Analyse 1
II. Fonctions numériques

S. Guillaume

Licences 1ère année - semestre 1
Informatique - Mathématiques - Physique

Année 2025–2026

AVIGNON UNIVERSITÉ

Sommaire

1 Fonction d'une variable réelle

Les fonctions définissent des liens entre certaines grandeurs pouvant varier. Elles permettent de représenter des phénomènes continus : évolution de la température, de la charge d'un serveur, de la croissance d'un réseau.

Exemple : exprimer la variation de la pression avec l'altitude, ou l'évolution d'une température dans le temps à l'aide d'une fonction.

Comprendre de telles fonctions, c'est savoir analyser leur croissance, leurs variations, leur minima et leurs maxima.

Exemple : évaluer des performances, modéliser des phénomènes, optimiser des programmes

1. Fonction et courbe représentative

Définition

Une **fonction f d'une variable réelle** est la donnée de :

1. un ensemble D de variables réelles, appelé ensemble de définition de la fonction ;
2. un ensemble A qui contient l'ensemble des valeurs prises par la fonction, appelé ensemble d'arrivée de la fonction ;
3. une « règle » qui à chaque variable $x \in D$ associe une valeur $f(x) \in A$, et on écrit $\boldsymbol{x \mapsto f(x)}$.

On dit alors que f est une fonction définie sur D à valeurs dans A et on note $\boldsymbol{f : D \to A}$, ou encore :

Remarques.

- Lorsque l'ensemble de définition D n'est pas précisé, il est implicitement égal à l'ensemble de tous les réels x tels que $f(x)$ existe.
- Pour des fonctions à valeurs réelles (le cas de ce cours), A est une partie de $\mathbb{R}$.

$\boldsymbol{f}$ est une fonction, mais $\boldsymbol{f(x)}$ (qui se lit « f de x ») n'est pas une fonction : c'est la valeur de la fonction $\boldsymbol{f}$ en la variable particulière x.

Exemples.

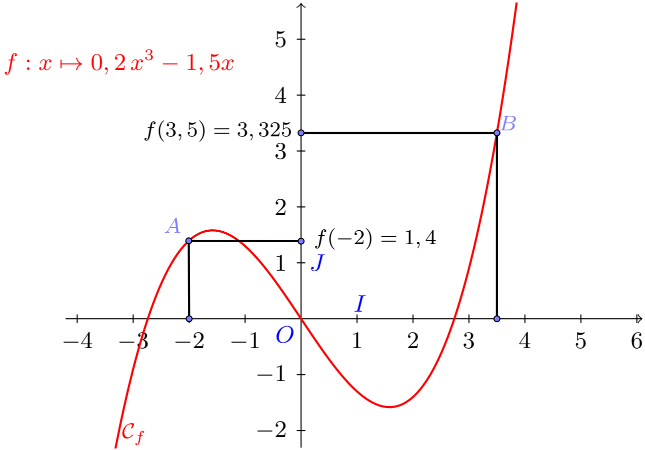
(i) La fonction carré est la fonction $x \mapsto x^2$ d'ensemble de définition $\mathbb{R}$.
La fonction cube est la fonction $x \mapsto x^3$ d'ensemble de définition $\mathbb{R}$.
La fonction racine carrée est la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ d'ensemble de définition $\mathbb{R}_+$.

(ii) La fonction $t \mapsto \dfrac{2t+1}{t-1}$ a implicitement pour ensemble de définition $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

Courbe représentative (ou graphe)

Le plan est muni d'un repère (en général orthonormé) $(O; I, J)$. La **courbe représentative** $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie sur D est l'ensemble des points de coordonnées (x, y), où x appartient à D et $y = f(x)$.

Exemple.



Définition

Si D' est une partie de D, on appelle image (directe) de D' par f, et on note $f(D')$, l'ensemble des valeurs prises par la fonction f sur D' :

$$f(D') \overset{\text{déf}}{=} \{f(x) \mid x \in D'\}.$$

$f(D')$ est l'ensemble de tous les réels ayant au moins un antécédent dans D' par f.

Voir annexe 1 page 54 pour un rappel sur les définitions d'image et antécédent.

Exemples.

1. L'image de $]-1,1[$ par la fonction valeur absolue est l'intervalle $[0,1[$.

2. L'image de $]-1,1[$ par la fonction partie entière est l'ensemble à deux éléments $\{-1,0\}$.

Définition

Etant données une fonction f d'ensemble de définition D et une partie D' de D, la restriction de f à D', notée $f|_{D'}$, est la fonction d'ensemble de définition D', qui à tout $x \in D'$ associie $f(x)$.

Exemples.

1. La restriction de la fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ à $]-\infty, 0[$ est la fonction $\begin{pmatrix}]-\infty,0[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -x \end{pmatrix}$.

2. La restriction de la fonction partie entière $x \mapsto E(x)$ à $\mathbb{Z}$ est la fonction $\begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{pmatrix}$.

2. Premiers exemples à connaître

a) Fonctions affines

Une fonction affine est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui à tout nombre réel x associe $ax + b$, où a et b sont deux nombres réels fixés.

Exemples. Les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1,5x + 4$ et $g(x) = -x + 1$ sont des fonctions affines.

Remarques.

① Lorsque $a = 0$, on a $f(x) = b$ pour tout nombre réel x : la fonction f est alors constante.

Elle est dite nulle si $a = 0$ et $b = 0$: on écrit alors $f = 0$.

② Lorsque $b = 0$, on a $f(x) = ax$ pour tout nombre réel x : on dit alors que la fonction f est linéaire ; elle vérifie $f(x + y) = f(x) + f(y)$ et $f(cx) = cf(x)$ pour tous réels x, y et c.

Propriété

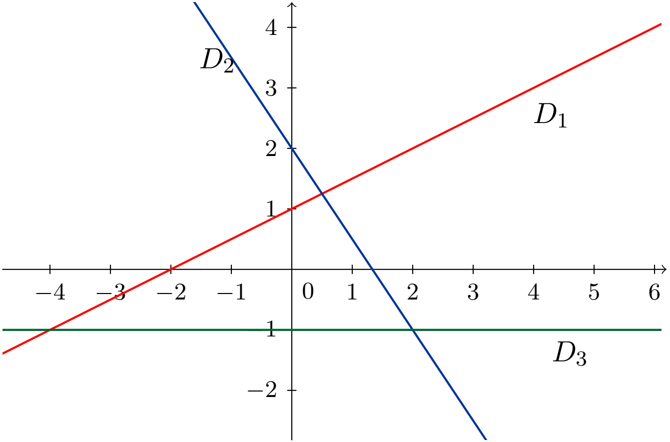
Soit la fonction **affine** $\boldsymbol{f : x \mapsto ax + b}$.

La courbe représentative de f dans un repère du plan est une **droite** D du plan : c'est la droite d'équation cartésienne $y = ax + b$.

Si Q et Q' sont deux points distincts de D de coordonnées respectives (x, y) et (x', y'), on a $(y' - y)/(x' - x) = a$. On dit que la droite D est de pente (ou coefficient directeur) a.

Le réel b s'appelle l'ordonnée à l'origine.

Toute droite non verticale du plan est la courbe représentative d'une fonction affine.



D_1, la droite d'équation $y = 0,5x + 1$, est de pente $0,5 = 1/2$. C'est la courbe représentative de la fonction affine $f : x \mapsto 0,5x + 1$.

D_2, la droite d'équation $y = -1,5x + 2$, est de pente $-1,5 = -3/2$.

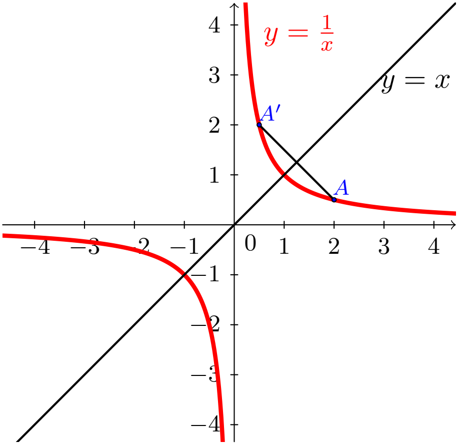
D_3, la droite d'équation $y = -1$, est de pente 0 (c'est une droite horizontale, c'est-à-dire parallèle à l'axe des abscisses).

b) La fonction inverse

La fonction inverse est la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, définie sur $\mathbb{R}^\star = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

On calcule $f(1) = 1$; $f(2) = 0,5$; $f(0,5) = 2$; $f(-1) = -1$; $f(-4) = -0,25$ ... On a aussi : $y = 1/x \iff x = 1/y$.

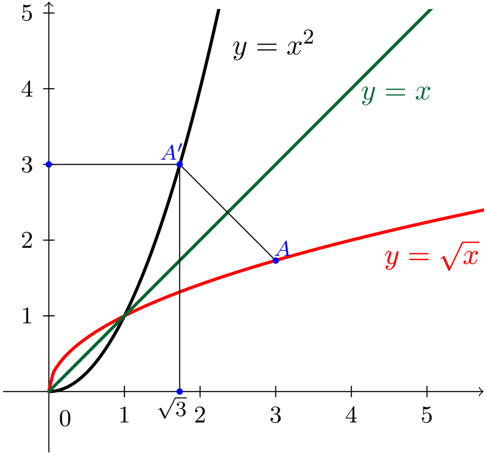
Courbe représentative.



c) La fonction racine carrée

La fonction racine carrée est la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$, définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ (et à valeurs dans $[0, +\infty[$).

Revoir le cours sur les nombres réels, annexe 1.

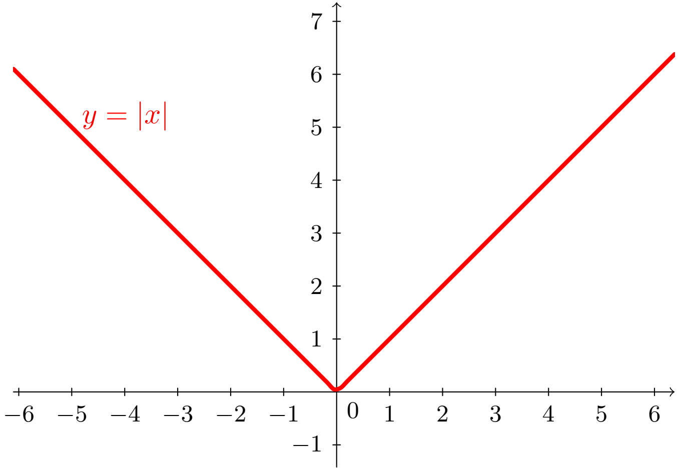


Courbe représentative. A' est le point de la courbe représentative de la fonction carré d'ordonnée 3. Son abscisse est $\sqrt{3}$. A est le symétrique de A' par rapport à la droite d'équation $y = x$; A est sur la courbe représentative de la fonction racine carrée.

d) La fonction valeur absolue

La **fonction valeur absolue** est la fonction $x \mapsto |x|$, définie sur $\mathbb{R}$.

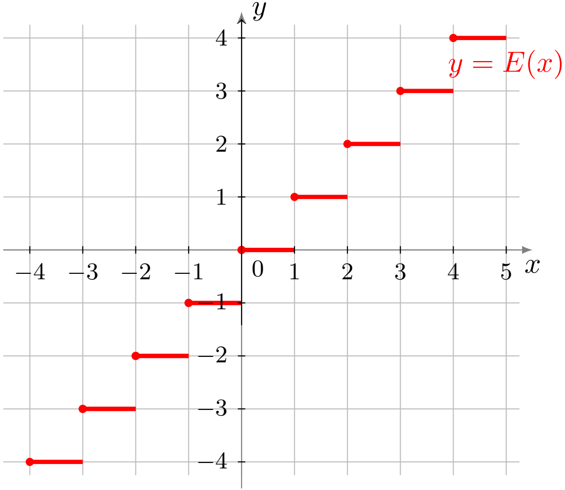
La courbe représentative de la fonction valeur absolue est constituée de deux demi-droites :



e) La fonction partie entière

La fonction partie entière est la fonction $x \mapsto E(x)$, définie sur $\mathbb{R}$.

Voici la courbe représentative de la fonction partie entière :



3. Opérations sur les fonctions

Somme, produit et quotient

Soit $f, g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions.

- **Somme.** La fonction somme $f+g$ est définie sur D et envoie x sur $f(x)+g(x)$:
$$\forall x \in D, \quad (f+g)(x) = f(x)+g(x)\,.$$
- **Produit.** La fonction produit fg est définie sur D et envoie x sur $f(x)g(x)$:
$$\forall x \in D, \quad (fg)(x) = f(x)g(x)\,.$$
- **Quotient.** La fonction quotient f/g est définie sur
$$D' := \{x \in D \mid g(x) \neq 0\}$$
et envoie x sur $\dfrac{f(x)}{g(x)}$: $\forall x \in D', \ \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Remarque. Dans le cas où f et g ont des ensembles de définition D_f et D_g distincts,

- l'ensemble de définition de $f + g$ et fg est l'intersection $D_f \cap D_g$: $D_{f+g} = D_{fg} = D_f \cap D_g$;
- l'ensemble de définition de f/g est $D' := \{x \in D_f \cap D_g \mid g(x) \neq 0\}$.

Exemples.

Composition ➥ *Visionner la vidéo sur la chaine m@ths et tiques*

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D' \to \mathbb{R}$ deux fonctions. La fonction composée de f par g, notée $\boldsymbol{g \circ f}$ (et on lit « *g rond f* »), est définie sur

$$D_{g\circ f} := \{x \in D \,|\, f(x) \in D'\}$$

par :

$$\forall x \in D_{g\circ f},\ g \circ f(x) = g(f(x))\,.$$

Pour obtenir $z = g \circ f(x)$, on envoie d'abord x par f sur $y = f(x)$, puis y est envoyé par g sur $g(y) = z$:

$$\begin{array}{ccccc} D_{g\circ f} \subset D & \xrightarrow{f} & D' & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y = f(x) & \longmapsto & z = g(y) = g \circ f(x) \end{array}$$

Exemples. ① Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x - 1$. Alors, $g \circ f$ et $f \circ g$ sont définies sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 - 1$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x-1) = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

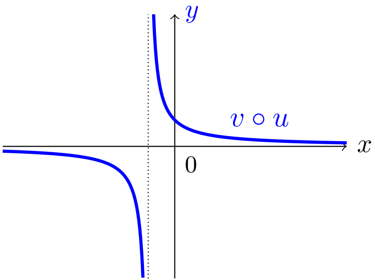
On voit sur cet exemple que $g \circ f \neq f \circ g$.

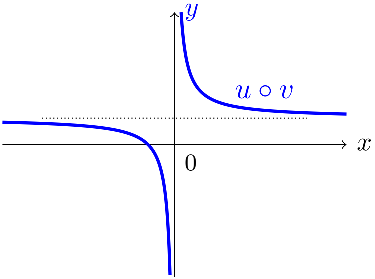
② Soit les fonctions $u : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x+1 \end{array} \right)$ et $v : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\backslash\{0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1/x \end{array} \right)$.

Alors, $v \circ u$ a pour ensemble de définition $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$
et : $\forall x \neq -1,\ v \circ u(x) = v(x+1) = \dfrac{1}{x+1}$.

La fonction $u \circ v$ a pour ensemble de définition $\mathbb{R}^\star = \mathbb{R}\backslash\{0\}$
et : $\forall x \neq 0,\ u \circ v(x) = u\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{x} + 1$.

À nouveau, $v \circ u \neq u \circ v$:





4. Quelques propriétés

➥ *Visionner la* *vidéo "Notions de fonction"*

Définition : fonctions minorées, majorées, bornées

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction et A une partie non vide de D. On dit que f est **minorée, majorée, bornée** sur A, si $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ est respectivement minoré, majoré, borné. Autrement dit :

- f est minorée sur A si, et seulement si, il existe un réel m tel que :

$$\forall x \in A,\ f(x) \geqslant m$$

- f est majorée sur A si, et seulement si, il existe un réel M tel que :

$$\forall x \in A,\ f(x) \leqslant M$$

- f est bornée sur A si, et seulement si, il existe un réel M tel que :

$$\forall x \in A,\ \big|f(x)\big| \leqslant M\,.$$

Exemples.

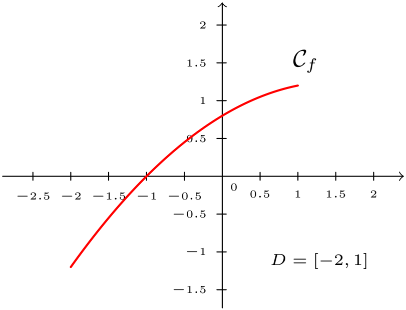
① La fonction $f : \left(\begin{array}{ccc}]-\infty, 0[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1/x \end{array} \right)$ est majorée et non minorée, donc elle n'est pas bornée.

② La fonction $g : \left(\begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1/x \end{array} \right)$ est minorée et non majorée, donc elle n'est pas bornée.

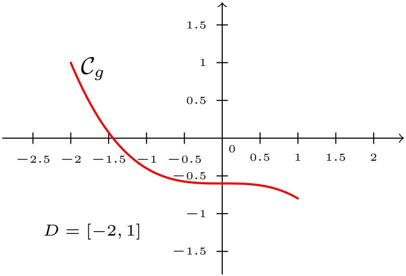
Définition : fonctions monotones

- f est croissante sur D si : $\forall x, y \in D$, $x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$
- f est décroissante sur D si : $\forall x, y \in D$, $x \leqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y)$
- f est monotone sur D si f est décroissante sur D ou croissante sur D.
- f est strictement croissante sur D si : $\forall x, y \in D$, $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$
- f est strictement décroissante sur D si : $\forall x, y \in D$, $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$
- f est strictement monotone sur D si f est strictement décroissante sur D ou strictement croissante sur D.

Exemple. $\sqrt{\cdot}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.



Exemple de courbe représentative d'une fonction f croissante sur $[-2, 1]$.



Exemple de courbe représentative d'une fonction g décroissante sur $[-2, 1]$.

Exemples usuels.

1. Une fonction affine $x \mapsto ax + b$ est strictement croissante si $a > 0$, strictement décroissante si $a < 0$, et elle est constante si $a = 0$.

2. La fonction cube $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exemples usuels (suite)

3. La fonction carré $x \mapsto x^2$ est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

4. La fonction inverse n'est pas monotone $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Elle est strictement décroissante sur chacun des deux intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

Tableau de variation d'une fonction

Étudier les variations d'une fonction f définie sur une partie D de $\mathbb{R}$, c'est déterminer les intervalles sur lesquels f est croissante et les intervalles sur lesquels f est décroissante.
Les variations de f sont représentées par un tableau de variation.

Exemple avec une fonction f définie sur l'intervalle $]-\infty, 4]$.

x	$-\infty$		-1		1		4
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	-3

Lecture : f est (strictement) décroissante sur l'intervalle $]-\infty, -1]$, (strictement) croissante sur l'intervalle $[-1, 1]$ et (strictement) décroissante sur l'intervalle $[1, 4]$.

En rouge : les valeurs de f en -1, 1 et 4, ainsi que la limite de f en $-\infty$: $f(-1) = 1$, $f(1) = 2$ et $f(4) = -3$; enfin $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$, càd. que "$f(x)$ devient très grand lorsque x devient très petit".

Définition de la parité

Soit D une partie de $\mathbb{R}$ **symétrique** par rapport à 0, càd. :

$$\forall x \in D, \ -x \in D \, .$$

Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est dite **paire** si : $\forall x \in D, \quad f(-x) = f(x)$.

Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est dite **impaire** si : $\forall x \in D, \quad f(-x) = -f(x)$.

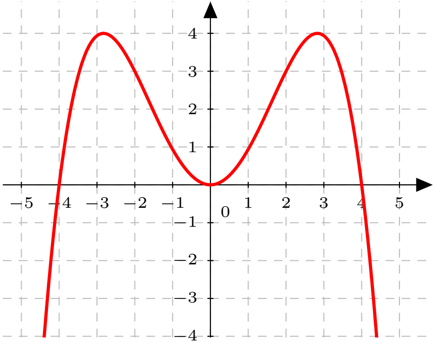
Exemples usuels.

- Les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto |x|$, définies sur $\mathbb{R}$, sont paires.
- Les fonctions $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto 1/x$, définies respectivement sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^\star$, sont impaires.
- La fonction $x \mapsto E(x)$, définie sur $\mathbb{R}$, n'est ni paire ni impaire.

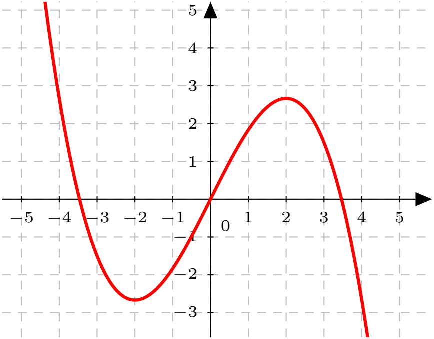
Interprétation graphique. Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.

- Si f est paire, alors $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées : si $M(x,y)$ est sur $\mathcal{C}_f$, alors $M'(-x,y)$ aussi.
- Si f est impaire, alors $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine 0 : si $M(x,y)$ est sur $\mathcal{C}$, alors $M''(-x,-y)$ aussi.

Graphe d'une fonction paire :



Graphe d'une fonction impaire :



Définition : périodicité

Soit T un nombre réel **strictement positif** et D une partie de $\mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in D,\ x + T \in D$. Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est dite périodique de période T (ou T-périodique) lorsque :

$$\forall x \in D,\ f(x+T) = f(x)\,.$$

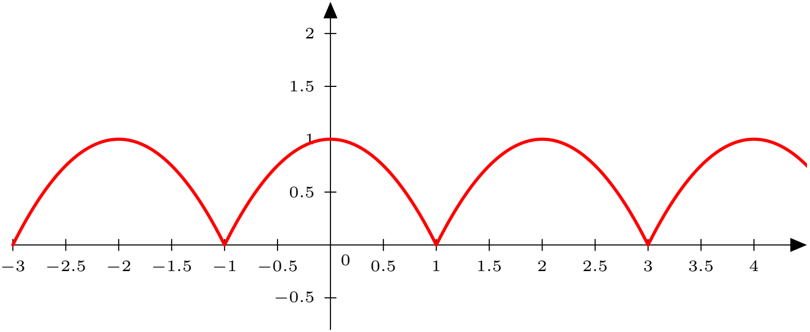
Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est dite périodique s'il existe un nombre réel $T > 0$ tel que f soit T-périodique.

Interprétation graphique. La courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère $(O; I, J)$ d'une fonction T-périodique est invariante par la translation horizontale de vecteur $\vec{u} = T.\overrightarrow{OI}$: $M(x, y) \in \mathcal{C} \iff M(x+T, y) \in \mathcal{C}\,.$

Exemple 1. Les fonctions trigonométriques

Exemple 2. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

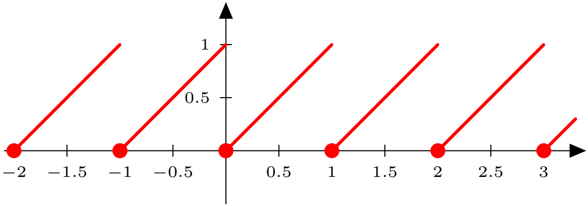
$$\begin{cases} \forall x \in [-1,1],\ f(x) = 1 - x^2 \\ f \text{ est périodique de période } 2. \end{cases}$$



Exemple 3. La fonction partie décimale f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - E(x)$. Elle est caractérisée par les deux propriétés suivantes :

(i) $\forall x \in [0,1[,\ f(x) = x$

(ii) f est périodique de période 1.



2 Fonctions polynomiales et fonctions rationnelles

1. Fonctions polynomiales et factorisation

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle **fonction polynomiale de degré n** toute fonction (définie sur $\mathbb{R}$) de la forme $x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$, où $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des nombres réels appelés coefficients, avec $a_n \neq 0$.

Exemples courants.

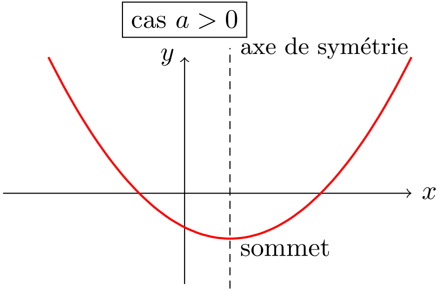
- La fonction nulle $x \mapsto 0$ est considérée comme une fonction polynomiale, de degré non défini (degré $-\infty$).
- Les fonctions constantes $x \mapsto c$ avec $c \neq 0$ sont les fonctions polynomiales de degré 0 (par définition, $x^0 = 1$).
- Les fonctions affines $x \mapsto ax + b$ avec $a \neq 0$ sont les fonctions polynomiales de degré 1.

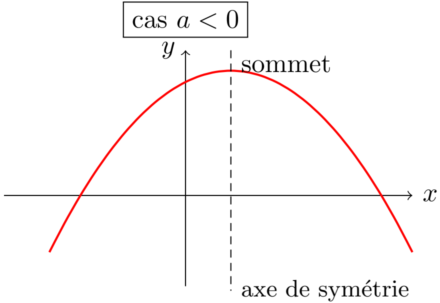
Exemples.

- $x \mapsto (x-1)(x+3) = x^2 + 2x - 3$ fonction polynomiale de degré 2.
- $x \mapsto 3 - 2x + 0,5x^2 - x^4 + 4x^5$ fonction poynomiale de degré 5.

Une **fonction polynomiale de degré** 2 est une fonction f telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$ pour tout réel x, où a, b et c sont des constantes réelles avec $a \neq 0$.

La représentation graphique d'une telle fonction est une **parabole**.
Le sommet de la parabole est le point de coordonnées $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-(b^2-4ac)}{4a}\right)$.





Consulter l'annexe 2 page 56 pour un rappel sur les solutions d'une équation du type $ax^2 + bx + c = 0$ et le signe de $ax^2 + bx + c$.

Propriétés

La somme, le produit, la composition de deux fonctions polynomiales sont des fonctions polynomiales.

Exemple.

Pour une fonction polynomiale donnée, les coefficients a_k de la définition précédente sont uniques :

Théorème d'identification des coefficients

On considère deux fonctions polynomiales

$$f : x \mapsto a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \quad \text{et} \quad g : x \mapsto b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n \ .$$

Si $f(x) = g(x)$ pour tout réel x, alors $a_k = b_k$ pour tout entier k compris entre 0 et n.

Preuve lorsque $n = 2$.

Factorisation d'une fonction polynomiale

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction polynomiale de degré n. Si $f(\alpha) = 0$, alors f admet une factorisation par $x \mapsto x - \alpha$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (x - \alpha)g(x)$$

avec g fonction polynomiale de degré $n - 1$.

Exemple 1. Soit $\boldsymbol{f : x \mapsto x^3 - 1}$. On remarque que $f(1) = 0$, d'où une factorisation de la forme

$$f(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c).$$

Pour déterminer a, b, c, on développe $(x - 1)(ax^2 + bx + c)$ et on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^3 - 1 = ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c\,.$$

Par identification des coefficients, il vient $a = 1$, $b - a = 0$, $c - b = 0$, $c = 1$, ce qui donne $a = b = c = 1$: $\boldsymbol{f(x) = (x - 1)(x^2 + x + 1)}$.

Exemple 2. Soit $\boldsymbol{f : x \mapsto 2x^4 - 3x^3 - 2x^2 + x - 2}$. On remarque que $f(-1) = 0$, d'où une factorisation de la forme $f(x) = (x+1)g(x)$ avec g fonction polynomiale de degré 3. Par le même procédé que dans l'exemple 1 (on développe et on identifie les coefficients), on trouve

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (x+1)g(x)\,, \text{ avec } \; g(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 2\,.$$

On poursuit en remarquant que $g(2) = 0$, et on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\; g(x) = (x-2)h(x)\,, \text{ avec } \; h(x) = 2x^2 - x + 1\,.$$

D'où la factorisation de f :

$$\forall x \in \mathbb{R},\; f(x) = (x+1)(x-2)(2x^2 - x + 1)\,.$$

Le discriminant Δ de h étant strictement négatif ($\Delta = 1 - 8 < 0$), on ne peut pas factoriser $h(x)$.

2. Fonctions rationnelles

Définition

On appelle fonction rationnelle toute fonction f de la forme $x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$, où P et Q sont deux fonctions polynomiales. L'ensemble de définition de f est $D_f = \{x \in \mathbb{R} \,|\, Q(x) \neq 0\}$.

Exemples. ■ La fonction $x \mapsto \dfrac{x^2+x+1}{2x-3}$ est une fonction rationnelle, d'ensemble de définition $\mathbb{R}\backslash\{3/2\}$ qui désigne l'ensemble des réels différents de $3/2$.

■ La fonction $x \mapsto \dfrac{x+4}{x^2+x+1}$ est une fonction rationnelle, d'ensemble de définition $\mathbb{R}$ (car la fonction polynomiale $x \mapsto x^2+x+1$ ne s'annule pas).

■ La fonction $x \mapsto \dfrac{x^5-x^4+\sqrt{2}}{(x-1)(x+2)(x+\sqrt{5})}$ est une fonction rationnelle, d'ensemble de définition $\mathbb{R}\backslash\{1,-2,-\sqrt{5}\}$.

Simplification d'une fonction rationnelle

On peut obtenir une expression simplifiée d'une fonction rationnelle $f : x \mapsto \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ lorsque les fonctions polynomiales P et Q ont des facteurs communs.

Méthode pour simplifier une fonction rationnelle.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction rationnelle
2. Factoriser le numérateur et le dénominateur
3. Simplifier les facteurs partagés du dénominateur et du numérateur
4. Égaliser, sur le domaine de définition, la fonction rationnelle et l'expression simplifiée obtenue.

Exemple. Simplifions la fonction rationnelle $f : x \mapsto \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$.

Consulter l'annexe 3 page 57 pour un rappel sur les identités remarquables.

Exemple (suite).

1. L'ensemble de définition de f est $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$.
2. On a $f = \dfrac{P}{Q}$ avec pour tout réel x :

   $P(x) = x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$ et $Q(x) = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$.

3. La fonction $x \mapsto (x-1)$ est un facteur commun des fonctions polynomiales P et Q et on a la simplification suivante :

$$\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2+x+1}{x+1}.$$

4. Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\},\ f(x) = \frac{x^2+x+1}{x+1}.$$

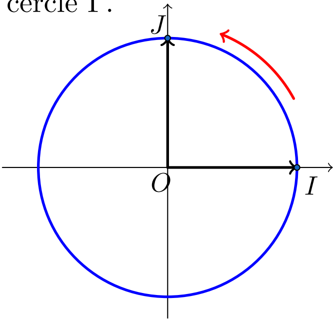
3 Fonctions trigonométriques circulaires

1. Le cercle trigonométrique

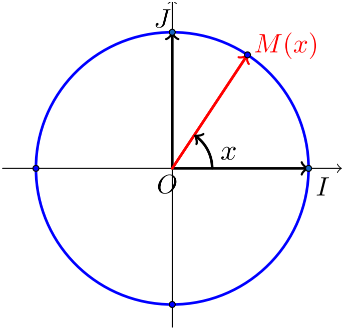
Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(0; I, J)$, **le cercle trigonométrique est le cercle Γ de centre O et de rayon 1 que l'on oriente dans le sens inverse des aiguilles d'une montre**.

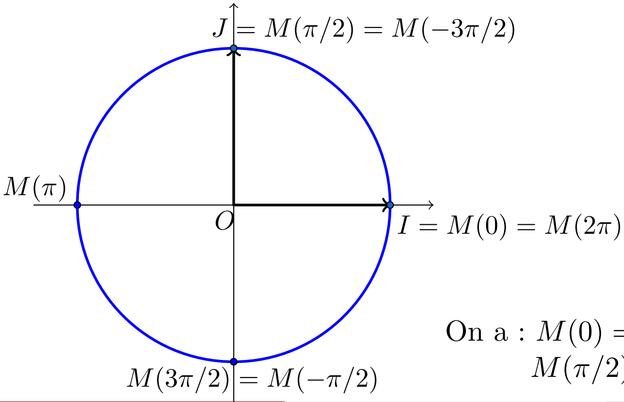
Le cercle Γ est l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées $(a; b)$ vérifient $a^2 + b^2 = 1$, et son périmètre est 2π.

Les points $I(1; 0)$ et $J(0; 1)$ appartiennent au cercle Γ.

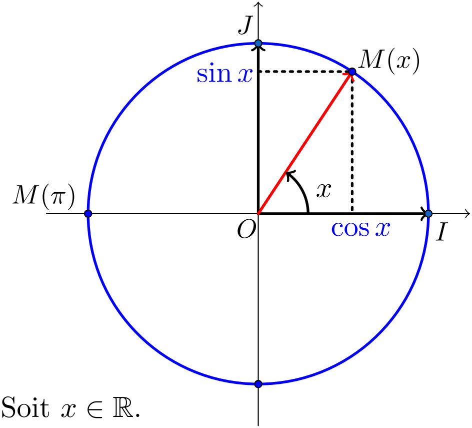


Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $M(x)$ le point du cercle Γ tel que l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM(x)}})$ soit de mesure x en **radians** (*voir annexe 3 page 58*).





On a : $M(0) = M(2\pi) = I$,
$M(\pi/2) = M(-3\pi/2) = J$.



Soit $x \in \mathbb{R}$.

Le **cosinus de** x, noté $\cos(x)$ ou $\cos x$, est l'abscisse du point $M(x)$.

Le **sinus de** x, noté $\sin(x)$ ou $\sin x$, est l'ordonnée du point $M(x)$.

- Comme $M(x)$ est un point du cercle Γ, on a $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$

- De $M(x + 2\pi) = M(x)$, on déduit :

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x \quad \text{et} \quad \sin(x + 2\pi) = \sin x\,.$$

2. Les fonctions cosinus et sinus

La **fonction cosinus** est la fonction

$$\cos : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos x \end{array}$$

La **fonction sinus** est la fonction

$$\sin : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin x \end{array}$$

Quelques valeurs remarquables. *(Voir annexe page 59)*

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0

3. La fonction tangente

Définition

Soit x un réel tel que $\cos x \neq 0$. On appelle **tangente du réel** x, et on note $\tan x$, le réel

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

d'où la fonction tan : $x \mapsto \tan x$ qui a pour ensemble de définition

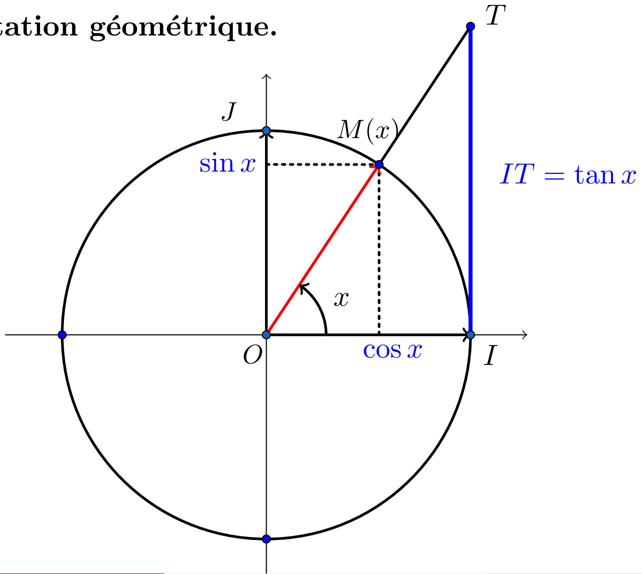
$$D_{\tan} = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos(x) \neq 0\} \ .$$

Quelques valeurs remarquables.

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0
$\tan x$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$		0

➥ Exo7 *Visionner la vidéo "Formules de trigonométrie"* (remarque : pour l'instant, ne pas tenir compte du calcul des dérivées de ces fonctions)

Interprétation géométrique.



4. Formules de bases

- $\forall x \in \mathbb{R},\ (\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$, et

$$\forall x \in D_{\tan},\ 1 + (\tan x)^2 = \frac{1}{(\cos x)^2}$$

.

- **Périodicité.** Les fonctions cos et sin sont 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$ et la fonction tangente est π-périodique sur $D_{\tan}$, autrement dit :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x + 2\pi) = \cos x$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(x + 2\pi) = \sin x$$

$$\forall x \in D_{\tan},\ \tan(x + \pi) = \tan x$$

- **Parité.** La fonction cosinus est paire, les fonctions sinus et tangente sont impaires, autrement dit :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(-x) = \cos x$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(-x) = -\sin x$$

$$\forall x \in D_{\tan},\ \tan(-x) = -\tan x$$

■ Pour tout réel x, on a : $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$.

■ Lorsqu'on ajoute π à x, le cosinus et le sinus sont multipliés par -1 :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x+\pi) = -\cos x \quad \text{et} \quad \sin(x+\pi) = -\sin x$$

■ En remplaçant x par $\frac{\pi}{2} - x$, le cosinus se transforme en sinus et inversement :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x \quad \text{et} \quad \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$$

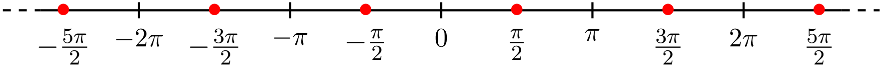
Zéros des fonctions cos, sin et tan.

$$\cos x = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$
$$\sin x = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x = k\pi \iff \tan x = 0$$

L'ensemble de définition de la fonction tangente est donc :

$$D_{\tan} = \mathbb{R} \backslash \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z} \right\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] \frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi \right[$$

autrement dit, $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ est défini si et seulement si x n'appartient pas à l'ensemble $\{\dots, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots\}$. Ainsi, $D_{\tan}$ est la droite réelle "privée des points rouges" :



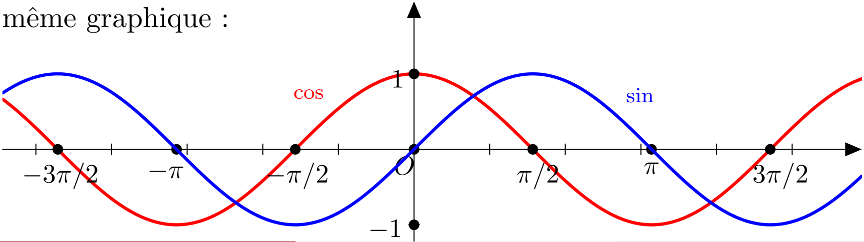
5. Courbes représentatives

Les fonctions cos et sin étant 2π-périodiques, il suffit d'étudier leurs variations sur $[0, 2\pi]$. Etant respectivement paire et impaire, il suffit même de faire l'étude de leurs variations sur $[0, \pi]$:

x	0		$\pi/2$		π
$\cos x$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

x	0		$\pi/2$		π
$\sin x$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

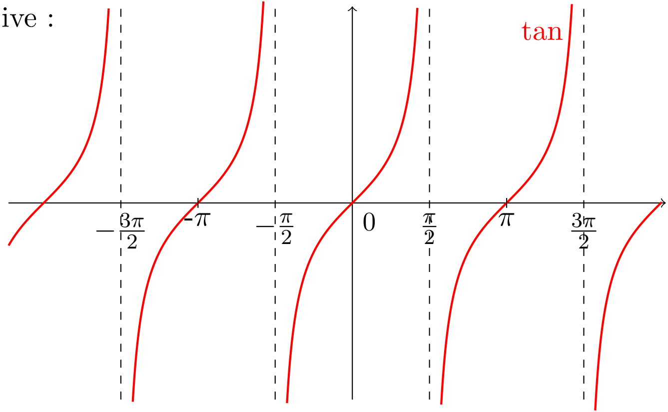
Voici les courbes représentatives des fonctions cosinus et sinus sur le même graphique :



La fonction tangente est π-périodique sur son domaine de définition. Il suffit d'étudier ses variations sur l'intervalle ouvert $]-\pi/2, \pi/2[$:

x	$-\pi/2$		0		$\pi/2$
$\tan x$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Courbe représentative :



6. Formules d'addition

Cosinus et sinus d'une somme. ➥ B visionner la démonstration

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos a\cos b - \sin a\sin b\\ \sin(a+b) &= \sin a\cos b + \cos a\sin b\end{aligned}$$

Tangente d'une somme. Si $a, b \in D_{\tan}$ tels $a+b \in D_{\tan}$, on a :

$$\begin{aligned}\tan(a+b) &= \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin a\cos b + \cos a\sin b}{\cos a\cos b - \sin a\sin b}\\ &= \frac{\cos a\cos b\,(\tan a + \tan b)}{\cos a\cos b\,(1 - \tan a\tan b)} = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\tan b}\end{aligned}$$

Conséquence : formules de l'angle double.

En posant $b = a$ dans les formules précédentes (et en utilisant $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$), on obtient :

$$\begin{aligned}
\cos(2a) &= \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a \\
\sin(2a) &= 2\cos a \sin a \\
\tan(2a) &= \frac{2\tan a}{1 - (\tan a)^2}
\end{aligned}$$

Annexe : ① Image et antécédent

➥*retour au cours page 5*

Image et antécédent

Soit f une fonction à valeurs réelles, d'ensemble de définition D.

- Pour $a \in D$, $f(a)$ est appelé l'**image** de a par la fonction f.
- Pour $b \in \mathbb{R}$, on appelle **antécédent** par f de b tout élément x de D tel que $f(x) = b$.

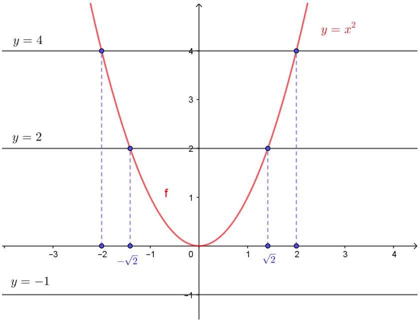
Un élément a de l'ensemble de définition D de f a exactement une image par f.

Graphiquement, l'image de a est l'ordonnée du point d'intersection de la courbe représentative de f avec la droite verticale d'équation $x = a$.

Un réel b peut avoir zéro, un, plusieurs antécédent(s), voire une infinité.

Graphiquement, les antécédents de b sont les abscisses des points d'intersection (s'ils existent) de la courbe représentative de f avec la droite horizontale d'équation $y = b$.

Exemple. Considérons la fonction carré $f : x \mapsto x^2$.



- L'image de -2 par f est 4.
- 4 a deux antécédents : -2 et 2.
- 2 a deux antécédents : $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$.
- 0 a un antécédent : 0.
- -1 n'a aucun antécédent.

➥ retour au cours page 5.

Annexe : ② Zéros et signe de $ax^2 + bx + c$

➥*retour au cours page 33*

On appelle **zéro d'une fonction** f tout réel α tel que $f(\alpha) = 0$.
Soit $\boldsymbol{f : x \mapsto ax^2 + bx + c}$ (avec $a \neq 0$) une fonction polynomiale de degré 2.

Rappel : on note usuellement $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de f

■ Si $\Delta > 0$, f a deux zéros réels $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$. Notons α_1 le plus petit des zéros et α_2 le plus grand. On a la factorisation $f(x) = a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$, qui se traduit par les formules $\alpha_1 + \alpha_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $\alpha_1\alpha_2 = \dfrac{c}{a}$.

Tableau de signes

x	$-\infty$		α_1		α_2		$+\infty$
$f(x)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

■ Si $\Delta = 0$, f a un unique zéro $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$, d'où la factorisation $f(x) = a(x-\alpha)^2$, et pour $x \neq \alpha$, $f(x)$ est du même signe que a.

■ Si $\Delta < 0$, f n'a aucun zéro dans $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ est du même signe que a.

➥ *Visionner la vidéo sur la chaine m@ths et tiques*

Annexe : ③ Identités remarquables ➥*retour au cours page 39*

Soit a et b deux réels.

- Identités remarquables d'ordre 2

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

- Identités remarquables d'ordre 3

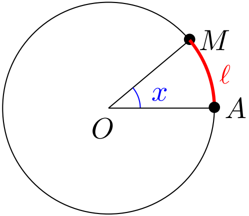
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^2 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

- Généralisations à l'ordre n : B consulter Binôme de Newton et coefficients binomiaux

Annexe : ④ Radian

➥*retour au cours page 42*

Le **radian** est, comme le degré ou le grade, une unité de mesure d'angle.
Définition. Soit A et M deux points d'un cercle de centre O et de rayon 1. La mesure en radians de l'angle $\widehat{AOM}$, orienté de A vers M, est la longueur de l'arc de cercle $\overset{\frown}{AM}$.



La mesure x en radians de l'angle $\widehat{AOM}$ est le rapport entre la longueur ℓ de l'arc de cercle et du rayon du cercle, ici $R = 1$.
Autrement dit : $x = \ell/R = \ell$

Un tour complet du cercle équivaut à 2π radians, ou aussi 360 degrés.

Tableau de conversion entre radians et degrés :

radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
degrés	0	30	45	60	90	180	360

$\times\frac{180}{\pi}$

Annexe : ⑤ Le cercle trigonométrique

➥retour au cours page 44