

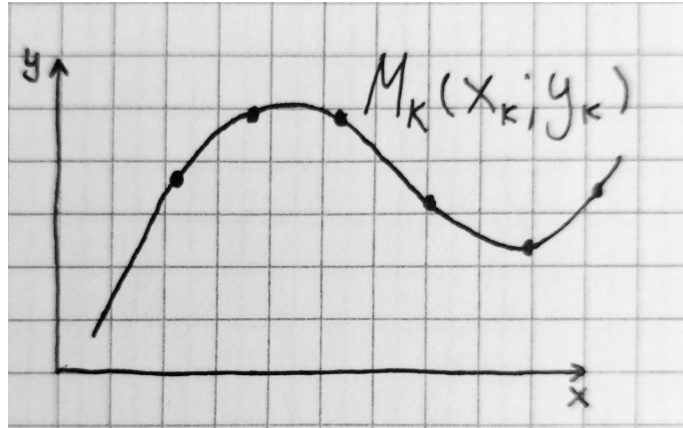
# Информационные технологии

Бахирев С.Н.

5 сентября 2024 г.

# 1 Лекция 1

## 1.1 Интерполяция



На графике даны точки:

$$\begin{cases} M_k(x_k, y_k), \\ k = \overline{1 \dots m} \end{cases}$$

Задача: соединить узлы (точки), что решает интерполирование. Необходимо подобрать простейшую функцию, которая соединяет все точки.

Полином степени  $n$ :

$$P_n = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n$$

Количество коэффициентов:  $n + 1$  ( $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ )

Нужно найти полином, который проходит через все узлы, с наименьшим количеством коэффициентов.

$$\begin{cases} P_n(x_k) = y_k, \\ k = \overline{1 \dots m} \end{cases}$$

Для каждой точки на графике получится уравнение:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_1^2 + \dots + a_n \cdot x_1^n = y_1 \\ a_0 + a_1 \cdot x_2 + a_2 \cdot x_2^2 + \dots + a_n \cdot x_2^n = y_2 \\ \dots \dots \dots \\ a_0 + a_1 \cdot x_m + a_2 \cdot x_m^2 + \dots + a_n \cdot x_m^n = y_m \end{cases}$$

$(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$  - неизвестные.

$((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_m, y_m))$  - заданные точки.

Это **система линейных алгебраических уравнений**.

Вектор неизвестных:

$$\begin{cases} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{cases}$$

Вектор числовых значений:

$$\begin{cases} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{cases}$$

Матрица коэффициентов:

$$\begin{cases} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \dots & & & & \\ 1 & x_m & x_m^2 & \dots & x_m^n \end{cases}$$

Матрица должна быть квадратной ( $n + 1$  - столбцов,  $m$  - строк,  $n + 1 = m$ )

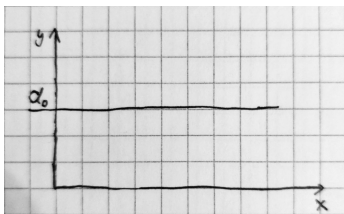
Степень полинома должна быть равна  $n = m - 1$

$x_i \neq x_j$  (все узлы различны)  $\Rightarrow \det(A) \neq 0$  (матрица невырождена)  $\Rightarrow$  имеется единственное решение при  $n = m - 1 \Rightarrow$  полином, проходящий через эти точки, лишь один.

В итоге, мы получили:

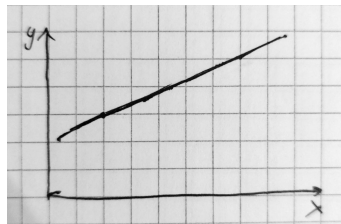
$m = 1$  (Если 1 экспериментальная точка то это полином 0 степени):

$$P_0(x) = a_0$$



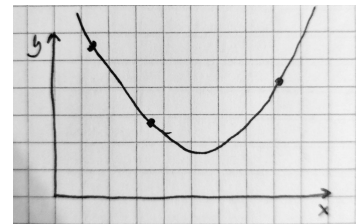
$m = 2$ :

$$P_1(x) = a_0 + a_1 \cdot x$$



$m = 3$ :

$$P_2(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2$$



(Решение этой задачи в матлабе:  $a = A \setminus B$ )

## 1.2 Интерполиционный полином в форме Лагранжа

**Задача та же**

Обозначение формулы Лагранжа:

$$L_n(x) = \sum_{k=1}^m y_k \cdot \omega_k(x)$$

$$L_{m-1}(x) = \sum_{k=1}^m y_k \cdot \omega_k(x) \quad (n = m - 1)$$

Условия, которым должна соответствовать функция  $\omega_k(x)$ :

- $\begin{cases} \omega_k(x_i) = 0 \text{ где } i \neq k \\ \omega_k(x_k) = 1 \end{cases}$
- $\omega_k(x) = P_{m-1}(x)$

Функция, удовлетворяющая этим условиям:

$$\omega_k(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_m)}{(x_k-x_1)(x_k-x_2)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_m)}$$

Получаем:

$$L_{m-1}(x) = \sum_{k=1}^m \left( y_k \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)} \right)$$

Найдём вид формулы Лагранжа для определённых  $m$ :

•  $m = 2$ :  $P_1(x) = a_0 + a_1 \cdot x$

$$L_1(x) = y_1 \cdot \left( \frac{x-x_2}{x_1-x_2} \right) + y_2 \cdot \left( \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \right) = \left( \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \right) x + \left( \frac{y_1 \cdot x_2 - y_2 \cdot x_1}{x_2-x_1} \right)$$

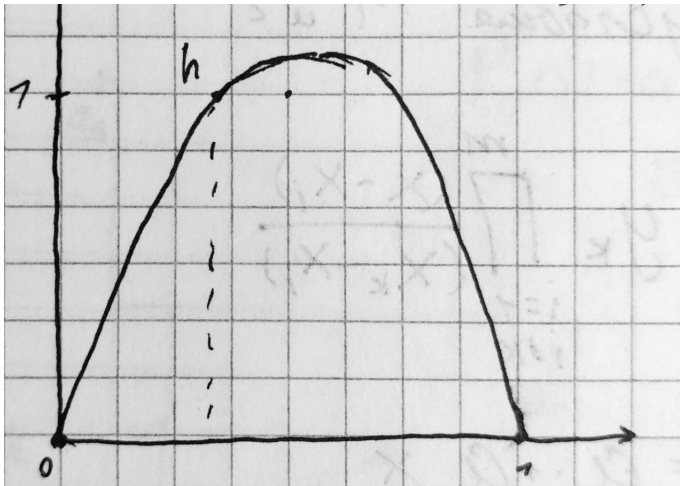
$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$a_0 = \frac{y_1 \cdot x_2 - y_2 \cdot x_1}{x_2 - x_1}$$

•  $m = 3$ :  $P_2(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2$

$$L_2(x) = y_1 \cdot \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + y_2 \cdot \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3 \cdot \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

Пример ( $m = 3$ ):



Даны 3 точки.  $(0, 0)$ ,  $(h, 1)$ ,  $(1, 0)$ . Значение функции в точке  $h$  было измерено с погрешностью  $\delta$  ( $|\delta| \ll 1$ ).

Нужно найти, при каком значении  $h$ , данная погрешность имеет минимальное влияние на конечный полином.

- Сначала не берём во внимание погрешность.

$$L_2(x) = 1 \cdot \frac{(x-0)(x-1)}{(h-0)(h-1)} = \frac{x(1-x)}{h(1-h)}$$

$$L_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4h(1-h)}$$

- Тепер, учитывая погрешность.

$$\overline{L}_2(x) = (1 + \delta) \cdot \frac{x(1-x)}{h(1-h)}$$

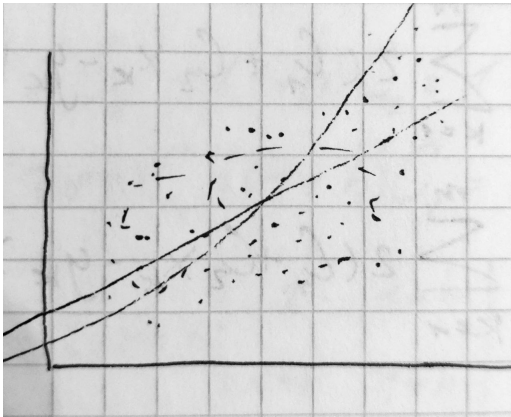
$$\overline{L}_2 - L_2 = \delta \frac{x(1-x)}{h(1-h)}$$

При  $x = \frac{1}{2}$ , если  $h \sim 0$  или  $h \sim 1 \Rightarrow |\overline{L}_2 - L_2| \gg |\delta| \Rightarrow$  погрешность сильно влияет на конечный полином.

При  $h = \frac{1}{2} \Rightarrow |\overline{L}_2 - L_2| = |\delta| \Rightarrow$  погрешность мало влияет на полином (система устойчива).

## 1.3 Метод аппроксимации.

### 1.3.1 Облако экспериментальных данных.



Дано множество (облако) точек:

$$M_k(x_k; y_k), \quad k = \overline{1 \dots m}$$

$$m \gg 1$$

Вопрос: какая представлена зависимость на графике?

Уравнение аппроксимации, зависящей от параметров  $A, B, C, \dots$ :

$$y = f(x, A, B, C, \dots)$$

Для нахождения хорошей функции аппроксимации  $y = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2 + \dots$  необходимо, чтобы разность между данной функцией аппроксимации и экспериментальным значением функции в точке  $x_k$  была наименьшей.

**Метод наименьших квадратов:**

$$S(c_1; c_2; \dots; c_m) = \sum_{k=1}^m (f(x_k; c_1; c_2; \dots; c_m) - y_k)^2 \rightarrow \min_{(c_1; c_2; \dots; c_m)}$$

### 1.3.2 Линейная регрессия:

$$y = c_0 + c_1 \cdot x$$

$$S(C_1, C_2) = \sum_{k=1}^m (C_1 + C_2 \cdot x_k - y_k)^2 \rightarrow \min_{(C_1; C_2)}$$

Необходимое и достаточное условие экстремума:

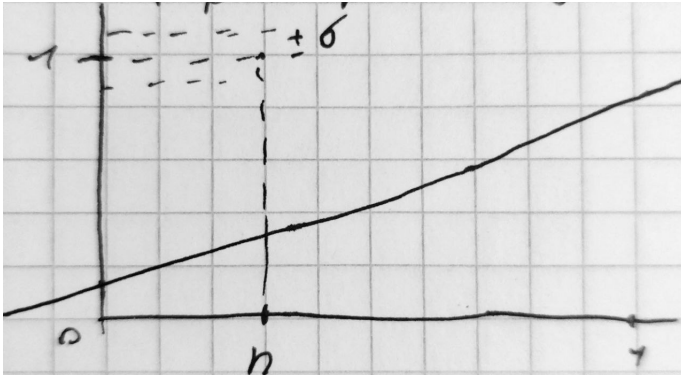
$$\begin{cases} \frac{dS}{dC_1} = 0 \\ \frac{dS}{dC_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dS}{dC_1} = \sum_{k=1}^m 2 \cdot (C_1 + C_2 \cdot x_k - y_k) = 0 \\ \frac{dS}{dC_2} = \sum_{k=1}^m 2 \cdot (C_1 + C_2 \cdot x_k - y_k) \cdot x_k = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 \sum_{k=1}^m 1 + C_2 \sum_{k=1}^m x_k = \sum_{k=1}^m y_k \\ C_1 \sum_{k=1}^m x_k + C_2 \sum_{k=1}^m x_k^2 = \sum_{k=1}^m x_k \cdot y_k \end{cases}$$

$$a_{11} = m; \quad a_{12} = a_{21} = \sum_{k=1}^m x_k; \quad a_{22} = \sum_{k=1}^m x_k^2; \quad b_1 = \sum_{k=1}^m y_k; \quad b_2 = \sum_{k=1}^m x_k \cdot y_k$$

$$\begin{cases} a_{11}C_1 + a_{12}C_2 = b_1 \\ a_{21}C_1 + a_{22}C_2 = b_2 \end{cases}$$

Пример  $m = 3$ :



Даны точки:  $(0,0); (h,1); (1,0)$

По формулам:

$$a_{11} = 3$$

$$a_{12} = a_{21} = 1 + h$$

$$a_{22} = 1 + h^2$$

$$b_1 = 1$$

$$b_2 = h$$

$$\begin{cases} 3C_1 + (1+h)C_2 = 1 \\ (1+h)C_1 + (1+h^2)C_2 = h \end{cases}$$

Найдём решение данной системы матричным методом:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1+h \\ 1+h & 1+h^2 \end{vmatrix} = 3 + 3h^2 - (1+h^2) = 2(1-h+h^2) \neq 0$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1+h \\ h & 1+h^2 \end{vmatrix} = 1 + h^2 - h - h^2 = 1 - h$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1+h & h \end{vmatrix} = 3h - 1 - h = 2h - 1$$

$$C_1 = \frac{\Delta_1}{\det(A)} = \frac{1-h}{2(1-h+h^2)}$$

$$C_2 = \frac{\Delta_2}{\det(A)} = \frac{2h-1}{2(1-h+h^2)}$$

При погрешности измерении функции в точке  $h$ , метод наименьших квадратов обеспечивает устойчивость системы.

## 2 Лекция 2