Procesamiento de Señales en Comunicaciones

Departamento de Ingeniería Eléctrica y Computadoras
Universidad Nacional del Sur

Contenidos

- Modulación.
- Diseño de Distancia Mínima.
- Desempeño en ruido.
- Detección.
- Ecualización óptima.
- Ecualización adaptativa.
- Modulación de portadoras múltiples

Desempeño en Ruido

- Procesos Gaussianos complejos.
- Probabilidad de error: Resultados generales.
- Probabilidad de error PAM sin ISI.
- Desempeño de Distancia Mínima pulso aislado.
  - PAM; Pulsos Ortogonales (PO); Combinación PAM / PO.
- Desempeño de Distancia Mínima para PAM con ISI.
- Espectro Disperso.
- Capacidad y Modulación.

Procesos Gaussianos Complejos

- $Z(t)$ Gaussiano complejo define

$$R(t) = Re\{Z(t)\}, \quad I(t) = Im\{Z(t)\}$$

también Gaussianos pero reales. Con

$$R_R(\tau) = E[R(t+\tau)R(t)],\ R_I(\tau) = E[I(t+\tau)I(t)],\ R_{RI}(\tau) = E[R(t+\tau)I(t)]$$

- $Z(t)$ es *estrictamente estacionario* (ESE) si $R_R(\tau),\ R_I(\tau),\ R_{RI}(\tau)$ son conjuntamente ESA (i.e., no dependen de *t*).

- También, $Z(t)$ es ESA si $R_Z(\tau) = E[Z(t+\tau)Z^*(t)]$ no depende de t.

Si $Z(t)$ complejo, ESA no implica ESE!

- La ambigüedad ($R_Z(\tau)$ 2 funciones en lugar de 3), se resuelve con la *función autocorrelación complementaria*

$$\tilde{R}_Z(\tau) = E[Z(t+\tau)Z(t)]$$

Procesos Gaussianos Complejos ...

En particular, con $2R(t) = Z(t) + Z^*(t)$ y $j2I(t) = Z(t) - Z^*(t)$

entonces

$$2R_R(\tau) = Re\{R_Z(\tau)\} + Re\{\tilde{R}_Z(\tau)\},$$
$$2R_I(\tau) = Re\{R_Z(\tau)\} - Re\{\tilde{R}_Z(\tau)\},$$
$$2R_{RI}(\tau) = Im\{\tilde{R}_Z(\tau)\} - Im\{R_Z(\tau)\}$$

Diferencias entre procesos complejos y reales

- Un proceso Gaussiano complejo requiere ambas funciones autocorrelación y autocorrelación complementaria para ser caracterizado totalmente (en el caso real, solo la autocorrelación).

- Un proceso Gaussiano complejo ESA no es necesariamente ESE. Si lo es si ambas funciones autocorrelación no dependen del tiempo (en el caso real, ESA implica ESE).

Procesos Gaussianos Complejos ...

Preliminar: Consideremos una variable aleatoria $Z = (R + jI)$ compleja, Gaussiana y de media cero. Entonces

$$E[Z^2] = E[R^2] - E[I^2] + 2jE[RI]$$

Y se verifica que *R* e *I* están distribuidas idénticamente (tienen la misma varianza) y son independientes sssi

$$E[Z^2] = 0$$

En ese caso, la variable aleatoria Gaussiana se dice *circularmente simétrica* y

$$f_{R,I}(r,i) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{(r^2+i^2)/2\sigma^2}$$

Procesos Gaussianos Complejos ...

Procesos Gaussianos Circularmente Simétricos (PGCS):

Generalizando, PGCS verifican

$$E[Z(t+\tau)Z(t)] = 0, \quad \forall t, \tau$$

Entonces, para un PGCS ESA

$$2R_R(\tau) = Re\{R_Z(\tau)\}, 2R_I(\tau) = Re\{R_Z(\tau)\}, \; 2R_{RI}(\tau) = -Im\{R_Z(\tau)\}$$

Algunas propiedades

- Las partes real e imaginaria tienen estadísticas idénticas.
- Como $R_Z(0)$ debe ser real, $Im\{R_Z(0)\} = R_{RI}(0) = 0$, entonces $R(t)$ e $I(t)$ no están correlacionadas y son estadísticamente independientes.
- PGCS con autocorrelación real $R_{RI}(\tau) = 0$ tiene partes real e imaginaria independientes ($R_Z(\tau)$ es real cuando la densidad espectral del proceso tiene simetría par alrededor del origen).
- La simetría circular se mantiene a través del filtrado lineal.

Procesos Gaussianos Complejos (cont)

Procesos Gaussianos Circularmente Simétricos discretos:

$$E[Z_{k+m}Z_k] = 0, \quad \forall k, m$$

Procesos blancos Gaussianos complejos:

$$R_Z(\tau) = N_0 \delta_k(\tau),\ R_Z(k) = 2\sigma^2 \delta_k$$

tal que σ^2 es la varianza de las partes real o imaginaria.

Si el proceso es blanco y circularmente simétrico:

- Sus partes real e imaginaria son idénticamente distribuidas y son procesos blancos Gaussianos reales.
- Sus partes real e imaginaria son independientes porque la función autocorrelación es real.

Desempeño en ruido: Resultados generales

Probabilidad de error para una formulación N-dimensional del receptor de distancia mínima

Para $$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{S}_m + \boldsymbol{Z}$$

donde: $\boldsymbol{Y}^T = [Y_1, \cdots, Y_N]$ es la señal recibida, $\boldsymbol{S}_m^T = [S_{m,1}, \cdots, S_{m,N}]$ es una de *L* señales conocidas y $\boldsymbol{Z}^T = [Z_1, \cdots, Z_N]$ es un vector Gaussiano complejo tal que:

- Sus componentes no está correlacionadas, i.e., $E[Z_i Z_j^*] = 0$, $\forall i \neq j$.
- Sus componentes son circularmente simétricas, $E[Z_i Z_j] = 0$, esto implica que son independientes , lo mismo que sus partes real e imaginaria.
- Sus componentes son identicamente distribuidas con $E[|Z_n|^2] = 2\sigma^2$, para $1 \leq n \leq N$

Resultados generales ...

Preliminar: Consideremos una variable aleatoria *C* definida como

$$C =< \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{e} >= \boldsymbol{Z}^T \boldsymbol{e}^*, \text{ con } \|\boldsymbol{e}\| = 1$$

Entonces: *C* es Gaussiana y circularmente simétrica (partes real e imaginaria independientes) y su varianza

$$E[|C|^2] = E[\sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} Z_i Z_k^* e_i e_k^* = \sum_{i=1}^{N} E[|Z_i|^2] |e_i|^2 = 2\sigma^2 \sum_{i=1}^{N} |e_i|^2 = 2\sigma^2$$

Interpretación: Como ***Z*** es circularmente simétrico tiene la misma varianza en todas sus componentes. *C* es la proyección de ***Z*** sobre el vector unitario ***e***, entonces no cambia su varianza respecto a las componentes de ***Z***.

Resultados generales ...

Partiendo de la señal que satisface $\min_l \|\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{S}_l\|^2$, un primer paso es obtener la probabilidad de error, i.e., dado $\boldsymbol{Y}$ y enviado $\boldsymbol{S}_m$, cual es la probabilidad de

$$\|\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{S}_i\|^2 < \|\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{S}_m\|^2 \qquad i \neq m,\ 1 \leq i, m \leq L$$

Definiendo $d_{m,i} = \|\boldsymbol{S}_i - \boldsymbol{S}_m\|$, se puede escribir como

$$Re\{< \boldsymbol{Z}, \frac{\boldsymbol{S}_i - \boldsymbol{S}_m}{d_{m,i}} >\} > \frac{d_{m,i}}{2}$$

Entonces, como $\frac{\boldsymbol{S}_i - \boldsymbol{S}_m}{d_{m,i}}$ es unitario, con el resultado anterior

$$Pr[\,\boldsymbol{Y} \text{ mas cerca de } \boldsymbol{S}_i \text{ que de } \boldsymbol{S}_m \,|\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{S}_m + \boldsymbol{Z}] = Q(\frac{d_{m,i}}{2\sigma})$$

Resultados generales …

Como la distancia mínima para regiones de decisión de 3 o más señales es complicada, entonces aproximación usando cota de unión.

Con $Pr[\bigcup_{n=1}^{N} E_n] \leq \sum_{n=1}^{N} Pr[E_n]$, se verifican las siguientes cotas (aprox.)

$$Q(\frac{d_{m,min}}{2\sigma}) \leq Pr[\boldsymbol{S}_m \text{ no elegida}|\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{S}_m + \boldsymbol{Z}] \leq K_m Q(\frac{d_{m,min}}{2\sigma})$$

donde K_m es el número de señales a distancia mínima de $\boldsymbol{S}_m$.

La probabilidad de error promedio será

$$P_e = \sum_{m=1}^{L} p_m\, Pr[\boldsymbol{S}_m \text{ no elegida}|\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{S}_m + \boldsymbol{Z}] \cong \sum_{m=1}^{L} p_m K_m Q(\frac{d_{m,min}}{2\sigma})$$

que teniendo en cuenta el menor argumento (dominante) de $Q(.)$ resultará en

$$P_e \cong K Q(\frac{d_{min}}{2\sigma})$$

Desempeño de PAM sin ISI …

Para el MF con pulsos que cumplen Nyquist (no existe ISI), es necesario evaluar el ruido equivalente en el detector

Para el caso pasabanda, con ruido AWGN $N(t)$, la salida del filtro de recepción $f(t)$ será:

$$Z(t) = (N(t)e^{-jw_c t}) * \sqrt{2}f(t)$$

Entonces:

$$R_Z(\tau) = E[Z(t+\tau)Z^*(t)] = 2N_0 f(\tau) * f^*(-\tau)$$

$$S_Z(jw) = 2N_0|F(jw)|^2$$

También, si $B_f < 2w_c$, entonces (se cumple en términos prácticos) que

$$\tilde{R}_Z(\tau) = E[Z(t+\tau)Z(t)] = 0$$

por lo que $Z(t)$ es circularmente simétrico y ESA.

A la salida del muestreo

$$S_Z(e^{jwT}) = \frac{2N_0}{T}\sum_{-\infty}^{\infty}|F(j(w - m\frac{2\pi}{T}))|^2$$

Desempeño de PAM sin ISI …

Para el caso bandabase, el ruido a la entrada del muestreador es

$$Z(t) = N(t) * f(t)$$

Es real. Entonces, la densidad espectral de potencia será:

$$S_Z(jw) = N_0 |F(jw)|^2$$

Y la versión discreta a la salida

$$S_Z(e^{jwT}) = \frac{N_0}{T} \sum_{-\infty}^{\infty} |F(j(w - m\frac{2\pi}{T}))|^2$$

Desempeño de PAM sin ISI …

Amplificación de ruido

Si además del ruido, existe una función transferencia de canal $B(jw)$ y un filtro de transmisión $G(jw)$, entonces para satisfacer Nyquist

$$G(jw)B(j(w+w_c))F(jw) = P(jw)$$

donde $p(t)$ define la forma del pulso de salida del filtro de recepción.

Entonces, la varianza del ruido en cada dimensión será

$$\sigma^2 = \frac{N_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|P(jw)|^2}{|G(jw)B(j(w+w_c))|^2}dw$$

tal que, cuando $B(jw)$ es pequeño pero no $P(jw)$ se produce una amplificación del ruido.

Desempeño de PAM sin ISI …

Probabilidad de error de símbolo, con *K=1* en los Resultados Generales, a la entrada del elemento de decisión

$$Q_k = A_k + Z_k \qquad\qquad A_k \in \{a_m, 1 \leq m \leq M\}$$

Varianza bandabase: $E[|Z_k|^2] = \sigma^2$ Varianza pasabanda: $E[|Z_k|^2] = 2\sigma^2$

El elemento de decisión tiene como propiedades:

- Sin memoria, decisión símbolo por símbolo.
- Utiliza el criterio de distancia mínima: se elije a_j del alfabeto $\{a_m,\ 1 \leq m \leq M\}$ que minimiza $|Q_k - a_j|^2$.

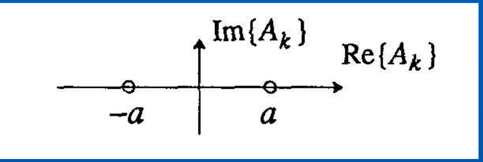
Se produce un error de símbolo cuando se decide por $a_j \neq a_m$ cuando a_m fue transmitido.

Desempeño de PAM sin ISI …

Probabilidad de error de símbolo …

Ejemplos:

PAM binaria bandabase (antipodal): $\{+a, -a\}$, $d = 2a$

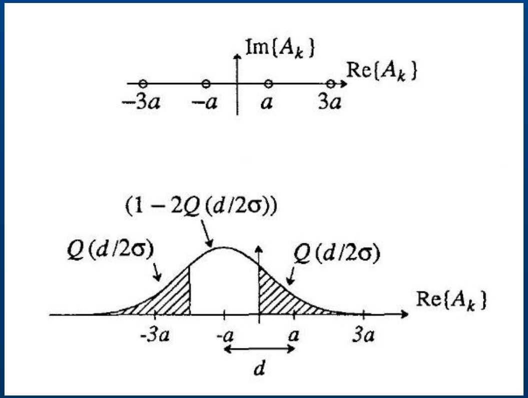


$$Pr[\text{error de simbolo}] = Q(a/\sigma)$$

PAM cuaternaria bandabase:

si el símbolo transmitido es $\pm a$ $\quad Pr[\text{error de simbolo}|A_k = \pm a] = 2Q(d/2a)$

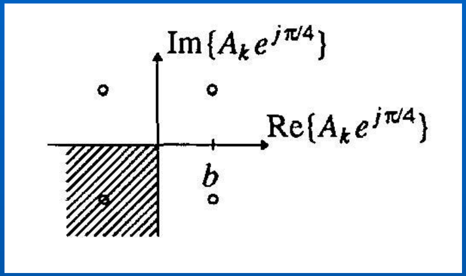
si el símbolo transmitido es $\pm 3a$ $\quad Pr[\text{error de simbolo}|A_k = \pm 3a] = Q(d/2a)$



$$Pr[\text{error de simbolo}] = 1.5Q(a/2\sigma)$$

Desempeño de PAM sin ISI …

Probabilidad de error de símbolo



Ejemplos: PSK cuaternaria rotada: $M_k = Z_k e^{j\pi/4}$

tiene partes real e imaginaria independientes, entonces

$$Pr[\text{decision correcta}|A_k] = Pr[Re\{M_k\} < b]Pr[Im\{M_k\} < b] = (1 - Q(d/2\sigma))^2$$

De donde

$$Pr[\text{error de simbolo}|A_k] = 1 - Pr[\text{decision correcta}|A_k] = 2Q(d/2\sigma) - Q^2(d/2\sigma)$$

Entonces, 2 símbolos a distancia d y uno a distancia $\sqrt{2}d$ o, aproximando

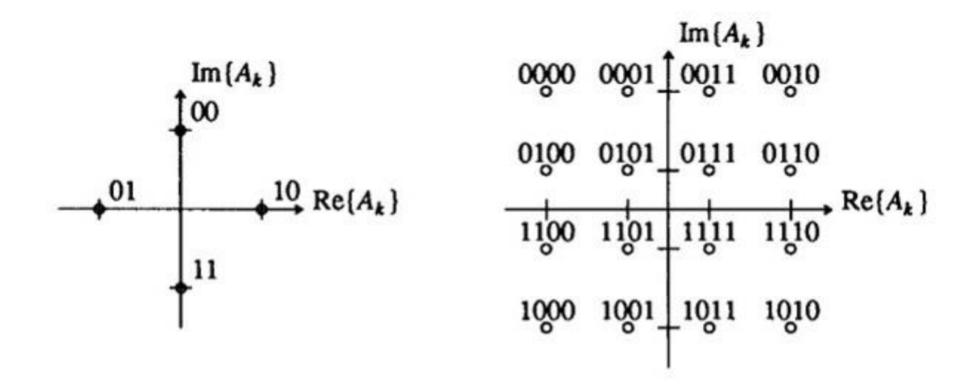
$$Pr[\text{error de simbolo}|A_k] \cong 2Q(d/2\sigma)$$

Desempeño de PAM sin ISI …

Otras medidas de error

- *Probabilidad de error de bit:* Si *M* es el número de bits/símbolo y se usa código Gray

$$Pr[\text{error de bit}] \cong \frac{1}{M} Pr[\text{error de simbolo}]$$



Las dos constelaciones tienen asociados un conjunto de bits para cada símbolo. Entre dos símbolos adyacentes solo existe un bit de diferencia. Esto minimiza el número de errores de bit por símbolo.

Desempeño de PAM sin ISI …

Otras medidas de error

Probabilidad de error de bloque: Si *B* es el número de bits por bloque y *B/M* el número de símbolos/bloque, un bloque estará correcto si

$$(1 - Pr[\text{error de simbolo}])^{B/M}$$

entonces

$$Pr[\text{Error de bloque}] = 1 - (1 - Pr[\text{error de simbolo}])^{B/M}$$

$$\cong \frac{B}{M} Pr[\text{error de simbolo}]$$

Desempeño del receptor de distancia mínima

La señal pasabanda será

$$Y(t) = \sqrt{2}Re\{s_m(t)e^{jw_c t}\} + N(t)$$

con *N(t)* ruido blanco Gaussiano real, donde $s_l(t) = \sum_{n=1}^{N} s_{l,n}\phi_n(t)$ de ancho de banda w_c .

El receptor de distancia mínima calcula

$$C_n = \int_{-\infty}^{\infty} Y(t)\sqrt{2}e^{-jw_c t}\phi_n^*(t)dt, \;\; 1 \leq n \leq N$$

y se elige l tal que

$$\min_l \sum_{n=1}^{N} |C_n - s_{l,n}|^2$$

Desempeño del receptor de distancia mínima …

Entonces, como $C_n = s_{m,n} + Z_n$

$$s_{m,n} = 2\int_{-\infty}^{\infty} Re\{s_m(t)e^{-jw_c t}\}\phi_n^*(t)dt \qquad Z_n = \sqrt{2}\int_{-\infty}^{\infty} N(t)e^{-jw_c t}\phi_n^*(t)dt$$

Es simple verificar que Z_n es circularmente simétrico (partes real e imaginaria mutuamente independientes e idénticamente distribuidas).

Entonces, usando los resultados generales, es equivalente a

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{S}_m + \boldsymbol{Z} \qquad \min_l \|\boldsymbol{C} - \boldsymbol{S}_l\|^2$$

cuyo desempeño es

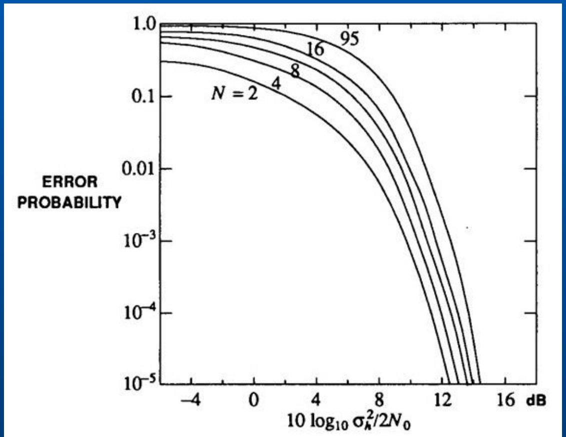
$$P_e \cong KQ(\frac{d_{\min}}{2\sigma})$$

Desempeño del receptor de distancia mínima …

PAM (pulso aislado) con filtro acoplado: $P_e \cong KQ(\frac{\sigma_h a_{\text{min}}}{2\sigma})$

Pulsos ortogonales: Para *N* señales, hay *N-1* a $d_{\text{min}} = \sqrt{2}\sigma_h$ tal que

$$P_e \cong (N-1)Q(\frac{\sqrt{2}\sigma_h}{2\sigma})$$



Para la combinación PAM / PO:

$$P_e \cong KQ(\frac{\sigma_h a_{min}}{2\sigma})$$

Desempeño en Ruido

- **Procesos Gaussianos complejos.**
- **Probabilidad de error: Resultados generales.**
- **Probabilidad de error PAM sin ISI.**
- **Desempeño de Distancia Mínima pulso aislado.**
  - **PAM; Pulsos Ortogonales (PO); Combinación PAM / PO.**
- **Desempeño de Distancia Mínima para PAM con ISI.**
- **Espectro Disperso.**
- **Capacidad y Modulación.**