EXAMEN FINAL

Théorie de la mesure et intégration– 2020-2021

Pierre-O Goffard

Instructions: On éteint et on range son téléphone.

- La calculatrice et les appareils éléctroniques ne sont pas autorisés.
- Vous devez justifier vos réponses de manière claire et concise.
- Vous devez écrire de la manière la plus lisible possible. Souligner ou encadrer votre réponse finale.

Question:	1	2	3	4	Total
Points:	5	3	4	8	20
Score:					

1. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesurable.

   (a) (1 point) Soit $(A_n)_{n\geqslant 1}$ une suite croissante d'évènements de $\mathcal{A}$. Montrer que $(\mu(A_n))_{n\geqslant 1}$ définit une suite croissante qui converge vers $\mu(A)$, où $A = \bigcup_{n\geqslant 1} A_n$.

   Solution: Voir le cours

   (b) (2 points) Soit $(B_n)_{n\geqslant 1}$ une suite décroissante d'évènements de $\mathcal{A}$ telle que $\mu(B_1) < \infty$. Montrer que $(\mu(B_n))_{n\geqslant 1}$ définit une suite décroissante qui converge vers $\mu(B)$, où $B = \bigcap_{n\geqslant 1} B_n$.

   Solution: Comme la suite $(B_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante alors $B_{n+1} \subset B_n$, ce qui implique $\mu(B_n) \geqslant \mu(B_{n+1})$. La suite $E_n = B_1/B_n, n \geqslant 1$ est une suite croissante d'évènements qui converge vers B_1/B. D'après la question précédente, nous avons $\lim \mu(E_n) = \mu(B_1) - \mu(B)$ On note que

   $$\mu(E_n) = \mu(B_1) - \mu(B_n), \text{ pour tout } n \geqslant 1.$$

   on obtient $\lim \mu(B_n) = \mu(B)$ en passant à la limite l'équation précédente.

   (c) (1 point) Soit $(F_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'évènements de $\mathcal{A}$ tels que $\mu\left(\bigcup_{n\geqslant 1} F_n\right) < \infty$, montrer que

   $$\mu\left(\bigcap_{n\geqslant 1}\bigcup_{k\geqslant n} F_k\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k\geqslant n} F_k\right).$$

Indication: Utiliser le résultat des questions précédentes.

Solution: La suite d'évènements $\left(\bigcup_{k\geqslant n} F_k\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante, il ne reste qu'à appliquer le résultat précédent.

(d) (1 point) Montrer que

$$\sum_{n\geqslant 1} \mu(F_n) < \infty \Rightarrow \mu\left(\bigcap_{n\geqslant 1}\bigcup_{k\geqslant n} F_k\right) = 0.$$

Indication: Utiliser le résultat des questions précédentes.

Solution: Il s'agit du lemme de Borel Cantelli partie I

2. (3 points) Soit f une application mesurable de $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ telle que

$$\int_\Omega f \mathrm{d}\mu < \infty.$$

Montrer que

$$\mu(\{\omega \in \Omega \; ; \; f(\omega) = \infty\}) = 0.$$

Indication: On pourra introduire par exemple la suite de fonction définie par $f_n = n\mathbb{I}_{f>n}, \; n \geqslant 1$.

Solution: Les évènements

$$A_n = \{f > n\}, \; n \geqslant 1$$

forme une suite décroissante d'évènement de limite $\{f = \infty\}$, on en déduit que $\mu(A_n) \to \mu(\{f = \infty\})$. Comme $f_n < f$ pour tout $n \geqslant 1$ alors

$$\mu(A_n) = \frac{1}{n}\int f_n \mathrm{d}\mu < \frac{1}{n}\int f \mathrm{d}\mu.$$

Par passage à la limite, il vient $\mu(\{f = \infty\}) = 0$.

3. Calculer, en justifiant, les limites $(n \to +\infty)$ des suites

(a) (2 points)

$$u_n = \int_0^1 \frac{n}{1+x^2}\sin\left(\frac{x}{n}\right)\mathrm{d}\lambda(x).$$

Solution: On définit la suite de fonctions $f_n(x) = \frac{n}{1+x^2}\sin\left(\frac{x}{n}\right), n \geqslant 0$ continue sur $[0,1]$ et donc intégrable. On note que

$$f_n(x) \to \frac{x}{1+x^2}, \forall x \in [0,1].$$

Comme

$$|f_n(x)| < \frac{x}{1+x^2}, \forall n \geqslant 1,$$

alors d'après le théorème de convergence dominée

$$u_n \to \frac{\ln(2)}{2}.$$

(b) (2 points)

$$u_n = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^m \mathrm{d}\lambda(x), \text{ pour } m \in \mathbb{N}.$$

Solution: On définit la suite de fonctions $f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^m \mathbb{I}_{x \in [0,n]}(x), n \geqslant 0$ continue sur $[0, n]$ et donc intégrable. On note que

$$f_n(x) \to e^{-x} x^m \mathbb{I}_{x \in [0,\infty[}(x), \forall x \in [0, +\infty[.$$

Comme

$$|f_n(x)| < e^{-x} x^m, \forall n \geqslant 1,$$

alors d'après le théorème de convergence dominée

$$u_n \to m! \text{ (IPP répétée)}$$

4. Le but de l'exercice est de montrer que

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

(a) (2 points) Montrer que (on énoncera clairement le(s) théorème(s) utilisés)

$$\int_{[0,1]^2} \frac{1}{1 - xy} \mathrm{d}\lambda(x, y) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}.$$

Indication: On pourra considérer le développement en série entière de $s \mapsto \frac{1}{1-s}$.

Solution: Le développement en série entière donne

$$\int_{[0,1]^2} \sum_{n=0}^{\infty} x^n y^n \mathrm{d}\lambda(x, y) \overset{\text{Beppo-Levi}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{[0,1]^2} \frac{1}{1 - xy} \mathrm{d}\lambda(x, y) \tag{1}$$

$$\overset{\text{Fubini-Tonelli}}{=} \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{n^2}. \tag{2}$$

(b) (2 points) On note $I = \int_{[0,1]^2} \frac{1}{1-xy} \mathrm{d}\lambda(x, y)$, montrer que

$$I = 4 \left(\int_0^{1/\sqrt{2}} \int_0^u \frac{\mathrm{d}v}{2 - u^2 + v^2} \mathrm{d}u + \int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2}-u} \frac{\mathrm{d}v}{2 - u^2 + v^2} \mathrm{d}u \right)$$

Indication: On pourra considérer le changement de variable $(x, y) = \phi(u, v) = \left(\frac{u-v}{\sqrt{2}}, \frac{u+v}{\sqrt{2}}\right)$, il est aussi vivement conseillé de faire un dessin pour représenter le nouveau domaine d'intégration $\phi^{-1}([0, 1]^2)$ dans le repère (u, v).

Solution: La fonction réciproque de ϕ est donnée par

$$(u,v) = \phi^{-1}(x,y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y), \frac{\sqrt{2}}{2}(y-x)\right)$$

Le Jacobien (en valeur absolue) est donnée par $|\mathrm{Jac}_{\phi^{-1}}| = 1$. Le changement de variable consiste à effectuer une rotation des axes d'angle $\pi/4$ dans le sens horaire, le domaine d'intégration demeure un carré sauf que ces sommets se situent aux points $(0,0)$, $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ et $(0, \sqrt{2})$. Par symétrie du domaine d'intégration par rapport à l'axe u et parité de la fonction par rapport à sa deuxième variable on obtient

$$I = 4\left(\int_0^{1/\sqrt{2}}\int_0^u \frac{\mathrm{d}v}{2-u^2+v^2}\mathrm{d}u + \int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2}-u}\frac{\mathrm{d}v}{2-u^2+v^2}\mathrm{d}u\right)$$

(c) (2 points) Evaluer

$$I_1 = \int_0^{1/\sqrt{2}}\int_0^u \frac{\mathrm{d}v}{2-u^2+v^2}\mathrm{d}u.$$

<u>Indication:</u> On rappelle que

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{a^2+t^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right).$$

On pourra considérer le changement de variable $u = \sqrt{2}\sin\theta$.

Solution:

$$I_1 = \frac{\pi^2}{72}$$

(d) (2 points) Evaluer

$$I_2 = \int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2}-u}\frac{\mathrm{d}v}{2-u^2+v^2}\mathrm{d}u.$$

et conclure.
<u>Indication:</u> On pourra considérer le changement de variable $u = \sqrt{2}\cos(2\theta)$

Solution:

$$I_2 = \frac{\pi^2}{36}$$

FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

Fonction	Ensemble de définition	Dérivée
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$
$\tan x$	$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]n\pi - \pi/2, n\pi + \pi/2[$	$1 + \tan^2 x$
$\arccos x$	$[-1, 1]$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arcsin x$	$[-1, 1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$

Quelques identités: Pour $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$
$$\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$$