TD 1: RAPPEL D'ANALYSE RÉELLE ET DÉNOMBREMENT

Intégration L3– 2020
P.-O. Goffard & C. Jahel

---

1. Etudier la convergence des séries de terme générale u_n suivante

   (a) $u_n = \frac{(n^2+1)2^n}{(2n+1)!}$

   Solution: Nous avons
   $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2(n^2+2n+2)}{(2n+2)(2n+3)(n^2+1)} \to 0,$$
   donc la série converge d'après le critère de d'Alembert

   (b) $u_n = \left(\frac{n^2-5n+1}{n^2-4n+2}\right)^{n^2}$

   Solution: Nous avons
   $$u_n = \exp\left\{n^2\left[\ln\left(n^2-5n+1\right) - \ln\left(n^2-4n+2\right)\right]\right\} \underset{n\to\infty}{\approx} \exp\left[-n+O(1)\right].$$
   Nous pouvons alors comparer la série de terme générale (u_n) à l'intégrale convergente $\int_1^\infty f(t)\mathrm{d}t$ de la fonction $f : t \mapsto e^{-t}$ continue, positive et décroissante. Il est aussi possible d'observer que $u_n^{1/n} < e^{-1}$ et de conclure à la convergence de la série via le critère de Cauchy.

   (c) $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} e^{-n}$

   Solution: Nous avons
   $$u_n = \exp\left[n^2 \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - n\right] \underset{n\to\infty}{\approx} \exp\left[n - 2 + o\left(1\right) - n\right] \to e^{-2} > 0,$$
   la série diverge grossièrement.

   (d) $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}$

   Solution: Nous avons
   $$u_n = \exp\left\{-n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\} \underset{n\to\infty}{\approx} \exp\left\{-n^2\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right\} \approx \exp\left\{-n+o\left(n\right)\right\},$$
   puis $u_n^{1/n} \to e^{-1} < 1$, la série converge en vertu du critère de Cauchy.

   (e) $u_n = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

   Solution: Nous avons $u_n = O\left(\frac{2}{n^2}\right)$, la série converge par comparaison avec la série convergente de terme générale $2/n^2$.

2. Soit (a_n) une suite numérique dont la suite des sommes partielles est supposées bornée. Soit (f_n) une suite décroissante de réels positifs de limite nulle. Montrer que la série de termes générale a_nf_n converge. Indication: Penser au critère de Cauchy pour les suites.

Solution: Soit $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, on utiliser le critère de Cauchy. On note que

$$\sum_{k=n}^{p} a_k f_k = \sum_{k=n}^{p} (A_k - A_{k-1}) f_k = A_p f_p - A_{n-1} f_n + \sum_{k=n+1}^{p} (f_{k-1} - f_k) A_{k-1}.$$

On pose $M = \sup\{A_k \ , \ k \geq 0\}$ et $\epsilon_n = \sup\{f_{k-1}, \ k \geq n\}$ puis il vient

$$\begin{aligned} \left|\sum_{k=n}^{p} a_k f_k\right| &\leq M\epsilon_n + M\epsilon_n + \sum_{k=n+1}^{p} |f_{k-1} - f_k| A_{k-1} \\ &= 2M\epsilon_n + \sum_{k=n+1}^{p} |f_{k-1} - f_k| A_{k-1} \leq 3M\epsilon_n \end{aligned}$$

3. Calculer les limites $\overline{\lim}_{n\to+\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ et $\underline{\lim}_{n\to+\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$

Solution: Soit $u_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$, on a $\sup_{k\geq n} u_n = \sup_{k\geq n} u_{2n}$ et $\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = 1$. Le sup d'une suite est toujours supérieure au sup d'une suite extraite!

4. Soit Ω un ensemble non vide et $(\Omega)_i \in I$ une partition de Ω avec I un ensemble fini d'indice. Montrer que $(A \cap \Omega_i)_{i\in I}$ est une partition de $A \subset \Omega$ non vide.

Solution: Soit $A_i = A \cap \Omega_i$ pour $i \in I$. On a $A_i \cap A_j \subset \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ et

$$A = A \cap \Omega = \bigcup_{i\in I} A \cap \Omega_i = \bigcup_{i\in I} A_i.$$

5. Combien d'injection $f : A \mapsto B$ peut on définir en admettant que $\mathrm{Card}(A) = p \leq n = \mathrm{Card}(B)$?

Solution: $\frac{n!}{(n-p)!}$

6. On dispose de n euros que l'on souhaite distribuer à $k < n$ personnes
   (a) En admettant que chaque personne doit recevoir au moins 1 euro, combine de répartition sont possibles?

   Solution: $\binom{n-1}{k-1}$, en effet si on numérote les participants $x_1, \ldots, x_n$, on considère f une injection de $\{2, \ldots, k\}$ dans $\{2, \ldots, n\}$ et on impose $f(1) = 1$ et $f(n+1) = n$. On attribue au participant i la valeur $g(i) = min_{j\neq i}\{f(j) > f(i)\} - f(i)$. Pour une configuration de joueurs ordonnées, il y a donc $\frac{(n-1)!}{(n-k)!}$ possibilités. On divise par $k!$ pour retrouver toutes les répartitions sans ordonnancement des participants.

(b) En relachant la contrainte précédente (possibilité que quelqu'un ne reçoive rien), combien de répartition sont possibles?

Solution: $\binom{n+k-1}{n}$, cela revient à distribuer $n+k$ euros en en donnant au moins un à chaque participant.

7. Montrer que l'ensemble

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R} \; ; \; \exists P \in \mathbb{Z}[x] \backslash \{0\} \text{ t.q. } P(x) = 0\}$$

des réels algébriques est dénombrable. Indication: Commencer par étudier $\mathbb{Z}[x]$

Solution: Il est facile de voir que $\mathbb{Z}$ est dénombrable. Il suit que $\mathbb{Z}^n$ est aussi dénombrable pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par union dénombrable, on voit que $\mathbb{Z}_{fin} = \cup_n \mathbb{Z}^n$ est dénombrable.

De plus, il existe une bijection naturelle entre $\mathbb{Z}_n[X]$ et $\mathbb{Z}^n$, donc $\mathbb{Z}[X]$ est dénombrable.

Enfin $\Omega = \bigcup_{P \in \mathbb{Z}[X]} \{x \text{ racine de P.}\}$ et comme le nombre de racine d'un polynome est fini, on a le résultat.

8. Soit $f : X \mapsto \mathcal{P}(X)$ arbitraire, montrer que f n'est pas surjective en considérant $A = \{x \in X \; ; \; x \notin f(x)\}$. $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est-il dénombrable?

Solution: Supposons que f est surjective, en particulier, il existe $a \in X$ tel que $f(a) = A$. Si $a\mathcal{A}$, cela signifie par définition que $a \notin A$ et réciproquement, $a \notin A$ signifie que $a \in A$, un tel a ne peut pas exister.

$\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable, puisqu'il n'existe pas de surjection de $\mathbb{N}$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

9. Soit $\theta : \mathcal{P}(X) \mapsto \mathcal{P}(X)$ croissant pour l'inclusion,

(a) Montrer que

$$\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{P}(X) \; ; \; A \subset \theta(A)\},$$

est non vide et stable par union arbitraire.

Solution: $\varnothing \in \mathcal{F}$ donc $\mathcal{F}$ n'est pas vide.
Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille telle que $A_i \subset \theta(A)$ pour tout $i \in I$. On a $A_i \subset \cup_{i \in I} A_i$ et donc par croissance $\theta(A_i) \subset \theta(\cup_{i \in I} A_i)$. En particulier comme $A_i \in \mathcal{F}$, $A_i \subset \theta(\cup_{i \in I} A_i)$ et en prenant la réunion, on a $\cup_{i \in I} A_i \subset \theta(\cup_{i \in I} A_i)$.

(b) Montrer que $\mathcal{F}$ admet un plus grand élément E qui vérifie $\theta(E) = E$.

Solution: On rappelle le Lemme de Zorn :
Lemme 1 *Tout ensemble non vide (partiellement) ordonné tel que toute partie d'éléments totalement ordonnée admet un majorant, admet un majorant.*
La question (a) nous permet donc d'affirmer que $\mathcal{F}$ respecte les hypothèses de ce Lemme, en particulier, il y a une partie maximale $E \in \mathcal{F}$. Si E est strictement inclus dans $\theta(E)$, $\theta(E)$ est une partie plus grande que E dans $\mathcal{F}$, ce qui contredit le caractère maximal de E, d'où l'égalité.

(c) Soit $f : X \mapsto Y$ et $g : Y \mapsto X$ injectives, construire $h : X \mapsto Y$ bijective. Indication: Utiliser a) et b) avec $\theta : \mathcal{P}(X) \mapsto \mathcal{P}(X)$ telle que $\theta(A) = [g(f(A)^c)]^c$.

Solution: On vérifie que θ est croissante pour l'inclusion. Soit $A \subset B \in \mathcal{P}(X)$, on a

$$\begin{aligned} & f(A) \subset f(B) \\ & \Rightarrow f(B)^c \subset f(A)^c \\ & \Rightarrow g(f(B)^c) \subset g(f(A)^c) \\ & \Rightarrow [g(f(A)^c)]^c \subset [g(f(B)^c)]^c . \end{aligned}$$

D'après la question (b), il y a donc une partie $E \in \mathcal{P}(X)$ telle que $E = \theta(E)$. On définit une bijection h de X dans Y en penant $h(x) = f(x)$ si $x \in E$ et $h(x) = g^{-1}(x)$. On vérifie que h est bien une bijection. On remarque que si $x \notin E$, alors $h(x) \notin f(E)$ par définition de E et injectivité de g. Ceci nous assure que h est injective. De plus h est bien surjective puisque tout élément de $Y \backslash f(E)$ a une image dans $X \backslash E$.