Licences Info-Maths-Physique S1 — Analyse 1
Avignon Université — Année 2025–2026

Feuille d'exercices n°2 - Fonctions numériques

Exercice 1. Soit $f : x \mapsto ax + b$ une fonction affine. On suppose que $|f(-1)| = 3$ et $|f(2)| = 2$. Déterminer toutes les valeurs possibles du couple (a, b) et tracer les courbes représentatives correspondantes de f.

Exercice 2.

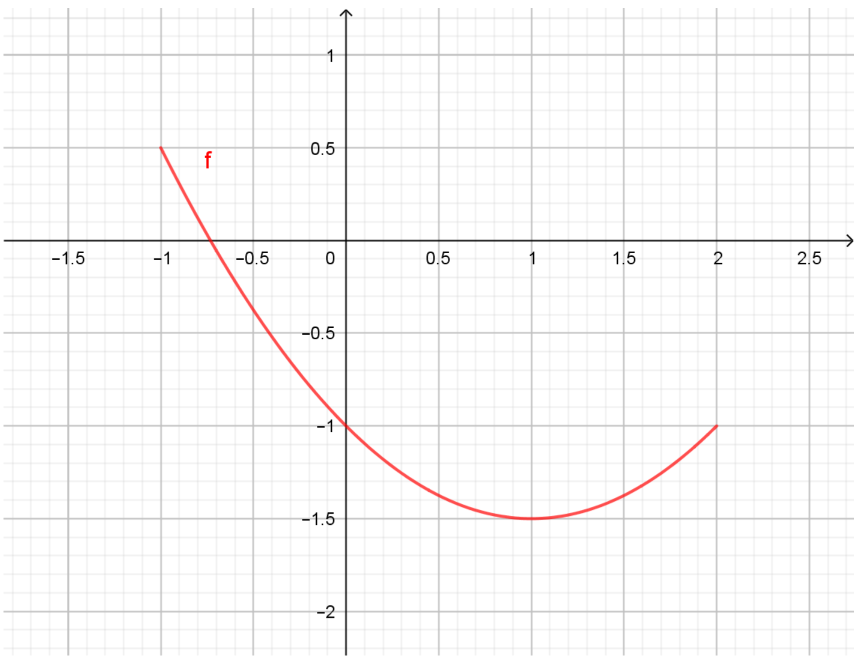
(1) Tracer la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto |x| + |2x - 4|$.

(2) A quoi est égal l'ensemble $f(\mathbb{R})$? La fonction f est-elle minorée ? Est-elle majorée ?

(3) Déterminer l'ensemble $f([-2, 3[)$.

(4) Déterminer tous les antécédents par f de 1 ; de 2 ; de 3.

Exercice 3. On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f d'ensemble de définition $[-1, 2]$.



(1) Donner l'ensemble de définition et tracer la courbe représentative de chacune des fonctions suivantes :

a) $x \mapsto -f(x)$ **b)** $x \mapsto f(-x)$ **c)** $x \mapsto f(x) + 2$ **d)** $x \mapsto f(x + 2)$

(2) Sachant que f est la restriction à $[-1, 2]$ d'une fonction polynomiale de degré 2, expliciter $f(x)$.

Exercice 4.

(1) Déterminer les ensembles de définition de f, g, $g \circ f$, $f \circ g$ et calculer $g \circ f(x)$ et $f \circ g(x)$ dans chacun des exemples suivants :

(a) $f : x \mapsto x^2 + 2$, $g : x \mapsto \dfrac{1}{x}$

(b) $f : x \mapsto \sqrt{x+1}$, $g : x \mapsto x^2 - 1$.

(2) On considère la fonction $h : x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$.

(a) Déterminer l'ensemble de définition de $h \circ h$ et calculer $(h \circ h)(x)$.

(b) Déterminer l'ensemble de définition de $h \circ h \circ h$ et calculer $(h \circ h \circ h)(x)$.

Exercice 5. On considère deux applications $f : D \to \mathbb{R}$, $g : D' \to \mathbb{R}$ et on suppose que f est à valeurs dans D'. On peut ainsi définir l'application $g \circ f : D \to \mathbb{R}$. Justifier que :

(1) Si f et g sont croissantes, alors $g \circ f$ est croissante.

(2) Si f et g sont décroissantes, alors $g \circ f$ est croissante.

(3) Si f est croissante et g est décroissante (ou inversement), alors $g \circ f$ est décroissante.

Exercice 6. Donner l'ensemble de définition de la fonction $u : x \mapsto \sqrt{1 - x^3}$ et déterminer (sans calculer de dérivée !) son sens de variation.

Exercice 7. (a) Pour $a \in [2, 4]$, trouver un encadrement de a^2 ; de a^3 ; de $\frac{1}{a}$.

(b) Pour $a \in [-3, 2]$, que peut-on dire de a^2 ; de a^3 ; de $\frac{1}{a}$?

On pourra utiliser les tableaux de variations des fonctions carré, cube et inverse pour justifier les réponses.

Exercice 8. Donner l'ensemble de définition de chacune des fonctions rationnelles suivantes, puis simplifier son expression.

(a) $x \mapsto \dfrac{x + x^7}{x^4 - 2x^5 + 3x^6}$ **(b)** $x \mapsto \dfrac{x^3 - 2x + 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$ **(c)** $x \mapsto \dfrac{x^3 + 2x}{x^4 + 4x^2 + 4}$

Exercice 9.

(1) On considère une fonction paire $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction impaire $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et on pose $f = u + v$. Déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, une expression de $u(x)$ et $v(x)$ en fonction de $f(x)$ et $f(-x)$.

(2) Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ peut s'écrire comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire, et que cette décomposition est unique.

(3) Déterminer cette décomposition dans les cas suivants : $f(x) = 2x^5 - 3x^4 + x^2 - 2x + 4$, $f(x) = \dfrac{1}{2 + \sin x}$.

Exercice 10. Justifier que les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$ sont périodiques et en donner une période.

(a) $x \mapsto \sin(3x)$ **(b)** $x \mapsto \cos\left(\dfrac{3x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)$ **(c)** $x \mapsto \cos(\pi x)\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi x}{3}\right)$ **(d)** $x \mapsto \cos(x/2) + \cos(x/3)$

Exercice 11. (a) Déterminer tous les antécédents de $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ par la fonction cosinus.

(b) Déterminer tous les antécédents de $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ par la fonction sinus.

(c) Résoudre $\sin(x) = \cos(x)$.

Exercice 12. Soit $x \in \mathbb{R}$.

(a) Exprimer $\cos x$ en fonction de $\cos(x/2)$.

(b) Exprimer $\cos x$ et $\sin x$ en fonction de $\tan(x/2)$.

Exercice 13.

(1) En utilisant les formules qui expriment $\cos(a + b)$ et $\sin(a + b)$ en fonction de $\cos a$, $\sin a$, $\cos b$, $\sin b$, trouver une expression de $\cos(3a)$ et de $\sin(3a)$ en fonction de $\cos a$ et $\sin a$.

(2) En déduire que

$$\cos(3a) = 4(\cos a)^3 - 3\cos a \qquad \text{et} \qquad \sin(3a) = 3\sin a - 4(\sin a)^3 .$$

Exercices complémentaires

Exercice 14. Déterminer (sous la forme d'intervalles ou de réunions d'intervalles) les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ définis par les conditions suivantes sur x :

(a) $|x-2| \leqslant |x|$ **(b)** $|x-2|+|x+2| > 3$ **(c)** $x^2+1 \leqslant 3$

(d) $x^4+3x^2 < 4$ **(e)** $x^3-3x^2+2x \geqslant 0$ **(f)** $|x|+|x-1| \leqslant 2$

Exercice 15. On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$.

a) Quel est l'ensemble de définition de f ?

b) Quel est l'ensemble de définition de $f \circ f$? Calculer $f \circ f(x)$.

c) Quel est l'ensemble de définition de $f \circ f \circ f$? Calculer $f \circ f \circ f(x)$.

Exercice 16. a) Soit f, g, h, des fonctions d'ensemble de définition $\mathbb{R}$. Montrer l'égalité $(f+g) \circ h = f \circ h + g \circ h$.

b) Peut-on affirmer qu'on a aussi $h \circ (f+g) = h \circ f + h \circ g$? En cas de réponse négative, donner un contre-exemple.

Exercice 17. On considère les fonctions $f : x \mapsto x^2+1$, $g : x \mapsto x-1$ et $h : x \mapsto x^3$.

a) Calculer les fonctions $f \circ g$, $f \circ h$, $g+h$, $f \circ (g+h)$, $f \circ g + f \circ h$.

b) Calculer $g \circ f$, $h \circ f$, $(g+h) \circ f$, $g \circ f + h \circ f$.

c) Que remarque-t-on ?

Exercice 18. En considérant la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, répondre aux questions suivantes.

a) Pour quels réels x non nuls a-t-on $\dfrac{1}{x} < 1$?

b) Pour quels réels x non nuls a-t-on $\dfrac{1}{x} > 2$?

c) Pour quels réels x non nuls a-t-on $\dfrac{1}{x} \leqslant -1$?

d) Pour quels réels x non nuls a-t-on $\dfrac{1}{x} \in [-1, 2]$?

Exercice 19. Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^\star$. Comparer $\sqrt{a+b}$ et $\sqrt{a}+\sqrt{b}$. Dans quels cas a-t-on égalité ?

Exercice 20. a) Factoriser la fonction polynomiale $x \mapsto P(x) = x^3-3x^2+x$.

b) Factoriser la fonction polynomiale $x \mapsto Q(x) = 2x^3-x^2-2x+1$.

c) Quel est l'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto \sqrt{2x^3-x^2-2x+1}$?

Exercice 21. Soit $T > 0$ et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique. On suppose de plus f croissante. Montrer qu'alors f est constante.

Exercice 22. Que peut-on dire d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est à la fois 3-périodique et 5-périodique ?