DEUXIÈME SESSION

Théorie de la mesure – 2018-2019

Pierre-O Goffard

Instructions: On éteint et on range son téléphone.

- La calculatrice et les appareils éléctroniques ne sont pas autorisés.
- Vous devez justifier vos réponses de manière claire et concise.
- Vous devez écrire de la manière la plus lisible possible. Souligner ou encadrer votre réponse finale.

Question:	1	2	3	Total
Points:	2	6	9	17
Score:				

1. (2 points) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré avec μ une mesure finie. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ tels que $\mu(A_n) = \mu(\Omega)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Montrer que
$$\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \mu(\Omega)$$

Solution: On considère A_1 et A_2 les deux premiers éléments de $(A_n)_n \in \mathbb{N}$. On a $A_1 \cup A_2 \in \Omega$ donc $\mu(A_1 \cup A_2) \leq \mu(\Omega)$, on a aussi $\mu(A_1 \cup A_2) \geq \mu(A_1) = \mu(\Omega)$ donc $\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(\Omega)$. On déduit de
$$\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2) - \mu(A_1 \cap A_2)$$
que $\mu(A_1 \cap A_2) = \mu(\Omega)$. On montre par récurrence que $\mu\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) = \mu(\Omega)$, la suite définie par $\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{A}$. On a donc
$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(\Omega).$$

2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonction $f_n : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ définies par

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \cos(x)\mathbb{I}_{[0,n]}(x).$$

   (a) (1 point) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonction mesurable.

   Solution: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions réelles et continues, donc mesurables

   (b) (1 point) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f que l'on explicitera.

   Solution: Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a l'équivalence

$$\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \sim e^{-x}, \text{ pour } n \to +\infty$$

   On en déduit que

$$f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x) = e^{-x}\cos(x)\mathbb{I}_{[0,+\infty[}$$

   (c) (4 points) Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$I_n = \int_{[0,n]} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \cos(x)\mathrm{d}\lambda(x)$$

   Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente et donner sa limite.

   <u>Indications:</u> On pourra utiliser l'inégalité $\ln(1-t) \leq -t$ pour $t \in [0, 1[$.

   Solution: On a

$$I_n = \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\lambda(x),$$

   où $(f_n)_n \in \mathbb{N}$ est une suite de fonctions mesurables convergeant vers $f(x) = e^{-x}\cos(x)\mathbb{I}_{[0,\infty[}$, de plus on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|f_n(x)| \leq \left|\exp\left[n\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)\right]\right| \mathbb{I}_{[0,n]}(x) \leq e^{-x} = g(x)$$

   Par application du théorème de convergence dominée, la suite (I_n) converge et il vient

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} I_n &= \int f(x)\mathrm{d}\lambda(x) \\
&= \int_0^\infty e^{-x}\cos(x)\mathrm{d}x \\
&= \Re\left\{\int_0^\infty e^{-x}e^{-ix}\mathrm{d}x\right\} \\
&= \Re\left\{\frac{1}{1+i}\right\} = 1/2
\end{aligned}$$

3. Soit l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2-1}\mathrm{d}x.$$

(a) (2 points) Montrer que l'intégrale I est bien définie.

Solution: La fonction $f(x) = \ln(x)/(x^2-1)$ est continue sur $(0,1) \times (1,+\infty)$ donc localement intégrable. Nous devons étudier la situation en $x = 0, 1, +\infty$.

- Au voisinage de 0, $\sqrt{x}f(x) \to 0$ donc $f(x) = o(x^{-1/2})$ et f est intégrable en 0.
- Au voisinage de 1, on a $f(x) \to 1/2$ donc prolongeable par continuité et partant intégrable.
- Au voisinage de ∞, on a $x^{3/2}f(x) \to 0$ donc $f(x) = o(x^{-3/2})$ et f est intégrable.

(b) (2 points) Montrer que

$$\int_{[0,\infty[^2} \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}\mathrm{d}\lambda_2(x,y) = \frac{\pi^2}{2},$$

où λ_2 est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$.

<u>Indication:</u> Intégrer d'abord par rapport à x.

Solution:

$$\begin{aligned}
\int_{[0,\infty[^2} \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}\mathrm{d}\lambda_2(x,y) &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+y)\sqrt{y}}\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+y)\sqrt{y}}\mathrm{d}y \\
&= \frac{\pi^2}{2}
\end{aligned}$$

(c) (2 points) Montrer que pour tout $x > 0$, $x \neq 1$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}\mathrm{d}y = \frac{2\ln(x)}{x^2-1}.$$

<u>Indication:</u> On effectuera une décomposition en éléments simples.

Solution:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}\mathrm{d}y &= \int_0^{\infty} \frac{-1}{(x^2-1)(1+y)} + \frac{x^2}{(x^2-1)(1+x^2y)}\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{x^2-1}\left[\ln\left(\frac{1+x^2y}{1+y}\right)\right]_0^{+\infty} \\
&= \frac{2\ln(x)}{x^2-1}
\end{aligned}$$

(d) (1 point) En déduire que $I = \frac{\pi^2}{4}$.

Solution: Conséquence de (b) et (c)

(e) (1 point) Montrer que

$$I = 2\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1}\mathrm{d}x.$$

Indication: Relation de Chasles à partir de $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2-1}$.

Solution:

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1}\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2-1}\mathrm{d}x$$

puis changement de variable $u = 1/x$ dans la deuxième intégrale

$$I = 2\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1}\mathrm{d}x$$

(f) (1 point) Déduire de la question précédente que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Indication: Effectuer un développement en série entière de $x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$ valable pour $x \in [0,1[$.

Solution:

$$\begin{aligned} I &= -2\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1 x^{2k}\ln(x)\mathrm{d}x \\ &= 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}. \end{aligned}$$

puis $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \pi^2/8$

FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

Fonction	Ensemble de définition	Dérivée
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$
$\tan x$	$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]n\pi - \pi/2, n\pi + \pi/2[$	$1 + \tan^2 x$
$\arccos x$	$[-1, 1]$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arcsin x$	$[-1, 1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$