Analyse 1
I. Les nombres réels

S. Guillaume

Licence 1ère année - semestre 1
Informatique - Mathématiques - Physique

Année 2025–2026

AVIGNON
UNIVERSITÉ

Sommaire

1 Introduction : ensembles de nombres

Les nombres ont d'abord servi à compter, dénombrer des objets, énumérer des collections, d'où l'apparition des entiers naturels $0, 1, 2, 3, \dots$ On désigne par **$\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels**

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

que l'on munit de deux lois : l'addition, notée $+$, et la multiplication, notée $\times$ (ou ., ou rien).

L'introduction des nombres négatifs est motivé par la résolution d'équations de la forme $a + x = b$ où x est l'inconnue, a et b sont les paramètres entiers, d'où **l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs** :

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Les nombres rationnels désignent le résultat de la division, du quotient de deux nombres entiers relatifs : on note **$\mathbb{Q}$ l'ensemble des rationnels**

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^\star \right\}$$

Les **nombres décimaux** fournissent un exemple de nombre rationnel : on note **$\mathbb{D}$ l'ensemble des décimaux**

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{a}{10^n} \mid a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{Q}$$

Les nombres décimaux s'écrivent avec un nombre fini de décimales.

Exemple de nombres décimaux. $2,697 = \dfrac{2697}{1000}$; $0,009 = \dfrac{9}{100}$; $-\dfrac{7}{10} = -0,7$; $6.10^{-5} = \dfrac{6}{10^5}$.

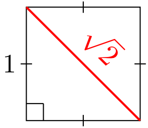
Exo7 *Visionner la vidéo "nombres rationnels".*

Proposition

Un nombre est rationnel si et seulement si il admet une écriture décimale périodique ou finie.

Par exemple : $\dfrac{3}{5} = 0,6$; $\dfrac{1}{3} = 0,33333\ldots$; $2,784\,\underbrace{352}\,\underbrace{352}\,\underbrace{352}\,\underbrace{352}\ldots$

Les nombres servent à mesurer, à représenter une longueur géométrique, une unité de longueur étant choisie. Dès l'époque de Pythagore (-560,-480), on se rend compte que les nombres rationnels ne suffisent pas : la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1 n'est pas un rationnel. La découverte du premier nombre non rationnel $\sqrt{2}$ date probablement de l'époque de Pythagore.



$\sqrt{2} \simeq 1,41421\ldots$

Consultez Annexe 1 page 31

$\sqrt{2}$ est un nombre dit réel (nombre qui modélise une longueur, une grandeur physique). On désigne par **$\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels**.

On admet l'existence de $\mathbb{R}$: la construction de $\mathbb{R}$ est délicate et consiste à “corriger les lacunes” de $\mathbb{Q}$. Elle ne sera faite qu'à la fin du 19ème siècle.

On a donc :

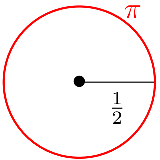
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Les nombres réels qui ne sont pas rationnels sont appelés les **nombres irrationnels**. Le développement décimal des irrationnels n'est pas périodique. Leur ensemble est noté **$\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$** :

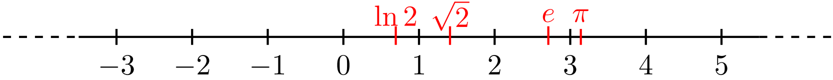
$$\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin \mathbb{Q}\}.$$

Exemples de nombres irrationnels.

$\sqrt{2}$, la *constante de Néper* e qui est le nombre défini par $\ln(e) = 1$ (voir chap. 5), $\ln 2$ (logarithme népérien de deux), le *nombre* π qui mesure le périmètre d'un cercle de diamètre 1.



On représente souvent les nombres réels sur une « droite numérique » :



Il est bon de connaître les premières décimales de certains réels :

$$\sqrt{2} \simeq 1,4142\ldots \qquad e \simeq 2,718\ldots \qquad \pi \simeq 3,14159265\ldots$$

Dans la suite on énonce les propriétés fondamentales de $\mathbb{R}$:

- les propriétés algébriques : les opérations d'addition et de multiplication sur $\mathbb{N}$ s'étendent à $\mathbb{Z}$, puis à $\mathbb{Q}$ et enfin à $\mathbb{R}$
- les propriétés de l'ordre : relation d'ordre total notée $\leqslant$
- les propriétés topologiques : densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, ce qui signifie que tout nombre réel peut être approché aussi près que l'on veut par des nombres rationnels

Visionner la vidéo "Propriétés des réels" : le contenu est repris dans les slides qui suivent.

2 Propriétés de $\mathbb{R}$ — 1. Propriétés algébriques

L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est muni des deux opérations usuelles : l'addition notée $+$ et la multiplication notée $.$ ou $\times$ ou rien

Propriétés addition

- $x + y = y + x$ — L'addition est commutative.
- $x + (y + z) = (x + y) + z$ — L'addition est associative.
- $x + 0 = 0 + x = x$ — 0 élément neutre de l'addition
- $x + y = 0 \iff y = -x$ — $-x$ opposé de x

Propriétés multiplication

- $xy = yx$ — La multiplication est commutative.
- $x(yz) = (xy)z$ — La multiplication est associative.
- $x \times 1 = 1 \times x = x$ — 1 élément neutre du produit
- $xy = 1 \iff y = \frac{1}{x}$ — $\frac{1}{x} = x^{-1}$ inverse de x

- $x(y + z) = xy + xz$ — La multiplication est **distributive** par rapport à l'addition.

Consultez Annexe 2 page 32 : rappel sur les symboles logiques $\iff$, $\Rightarrow$.

Les propriétés algébriques précédentes se résument en disant que :

Propriété ($\mathbb{R}$1)

$(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif.

Compléments.

1. $\boxed{x \times y = 0 \iff (x = 0 \text{ ou } y = 0)}$
2. La soustraction de x par y est définie par : $x - y = x + (-y)$.
3. La division x par y est définie si $y \neq 0$ par :
   $x \div y = x \times y^{-1} = x \times \dfrac{1}{y}$. On note $x \div y = x/y = \dfrac{x}{y}$.

Ces deux opérations ne vérifient pratiquement aucune des propriétés énoncées précédemment.

4 Si $n \in \mathbb{N}^\star$, on a :

- $nx = \underbrace{x + \cdots + x}_{n \text{ termes}}$
- $x^n = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ facteurs}}$
- si $x \neq 0$: $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n} = \underbrace{\dfrac{1}{x} \times \cdots \times \dfrac{1}{x}}_{n \text{ facteurs}}$.

L'annexe 3 page 34 rappelle la priorité des opérations, c.à.d. l'ordre dans lequel les calculs doivent être effectués dans une expression complexe.

Exemples. Calculer $2x^3 - 7\left(\dfrac{x+4}{3} - \sqrt{x^4+9}\right)$ et lorsque $x = 2$

2. Propriétés de l'ordre

L'ensemble des réels est muni des **relations de comparaison** $\leqslant$ et $<$.

- $\boldsymbol{x \leqslant y}$ se lit « x inférieur (ou égal) à y » ou « x plus petit que y ».
- $\boldsymbol{x \geqslant y}$ signifie que $\boldsymbol{y \leqslant x}$, et se lit « x supérieur (ou égal) à y » ou « x plus grand que y ».
- $\boldsymbol{x < y}$ se lit « x strictement inférieur à y » ou « x strictement plus petit que y ».
- $\boldsymbol{x > y}$ signifie que $\boldsymbol{y < x}$, et se lit « x strictement supérieur à y » ou « x strictement plus grand que y ».

Ajoutons :

$$x < y \iff \big[x \leqslant y \text{ et } x \neq y\big]$$

$$x \leqslant y \iff \big[x < y \text{ ou } x = y\big]$$

$$x \text{ positif} \iff x \geqslant 0 \iff x \in \mathbb{R}_+$$

$$x \text{ négatif} \iff x \leqslant 0 \iff x \in \mathbb{R}_-$$

$$x \text{ strictement positif} \iff x > 0 \iff x \in \mathbb{R}_+^\star$$

$$x \text{ strictement négatif} \iff x < 0 \iff x \in \mathbb{R}_-^\star$$

Propriété ($\mathbb{R}$2)

$(\mathbb{R}, +, \times, \leqslant)$ est un corps commutatif totalement ordonné

ce qui signifie que sur $\mathbb{R}$:

① la relation $\leqslant$ est une **relation d'ordre**, c'est-à-dire qu'elle est

1. réflexive : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x \leqslant x$
2. antisymétrique : pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a $\big(x \leqslant y \text{ et } y \leqslant x\big) \Rightarrow x = y$
3. transitive : pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$, on a $\big(x \leqslant y \text{ et } y \leqslant z\big) \Rightarrow x \leqslant z$

② la relation $\leqslant$ est **totale**, c.à.d. que deux réels sont toujours comparables : pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$;

③ la relation $\leqslant$ est **compatible** avec l'addition et la multiplication : pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{cases} x \leqslant y & \Longrightarrow \quad x + z \leqslant y + z \\ \big(x \leqslant y \text{ et } z \geqslant 0\big) & \Longrightarrow \quad xz \leqslant yz \end{cases}$$

Conséquences : $\big(x \leqslant y \text{ et } z \leqslant 0\big) \Longrightarrow xz \geqslant yz$,

$$x \leqslant y \iff -x \geqslant -y\,.$$

3. Propriété d'Archimède

Propriété ($\mathbb{R}$3) : propriété d'Archimède

$\mathbb{R}$ est **archimédien**, ce qui signifie que :

« pour tout réel x, il existe un entier naturel n tel que $n > x$ »,

autrement dit : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \ \exists n \in \mathbb{N}\ ,\ \ n > x}$

La signification des quantificateurs $\forall$ et $\exists$ est précisée Annexe 4 page 36

Exemples.

- Si $x = \dfrac{1}{3}$, l'entier $n = 1$ convient, $n = 12$ aussi.
- Si $x = \pi$, l'entier $n = 4$ convient, $n = 10$ aussi.
- Si $x = \dfrac{15783}{7}$, l'entier $n = 3000$ convient.

La propriété d'Archimède permet de définir :

Définition-Propriété

clip vidéo

On appelle **partie entière d'un réel x** l'unique entier relatif noté $E(x)$ tel que $E(x) \leqslant x < E(x) + 1$.

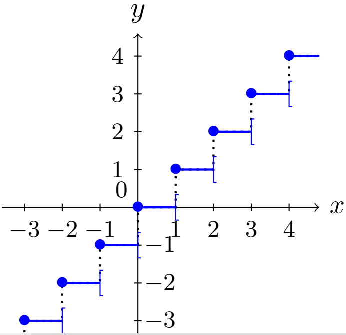
Preuve de l'existence de $E(x)$: *clip vidéo* et de l'unicité *clip vidéo*

Autre notation : $E(x) = \lfloor x \rfloor$

Exemples.

- $E(2,853) = 2$, $E(\pi) = 3$, $E(-3,5) = -4$
- $E(x) = 3 \iff 3 \leqslant x < 4$
- $E(\sqrt{17})$?

Ci-contre le graphe de la fonction partie entière, c.à.d. la représentation de l'ensemble des points de coordonnées (x, y) où $x \in \mathbb{R}$ et $y = E(x)$.



4. Valeur absolue d'un réel

Le maximum de deux réels a et b est le réel défini par

$$\max(a,b) = \begin{cases} a & \text{si } \ a \geqslant b \\ b & \text{si } \ b > a \end{cases}$$

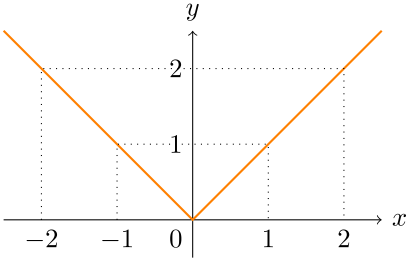
Savoir écrire de même $\min(a,b)$ le minimum de a et b.

Définition

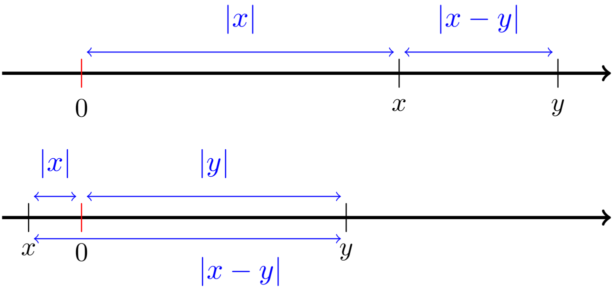
La **valeur absolue d'un réel x** est définie par $\boldsymbol{|x| = \max(x,-x)}$, autrement dit :

$$\boldsymbol{|x| = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x < 0 \\ x & \text{si} \quad x \geqslant 0. \end{cases}}$$

Le graphe de la fonction qui à x associe $|x|$, càd. l'ensemble des points du plan de coordonnées (x,y) où $x \in \mathbb{R}$ et $y = |x|$, est constitué de deux demi-droites :



Sur la droite numérique, $|x-y|$ représente la distance entre les réels x et y ; en particulier $|x|$ représente la distance entre les réels x et 0.



Propriétés

Soit x et y des réels.

❶ $|x| \geqslant 0$

❷ $|x| = 0 \iff x = 0$

❸ $|-x| = |x|$

❹ $|x-y| = |y-x|$

❺ $|x+y| \leqslant |x| + |y|$ (inégalité triangulaire)

❻ $\sqrt{x^2} = |x|$

❼ $|xy| = |x|\,|y|$

❽ si $y \neq 0$, $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$

Remarque utile. Si $r \geqslant 0$, on a :

$$\boldsymbol{|x| \leqslant r \iff -r \leqslant x \leqslant r}$$

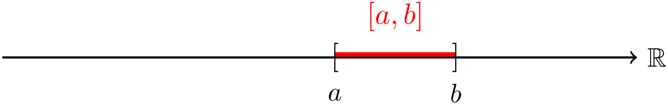
$$\boldsymbol{|x| < r \iff -r < x < r}$$

3 Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ — 1. Intervalles de $\mathbb{R}$

Définition

Pour tous réels a et b, on appelle **segment d'extrémités a et b** la partie de $\mathbb{R}$ formée des réels compris entre a et b.

Si $a \leqslant b$, on note $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ le segment d'extrémités a et b.



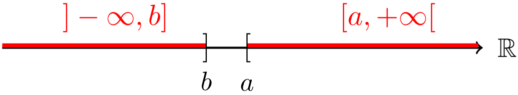
Définition

On appelle **intervalle** de $\mathbb{R}$ toute partie I de $\mathbb{R}$ telle que pour tout a, b dans I et tout x dans $\mathbb{R}$, on a : $a \leqslant x \leqslant b \Longrightarrow x \in I$.

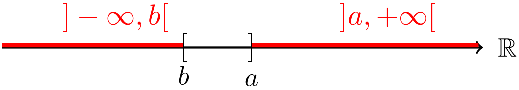
B Introduction à la notion d'intervalles : vidéo pour les novices

On peut lister tous les intervalles de $\mathbb{R}$ (a et b désignent des réels) :

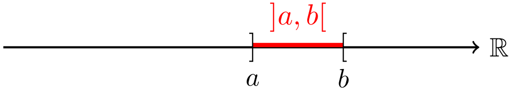
- $\emptyset$ (l'ensemble vide)
- $\mathbb{R}$
- les segments $[a, b]$
- les intervalles fermés non bornés : $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant a\}$ et $]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant b\}$



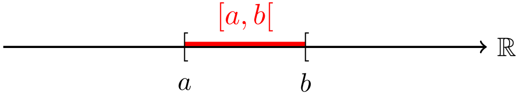
- les intervalles ouverts non bornés : $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ et $]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$



- les intervalles ouverts bornés : $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$



- les intervalles semi-ouverts (bornés) : $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$ et $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$



2. Densité

L'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ est strictement inclus dans $\mathbb{R}$. Par exemple, $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ mais $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Cependant, tout nombre réel peut être approché par des nombres rationnels : c'est la densité.

Exo7 *visionner la vidéo "densité"*

Théorème de densité

$\mathbb{Q}$ est **dense** dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire : tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contient au moins un rationnel.

De même, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire : tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contient au moins un irrationnel.

➥ B *Preuve en vidéo* : on montre qu'entre deux réels a et b, il existe toujours un nombre rationnel et un nombre irrationnel.

4 Propriété de la borne supérieure

1. Minorants, majorants, parties bornées

Dans la suite, A désigne une partie non vide de $\mathbb{R}$.

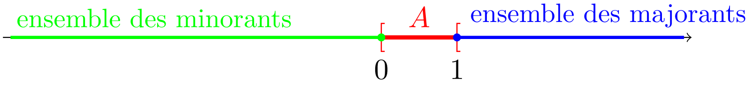
Définition

1. Le réel M est un **majorant** de A si : $\forall a \in A,\ a \leqslant M$.
   La partie A est **majorée** si elle admet au moins un majorant.

2. Le réel m est un **minorant** de A si : $\forall a \in A,\ a \geqslant m$.
   La partie A est **minorée** si elle admet au moins un minorant.

3. La partie A est **bornée** si elle est simultanément majorée et minorée.

Exemple. Soit $A = [0, 1[$. Alors, l'ensemble des minorants est $]-\infty, 0]$; l'ensemble des majorants est $[1, +\infty[$.



Remarques.

1. Une partie non vide de $\mathbb{R}$ peut ne pas avoir de majorant et/ou de minorant : par exemple $A = \mathbb{N}$ et $A = [0, +\infty[$ n'ont pas de majorants ; $A = \mathbb{Z}$ et $A =]-\infty, 0[$ n'ont pas de minorants.

2. Si A admet un majorant (resp. minorant), elle en admet une infinité.

2. Maximum, minimum

Définition

1. Le réel M est **le plus grand élément**, ou **le maximum** de A si M est un majorant de A et M appartient à A. Quand il existe on le note $\max A$ ou $\max\limits_{x \in A} x$:

$$\boldsymbol{M = \max A \iff \begin{cases} \forall a \in A,\ a \leqslant M \\ M \in A \end{cases}}$$

2. Le réel m est **le plus petit élément**, ou **le minimum** de A si m est un minorant de A et m appartient à A. Quand il existe on le note $\min A$ ou $\min\limits_{x \in A} x$:

$$\boldsymbol{m = \min A \iff \begin{cases} \forall a \in A,\ a \geqslant m \\ m \in A \end{cases}}$$

Remarque. Si A admet un maximum (resp. minimum) alors celui-ci est unique, d'où l'utilisation de l'article défini « le » dans la définition précédente.

Exemples. $A = \{1; 3/2; -6; 2; -3\}$ ensemble fini
$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\} =]0, 1[$ intervalle ouvert borné
$C =]0, 1] \cup \{3\}$
$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2\} = [2, +\infty[$ intervalle fermé non borné
$E = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble des entiers pairs.

	minoré	majoré	borné	ens. minorants	ens. majorants	min	max
A	oui	oui	oui	$]-\infty, -6]$	$[2, +\infty[$	-6	2
B	oui	oui	oui	$]-\infty, 0]$	$[1, +\infty[$	non	non
C	oui	oui	oui	$]-\infty, 0]$	$[3, +\infty[$	non	3

	minoré	majoré	borné	ens. minorants	ens. majorants	min	max
D	oui	non	non	$]-\infty, 2]$	$\emptyset$	2	non
E	oui	non	non	$]-\infty, 0]$	$\emptyset$	0	non

Exemple fondamental

Pour tout réel x, on a $E(x) = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leqslant x\}$, autrement dit, la partie entière de x est le plus grand entier inférieur ou égal à x.

3. Borne supérieure, borne inférieure

Visionner la vidéo "borne supérieure".

Définition

1. On suppose A majorée. Si l'ensemble des majorants admet un plus petit élément, cet élément est appelé **borne supérieure** de A, et on le note $\sup A$ ou $\sup\limits_{x\in A} x$.
2. On suppose A minorée. Si l'ensemble des minorants admet un plus grand élément, cet élément est appelé **borne inférieure** de A, et on le note $\inf A$ ou $\inf\limits_{x\in A} x$.

Donc, s'ils existent,

$\sup A$ est un majorant de A et c'est le plus petit des majorants
$\inf A$ est un minorant de A et c'est le plus grand des minorants

Remarques importantes.

- L'unicité du plus petit (resp. grand) élément donne l'unicité de la borne supérieure (resp. inférieure).
- Si A admet un plus grand élément, il admet une borne supérieure et $\max A = \sup A$. La réciproque est fausse : si A admet une borne supérieure, A n'a pas forcément de plus grand élément.
- Si A admet un plus petit élément, il admet une borne inférieure et $\min A = \inf A$. La réciproque est fausse : si A admet une borne inférieure, A n'a pas forcément de plus petit élément.
- Si elles existent, les bornes inférieure et supérieure de A n'appartiennent pas nécessairement à A et dans le cas où elles appartiennent à A :

$$\boxed{\begin{array}{c} \sup A \in A \iff \sup A = \max A \\ \inf A \in A \iff \inf A = \min A \end{array}}$$

Exemples.

1. Soit $A =]0,1]$. Alors, $\inf A = 0$ et $\sup A = 1$. En effet :
   - l'ensemble des minorants de A est $]-\infty, 0]$, donc le plus grand des minorants est 0 ;
   - l'ensemble des majorants de A est $[1, +\infty[$, donc le plus petit des majorants est 1.

2. $\inf]0, +\infty[= 0$ mais, $]0, +\infty[$ n'a pas de borne supérieure car cet intervalle n'est pas majoré.

A savoir.

- $\inf[a, b] = a$
- $\sup[a, b] = b$
- $\inf]a, b[= a$
- $\sup]a, b[= b$

Exemple-exercice.

- $A = \{1; 3/2; -6; 2; -3\}$
- $B =]0, 1[$
- $C =]0, 1] \cup \{3\}$
- $D = [2, +\infty[$
- $E = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$

	ens. minorants	ens. majorants	borne inf.	borne sup.	min	max
A	$]-\infty, -6]$	$[2, +\infty[$	-6	2	-6	2
B	$]-\infty, 0]$	$[1, +\infty[$	0	1	non	non
C	$]-\infty, 0]$	$[3, +\infty[$	0	3	non	3
D	$]-\infty, 2]$	$\emptyset$	2	non	2	non
E	$]-\infty, 0]$	$\emptyset$	0	non	0	non

"non" *signifie que l'élément n'existe pas.*

Nous allons énoncer la propriété de la borne supérieure, propriété remarquable et loin d'être évidente.

Théorème : Propriété de la borne supérieure ($\mathbb{R}4$)

- Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.
- Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

C'est tout l'intérêt de la borne supérieure par rapport à la notion de plus grand élément : dès qu'une partie est bornée et non vide, elle admet toujours une borne supérieure et une borne inférieure. Cela est faux pour le plus grand ou plus petit élément. Gardez à l'esprit l'exemple $B =]0, 1[$.

$\mathbb{Q}$ est un corps totalement ordonné et archimédien, comme $\mathbb{R}$, mais $\mathbb{Q}$ **ne** possède **pas** la propriété de la borne supérieure.

Contre-exemple. $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leqslant 2\}$ n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$ (faire un raisonnant par l'absurde).

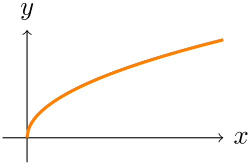
Annexe : ① Racine carrée d'un réel positif

➥ Retour au cours page 3

Si x est un nombre réel positif, il existe un unique réel positif y tel que $y^2 = x$. Ce réel y est alors appelé la **racine carrée de x** et est noté $\sqrt{x}$.

Exemples. $\sqrt{0} = 0$; $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$; $\sqrt{1} = 1$; $\sqrt{4} = 2$; $\sqrt{9} = 3 \ldots$

Ci-contre le graphe de la fonction qui à x associe $\sqrt{x}$, c.à.d. la représentation de l'ensemble des points de coordonnées (x, y) où $x \in \mathbb{R}_+$ et $y = \sqrt{x}$:



Propriétés

➥ B *Démonstration en vidéo*

Soit x et y des réels **positifs**.

❶ $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$

❷ si $y > 0$, $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$

❸ $\boxed{\text{si } x > 0 \text{ et } y > 0,\ \sqrt{x+y} < \sqrt{x} + \sqrt{y}}$

Annexe : ② Propositions mathématiques

➥ Retour au cours page 7

Une **proposition** (ou **assertion**) est un énoncé mathématique qui a une et une seule valeur : vrai ou faux. Soit P et Q deux propositions.

- La **négation** de la proposition P est la proposition qui est vraie si et seulement si P est fausse. Elle est notée non$P$.
- L'**implication** $\boldsymbol{P \Rightarrow Q}$ est la proposition "non$P$ ou Q". Pour démontrer $P \Rightarrow Q$, on suppose que P est vraie et on démontre que Q est vraie.
- L'**équivalence** $\boldsymbol{P \iff Q}$ signifie que "$P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$". Pour démontrer $P \iff Q$, on suppose que P est vraie et on démontre que Q est vraie, puis on suppose que Q est vraie et on démontre que P est vraie.
- La **contraposée** de $P \Rightarrow Q$ est "non$Q \Rightarrow$ non$P$". Les deux propositions $P \Rightarrow Q$ et sa contraposée sont équivalentes : si l'une est vraie, l'autre aussi. ➥ B vidéo : Raisonnement par contraposée
- La **réciproque** de $P \Rightarrow Q$ est $Q \Rightarrow P$.

T.S.V.P.

Quand on écrit une phrase formelle avec des symboles logiques ($\Rightarrow$, $\iff$ ...), on ne mélange pas des mots et des signes logiques :

- soit on écrit des phrases complètes en français
- soit on écrit des phrases formelles (symboles mathématiques).

➥ Retour au cours page 7

Annexe : ③ Règles d'usage

➥ Retour au cours page 9

Les premières écritures (il y a plus de 2000 ans) des formules mathématiques sont écrites sous forme rhétorique, c'est-à-dire dans la langue commune. Il n'y a alors pas d'ambiguïté, de confusion sur l'ordre des opérations.

Avec la mise en place de l'écriture symbolique mathématiques (fin du 16e siècle - début du 17e) apparaît des problèmes de l'écriture d'expressions mathématiques complexes. Il faut donc des **délimitants** :

- ordre prioritaire des opérations
  1. parenthèses/crochets/accolades (la barre de fraction et le symbole radical $\sqrt{}$ jouent le rôle de parenthèses)
  2. exponentiation (x^α)
  3. $\times$ et $\div$
  4. $+$ et $-$
- calculs effectués de gauche à droite

« PEMDAS est un moyen mnémotechnique qui permet de se souvenir facilement de ces règles de priorité. Il signifie Parenthèse, Exposant, Multiplication et Division, Addition et Soustraction ; multiplication et division étant sur un même niveau, tout comme addition et soustraction. »

➥ Retour au cours page 9

Annexe : ④ Quantificateurs $\forall$ et $\exists$

➥ Retour au cours page 12

$\forall$ est un A à l'envers (cela vient de "für alle" en allemand) qui signifie : *quelque soit ; pour tout ; pour chaque ; pour n'importe quel...*

$\exists$ est un E retourné qui signifie : *il Existe (au moins) un ...*

$\exists!$ signifie : *il existe un et un seul ... ; il existe un unique ...*

L'ordre d'écriture (de gauche à droite) de ces quantificateurs est fondamental pour le sens d'une phrase formelle. Quand on inverse l'ordre de deux quantificateurs différents, le sens change.

Le quantificateur s'écrit toujours <u>avant</u> la propriété qu'il qualifie. On peut permuter deux quantificateurs de même nature ; on **ne** peut **pas** permuter deux quantificateurs de nature différente (sinon on change le sens de l'assertion).
Il est incorrect d'utiliser ces signes comme des abréviations et cela conduit à des erreurs. Il est important d'avoir un langage rigoureux. La langue française peut être ambigüe ; le formalisme mathématiques ne doit pas l'être.