

Procesamiento de Señales en Comunicaciones

Departamento de Ingeniería Eléctrica y Computadoras
Universidad Nacional del Sur

Contenidos

- **Modulación.**
- **Diseño de distancia Mínima.**
- **Desempeño en ruido.**
- **Detección.**
- **Ecualización óptima.**
- **Ecualización adaptativa.**
- **Modulación de portadoras múltiples**

Diseño de distancia mínima.

- Espacio de señales.
- Modelado de señales
- Diseño en base a distancia mínima.
- Aplicación a diferentes modulaciones
 - Pulsos aislados
 - Con ISI.
- Ancho de banda y dimensionalidad.

Diseño de distancia mínima para PAM con ISI

En este caso consideramos

$$y(t) = \sum_{k=1}^K a_k h(t - kT) + e(t)$$

donde $h(t)$ es el pulso recibido (no satisface necesariamente Nyquist), con energía σ_h^2 y $e(t)$ es ruido.

Ahora consideramos secuencias de símbolos de longitud K , $\{a_k, 1 \leq k \leq K\}$ en lugar de símbolos aislados.

Si cada símbolo es de un alfabeto de tamaño M , el tamaño de las señales será

$$L = M^K$$

La base ortogonal no es útil en este caso.

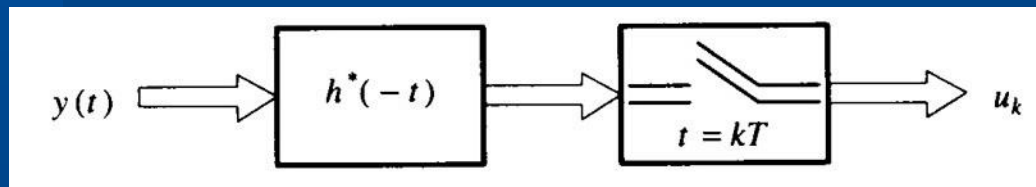
Diseño del receptor

Utilizando el criterio de distancia mínima, se obtiene

$$\max_{\{a_k, 1 \leq k \leq K\}} \left(2\operatorname{Re}\left\{ \sum_{k=1}^K u_k a_k^* \right\} - \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^K a_k a_m^* \rho_h(m-k) \right)$$

donde

$$u_k = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) h^*(t - kT) dt$$



$$y(t) \rightarrow u_k$$

Front-end del receptor de MF muestreado. Permite el mapeo del criterio continuo a uno muestreado.

Diseño del receptor

Algunas observaciones:

- Maximizar la anterior requiere repetir el cálculo para todas las posibles M^K secuencias, tal que *se detectan K símbolos simultáneamente* (no símbolo por símbolo como antes).
- Este criterio (distancia mínima) define un filtro que *no satisface Nyquist* para eliminar ISI. Compensa ISI de una forma totalmente diferente.
- Como para Nyquist el ancho de banda de señal $B \geq 1/2T$, entonces en general no se verifica el Teorema de muestreo ($f_s \geq 2B$) y se tendrá *aliasing*.
- Problemas prácticos: *alta complejidad* (implementación crece exponencialmente con K).

PAM con ISI: Criterio discreto equivalente

- Una propiedad del espectro desdoblado (folded spectrum) será de utilidad para obtener una estructura básica para el receptor de distancia mínima en el caso de considerar ISI.
- Consideramos primero un caso particular donde no existe ISI y luego el caso general.

PAM con ISI: Criterio discreto equivalente...

Caso especial: pulsos ortogonales

Se cumple Nyquist, i.e. $\rho_h(k) = \sigma_h^2 \delta_k^2$, entonces

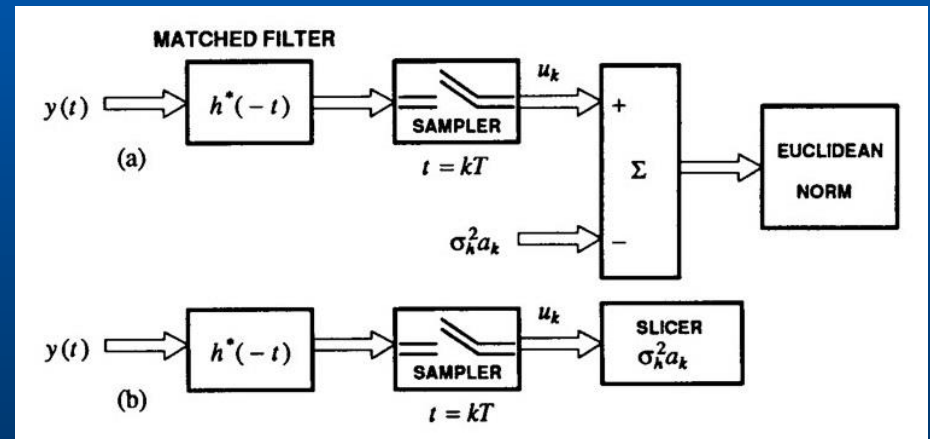
$$\max_{\{a_k, 1 \leq k \leq K\}} \left(2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^K u_k a_k^* \right\} - \sigma_h^2 \sum_{k=1}^K |a_k|^2 \right) = \max_{\{a_k, 1 \leq k \leq K\}} \sum_{k=1}^K |u_k - \sigma_h^2 a_k|^2$$

tal que a la salida del MF
muestreado es

$$u_k = \sigma_h^2 a_k + e_k$$

sin ISI.

Si la norma se toma símbolo por símbolo, el receptor se simplifica considerablemente (fig. b).



Receptor de PAM de distancia mínima cuando PAM satisface el criterio de Nyquist.; a) el receptor se aplica a cada conjunto de secuencias de símbolos; b) el caso especial donde los símbolos se eligen independientemente (detección por símbolo no la secuencia completa).

PAM con ISI: Criterio discreto equivalente...

Estructura más general que en el caso de no ISI

Ejemplo:

Para eliminar componente de cc en PAM bandabase uso de señalización Manchester: $a_k = 0$ para bit 0, $|a_k| = 1$ para bit 1, donde el signo de a_k se elige como el opuesto al del último a_k no cero.

Mientras la realización fig. b anterior viola esta regla (podría detectar 2 símbolos positivos o negativos en seguidos), la implementación adecuada es la de fig. a.

Caso de redundancia, ya que si bien la secuencia pareciera considerar 3^K secuencias, la restricción del código solo considera 2^K .

PAM con ISI: Criterio discreto equivalente ...

Caso general:

Cálculo directo impráctico porque

- La decisión para una única secuencia tiene complejidad K^2 . Para el caso ortogonal complejidad lineal (veremos que se puede extender al caso general!)
- El número total de secuencias es M^K . Solución con Algoritmo de Viterbi (más adelante).

PAM con ISI: Criterio discreto equivalente ...

Para obtener un diseño de complejidad lineal de la decisión se utilizará la **factorización espectral** del espectro desdoblado dada por

$$S_h(z) = A_h^2 G_h(z) G_h^*(1/z^*)$$

donde $G_h(z)$ es una función transferencia mónica (término de orden cero unitario) de fase mínima, y $S_h(z)$ es no negativa real sobre el círculo unitario.

En el dominio tiempo, la autocorrelación de los pulsos será

$$\rho_h(k) = A_h^2 (g_{h,k} * g_{h,-k}^*)$$

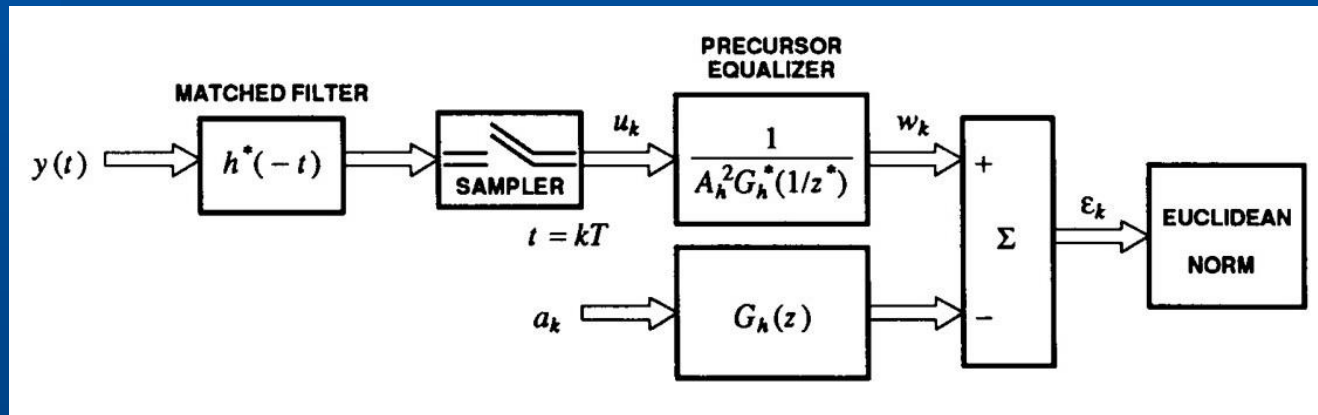
PAM con ISI: Criterio discreto equivalente ...

Para u_k la salida del MF muestreado, el *ecualizador precursor* es el filtro con esa entrada y función transferencia

$$\frac{1}{A_h^2 G_h^*(1/z^*)}$$

cuya salida es w_k , tal que el criterio ahora es

$$\max_{\{a_k, 1 \leq k \leq K\}} \sum_{m=1}^{\infty} |w_m - \sum_{k=1}^K a_k g_{h,m-k}|^2$$



Extensión del esquema anterior, donde el criterio de distancia mínima continuo muestreado se transforma en un criterio de distancia mínima discreto equivalente.

PAM con ISI: Criterio discreto equivalente ...

Observaciones:

- Este diseño es posible siempre que exista la factorización espectral del espectro desdoblado $S_h(z)$.
- Es una generalización del caso ortogonal y, si $G_h(z)$ es FIR, el cálculo de la métrica de cada secuencia tiene complejidad lineal (proporcional a K).
- Este criterio es una versión discreta equivalente del diseño continuo muestreado original.
- El ecualizador de la rama superior se denomina *precursor* porque elimina una parte de la ISI (la parte anticausal).
- En presencia de ISI ($G_h(z) \neq 1$) no es equivalente al diseño de detección símbolo por símbolo.

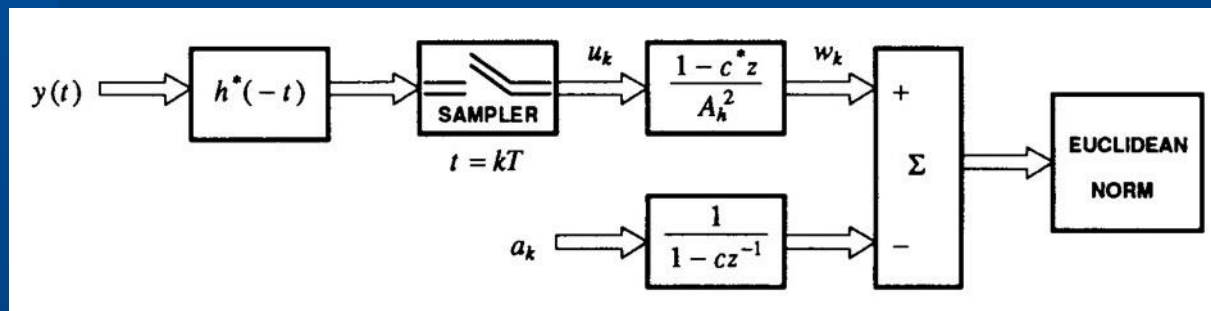
PAM con ISI: Criterio discreto equivalente ...

Como $G_h(z)$ es de fase mínima, $G_h^*(1/z^*)$ y $1/G_h^*(1/z^*)$ también. Para ser estable este filtro tiene que ser anticausal (impráctico).

Pero si es FIR (o aprox.) puede implementarse con un filtro causal y un retardo.

Ejemplo:

$$S_h(z) = \frac{A_h^2}{(1 - cz^{-1})(1 - c^*z)}, \quad |c| < 1 \quad \text{Entonces: precursor FIR anticausal}$$

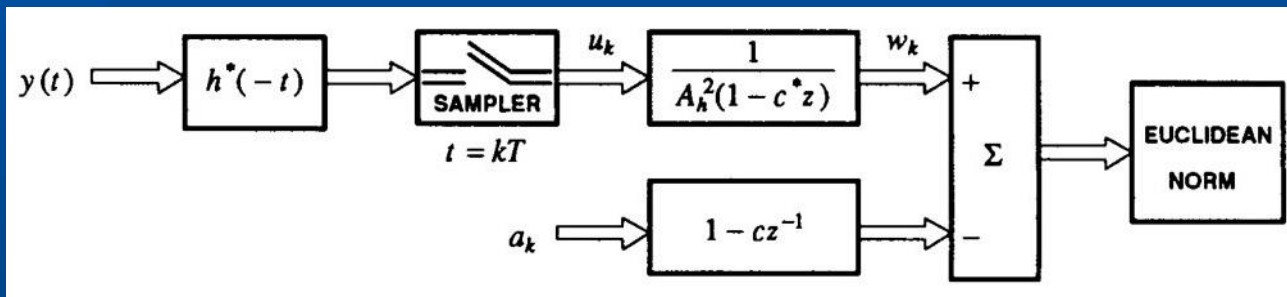


PAM con ISI: Criterio discreto equivalente ...

Ejemplo:

$$S_h(z) = A_h^2(1 - cz^{-1})(1 - c^*z), \quad |c| < 1$$

El filtro precursor es IIR anticausal, solo aproximable mediante un filtro FIR anticausal.



PAM con ISI: Criterio discreto equivalente ...

Equivalencia entre criterios:

La salida del MF muestreado se puede escribir como

$$u_k = \sum_{m=1}^K a_m \rho_h(k-m) + e_k = a_k * \rho_h(k) + e_k$$

Función transferencia $S_h(z)$

Con esta entrada al filtro precursor, la función transferencia para los símbolos queda

$$\frac{S_h(z)}{A_h^2 G_h^*(1/z^*)} = G_h(z)$$

tal que la salida es

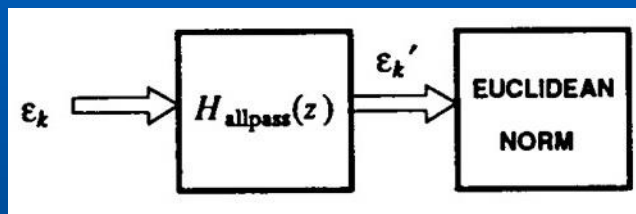
$$w_k = \sum_{m=1}^K a_m g_{h,k-m} + e'_k$$

Un filtrado causal!! (se eliminó la parte anticausal)

PAM con ISI: Criterio discreto equivalente

Solución no única del criterio discreto:

Como $S_h(z)$ puede no ser de fase mínima, si intercalamos un pasatodo $H_{allpass}(z)$



Por teorema de Parseval:

$$\sum_{m=1}^{\infty} |\epsilon_m|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} |\epsilon'_m|^2$$

por lo que desplazando el pasatodo hacia atrás en las dos ramas, la secuencia detectada será la misma. Equivalente, sin embargo ISI en general mayor! Porqué?.

PAM con ISI: Criterio discreto equivalente

Distancia mínima:

Para dos secuencias $\{\tilde{a}_k, 1 \leq k \leq K\}$ y $\{\hat{a}_k, 1 \leq k \leq K\}$ consideramos

$$\varepsilon_k = \tilde{a}_k - \hat{a}_k$$

Entonces, entre dos señales

$$d^2 = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K \varepsilon_i \varepsilon_j^* \rho_h(j-i)$$

o, en forma discreta (con $\rho_h(k) = A_h^2(g_{h,k} * g_{h,-k}^*)$) que resulta en el siguiente problema de minimización

$$d_{\min}^2 = \min_{\varepsilon_k, 1 \leq k \leq K} A_h^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{i=1}^K \varepsilon_i g_{h,k-i} \right|^2$$

Ancho de banda y dimensionalidad

Una propiedad importante de diseño de señales es la eficiencia espectral. En relación al criterio de Nyquist generalizado, se establece $B \geq N/2T$ para eliminar ISI en N pulsos ortogonales.

Se trabaja en general con un espacio de L señales de dimensión finita N .

Cual es la relación entre el ancho de banda de esta señales y la dimensión ??

Ancho de banda y dimensionalidad ...

Teorema de Landau-Pollak:

Dado un conjunto de $2Bt_0 + 1$ señales ortonormales $\phi_i(t)$, tal que para cualquier $f(t)$ con energía σ_f^2 limitada a B Hz, para cualquier constante $0 < \varepsilon < 1$, y para cualquier t_0 suficientemente grande tal que

$$\int_0^{t_0} |f(t)|^2 dt > \sigma_f^2 (1 - \varepsilon)$$

existe un conjunto de $2Bt_0 + 1$ coeficientes f_i , tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - \sum_{i=0}^{2Bt_0} f_i \phi_i(t)|^2 dt < 12\sigma_f^2 \varepsilon$$

Entonces, dimensión del espacio: $2Bt_0 + 1$

Una $f(t)$ así acotada se puede aproximar con dimensiones dadas por el teorema

Ancho de banda y dimensionalidad ...

Relación con el criterio de Nyquist generalizado:

Consideremos una secuencia de K símbolos transmitidos, y $h_n(t)$, $1 \leq n \leq N$ es un conjunto ortogonal de pulsos de ancho de banda B Hz.

Una señal PAM /PO combinada será

$$s(t) = \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{n=1}^N A_{k,n} h_n(t - kT)$$

y estará en un espacio NK -dimensional.

Puede mostrarse que está limitada en tiempo a $(0, KT)$. Entonces por el teorema puede aproximarse por $(2 B K T + 1)$ funciones ortogonales.

$$2BKT + 1 \geq NK, \quad B \geq \frac{NK-1}{2KT}$$

Entonces, si $K \rightarrow \infty$ se verifica
Nyquist generalizado $N/2T$

Ancho de banda y dimensionalidad ...

El **producto tiempo-ancho de banda** $2Bt_0$ juega un papel fundamental en señales aproximadamente limitadas en tiempo y frecuencia: a menor $2Bt_0$, mas artificial es la aproximación.

El teorema considera señales limitadas en frecuencia y aproximadamente limitadas en tiempo. El dual también es posible.

Ancho de banda y dimensionalidad ...

Ejemplo:

En DS-SS (espectro disperso de secuencia directa), $h(t)$ se modula en amplitud.

Para evitar ISI el ancho de banda debe ser mayor que $1/2T$. Pero en este caso se usa $B \gg$, ***tal que $2BT$ es muy grande.***

Entonces, $h(t)$ muy precisamente limitada en tiempo, ISI normalmente no es un problema.

Ancho de banda y dimensionalidad ...

Ejemplo:

En modulación de pulsos ortogonales (ej. FSK).

Para satisfacer Nyquist generalizado $2BT > N$.

Si N es grande entonces los pulsos van a estar confinados a T (menos susceptible a ISI).

Aunque no es una premisa de esta modulación es una ventaja.

Ancho de banda y dimensionalidad ...

Ejemplo:

En modulación multiportadora, cuando la dimensionalidad del conjunto de señales aumenta, B se mantiene constante pero aumenta T .

La clave es la eficiencia espectral aproximadamente constante. Por Nyquist $N = 2BT$, tal que aumentando T , aumenta N .

Entonces, también a mayor N , mas limitado a T queda el símbolo (con el prefijo cíclico, la ISI se elimina totalmente).

Diseño de distancia mínima (resumen).

- Espacio de señales.
- Modelado de señales
- Diseño en base a distancia mínima.
- Aplicación a diferentes modulaciones
 - Pulsos aislados
 - Con ISI.
- Ancho de banda y dimensionalidad.