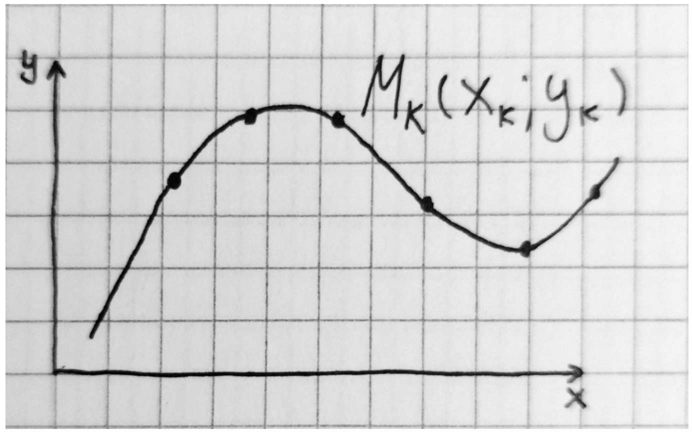
Информационные технологии

Бахирев С.Н.

5 октября 2024 г.

1 Лекция 1

1.1 Интерполяция



На графике даны точки:

$$\begin{cases} M_k(x_k, y_k), \\ k = \overline{1 \dots m} \end{cases}$$

Задача: соединить узлы (точки), что решает интерполирование. Необходимо подобрать простейшую функцию, которая соединяет все точки.

Полином степени n:

$$P_n = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n$$

Количество коэфициентов: $n + 1 \quad (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$

Нужно найти полином, который проходит через все узлы, с наименьшим количеством коэфициентов.

$$\begin{cases} P_n(x_k) = y_k, \\ k = \overline{1 \dots m} \end{cases}$$

Для каждой точки на графике получится уравнение:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_1^2 + \dots + a_n \cdot x_1^n = y_1 \\ a_0 + a_1 \cdot x_2 + a_2 \cdot x_2^2 + \dots + a_n \cdot x_2^n = y_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_0 + a_1 \cdot x_m + a_2 \cdot x_m^2 + \dots + a_n \cdot x_m^n = y_m \end{cases}$$

$(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$ - неизвестные.
$((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots (x_m, y_m))$ - заданные точки.

Это **система линейных алгебраических уравнений**.

Вектор неизвестных:

$$\begin{cases} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{cases}$$

Вектор числовых значений:

$$\begin{cases} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{cases}$$

Матрица коэфициентов:

$$\begin{cases} 1 \ x_1 \ x_1^2 \ \dots \ x_1^n \\ 1 \ x_2 \ x_2^2 \ \dots \ x_2^n \\ \dots \\ 1 \ x_m \ x_m^2 \ \dots \ x_m^n \end{cases}$$

Матрица должна быть квадратной ($n+1$ - столбцов, m - строк, $n+1=m$)

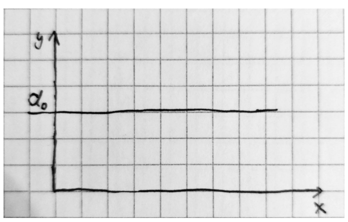
Степень полинома должна быть равна $n = m-1$

$x_i \neq x_j$ (все узлы различны) $\implies$ $det(A) \neq 0$ (матрица невырождена) $\implies$ имеется единственное решение при $n = m-1$ $\implies$ полином, проходящий через эти точки, лишь один.

В итоге, мы получили:

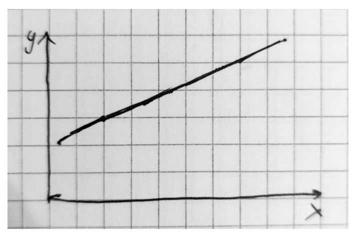
$m = 1$ (Если 1 эксперементальная точка то это полином 0 степени):

$$P_0(x) = a_0$$



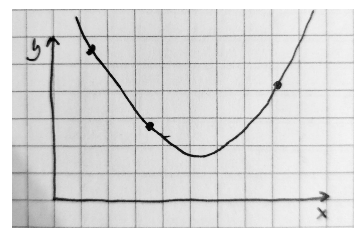
$m = 2$:

$$P_1(x) = a_0 + a_1 \cdot x$$



$m = 3$:

$$P_2(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2$$



(Решение этой задачи в матлабе: $a = A \backslash B$)

1.2 Интерполиционный полином в форме Лагранжа

Задача та же

Обозначение формулы Лагранжа:

$$L_n(x) = \sum_{k=1}^{m} y_k \cdot \omega_k(x)$$

$$L_{m-1}(x) = \sum_{k=1}^{m} y_k \cdot \omega_k(x) \quad (n = m-1)$$

Условия, которым должна соответствовать функция $\omega_k(x)$:

- $\begin{cases} \omega_k(x_i) = 0 \text{ где } i \neq k \\ \omega_k(x_k) = 1 \end{cases}$
- $\omega_k(x) = P_{m-1}(x)$

Функция, удовлетворяющяя этим условиям:

$$\omega_k(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_m)}{(x_k-x_1)(x_k-x_2)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_m)}$$

Получаем:

$$L_{m-1}(x) = \sum_{k=1}^{m}\left(y_k \cdot \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{m} \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}\right)$$

Найдём вид формулы Лагранжа для определённых m:

- $m = 2:$ $\qquad P_1(x) = a_0 + a_1 \cdot x$

$$L_1(x) = y_1 \cdot \left(\frac{x-x_2}{x_1-x_2}\right) + y_2 \cdot \left(\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\right) = \left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)x + \left(\frac{y_1\cdot x_2 - y_2 \cdot x_1}{x_2-x_1}\right)$$

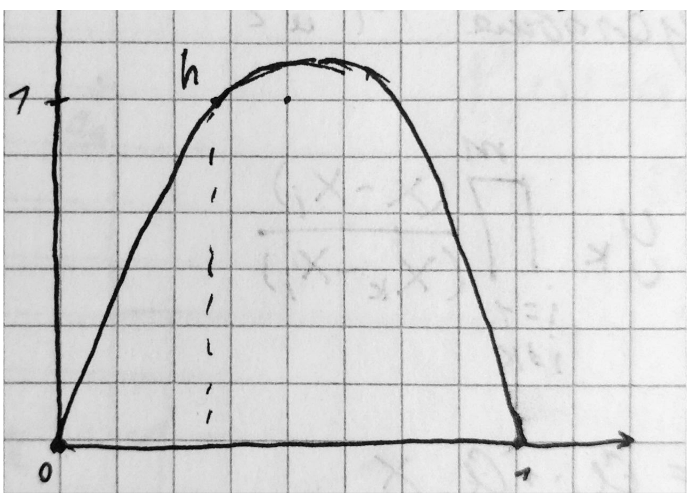
$$a_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$a_0 = \frac{y_1\cdot x_2 - y_2\cdot x_1}{x_2-x_1}$$

- $m = 3:$ $\qquad P_2(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2$

$$L_2(x) = y_1 \cdot \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + y_2 \cdot \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3 \cdot \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

Пример (m = 3):



Даны 3 точки. (0, 0), (h, 1), (1, 0). Значение функции в точке h было измерено с погрешностью δ ($|\delta| \ll 1$).

Нужно найти, при каком значении h, данная погрешность имеет минимальное влияние на конечный полином.

- Сначала не берём во внимание погрешность.

$$L_2(x) = 1 \cdot \frac{(x-0)(x-1)}{(h-0)(h-1)} = \frac{x(1-x)}{h(1-h)}$$

$$L_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4h(1-h)}$$

- Тепер, учитывая погрешность.

$$\overline{L_2}(x) = (1+\delta)\cdot\frac{x(1-x)}{h(1-h)}$$

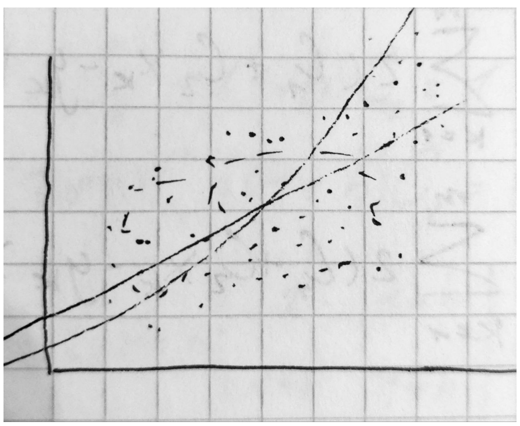
$$\overline{L_2} - L_2 = \delta\frac{x(1-x)}{h(1-h)}$$

При $x = \frac{1}{2}$, если $h \sim 0$ или $h \sim 1 \implies |\overline{L_2} - L_2| \gg |\delta| \implies$ погрешность сильно влияет на конечный полином.

При $h = \frac{1}{2} \implies |\overline{L_2} - L_2| = |\delta| \implies$ погрешность мало влияет на полином (система устойчива).

1.3 Метод аппроксимации.

1.3.1 Облако экспериментальных данных.



Дано множество (облако) точек:

$$M_k(x_k; y_k),\ \ k = \overline{1\dots m}$$

$$m \gg 1$$

Вопрос: какая представлена зависимость на графике?

Уравнение аппроксимации, завиящей от параметров $A, B, C, \dots$:

$$y = f(x, A, B, C, \dots)$$

Для нахождения хорошей функции аппроксимации $y = c_0 + c_1\cdot x + c_2\cdot x^2 + \dots$ необходимо, чтобы разница, между данной функцией аппроксимации и эксперементальным значением функции в точке x_k была наименьшей.

Метод наименьших квадратов:

$$S(c_1; c_2; \dots; c_m) = \sum_{k=1}^{m}(f(x_k; c_1; c_2; \dots; c_m) - y_k)^2 \to \underset{(c_1;c_2;\dots;c_m)}{min}$$

1.3.2 Линейная регрессия:

$$y = c_0 + c_1\cdot x$$

$$S(C_1, C_2) = \sum_{k=1}^{m}(C_1 + C_2\cdot x_k - y_k)^2 \to \underset{(C_1;C_2)}{min}$$

Необходимое и достаточное условие экстремума:

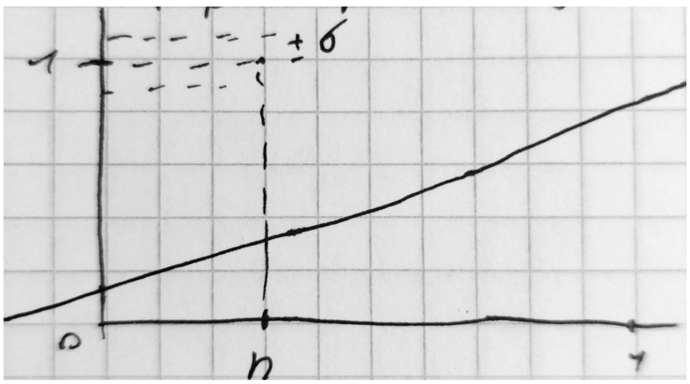
$$\begin{cases} \frac{dS}{dC_1} = 0 \\ \frac{dS}{dC_2} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{dS}{dC_1} = \sum_{k=1}^{m} 2\cdot(C_1 + C_2\cdot x_k - y_k) = 0 \\ \frac{dS}{dC_2} = \sum_{k=1}^{m} 2\cdot(C_1 + C_2\cdot x_k - y_k)\cdot x_k = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 \sum_{k=1}^m 1 + C_2 \sum_{k=1}^m x_k = \sum_{k=1}^m y_k \\ C_1 \sum_{k=1}^m x_k + C_2 \sum_{k=1}^m x_k^2 = \sum_{k=1}^m x_k \cdot y_k \end{cases}$$

$$a_{11} = m; \quad a_{12} = a_{21} = \sum_{k=1}^{m} x_k; \quad a_{22} = \sum_{k=1}^{m} x_k^2; \quad b_1 = \sum_{k=1}^{m} y_k; \quad b_2 = \sum_{k=1}^{m} x_k \cdot y_k$$

$$\begin{cases} a_{11}C_1 + a_{12}C_2 = b_1 \\ a_{21}C_1 + a_{22}C_2 = b_2 \end{cases}$$

Пример $m = 3$:



Даны точки: $(0,0); (h,1); (1,0)$

По формулам:
$a_{11} = 3$
$a_{12} = a_{21} = 1 + h$
$a_{22} = 1 + h^2$
$b_1 = 1$
$b_2 = h$

$$\begin{cases} 3C_1 + (1+h)C_2 = 1 \\ (1+h)C_1 + (1+h^2)C_2 = h \end{cases}$$

Найдём решение данной системы матричным методом:

$$det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1+h \\ 1+h & 1+h^2 \end{vmatrix} = 3 + 3h^2 - (1+h^2) = 2(1 - h + h^2) \neq 0$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1+h \\ h & 1+h^2 \end{vmatrix} = 1 + h^2 - h - h^2 = 1 - h$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1+h & h \end{vmatrix} = 3h - 1 - h = 2h - 1$$

$$C_1 = \frac{\Delta_1}{det(A)} = \frac{1-h}{2(1-h+h^2)}$$

$$C_2 = \frac{\Delta_2}{det(A)} = \frac{2h-1}{2(1-h+h^2)}$$

При погрешности измерени функции в точке h, метод наименьших квадратов обеспечивает устойчивость системы.

2 Лекция 2

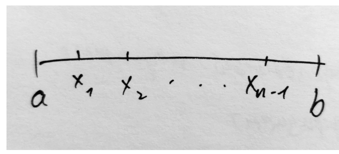
2.1 Численное интегрирование

2.1.1 Постановка задачи

Задача: найти значение определённого интеграла с любой определённой точностью

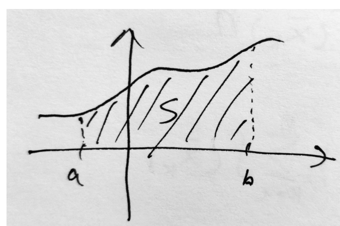
$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Первое: дискретизировать задачу

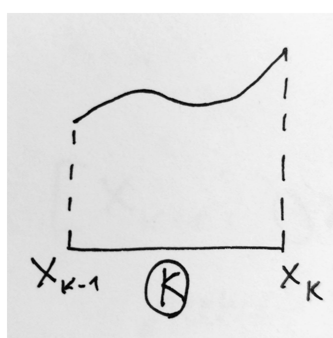


$$x_0 = a, x_n = b$$

$$h = \frac{b-a}{n}; n \gg 1$$



Интеграл - площадь криволинейной трапеции. Нужно найти площадь.
Разбили, разрезали на полоски через x_i
Как решать: метод аппроксимации.
Рассмотрим элементарный отрезочек



$k = \overline{1, \ldots, n}$

$$S = \int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx$$

Теперь нужно научиться приближённо считать элементарные интегралы
Формулы механических квадратур:

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{m} A_i f(x_i)$$

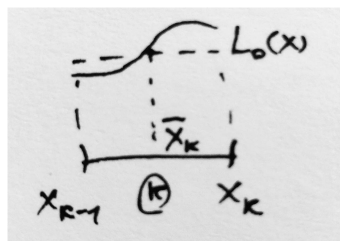
где m - определённый параметр, A - коэффициент

2.1.2 Методы решения

- Методы Ньютона-Котеса:
  - Берём $m = 1$:
    Заменяем нашу функцию интерполяционным полиномом 0 степени

    $$f(x) \approx L_0(x)$$

    Берём середину отрезка $\overline{x_k}$

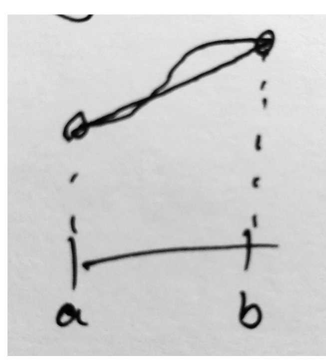
    Т.е. мы заменяем функцию кусочно-постоянной функцией (прямоугольники).
    В этом случае элементарная площадь равняется:

    $$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx \approx f(\overline{x}_k) \cdot h$$

    $$S = \int_a^b f(x)dx \approx h \cdot \sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k)$$

    Этот метод называется методом прямоугольников с выбором средней точки.
    Если выбрать левый x_{k-1} за точку, то это метод левых прямоугольников и т.д.
    Кусочно-линейная постоянная аппроксимация
  - Берём $m = 2$:

    $$f(x) = L_1(x)$$

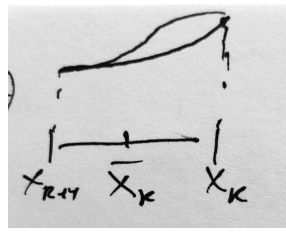
Заменяем полиномом 1 степени (прямой)

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx \approx \int_{x_{k-1}}^{x_k} L_1(x)dx = h \cdot \left(\frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}\right)$$

Это метод трапеции

Кусочно-линейная непрерывная аппроксимация

- Берём $m = 3$ (Первый сделал Симпсон):



$$f(x) \approx L_2(x)$$

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx \approx \int_{x_{k-1}}^{x_k} L_2(x)dx = \frac{h}{6} \cdot (f(x-1) + 4 \cdot f(\overline{x_k}) + f(x_k))$$

Формула Симпсона (среднее взвешенное значение)

Как добиться, используя любую из этих формул, любой точности?

>Чем меньше интервальчик, тем лучше аппроксимация.<

$$S_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} S$$

$$|S_{2n} - S_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Этот принцип положен в основу оценки точности приближения

Берём $n = 2$; S_2

Потом $n = 2 \cdot n$; S_4

Если разность меньше заданной точности, т.е.

$$|S_{2n} - S_n| < \epsilon$$

то ещё удваиваем n.

ϵ - заданная точность

>Карл Фридрих Гаусс хорошенько поёрзал<

- Методы Гаусса

Идея: так же разбили на элементарные промежутки

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx$$

где $\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx = S_k$ - элементарная площадь.

$$S_k \approx \sum_{i=1}^{m} A_i \cdot f(x_i)$$

В формулах Ньютона-Котеса узлы фиксированны. Гаусс задумался, можно ли пошевелить узлами, чтобы добиться наибольшей точности?

Для этого он перевёл интегрирование в другую форму:

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx = C \cdot \int_{-1}^{1} \phi(t)dt$$

Чтобы привести интеграл в данную форму, нужно преобразовать x в t линейной заменой, т.е.:

$$[x_{k-1}; x_k] \longrightarrow [-1; 1]$$

$$x = C_1 \cdot t + C_2 \quad \begin{aligned} x_{k-1} &= -C_1 + C_2 \\ x_k &= C_1 + C_2 \end{aligned}$$

$$C_2 = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}$$
$$C_1 = x_k - C_2 = \frac{x_k - x_{k-1}}{2}$$

$$x = \left(\frac{x_k - x_{k-1}}{2}\right) \cdot t + \frac{x_{k-1} + x_k}{2}$$
$$dx = \frac{x_k - x_{k-1}}{2} dt$$
$$C = \frac{x_k - x_{k-1}}{2}$$

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx = \left(\frac{x_k - x_{k-1}}{2}\right) \cdot \int_{-1}^{1} f(\frac{h}{2}t + \overline{x}_k)dt$$

В выражении выше:

$$\left(\frac{x_k - x_{k-1}}{2}\right) = \frac{h}{2}$$
$$f(\frac{h}{2}t + \overline{x}_k)dt = \phi(t)$$

До этого не было никаких аппроксимаций. Да начнутся аппроксимации.

$$\int_{-1}^{1} \phi(t)dt \approx \sum_{i=1}^{m} A_i \cdot \phi(t_i)$$

Нужно подобрать m так, чтобы сумма в точности равнялась полиному степени 2m-1

$$\int_{-1}^{1} P_{2m-1}(t)dt = \sum_{i=1}^{m} A_i P_{2m-1}(t_i)$$

– $m = 1$

$$P_{2m-1} = P_1(t) = C_1 t + C_2$$

$$\int_{-1}^{1} (C_1 t + C_2) dt = A_1(C_1 t_1 + C_2)$$

$$(C_1 \frac{t^2}{2} + C_2 t)\Big|_{-1}^{1} = A_1(C_1 t_1 + C_2)$$

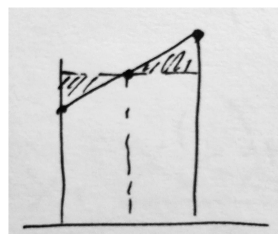
$$0 \cdot C_1 + 2C_2 = C_1 A_1 t_1 + C_2 A_1$$

$$\text{при } C_1 : A_1 t = 0 \implies t_1 = 0$$

$$\text{при } C_2 : A_1 = 2 \implies A_1 = 2$$

Это метод прямоугольников. Бат вай? Ничего не помню, ничего не понимаю. Чекните сериал Волшебники/The magicians (2015 года). Вообще пушка.

Это доказывает, что метод с выбором средней точки абсолютно точен для любой линейной функции.



– $m = 2$:

$$P_{2m-1} = P_3(t) = C_1 t^3 + C_2 t^2 + C_3 t + C_4$$

$$\int_{-1}^{1} (C_1 t^3 + C_2 t^2 + C_3 t + C_4) dt =$$
$$A_1(C_1 t_1^3 + C_2 t_1^2 + C_3 t_1 + C_4) + A_2(C_1 t_2^3 + C_2 t_2^2 + C_3 t_2 + C_4)$$

$$\begin{cases} \text{при } C_1: \ A_1 t_1^3 + A_2 t_2^3 = 0 \\ \text{при } C_2: \ A_1 t_1^2 + A_2 t_2^2 = \frac{2}{3} \\ \text{при } C_3: \ A_1 t_1 + A_2 t_2 = 0 \\ \text{при } C_4: \ A_1 + A_2 = 2 \end{cases}$$

$$A_1 = A_2 = 1$$

$$t_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Эта фигня абсолютно точна для любой функции полинома 3-й степени. До сих пор ничего не понятно. Пересматриваю ”ДО ТОГО КАК СТАЛО СТРАШНО”. Прикольные видосы.

Эти точки - корни полиномов Лежандра. (Ортогональные корни на [-1; 1])

Пример:

Задача: Найти значение интеграла, используя предыдущие фигни.

$$\int_{-1}^{1}(3x^2+2x+1)dx$$

$$x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \;\; A_1 = 1$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \;\; A_2 = 1$$

$$\int_{-1}^{1}(3x^2+2x+1)dx =$$

$$= 1\left(3\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 + 2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 1\right) + 1\left(3\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 + 2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 1\right) = -2$$

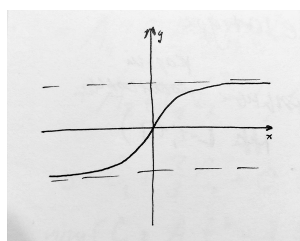
Ответ: **-2**

2.2 Интегрирование несобственных интегралов

Чтобы аппроксимировать несобственный интеграл вида

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

необходимо пребразовать интеграл, чтобы границы интегрирования были определёнными. Для этого хорошо подходит арктангенс.



$$y = \arctan(x)$$

Данная функция преобразует всю вещественную ось в интервал $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

$$\mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$$

Применим замену переменных

$$x = tg(y)$$
$$dx = \frac{dy}{\cos^2(y)}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(tg(y))}{\cos^2(y)} dy$$

А потом используем методы аппроксимации. (Тип, предыдущую фигню)

Заметим, что у нас $\cos^2(y)$ в знаменателе. Нужно, чтобы $\cos^2(y) \neq 0$. Из-за этого нельзя использовать крайние узлы. Поэтому методы Гаусса

>считают вот так ”палец вверх”<