第三章 矩阵

§1 矩阵的运算
§2 几种特殊矩阵
§3 分块矩阵
§4 逆矩阵
§5 初等矩阵

§1 矩阵的运算

一、矩阵的加法

二、矩阵的数乘

三、矩阵的乘法（重点）

四、矩阵的转置

五、n阶矩阵的行列式

在线性方程组的理论和解法中我们使用了矩阵，对于矩阵施行了初等变换运算.矩阵是科学技术和经济管理中的一个重要工具.

定义 矩阵是$m\times n$个数 a_{ij}排成m行n列的表格

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=(a_{ij})_{m\times n}.$$

a_{ij}=$A(i,j)$:矩阵的（第i行第j列的）元素，我们称A是一个$m\times n$矩阵，如果 m=n称A是一个m阶方（矩）阵.

一、矩阵的加法

定义 给定矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n},B=(b_{ij})_{m\times n}$ 和数k,

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix},$$

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix},$$

零矩阵

$$\boldsymbol{O}=(0)_{m\times n}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

负矩阵

$$-\boldsymbol{A}=(-a_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}.$$

n阶单位矩阵

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

基本矩阵E

只有(i, j)元为1，其余元素皆为0的矩阵称为基本矩阵

$$\mathrm{E}_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A - B = A + (-B) = (a_{ij} - b_{ij})_{m\times n}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \cdots & a_{1n} - b_{1n} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \cdots & a_{2n} - b_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} - b_{m1} & a_{m2} - b_{m2} & \cdots & a_{mn} - b_{mn} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 5 & 9 \\ -4 & 1 & 8 \\ -9 & 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 8 \\ -1 & 5 & 10 \\ -2 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

矩阵加法的性质

$$(1)\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A};$$

$$(2)(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C});$$

$$(3)\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A};$$

$$(4)\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O};$$

二、矩阵数乘

$$kA=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}=(ka_{ij})_{m\times n}.$$

矩阵数乘的性质

$(1)\ k(A+B)=kA+kB;$

$(2)\ (k+l)A=kA+lA;$

$(3)\ k(lA)=(kl)A;$

$(4)\ 1A=A;$

$(5)\ 0A=O.$

$$2\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 12 & 18 \end{pmatrix}$$

三、矩阵的乘法

α_1,α_2 可以用 β_1,β_2,β_3 线性表示:

$$\begin{cases}\alpha_1 = a_{11}\beta_1 + a_{12}\beta_2 + a_{13}\beta_3, \\ \alpha_2 = a_{21}\beta_1 + a_{22}\beta_2 + a_{23}\beta_3.\end{cases} A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

β_1,β_2,β_3 可以用 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 线性表示:

$$\begin{cases}\beta_1 = b_{11}\gamma_1 + b_{12}\gamma_2 + b_{13}\gamma_3, \\ \beta_2 = b_{21}\gamma_1 + b_{22}\gamma_2 + b_{23}\gamma_3, \\ \beta_3 = b_{31}\gamma_1 + b_{32}\gamma_2 + b_{33}\gamma_3.\end{cases} B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}.$$

α_1,α_2 可以用 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 线性表示,对应的矩阵是什么?

$$\alpha_1 = a_{11}\beta_1 + a_{12}\beta_2 + a_{13}\beta_3$$

$$= a_{11}(b_{11}\gamma_1 + b_{12}\gamma_2 + b_{13}\gamma_3) + a_{12}(b_{21}\gamma_1 + b_{22}\gamma_2 + b_{23}\gamma_3)$$

$$+ a_{13}(b_{31}\gamma_1 + b_{32}\gamma_2 + b_{33}\gamma_3)$$

$$= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31})\gamma_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32})\gamma_2$$

$$+ (a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33})\gamma_3.$$

类似得

$$\alpha_2 = (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31})\gamma_1 +$$

$$(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32})\gamma_2 + (a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33})\gamma_3.$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = c_{11}\gamma_1 + c_{12}\gamma_2 + c_{13}\gamma_3, \\ \alpha_2 = c_{21}\gamma_1 + c_{22}\gamma_2 + c_{23}\gamma_3. \end{cases}$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix}.$$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j}$$

$$= \sum_{k=1}^{3} a_{ik}b_{kj}, i = 1,2, j = 1,2,3.$$

A的列数=B的行数.

$$\alpha_i = \sum_{k=1}^{s} a_{ik}\beta_k, i = 1,\cdots,m,$$

$$\beta_k = \sum_{j=1}^{n} b_{kj}\gamma_j, k = 1,\cdots,s.$$

$$\alpha_i = \sum_{k=1}^{s} a_{ik}\sum_{j=1}^{n} b_{kj}\gamma_j = \sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\gamma_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{s} a_{ik}b_{kj}\right)\gamma_j = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\gamma_j.$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik}b_{kj}, i = 1,\cdots,m, j = 1,\cdots,n.$$

定义 给定矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times s}$ 和 $B=(b_{ij})_{s\times n}$, 定义

$$AB=(c_{ij})_{m\times n},$$

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj},i=1,\cdots,m,j=1,\cdots,n.$$

左矩阵行向量维数等于右矩阵列向量的维数乘积AB才有意义. 乘积AB第i行第j列的元素是左矩阵第i行右矩阵第j列对应元素乘积之和.

或者说成:左矩阵第i个行向量和右矩阵第j个列向量(他们维数相同)对应分量乘积之和.

$$\begin{array}{cc} & \\ \\ i\text{行} & \\ \\ & \end{array}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & & a_{is} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & \cdots & b_{sj} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix} \\ j\ \text{列} \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & \boxed{c_{ij}} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix} . c_{ij} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik} b_{kj}$$

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1s}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{m1}&\cdots&a_{ms}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_s\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_s\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{11}&\cdots&b_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ b_{s1}&\cdots&b_{sn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \vdots\\ \gamma_n\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \vdots\\ \gamma_n\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_s\end{pmatrix}=A(B\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \vdots\\ \gamma_n\end{pmatrix})=(AB)\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \vdots\\ \gamma_n\end{pmatrix}.$$

函数$z=ay, y=bx$, 复合函数

$$z=ay=a(bx)=(ab)x.$$

向量线性变换

$$\mathrm{Z}=\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix}=AY=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{ms} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_s \end{pmatrix}, \mathbf{R}^s \to \mathbf{R}^m$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_s \end{pmatrix}=BX=\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^s$$

$$Z=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{ms} \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right)$$

$$=\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=(AB)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m.$$

定义 n阶矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

称为n阶单位矩阵，记作E_n或E.

矩阵乘法的性质

$(1)(AB)C = A(BC)$;(结合律)

$(2)A(B+C) = AB + AC$;（左分配律）

$(3)(B+C)A = BA + CA$;（右分配律）

$(4)k(AB) = (kA)B = A(kB)$;（k为数）

$(5)E_m A_{m\times n} = A_{m\times n}, A_{m\times n} E_n = A_{m\times n}$.

结合律的证明

$$A=(a_{ij})_{m\times p}, B=(b_{ij})_{p\times q}, C=(c_{ij})_{q\times n},$$

$$(AB)(i,j)=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}, (BC)(i,j)=\sum_{l=1}^{q}b_{il}c_{lj},$$

$$((AB)C)(i,j)=\sum_{l=1}^{q}(AB)(i,l)c_{lj}=\sum_{l=1}^{q}\left(\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kl}\right)c_{lj}=\sum_{l=1}^{q}\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kl}c_{lj},$$

$$A(BC)(i,j)=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}(BC)(k,j)=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}\left(\sum_{l=1}^{q}b_{kl}c_{lj}\right)=\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{q}a_{ik}b_{kl}c_{lj},$$

$$1\le i\le m, 1\le j\le n$$

$$\therefore (AB)C=A(BC).$$

例 求下列两个矩阵的乘积：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 5 \\ -1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 5 \\ 4 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

解 $$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} 27 & -21 & 1 \\ 5 & 9 & -7 \end{pmatrix}.$$

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{4} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{4} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{4} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{4} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{4} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}.$$

例 线性方程组的三种表示

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

方程组，等式组

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

$$\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_n$$

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{\beta}. \qquad x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \boldsymbol{\beta}$$

矩阵方程(等式)　　　　向量方程(等式)

矩阵*A*的右边乘一个列向量*X*相当于对于*A*的列向量做线性组合，系数为*X*的分量。

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}} \underset{B}{\begin{pmatrix} \cdots & b_{1j} & \cdots \\ \cdots & b_{2j} & \cdots \\ \vdots & & \vdots \\ \cdots & b_{nj} & \cdots \end{pmatrix}} = \underset{C}{\begin{pmatrix} \cdots & c_{1j} & \cdots \\ \cdots & c_{2j} & \cdots \\ \vdots & & \vdots \\ \cdots & b_{mj} & \cdots \end{pmatrix}}$$

乘积的第j列是左矩阵的列向量的线性组合，系数为右矩阵第j列的相应元素。

乘积AB的列向量组可用A的列向量组线性表示，故

$$r(AB) \le r(A).$$

$$(x_1, x_2, \cdots, x_m)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{matrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{matrix}$$

$$= (b_1, b_2, \cdots, b_n)(\beta). \beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m.$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m = b_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{m2}x_m = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{mn}x_m = b_n. \end{cases}$$

左乘一个行向量X，相当矩阵的行向量做线性组合，系数为X的分量。

$$
\underset{A}{\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boxed{a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{im}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}}
\underset{B}{\begin{pmatrix} \boxed{b_{11} \quad b_{12} \quad \cdots \quad b_{1n}} \\ \boxed{b_{21} \quad b_{22} \quad \cdots \quad b_{2n}} \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \boxed{b_{m1} \quad b_{m2} \quad \cdots \quad b_{mn}} \end{pmatrix}}
$$

$$
= \underset{AB}{\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boxed{c_{i1} \quad c_{i2} \quad \cdots \quad c_{in}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}}
$$

矩阵乘积AB的第i行是右矩阵B的行向量的线性组合，其系数是左矩阵的第i行的相应元素。

$$
r(AB) \le r(B), r(AB) \le \min(r(A), r(B)).
$$

例

$$A=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, B=(b_1,b_2,\cdots,b_n).$$

$$AB=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix},$$

$$BA=(a_1b_1+\cdots a_nb_n).$$

矩阵乘法交换律不成立.

例 如果 矩阵A，B满足$AB=BA$,称A和B是可交换的.如果A和B可交换，必是同价方阵(?).设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix},$$ 求所有和$\boldsymbol{A}$可交换的矩阵$\boldsymbol{B}$.

解 设待求方阵为 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}$.

$$\boldsymbol{AX}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ 2x_1+x_3 & 2x_2+x_4\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{XA}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+2x_2 & x_2\\ x_3+2x_4 & x_4\end{pmatrix}$$

由$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{XA}$ 得

$$AX=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 2x_1+x_3 & 2x_2+x_4 \end{pmatrix},\quad XA=\begin{pmatrix} x_1+2x_2 & x_2 \\ x_3+2x_4 & x_4 \end{pmatrix}$$

由$AX=XA$ 得

$$\begin{cases} x_1=x_1+2x_2, \\ x_2=x_2, \\ 2x_1+x_3=x_3+2x_4 \\ 2x_2+x_4=x_4 \end{cases} \begin{cases} x_2=0, \\ x_1=x_4=a, \\ x_3=b. \end{cases} X=\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}.$$

思考 写出上述齐次方程组的一个基础解系.

直接验证

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix}a&0\\b&a\end{pmatrix},$$

$$AX=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0\\b&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&0\\2a+b&a\end{pmatrix},$$

$$XA=\begin{pmatrix}a&0\\b&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&0\\b+2a&a\end{pmatrix}=AX.$$

如果取$X=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}, AX=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\2&2\end{pmatrix},$

$$XA=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\4&2\end{pmatrix}\neq AX.$$

例 $A \neq O, B \neq O,$ 有可能 $AB = O.$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix},$$

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O.$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 6\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}4 & 6\\ 2 & 3\end{pmatrix},$$

$$AB=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 6\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

对于数字,

$$ab = ac, a \neq 0 \Rightarrow b = c.$$

$$ba = ca, a \neq 0 \Rightarrow b = c.$$

对于矩阵

$$AB = AC, A \neq O \not\Rightarrow B = C,$$

$$AB = CB, B \neq O \not\Rightarrow A = C.$$

对于矩阵

左消去律不成立,

右消去律不成立.

方阵的幂　设A是方阵, k是自然数,定义

$$A^k = \underbrace{AA\cdots A}_{n个}, A^0 = E.$$

幂的性质　(1) $A^k A^l = A^{k+l}$,

(2) $(A^k)^l = A^{kl}$.

但是 $(AB)^k = A^k B^k$ 一般不成立. $A^k = O$

未必有 $A = O$.

例

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&1&1\\1&-1&-1\end{pmatrix}\neq O,$$

$$A^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&1&1\\1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&1&1\\1&-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

$$f(x)=a_m x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1 x+a_0.$$

A方阵

$$f(A)=a_m A^m+a_{m-1}A^{m-1}+\cdots+a_1 A+a_0 E.$$

思考 f和g是两个多项式，则$f(A)$和$g(A)$可交换。

例

作业

习题三

1（1），2,3(1),(3),(5).

5(1)　　　　7.　9(1),(3),(5).

10(1).　11(1).

补充习题：1.证明

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC},$$

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{CA}+\boldsymbol{CB},$$

2. f和g是两个多项式，则$f(A)$和$g(A)$可交换

四、矩阵的转置

定义 把矩阵 $A=(a_{ij})_{ij}$的行与列互换得到的矩阵称为A的转置矩阵，简称A 的转置,记作A^{T}.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\quad A^{\mathrm{T}}=(b_{ij})_{n\times m}, b_{ij}=a_{ji},$$

$$i=1,\cdots,n,\ j=1,\cdots,m.$$

$$A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},$$

$$C^{\mathrm{T}}=(a_1,a_2,a_3).$$

转置的性质

$$(1)(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A;$$

$$(2)(A+B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}};$$

$$(3)(kA)^{\mathrm{T}} = kA^{\mathrm{T}};$$

$$(4)(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}.$$

前三条显而易见,我们证明第四条.

乘积转置公式的证明

$$A=(a_{ij})_{m\times s}, B=(b_{ij})_{s\times n}.$$

$$(AB)(i,j)=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj},$$

$$(AB)^{\mathrm{T}}(i,j)=(AB)(j,i)=\sum_{k=1}^{s}a_{jk}b_{ki},$$

$$A^{\mathrm{T}}(i,j)=a(j,i), B^{\mathrm{T}}(i,j)=b(j,i),$$

$$(B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}})(i,j)=\sum_{k=1}^{s}B^{\mathrm{T}}(i,k)A^{\mathrm{T}}(k,j)=\sum_{k=1}^{s}b_{ki}a_{jk}=(AB)^{\mathrm{T}}(i,j),$$

$$1\le i\le n, 1\le j\le m,$$

$$(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}.$$

五、n阶矩阵的行列式

定义 方阵A按原来位置组成的行列式,称为矩阵的行列式,记作$|A|$.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}, |A|=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=1\times 4-2\times 3=-2.$$

方阵的行列式的性质

$$(1)\ |A^{\mathrm{T}}|=|A|;$$

$$(2)\ |kA_n|=k^n|A|;$$

$$(3)\ |AB|=|A||B|;$$

$$(3)\ |AB|=|BA|.$$

作业

习题三

15,17,20,(1),(3),(5),(7),23,25

§2 几种特殊的矩阵

一、对角矩阵

二、数量矩阵

三、三角矩阵

四、对称矩阵与反对称矩阵

这里的特殊矩阵都是**方阵**.

一、对角矩阵

定义 所有非对角线元素都是0的矩阵称为对角矩阵.

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

一般对角矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & & & \mathbf{0} \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & a_n \end{pmatrix}.$$

对角矩阵的性质

(1)两个同阶对角矩阵的和(差)仍为对角矩阵;

(2)数k与对角矩阵的乘积仍为对角矩阵;

(3)两个同阶对角矩阵的积仍为对角矩阵,并且它们是可交换的.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1 & & & \boldsymbol{0} \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & & & a_n \end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_1 & & & \boldsymbol{0} \\ & b_2 & & \\ \boldsymbol{0} & & \ddots & \\ & & & b_n \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1+b_1 & & & \boldsymbol{0} \\ & a_2+b_2 & & \\ \boldsymbol{0} & & \ddots & \\ & & & a_n+b_n \end{pmatrix}.$$

$$AB = BA = \begin{pmatrix} a_1b_1 & & & \\ & a_2b_2 & \mathbf{0} & \\ \mathbf{0} & & \ddots & \\ & & & a_nb_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1\beta_1 \\ a_2\beta_2 \\ \vdots \\ a_n\beta_n \end{pmatrix},$$

$$(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_n)\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix} = (a_1\alpha_1 \quad a_2\alpha_2 \quad \cdots \quad a_n\alpha_n).$$

对角矩阵的运算既然如此简单,所以把一个矩阵化为对角矩阵很重要,将在第五章进行讨论.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_{11} & a_2 a_{12} & \cdots & a_n a_{1n} \\ a_1 a_{21} & a_2 a_{22} & \cdots & a_n a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 a_{m1} & a_2 a_{m2} & \cdots & a_n a_{mn} \end{pmatrix}$$

思考 $$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = ?$$

例.证明：与主对角元两两不同的对角矩阵可交换的矩阵也是对矩阵.

证明 $A = \mathrm{diag}\ (a_1, a_2, \cdots, a_n)$,当$i \neq j$时$a_i \neq a_j$,

$B = (b_{ij})_n, AB = BA.$

$(AB)(i,j) = a_i b_{ij} = (BA)(i,j) = b_{ij} a_j,$

$(a_i - a_j) b_{ij} = 0, a_i - a_j \neq 0 (i \neq j),$

$b_{ij} = 0 (i \neq j), \therefore B$是对角矩阵.

二、数量矩阵

定义 所有对角线元素相等的对角矩阵称为数量矩阵.

$$A_n=\begin{pmatrix} a & & & 0 \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a \end{pmatrix}=aE_n.$$

$$B_{m\times n}(aE_n)=aB_{m\times n},$$

$$(aE_m)B_{m\times n}=aB_{m\times n}.$$

数量矩阵aE左乘或右乘矩阵B相当于用数a乘矩阵B.

例证明：与所有n级矩阵可交换的矩阵A是数量矩阵.

证明 根据前面的例题，A是对角矩阵

$A=\mathrm{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_n)$.

用$E(i,j)$表示单位矩阵第i行和第j行交换所得的初等矩阵，设$i\neq j$,则$E(i,j)A(i,j)=a_j=AE(i,j)(i,j)=a_i(i\neq j)$,

故A是数量矩阵.

三、三角矩阵

定义 主对角线下(上)方的元素全为0的方阵称为上(下)三角矩阵 .

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

$$a_{ij}=0, j<i. \qquad b_{ij}=0, j>i$$

上三角矩阵 下三角矩阵

三角矩阵的性质

(1)上(下)下三角矩阵的和与积仍是上(下)下三角矩阵.

(2)数与上(下)三角矩阵的乘积仍是数与上(下)三角矩阵.

(3)三角矩阵的行列式等于对角线元素的乘积.

从特殊情形看性质(3)

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}, \quad AB=C=(c_{ij})$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \boxed{0 \quad a_{22} \quad a_{23}} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & \boxed{b_{12}} & b_{13} \\ 0 & \boxed{b_{22}} & b_{23} \\ 0 & \boxed{0} & b_{33} \end{pmatrix} c_{22}=a_{22}b_{22}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \boxed{0 \quad a_{22} \quad a_{23}} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boxed{b_{11}} & b_{12} & b_{13} \\ \boxed{0} & b_{22} & b_{23} \\ \boxed{0} & 0 & b_{33} \end{pmatrix} c_{21}=0$$

(3)的一般情形的证明

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

$$a_{ij}=0, i>j. \qquad b_{ij}=0, i>j.$$

$$AB=C=(c_{ij})_n.$$

$$i>j\text{时}, c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}=\sum_{k=1}^{j}a_{ik}b_{kj}+\sum_{k=j+1}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

$$=\sum_{k=1}^{j}0b_{kj}+\sum_{k=j+1}^{n}a_{ik}0=0.$$

四、对称矩阵与反对称矩阵

定义 如果方阵A满足$A^{\mathrm{T}}=A$,则称之为对称矩阵.

对称矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_{ij})_n, \boldsymbol{a}_{ij}=\boldsymbol{a}_{ji}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}=\mathbf{1},\cdots,\boldsymbol{n}.$

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & -\mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & -\mathbf{2} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{5} \\ \mathbf{3} & -\mathbf{2} & \mathbf{5} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}$$

对称矩阵的位于关于主对角线对称位置的元素相等.

4阶对称矩阵.

(1)对称矩阵的和仍是对称矩阵;

(2)数与对称矩阵的乘积仍是对称矩阵.

对称矩阵的乘积未必是对称矩阵.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\text{对称,}$$

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}\text{不对称.}$$

根本原因在于矩阵乘法交换律不成立:

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}, (\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{BA}\overset{?}{=}\boldsymbol{AB}.$$

思考 对称矩阵A和B的乘积仍然是对称矩阵的充分必要条件是A和B可交换。

定义 如果方阵A满足$A^{\mathrm{T}} = -A$,则称之为反对称矩阵.

反对称矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_n, a_{ij} = -a_{ji}, i, j = 1, \cdots, n.$

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

反对称矩阵的位于关于主对角线对称位置的元素是相反数.

是3阶反对称矩阵.

(1)反对称矩阵的和仍是反对称矩阵;

(2)数与反对称矩阵的乘积仍是反对称矩阵;

(3)反对称矩阵对角线元素为0.

反对称矩阵的乘积未必是反对称矩阵.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$反对称,

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$不反对称.

作业

习题三 21，22（1）,23,25

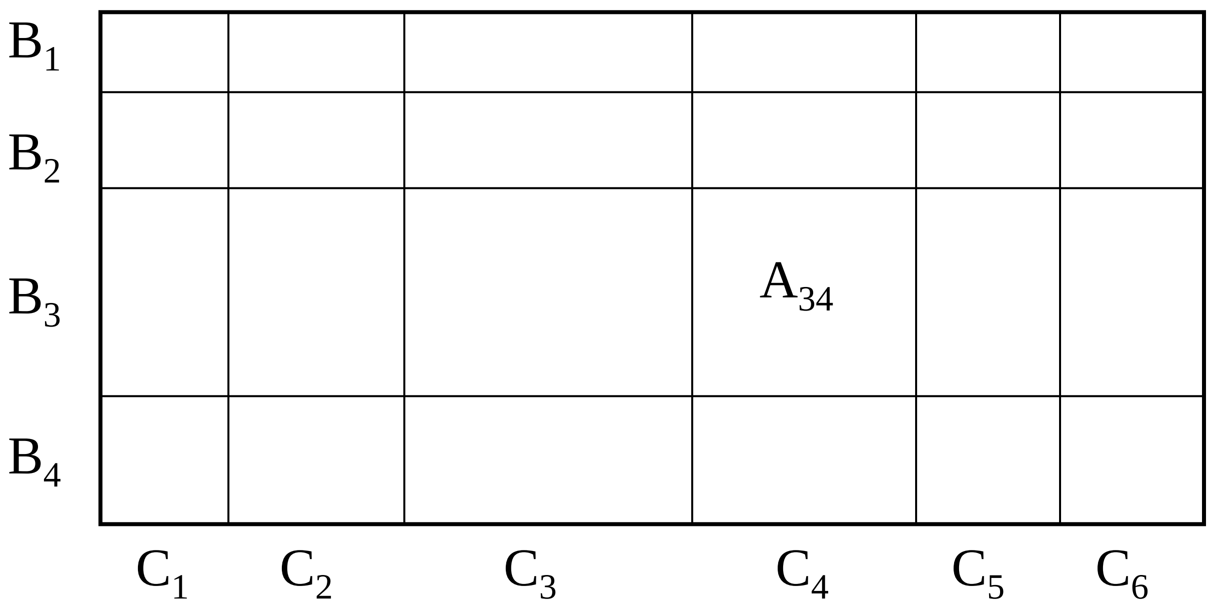
补充题　证明：对称矩阵A和B的乘积仍然是对称矩阵的充分必要条件是A和B可交换。

§3分块矩阵

一 矩阵的分块
二 分块矩阵的运算
三分块矩阵的应用举例

一、矩阵的分块

把矩阵 $A_{m\times n}$的行分成p组,各组分别含连续的$m_1,\cdots,m_p$行 $B_1,\cdots,B_p, m_1+\cdots+m_p=m,$,把矩阵 $A_{m\times n}$ 的列分成 q 组 $C_1,\cdots,C_q$,各组分别含连续的 $n_1,\cdots,n_q$ 列, $n_1+\cdots+n_q=n.$ B_i 与 B_j 交叉处的元素组成A的子阵$A_{ij}.$



在理论研究和实际应用中往往需要把大的矩阵分成若干个小矩阵，这些小矩阵称为原矩阵的子阵或子块，原矩阵则称为分块矩阵.
例如矩阵

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 3 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right), \boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_2 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{A}_1 & -\boldsymbol{E}_2 \end{pmatrix}.$$

总是用横贯线和纵贯线分块.

对于一个矩阵可以根据所讨论问题的实际背景和需要以及矩阵的特点任意分块.

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right), \quad A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

$$A_{11}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, A_{12}=\begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{pmatrix},$$

$$A_{21}=(a_{31} \quad a_{32}), A_{22}=(a_{33} \quad a_{34}),$$

经常把矩阵的行或列作为子块.

$$A=\left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right),$$

$$\begin{array}{l} \alpha_1=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{pmatrix}, \\ \alpha_2=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}, \\ \alpha_1=\begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}, \end{array} A=\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

$$\beta_j=\begin{pmatrix} a_{1j} & a_{2j} & a_{3j} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, j=1,\cdots,4,$$

$$A=\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix}.$$

1.分块矩阵的加法与数乘

两个$m\times n$矩阵A 和 B以同样方式分块，对应的子块相加或每个子块乘以数.

$$
A=\begin{array}{c}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix}\begin{array}{l} m_1\text{行} \\ m_2\text{行} \\ \vdots \\ m_s\text{行} \end{array} \\ \begin{array}{cccc} n_1\text{列} & n_2\text{列} & \quad & n_t\text{列} \end{array}\end{array}
\quad
B=\begin{array}{c}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1t} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{st} \end{pmatrix}\begin{array}{l} m_1\text{行} \\ m_2\text{行} \\ \vdots \\ m_s\text{行} \end{array} \\ \begin{array}{cccc} n_1\text{列} & n_2\text{列} & \quad & n_t\text{列} \end{array}\end{array}
$$

$$m_1+m_2+\cdots+m_s=m, n_1+n_2+\cdots+n_t=n.$$

$$A+B=\begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} & \cdots & A_{1t}+B_{1t} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} & \cdots & A_{2t}+B_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1}+A_{s1} & A_{s2}+A_{s2} & \cdots & A_{st}+B_{st} \end{pmatrix},$$

$$kA=\begin{pmatrix} kA_{11} & kA_{12} & \cdots & kA_{1t} \\ kA_{21} & kA_{22} & \cdots & kA_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ kA_{s1} & kA_{s2} & \cdots & kA_{st} \end{pmatrix}.$$

例 把矩阵$A_{4\times 3}$和$B_{4\times 3}$分块为

$$A=\left(\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ \hdashline 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} E & A_{12} \\ A_{21} & O \end{pmatrix},$$

$$B=\left(\begin{array}{cc:c} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & -2 \\ \hdashline 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 2E & O \end{pmatrix}.$$

$$2A-B=\begin{pmatrix} 2E & 2A_{12} \\ 2A_{21} & O \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 2E & O \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 2E-B_{11} & 2A_{12}-B_{12} \\ 2(A_{21}-E) & O \end{pmatrix}.$$

$$2E-B_{11}=2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$2A_{12}-B_{12}=2\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$2(A_{21}-E)=2\left[\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 6 & 2\end{pmatrix},$$

$$2A-B=\left(\begin{array}{cc:c}0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 0\\ \hdashline 2 & -2 & 0\\ 6 & 2 & 0\end{array}\right).$$

直接计算 $$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&-1\\2&-1&0\\3&2&0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&-1&4\\-1&2&-2\\2&0&0\\0&2&0\end{pmatrix},$$

$$2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&6\\0&2&-2\\4&-2&0\\6&4&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&-1&4\\-1&2&-2\\2&0&0\\0&2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&0&0\\2&-2&0\\6&2&0\end{pmatrix}$$

其实更简单,分块计算只是为了认识一下矩阵分块,并且说明直接计算和分块计算结果是一样的.

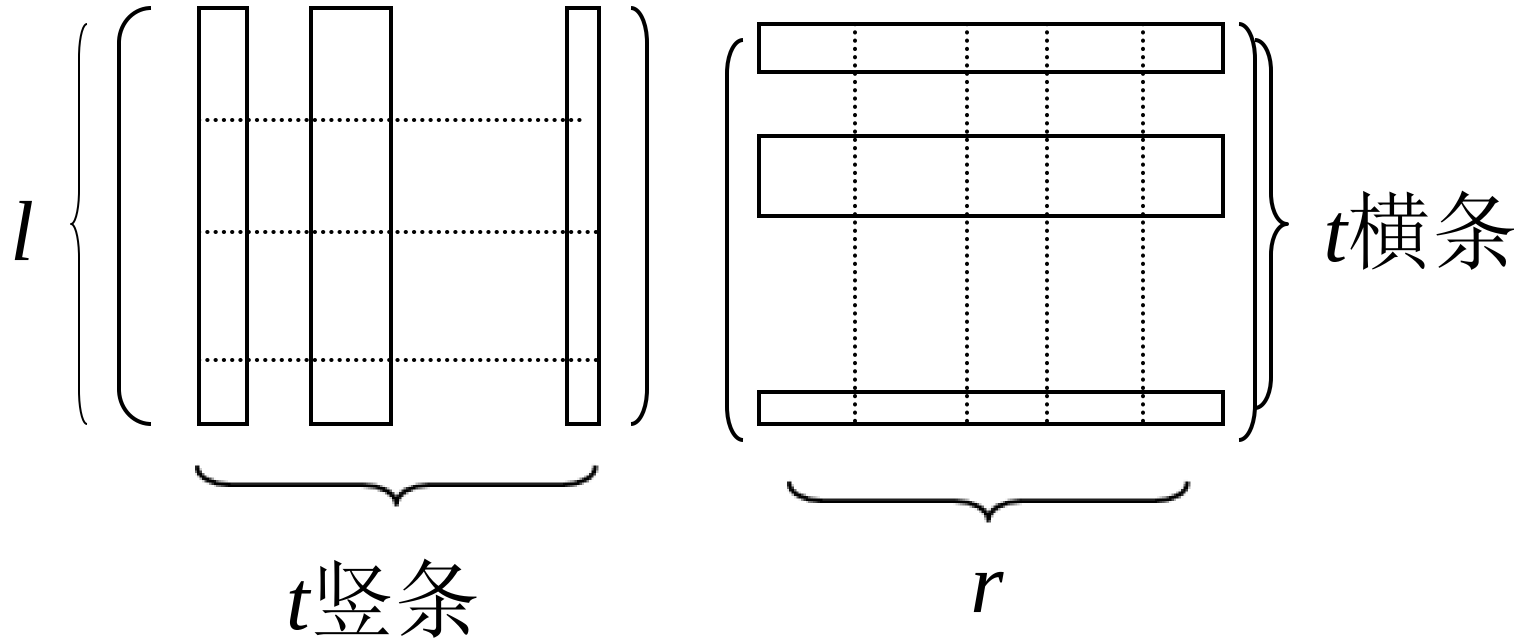
2.分块矩阵的乘法

我们知道A和B相乘，必须A的元素的列数等于B的元素的行数；对应地，分块相乘时，必须满足

(1)A的列组数必须等于B的行组数，

(2)A的每每个列组所含列数必须等于B的相应行组所含行数.

$$\boldsymbol{A}=\begin{array}{c}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1t} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{l1} & \boldsymbol{A}_{l2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{lt} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \boldsymbol{s}_1\text{列} & \boldsymbol{s}_2\text{列} & \cdots & \boldsymbol{s}_t\text{列} \end{array}\end{array},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{t1} & \boldsymbol{A}_{t2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{tr} \end{pmatrix}\begin{array}{l} \boldsymbol{s}_1\text{行} \\ \boldsymbol{s}_2\text{行} \\ \\ \boldsymbol{s}_t\text{行} \end{array}$$



A的竖条条数=***B***的横条条数

$$\boldsymbol{AB=(C_{ij})_{t\times r},C_{ij}=\sum_{k=1}^{t}A_{ik}B_{kj},}$$

$$\boldsymbol{i=1,\cdots,l;\ j=1,\cdots,r.}$$

例

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 5 & 3 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} E & -2E \\ O & A_1 \end{pmatrix},$$

$$B=\left(\begin{array}{c|cc} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ O & E \end{pmatrix}.$$

$$AB=\begin{pmatrix} E & -2E \\ O & A_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ O & E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1 & B_2-2E \\ O & A_1 \end{pmatrix}.$$

$$B_2-2E=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, AB=\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

例

$$A=\left(\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right)=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix},$$

$$X=\left(\begin{array}{c} x_1 \\ \hline x_2 \\ \vdots \\ \hline x_n \end{array}\right).AX=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots x_n\alpha_n.$$

AX是A的列向量的线性组合.

$$XB=(x_1,x_2,\cdots,x_s)\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_s\end{pmatrix}=x_1\beta_1+x_2\beta_2+\cdots+x_s\beta_s$$

$$B=\left(\begin{array}{cccc} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \hline b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \end{array}\right)\begin{array}{c}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_s\end{array}$$

XB是B 的行向量的线性组合.

$$A=\begin{array}{cc}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms}\end{pmatrix} & \begin{matrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_m\end{matrix}\end{array},\ B=\begin{array}{c}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{s1} & b_{m2} & \cdots & b_{sn}\end{pmatrix}\\ \begin{matrix}\beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n\end{matrix}\end{array}$$

$$AB=A\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A\beta_1 & A\beta_2 & \cdots & A\beta_n\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix}B=\begin{pmatrix}\alpha_1 B\\ \alpha_2 B\\ \vdots\\ \alpha_m B\end{pmatrix}.$$

$A\beta_i$是 A 的列向量的线性组合;

$\alpha_i B$是 B 的行向量的线性组合.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & b_{m2} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_s \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_s \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{s} a_{1k}\beta_k \\ \sum_{k=1}^{s} a_{2k}\beta_k \\ \cdots \\ \sum_{k=1}^{s} a_{mk}\beta_k \end{pmatrix}$$

$$
\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_s\end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & b_{m2} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{s} b_{k1}\alpha_k & \sum_{k=1}^{s} b_{k2}\alpha_k & \cdots & \sum_{k=1}^{s} b_{kn}\alpha_k \end{pmatrix}
$$

3.分块矩阵的转置:行组和列组互换,并且各子阵转置.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1t} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{l1} & \boldsymbol{A}_{l2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{lt} \end{pmatrix},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{21}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{l1}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{A}_{12}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{22}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2r}^{\mathrm{T}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{1t}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{2t}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{lt}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}.$$

4.几个特殊分块矩阵的行列式

$$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{m\times m} & \boldsymbol{O}_{m\times n} \\ \boldsymbol{C}_{n\times m} & \boldsymbol{B}_{n\times n} \end{pmatrix}, |\boldsymbol{D}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|.$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2 & \cdots & \boldsymbol{O} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{A}_p \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_i\text{是方阵},$$

$$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}_1||\boldsymbol{A}_2|\cdots|\boldsymbol{A}_p|.$$

A称为准对角矩阵,其行列式等于对角线子阵行列式的乘积.

三、分块矩阵应用举例

例证明$r(AB)\leqq\min(r(A),r(B))$.

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_s\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$$

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{s1} & b_{m2} & \cdots & b_{sn}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\sum_{k=1}^{s}b_{k1}\alpha_k & \sum_{k=1}^{s}b_{k2}\alpha_k & \cdots & \sum_{k=1}^{s}b_{kn}\alpha_k\end{pmatrix}$$

$=\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}C_1 & C_2 & \cdots & C_n\end{pmatrix}$. $\{C_i\}$是$\{\alpha_i\}$的线性组合，故$r(AB)=r(C_1,\cdots,C_n)\leq r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)=r(A)$.

$$A=(a_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, B=(b_{ij})_{n\times p}=\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix},$$

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}\beta_k \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k}\beta_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{mk}\beta_k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_m \end{pmatrix}.$$

$C_1,\cdots,C_m$ 是B的行向量线性组合，故$r(AB)\leqq r(B)$.

也可以通过转置归结为前面的结论。

$$r(AB)=r((AB)^{\mathrm{T}})=$$

$$r(B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}})\le r(B^{\mathrm{T}})=r(B).$$

例 证明：设A, B分别是$s\times n, n\times m$矩阵. 如果$AB=0$,

则 $\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)\le n.$

证明 $B=(X_1, X_2, \cdots, X_m)$,

$AB=A(X_1, X_2, \cdots, X_m)=(AX_1, AX_2, \cdots, AX_m)=0,$

$AX_i=0, i=1, \cdots, m.$

$AX=0$基础解系$\eta_1, \cdots,\ \eta_{n-r(A)}$,

$X_1, X_2, \cdots, X_m$可用$\eta_1, \cdots,\ \eta_{n-r(A)}$线性表示,

$r(B)=r(X_1, X_2, \cdots, X_m)\le r(\eta_1, \cdots,\ \eta_{n-r(A)})=n-r(A),$

$r(A)+r(B)\le n.$

乘积AB的第i个行向量是B的行向量组的线性组合,其系数是A的第i个行向量的分量.

乘积AB的第j个列向量是A的列向量组的线性组合,其系数是B的第j个列向量的分量.

作业

习题三

26（1），

27(1),

28(1),

29,

31，

33

§4 逆矩阵

有了乘法，自然要考虑除法，对于数

$$a \div b = a \times \frac{1}{b} = a \times b^{-1}. b^{-1} \times b = 1.$$

对于矩阵,跟数1对应的是单位矩阵E.

定义 对于矩阵A，如果存在矩阵B,使得

$$AB = BA = E.$$

则称B是A的一个逆矩阵.

由定义得到

(1)有逆矩阵的矩阵必定是方阵.且其逆矩阵与之同价.

(2)逆矩阵如果存在必唯一.

如果B_1和B_2都是 A的逆矩阵,则

$$\boldsymbol{AB_1 = B_1A = E, AB_2 = B_2A = E}.$$

$$\boldsymbol{B_1 = B_1E = B_1(AB_2) = (B_1A)B_2 = EB_2 = B_2}.$$

当A有逆矩阵时,记其唯一的逆矩阵为A^{-1}.

(3)如果A有逆矩阵,则A的行列式不等于0.

设B为A的逆矩阵,则$AB=E$,$|AB|=|A||B|=|E|=1$,故$|A|\neq 0$.

本节基本任务是证明$|A|\neq 0$时A必有逆矩阵,并且给出逆矩阵的表达式.

为此我们引进

定义 矩阵

$$A^* = (A_{ij})_n^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为矩阵A的伴随矩阵，其中 A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式。

$$
AA^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix} = |A| E_n .
$$

行列式按行展开.

$$A^*A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix}=|A|E_n=AA^*.$$

行列式按列展开.

定理 方阵A为可逆矩阵的充要条件是$|A|\neq 0$.
当A可逆时,

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}.$$

证明 必要性已经证明.设$|A|\neq 0$,则

$$A(\frac{1}{|A|}A^{*})=\frac{1}{|A|}AA^{*}=\frac{1}{|A|}|A|E=E,$$

$$(\frac{1}{|A|}A^{*})A=\frac{1}{|A|}(A^{*}A)=\frac{1}{|A|}|A|E=E.$$

故A可逆,并且 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}.$

推论 如果方阵A,B满足$AB=E$，则A,B都可逆，并且 $A^{-1}=B, B^{-1}=B.$

证明 $AB=E$, $|AB|=|A||B|=|E|=1, |A|\neq 0, ,|B|\neq 0$,故$A,B$都可逆.

$$A^{-1}=A^{-1}E=A^{-1}AB=(A^{-1}A)B=EB=B.$$

$$B^{-1}=EB^{-1}=(AB)B^{-1}=A(BB^{-1})=AE=A.$$

由此推论得到

$$(A^{-1})^{-1}=A.$$

按照定义，A的逆 B必须满足$AB=BA=E$，根据这个推论在应用中只需验证$AB=E$或$BA=E$即可。

例设 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, ad-bc=1$,求$A^{-1}$.

解

$$|A|=ad-bc=1,$$

$$A_{11}=d, A_{12}=-c, A_{21}=-b, A_{22}=a,$$

$$A^*=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

例 判断下列矩阵是否可逆.如果可逆,求其逆:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

解 因为 $|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=-4\neq 0,$

故A可逆.

$$A_{11}=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-1, A_{12}=-\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-2, A_{13}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=1,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-1, A_{22}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2, A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=1,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=-1, A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-2, A_{33}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-3.$$

于是

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}=\frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{-4}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

$A := matrix([[1, 1, -1], [2, -1, 0], [1, 0, 1]]);$

$Ai := inverse(A);$

$AAi := multiply(A, Ai);$

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Ai := \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$$AAi := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

逆矩阵的性质

(1)若A 可逆,则A^{-1}可逆,并且$(A^{-1})^{-1}$.

(2) 若A,B 可逆,则AB可逆, 并且$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

(3) 若A 可逆,则A^{T}可逆,并且$(A^{\mathrm{T}})^{-1}=(A^{-1})^{\mathrm{T}}$.

(4) 若A 可逆,$c\neq 0$,则cA可逆,并且$(cA)^{-1}=c^{-1}A^{-1}$.

(5)若A 可逆,则$\left|A^{-1}\right|=|A|^{-1}$.

证明 (1)已经证明

$$(2)(B^{-1}A^{-1})(AB)=B^{-1}(A^{-1}A)B=B^{-1}EB=B^{-1}B=E.$$

(3)$(A^{-1})^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}=(AA^{-1})^{\mathrm{T}}=E^{\mathrm{T}}=E$.**故**$(A^{-1})^{\mathrm{T}}=(A^{\mathrm{T}})^{-1}$.

(4)（5)自己证明.

例 设A,B分别为m阶和n阶可逆方阵.试证分块矩阵 $\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$ 可逆,并且求H^{-1}.

证明 $|H|=|A||B|\neq 0$,H可逆.设 $\boldsymbol{H}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X} & \boldsymbol{Z}\\ \boldsymbol{W} & \boldsymbol{Y}\end{pmatrix}$,则

$$\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{X} & \boldsymbol{Z}\\ \boldsymbol{W} & \boldsymbol{Y}\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{CW} & \boldsymbol{AZ}+\boldsymbol{CY}\\ \boldsymbol{BW} & \boldsymbol{BY}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} AX+CW & AZ+CY \\ BW & BY \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_m & O \\ O & E_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} AX+CW=E_m, \\ AZ+CY=O, \\ BW=O, \text{左乘} B^{-1} \\ BY=E_n. \text{左乘} B^{-1} \end{cases} \begin{cases} W=B^{-1}O=O, \\ Y=B^{-1}E_n=B^{-1}, \\ AX=E_m, X=A^{-1}, \\ AZ=-CB^{-1}, Z=-A^{-1}CB^{-1}. \end{cases}$$

不说除A.

$$H^{-1}=\begin{pmatrix} X & Z \\ W & Y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}.$$

如果$C=O$,则 $H^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$. 可以推广到任意准对角矩阵.

直接验证之

$$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} E_m & O \\ O & E_n \end{pmatrix}.$$

例 已知A,B 和 $A+B$均为可逆矩阵,试证 $A^{-1}+B^{-1}$ 也可逆,并求其逆矩阵.

证 (形式上

$$(a^{-1}+b^{-1})=(\frac{a+b}{ab})=a^{-1}(a+b)b^{-1}.)$$

$$A^{-1}(A+B)B^{-1}=(E+A^{-1}B)B^{-1}=A^{-1}+B^{-1}.$$

$A^{-1}+B^{-1}=A^{-1}(A+B)B^{-1}, A^{-1}, A+B, B^{-1}$可逆,

$$\therefore (A^{-1}+B^{-1})^{-1}=[A^{-1}(A+B)B^{-1}]^{-1}$$

$$=B(A+B)^{-1}A.$$

把矩阵表示成乘积,证明每个因子可逆.

例 已知n阶矩阵A满足

$$A^2-3A-2E=O.$$

试证：A可逆，并且求A^{-1}。

证明

$$A^2-3AE-2E=O,$$

$$A(A-3E)=2E,$$

$$A[(1/2)(A-3E)]=E,$$

$$A^{-1}=(1/2)(A-3E).$$

例 设n阶矩阵A和B满足关系$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}$，
证明$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}$ 为可逆矩阵

$$A+B=AB,$$

$$AB-AE-B+E=E,$$

$$[ab-a-b+1=a(b-1)-(b-1)=(a-1)(b-1)]$$

$$A(B-E)-E(B-E)=E,$$

$$(A-E)(B-E)=E.$$

$A-E$可逆,其逆矩阵为$B-E$. $B-E$也可逆.

伴随矩阵的性质

$(1) AA^* = A^* A = |A| E$;

$(2) |A| \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = (1/|A|) A^*, A^* = |A| A^{-1}$;

$(3) |A^*| = |A|^{n-1} \ (n > 1)$;

$(4) A$ 可逆,则A^* 可逆,且$(A^*)^{-1} = (1/|A|) A = (A^{-1})^*$;

$(5) (A^{\mathrm{T}})^* = (A^*)^{\mathrm{T}}$;

$(6) (cA)^* = c^{n-1} A^*$;

$(7) (AB)^* = B^* A^*, (A^k)^* = (A^*)^k$;

$(8) (A^*)^* = |A|^{n-2} A.$

伴随矩阵的性质的证明(设A,B可逆)（仅供参考）

$$(1)AA^* = A^*A = |A|E;$$

$$(2)|A| \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = (1/|A|)A^*, A^* = |A|A^{-1};$$

$$(3)|A^*| = |A|^{n-1}\ (n>1);$$

$$AA^* = |A|E, |AA^*| = |A||A^*| = |A|^n, |A| \neq 0,$$

$$|A^*| = |A|^n / |A| = |A|^{n-1}$$

(4) A 可逆,则 A^* 可逆,且 $(A^*)^{-1} = (1/|A|)A = (A^{-1})^*$;

证明 $A^* = |A| A^{-1}$.

$$(A^*)^{-1} = (|A|)A)^{-1} = |A|^{-1} A.$$

$$(A^{-1})^* = |A^{-1}|(A^{-1})^{-1} = |A|^{-1} A$$

(5) $(A^{\mathrm{T}})^* = (A^*)^{\mathrm{T}}$;

证明 $(A^{\mathrm{T}})^* = |A^{\mathrm{T}}|(A^{\mathrm{T}})^{-1} = |A|(A^{-1})^{\mathrm{T}}$,

$$(A^*)^{\mathrm{T}} = (|A| A^{-1})^{\mathrm{T}} = |A|(A^{-1})^{\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}})^*.$$

$$(6)(cA)^{*}=c^{n-1}A^{*};$$

$$(7)(AB)^{*}=B^{*}A^{*},(A^{k})^{*}=(A^{*})^{k};$$

证明　$(AB)^{*}=|AB|(AB)^{-1}=|A||B|B^{-1}A^{-1}$

$$=(|B|B^{-1})(|A|A^{-1})=B^{*}A^{*}$$

$$(8)(A^{*})^{*}=|A|^{n-2}A.$$

证明　$(A^{*})^{*}=(|A|A^{-1})^{*}$

$$=||A|A^{-1}|(|A|A^{-1})^{-1}=|A|^{n}|A^{-1}||A|^{-1}(A^{-1})^{-1}$$

$$=|A|^{n-2}A.$$

作业

习题三34（1）,(3),35,37,39,40(1),41

§5 用初等变换求逆矩阵

设n阶矩阵A可逆，其逆矩阵 $X=(X_1,\cdots,X_n)$

满足$AX=A(X_1,\cdots,X_n)=E=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)$.

其中 $X_1,\cdots,X_n$ 为n维未知列向量，$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$
为n维基本单位列向量.$AX_i=\varepsilon_i, i=1,\cdots,n$.

为了解这n个线性方程组,把对应增广矩阵 $(A\,\varepsilon_i)$

化为行简化阶梯形矩阵$(E\ X_i)$.系数矩阵是同一个,故可以写出增广矩阵

$$(A\,E).$$

$$(A\,E)\to(E\ X).$$

用初等行变换求矩阵A_n的逆矩阵的步骤:

(1)写出$n \times 2n$矩阵(A,E);

(2)对(A,E)进行初等行变换，把A变为单位矩阵，这时E 就变为A^{-1}.

例设 $A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 求 A^{-1}.

解

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/6 & -1/3 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/6 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & 4/3 & 1/3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/6 & -1/6 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & 4/3 & 1/3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/6 & -1/6 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/6 & -1/6 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/6 & -1/6 & 1/2 \\ -2/3 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}.$$

求A_n的逆矩阵,相当解方程$AX=E$,把E换成 矩阵$B_{n\times m}$,可以用类似的初等行变换解矩阵方程$AX=B$.

$$(\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{B}) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (\boldsymbol{E}\quad \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}).$$

例解矩阵方程$AX=A+2X$,其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

解$(A-2E)X=A$.

$$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -12 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -12 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 12 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -9 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 12 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -9 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 12 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -8 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -9 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 12 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -8 & -6 \\ 2 & -9 & -6 \\ -2 & 12 & 9 \end{pmatrix}.$$

例求逆矩阵,设$a_1\cdots a_n\neq 0$.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解 $(A,E)=$

$$
\begin{pmatrix}
0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 \\
a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 1
\end{pmatrix}
$$

$$
\rightarrow
\begin{pmatrix}
a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\
0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & & 1 & 0
\end{pmatrix}
$$

$$
\left(\begin{array}{cccccc:cccccc}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1/a_n \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1/a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & & & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1/a_{n-1} & 0
\end{array}\right)
$$

$$
A^{-1} = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1/a_n \\
1/a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1/a_{n-1} & 0
\end{pmatrix}
$$

§6 初等矩阵

定义 单位矩阵经过一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵.

对应三种初等行变换,有三种初等矩阵:

$$
\begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccccccc}
1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & 0 & \cdots & 1 & & \\
 & & \vdots & 1 \ddots 1 & \vdots & & \\
 & & 1 & \cdots & 0 & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{array}\right)\end{array}
\begin{array}{l} \\ \\ \boldsymbol{i} \\ \\ \boldsymbol{j} \\ \\ \\ \end{array}
\qquad
\left(\begin{array}{cccccc}
1 & & & & & \\
 & \ddots & & & & \\
 & & 1 & & & \\
 & & & c & & \\
 & & & & 1 & \\
 & & & & & \ddots \\
 & & & & & & 1
\end{array}\right)
\begin{array}{l} \\ \\ \\ \boldsymbol{i} \\ \\ \\ \\ \end{array}
\qquad
\left(\begin{array}{cccccc}
1 & & & & & \\
 & \ddots & & & & \\
 & & 1 & \cdots & l & \\
 & & & \ddots & \vdots & \\
 & & & & 1 & \\
 & & & & & \ddots \\
 & & & & & & 1
\end{array}\right)
\begin{array}{l} \\ \\ \boldsymbol{i} \\ \\ \boldsymbol{j} \\ \\ \\ \end{array}
$$

(1)互换E的i,j两行　(2)E的i行c倍　(3)i行加j 行l倍

$\boldsymbol{E(i,j)}$　　$\boldsymbol{E(i(c))(c\neq 0)}$　　$\boldsymbol{E(i,j(l))}$

逆矩阵$\boldsymbol{E(i,j)}$　　$\boldsymbol{E(i(1/c))}$　　$\boldsymbol{E(i,j(-l))}$

用基本单位向量表示初等矩阵

$$\varepsilon_i = (\cdots, 1, \cdots)$$

第i个位置

$$\begin{array}{c} \\ (i) \\ \\ (j) \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_j \\ \vdots \\ \varepsilon_i \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ c\varepsilon_i \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} (c \neq 0) \quad \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_i + c\varepsilon_j \\ \vdots \\ \varepsilon_j \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

第一类　　第二类　　第三类

定理 矩阵$A_{m\times n}$左(右)乘$m(n)$阶初等矩阵相当对于A做同类初等行(列)变换.

证明

先用具体例子说明

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ ca_{21} & ca_{22} & ca_{23} & ca_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & c & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} + ca_{21} & a_{12} + ca_{22} & a_{13} + ca_{23} & a_{14} + ca_{24} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

初等列变换

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & ka_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{21} & ka_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{31} & ka_{33} & a_{34} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} & a_{14}+la_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} & a_{24}+la_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} & a_{34}+la_{33} \end{pmatrix}.$$

再进行一般情形的证明.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

$\varepsilon_i A = A$的第i行, $A\varepsilon_i^{\mathrm{T}} = A$的第$i$列.

$$i<j,\quad \begin{array}{c} \vdots \\ (i) \\ \vdots \\ (j) \\ \vdots \end{array} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_j \\ \vdots \\ \varepsilon_i \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 A \\ \vdots \\ \varepsilon_j A \\ \vdots \\ \varepsilon_i A \\ \vdots \\ \varepsilon_n A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_j \\ \vdots \\ \alpha_i \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ c\varepsilon_i \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 A \\ \vdots \\ c\varepsilon_i A \\ \vdots \\ \varepsilon_n A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ c\alpha_i \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix},$$

$$\begin{array}{c} \\ \vdots \\ (i) \\ \vdots \\ (j) \\ \vdots \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_i + c\varepsilon_j \\ \vdots \\ \varepsilon_j \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 A \\ \vdots \\ (\varepsilon_i + c\varepsilon_j)A \\ \vdots \\ \varepsilon_j A \\ \vdots \\ \varepsilon_n A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_i + c\alpha_j \\ \vdots \\ \alpha_j \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

定理 初等矩阵的逆矩阵还是初等矩阵.

$$E(i,j)^{-1}=E(i,j);$$

$$E(i(c))^{-1}=E(i(1/c))(c\neq 0);$$

$$E(i,j(l))^{-1}=E(i,j(-l)).$$

证明

$$E(i,j)E(i,j)=E(i,j)E(i,j)E=E;$$

$$E(i(c))E(i(1/c))=E(i(c))E(i(1/c))E=E;$$

$$E(i,j(l))E(i,j(-l))=E(i,j(l))E(i,j(-l)E=E.$$

我们知道，矩阵经过一系列初等行变换和列变换变成标准形

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix},$$

结合上面的定理得到

定理 如果矩阵$A_{m\times n}$的秩为r，则存在m阶初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1,\cdots,\boldsymbol{P}_s$ 和n阶初等矩阵 $\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_t$，使得

$$\boldsymbol{P}_s\cdots\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\cdots\boldsymbol{Q}_t=\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}_{r\times(n-r)} \\ \boldsymbol{O}_{(m-r)\times r} & \boldsymbol{O}_{(m-r)\times(n-r)} \end{pmatrix}.$$

定理 方阵A可逆的充要条件是它可以表示为初等矩阵的乘积.

证明必要性.设$\boldsymbol{A}$可逆,则其秩为n,根据上一个定理,存在初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1,\cdots,\boldsymbol{P}_s$ 和初等矩阵 $\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_t$， 使得

$$\boldsymbol{P}_s\cdots\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\cdots\boldsymbol{Q}_t=\boldsymbol{E}.$$

于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}&=(\boldsymbol{P}_s\cdots\boldsymbol{P}_1)^{-1}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{Q}_1\cdots\boldsymbol{Q}_t)^{-1}\\&=\boldsymbol{P}_1^{-1}\cdots\boldsymbol{P}_s^{-1}\boldsymbol{Q}_t^{-1}\cdots\boldsymbol{Q}_1^{-1}.\end{aligned}$$

而初等矩阵的逆仍是初等矩阵,上式表明 $\boldsymbol{A}$ 可以表示为初等矩阵的乘积.

充分性.如果A可以表示为初等矩阵的乘积,由于初等矩阵可逆,而可逆矩阵的乘积仍然可逆,故A可逆.

定理 A，B为方阵，则$|AB|=|A||B|$.

证明 设P为初等矩阵，则$|PB|=|P||B|$.理由如下:

$$|E(i,j)B|=-|B|=|E(i,j)||B|,$$

$$|E(i(c))B|=c|B|=|E(i(c))||B|,$$

$$|E(i,l(j))B|=|B|=|E(i,l(j))||B|.$$

$$|P_1P_2\cdots P_kB|=|P_1(P_2\cdots P_kB)|=|P_1||P_2\cdots P_kB|$$

$$=|P_1||P_2||\cdots P_kB|=|P_1||P_2|\cdots|P_k||B|.$$

若$|A|\neq 0$，则

$$A=P_1P_2\cdots P_k,\ |A|=|P_1||P_2|\cdots|P_k|,$$

$$|AB|=|P_1P_2\cdots P_kB|=|P_1||P_2|\cdots|P_k||B|=|A||B|.$$

若$|A|=0$,则$r(A)\leqq n-1$,$r(AB)\leqq r(A)\leqq n-1$,

$|AB|=0=0|B|=|A||B|$.

例$|A|\neq 0, r(AB)=r(B)$.

$A=P_1\ldots P_s$,

$AB=P_1\ldots P_s B$,

B经过初等行变换，其秩不变，故$r(AB)=r(B)$.

以下判断等价：

方阵A_n可逆，

$|A| \neq 0$

存在矩阵B，使得$AB=E$,

A的秩为n,

A的行（列）向量组线性无关,

A可以表示成初等矩阵的乘积，

方程$AX=O$只有零解,

方程$AX= b$对于任意b有唯一解.

以下判断等价：

方阵A_n不可逆，

$|A|=0$，

不存在矩阵B，使得$AB=E$,

$r(A)<n$,

A的行（列）向量组线性相关,

A不可以表示成初等矩阵的乘积

方程$AX=o$有非零解.

作业

习题三45(1),(3),46(1),(4),49,50，51，52，53，54

例 设A是$n(n\geq 2)$阶矩阵,则

$$r(A^*)=\begin{cases} n & \text{if } r(A)=n; \\ 1 & \text{if } r(A)=n-1; \\ 0 & \text{if } r(A)<n-1. \end{cases}$$

证 若$r(A)=n$,则$|A|\neq 0$,

$$AA^*=|A|E, |AA^*|=|A||A^*|=|A|^n\neq 0, |A^*|=|A|^{n-1}\neq 0.$$

故$r(A^*)=n$.

若r(A)=n-1,则|A|=0,有一个n-1阶子式不等于0

$r(A)\geq 1$.又$AA^*=|A|E=O$,根据2例6

$$r(A^*)\leq n-r(A)=n-(n-1)=1.\text{故} r(A^*)=1.$$

若$r(A)<n-1$,则A的所有$n-1$阶子式等于零, $A^*=O$,

故 $r(A^*)=0$.

前三章内容提要

一行列式

$\boxed{\text{排列,逆序数,奇排列和偶排列,对换一次改变奇偶性.一个排列经过若干次对换变成自然顺序,对换次数和排列奇偶性相同.}}$

行列式定义

$$|a_{ij}|_n = \sum_{j_1 \cdots j_n \in P_n} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{nj_n}.$$

行列式性质

$n(n-1)\ \ldots 21$的逆序数$=(n-1)n/2$.

1.行列互换,其值不变

2.两行互换,符号改变

3.一行(公)因子,提在外边

4.一行为和,拆成两个

5.一行加另行倍数,其值不变

利用行列式性质通过初等变换,化为三角形求值
特别注意交换两行奇数次行列式变号.

范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 3^2 & 2^2 & 5^2 \end{vmatrix} = (5-2)(5-3)(2-3) = 3\times 2\times(-1) = -6.$$

行列式按一行展开

$A=(a_{ij})_n$,

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=\delta_{ij}\,|A|,\delta_{ij}=\begin{cases}1, i=j;\\ 0, i\neq j.\end{cases}$$

克莱姆法则$D\neq 0$时，方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$$

$$x_1\alpha_1+\cdots x_n\alpha_n=\beta, AX=\beta$$

有唯一解

$$x_j=\frac{D_j}{D}, j=1,\cdots,n.$$

$$D=|(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)|, D_j=|(\alpha_1,\cdots,\overset{(j)}{\beta},\cdots,\alpha_n)|$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = 1, \cdots, n. X = (x_1, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$$

$$\alpha_j = (a_{1j}, \cdots, a_{nj})^{\mathrm{T}}, j = 1, \cdots, n, \beta = (b_1, \cdots, b_n)^{\mathrm{T}},$$

$$x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta,$$

$$A = (a_{ij})_{n\times n},$$

$$AX = \beta$$

$$D = |(a_{ij})_{n\times n}| \neq 0, D_j = |(\alpha_1, \cdots, \beta, \cdots, n)|,$$

$$x_j = \frac{D_j}{D}, j = 1, \cdots, n.$$

$D \neq 0$时

$$x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n = o$$

只有零解, $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 线性无关.

$D=0$时

$$x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n = o$$

有非零解吗?这要在线性方程组的矩阵消元法中解决.

克莱姆法则用于解逆矩阵方程$AX=E$.

$$AX = A(X_1,\cdots,X_n) = E_n = (\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n).$$

$$AX_j = \varepsilon_j = (0,\cdots,\underset{(j)}{1},\cdots,0)$$

为了求X_j的第i个分量, ε_j 放在A的第i列

$$D_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & \underset{(i)}{1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} D_{ji} = A_{ji}$$

$$X_{ij} = \frac{A_{ij}}{D}, i, j = 1,\cdots,n.$$

线性方程组

矩阵消元法

初等行变换化矩阵为阶梯形,

初等行变换化矩阵为行简化阶梯形,

解的情形的初步讨论

$$d_{r+1}=\begin{cases}\neq 0, & \text{无解}\\ =0\begin{cases}r=n, & \text{唯一解}\\ r<n & \text{无穷个解}\end{cases}\end{cases}$$

齐次方程组方程个数小于方程个数必有非零解.

(1) $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 可用 $\beta_1,\cdots,\beta_t$ 线性表示，$s>t$, $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性相关.

$$(\alpha_1 \quad \cdots \quad \alpha_s)=(\beta_1 \quad \cdots \quad \beta_t)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{t1} & \cdots & a_{ts} \end{pmatrix},$$

$$(\alpha_1 \quad \cdots \quad \alpha_s)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(\beta_1 \quad \cdots \quad \beta_t)[\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{t1} & \cdots & a_{ts} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix}]=o,$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{t1} & \cdots & a_{ts} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix} = o.s > t.$$

(2) $|A| = 0$ 的行向量组线性相关.$r<n$.

向量组的秩

向量组的线性相关，下列方程有非零解

$$x_1\alpha_1+\cdots+x_s\alpha_s=o, x_1\neq 0, \alpha_1=c_2\alpha_2+\cdots+c_s\alpha_s$$

$$x_1\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{n2}\end{pmatrix}+\cdots+x_s\begin{pmatrix}a_{1s}\\a_{2s}\\\vdots\\a_{ns}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1s}x_s=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2s}x_s=0\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{ns}x_s=0\end{cases}$$

$s=n, |A|=0$

向量个数大于维数，线性相关

$s>n,$

初等行变换不改变线性关系

$x_1\alpha_1'+\cdots+x_s\alpha_s'=o$

$AX=o$

从而把极大无关组变成极大无关组

$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 可用 $\beta_1,\cdots,\beta_t$ 线性表示，$s>t$，$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性相关.

$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 是 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 的一个极大线性无关组，若

(1) $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性无关；

(2) $\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha_i$ 线性相关.

$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 可用 $\beta_1,\cdots,\beta_t$ 线性表示，$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 任何极大线性无关组向量个数不超过 $\beta_1,\cdots,\beta_t$ 的任何极大线性无关组向量个数.

等价向量组的任何两个极大线性无关组含有同样个数的向量.

一个向量组的任何两个极大线性无关组含有同样个数的向量.

一个向量组I的任何一个极大线性无关组含有的向量个数称为向量组的秩$r(\mathrm{I})$.

若I可用II线性表示,则$r(\mathrm{I})\le r(\mathrm{II})$.

$\mathrm{I}\cong\mathrm{II} \Rightarrow r(\mathrm{I})=r(\mathrm{II})$.

矩阵的秩

行秩：矩阵行向量组的秩

初等行变换不改变行秩(等价向量组)

初等列变换不改变行秩

列秩：矩阵列向量组的秩

初等列变换不改变列秩(等价向量组)

初等行变换不改变列秩 (不改变列向量线性关系)

行秩=列秩=矩阵的秩$r(A)$=不等于零的子式的最大阶.

把给定向量作为矩阵的列向量，用矩阵初等行变换求秩、极大无关组、和其余向量用极大线性无关组的线性表示

用秩表述线性方程组$A_{m\times n}X=\beta$ 解的情况

$$\bar{A}=(A,\beta)$$

$r(A)\neq r(\bar{A})$ 无解

$$r(A)=r(\bar{A})=r\text{有解}\begin{cases} r=n & \text{唯一解} \\ r<n & \text{无穷个解} \end{cases}$$

齐次方程组方程 $A_{m\times n}X=o$ 的基础解系含有 $n-r(A)$ 个向量 $\eta_1,\cdots,\eta_{n-r}$，

齐次方程组基础解系求法

$m=n$时,$AX=o$有解 $\Leftrightarrow$ $|A|=0$.这一事实以及基础解系的求法将是第五章的基础.

矩阵的运算

矩阵乘法定义

$$|AB|=|A||B|,(AB)^T=B^TA^T.$$

矩阵乘积的行(列)向量是右(左)矩阵行向量的线性组合

$r(AB)\le \min(r(\mathrm{A}),r(\mathrm{B}))$,若$A_{\mathrm{m}\times\mathrm{n}}B_{\mathrm{n}\times\mathrm{p}}=\mathrm{O}$，则$r(A)+r(B)\le n$

逆矩阵定义,逆矩阵唯一,

定理:$AB=E$,则A,B互逆.

逆矩阵性质:

(1)$AB=E\Rightarrow A^{-1}=B,B^{-1}=A.$

(2)A,B 可逆,则AB 可逆，并且 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}.$

(3)$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T,$

(4)$(kA)=k^{-1}A^{-1}(k\neq 0).$

(5)A可逆，则A^*可逆，并且$AA^*=A^*A=|A|E$,

$A^{-1}=(1/|A|)A^*, A^*=|A|A^{-1}$

初等矩阵,
初等矩阵和初等变换的关系
用初等变换求逆矩阵 $(A,E)\longrightarrow(E,A^{-1})$.
矩阵方程

$$AX=B,(A,B)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(E,A^{-1}B),$$

$$XA=B,\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等列变换}}\begin{pmatrix}E\\BA^{-1}\end{pmatrix}.$$

$|A|\neq 0$

以下判断等价：

方阵A_n可逆，

$|A|\neq 0$，

存在矩阵B，使得$AB=E$,

A的秩为n,

A的行（列）向量组线性无关,

A可以表示成初等矩阵的乘积，

方程$AX=O$只有零解，

对于某个n维列向量β，方程$AX=\beta$有唯一解

对于任意n维列向量β，方程$AX=\beta$有唯一解.

$$|A_n| = 0$$

以下判断等价：

方阵A_n不可逆，

$|A|=0$，

不存在矩阵B，使得$AB=E$,

$r(A)<n$,

A的行（列）向量组线性相关,

A不可以表示成初等矩阵的乘积，

方程$AX=O$有非零解，

对于某个n维列向量 β，方程$AX=\beta$ 非唯一解

对于任意n维列向量β，方程$AX=\beta$非唯一解。