

# Procesamiento de Señales en Comunicaciones

Departamento de Ingeniería Eléctrica y Computadoras  
Universidad Nacional del Sur

# Contenidos

- **Modulación.**
- **Diseño de Distancia Mínima.**
- **Desempeño en ruido.**
- **Detección.**
- **Ecualización óptima.**
- **Ecualización adaptativa.**
- **Modulación de portadoras múltiples**

# Ecualización Adaptativa

- Ecualizadores de complejidad reducida.
- Ecualizador lineal adaptativo.
- DFE adaptativo.
- Ecualizador de espaciamiento fraccionario.
- Ecualización pasabanda.

## Ecualización lineal adaptativa

Como en general, en varios canales reales, no se conoce *a priori* la función autocorrelación, el algoritmo SD no es directamente aplicable. Esto puede solucionarse utilizando una aproximación.

En el SD, en lugar de usar el gradiente del MSE, se utiliza el *gradiente del valor instantáneo* del error cuadrático (un estimador no sesgado del MSE): algoritmo *Least - Mean - Squares* (LMS).

$$|E_k|^2 = |A_k|^2 - 2\text{Re}\{A_k \mathbf{c}^H \mathbf{r}_k^*\} + \mathbf{c}^H \mathbf{r}_k^* \mathbf{r}_k^T \mathbf{c}$$

Entonces,

$$\nabla_{\mathbf{c}} |e_k|^2 = -2\mathbf{r}_k^* (A_k - \mathbf{r}_k^T \mathbf{c}) = -2e_k \mathbf{r}_k^*$$

tal que

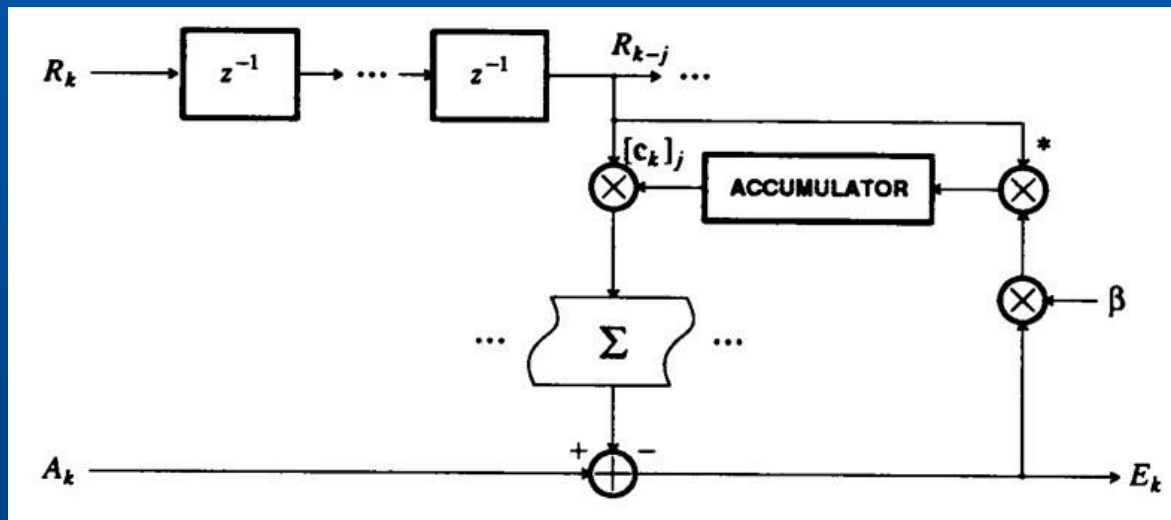
$$\mathbf{c}_{k+1} = \mathbf{c}_k - \frac{\beta}{2} \nabla_{\mathbf{c}} |e_k|^2 \Big|_{\mathbf{c}=\mathbf{c}_k} = \mathbf{c}_k + \beta e_k \mathbf{r}_k^*$$

Aquí,  $k$  corresponde al índice muestra (en lugar de la iteración como en el caso del SD).

# Ecualización Lineal Adaptativa

Considerando cada coeficiente de un LE,

$$[c_{k+1}]_j = [c_k]_j + \beta e_k r_{k-j}^* \quad -L \leq j \leq L$$



Algoritmo LMS para un coeficiente. Las señales asociadas serán en general complejas.

## Ecualización lineal adaptativa ...

### Convergencia del algoritmo LMS.

A diferencia del SD (donde la trayectoria de cada coeficientes es determinística), el LMS tiene trayectorias de los coeficientes estocásticas.

Una forma de analizar la convergencia es suponer una entrada estacionaria (usualmente no realista). De esta forma tiene estadística conocida y el algoritmo se puede estudiar en relación al SD.

Cuando la entrada es estacionaria y  $\beta$  es pequeño, la trayectoria de los coeficientes variará lentamente. En cambio, la entrada variará rápidamente en relación a los coeficientes.

## Ecualización lineal adaptativa ...

Entonces, partiendo de

$$\mathbf{c}_{k+1} = \mathbf{c}_k + \beta e_k \mathbf{r}_k^* = [\mathbf{I} - \beta \mathbf{r}_k^* \mathbf{r}_k^T] \mathbf{c}_k + \beta A_k \mathbf{r}_k^*$$

Y promediando respecto a la estadística de  $\mathbf{r}_k$  se tiene

$$\mathbf{c}_{k+1} = E[(\mathbf{I} - \beta \mathbf{r}_k^* \mathbf{r}_k^T) \mathbf{c}_k] + \beta E[A_k \mathbf{r}_k^*] \cong (\mathbf{I} - \beta \Phi) \mathbf{c}_k + \beta \boldsymbol{\alpha}$$

El comportamiento medio de las trayectorias se obtiene entonces de

$$E[\mathbf{c}_{k+1}] \cong (\mathbf{I} - \beta \Phi) E[\mathbf{c}_k] + \beta \boldsymbol{\alpha}$$

que es análoga a la del algoritmo SD.

Notar que esto no implica que las trayectorias converjan a un punto óptimo (mas bien convergen a una región óptima).

## Ecualización lineal adaptativa ...

Para analizar la variación del vector de coeficientes alrededor del óptimo, consideremos (transformación de coordenadas)  $\mathbf{q}_k = \mathbf{c}_k - \mathbf{c}_{opt}$

$$E[|e_k|^2] \cong \xi_{\min} + E[\mathbf{q}_k^H \Phi \mathbf{q}_k]$$

Especializando el análisis para una entrada no correlacionada de media cero, i.e.,  $\Phi = \mathbf{I}$ ,  $\phi_0 = E[|r_k|^2]$ .

Entonces, se tiene que

$$E[|e_k^2|] = \xi_{\min} + \phi_0 E[\|\mathbf{q}_k\|^2]$$

que relaciona las dos medidas de desempeño del algoritmo (varianza de los coeficientes y varianza del error).



## Ecualización lineal adaptativa ...

Se puede mostrar que

$$E[\|\mathbf{q}_{k+1}\|^2] = \gamma E[\|\mathbf{q}_k\|^2] + \beta^2 N \phi_0 \xi_{\min}, \quad \gamma = 1 - 2\beta\phi_0 + \beta^2 N \phi_0^2$$

Existe un único modo por la suposición de entrada blanca.

La condición de estabilidad es  $|\gamma| < 1$ , tal que  $\beta_{opt} = 1/N\phi_0$  determina la máxima velocidad de convergencia, de donde

$$0 < \beta < \frac{2}{N\phi_0} = 2\beta_{opt}$$

en general mas restrictiva que la obtenida para la convergencia del vector de coeficientes promedio ( $2/\lambda_{max}$ ).

## Ecualización lineal adaptativa ...

Como la convergencia es de un solo modo (exponencial) es conveniente definir una constante de tiempo, requerida para disminuir el MSE en un factor  $e^{-1}$ .

Con  $\gamma^T = 1/e$ , se tiene que  $\tau \cong 1/2\beta\phi_0$ .

Entonces para  $\beta_{opt}$ ,  $\tau \cong N/2$

Como conclusión, *la mayor velocidad de convergencia depende del número de coeficientes del filtro* (mayor complejidad, mas lento el algoritmo).

## Ecualización lineal adaptativa ...

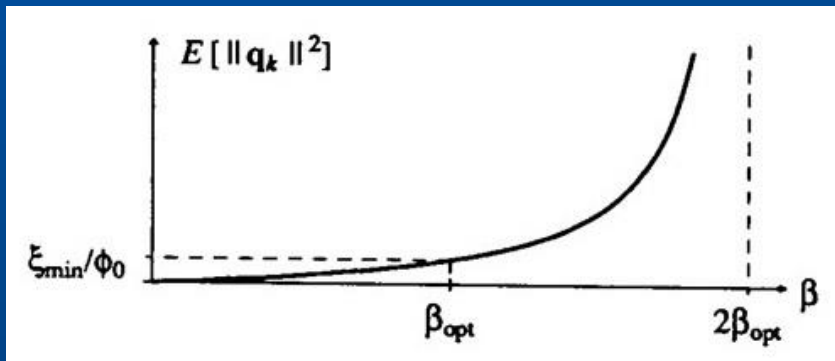
La varianza del error en los coeficientes después de la convergencia será

$$E[\|\mathbf{q}_k\|^2] \rightarrow \frac{N\beta}{2 - N\beta\phi_0} \xi_{\min}, \quad \text{para } k \rightarrow \infty$$

tal que para  $\beta_{opt}$ ,

$$E[\|\mathbf{q}_k\|^2] \rightarrow \frac{1}{\phi_0} \xi_{\min}$$

$$E[|e_k|^2] \rightarrow \xi_{\min} + \xi_{\min}$$



Existe un compromiso entre velocidad de convergencia y MSE asintótico. El menor  $\beta$  generalmente está limitado por la precisión de la aritmética digital utilizada.

Promedio asintótico de la norma cuadrática del vector de coeficientes del filtro después de la convergencia.

## Ecualización lineal adaptativa ...

### Normalización del tamaño del paso.

El algoritmo LMS depende de la potencia de la señal de entrada (esto se deduce, por ejemplo, a partir del  $\beta_{opt}$  ).

Esta dependencia puede reducirse considerando ( $a$  y  $b$  constantes):

$$\beta_k = \frac{a}{\sigma_k^2 + b}$$

La potencia promedio se puede estimar por (  $(1 - \alpha)$  normalización de la estimación de la potencia de la señal de entrada)

$$\sigma_k^2 = (1 - \alpha) \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j |r_{k-j}|^2$$

O, en forma recursiva

$$\sigma_k^2 = \alpha \sigma_{k-1}^2 + (1 - \alpha) |r_k|^2$$

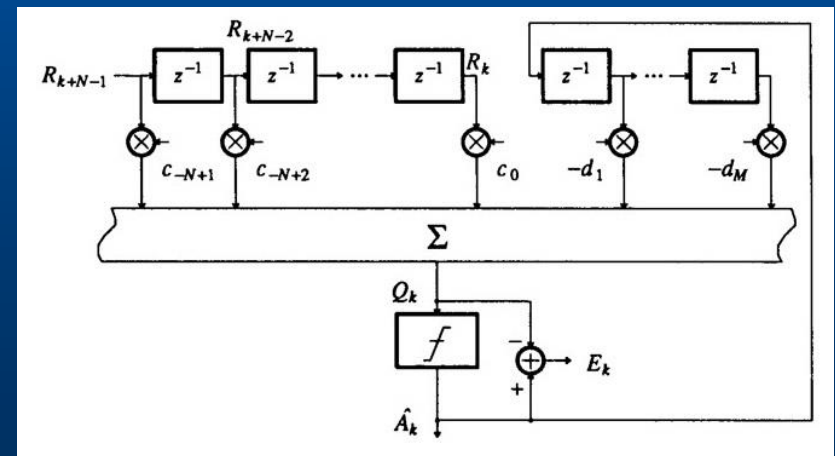
## DFE adaptativo

Es esencialmente el mismo esquema que para el LE, excepto que es necesario el filtro postcursor, tal que la entrada al elemento de decisión será:

$$Q_k = \sum_{i=-(N-1)}^0 c_i r_{k-i} - \sum_{i=1}^M d_i \hat{A}_{k-i}$$

Los coeficientes postcursor DFE serán diferentes a los del LE porque la entrada no está filtrada por el canal. Los coeficientes precursor DFE son diferentes a los del LE porque los postcursor DFE no generan amplificación de ruido, por lo que existirá mayor grado de libertad en su elección.

Estructura de DFE para filtros precursor y postcursor FIR. Las señales serán en general complejas.

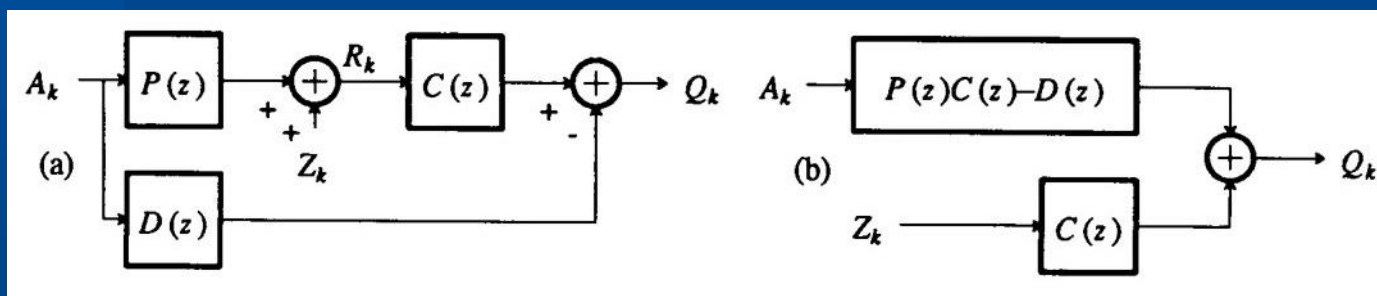


## DFE adaptativo ...

### Solución de MSE

Se obtendrá la solución para minimizar  $E[|e_k|^2]$  ahora con precursor y postcursor de complejidad reducida.

Existen dos términos en el modelo equivalente: uno asociado al ruido, el otro a la ISI. En este último término, es más simple obtener primero los coeficientes del postcursor.



a) Canal equivalente, ecualizador precursor y postcursor suponiendo que no existen errores; b) Simplificación después de combinar filtros.

## DFE adaptativo ...

### Solución de MSE

El término de ISI tiene la forma:  $\sum_m \nu_m A_{k-m}$ , donde

$$\nu_k = \begin{cases} \sum_{i=-(N-1)}^0 c_i p_{k-i} - d_k, & 1 \leq k \leq M \\ \sum_{i=-(N-1)}^0 c_i p_{k-i}, & \text{para todo otro } k \end{cases}$$

Si los símbolos no están correlacionados, el MSE se minimiza eligiendo  $D(z)$  para eliminar las primeras  $M$  muestras de ISI, i.e., forzar  $\nu_k = 0$ ,  $1 \leq m \leq M$ . Entonces

$$d_m = \sum_{i=-(N-1)}^0 c_i p_{m-i}, \quad 1 \leq m \leq M$$

Con los coeficientes postcursor, se sustituye esta solución en la ecuación anterior y se minimiza el MSE para obtener los coeficientes precursor  $c_k$ .

## DFE adaptativo ...

### Solución de MSE

Es posible verificar que si los símbolos no están correlacionados, tienen media cero y varianza  $\sigma_a^2$ , los coeficientes óptimos del precursor satisfacen

$$\mathbf{c}_{opt} = \Phi^{-1} \boldsymbol{\alpha}$$

donde

$$\mathbf{c}^T = [c_{-(N-1)} \cdots c_0] \quad \boldsymbol{\alpha}^T = \sigma_a^2 [p_{-(N-1)} \cdots p_0]$$

$$\phi_j = \sigma_a^2 \sum_{k, k \neq (1, M)} p_{k+j} p_k^* + 2N_0 \rho_f(j)$$

y  $\rho_f(k)$  es la autocorrelación asociada a la respuesta impulsiva del filtro de recepción  $f(t)$ .



## DFE adaptativo ...

### Algoritmo de gradiente estocástico.

Se define primero un vector de coeficientes aumentado

$$\mathbf{v}^T = [c_{-(N-1)} \cdots c_0 \quad -d_1 \cdots -d_M]$$

y un vector de entrada

$$\mathbf{w}_k^T = [r_{k+(N-1)} \cdots r_k \quad A_{k-1} \cdots A_{k-M}]$$

El error a la entrada del elemento de decisión será

$$e_k = \hat{a}_k - \mathbf{v}_k^T \mathbf{w}_k$$

de forma que el algoritmo LMS asociado será

$$\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{v}_k + \beta e_k \mathbf{w}_k^*$$

## Ecualizador de espaciamento fraccionario

Es más común utilizar un ecualizador de espaciamento fraccionario (FSE) porque:

- El conocimiento incompleto del canal hace imposible realizar un MF.
- El FSE es menos sensible a la variación de fase del sincronismo.
- Por implementación, un MF separado agregaría mayor atenuación al modelo del canal, requiriendo mayor ganancia en el ecualizador, aumentando sus requerimientos de rango dinámico.

Para una complejidad restringida los resultados son muy similares a los anteriores en términos del desarrollo de los algoritmos.

Sin embargo, como se discutirá, el FSE tiene problemas en términos de condicionamiento numérico.

## Ecualizador de espaciamiento fraccionario ...

### Condiciones para un MSE único del FSE

La existencia de una solución única para el problema de diseño de MSE del FSE depende de la no singularidad de  $\Phi$ . Esto ocurre cuando uno o mas autovalores son nulos.

Para el FSE, el ancho de banda de la señal de datos es deliberadamente disminuida a la mitad de la velocidad de transmisión por lo que este problema de mal condicionamiento será evidente.

A pesar que existirá ruido en todas las frecuencias, puede ser bajo y no evitar el problema de bajos autovalores.

## Ecualizador de espaciamiento fraccionario ...

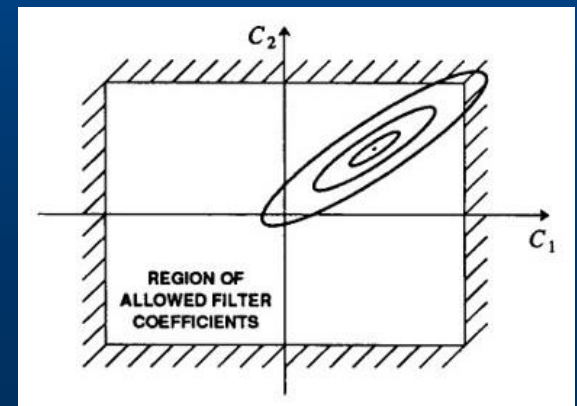
### Deriva de los coeficientes

Así se denomina a la fluctuación de los coeficientes en la dirección de la menor sensibilidad (la dirección del autovector correspondiente al menor autovalor) que tenderá a ser mayor.

### Soluciones

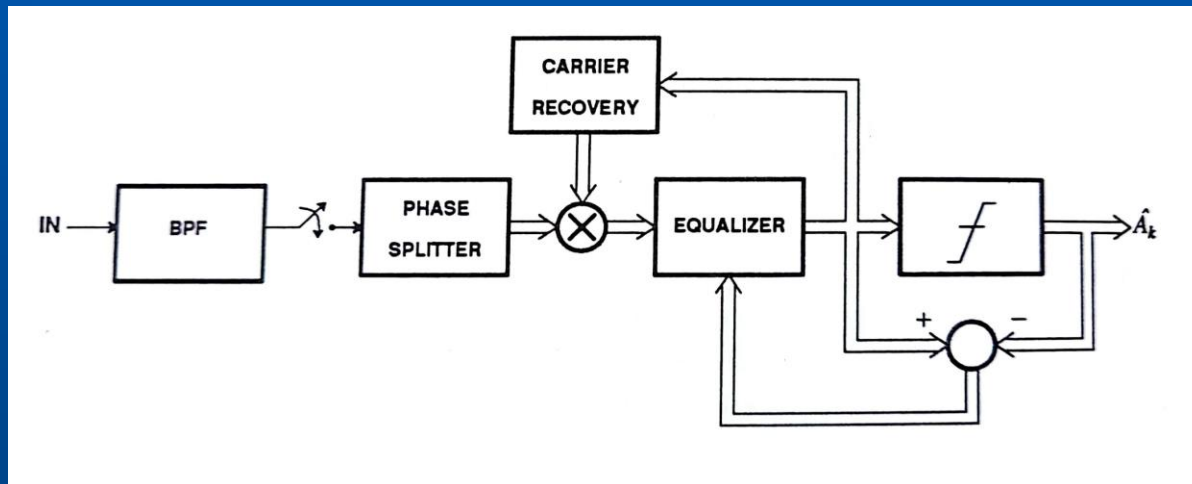
- Saturación.
- Introducir ruido blanco a la entrada del algoritmo (peor desempeño).
- Minimizar una función diferente:  $E[|e_k|^2] + \mu \|c\|^2$  (peor desempeño).

Contornos de igual MSE para una dispersión de autovalores grande.



## Ecualización pasabanda

Es mas común que la ecualización bandabase por la dificultad de realizar la ecualización en el lazo de recuperación de fase de la portadora (PLL).



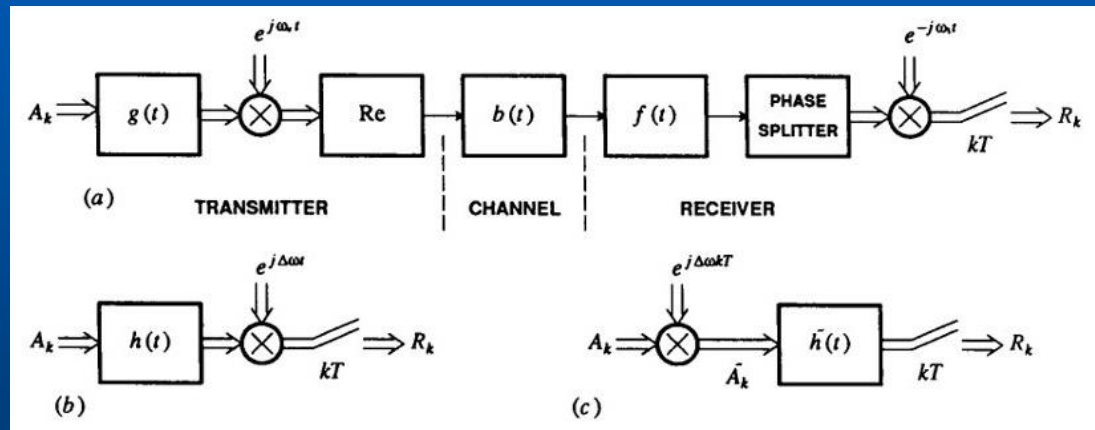
## Ecualización pasabanda

Para obtener la estructura de ecualización pasabanda se requiere un nuevo modelo tal que la demodulación sea puesta en evidencia en el receptor.

En el transmisor  $w_c$  y en el receptor  $w_1$ . Si  $w_1 = w_c$  se tiene el modelo bandabase anterior.

$w_1$  se elige nominalmente igual a  $w_c$ , pero por ser generadas por osciladores independientes existe un pequeño offset,

$$\Delta w = w_c - w_1$$



Modelización con un canal pasabanda; a) Transmisor, canal y receptor suponiendo que la demodulación usa  $w_1$  en vez de  $w_c$ ; b) Modelo formado por un filtro bandabase y un modulador; c) Modelo usando un modulador y un filtro pasabanda.

## Ecualización pasabanda ...

Para el modelo discreto, se define

$$h(t) = g(t) * (b(t) * f(t))e^{-j\omega_c t}$$

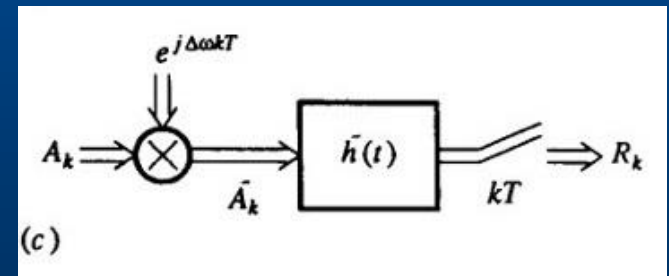
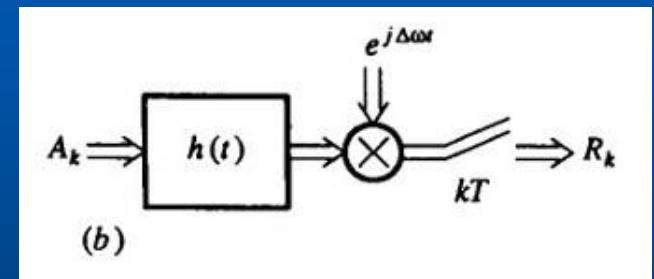
tal que se puede escribir

$$\sum_k A_k h(t - kT) e^{j\Delta\omega t} = \sum_k \tilde{A}_k \tilde{h}(t - kT)$$

Donde es posible hacer la asociación

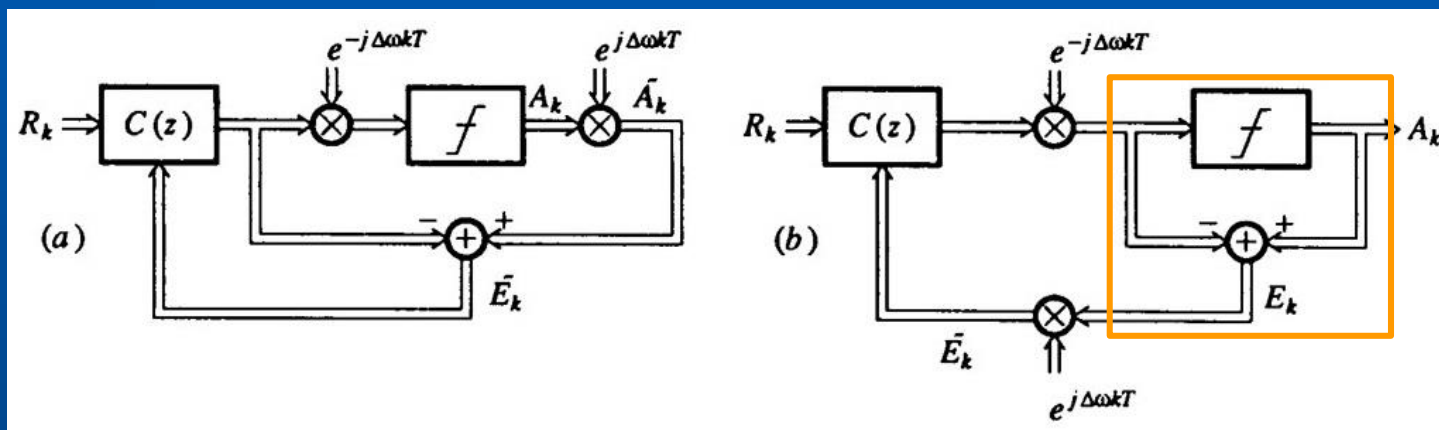
$\tilde{A}_k = A_k e^{j\Delta\omega kT}$  el símbolo rotado

$\tilde{h}(t) = h(t) e^{j\Delta\omega t}$  la respuesta del canal pasabanda



## Ecualización pasabanda ...

Con esta última interpretación se puede pensar el canal consistente en un filtro pasabanda  $\tilde{h}(t)$  teniendo como entrada símbolos rotados  $\tilde{A}_k$ .

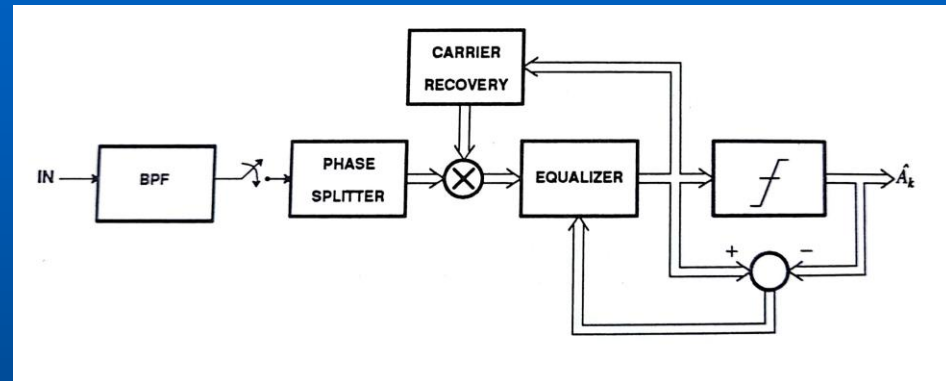


Estructura del ecualizador pasabanda  $C(z)$ ; a) Generación directa de la señal de error rotada; b) Para replicar el diseño bandabase, el elemento de decisión utiliza señales equivalentes a símbolos no rotados.

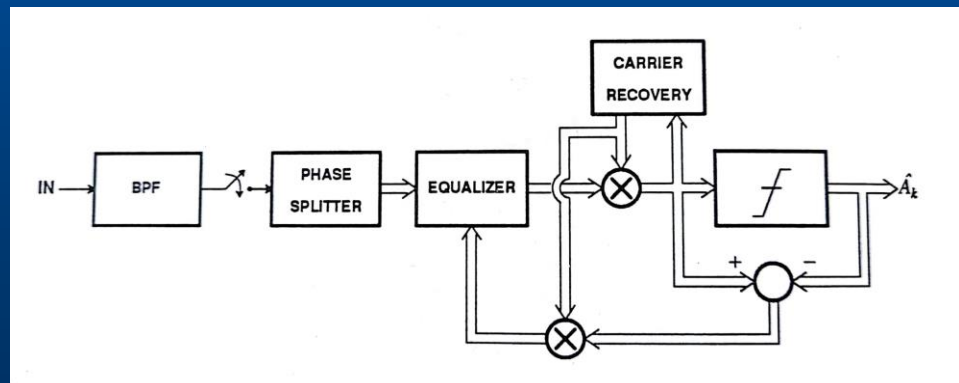


## Ecualización pasabanda ...

Ecualización bandabase



Ecualización pasabanda



## Ecualización pasabanda ...

En esas condiciones, la convergencia del ecualizador pasabanda adaptativo es similar a la del ecualizador banda base excepto por:

- El ecualizador pasabanda tiene como entrada símbolos rotados (esto no tiene contrapartida en el ecualizador banda base).
- El ecualizador pasabanda trabaja con el modelo  $\tilde{h}(t)$  antes que  $h(t)$ .

La estadística de los símbolos rotados en relación a los no rotados:

$$S_{\tilde{A}}(e^{jwT}) = S_A(e^{j(w-\Delta w)T})$$

de forma que si los símbolos no están correlacionados las propiedades de convergencia serán las mismas que para el caso bandabase.

## Ecualización pasabanda ...

El ecualizador pasabanda puede ser utilizado de varias formas:

- Se puede hacer un seguimiento de fase de la portadora entrante, haciendo  $w_1 = w_c$  ( $\Delta w = 0$ ). Esto conduce a problemas en la recuperación de la portadora (por el retardo que el ecualizador introduce en el lazo).
- Se puede elegir  $w_1 = 0$  ( $\Delta w = w_c$ ). Este es el ecualizador pasabanda.
- Se puede elegir  $w_1$  nominalmente igual a  $w_c$  pero sin el seguimiento de un PLL. En este caso  $\Delta w$  es pequeño pero desconocido. Esto se puede interpretar como un ecualizador bandabase (requiere un oscilador previo al ecualizador).

En los dos últimos casos se requiere un PLL para compensar la rotación a la salida del ecualizador.

# Ecualización Adaptativa (resumen)

- Ecualizadores de complejidad reducida.
- **Ecualizador lineal Adaptativo.**
- **DFE Adaptativo.**
- **Ecualizador de espaciamiento fraccionario.**
- **Ecualización pasabanda.**