Feuille d'exercices n°1 - Les nombres réels

Exercice 1.

(1) Montrer que la somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est un irrationnel.

(2) Montrer que le produit d'un nombre rationnel non nul par un nombre irrationnel est irrationnel.

(3) Que pensez-vous de la somme, du produit de deux irrationnels ?

Exercice 2.

(1) Montrer que l'on peut additionner membre à membre les termes d'inégalités, à savoir, si x, y, u et v sont des réels, on a :

$$\left.\begin{array}{l} x \leqslant y \\ u \leqslant v \end{array}\right\} \Rightarrow x+u \leqslant y+v.$$

(2) Montrer que l'on peut multiplier membre à membre les termes d'inégalités de réels **positifs**, à savoir, si x, y, u et v sont des réels **positifs**, on a :

$$\left.\begin{array}{l} x \leqslant y \\ u \leqslant v \end{array}\right\} \Rightarrow xu \leqslant yv.$$

(3) Soit x, y deux réels tels que $-2 \leqslant x \leqslant 1$ et $-2 \leqslant y \leqslant -1$. Encadrer $x+y$, $x-y$, $|x|$, $|y|$, xy et $\dfrac{x}{y}$.

Exercice 3. Soit a, b et c des réels.

(1) Montrer les inégalités suivantes :

(i) $2|ab| \leqslant a^2+b^2$ **(ii)** $ab+bc+ca \leqslant a^2+b^2+c^2$ **(iii)** $\big||a|-|b|\big| \leqslant |a-b|$

(2) Supposons $a \neq b$. Montrer que pour tout réel x on a :

$$|x-a| = |x-b| \iff x = \frac{a+b}{2}.$$

Exercice 4. On rappelle que $E(x)$ désigne la partie entière d'un réel x, c.à.d. l'unique entier relatif tel que $E(x) \leqslant x < E(x)+1$.

(1) A-t-on $E(-x) = -E(x)$ pour tout réel x ? Et si $x \in \mathbb{Z}$?

(2) (a) Calculer $E(2x)-2E(x)$ pour si $0 \leqslant x < \frac{1}{2}$ puis si $\frac{1}{2} \leqslant x < 1$.
(b) Montrer que pour tout réel x, on a : $0 \leqslant E(2x)-2E(x) \leqslant 1$.

Exercice 5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(1) $\sqrt{x+5} = 1-x$ **(2)** $x+3 = |x+5|$ **(3)** $|x+2| = |2x+5|$ **(4)** $|x+1|+|x-3| = |3x-1|$

Exercice 6. Déterminer les intervalles de $\mathbb{R}$ définis par les conditions suivantes :

(a) $3x+5 \geqslant -2$ (b) $|x+3| \leqslant 2$ (c) $\sqrt{x+2} \leqslant 2$ (d) $\sqrt{2-x} > x+4$
(e) $x+3 > \sqrt{x+1}$ (f) $|x-a| \leqslant r$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+$

Exercice 7. Soit $A = \{1,2,3,4,5\}$ une partie de $\mathbb{R}$. Pour chacune des assertions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et le justifier.

(i) $\forall x \in A,\ \exists y \in A,\ x \leqslant y$ **(ii)** $\forall x \in A,\ \exists y \in A,\ x < y$ **(iii)** $\exists y \in A,\ \forall x \in A,\ x \leqslant y$
(iv) $\forall x \in A,\ \forall y \in A,\ x \leqslant y$ **(v)** $\exists x \in A,\ \exists y \in A,\ x > y$

Exercice 8. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. On rappelle que, par définition, A est bornée si A est minorée et majorée. Montrer que A est bornée si, et seulement si, il existe un réel M tel que :
$$\forall x \in A,\ |x| \leqslant M.$$

Exercice 9. On rappelle que $E(x)$ désigne la partie entière d'un réel x. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $A = \{k \in \mathbb{Z} \mid k \leqslant x\}$.

(1) Montrer que A admet une borne supérieure.

(2) Montrer que $E(x)$ est un majorant de A en raisonnant par l'absurde.

(3) En déduire que $E(x)$ est le plus grand entier relatif $\leqslant x$, autrement dit : $E(x) = \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leqslant x\}$.

(4) En utilisant la question précédente montrer que : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ E(x) + E(y) \leqslant E(x + y)$. A-t-on égalité ? Et si $y \in \mathbb{Z}$?

Exercice 10. Pour chacun des ensembles suivants dire s'il est majoré, minoré, borné, et déterminer, s'ils existent, la borne inférieure, la borne supérieure, le minimum et le maximum.

(1) $\mathbb{N}$ **(2)** $[0, 1[\cup [2, 3[$ **(3)** $]-\infty, 6[\cap [-1, 8]$ **(4)** $\left\{\dfrac{1 + (-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N}^\star\right\}$

(5) $\left\{(-1)^n + \dfrac{2}{n} \mid n \in \mathbb{N}^\star\right\}$ **(6)** $\left\{\dfrac{4x + 3}{x + 1} \mid x \in \mathbb{R}_+\right\}$ **(7)** $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 3x + 1 \geqslant 0\}$ **(8)** $\{x \in \mathbb{R} \mid |x - 4| < 1\}$

Exercice 11. Soit A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. Montrer que si $A \subset B$ alors $\sup A \leqslant \sup B$. Comparer de la même manière $\inf A$ et $\inf B$ lorsque A et B sont minorées.

Exercices complémentaires

Exercice 12. Soit x et y deux réels. Montrer que $\max(x, y) = \dfrac{x + y + |x - y|}{2}$ puis donner une égalité similaire pour $\min(x, y)$. (Vidéo Exo7Math)

Exercice 13. Caractérisation de la borne supérieure
Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et M un réel. Montrer que :
$$M = \sup A \iff \begin{cases} \forall x \in A,\ x \leqslant M \\ \forall y < M,\ \exists x \in A,\ y < x \end{cases}$$

Écrire une version similaire caractérisant la borne inférieure.
En utilisant cette caractérisation montrer que la borne supérieure de l'ensemble $A = \left\{\dfrac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ vaut 1.

Exercice 14. Soit A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On définit
$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\} \quad \text{et} \quad -A = \{-a \mid a \in A\}.$$
Les assertions suivantes sont-elles **vraies ou fausses** ? Justifier votre réponse. On pourra utiliser l'exercice 11.

(a) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ (Vidéo Exo7Math) **(b)** $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$

(c) $\sup(A \cap B) = \min(\sup A, \sup B)$ **(d)** $\inf(-A) = -\sup A$