit (f_n) une suite de fonctions positives qui converge vers f telles qu'il existe $K > 0$ verifiant $\int f_n \mathrm{d}\mu < K$, montrer que $\int f \mathrm{d}\mu \leq K$.

Solution:

(a) Oui, soit f et g deux fonctions intégrables. $f+g$ est mesurable et comme $|f+g| \leq |f|+|g|$, on a
$$\int |f+g| \leq \int |f| + \int |g| < \infty.$$

(b) Non, par exemple $x \mapsto \frac{1}{x}$ est de carré intégrable sur $[1, +\infty[$ mais pas intégrable. De même, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est mesurable sur $]0, 1]$ mais pas de carré intégrable.

(c) La convergence implique en particulier $f = \liminf f_n$, donc d'après le lemme de Fatou, on a
$$\int f\mathrm{d}\mu \leq \liminf \inf f_n < K.$$

4. Soit $g\colon x \mapsto 1_{[0,1]}(x)$, on définit la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme $f_n(x) = g(x)$ si n est pair, $f_n(x) = g(-x)$ sinon. Montrer que
$$\int_{\mathbb{R}} \liminf f_n(x)\mathrm{d}x < \liminf \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\mathrm{d}x.$$

Solution: $\liminf f_n(x) = 0$ pour tout x et $int_{\mathbb{R}} f_n(x)\mathrm{d}x = 1$ donc $\liminf \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\mathrm{d}x = 1$, d'où le résultat.

5. Montrer que pour toute mesure de probabilité μ sur un espace X, et pour tout $f\colon X \to \mathbb{R}$ mesurable positive, on a ;
$$\int_X f\mathrm{d}\mu = \int_{\mathbb{R}^+} \mu(\{f > t\})\mathrm{d}t$$

Solution: Deux solutions Première solution, théorème de Fubini. On remarque que $f(x) = \int_0^\infty 1_{f(x)>t}\mathrm{d}t$. On a donc

$$\int_X f\mathrm{d}\mu = \int_X \int_0^\infty 1_{f(x)>t}\mathrm{d}t\mathrm{d}\mu.$$

On applique le théorème de Fubini-Toninelli et on obtient :

$$\begin{aligned}\int_X f\mathrm{d}\mu &= \int_0^\infty \int_X 1_{f(x)>t}\mathrm{d}\mu\mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathbb{R}^+} \mu(\{f > t\})\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Deuxième solution, en passant par les fonctions simples. On commence par traiter le cas où f est simple. On prend $(A_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ une partition de X telle que

$$f = \sum_{i=1}^n t_i 1_{A_i}$$

avec $t_1 < \ldots < t_n$. On a donc

$$\begin{aligned}\int_X f\mathrm{d}\mu &= \int_X \sum_{i=1}^n t_i 1_{A_i}\mathrm{d}\mu \\ &= \sum_{i=1}^n \int_X t_i 1_{A_i}\mathrm{d}\mu \\ &= \sum_{i=1}^n t_i\mu(A_i).\end{aligned}$$

Par ailleurs, on a

$$\mu(\{f > t\}) = \begin{cases} \mu(X) \text{ si } t < t_1 \\ \sum_{i=k+1}^n \mu(A_i) \text{ si } t_k \leq t < t_{k+1} \\ 0 \text{ si } t_n \leq t \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^+} \mu(\{f > t\})\mathrm{d}t &= t_1\mu(X) + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\sum_{i=k+1}^n \mu(A_i)\right)(t_{k+1} - t_k) \\ &= t_1\mu(X) + \sum_{i=2}^n \sum_{k=1}^{i-1} \mu(A_i)(t_{k+1} - t_k) \\ &= t_1\mu(X) + \sum_{i=2}^n \mu(A_i)(t_i) - t_1) \\ &= \sum_{i=1}^n \mu(A_i)t_i \\ &= \int_X f\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

Pour généraliser au cas où f n'est pas simple, il existe une suite croissante de fonctions simple (f_n) qui converge vers f. En particulier, on a

$$\int_X f_n \mathrm{d}\mu = \int_{\mathbb{R}^+} \mu(\{f_n > t\})\mathrm{d}t.$$

Le terme de gauche tend vers $\int f \mathrm{d}\mu$ d'après le théorème de Beppo-Lévi. De plus $\mu(\{f_n > t\}) \to \mu(\{f > t\})$, donc par le théorème de Beppo Lévi, $\int_{\mathbb{R}^+} \mu(\{f_n > t\})\mathrm{d}t \to \int_{\mathbb{R}^+} \mu(\{f > t\})\mathrm{d}t$.

6. Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de fonctions mesurables dans $(F, \mathcal{F})$ et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partition mesurable de E.
   (a) Montrer que f définie par $f(x) = f_n(x)$ si $x \in A_n$ est mesurable.
   (b) Soit N mesurable de $(E, \mathcal{E})$ dans $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, montrer que g définie par $g(x) = f_{N(x)}(x)$ est mesurable.

Solution:

(a) Soit $A \in \mathcal{F}$, on a
$$f^{-1}(A) = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \cap f_n^{-1}(A) \in \mathbb{E}$$
donc f est bien mesurable.

(b) On pose $A_n = \{x \in E : \ N(x) = n\}$ et la question devient un cas particulier de la question précédente.