Procesamiento de Señales en Comunicaciones

Departamento de Ingeniería Eléctrica y Computadoras
Universidad Nacional del Sur

Contenidos

- Modulación.
- Diseño de Distancia Mínima.
- Desempeño en ruido.
- Detección.
- Ecualización óptima.
- Ecualización adaptativa.
- Modulación de portadoras múltiples

Detección

- Detección de un único símbolo.
- Detección de un vector señal.
- Detección de señales continuas en ruido Gaussiano.
- Detección no coherente óptima.
- Detección óptima de PAM con ISI.
- Detector de secuencias: Algoritmo de Viterbi.

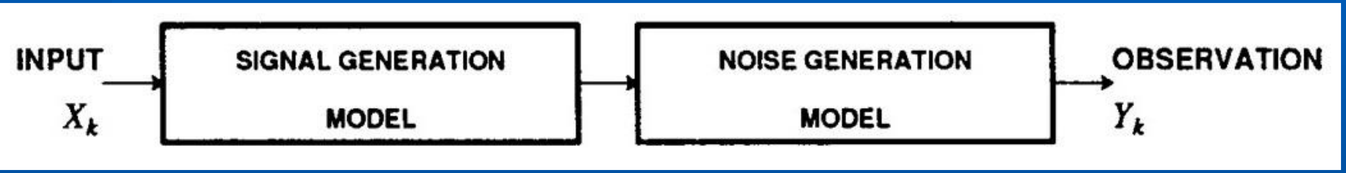
Detección:

- Los diseños con *sentido común* anteriores son óptimos?
- Veremos criterios de optimización del diseño transmisor – receptor.
- La metodología es obtener receptores óptimos modelando estadísticamente la relación entre las señales transmitidas y recibidas.
- Para señales continuas se denomina *estimación* (comunicaciones analógicas: recuperación solo aproximada), aquí consideramos señales discretas, *detección* (comunicaciones digitales: regeneración casi exacta).

Consideraremos el caso más simple inicialmente (símbolo real aislado) y progresivamente introduciremos contextos más realistas (símbolos complejos, ISI).

Detección: modelo básico

- El problema de detección de la señal recibida requiere un modelo estadístico:
  - Modelo de *generación de la señal*: determinístico (darle formato, filtrado).
  - Modelo de *generación del ruido* (estocástico).



Ejemplo: Si X_k es una secuencia de símbolos, entonces, el *generador de señal* puede ser un filtro de transmisión discreto equivalente, y el generador de ruido AWGN, independiente de X_k .

Ejemplo: Si X_k es una secuencia de bits, el *generador de señal* puede ser un codificador que produce otra secuencia de bits, y el generador de ruido puede modelarse como un *canal binario simétrico* (BSC).

Para realizar una decisión sobre X_k con la observación Y_k, dos métodos:

- Maximum a posteriori (MAP ó Bayes)
- Maximum Likelihood (ML): caso especial de MAP para entradas equiprobables.

Detección de un símbolo (real) aislado

Observaciones discretas

La salida del modelo general de ruido Y puede ser discreta. La entrada es una única variable aleatoria (v.a.) X (o símbolo A del alfabeto Ω_A).

MAP selecciona $\widehat{a}$ tal que maximice

$$p_{A|Y}(\widehat{a}|y) = \frac{p_{Y|A}(y,\widehat{a})p_A(\widehat{a})}{p_Y(y)}$$

Y también minimiza en general la probabilidad de error de detección:

$$P_e = Pr[\widehat{a} \neq a]$$

Por otro lado, ML selecciona $\widehat{a}$ tal que maximice $p_{Y|A}(y|\widehat{a})$ (no requiere la distribución de los símbolos).

Detección de símbolo (real) aislado …

Observaciones discretas

Ejemplo: Para el modelo de ruido aditivo discreto $Y = A + N$ donde A y N se obtienen por lanzamiento de una moneda. i.e. $y = 0, 1,$ or 2

$$p_{Y|A}(0|0) = 0.5,\ p_{Y|A}(0|1) = 0,\ \rightarrow \hat{a} = 0.$$

Detección ML

$$p_{Y|A}(1|0) = p_{Y|A}(1|1) = 0.5,\ \rightarrow \hat{a} = 0 \text{ o } 1.$$

$$p_{Y|A}(2|0) = 0,\ p_{Y|A}(2|1) = 0.5,\ \rightarrow \hat{a} = 1.$$

Como $p_A(\hat{a}) = 0.5$ para cada $\hat{a}$ posible, entonces MAP y ML son equivalentes.

Detección de símbolo (real) aislado …

Observaciones discretas

Ejemplo: Para el modelo de ruido aditivo discreto $Y = A + N$ donde N se obtiene por lanzamiento de una moneda, pero ahora $p_A(0) = 0.75$, $p_A(1) = 0.25$

Detección ML

$$p_{Y|A}(0|0) = 0.5,\; p_{Y|A}(0|1) = 0,\; \rightarrow \hat{a} = 0.$$
$$p_{Y|A}(1|0) = p_{Y|A}(1|1) = 0.5,\; \rightarrow \hat{a} = 0 \text{ o } 1.$$
$$p_{Y|A}(2|0) = 0,\; p_{Y|A}(2|1) = 0.5,\; \rightarrow \hat{a} = 1.$$

Para MAP, si $y = 0$ o $y = 2$, equivalente a ML. Reescribiendo para $y = 1$

$$p_{Y|A}(1|\hat{a}) = \begin{cases} 0.5; & \text{si } \hat{a} = 1 \\ 0.5; & \text{si } \hat{a} = 0 \end{cases}$$

Se tiene

$$p_{A|Y}(\hat{a}|1) = \begin{cases} 0.5 \times 0.25/0.5 = 0.25; & \text{si } \hat{a} = 1 \\ 0.5 \times 0.75/0.5 = 0.75; & \text{si } \hat{a} = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \hat{a} = 0$$

Detección de símbolo (real) aislado …

Observaciones discretas

Ejemplo: Probabilidad de error

Si $y = 0$ o $y = 2$, no existe error tanto para ML como para MAP.

Si $y = 1$,

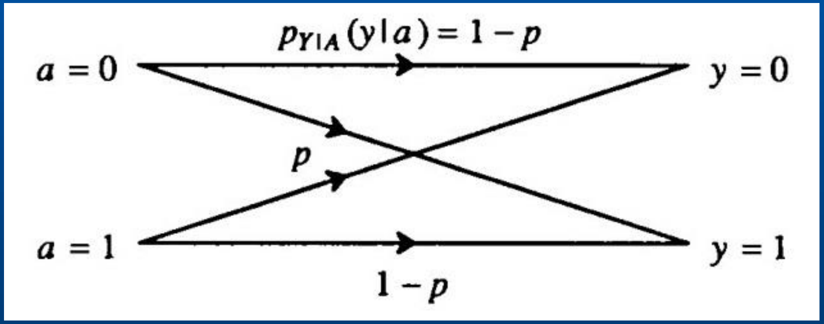
ML comete errores con probabilidad 0.5, con $p_Y(1) = 0.5$, tal que la probabilidad de error es: 0.25.

MAP comete errores con probabilidad 0.25, con $p_Y(1) = 0.5$, tal que la probabilidad de error es 0.125.

Detección de símbolo (real) aislado …

Observaciones discretas

El modelo mas simple de generación de ruido que brinda observaciones discretas es el *canal binario simétrico* (BSC) y está caracterizado por *p*, la probabilidad de error (crossover).



Probabilidades de transición para el canal binario simétrico.

Detección de símbolo (real) aislado …

Observaciones discretas

Para mostrar que el detector MAP minimiza la probabilidad de error, la probabilidad de decisión correcta es:

$$\text{Pr[decision correcta]} = \sum_{y \in \Omega_Y} \text{Pr[decision correcta / Y=y]} p_Y(y)$$

Como $p_Y(y) \geq 0$, la probabilidad de una decisión correcta se maximiza si, para cada observación, y maximiza $\text{Pr[decision correcta/Y=y]}$.

Esto es justamente lo que hace el detector MAP ya que la probabilidad de una decisión correcta es

$$\text{Pr[decision correcta/Y=y]} = p_{A/Y}(\hat{a}/y)$$

Detección de símbolo (real) aislado …

Observaciones continuas

El modelo de generación de ruido *N* tiene valores de ruido aditivo continuo de forma que las observaciones son continuas.

MAP, $\widehat{a}$ tal que maximice $$p_{A|Y}(\widehat{a}|y) = \frac{f_{Y|A}(y|\widehat{a})p_A(\widehat{a})}{f_Y(y)}$$

ML, $\widehat{a}$ tal que maximice $$f_{Y|A}(y|\widehat{a})$$

Detección de símbolo (real) aislado …

Observaciones continuas

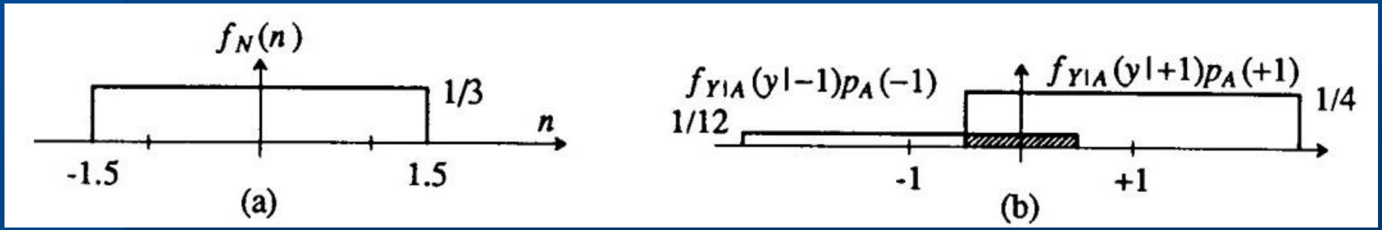
Ejemplo: Supongamos que *A* toma valores ± 1 de acuerdo a una moneda "cargada" tal que $p_A(+1) = 0.75$ y $p_A(-1) = 0.25$.
Se define $Y = A + N$ con la pdf de *N* continua.

En base al detector MAP, si $A = +1$ no existe error.

Ocurren errores 1/3 de las veces cuando $A = -1$ $(y > -0.5)$.

Entonces

$$P_e = p_A(-1)/3 = 1/12$$



a) Pdf de ruido uniformemente distribuido; b) para $\hat{a} = \pm 1$, se ilustra el criterio MAP $f_{Y/A}(y/\hat{a})p_A(\hat{a})$. Este detector decidirá por $\hat{a} = +1$ para cualquier observación $y > -0.5$.

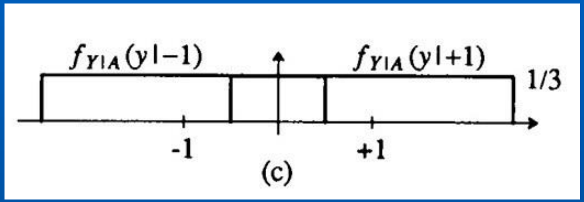
Detección de símbolo (real) aislado …

Observaciones continuas

Ejemplo: Suponiendo el mismo contexto anterior. Para el criterio ML, las funciones son iguales en $-0.5 < y < +0.5$.

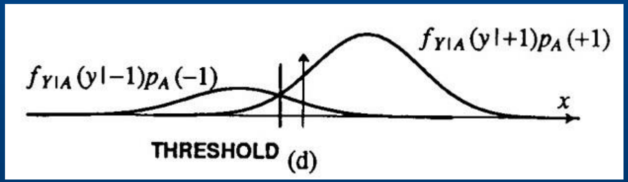
Para el umbral en el origen, se produce un error 1/6

para cada símbolo posible. Entonces $P_e = 1/6$



Ejemplo: El mismo ejemplo anterior pero ahora con ruido Gaussiano aditivo. Para MAP umbral está asociado a la intersección de las curvas. Para ML está en cero.

Este modelo de generación de ruido será el más utilizado más adelante.



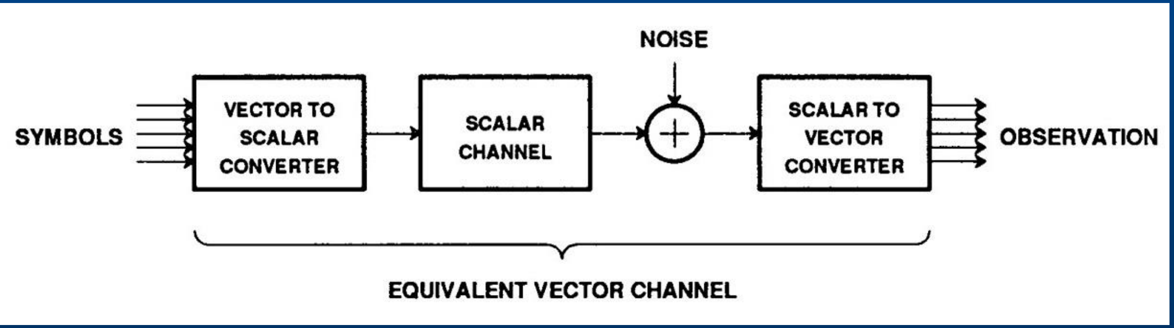
Detección de un vector señal

Ejemplo: Una señal vectorial consistente en un conjunto conocido de señales en ruido aditivo sigue este modelo. El receptor de distancia mínima se podía usar en ese caso.

Ejemplo: Una señal vectorial (bloque) con elementos binarios como entrada a un canal binario simétrico (BSC) es un bloque de código binario.

El generador de señal acepta una entrada *X* y la mapea en un vector de señal ***S*** de dimensión *M*. La observación es un vector ***Y***. El ruido queda especificado por (si las componentes son independientes)

$$f_{\mathbf{Y}|\mathbf{S}}(\mathbf{y}|\mathbf{s}) = \prod_{k=1}^{M} f_{Y_k|S_k}(y_k|s_k)$$



Detección de un vector señal …

Detección ML: Se elige $\hat{s}$ entre $S = [s_1, \cdots s_M]$ tal que maximice $f_{\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{S}}(y|\hat{s})$.
Es simple porque no se necesita tener en cuenta la estadística de $\boldsymbol{S}$.

Ejemplo 1: Para el caso de AWGN ***Y*** = ***S*** + ***Z***, donde el vector complejo ***Z*** se supone circularmente simétrico con componentes no correlacionadas (i.e. independientes) de varianza $2\sigma^2$. ***Y*** tiene pdf

$$f_{\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{y}|\hat{\boldsymbol{s}}) = f_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{y}-\hat{\boldsymbol{s}}|\hat{\boldsymbol{s}}) = f_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{y}-\hat{\boldsymbol{s}})$$

con $f_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{z}) = \prod_{k=1}^{K} f_{\boldsymbol{Z}_k}(\boldsymbol{z}_k)$

Para una v.a. Gaussiana compleja con partes real e imaginaria independientes se tiene que

$$f_{\boldsymbol{Z}_k}(\boldsymbol{z}_k) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-|\boldsymbol{z}_k|^2/2\sigma^2}$$

Entonces:

$$f_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{z}) = \frac{1}{(2\pi)^K \sigma^{2K}} e^{-\|\boldsymbol{z}\|^2/2\sigma^2}$$

Como maximizar $f_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{z})$ es equivalente a minimizar $\|\boldsymbol{z}\|^2 = \|\boldsymbol{y}-\hat{\boldsymbol{s}}\|^2$, el detector ML es equivalente a un detector de distancia mínima.

Detección de un vector señal ...

Ejemplo 2: Para un BSC con componentes de ruido independientes, las componentes del vector señal (de dimensión *M*) son binarias. La pdf es

$$p_{Y_k|S_k}(y|\hat{s}) = \begin{cases} p, & y \neq \hat{s} \\ 1-p, & y = \hat{s} \end{cases}$$

Si $d_H(\hat{\boldsymbol{s}}, \boldsymbol{y})$ (distancia de Hamming) es el número de componentes en el que difieren $\hat{\boldsymbol{s}}$ e $\boldsymbol{y}$, entonces

$$p_{\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{y}, \hat{\boldsymbol{s}}) = p^{d_H(\hat{\boldsymbol{s}},\boldsymbol{y})}(1-p)^{M-d_H(\hat{\boldsymbol{s}},\boldsymbol{y})} = (1-p)^M \left(\frac{p}{1-p}\right)^{d_H(\hat{\boldsymbol{s}},\boldsymbol{y})}$$

Para $p < 1/2$ el detector ML selecciona $\hat{\boldsymbol{s}}$ para minimizar $d_H(\hat{\boldsymbol{s}}, \boldsymbol{y})$.

Detección de un vector señal ...

Detección ML:

Los dos modelos de generación de ruido con componentes de ruido independientes, el ruido aditivo Gaussiano (AWGN) y el BSC, resultan en un detector ML similar:

Seleccionar el vector señal que está más próximo al vector observación.

La única diferencia entre los dos casos es la forma en que se define "distancia":

- Euclidiana en el caso de AWGN
- Hamming en el caso BSC

En ambos casos el espacio de observaciones $\Omega_{\mathbf{Y}}$ se divide en regiones de decisión: conducen a decidir $\hat{s} = \boldsymbol{s}_i$

Detección de un vector señal ...

Detector MAP: Es considerablemente mas complicado que el ML y requiere el conocimiento de la varianza del ruido (para el modelo AWGN) o la probabilidad de error (para BSC). Además se requiere $p_{\boldsymbol{S}}(\widehat{s})$.

Dada la observación ***y***, el detector MAP selecciona $\widehat{\boldsymbol{s}}$ tal que maximice

$$p_{\boldsymbol{S}|\boldsymbol{Y}}(\widehat{s}|y) = \frac{p_{\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{S}}(y|\widehat{s})p_{\boldsymbol{S}}(\widehat{s})}{f_{\boldsymbol{Y}}(y)}$$

Ejemplo: Para el caso de AWGN, el detector MAP maximiza

$$f_{\boldsymbol{Z}}(y - \widehat{s})p_{\boldsymbol{S}}(\widehat{s}) = \frac{1}{(2\pi)^M \sigma^{2M}} e^{\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\|\boldsymbol{y}-\widehat{s}\|^2\right)} p_{\boldsymbol{S}}(\widehat{s})$$

Equivalente a minimizar

$$\|\boldsymbol{y} - \widehat{s}\|^2 - 2\sigma^2 \ln\left(p_{\boldsymbol{S}}(\widehat{s})\right)$$

Probabilidad de error para BSC con detector ML

Para el caso de dos señales $\boldsymbol{s}_i,\ \boldsymbol{s}_j$ a distancia (de Hamming) *d*, suponemos $\boldsymbol{s}_i$ transmitida por un BSC.

El detector ML elige $\boldsymbol{s}_j$ en lugar de $\boldsymbol{s}_i$ si los bits recibidos en ***y*** determinan menor *d.* Cualquier error que afecte una componente donde las señales son iguales no impactará en *d*.

Suponemos (peor caso) un error de detección se produce siempre que los bits de ***y*** están equidistantes de las dos señales. Entonces, un error de detección ocurre si más de *t* errores en los *d* bits en que difieren las señales, o sea

$$t = \begin{cases} (d-1)/2; & d \text{ impar} \\ (d/2)-1; & d \text{ par} \end{cases}$$

Como el número de errores en *d* es binomial $Q(d,p) = \sum_{i=t+1}^{d} \binom{d}{i} p^i (1-p)^{d-i}$

Para tres o mas señales, es posible usar la Cota de Unión para obtener $P_e \cong CQ(d_{\text{min}}, p)$

Detección de un vector señal …

Probabilidad de error para BSC con detector ML

Ejemplo: Supongamos $s_i = [000000]$ y $s_j = [110111]$. La distancia de Hamming es *d=5* . Transmitiendo s_i por un canal BSC con probabilidad de error *p*, el detector ML cometerá un error en s_j si 3 o más de los bits recibidos en 5 posiciones diferentes han sido cambiados por el canal.

La probabilidad de que esto ocurra es

$$\begin{aligned} Q(5,p) &= \binom{5}{3} p^3(1-p)^2 + \binom{5}{4} p^4(1-p) + \binom{5}{5} p^5 \\ &= 10p^3(1-p)2 + 5p^4(1-p) + p^5 \end{aligned}$$

Detección (resumen)

- Detección de un único símbolo.
- Detección de un vector señal.
- Detección de señales continuas en ruido Gaussiano.
- Detección no coherente óptima.
- Detección óptima de PAM con ISI.
- Detector de secuencias: Algoritmo de Viterbi.