Y. Sarahi García González
Optimización 1.
Tarea 5. Problemas 1, 2, 3.

# Ejercicio 1.

a) Encuentre los puntos estacionarios de

$$f(\bar{x}) = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_3 - x_2x_3 + 4x_1 + 12$$

1. obtenemos las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 - 2x_3 + 4 \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2} = -2x_2 - x_3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 2x_3 - 2x_1 - x_2$$

2. Igualamos a cero y resolvemos el sistema.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0 \longrightarrow \begin{cases} 2x_1 - 2x_3 + 4 = 0 & (1) \\ -2x_2 - x_3 = 0 & (2) \\ 2x_3 - 2x_1 - x_2 = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} (1) \Rightarrow x_3 = x_1 + 2 \\ (3) \Rightarrow x_3 = x_1 + \frac{1}{2}x_2 \end{array}\right\rangle\ 0 = 2 - \frac{1}{2}x_2 \Rightarrow \boxed{x_2 = 4}$$

$$(2) \Rightarrow x_3 = -2x_2 \quad \text{y} \quad x_2 = 4 \Rightarrow \boxed{x_3 = -8}$$

Sustituyendo en (3) $\quad 2(-8) - 2x_1 - (4) = 0$

$$\Rightarrow -20 = 2x_1 \Rightarrow \boxed{x_1 = -10}$$

$\Rightarrow$ El único punto estacionario es $\bar{x} = (-10, 4, -8)$

3. Obtenemos las segunda derivada y construimos la Hessiana

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1} = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_3} = -1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 x_2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = -2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_3} = -2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 x_1}$$

$$Hf(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 \partial_1 f & \partial_1 \partial_2 f & \partial_1 \partial_3 f \\ \partial_2 \partial_1 f & \partial_2 \partial_2 f & \partial_2 \partial_3 f \\ \partial_3 \partial_1 f & \partial_3 \partial_2 f & \partial_3 \partial_3 f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Encontramos los eigenvalores

$$|Hf - \lambda I| = 0 \quad \cdots \alpha$$

Usamos regla de Sarrus para calcular $\alpha$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & -2-\lambda & -1 \\ -2 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow [-(2-\lambda)^2(\lambda+2) + 0 + 0] - [-4(2+\lambda) + (2-\lambda) + 0] = 0$$

$$\Rightarrow -(\lambda-2)^2(\lambda+2) + 4(\lambda+2) + (\lambda-2) = 0$$

El polinomio característico tiene tres raíces reales

tiene 3 raíces reales, 2 positivas y 1 negativa

$\Rightarrow f$ tiene un punto estacionario $\bar{x} = (-10, 4, -8)$ y es un punto silla

b) $\bar{x}_0 = (1,0,0)$ Calcule $x_1$ usando la dirección de descenso máximo con paso exacto

descenso máximo: $\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k + \alpha_k \bar{p}_k$ con $\bar{p}_k = -\nabla f(\bar{x}_k)$

tamaño de paso exacto: $a_k = \arg \text{mínimo } f(\bar{x}_k + \alpha \bar{p}_k)$

sujeto a $\alpha > 0$

1. Calculamos la dirección de descenso $\bar{p}_0 = -\nabla f(\bar{x}_0)$

$$\nabla f(\bar{x}) = (2x_1 - 2x_3 + 4,\ -2x_2 - x_3,\ 2x_3 - 2x_1 - x_2)$$

$$\Rightarrow \nabla f(\bar{x}_0) = (6, 0, -2)$$

$$\Rightarrow \bar{p}_0 = -\nabla f(\bar{x}_0) = (-6, 0, 2)$$

2. Calculamos el tamaño de paso exacto $\alpha_0 = \arg \min = f(\bar{x}_0 + \alpha \bar{p}_0)$

$$\alpha_0 = \arg \min_{\alpha} f((1,0,0) + \alpha(-6,0,2)),\ \alpha > 0$$

$$= \arg \min_{\alpha} f(1-6\alpha, 0, 2\alpha),\ \alpha > 0$$

$$= \arg \min_{\alpha} (x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_3 - x_2x_3 + 4x_1 + 12) \Big|_{\substack{x_1 = 1-6\alpha \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 2\alpha}}$$

$$= \arg \min_{\alpha} ((1-6\alpha)^2 + 4\alpha^2 - 4\alpha(1-6\alpha) - 4(1-6\alpha) + 12),\ \alpha > 0$$

$$= \arg \min_{\alpha} (1 - 12\alpha + 36\alpha^2 + 4\alpha^2 - 4\alpha + 24\alpha^2 - 4 + 24\alpha + 12$$

$$= \arg \min_{\alpha} ((64\alpha^2 - 40\alpha + 16) + 1)\ \alpha > 0$$

$$= \arg \min_{\alpha} (8(8\alpha^2 - 5\alpha + 2) + 1) \Rightarrow \alpha_0 = 5/16$$

3. Calculamos $\bar{x}_1 = \bar{x}_0 + \alpha_0 \bar{p}_0$

$$\bar{x}_1 = (1, 0, 0) + \tfrac{5}{16}(-6, 0, 2) = \left(-\tfrac{14}{16}, 0, -\tfrac{10}{16}\right)$$

# Ejercicio 2.

$$f(\bar{x}) = 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1^3 + x_1^4 \, , \quad \bar{x}_0 = (0,1)$$

a) Si $Hf$ es definida positiva, aplique el método de Newton, si no, aplique el algoritmo de descenso máximo.

1. Derivadas parciales de primer orden

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 4x_1 - 2x_2 + 6x_1^2 + 4x_1^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_2 - 2x_1$$

2. Derivadas parciales de segundo orden

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 4 + 12x_1 + 12x_1^2 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2} = -2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$$

3. Hessiana

$$Hf(x) = \begin{pmatrix} 4(3x_1^2 + 3x_1 + 1) & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Determinamos si $Hf(\bar{x}_0)$ es def positiva

$$Hf(\bar{x}_0) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Mat Hermitiana } A = (A^T)^*$$

$$\text{Det}(Hf(\bar{x}_0) - \lambda I) = (4-\lambda)(2-\lambda) - (-2)(-2)$$

$$= 8 - 4\lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 4 = \lambda^2 - 6\lambda + 4$$

$$\Rightarrow \lambda = 3 \pm \sqrt{5} \quad y \quad \sqrt{5} < 3 \rightarrow \text{pues } 5 < 9 \rightarrow \sqrt{5} < \sqrt{9}$$

Así que: $\lambda = 3 \pm \sqrt{5} > 0$

$\Rightarrow$ $H_f(\bar{x}_0)$ es real, simétrica y todos sus valores propios son reales

$\Rightarrow$ $H_f(\bar{x}_0)$ es definida positiva

5. Aplicamos el método de Newton

Se puede factorizar Cholesky pues es def positiva

Newton: $\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k + \alpha_k \bar{p}_k$ donde $\bar{p}_k$ $\therefore$ $LL^t p_k = -\nabla f$

tamaño de paso: $\alpha_k = 1$ pues

5.1 Calculamos el gradiente

$$\nabla f(\bar{x}_0) = (-2, 2)$$

5.2 Encontramos la dir. de descenso $H_f(\bar{x}_0)\, p_k = -\nabla f$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 4p_1 - 2p_2 = 2 & (1) \\ -2p_1 + 2p_2 = -2 & (2) \end{cases}$$

$(1) \Rightarrow$ $p_2 = 2p_1 - 1$ $\Rightarrow -2p_1 + 2(2p_1 - 1) = -2$

$\Rightarrow -2p_1 + 4p_1 - 2 = -2$ $\Rightarrow$ $p_1 = 0$, $p_2 = -1$

5.3 Calculamos $\bar{x}_1$

$$\bar{x}_1 = (0, 1) + (0, -1) = (0, 0)$$

b) Calcule el cambio en la función objetivo

$$f(\bar{x}_0) = f(0, 1) = 2(0)^2 + (1)^2 - 2(0)(1) + 2(0)^3 + (0)^4 = 1$$

$$f(\bar{x}_1) = f(0, 0) = 2(0)^2 + (0)^2 - 2(0)(0) + 2(0)^3 + (0)^4 = 0$$

$$\Rightarrow f(\bar{x}_1) - f(\bar{x}_0) = 1$$

# Ejercicio 3.

a). $f(x) = \max\{f_1(x), f_2(x)\}$ si $f_1$ y $f_2$ convexas, demuestra que $f$ es convexa.

Como $f_1, f_2$ son convexas cumplen:

$\alpha_1$ $x, y \in \mathbb{R}^n \rightarrow f_1(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f_1(x) + (1-\lambda) f_1(y)$

$\alpha_2$ $x, y \in \mathbb{R}^n \rightarrow f_2(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f_2(x) + (1-\lambda) f_2(y)$

Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ arbitrarios. Como son arbitrarios podemos tener cuatro casos:

caso 1 $\quad f(x) = f_1(x)$ y $f(y) = f_1(y)$

$\Rightarrow$ se cumple $\alpha_1$

$\Rightarrow f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$ ■

caso 2 $\quad f(x) = f_2(x)$ y $f(y) = f_2(y)$

análogo al caso 1 ■

caso 3 $\quad f(x) = f_2(x)$ y $f(y) = f_1(y)$ ⑥

3.1 $\lambda$'s $\in [0,1]$ t.q. $f(\lambda x + (1-\lambda)y) = f_1(\lambda x + (1-\lambda)y)$

$\overset{\alpha_1}{\Rightarrow} f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f_1(x) + (1-\lambda) f_1(y)$

• sabemos: $f_1(y) = f(y)$ ⑥

$\Rightarrow f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f_1(x) + (1-\lambda) f(y)$

• sabemos: $f_1(x) < f_2(x)$ ⑥ $\Rightarrow f_2(x) - f_1(x) > 0$

$\Rightarrow \lambda(f_2(x) - f_1(x)) > 0$

$\Rightarrow f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f_1(x) + (1-\lambda) f(y) + \lambda(f_2(x) - f_1(x)$

$\Rightarrow f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f_2(x) + (1-\lambda) f(y)$

- sabemos $\underline{f(x) = f_2(x)}$ 6

$\Rightarrow f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$ ■

3.2 $\lambda$'s $\in [0,1]$ y $f(\lambda x + (1-\lambda)y) = f_2(\lambda x + (1-\lambda)y)$

$\Rightarrow f_2(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f_2(x) + (1-\lambda) f_2(y)$

- $\underline{\text{sabemos: } f_2(x) = f(x)}$ 6

$\Rightarrow f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f_2(y)$

- sabemos: $\underline{f_2(y) < f_1(y)}$ 6 $\Rightarrow f_1(y) - f_2(y) > 0$

$\Rightarrow (1-\lambda)(f_1(y) - f_2(y)) > 0$

$\Rightarrow f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f_2(y) + (1-\lambda)(f_1(y) - f_2(y))$

$\Rightarrow f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f_1(y)$

- sabemos $f(y) = f_1(y)$

$\Rightarrow f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$

■

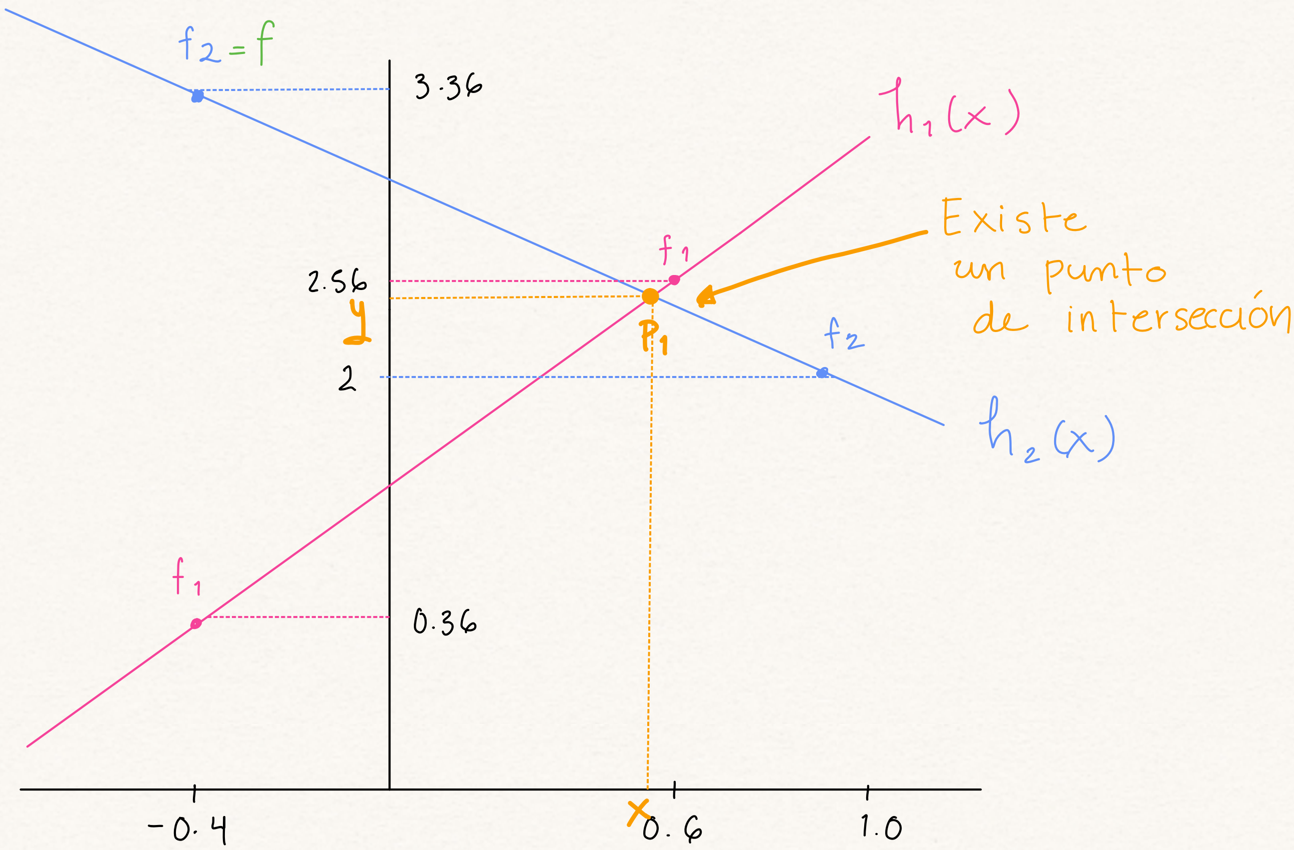
caso 4. $f(x) = f_1(x)$ y $f(y) = f_2(y)$

La prueba es análoga al caso 3. ■

b) Si $n=1$, $f_1(-0.4)=0.36$, $f_1(0.6)=2.56$, $f_2(-0.4)=3.66$ y $f_2(1)=2$

identifique el intervalo mas pequeño en el que se puede garantizar el minimizador de $f$.

Veamos graficamente a las rectas que se forma al unir $f_1(-0.4)$, $f_1(0.6)$ y $f_2(-0.4)$, $f_2(1)$:




Veamos que al generar estas rectas, tenemos dos funciones $h_1$ y $h_2$ cuyas pendientes tienen signo contrario y como ambas pueden definirse en $[-0.4, 1]$ (de manera continua) se intersectan en un punto P1.

Como $f_1$ y $f_2$ son convexas:

$$f_1(x) \leq h_1(x) \qquad f_2(x) \leq h_1(x) \qquad \forall x \in [-0.4, 1]$$

$$\Rightarrow \quad f(x) \leq \min\{h_1(x), h_2(x)\} \quad \forall x \in [-0.4, 1]$$

y $\min\{h_1(x), h_2(x)\}$ alcanza min en $x$.

por lo que $f(x)$ debe alcanzar min en $[-0.4, 1]$