
EXAMEN FINAL

Modèles Aléatoires Discrets– 2021-2022
Pierre-O Goffard

Instructions: On éteint et on range son téléphone.

- La calculatrice et les appareils électroniques ne sont pas autorisés.
- Vous devez justifier vos réponses de manière claire et concise.
- Vous devez écrire de la manière la plus lisible possible. Souligner ou encadrer votre réponse finale.
- Document autorisé: Une feuille manuscrite recto-verso

Question:	1	2	3	4	Total
Points:	6	7	5	2	20
Score:					

1. Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov homogène sur un espace d'état $E = \{1, 2, 3, 4\}$ de matrice des transitions

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & 2/5 & 2/5 & 0 \\ 1/10 & 2/10 & 4/10 & 3/10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) (2 points) Combien de classe de communication la chaîne de Markov admet-elle? Sont-elles ouvertes ou fermées? La chaîne est-elle irréductible?

Solution: La chaîne comprend 3 classes de communication

- $O_1 = \{2, 3\}$ est une classe ouverte
- $F_1 = \{1\}$ et $F_2 = \{4\}$ sont des classes ouvertes

La chaîne n'est pas irréductible.

- (b) (2 points) Discuter de l'existence et de l'unicité d'une mesure de probabilité invariante. Décrivez le comportement asymptotique de la chaîne (lorsque $n \rightarrow \infty$)

Solution: Comme l'espace d'état est fini alors il existe une mesure de probabilité invariante. Comme il y a plus d'une classe fermée alors il y a une infinité de mesure de probabilité invariante donnée par

$$\Pi = \alpha \Pi_1 + (1 - \alpha) \Pi_4,$$

avec

$$\Pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Pi_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \alpha \in [0, 1].$$

- (c) (2 points) Soit $A = \{1, 4\}$ et $\tau_A = \inf\{n \geq 0 ; X_n \in A\}$. Calculer

$$\mathbb{E}_x(\tau_A) = \mathbb{E}(\tau_A | X_0 = x), \text{ pour } x \in E.$$

Solution: On a $E_1(\tau_A) = E_4(\tau_A) = 0$ et on résout le système (analyse à un pas, résultat du cours)

$$\begin{cases} E_2(\tau_A) = 1 + \frac{2}{5}E_2(\tau_A) + \frac{2}{5}E_3(\tau_A) \\ E_3(\tau_A) = 1 + \frac{2}{10}E_2(\tau_A) + \frac{4}{10}E_3(\tau_A) \end{cases}$$

On obtient $E_2(\tau_A) = 25/7$ et $E_3(\tau_A) = 20/7$.

2. Une puce se déplace sur les sommets d'un carré $ABCD$ et au centre du carré noté O , voir la Figure 1 A chaque pas de temps, la puce change de sommet. Elle ne peut se déplacer que vers

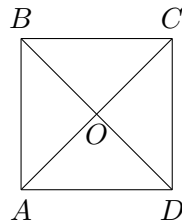


Figure 1: Carré $ABCD$ muni de son centre O sur lequel la puce se promène

un sommet adjacent, par exemple si elle se trouve sur le sommet A elle ne peut pas rejoindre le sommet C . Elle sautera sur le sommet B , D ou O de manière équiprobable. On supposera que depuis le sommet O elle peut sauter vers n'importe quel autre sommet (toujours de manière équiprobable). On modélise la position de la puce sur le carré au cours du temps via une chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $X_0 = O$.

- (a) (1 point) Donner l'espace d'état et la matrice des transitions de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Solution: $E = \{A, B, C, D, O\}$ et

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

- (b) (1 point) Donner la période de chaque état

Solution: On a

$$d(A) = \text{pgcd}\{2, 3, \dots\} = 1$$

Comme la chaîne est irréductible alors

$$d(x) = 1, \forall x \in E$$

- (c) (1 point) Justifier l'existence et l'unicité de la mesure de probabilité invariante

Solution: Comme l'espace d'état est fini alors il existe une mesure de probabilité invariante. Comme la chaîne est irréductible alors cette mesure de probabilité est unique.

- (d) (1 point) Montrer que pour tout
- $n \geq 1$

$$\mathbb{P}(X_n = A) = \mathbb{P}(X_n = B) = \mathbb{P}(X_n = C) = \mathbb{P}(X_n = D).$$

Dans la suite on notera q_n cette probabilité.Indication:Raisonner par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, en se rappelant que $X_0 = O$.**Solution:** Au rang $n = 0$, on a

$$\mathbb{P}(X_0 = A) = \mathbb{P}(X_0 = B) = \mathbb{P}(X_0 = C) = \mathbb{P}(X_0 = D) = 0.$$

Supposons la propriété vérifiée au rang n , qu'en est il au rang $n + 1$? On a, pour tout $x \in E$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+1} = x) &= \sum_{y \in E} \mathbb{P}(X_{n+1} = x | X_n = y) \mathbb{P}(X_n = y) \\ &= \sum_{y \in E/\{O, x\}} \mathbb{P}(X_{n+1} = x | X_n = y) \mathbb{P}(X_n = y) + \mathbb{P}(X_{n+1} = x | X_n = O) \mathbb{P}(X_n = O) \\ &= 2 \times \frac{1}{3} q_n + \frac{1}{4} (1 - 4q_n) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} q_n \end{aligned}$$

- (e) (1 point) Soit
- $p_n = \mathbb{P}(X_n = O)$
- , montrer que

$$p_{n+1} = \frac{1}{3}(1 - p_n), \text{ pour } n \geq 0.$$

Solution: On a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$p_n = 1 - 4q_n,$$

on en déduit que

$$p_{n+1} = 1 - 4 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} q_n \right) = \frac{4}{3} q_n = \frac{1 - p_n}{3}$$

- (f) (1 point) En déduire la valeur de
- p_n
- pour tout
- $n \geq 0$
- .

Solution: $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique. On cherche r solution de

$$x = \frac{1-x}{3},$$

on trouve $r = 1/4$ et on pose $u_n = p_n - 1/4$. (u_n) est une suite géométrique de raison 3 qui vérifie

$$u_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n u_0$$

on en déduit que

$$p_n = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

- (g) (1 point) Calculer la proportion de temps passé par la puce sur chacun des sommets et au centre du carré pour une trajectoire de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de longueur infinie.

Solution: La proportion d'instant passé en chaque sommet coïncide avec la loi limite de X_n qui peut être obtenu en étudiant la limite des suites p_n et q_n . On a

$$p_n \rightarrow \frac{1}{4} \text{ et } q_n \rightarrow \frac{3}{16} \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.$$

3. Soit $(U_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires iid de loi uniforme $\text{Unif}([0, 1])$ définies sur un espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On note $\mathcal{F}_n = \sigma(U_1, \dots, U_n)$ pour $n \geq 1$. Soient $p, \theta \in]0, 1[$. On définit le processus $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par récurrence avec

$$X_0 = p, \quad X_{n+1} = \theta X_n + (1 - \theta) \mathbb{I}_{U_{n+1} \leq X_n}, \quad n \geq 0.$$

- (a) (1 point) Montrer que $X_n \in [0, 1]$ pour tout $n \geq 0$.

Solution: Par récurrence sur $n \geq 0$. On a $X_0 = p \in]0, 1[$ par hypothèse. Supposons la propriété vérifiée au rang n , qu'en est-il au rang $n + 1$? On a $X_{n+1} \geq 0$ et

$$X_{n+1} \leq X_n \theta + (1 - \theta) \leq \theta + (1 - \theta) = 1.$$

- (b) (1 point) Montrer que $(X_n)_{n \geq 0}$ est une \mathcal{F}_n -martingale

Solution: On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(\theta X_n + (1 - \theta) \mathbb{I}_{U_{n+1} \leq X_n} | \mathcal{F}_n) \\ &= \theta X_n + (1 - \theta) \mathbb{P}(U_{n+1} \leq X_n | \mathcal{F}_n) \\ &= \theta X_n + (1 - \theta) X_n = X_n. \end{aligned}$$

- (c) (1 point) Montrer que

$$\mathbb{E}[(X_{n+1} - X_n)^2] = (1 - \theta)^2 \mathbb{E}[X_n(1 - X_n)]$$

Solution:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[(X_{n+1} - X_n)^2] &= (1 - \theta)^2 \mathbb{E}[(\mathbb{I}_{U_{n+1} \leq X_n} - X_n)^2] \\
 &= (1 - \theta)^2 \mathbb{E}[\mathbb{I}_{U_{n+1} \leq X_n} - 2X_n \mathbb{I}_{U_{n+1} \leq X_n} + X_n^2] \\
 &= (1 - \theta)^2 \mathbb{E}[\mathbb{E}(\mathbb{I}_{U_{n+1} \leq X_n} - 2X_n \mathbb{I}_{U_{n+1} \leq X_n} + X_n^2 | X_n)] \\
 &= (1 - \theta)^2 \mathbb{E}[X_n - X_n^2]
 \end{aligned}$$

- (d) (1 point) Comme $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale positive et bornée alors elle converge presque sûrement vers une variable aléatoire notée X_∞ . Montrer que $X_\infty \in \{0, 1\}$ \mathbb{P} -presque partout en utilisant les questions précédentes.

Solution: En passant à la limite l'identité précédente, on obtient

$$\mathbb{E}[X_\infty(1 - X_\infty)] = 0$$

ce qui équivaut à dire que $X_\infty(1 - X_\infty) = 0$ \mathbb{P} -presque partout puisque $X_n(1 - X_n) \geq 0$. On en déduit que $X_\infty \in \{0, 1\}$ \mathbb{P} -presque partout.

- (e) (1 point) En déduire la loi de X_∞ .

Solution: X_∞ suit une loi de Bernoulli de paramètre

$$\mathbb{E}(X_\infty) = \mathbb{E}(X_0) = p.$$

4. (2 points) Supposons que le nombre de but marqués par l'Olympique Lyonnais au cours du temps soit modélisé par un processus de Poisson $(N_t)_{t \geq 0}$ d'intensité λ . On note T_1, T_2, \dots les temps d'arrivée des buts et soit T la durée du match. Calculer

$$\mathbb{P}(T_2 \leq T/2 | N_T = 2),$$

la probabilité que si deux buts sont marqués alors ils sont marqués avant la mi-temps.

Solution: On sait d'après le cours que

$$f_{T_1, T_2 | N_T}(t_1, t_2 | 2) = \frac{2!}{T^2} \mathbb{I}_{0 < t_1 < t_2 \leq T}(t_1, t_2).$$

On en déduit que

$$\mathbb{P}(T_2 < T/2 | N_T = 2) = \int_0^{T/2} \int_0^{t_2} \frac{2!}{T^2} dt_1 dt_2 = \frac{1}{4}.$$

 FORMULAIRE

Nom	abbrev.	Loi	$\mathbb{E}(X)$	$\text{Var}(X)$	FGM
Binomial	$\text{Bin}(n, p)$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$	$[(1-p) + pe^t]^n$
Poisson	$\text{Pois}(\lambda)$	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ	$\exp(\lambda(e^t - 1))$
Geometric	$\text{Geom}(p)$	$(1-p)^{k-1} p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$ pour $t < -\ln(1-p)$
Uniform	$\text{Unif}(a, b)$	$\begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq t \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}$
Exponential	$\text{Exp}(\lambda)$	$\begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda-t}$ pour $t < \lambda$
Normal	$N(\mu, \sigma^2)$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right) \exp\left(\frac{-(t-\mu)^2}{2\sigma^2} \right)$	μ	σ^2	$e^{\mu t} e^{\sigma^2 t^2/2}$