

A função *hash* criptográfica SHA-3

1 Definições

- Uma *função hash criptográfica*, ou função de resumo criptográfica (futuraamente denotada por h), é um algoritmo matemático que mapeia uma quantidade de bytes qualquer¹ para uma palavra de tamanho fixo, ou seja, $h : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Para que seja resistente a diversos tipos de criptoanálise, uma função $h : X \rightarrow Y$ deve respeitar algumas propriedades:

- Resistência à pré-imagem*: Para um resumo $M' \in Y$, é computacionalmente impraticável² encontrar a mensagem $M \in X$ tal que $h(M) = M'$. Uma função matemática com esta propriedade é chamada de unidirecional.
- Resistência à segunda pré-imagem*: Para uma mensagem $M_0 \in X$, é computacionalmente impraticável encontrar uma segunda mensagem $M_1 \in X$ tal que $M_0 \neq M_1$ e $h(M_0) = h(M_1)$.
- Resistência à colisão*: Para duas mensagens $M_0, M_1 \in X$, é computacionalmente impraticável encontrar $M_0 \neq M_1$ e $h(M_0) = h(M_1)$.

É importante notar que, embora as definições sejam extremamente parecidas, resistência à segunda pré-imagem e resistência à colisão são conceitos diferentes; um atacante não consegue escolher a primeira mensagem caso queira atacar a resistência à segunda pré-imagem; para a resistência à colisão, o atacante pode escolher livremente o par de mensagens.

- Algumas aplicações destas funções são enumeradas abaixo:
 - Podem ser utilizadas para verificar a integridade da mensagem, comparando resumos criptográficos calculados antes e depois da transmissão de mensagem e/ou arquivos.
 - Para evitar o armazenamento de senhas em texto claro, é possível armazenar apenas o resumo criptográfico de cada senha e compará-lo na autenticação do usuário.
 - Resumos criptográficos são comumente descritos como identificadores únicos seguros para um arquivo ou informação digital (por exemplo, *commits* em um sistema de controle de versão).
- O padrão SHA-3, descrito pelo documento FIPS 202 [4], é baseado em uma instância da família KECCAK de permutações matemáticas, selecionada pelo NIST (*National Institute of Standards and Technology*) e especificada neste documento.

2 O algoritmo SHA-3

- KECCAK é uma família de funções esponja. Este tipo de função é uma generalização do conceito da função de resumo criptográfica com saída infinita. Após a aplicação de uma função de preenchimento (*padding*) à mensagem M , a função esponja tem duas fases: a fase de absorção (*absorbing*), responsável por intercalar blocos de M com aplicações de uma função de permutação f , de modo iterativo; e a fase de compressão (*squeezing*), onde os blocos de saída, intercalados novamente pela permutação f , são concatenados para gerar uma palavra com um número de bits configurável pelo usuário. Esse processo pode ser observado na figura 1.
- A permutação f é descrita como uma sequência de operações num estado A , que é um vetor de elementos tridimensional em $GF(2)$. f é uma permutação iterativa, consistindo de uma sequência de rodadas. Uma rodada R consiste da composição de cinco etapas: $R = \iota \circ \chi \circ \pi \circ \rho \circ \theta$, como visto em 2:
 - A etapa θ faz a soma XOR de um elemento de A e todos os elementos das colunas adjacentes indicadas.
 - A etapa ρ dispersa os elementos entre cortes transversais verticais de A .
 - A etapa π rearranja as posições de elementos em cortes transversais horizontais de A .
 - A etapa χ tem como efeito fazer a soma XOR de cada bit em uma linha, de acordo com uma função não-linear de dois outros bits adjacentes.
 - A etapa ι é utilizada para quebrar a simetria das operações acima, e sem esta etapa, todas as rodadas teriam a mesma saída. A soma XOR de alguns bits do estado A é feita com um bit específico de uma sequência gerada por um LFSR³, alimentado pelo índice da rodada atual.

¹algumas funções desse tipo têm limites quanto ao tamanho da entrada, embora estes sejam extremamente grandes.

²o tempo ou recursos gastos para esta computação excedem a validade ou utilidade da informação desejada.

³linear-feedback shift register, um tipo de gerador de sequências pseudoaleatórias.

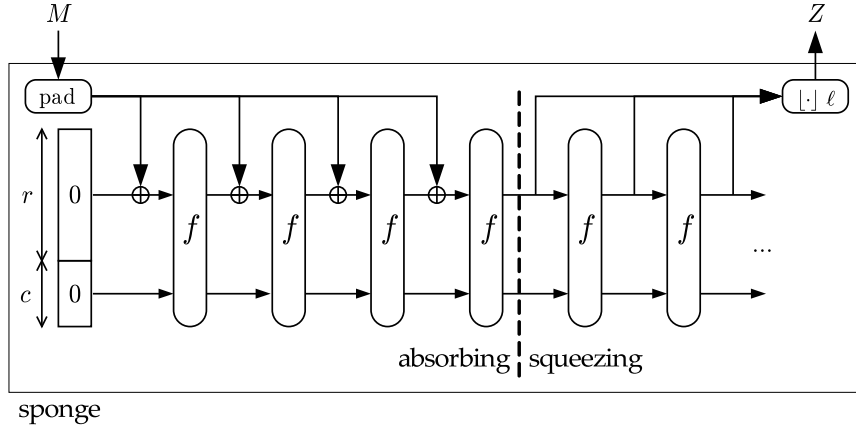


Figura 1: Uma construção esponja. Imagem retirada de [1].

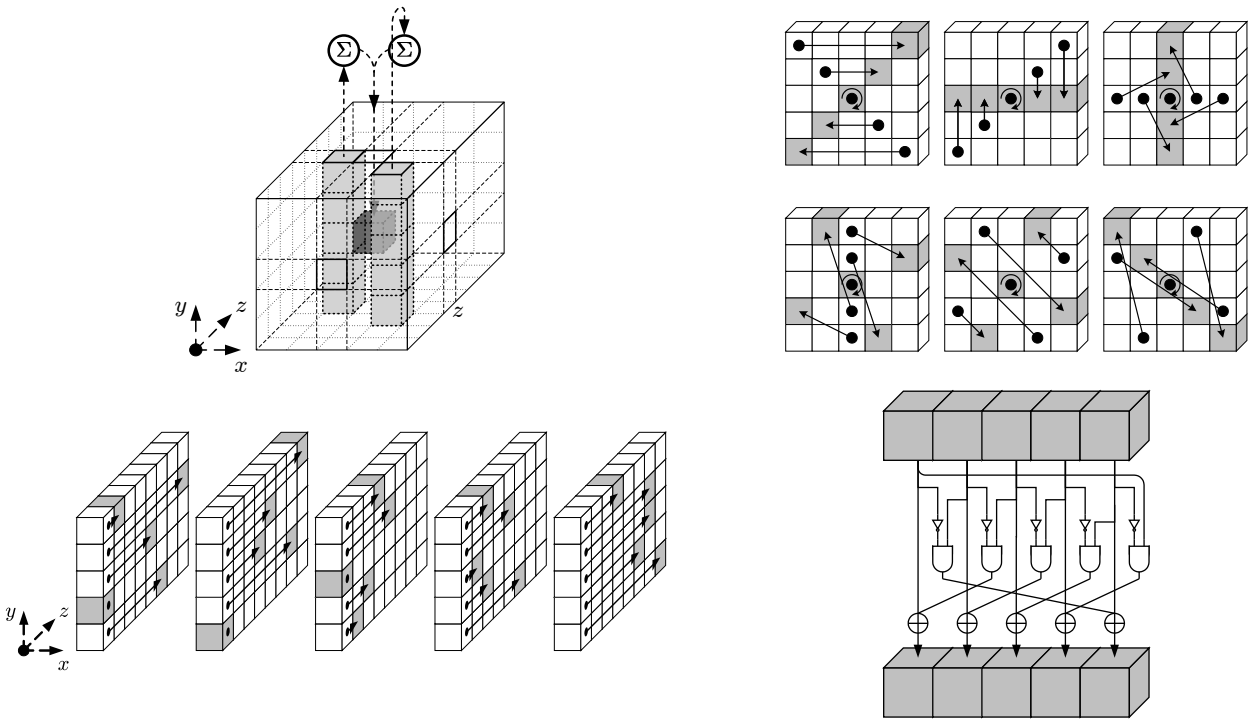


Figura 2: Da esquerda para a direita e de cima para baixo, as etapas θ , π , ρ e χ . Imagens retiradas de [2].

3 Especificações formais

- (a) O vetor de estados) (*state array*) tem como função armazenar cada estado entre permutações f do KECCAK, de modo tridimensional. Este ‘cubo’ tem dimensões $5 \times 5 \times 2^\ell$, $\ell \in [0, 6]$, e $2^\ell = w$. O número total de bits neste cubo, denotado por b , é configurável pelo usuário e é geralmente chamado de *largura* do estado; esta, por sua vez, é dividida em $r + c$ bits, chamados respectivamente de *taxa* e *capacidade*, como vistos na representação gráfica da construção esponja (1).

No vetor de estados, uma raia (*lane*) é um conjunto de w bits onde apenas a coordenada z muda; um corte transversal vertical (*slice*) é um conjunto de 25 bits onde apenas a coordenada z é fixa; uma linha é um conjunto de 5 bits onde apenas a coordenada x muda, e de modo análogo, uma coluna é um conjunto de 5 bits onde apenas a coordenada y muda.

- (b) Tome S como uma palavra de b bits que representa um estado na construção esponja; então, o vetor de estados correspondente é definido como

$$A[x][y][z] = S[w(5y + x) + z] \mid x, y \in \mathbb{Z}_5 \wedge z \in \mathbb{Z}_w$$

Por exemplo, se $b = 200$, então segue que $w = 8$, e portanto:

$$\begin{array}{cccc}
A[0, 0, 0] = S[0] & A[1, 0, 0] = S[8] & \cdots & A[4, 0, 0] = S[32] \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
A[0, 0, 7] = S[7] & A[1, 0, 7] = S[15] & \cdots & A[4, 0, 7] = S[39] \\
A[0, 1, 0] = S[40] & A[1, 1, 0] = S[48] & \cdots & A[4, 1, 0] = S[72] \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
A[0, 4, 7] = S[167] & A[1, 4, 7] = S[175] & \cdots & A[4, 4, 7] = S[199]
\end{array}$$

- (c) A construção de uma palavra S a partir de um vetor de estados A é feita pela concatenação (\parallel) dos bits de tal modo que z seja incrementado primeiro, depois x , e por fim y ; a inversa da operação acima.

Por exemplo, se $b = 200$ e $w = 8$:

$$S = A[0, 0, 0] \parallel \cdots \parallel A[0, 0, 7] \parallel A[1, 0, 0] \parallel \cdots \parallel A[4, 0, 7] \parallel A[0, 1, 0] \parallel A[0, 1, 1] \parallel \cdots \parallel A[4, 4, 7]$$

- (d) Todas as operações realizadas devem ser sobre módulo 5 nas coordenadas x e y , e módulo w na coordenada z . As adições e multiplicações entre os termos são sobre $GF(2)$, exceto quando notado. Índices omitidos significam que a operação é válida para todos os valores daquela porção do vetor de estados.

- $\theta : A[x][y][z] \leftarrow A[x][y][z] + \sum_{y'=0}^4 A[x-1][y'][z] + \sum_{y'=0}^4 A[x+1][y'][z-1]$

A etapa θ foca na difusão de bits no vetor de estados A . Sem esta etapa, a permutação não proveria difusão significativa. Sua utilização leva a uma maior proteção contra criptoanálise linear e diferencial, além de ataques algébricos.

- $\rho : A[x][y][z] \leftarrow A[x][y][z - (t+1)(t+2)/2], \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ em $GF(5)^{2 \times 2}$

para $0 \leq t < 24$, ou $t = -1$ se $x = y = 0$.

A etapa ρ consiste de movimentos entre bits de diferentes raias, para prover uma boa dispersão entre *slices*. Sem esta etapa, esta difusão seria muito lenta. As novas coordenadas x_t, y_t são definidas através de um processo iterativo de multiplicação de matrizes.

Tome $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$\begin{array}{ll}
t = 0 \longrightarrow M^0 \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & t = 1 \longrightarrow M^1 \cdot B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\
t = 2 \longrightarrow M^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} & t = 3 \longrightarrow M^3 \cdot B = \begin{pmatrix} 6 \\ 22 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Então, pode-se verificar que existe uma relação de recorrência tal que $(x_t, y_t) = (y_{t-1}, 2x_{t-1} + 3y_{t-1})$. Estes valores serão dependentes apenas das dimensões do vetor de estados, então podem ser pré-computados para que o número de multiplicações entre matrizes seja reduzido.

- $\pi : A[x][y] \leftarrow A[x'][y'], \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

A etapa π é uma transposição das raias, que provê difusão a longo prazo. Esta etapa mistura bits alinhados horizontalmente e verticalmente de modo que a criptoanálise diferencial seja dificultada, pois do contrário, suas trilhas poderiam ser simplificadas, de acordo com [3].

- $\chi : A[x] \leftarrow A[x] + (A[x+1] + 1) \cdot A[x+2]$

A etapa χ é a única não-linear, trocando o valor do bit operado se seus vizinhos forem 0 à esquerda e 1 à direita. Sem esta etapa, a rodada R seria completamente linear. Pode ser vista como a aplicação paralela de $5 \cdot w$ caixas-S⁴ operando em cada linha do vetor de estados.

⁴*substitution box*, um componente básico de criptografia simétrica, responsável por mapear uma entrada de tamanho m para uma saída de tamanho n de modo a diluir a relação entre estes. São cuidadosamente construídas para resistir à criptoanálise linear e diferencial.

- $\iota : A \leftarrow A + RC[i_r]$,
 $RC[i_r][x][y][z] = 0$,
 $RC[i_r][0][0][2^j - 1] = rc[j + 7i_r] \forall 0 \leq j < \ell$,
 $rc[t] = (x^t \pmod{x^8 + x^6 + x^5 + x^4 + 1}) \pmod{x}$ em $GF(2)[x]$

A etapa ι é a única assimétrica, e sem ela, KECCAK seria mais suscetível a ataques que exploram simetria entre rodadas. O vetor $RC[i_r]$ guarda constantes geradas por um LFSR $rc[t]$, e somadas apenas à primeira linha do vetor de estados. Por conta disso, a perturbação será aumentada nas etapas θ e χ para todas as raias depois de apenas uma rodada.

- (e) A permutação $\text{KECCAK}-p[b, n_r]$ consiste de n_r iterações de rodadas R sobre um estado de largura b . A permutação $\text{KECCAK}-f$, definida em [2], apenas é uma especialização da família acima, onde o número de rodadas deve ser correlacionado à profundidade do vetor de estados: $n_r = 12 + 2 \cdot \ell$. Então, a permutação $\text{KECCAK}-p[1600, 24]$, que define as seis funções SHA-3, é equivalente (\triangleq) a $\text{KECCAK}-f[1600]$. Apenas existe uma diferença na indexação das rodadas das duas permutações.
- (f) Uma construção esponja é um modo de operação, baseado em uma permutação de tamanho fixo e uma regra de preenchimento (*padding*), que constrói uma função responsável por mapear uma entrada de tamanho qualquer para uma saída de tamanho desejável. Tal função é apropriadamente chamada de *função esponja*, e pode ser reconhecida como uma generalização de funções de resumo criptográficas, que têm saídas de tamanho fixo, e de cifras de fluxo (*stream ciphers*), restritas por entradas de tamanho fixo. A função esponja aplica iterativamente sua permutação interna aos estados intermediários, construídos por entradas ou saídas anteriores ao estado atual. A construção aplica sua permutação f sobre estados de b bits. A entrada M é preenchida de modo que os bits extras, adicionados para tornar o tamanho dos blocos homogêneo, possam ser retirados ao final do procedimento. Então, é dividida em blocos de tamanho r , denotados M_r . Os b bits de cada estado são inicializados com zero e a construção procede à execução, em duas fases separadas.
- Na fase de absorção (*absorbing*), os blocos M_r são “XORados” com os primeiros r bits do estado atual, intercalados com aplicações da permutação f . Quando todos os blocos M_r são processados, a esponja passa para a fase de compressão (*squeezing*), onde os primeiros r bits do estado são retornados como blocos de saída, também intercalados com aplicações da permutação f . O número de blocos de saída ℓ é escolhido pelo usuário, e a saída Z é truncada de acordo. Os últimos c bits do estado nunca são diretamente afetados por M_r , e também nunca revelados durante a fase de compressão. Essencialmente, estão correlacionados com o nível de segurança da esponja.
- (g) KECCAK é a família de funções esponja definidas com a permutação $\text{KECCAK}-p[b, 12 + 2\ell]$ junto a uma simples função de preenchimento pad10*1 . Tal função adiciona os bits $1 \parallel 0^{-m-2} \pmod{x} \parallel 1$ à palavra original, onde m é o resto da divisão inteira do tamanho da palavra pela largura x da esponja. O asterisco no nome da função significa que é necessário adicionar tantos “zeros” quanto necessário para preencher a palavra de maneira que esta seja igualmente divisível em blocos.
- (h) Uma função $\text{KECCAK}[c](N, d)$ opera sobre uma palavra de bits de tamanho N e tamanho de saída d , com capacidade c . Ela pode ser definida como

$$\begin{aligned} \text{KECCAK}[r, c] &\triangleq \text{SPONGE}[\text{KECCAK}-f[r + c], \text{pad10*1}, r](N, d) \\ \text{KECCAK}[c] &\triangleq \text{KECCAK}[r = 1600 - c, c](N, d) \end{aligned}$$

e é a base para todas as quatro funções SHA-3. A função SPONGE é a representação matemática dos parâmetros explicados acima e será explorada em (i).

- As quatro funções *hash* SHA-3 recebem uma mensagem M como entrada e são definidas a partir da função $\text{KECCAK}[c]$ especificada acima. Em cada caso, a capacidade é o dobro do tamanho do resumo criptográfico, e todas as mensagens são sufixadas com a palavra 01. Ou seja,

$$\begin{aligned} \text{SHA3}-224(M) &= \text{KECCAK}[448](M \parallel 01, 224) \\ \text{SHA3}-256(M) &= \text{KECCAK}[512](M \parallel 01, 256) \\ \text{SHA3}-384(M) &= \text{KECCAK}[768](M \parallel 01, 384) \\ \text{SHA3}-512(M) &= \text{KECCAK}[1024](M \parallel 01, 512) \end{aligned}$$

- Duas outras funções, chamadas de *SHA-3 Extendable-Output Functions* (SHAKE, ou “Funções de saída estendida SHA-3”), são definidas concatenando 1111 como sufixo à mensagem M . Para qualquer tamanho de saída d , tem-se

$$\begin{aligned} \text{SHAKE128}(M, d) &= \text{KECCAK}[256](M \parallel 1111, d) \\ \text{SHAKE256}(M, d) &= \text{KECCAK}[512](M \parallel 1111, d) \end{aligned}$$

Os bits adicionados como sufixo às mensagens servem para diferenciar entradas da função KECCAK[c] provenientes de SHA-3 ou SHAKE. Esta estratégia é chamada de separação por domínios (*domain separation*).

- (i) A construção da esponja produz uma função SPONGE[f, pad, r], onde f é uma permutação de tamanho fixo, PAD é a função de preenchimento, que adiciona os bits necessários para que a mensagem seja corretamente dividida em blocos, e r é a taxa de bits da entrada que passará por dentro da esponja. O estado inicial da esponja é chamado de estado raiz, e consiste de 0^b bits. Uma melhor descrição da construção pode ser encontrada em (f).
- (j) Tradicionalmente, usuários de funções *hash* esperam um nível de segurança que seja correlacionado com o tamanho da sua saída: $2^{n/2}$ para resistência à colisão e 2^n para resistência à (segunda) pré-imagem, onde n é o tamanho da saída. Esta característica é respeitada por todas as funções especificadas pelo NIST. A criptoanálise em instâncias de KECCAK- $f[1600]$ mostra⁵ que, ainda com 8 rodadas, o número de operações necessárias para obter alguma informação relevante é de 2^{491} , e 2^{1574} para as 24 rodadas propostas no documento [4].
- (k) A convenção para interpretar palavras em base hexadecimal como palavras de bits, para as entradas e saídas dos algoritmos apresentados, é diferente da usual: a ordem dos bits para cada byte completo é revertida. Ou seja, se uma palavra 0xfb23 deve ser interpretada, então:

$$0xfb23 \longrightarrow 0b1111101100100011 \xrightarrow{SHA-3} 0b110111111000100$$

Exemplos de entradas e saídas de rodadas e etapas intermediárias podem ser encontrados aqui, onde as saídas de uma implementação podem ser comparadas a cada passo para garantir sua acurácia.

Referências

- [1] G. Bertoni, J. Daemen, M. Peeters, and G. Van Assche. Cryptographic sponge functions, January 2011. <http://sponge.nokeon.org/>.
- [2] G. Bertoni, J. Daemen, M. Peeters, and G. Van Assche. The KECCAK reference, January 2011. <http://keccak.nokeon.org/>.
- [3] J. Daemen and G. Van Assche. Differential propagation analysis of KECCAK. In *Fast Software Encryption 2012*, 2012.
- [4] Morris J. Dworkin. SHA-3 standard: Permutation-based hash and extendable-output functions. Technical report, National Institute of Standards and Technology (NIST), July 2015.

⁵como visto em <http://keccak.nokeon.org/Keccak-slides-at-NIST-Feb2013.pdf>