Procesamiento de Señales en Comunicaciones

Departamento de Ingeniería Eléctrica y Computadoras
Universidad Nacional del Sur

Contenidos

- Modulación.
- Diseño de Distancia Mínima.
- Desempeño en ruido.
- Detección.
- Ecualización óptima.
- Ecualización adaptativa.
- Modulación de portadoras múltiples

Modulación

- Introducción.
- PAM bandabase
  - Criterio de Nyquist.
- PAM pasabanda.
- Filtro acoplado
  - espectro disperso
- Modulación de pulsos ortogonales
  - Criterio de Nyquist generalizado.
- Combinación PAM y pulsos ortogonales
  - Modulación Multiportadora.
  - CDMA.

Modulación de Pulsos Ortogonales

- En PAM se tenía que

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k g(t - kT)$$

- Ahora, con diferentes señales $\{g_n(t); 0 \leq n \leq N-1\}$, tal que la representación bandabase será

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_{A_k}(t - kT) \qquad\qquad A_k \in (0, N-1)$$

con $\int_{-\infty}^{\infty} g_i(t) g_j^*(t) dt = \sigma_g^2 \delta_{i-j}$ esto define la modulación de pulsos ortogonales

- Con los pulsos pasabanda equivalentes

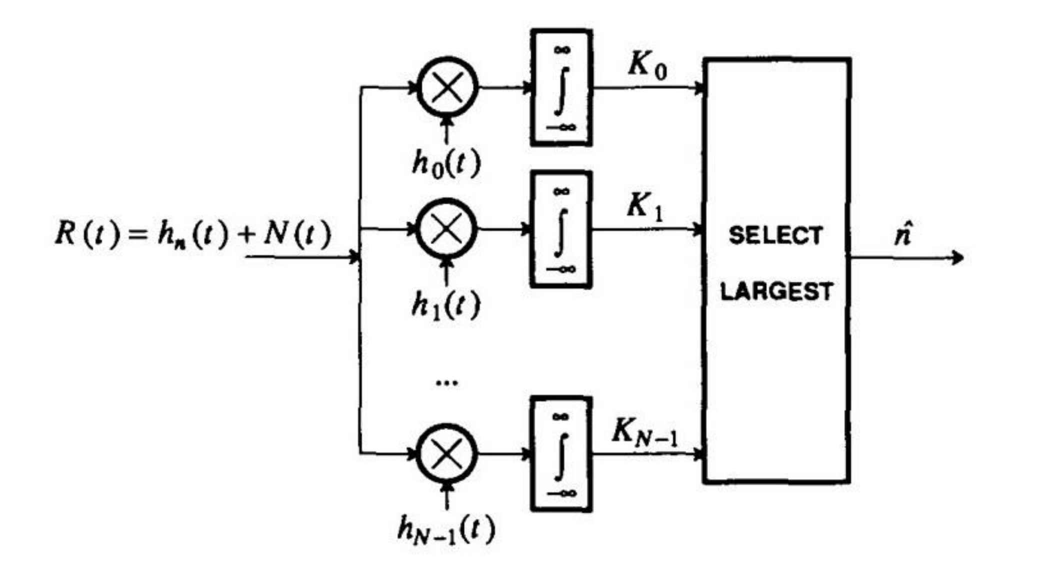
$$\hat{g}_n(t) = \sqrt{2}\mathrm{Re}\{e^{jw_c t} g_n(t)\}$$

la representación pasabanda será

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{g}_{A_k}(t - kT)$$

Modulación de Pulsos Ortogonales (cont.)

- Para el caso bandabase y un símbolo aislado



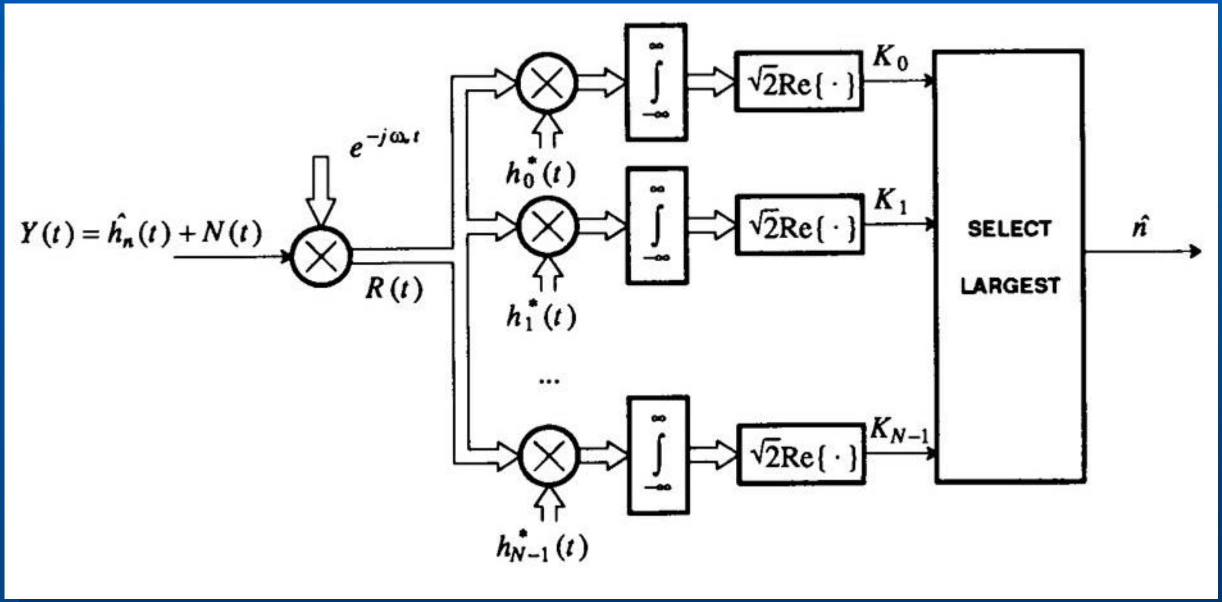
Receptor correlador para un símbolo (pulso) aislado para transmisión bandabase donde los pulsos recibidos se suponen reales y ortogonales.

Notar que interesa distinguir la *forma* de los pulsos en el intervalo de símbolo, no sus amplitudes.

Modulación de Pulsos Ortogonales (cont.)

- Para el caso pasabanda, y usando el modelo de pulsos pasabanda equivalente,

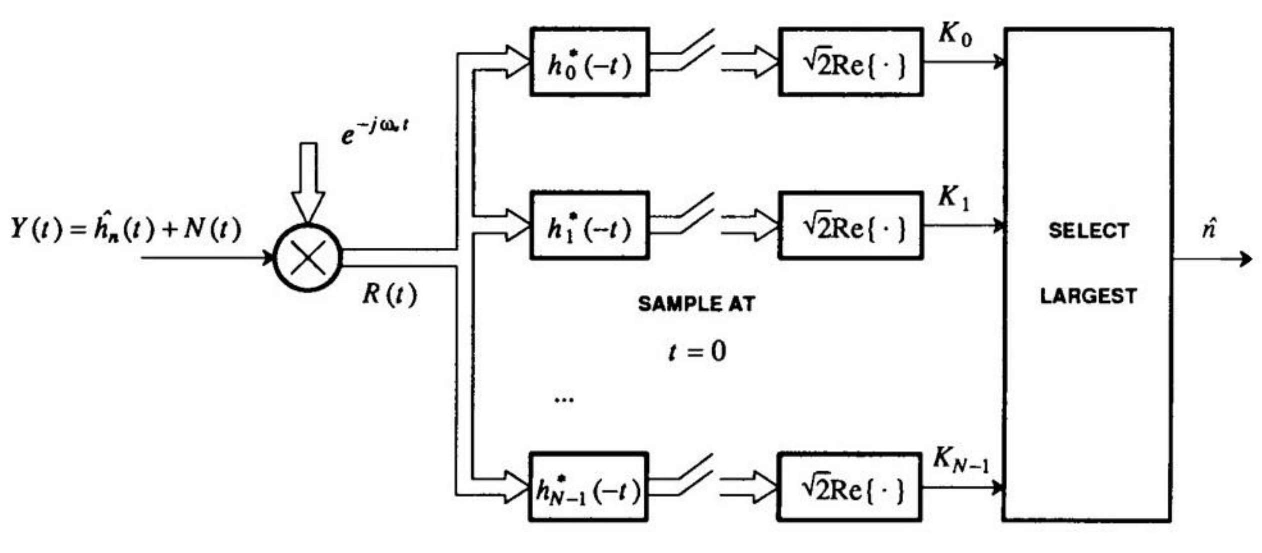
$$\hat{h}_n(t) = \sqrt{2}\mathrm{Re}\{e^{jw_ct}h_n(t)\}$$



Receptor correlador para modulación de pulsos ortogonales pasabanda usando los pulsos bandabase

Modulación de Pulsos Ortogonales (cont.)

- Teniendo en cuenta filtros acoplados,



Receptor de filtro acoplado (MF) para transmisión de pulsos ortogonales de un pulso aislado, usando pulsos bandabase equivalentes

Criterio de Nyquist generalizado

- Para evitar ISI, la salida de los filtros acoplados a una entrada $h_n(t)$, debe satisfacer Nyquist, i.e.,

$$h_n(t) * h_n^*(-t)|_{t=kT} = \delta_k, \quad 0 \leq n \leq N-1$$

- Además, para evitar interferencia entre pulsos

$$h_n(t) * h_l^*(-t)|_{t=kT} = 0, \;\; l \neq n, \;\; -\infty \leq k \leq \infty$$

o, sintetizando

$$h_n(t) * h_l^*(-t)|_{t=kT} = \delta_k \delta_{l-n}$$

- y en el dominio frecuencia

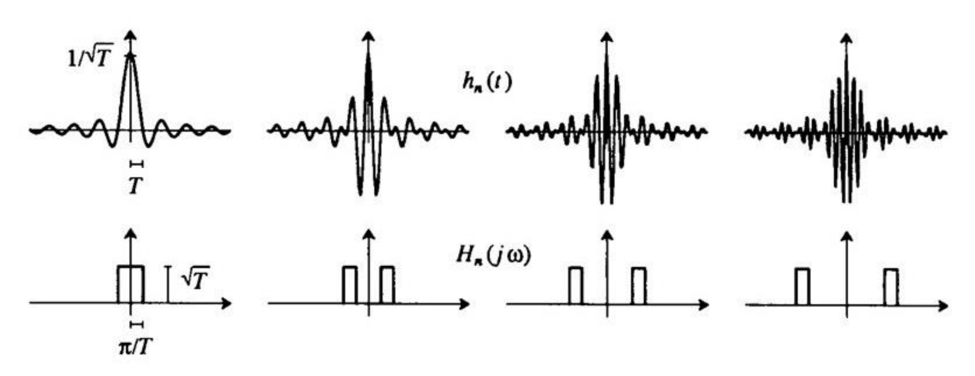
$$\frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} H_n(j(w + m\frac{2\pi}{T}))H_l^*(j(w + m\frac{2\pi}{T})) = \delta_{l-n}$$

Criterio de Nyquist Generalizado $B \geq \frac{N\pi}{T}$

Criterio de Nyquist generalizado (cont.)

Ejemplo: “Sincs” no solapadas en frecuencia (idealización)

$$h_n(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \left[\frac{\sin(\pi t/2T)}{\pi t/2T} \right] \cos \left[(n + 1/2) \frac{\pi}{T} t \right]$$



Pulsos en el dominio tiempo y frecuencia que satisfacen el criterio de Nyquist generalizado

Eficiencia espectral:

$$\nu = \frac{\log_2 N}{T\dot{(}N/2T)} = 2\frac{\log_2 N}{N}$$

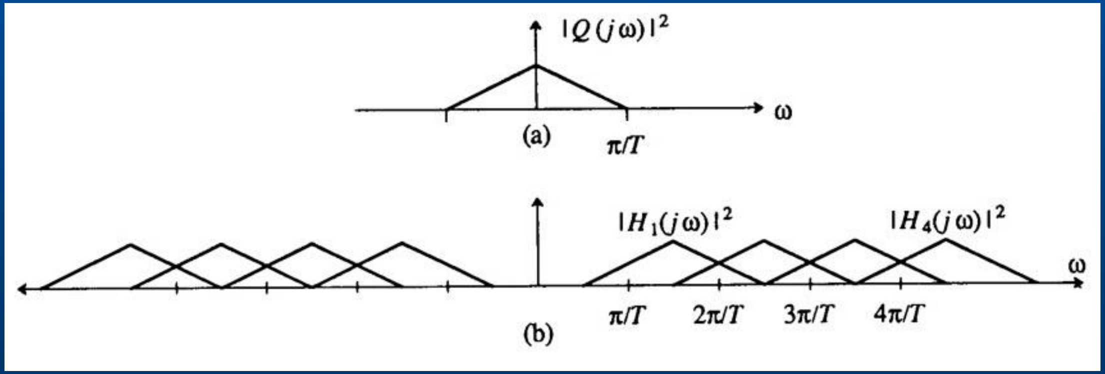
disminuye con N !!

Criterio de Nyquist generalizado (cont.)

- Conjunto de pulsos ortogonales realizable,
- $q(t)$ tal que $\int_{-\infty}^{\infty} q(t)q(t-2kT)dt = \delta_k$ (ancho de banda mínimo $\pi/2T$, dos veces Nyquist, lo mismo que coseno elevado).
- Entonces,

$$h_n(t) = q(t)\cos[(n+1/2)\pi t/T]$$

- Ancho de banda total $(N+1)\pi/T$



a) La TF del pulso a la salida del MF satisface el criterio de Nyquist para la tasa de símbolos 1/2T; b) el módulo de las replicas satisfacen el criterio generalizado pero ahora se superponen en frecuencia.

FSK

- Las soluciones anteriores requieren pulsos estrictamente limitados en frecuencia. Si se usan pulsos ortogonales pero sin limitaciones en frecuencia: FSK.

- M frecuencias con forma de pulsos, ortogonales si pulsos con frecuencia de un número entero de ciclos/símbolo.

- Ventajas:

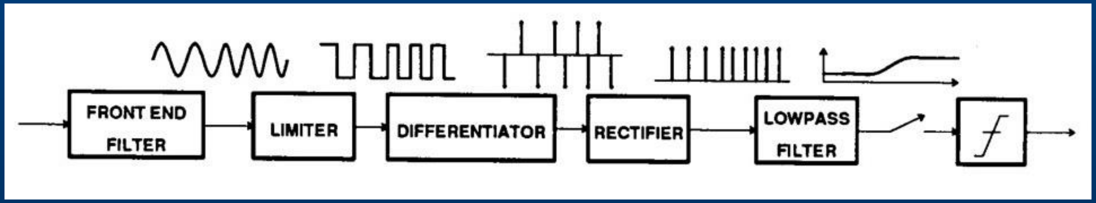
  Detección no coherente. Implementación simple!

  Inmunidad a no linealidades.
- Desventajas:

  Menor distancia mínima en constelación.

  Difícil ecualización. Análisis complicado.

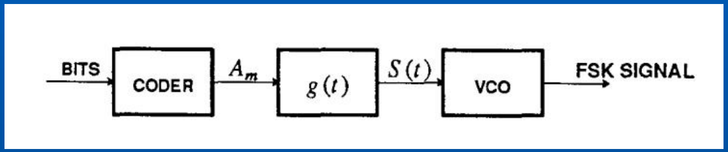
- Receptor de FSK binaria



Un detector de cruces por cero para FSK binaria con las formas de onda asociadas.

FSK (cont.)

- **FSK de fase continua**: separación mínima en frecuencia $2\pi/T$ con un número de ciclos $\frac{w_i T}{2\pi} = M_i$, para M_i entero.



Transmisor FSK de fase continua en base a VCO (usa como entrada PAM).

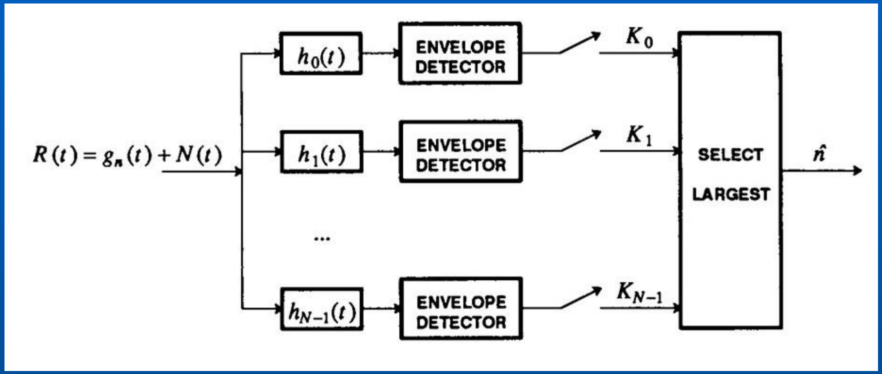
- **MSK**: ídem anterior pero con memoria de forma que separación mínima π/T. Tiene mejor desempeño que FSK.

  Puede interpretarse como PAM combinada con pulsos ortogonales (no es de pulsos ortogonales).

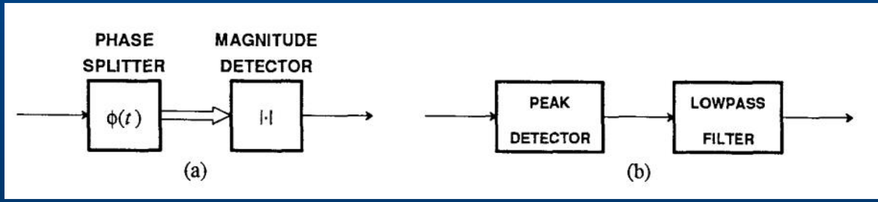
Porque no combinar (en general) PAM y pulsos ortogonales !?

FSK no coherente

- Implementación simple



Receptor no coherente para una señal FSK de un símbolo aislado. Los filtros $h_i(t)$ son pasabanda centrados en las frecuencias de señalización.

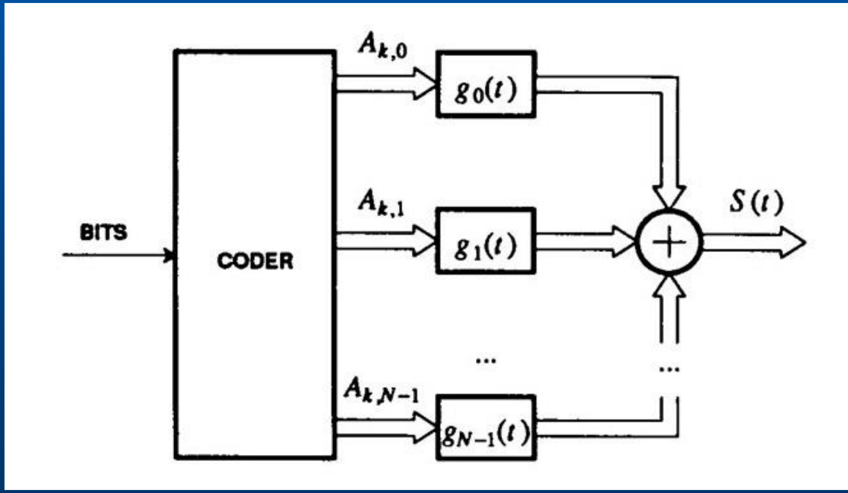


a) Detector de envolvente ideal que usa un divisor de fase para obtener una señal compleja. El valor absoluto de la salida es la amplitud de la sinusoidal de entrada; b) Detector de envolvente aproximado usando un detector de pico y un filtro pasabajos.

Combinación de PAM y Pulsos Ortogonales

- Con *N* pulsos $g_n(t)$, y *M* símbolos $A_{k,n}$ la señal bandabase será

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{N-1} A_{k,n} g_n(t - kT) \qquad x(t) = \sqrt{2}\mathrm{Re}\{e^{jw_c t} s(t)\}$$



Transmisor para combinación PAM /PO. En cada intervalo *T*, se transmiten *N* pulsos asociados a *N* símbolos diferentes.

Combinación de PAM y Pulsos Ortogonales (cont.)

- Casos especiales:
  - PAM es un caso especial para *N*=1.
  - Pulsos ortogonales es otro caso especial si $A_{k,n}$ toman valores 0 o 1 para definir el conjunto de señales ortogonales.
  - MSK es también un caso especial, *N*=2, con modulación de amplitud por símbolos +/- 1 y 0.

- Si *N* es grande y los símbolos son aleatorios entonces la señal modulada se aproximará a un proceso Gaussiano (por el Teorema del Límite Central).

  Desventaja de PAM / PO: PAPR (relación de potencia promedio a pico) mayor que con otras modulaciones (ineficiente amplificación), pero conseguiría aproximarse a la capacidad de Shannon.

Combinación de PAM y Pulsos Ortogonales (cont.)

- El número máximo de pulsos ortogonales es *N*= *2BT* (Nyquist generalizado B mínimo es *N/2T*). Dos formas de aumentar *N* (mayor información):

  Incrementar T, entonces: modulación multiportadora (B constante)

  Incrementar B, entonces: CDMA (*T* constante.)

- Eficiencia espectral es independiente de *N*. Si $A_{k,n}$ puede tomar 1 de M^N valores,

$$\nu = \frac{\log_2 M^N}{BT} = 2\log_2 M \quad (B = N/2T)$$

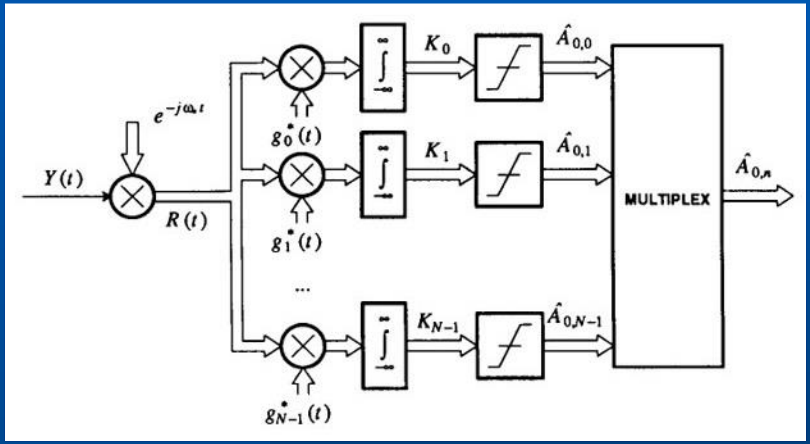
equivalente a PAM para el mismo tamaño de constelación *M* e independiente de *N*.

Combinación de PAM y Pulsos Ortogonales (cont.)

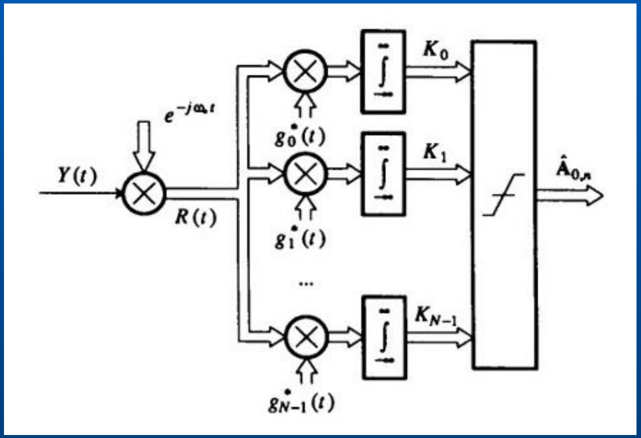
- Como eficiencia espectral es independiente de *N*: formas de aumentar *N*
  - Aumento del intervalo de símbolo *T.* Dos formas de elegir pulsos ortogonales:
    - manteniendo *B* fija para todos los pulsos: Espectro Disperso de Secuencia Directa (DS-SS).
    - Cada pulso con ancho de banda *1/2T* en diferentes frecuencias: Modulación Multiportadora.
  - Aumento del ancho de banda *B.*
    - En lugar de Multiplexado por División en Frecuencia (FDM) en acceso múltiple por radio, Acceso Múltiple por División de Códigos (CDMA). Ortogonalidad mantenida por técnicas de SS.

Combinación de PAM y Pulsos Ortogonales

Receptor Correlador (implementación continua)



Considerando 1 de N como símbolos independientes en un intervalo, entonces decisiones escalares independientes.



Considerando los N símbolos simultáneamente, entonces decisiones sobre un vector

Combinación de PAM y Pulsos Ortogonales (cont.)

Implementación discreta: uso del canal discreto equivalente, con un pulso aislado

$$s_k = \sum_{n=0}^{N-1} A_{0,n} g_k^{(n)}$$

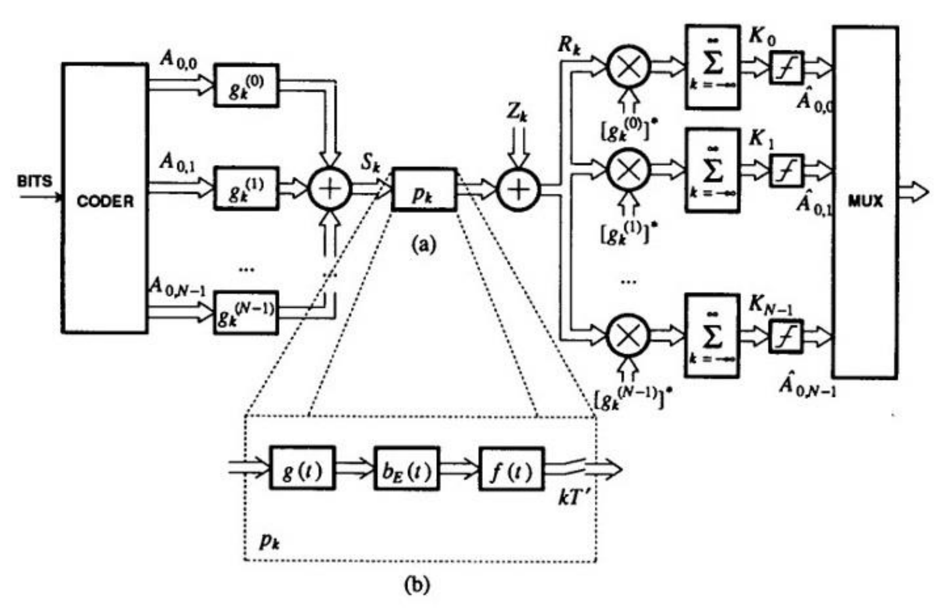
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k^{(n)} [g_k^{(m)}]^* = \delta_{n-m}$$

que se limita a *N* vectores *K* dimensionales (normalmente *K*=*N*)

En general, la secuencia de pulsos será

$$s_k = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{N-1} A_{mN,n} g_{k-mN}^{(n)}$$

$A_{mN,n}$ implica que la velocidad de muestreo es N veces la tasa de símbolos (i.e., se tienen N muestras - símbolos en T). Entonces $T_m = T/N$



a) la combinación se implementa en tiempo discreto y se transmite sobre un canal discreto equivalente. Válido para un símbolo aislado;
b) el canal discreto equivalente puede modelarse por: filtro de transmisión, canal bandabase equivalente, ruido bandabase equivalente, filtro de recepción y muestreo.

Modulación Multiportadora

Consideremos la combinación PAM / PO con

$$g_n(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{jw_n t} u(t)$$

donde $w_n = \frac{2\pi n}{T}$; para $n = 0, \cdots, N-1$ y

$$u(t) = \begin{cases} 1; & 0 \leq t < T \\ 0; & \forall t \end{cases}$$

denominada *Modulación Multitono o Multiportadora* (idealizado por la ventana rectangular)

Modulación Multiportadora (cont.):

Consideremos una versión discreta de la modulación multiportadora: Modulación Multitonos Discreta (DMT), con

$$g_k^{(n)} = \frac{1}{N} e^{j2\pi nk/N} u_k \text{ para } n = 0, \cdots, N-1$$

donde

$$u_k = \begin{cases} 1; & 0 \leq k < N \\ 0; & \forall k \end{cases}$$

entonces, para un símbolo aislado se tiene

$$s_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} A_{0,n} e^{j2\pi nk/N} u_k$$

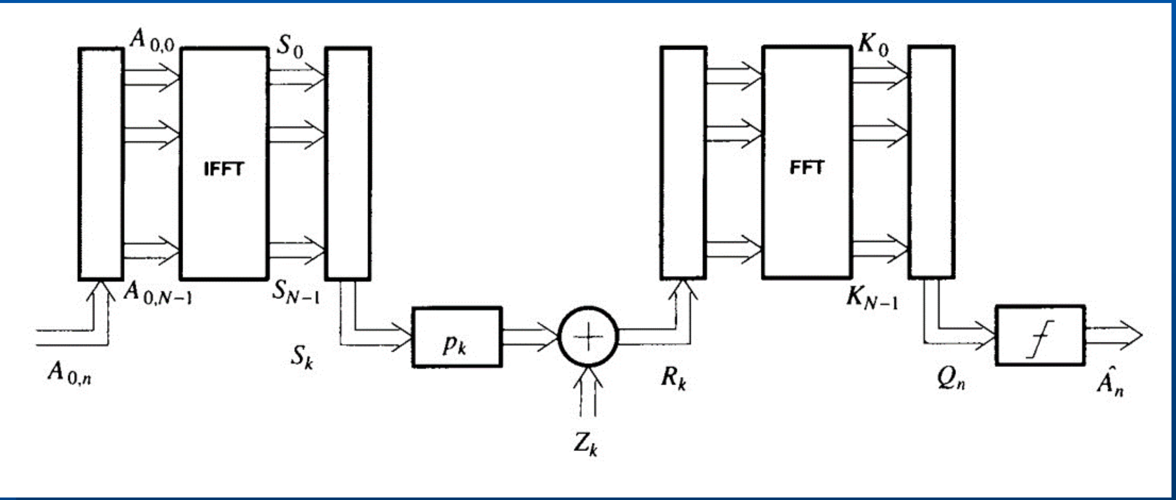
que resulta la DFT inversa (de orden *N*) de $A_{0,k}$, calculable con FFT.

Modulación Multiportadora (cont.):

Suponiendo que ***no existe ISI** (símbolo aislado)*, en el receptor se tiene: $r_k = s_k + z_k \;\; (p_k = \delta_k)$
tal que

$$K_i = \sum_{k=0}^{N-1} r_k e^{j2\pi ik/N}$$

es la DFT de la señal recibida.



Modulación multiportadoras usando FFT para un pulso aislado. Los bloques de I/O de las FFT son conversores serie – paralelo y viceversa. Se incluye el modelo de canal discreto equivalente.

Modulación Multiportadora (cont.):

En base a:

$$s_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} A_{0,n} e^{j2\pi nk/N} u_k$$

- El espectro de potencia de la señal DMT puede controlarse dinámicamente escalando cada subportadora. Esto permite aproximarse a la capacidad de un canal.

- Es razonable ajustar dinámicamente el tamaño de la constelación de cada subportadora cuando el canal cambia en el tiempo. Si, por ejemplo, se tiene una atenuación pronunciada, debido al desvanecimiento multicamino en un canal selectivo en frecuencia, es posible asignar a esa subportadora una constelación de baja dimensionalidad o simplemente evitar su uso.

Modulación Multiportadora (cont.)

Multiportadora e ISI

Asumimos ahora $p_k \neq \delta_k$(0 fuera de $0 \leq k < M$, $M \leq N$, M entero) y $z_k \cong 0$

Entonces, $R(e^{jwT'}) = S(e^{jwT'})P(e^{jwT'})$ donde $T' = T/N$ es

el intervalo para transmitir secuencialmente s_k .

Si *M* es tal que un intervalo de símbolo $NT' = T$ es más largo que la respuesta impulsiva del canal, entonces en tiempo: convolución

$$r_k = \sum_{i=0}^{N-1} p_i s_{k-i}$$ cuya DTFT es $R(e^{jwT'})$

Modulación Multiportadora e ISI (cont.)

Como a partir del esquema eficiente (con FFTs) se genera una *convolución circular* (no una lineal como la anterior)

$$u_k = \sum_{i=0}^{N-1} p_i s_{(k-i)\ mod\ N}$$

en el dominio frecuencia será $U_n = A_{0,n} P_n$, donde $A_{0,n}$ es la DFT (no la DTFT) de s_k y

$$P_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} p_k e^{j2\pi nk/N} u_k$$

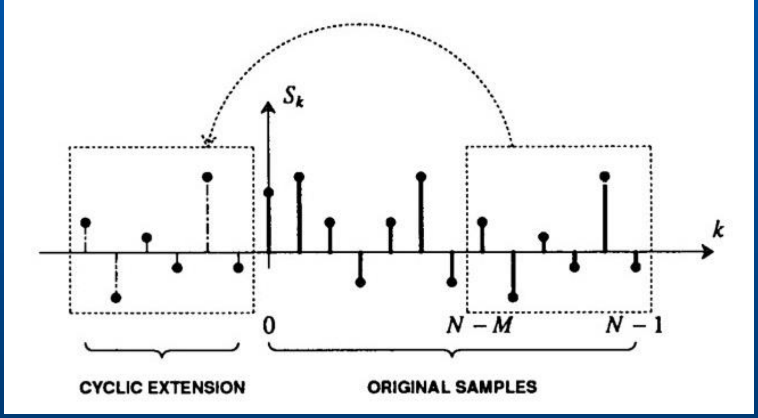
Entonces, es necesario compatibilizar convolución circular (eficiente de obtener) con convolución lineal para evitar ISI !!

Modulación Multiportadora e ISI (cont.)

Solución: introducir, previo a los *N* símbolos s_k , *M* símbolos redundantes

$$s_{-i} = s_{N-i} \text{ para } 1 \leq i \leq M$$

denominada *extensión cíclica o prefijo cíclico.*



La extensión cíclica de las muestras s_k simplifica el efecto dispersivo del canal sobre la variable de decisión

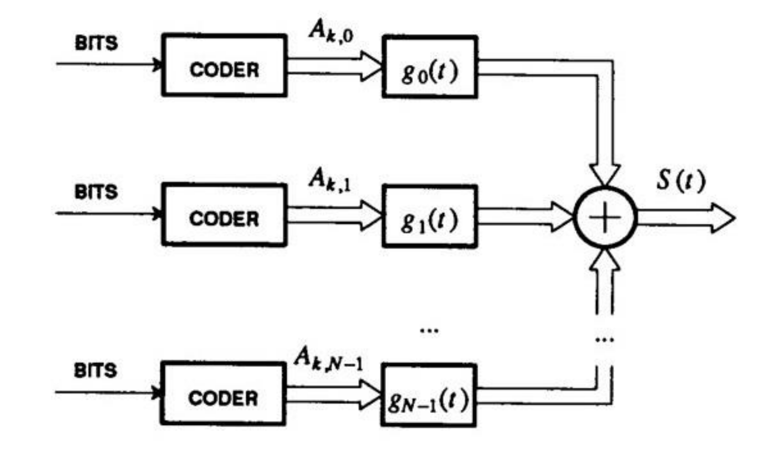
$$K_n = A_{0,n} P_n$$

CDMA

La combinación PAM / PO se puede re-escribir como

$$s(t) = \sum_{n=0}^{N-1} u_n(t) \qquad u_n(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{k,n} g_n(t - kT)$$

donde $g_n(t)$ (ortogonales) tienen ancho de banda $|w| \leq N\pi/T$



Las *N* secuencias de bits comparten el mismo canal usando *N* pulsos $g_i(t)$ ortogonales. Transmisor – receptor comparten solo uno de esos pulsos.

CDMA

Ejemplos:

- Si los pulsos son sinusoides de diferente frecuencia, entonces el esquema de acceso múltiple se denomina Acceso Múltiple por División de Frecuencias (FDMA).

- Si se eligen pulsos que ocupen toda la banda $|w| \leq N\pi/T$, el esquema de acceso múltiple se denomina Acceso Múltiple por División de Códigos (CDMA).

Modulación (resumen)

- Introducción.
- PAM bandabase
  - Criterio de Nyquist.
- PAM pasabanda.
- Filtro acoplado
  - espectro disperso
- Modulación de pulsos ortogonales
  - Criterio de Nyquist generalizado.
- Combinación PAM y pulsos ortogonales
  - Modulación Multiportadora.
  - CDMA.