EXAMEN FINAL

Modèles Aléatoires Discrets– 2018-2019
Pierre-O Goffard

Instructions: On éteint et on range son téléphone.

- La calculatrice et les appareils éléctroniques ne sont pas autorisés.
- Vous devez justifier vos réponses de manière claire et concise.
- Vous devez écrire de la manière la plus lisible possible. Souligner ou encadrer votre réponse finale.

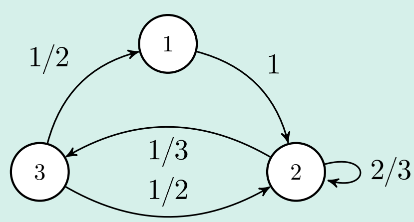
Question:	1	2	3	4	Total
Points:	4	3	2	11	20
Score:					

1. Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une chaîne de Markov d'espace d'état $\{1, 2, 3\}$ de matrice de transition:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) (1 point) Desiner le graph des transitions de $(X_n)_n \geqslant 0$

Solution:



(b) (1 point) La chaine est-elle irréductible? Combien de classe d'équivalence comprend-elle? Ces classes sont-elles ouvertes ou fermées?

Solution: La chaine est irréductible. Il n'y a qu'une seule classe d'équivalence qui est donc fermée.

(c) (2 points) Donner la loi invariante π après voir justifier son existence et son unicité.

Solution: L'espace d'état est fini et la chaine de Markov est irréductible. La loi invariante existe et est unique donnée par $\pi = (1/9, 6/9, 2/9)$.

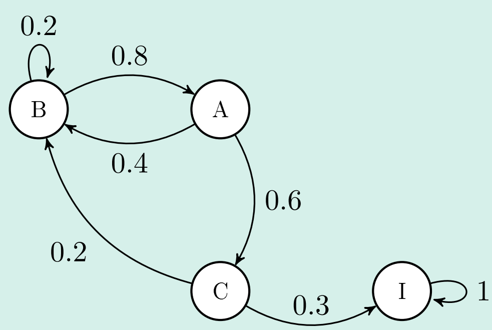
2. Afin de remporter la coupe d'immortalité, Harry doit vaincre trois monstres dans cet ordre

   1. Le Basilic (B)
   2. L'Acromentule (A)
   3. La Chimère (C)

   A chaque étape, si Harry est défait, il doit recommencer depuis le début (avec ce bon vieux basilic qui aura eu le temps de récupérer). On suppose qu'il vainc le basilic avec probabilité 0.8, l'acromentule avec probabilité 0.6, et la chimere avec probabilité 0.3. S'il parvient à se défaire de la chimère alors il remporte la coupe d'immortalité (I). On utilise une chaine de Markov homogène $(X_n)_{n\geqslant 0}$ pour suivre Harry dans sa quête.

   (a) (1 point) Donner l'espace d'état, le graph et la matrice de transition associés à la chaine de Markov $(X_n)_{n\geqslant 0}$

   Solution: L'espace d'état est $E = \{B, A, C, I\}$. Le graph des transitions est donnée par



   La matrice de trasition est donnée par

$$Q = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0.6 & 0 \\ 0.7 & 0 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (b) (1 point) Donner les classes d'équivalence, indiquer si elles sont ouvertes ou fermées.

   Solution: Deux classes d'équivalence

   - $\{B, A, C\}$ ouverte
   - $\{I\}$ fermée

   (c) (1 point) Donner la période de chaque état.

   Solution: Tous les états sont apériodiques (de période 1).

3. On suppose que le nombre de regards méchants que je reçois au cours de l'examen final est bien modélisé par un processus de Poisson d'intensité λ. L'unité de temps est l'heure et l'examen dure 2 heures.

   (a) (1 point) Quelle est la probabilité que je reçoivent au moins 3 regards méchants lors de la première heure? On donnera le résultat en fonction de λ.

   Solution:
   $$\mathbb{P}(N_1 \geqslant 3) = 1 - e^{-\lambda}\left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2}\right)$$

   (b) (1 point) Quelle est la probabilité que je reçoivent exactement 8 regards méchants lors de la première heure et 1 seul regard méchant pendant les 30 dernières minutes? On donnera le résultat en fonction de λ.

   Solution:
   $$\mathbb{P}(N_1 = 8, N_2 - N_{1.5} = 1) = \mathbb{P}(N_1 = 8)\mathbb{P}(N_2 - N_{1.5} = 1) = e^{-3\lambda/2}\frac{\lambda^9}{2 \times 8!}.$$

4. Une compagnie d'assurance propose un contrat d'assurance auto couvrant une année et fixe un niveau de prime en fonction du nombre d'accidents reportés l'année précédente. Pour chaque assuré, pour chaque année,

   - Le nombre d'accident est modélisé par une variable aléatoire de comptage N de loi de probabilité
   $$\mathbb{P}(N = 0) = \frac{7}{10},\ \mathbb{P}(N = 1) = \frac{2}{10},\ \text{et } \mathbb{P}(N = 2) = \frac{1}{10}.$$
   - Le montant des sinistres (indemnisation que la compagnie d'assurance verse a l'assuré en cas d'accident de voiture) est une variable aléatoire positive U suivant une loi hyperexponentielle $\text{HExp}(p, \delta_1, \delta_2)$ de densité
   $$f_U(x) = \left[p\delta_1 e^{-\delta_1 x} + (1-p)\delta_2 e^{-\delta_2 x}\right]\mathbb{I}_{[0,+\infty)}(x)$$
   où $0 \leqslant p \leqslant 1$ et $\delta_1, \delta_2 > 0$.
   - Le montant agrégé des sinistres pour un assuré (La somme de toutes les indemnisations de l'année en cours) est donnée par la variable aléatoire
   $$S = \sum_{k=1}^{N} U_k,$$
   où les U_k sont **i.i.d.** de même loi que U.
   - le montant des sinistres est indépendant du nombre de sinistres (N est indépendant de $U_1, U_2 \ldots$).

   Les questions sont plus ou moins indépendantes.

   (a) (1 point) Calculer la moyenne de N, donner le résultat sous la forme d'une fraction (la plus réduite possible).

Solution:
$$\mathbb{E}(N) = \frac{2}{5}$$

(b) (1 point) Calculer la moyenne de U, donner le résultat sous la forme d'une fraction (la plus réduite possible) avec $p = 1/2$, $\delta_1 = 1/4$ et $\delta_2 = 1/6$.

Solution:
$$\mathbb{E}(U) = 5$$

(c) (1 point) En suivant le principe de la moyenne, la prime que doit payer l'assuré est donnée par
$$c = (1 + \eta)\mathbb{E}(S).$$
Calculer c pour un chargement de sécurité $\eta = 5\%$, avec $p = 1/2$, $\delta_1 = 1/4$ et $\delta_2 = 1/6$.

Solution:
$$c = (1 + \eta)\mathbb{E}(U) \times \mathbb{E}(N) = \frac{105}{50} = \frac{21}{10}$$

(d) (1 point) Calculer la variance de S. Donner le résultat sous la forme d'une fraction (la plus réduite possible) avec $p = 1/2$, $\delta_1 = 1/4$ et $\delta_2 = 1/6$.

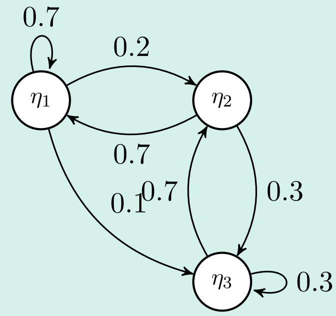
Solution:
$$\begin{aligned}\mathbb{V}(S) &= \mathbb{E}(U)^2 \operatorname{Var}(N) + \mathbb{E}(N) \operatorname{Var}(U) \\ &= 25 \times \frac{11}{25} + \frac{2}{5} \times 27 \\ &= 11 + \frac{54}{5} = \frac{109}{5}\end{aligned}$$

(e) (1 point) On suppose maintenant que le chargement de sécurité appliqué pour un assuré évolue en fonction du nombre de sinistres reportés l'année précédente. La valeur du chargement de sécurité est dictée par une chaine de Markov homogène $(X_n)_{n\geqslant 0}$ d'espace d'état $E = \{\eta_1, \eta_2, \eta_3\}$. On suppose que $X_0 = \eta_1$, Les transitions d'un chargement de sécurité vers un autre s'effectuent de la manière suivante:

- L'assuré reste dans l'état η_1 si aucun accident n'est reporté, va dans l'état η_2 si un accident est reporté et va dans l'état η_3 si deux accidents de voiture sont reportés.
- Dans l'état η_2, l'assuré va dans l'état η_1 si aucun accident de voiture n'est reporté, et va dans l'état η_3 sinon.
- Dans l'état η_3, L'assuré va dans l'état η_2 si aucun accident de voiture n'est reporté, et reste dans l'état η_3 sinon.

Donner le graph et la matrice de transition de cette chaine de Markov.

Solution: Le graph des transitions est donné par



La matrice de transition est donnée par

$$Q = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.7 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0.7 & 0.3 \end{pmatrix}$$

(f) (2 points) Donner la loi invariante après avoir justifier son existence et son unicité.

Solution: La chaine est irréductible sur un espace d'état fini, elle admet donc une unique loi invariant donnée par

$$\pi = (49/86 \; 21/86 \; 16/86)$$

(g) (2 points) Calculer la prime

$$c_\infty = \mathbb{E}\left[(1 + X_\infty)S\right]$$

correspondant à la prime payée par un assuré client de la compagnie d'assurance pendant un nombre *suffisant* d'années, donner le résultat en fonction de η_1, η_2 et η_3, avec $p = 1/2$, $\delta_1 = 1/4$ et $\delta_2 = 1/6$.

Solution:

$$\begin{aligned} c_\infty &= \mathbb{E}\left[(1 + X_\infty)\right]\mathbb{E}(S) \\ &= \left(1 + \frac{49}{86}\eta_1 + \frac{21}{86}\eta_2 + \frac{16}{86}\eta_3\right) 2 \\ &= \left(2 + \frac{49}{43}\eta_1 + \frac{21}{43}\eta_2 + \frac{16}{43}\eta_3\right) \end{aligned}$$

(h) (2 points) Supposons que la compagnie d'assurance constitue une réserve u au début de chaque année et que le portefeuille contient m assurés, clients de la compagnie depuis très longtemps. La probabilité de ruine, pour l'année courante, est donnée par

$$\psi(u) = \mathbb{P}\left(u + mc_\infty - \sum_{k=1}^{m} S_k < 0\right)$$

où les S_k sont des variables aléatoires **i.i.d.** distribuées comme S. Notons $\mu = \mathbb{E}(S)$ et $\sigma = \sqrt{\mathbb{V}(S)}$.

Donner une approximation de la probabilité de ruine en fonction de ϕ (la fonction de répartition de la loi normale centrée-réduite $\mathrm{N}(0,1)$), c_∞, m, μ, σ, et u.

Solution: On applique le théorème Centrale Limite pour obtenir

$$\begin{aligned}\psi(u) &= \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{m} S_k > u + mc_\infty\right)\\ &= \mathbb{P}\left[\frac{\sqrt{m}}{\sigma}\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} S_k - \mu\right) > \frac{\sqrt{m}}{\sigma}\left(\frac{u}{m} + c_\infty - \mu\right)\right]\\ &\approx 1 - \phi\left[\frac{\sqrt{m}}{\sigma}\left(\frac{u}{m} + c_\infty - \mu\right)\right]\end{aligned}$$

FORMULAIRE

Nom	abbrev.	Loi	$\mathbb{E}(X)$	$\mathrm{Var}(X)$	FGM
Binomial	$\mathrm{Bin}(n,p)$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$	$[(1-p)+pe^t]^n$
Poisson	$\mathrm{Pois}(\lambda)$	$e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ	$\exp(\lambda(e^t-1))$
Geometric	$\mathrm{Geom}(p)$	$(1-p)^{k-1}p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$ pour $t<-\ln(1-p)$
Uniform	$\mathrm{Unif}(a,b)$	$\begin{cases}\frac{1}{b-a} & a\leqslant t\leqslant b\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}$
Exponential	$\mathrm{Exp}(\lambda)$	$\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t} & t\geqslant 0\\ 0 & t<0\end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda-t}$ pour $t<\lambda$
Normal	$\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)\exp\left(\frac{-(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$	μ	σ^2	$e^{\mu t}e^{\sigma^2t^2/2}$

Théorème Central Limite.
Soient $X_1,\ldots,X_n$ une suite de n variables aléatoires **i.i.d.** telles que $\mu=\mathbb{E}(X_1)$ et $\sigma^2=\mathbb{V}(X_1)<\infty$. Alors, on a

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X}_n-\mu)\overset{\text{Loi}}{\to}\mathrm{N}(0,1),\ \text{lorsque } n\to\infty,$$

où $\bar{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k$ désigne la moyenne empirique.