Procesamiento de Señales en Comunicaciones

Departamento de Ingeniería Eléctrica y Computadoras
Universidad Nacional del Sur

Contenidos

- Modulación.
- Diseño de Distancia Mínima.
- Desempeño en ruido.
- Detección.
- Ecualización óptima.
- Ecualización adaptativa.
- Modulación de portadoras múltiples

Modulación de portadoras múltiples

- Multiplexado por división de frecuencias ortogonales (OFDM)
- Modulación multicanal
- Modulación multitonos discretos (DMT)

Modulación multicanal

- Capacidad del canal AWGN
- Partición del canal en tiempo continuo
  - Propiedades
- SNR geométrica
- Carga del sistema de transmisión multicanal
- Interpretación del problema de optimización (water filling)

Modulación multitonos discretos (DMT)

- Transformada Discreta de Fourier
- Descripción en el dominio frecuencia del canal
- Sistema DMT basado en DFT

Modulación Multicanal

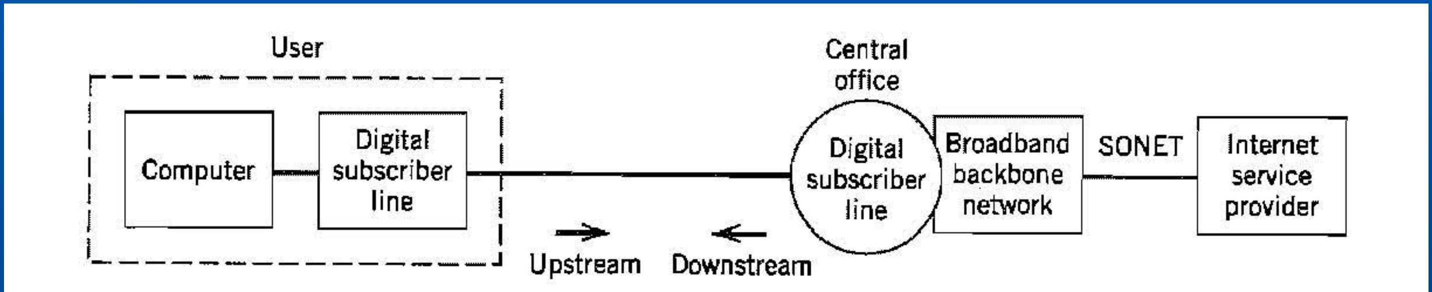
Idea - concepto:

La transmisión sobre un canal problemático (complejo para ecualizar) se transforma (con técnicas de procesamiento de señales) en un conjunto de sub-canales en paralelo, tal que cada canal puede verse como AWGN.

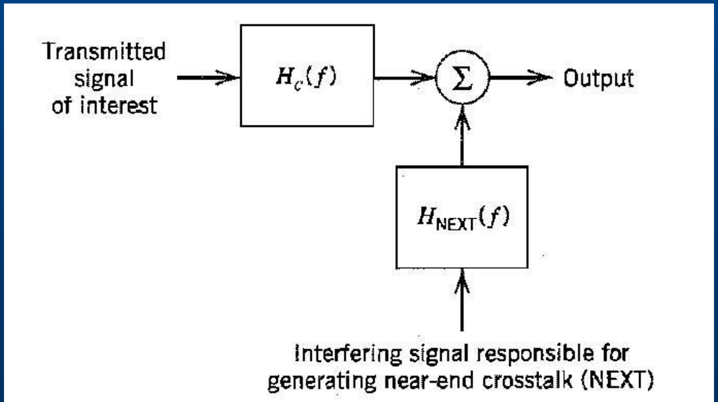
La velocidad de transmisión en el canal transformado será la suma de las velocidades de transmisión de los sub-canales en paralelo.

Modulación Multicanal…

Motivación: Si se dispone de algún tipo de información sobre el canal, la principal aplicación es la de señalización eficiente en líneas de abonado digital (xDSL) . Medio físico: coaxil - par trenzado.



Modelo de un canal de par trenzado: existen dos interferencias específicas: NEXT y FEXT.



Modulación Multicanal…

Capacidad del canal AWGN

Si *W* es el ancho de banda de la señal a transmitir y *SNR* es la relación de potencia de señal a potencia de ruido, el límite de velocidad de transmisión para detección con probabilidad de error de detección arbitrariamente baja para un canal AWGN es:

$$C = W \log_2(1 + \mathrm{SNR}) \quad [\mathrm{bits/s}]$$

ó en términos bits por uso del canal

$$C = \frac{1}{2} \log_2(1 + \mathrm{SNR}) \quad [\mathrm{bits/uso\ del\ canal}]$$

Modulación Multicanal…

Capacidad del canal AWGN…

En la práctica, mediante codificación, se llega a una velocidad de transmisión *R* menor que *C*.

Entonces existirá una diferencia (gap) entre la SNR del canal ideal y el obtenido por codificación:

$$\Gamma = \frac{\mathrm{SNR}}{\mathrm{SNR}_R} = \frac{2^{2C}-1}{2^{2R}-1}$$

ó equivalentemente

$$R = \frac{1}{2}\log_2\left(1+\frac{\mathrm{SNR}}{\Gamma}\right) \quad \text{[bits/uso del canal]}$$

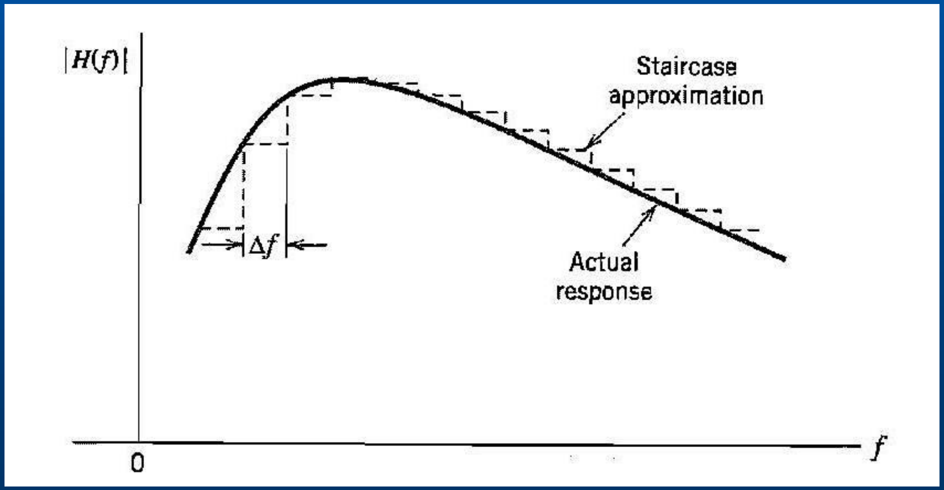
Si $\mathrm{SNR} = P/\sigma^2$, con $\sigma^2 = N_o W$,

$$R = \frac{1}{2}\log_2\left(1+\frac{P}{\Gamma\sigma^2}\right) \quad \text{[bits/uso del canal]}$$

Modulación Multicanal…

Partición del canal en tiempo continuo

Consideramos particionar el canal $H(f)$ a través de una aproximación por tramos ortogonales, de ancho Δf.



Modulación Multicanal…

Partición del canal en tiempo continuo…

Asociando una modulación eficiente en cada sub-canal : QAM

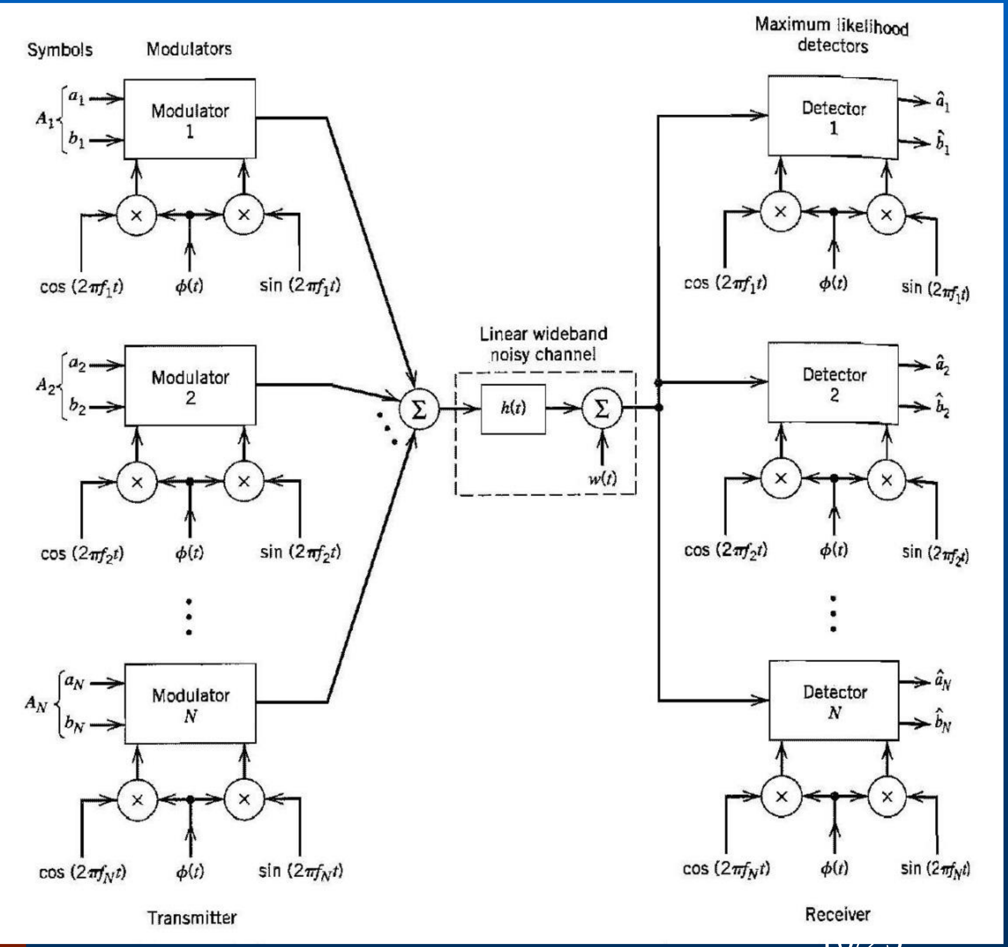
Se transmite: (a_n, b_n), tal que la constelación es

$$\{\phi(t)\cos(2\pi f_n t), \phi(t)\sin(2\pi f_n t)\}$$

con

$$\phi(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$$

y $f_n = n/T$



Modulación Multicanal…

Propiedades de las funciones base

- Las componentes de las funciones base son ortogonales entre si:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\phi(t)\cos(2\pi f_n t)][\phi(t)\sin(2\pi f_n t)]dt = 0 \quad \text{para todo } n$$

- Las funciones base forman un conjunto ortogonal

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\phi(t)e^{j2\pi f_n t}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\phi(t)e^{j2\pi f_k t}\right)^* dt = \begin{cases} 1 & k = n \\ 0 & k \neq n \end{cases}$$

- Para un canal arbitrario pero lineal $h(t)$, el conjunto de funciones de salida del canal $h(t) * \phi(t)$ se mantiene ortogonal.

Modulación Multicanal…

En el receptor, cada sub-canal puede tener alguna ISI residual, pero para *N* suficientemente grande esa ISI es cero.

Cada sub-canal, será independiente tal que cada receptor coherente opera como detectores de Máxima Verosimilitud (óptimo).

Para cada sub-canal con $A_n = a_b + jb_n,$ la salida será

$$Y_n = H_n A_n + W_n \qquad n = 1, \cdots, N$$

donde $H_n = H(f_n)$, y W_n tiene media cero y varianza $N_o/2$.

Modulación Multicanal…

Relación señal a ruido geométrica

Como cada sub-canal tiene su propia SNR es importante obtener la SNR del sistema completo.

Para simplificar, si todos los canales tiene una constelación unidimensional (sin los efectos del canal), la capacidad total será

$$
\begin{aligned}
R &= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} R_n = \frac{1}{2N}\sum_{n=1}^{N}\log_2\left(1+\frac{P_n}{\Gamma\sigma_n^2}\right) \\
&= \frac{1}{2N}\log_2\prod_{n=1}^{N}\left(1+\frac{P_n}{\Gamma\sigma_n^2}\right) = \frac{1}{2}\log_2\left[\prod_{n=1}^{N}\left(1+\frac{P_n}{\Gamma\sigma_n^2}\right)\right]^{1/N}
\end{aligned}
$$

Modulación Multicanal

Relación señal a ruido geométrica…

Como la velocidad de transmisión en función de la SNR total era

$$R = \frac{1}{2}\log_2\left(1 + \frac{\mathrm{SNR}}{\Gamma}\right)$$

usando estas 2 expresiones se obtiene

$$\mathrm{SNR} = \Gamma\left(\prod_{n=1}^{N}\left(1 + \frac{P_n}{\Gamma\sigma_n^2}\right)^{1/N} - 1\right)$$

Aproximando, para altas $P_n/(\Gamma\sigma_n^2)$

$$\mathrm{SNR} \cong \prod_{n=1}^{N}\left(\frac{P_n}{\Gamma\sigma_n^2}\right)^{1/N}$$

Modulación Multicanal…

Carga (asignación de SNR) del sistema

Considerando ahora los efectos del canal, con $g_n = |H(f_n)|$,

$$R = \frac{1}{2N} \sum_{n=1}^{N} \log_2 \left(1 + \frac{g_n^2 P_n}{\Gamma \sigma_n^2} \right)$$

Y con la restricción $\sum_{n=1}^{N} P_n = P$ constante, es posible optimizar la potencia asignada a cada sub-canal.

Modulación Multicanal…

Carga (asignación de SNR) del sistema…

Usando multiplicadores de Lagrange para considerar la restricción en la optimización

$$
\begin{aligned}
J &= \frac{1}{2N}\sum_{n=1}^{N}\log_2\left(1+\frac{g_n^2 P_n}{\Gamma\sigma_n^2}\right)+\lambda\left(P-\sum_{n=1}^{N}P_n\right)\\
&= \frac{1}{2N}\log_2 e\sum_{n=1}^{N}\log_e\left(1+\frac{g_n^2 P_n}{\Gamma\sigma_n^2}\right)+\lambda\left(P-\sum_{n=1}^{N}P_n\right)
\end{aligned}
$$

Derivando con respecto a P_n e igualando a cero se tiene

$$\lambda=\frac{\frac{1}{2N}\log_2 e}{P_n+\frac{\Gamma\sigma_n^2}{g_n^2}},\quad \text{para } n=1,\cdots,N$$

de donde resulta

$$P_n+\frac{\Gamma\sigma_n^2}{g_n^2}=K,\quad \text{para } n=1,\cdots,N.$$

Aquí *K* es una constante de diseño.

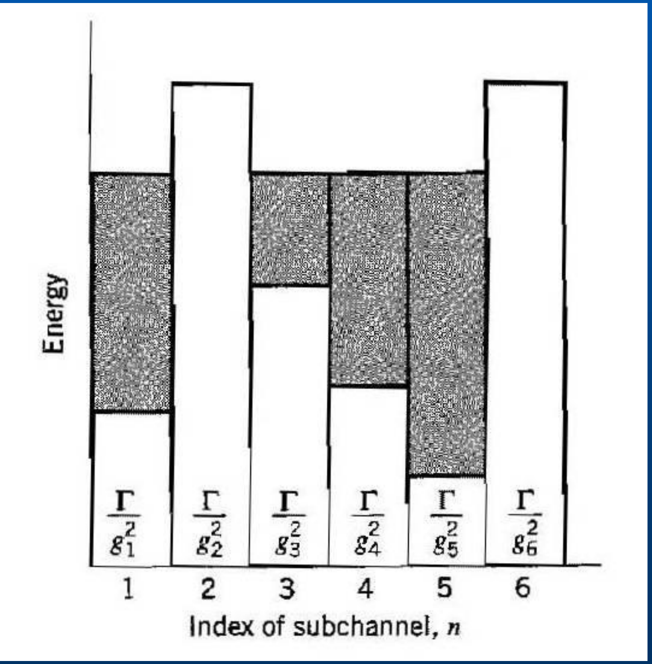
Modulación Multicanal…

Interpretación del problema de optimización

Se deben satisfacer $\sum_{n=1}^{N} P_n = P$ y $P_n + \frac{\Gamma\sigma_n^2}{g_n^2} = K$, para $n = 1, \cdots, N.$

Ejemplo:

Para *N*=*6*, con Γ constante y $\sigma_n^2 = N_o \Delta f = 1$



- 4 canales satisfacen la restricción de *K*.
- La suma de esos 4 debe ser *P*.
- 2 canales requieren asignación de potencia negativa por lo que se descartan.

Resultado similar al de distribución de agua con diferentes profundidades: nivelado (water pouring).

Modulación Multicanal ...

Interpretación del problema de optimización…

En forma matricial, la solución se obtiene de

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_N \\ K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ -\Gamma\sigma^2/g_1^2 \\ -\Gamma\sigma^2/g_2^2 \\ \vdots \\ -\Gamma\sigma^2/g_N^2 \end{bmatrix}$$

tal que *K* siempre debe ser mayor que cero, pero algunas P_n pueden resultar negativas y se descartan.

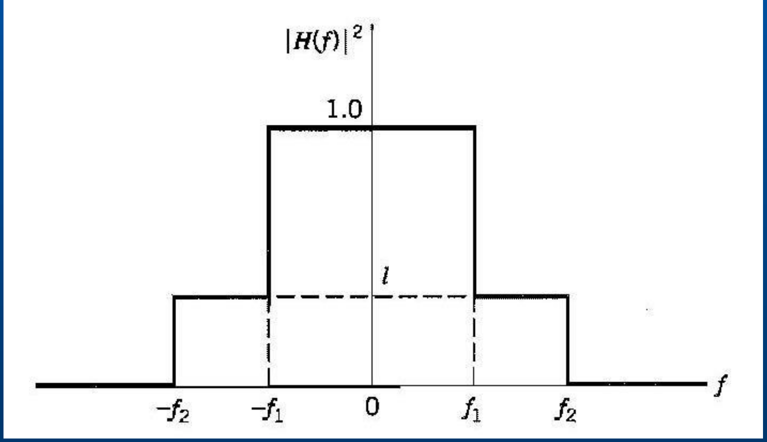
Modulación Multicanal ...

Ejemplo de Nivelado (water pouring)

Para simplificar en este este canal, $\Gamma = 1 \text{ y } \sigma^2 = 1$, con $0 < l < 1$.

Por la optimización

$$
\begin{aligned}
P_1 + P_2 &= P \\
P_1 - K &= -1 \\
P_2 - K &= -1/l
\end{aligned}
$$



Modulación Multicanal…

Ejemplo de Nivelado (water pouring)…

La solución es

$$P_1 = \frac{1}{2}\left(P - 1 + \frac{1}{l}\right)$$
$$P_2 = \frac{1}{2}\left(P + 1 - \frac{1}{l}\right)$$
$$K = \frac{1}{2}\left(P + 1 + \frac{1}{l}\right)$$

Como $|l| < 1,\ P_1 > 0,$ pero P_2 puede ser negativa cuando $l < 1/(P+1).$ Para esos valores de $l,\ P_1 > P,$ entonces la solución aceptable se obtiene para

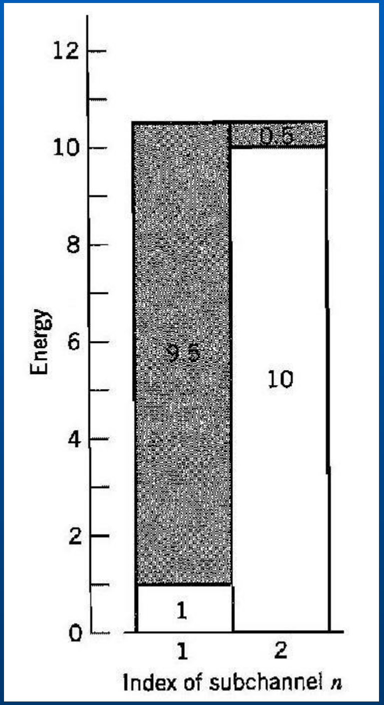
$$1/(P+1) < l < 1$$

Modulación Multicanal…

Ejemplo de Nivelado (water pouring)…

Dando valores: $P = 10$ y $l = 0.1$, se obtiene

$$K = 0.95,\ P_1 = 9.5 \text{ y } P_2 = 0.5.$$



Modulación multitonos discretos (DMT)

Solución a las limitaciones de la modulación multicanal

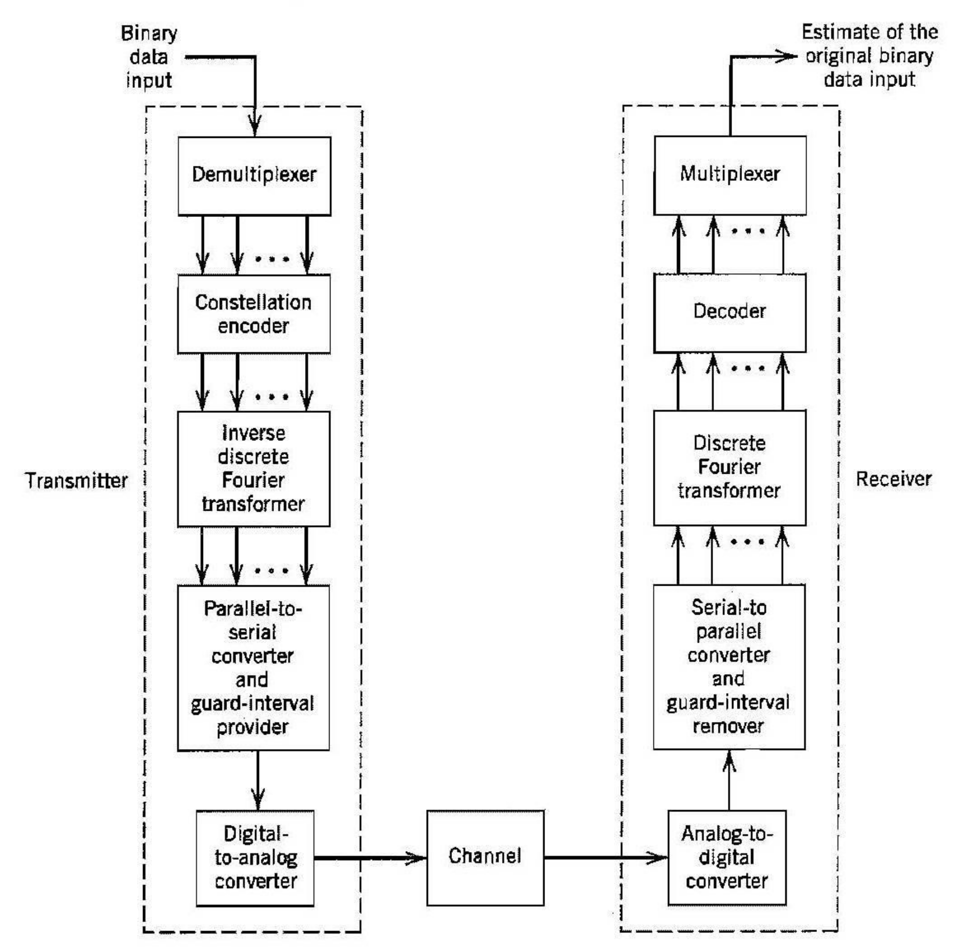
- Las funciones base pasabanda usa funciones *sinc* que está definida sobre un intervalo infinito y existirán problemas de realizabilidad.

- Para un número finito de canales N, el sistema es sub-óptimo.

Alternativa: Modulación multitonos discretos DMT (la transformación en sub-canales en paralelo se realiza en tiempo discreto y frecuencia discreta).

Modulación multitonos discretos (DMT)…

DMT basado en DFT



DMT vs OFDM

- OFDM difiere de DMT en sus áreas de aplicación: canales de radiodifusión y canales inalámbricos en general.
- En OFDM no es simple realizar la asignación de bits óptima por sub-canal (usualmente es fija).
- Es necesario incluir un mezclador en transmisor y receptor para trasladar en frecuencia la información.
- Combinada con codificación y entremezclado (interleaving), se usa efectivamente para combatir desvanecimiento y dispersión multicamino.

Modulación de portadoras múltiples

- Multiplexado por división de frecuencias ortogonales (OFDM)
- Modulación multicanal
- Modulación multitonos discretos (DMT)