Tarea 1. Métodos de Descenso para Funciones de Base Radial

Mariano Rivera

Fecha de entrega: 28 February 2024

Considere la imagen bidimensional f de dimensioned$N \times N$, que toma valores en el internamo $[0, 1]$ y si $x = [x_1, x_2]^\top$ representas las coordenadas de cada pixel, entonces podemos aproximar la imagen como una suma de funciones base . Esto es:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{J} \alpha_j \phi(x; \theta_j) + \eta(x) \tag{1}$$

donde el vector $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_J]$ son los coeficientes que pesan la contribución de cada función base, que se distiguen entre ellas por sus parámetros individuales $\theta = [\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_J]$, y η es un residual. Luego definimos $\phi_j \stackrel{def}{=} \phi(x, \theta_j)$ y

$$\Phi_\theta \stackrel{def}{=} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_J \end{bmatrix} \tag{2}$$

Luego ecuación (1) la podemos escribir en forma matricial como

$$f = \Phi_\theta \alpha + \eta$$

Para ajustar los parámetros y coeficientes de las funciones base resolvemos el problema no lineal:

$$\arg\min_{\theta, \alpha} \|f - \Phi_\theta \alpha\|_2^2 \tag{3}$$

Esta optimización se realiza en dos pasos para lo que se requiere unos parámetros iniciales θ:

Paso I. Paso lineal, asumiendo ficjos los parámetros θ, resolver el problema de mínimos cuadrados lineales (por ejemplo, usando la psuedoinversa de Moore-Penrose):

$$\arg\min_{\alpha} \|f - \Phi_\theta \alpha\|_2^2 \tag{4}$$

para los coeficientes.

Paso II. Paso no-lineal, asumiendo fijos los coeficientes α, dar una actualización de descenso de gradiente en el problema de mínimos cuadrados no-lineales:

$$\arg\min_{\theta} \|f - \Phi_\theta \alpha\|_2^2 \tag{5}$$

para los parámetros θ.

Entre las funciones radiales mas populares están la multiquádrica:

$$\phi_j = \sqrt{r^2 + \kappa} \tag{6}$$

y la Gaussiana

$$\phi_j = \exp\left(-\kappa r^2\right) \tag{7}$$

donde $r = (\theta_j - x)$. Note que los parámetros de la función radial son las coordenadas θ_j; centro de la función radial. κ es un parámetro de escala que se da.

Resolver el problema de ajuste de RBFs para:

- Usar una imagen momocromática (tonos de gris) de 256x256 pixeles.
- Usar entre 100 a 500 funciones radiales. Encuentre el compromiso que le parezca adecuado entre buena reconstrucción y rapidez en la reconstrucción, esto es a su criterio.
- Los centros θ de las funciones radiales se inicializan aleatoriamente en el intervalo [1,N]
- Busque un valor de κ adecuado para la imagen de prueba que seleccione.
- Ajustar el modelo usando la multiquádrica y compara con la la Gaussiana
- Usar los métodos de descenso de gradiente: GD, Nesterov y Adam. Puede, si le parece conveniente, implementar la versión estocástica.
- Incluir una penalización (regularización) en las $x\acute{s}$: Esto es añadir a la función objetivo le término $\lambda\|x\|^2$, donde λ es un parámetro que controla cuantas α se expresan.

La tareas se entregan en un ”notebook” mediante classroom. Incluya la url de su imagen de prueba (leala de una dirección de internet).