Procesamiento de Señales en Comunicaciones

Departamento de Ingeniería Eléctrica y Computadoras
Universidad Nacional del Sur

Contenidos

- Modulación.
- Diseño de Distancia Mínima.
- Desempeño en ruido.
- Detección.
- Ecualización óptima.
- Ecualización adaptativa.
- Modulación de portadoras múltiples

Ecualización Adaptativa

- Ecualizadores de complejidad reducida.
- Ecualizador lineal adaptativo.
- DFE adaptativo.
- Ecualizador de espaciamiento fraccionario.
- Ecualización pasabanda.

Ecualización lineal adaptativa

Como en general no se conoce la función autocorrelación, el algoritmo SD no es directamente aplicable.

Esto puede solucionarse utilizando una aproximación. En el SD, en lugar de usar el gradiente del MSE, se utiliza el *gradiente del valor instantáneo* del error cuadrático un estimador no sesgado del MSE): algoritmo *Least-Mean-Squares* (LMS).

$$|E_k|^2 = |A_k|^2 - 2\mathrm{Re}\{A_k \boldsymbol{c}^H \boldsymbol{r}_k^*\} + \boldsymbol{c}^H \boldsymbol{r}_k^* \boldsymbol{r}_k^T \boldsymbol{c}$$

Entonces,

$$\nabla_{\boldsymbol{c}} |e_k|^2 = -2\boldsymbol{r}_k^*(A_k - \boldsymbol{r}_k^T \boldsymbol{c}) = -2e_k \boldsymbol{r}_k^*$$

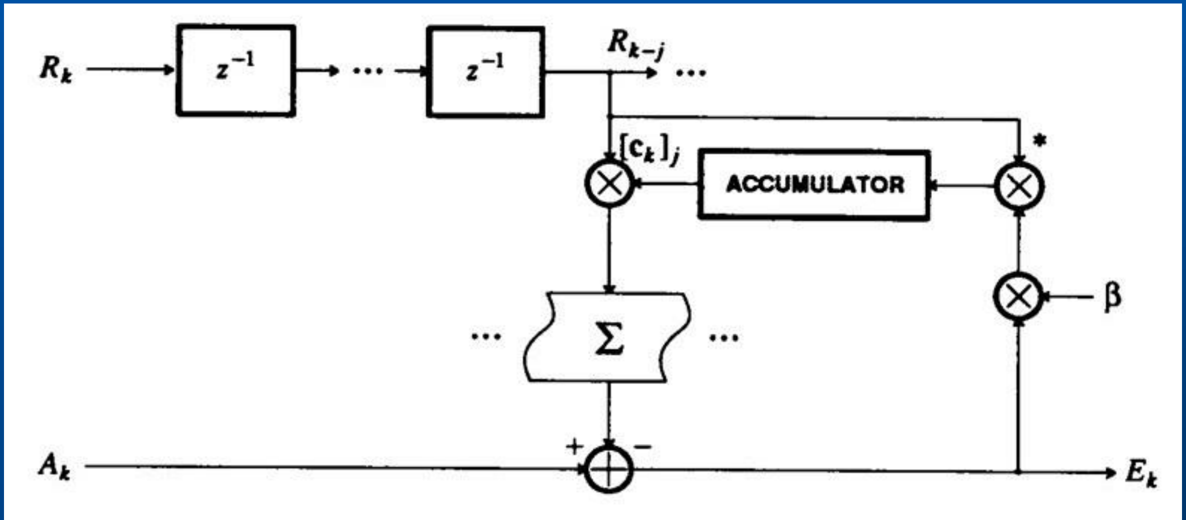
tal que

$$\boldsymbol{c}_{k+1} = \boldsymbol{c}_k - \frac{\beta}{2} \nabla_{\boldsymbol{c}} |e_k|^2 \Big|_{\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}_k} = \boldsymbol{c}_k + \beta e_k \boldsymbol{r}_k^*$$

Ecualización Lineal Adaptativa

Considerando cada coeficiente,

$$[c_{k+1}]_j = [c_k]_j + \beta e_k r^*_{k-j} \qquad -L \leq j \leq L$$



Algoritmo LMS para un coeficiente. Las señales asociadas serán en general complejas.

Ecualización lineal adaptativa ...

Convergencia del algoritmo LMS.

A diferencia del SD (donde la trayectoria de cada coeficientes es determinística), el LMS tiene trayectorias de los coeficientes estocásticas.

Una forma de analizar la convergencia es suponer una entrada estacionaria (usualmente no cierto). De esta forma tiene estadística conocida y el algoritmo se puede estudiar en relación al SD.

Cuando la entrada es estacionaria y β es pequeño, la trayectoria de los coeficientes variará lentamente. En cambio, la entrada variará rápidamente en relación a los coeficientes.

Ecualización lineal adaptativa ...

Entonces, partiendo de

$$\boldsymbol{c}_{k+1} = \boldsymbol{c}_k + \beta e_k \boldsymbol{r}_k^* = [\boldsymbol{I} - \beta \boldsymbol{r}_k^* \boldsymbol{r}_k^T]\boldsymbol{c}_k + \beta A_k \boldsymbol{r}_k^*$$

Y promediando respecto a la estadística de $\boldsymbol{r}_k$ se tiene

$$\boldsymbol{c}_{k+1} = E[(\boldsymbol{I} - \beta \boldsymbol{r}_k^* \boldsymbol{r}_k^T)\boldsymbol{c}_k] + \beta E[A_k \boldsymbol{r}_k^*] \cong (\boldsymbol{I} - \beta \boldsymbol{\Phi})\boldsymbol{c}_k + \beta \boldsymbol{\alpha}$$

El comportamiento medio de las trayectorias se obtiene entonces de

$$E[\boldsymbol{c}_{k+1}] \cong (\boldsymbol{I} - \beta \boldsymbol{\Phi}) E[\boldsymbol{c}_k] + \beta \boldsymbol{\alpha}$$

que es análoga a la del algoritmo SD.

Notar que esto no implica que las trayectorias converjan a un punto óptimo (mas bien convergen a una región óptima).

Ecualización lineal adaptativa ...

Para analizar la variación del vector de coeficientes alrededor del óptimo, consideremos (transformación de coordenadas) $\boldsymbol{q}_k = \boldsymbol{c}_k - \boldsymbol{c}_{opt}$

$$E[|e_k|^2] \cong \xi_{\min} + E[\boldsymbol{q}_k^H \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{q}_k]$$

Especializando el análisis para una entrada no correlacionada de media cero, i.e.,

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{I}, \ \phi_0 = E[|r_k|^2]$$

se tiene que

$$E[|e_k^2|] = \xi_{\min} + \phi_0 E[\|\boldsymbol{q}_k\|^2]$$

que relacionada las dos medidas de desempeño del algoritmo (varianza de los coeficientes y varianza del error).

Ecualización lineal adaptativa ...

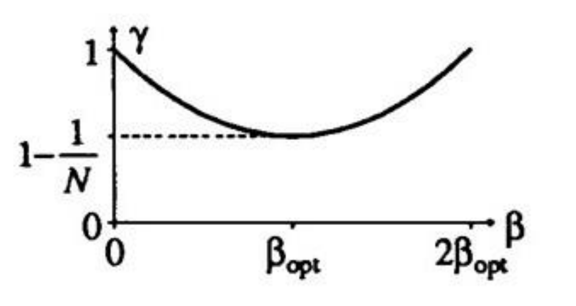
Se puede mostrar que

$$E[\|\boldsymbol{q}_{k+1}\|^2] = \gamma E[\|\boldsymbol{q}_k\|^2] + \beta^2 N\phi_0\xi_{\text{min}}, \qquad \gamma = 1 - 2\beta\phi_0 + \beta^2 N\phi_0^2$$

Existe un único modo por la suposición de entrada blanca.

La condición de estabilidad es $|\gamma| < 1$, tal que $\beta_{opt} = 1/N\phi_0$ determina la máxima velocidad de convergencia, de donde

$$0 < \beta < \frac{2}{N\phi_0} = 2\beta_{opt}$$



Rango de β para convergencia del MSE para una entrada ruido blanco (*N*=*2*).

en general mas restrictiva que la obtenida para la convergencia del vector de coeficientes promedio.

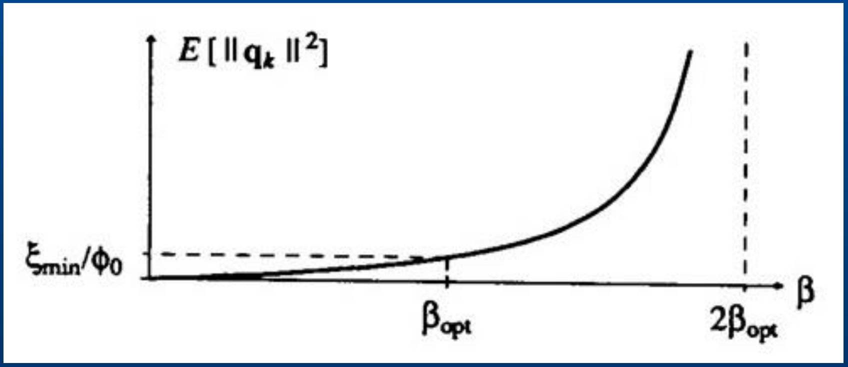
Ecualización lineal adaptativa …

La varianza del error en los coeficientes después de la convergencia será

$$E[\|\boldsymbol{q}_k\|^2] \rightarrow \frac{N\beta}{2 - N\beta\phi_0}\xi_{\min}, \quad \text{para } k \rightarrow \infty$$

tal que para β_{opt} ,

$$E[\|\boldsymbol{q}_k\|^2] \rightarrow \frac{1}{\phi_0}\xi_{\min} \qquad\qquad E[|e_k|^2] \rightarrow \xi_{\min} + \xi_{\min}$$



Promedio asintótico de la norma cuadrática del vector de coeficientes del filtro después de la convergencia.

Ecualización lineal adaptativa ...

Como la convergencia es de un solo modo (exponencial) es conveniente definir una constante de tiempo, requerida para disminuir el MSE en un factor e^{-1} .

Con $\gamma^{\tau} = 1/e$, se tiene que $\tau \cong 1/2\beta\phi_0$. Entonces para β_{opt}, $\tau \cong N/2$

Como conclusión, la mayor velocidad de convergencia depende del número de coeficientes del filtro (mayor complejidad, mas lento el algoritmo!).

Existe un compromiso entre velocidad de convergencia y MSE asintótico. El menor β generalmente está limitado por la precisión de la aritmética digital utilizada.

Ecualización lineal adaptativa ...

Normalización del tamaño del paso.

El algoritmo LMS depende de la potencia de la señal de entrada (esto puede concluirse, por ejemplo, as partir del β_{opt}).

Esta dependencia puede reducirse considerando

$$\beta_k = \frac{a}{\sigma_k^2 + b}$$

La potencia promedio se puede estimar por

$$\sigma_k^2 = (1-\alpha)\sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j |r_{k-j}|^2$$

O, en forma recursiva

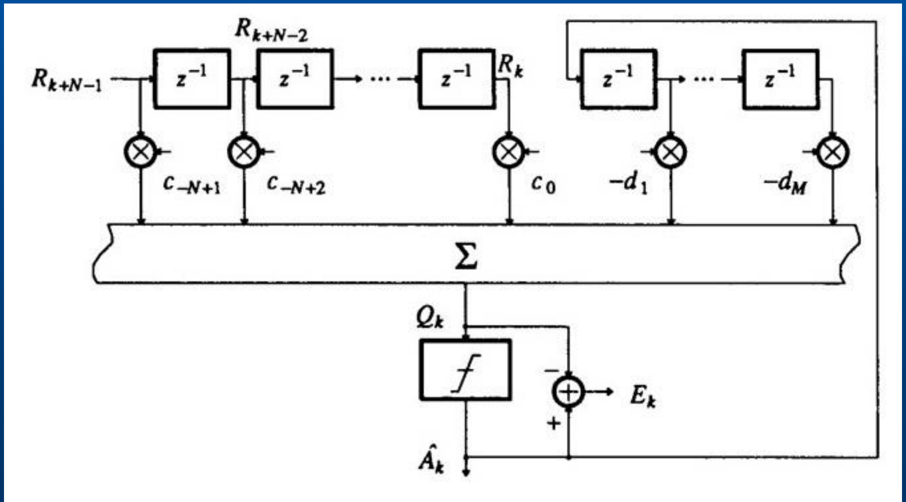
$$\sigma_k^2 = \alpha\sigma_{k-1}^2 + (1-\alpha)|r_k|^2$$

DFE adaptativo

Es esencialmente el mismo esquema que para el LE, excepto que es necesario el filtro postcursor, tal que la entrada al elemento de decisión será:

$$Q_k = \sum_{i=-(N-1)}^{0} c_i r_{k-i} - \sum_{i=1}^{M} d_i \hat{A}_{k-i}$$

Estructura de DFE para filtros precursor y postcursor FIR. Las señales serán en general complejas.



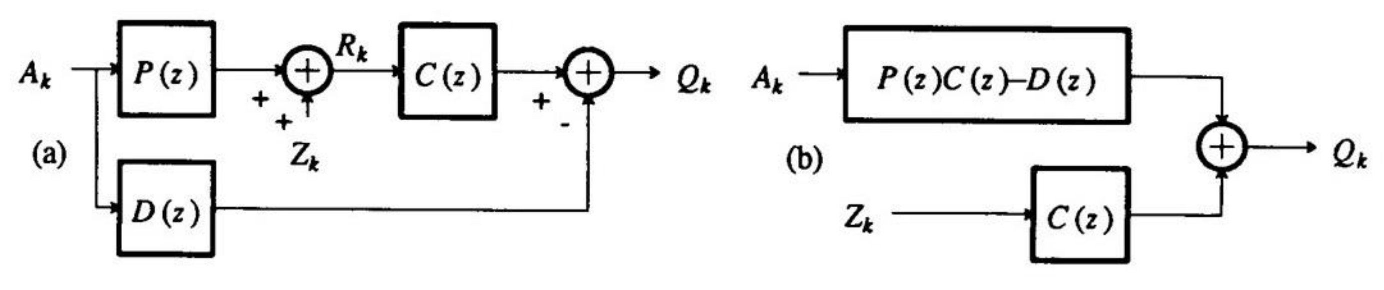
DFE adaptativo …

Solución del MSE.

Se obtendrá la solución para minimizar $E[|e_k|^2]$ ahora con pre y postcursor de complejidad restringida.

Existen dos términos en el modelo equivalente: uno asociado al ruido, el otro a la ISI.

En este último término es más simple obtener primero los coeficientes del postcursor.



a) Canal equivalente, ecualizador precursor y postcursor suponiendo que no existen errores; b) Simplificación después de combinar filtros.

DFE adaptativo …

El término de ISI tiene la forma: $\sum_m \nu_m A_{k-m}$, donde

$$\nu_k = \begin{cases} \sum_{i=-(N-1)}^{0} c_i p_{k-i} - d_k, & 1 \leq k \leq M \\ \sum_{i=-(N-1)}^{0} c_i p_{k-i}, & \text{para todo otro } k \end{cases}$$

Es evidente que si los símbolos no están correlacionados el MSE se minimiza eligiendo *D(z)* para eliminar las primeras *M* muestras de ISI, i.e., forzar $\nu_k = 0,\ 1 \leq m \leq M$.

Con los coeficientes postcursor, se sustituye esta solución en la ecuación anterior y se minimiza el MSE para obtener los coeficientes precursor c_k.

Es posible verificar que si los símbolos no están correlacionados, tienen media cero y varianza σ_a^2, los coeficientes óptimos del precursor satisfacen $\boldsymbol{c}_{opt} = \boldsymbol{\Phi}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$

DFE adaptativo …

Es posible verificar que si los símbolos no están correlacionados, tienen media cero y varianza σ_a^2 , los coeficientes óptimos del precursor satisfacen

$$\boldsymbol{c}_{opt} = \boldsymbol{\Phi}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$$

donde

$$\boldsymbol{c}^T = [c_{-(N-1)} \cdots c_0] \qquad\qquad \boldsymbol{\alpha}^T = \sigma_a^2 [p_{-(N-1)} \cdots p_0]$$

$$\phi_j = \sigma_a^2 \sum_{k, k \neq (1,M)} p_{k+j} p_k^* + 2 N_0 \rho_f(j)$$

y $\rho_f(k)$ es la autocorrelación asociada a la respuesta impulsiva del filtro de recepción $f(t)$.

DFE adaptativo …

Algoritmo de gradiente estocástico.
Se define primero un vector de coeficientes aumentado

$$\boldsymbol{v}^T = [c_{-(N-1)} \cdots c_0 \ -d_1 \cdots -d_N]$$

y un vector de entrada

$$\boldsymbol{w}_k^T = [r_{k+(N-1)} \cdots r_k \ A_{k-1} \cdots A_{k-N}]$$

El error a la entrada del elemento de decisión será

$$e_k = \hat{a}_k - \boldsymbol{v}_k^T \boldsymbol{w}_k$$

de forma que el algoritmo LMS asociado será

$$\boldsymbol{v}_{k+1} = \boldsymbol{v}_k + \beta E_k \boldsymbol{w}_k^*$$

Ecualizador de espaciamiento fraccionario

Es más común utilizar un ecualizador de espaciamiento fraccionario porque:

- El conocimiento incompleto del canal hace imposible realizar un MF.
- El FSE es menos sensible a la variación de fase del sincronismo.
- Por implementación, un MF separado incluiría mayor atenuación al canal, requiriendo mayor ganancia en el ecualizador, aumentando sus requerimientos de rango dinámico.

Para una complejidad restringida los resultados son muy similares a los anteriores en términos del desarrollo de los algoritmos.

Sin embargo, el FSE tiene problemas en términos de condicionamiento numérico.

Ecualizador de espaciamiento fraccionario …

Condiciones para un MSE único.

La existencia de una solución única para el problema del MSE depende de la no singularidad de Φ . Esto ocurre cuando uno o mas autovalores son nulos.

Para el FSE, el ancho de banda de la señal de datos es deliberadamente disminuida a la mitad de la velocidad de transmisión por lo que este problema de mal condicionamiento será evidente.

A pesar que existirá ruido en todas las frecuencias, puede ser bajo y no evitar el problema de bajos autovalores.

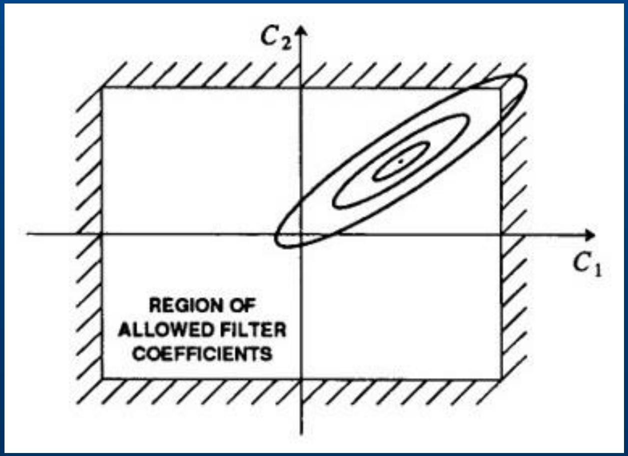
Ecualizador de espaciamiento fraccionario …

Deriva de los coeficientes.

La fluctuación de los coeficientes en la dirección de la menor sensibilidad (la dirección del autovector correspondiente al menor autovalor) tenderá a ser mayor.

Soluciones

- Saturación.
- Introducir ruido blanco a la entrada del algoritmo (peor desempeño).
- Minimizar una función diferente: $E[|e_k|^2] + \mu\|\boldsymbol{c}\|^2$



Contornos de igual MSE para una dispersión de autovalores grande.

Ecualización pasabanda

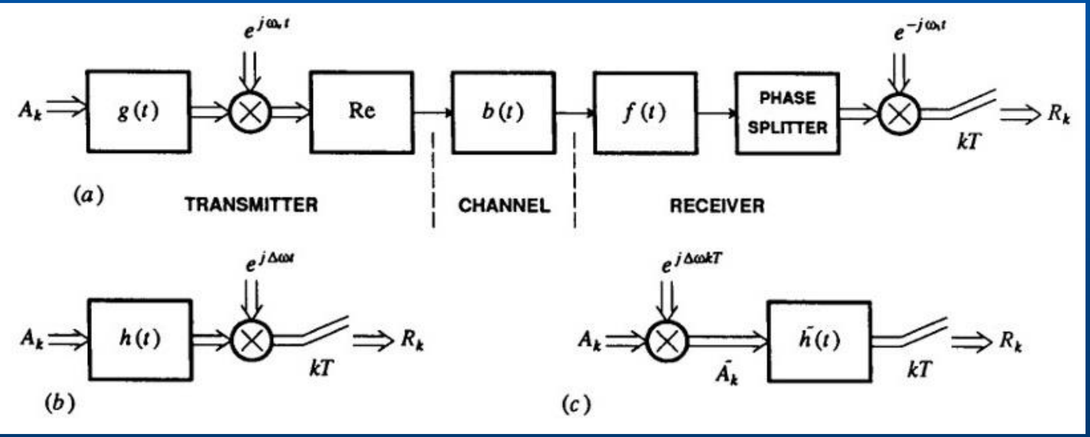
Es mas común que la ecualización bandabase por la dificultad de realizar la ecualización en el lazo de recuperación de portadora.

Para obtener la estructura de ecualización pasabanda se requiere un nuevo modelo tal que la demodulación sea puesta en evidencia en el receptor.

En el transmisor w_c y en el receptor w_1 .

w_1 se elige nominalmente igual a w_c, pero por ser generadas por osciladores independientes existe un pequeño offset,

$$\Delta w = w_c - w_1$$



Modelización con un canal pasabanda; a) Transmisor, canal y receptor suponiendo que la demodulación usa w_1 en vez de w_c ; b) Modelo formado por un filtro bandabase y un modulador; c) Modelo usando un modulador y un filtro pasabanda.

Ecualización pasabanda …

En el modelo bandabase considerado hasta ahora: $w_1 = w_c$. Si no existe demodulación $w_1 = 0$.

Para el modelo discreto

$$h(t) = g(t) * (b(t) * f(t))E^{-jw_c t})$$

tal que

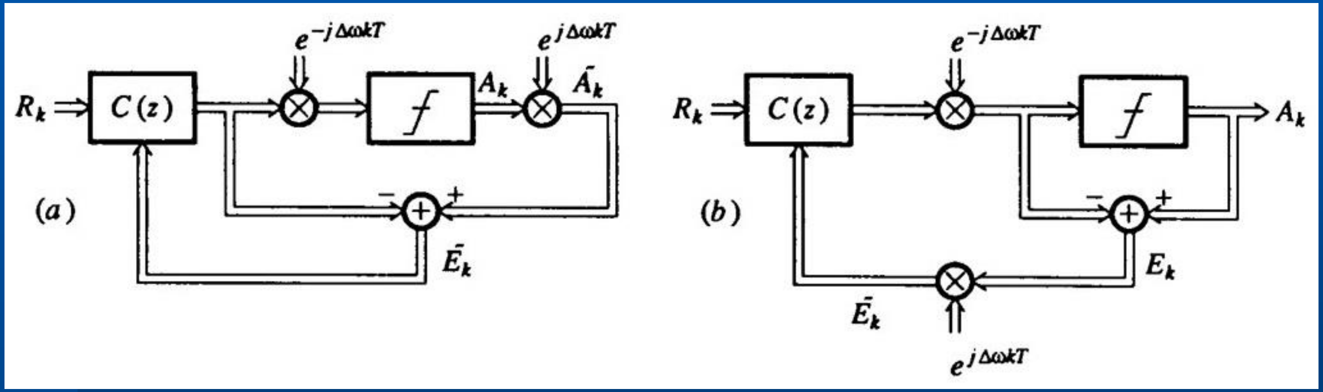
$$\sum_k A_k h(t-kT)e^{j\Delta wt} = \sum_k \tilde{A}_k \tilde{h}(t-kT)$$

donde $\tilde{A}_k = A_k e^{j\Delta wkT}$ es el *símbolo rotado* y $\tilde{h}(t) = h(t)e^{j\Delta wt}$ es la *respuesta del canal pasabanda*.

Esta última interpretación es el tercer modelo anterior.

Ecualización pasabanda …

Con esta última interpretación se puede pensar el canal consistente en un filtro pasabanda $\tilde{h}(t)$ teniendo como entrada símbolos rotados $\tilde{A}_k$.



Estructura del ecualizador pasabanda; a) Generación directa de la señal de error rotada; b) Rotación de la señal de error del elemento de decisión.

Ecualización pasabanda …

La convergencia del ecualizador pasabanda adaptativo es similar a la del ecualizador banda base excepto por:

- El ecualizador pasabanda tiene como entrada símbolos rotados (esto no tiene contrapartida en el ecualizador banda base).
- El ecualizador pasabanda trabaja con el modelo $\tilde{h}(t)$ antes que $h(t)$.

La estadística de los símbolos rotados en relación a los no rotados:

$$S_{\tilde{A}}(e^{jwT}) = S_A(e^{j(w-\Delta w)T})$$

de forma que si los símbolos no están correlacionados las propiedades de convergencia serán las mismas que para el caso bandabase.

Ecualización pasabanda …

El ecualizador pasabanda puede ser utilizado de varias formas:

- Se puede hacer un seguimiento de fase de la portadora entrante, haciendo $w_1 = w_c \, (\Delta w = 0)$. Esto conduce a problemas en la recuperación de la portadora (por el retardo que el ecualizador introduce en el lazo).
- Se puede elegir $w_1 = 0 \, (\Delta w = w_c)$. Este es el ecualizador pasabanda.
- Se puede elegir w_1 nominalmente igual a w_c pero sin el seguimiento de un PLL. En este caso Δw es pequeño pero desconocido. Esto se puede interpretar como un ecualizador bandabase.

En los dos últimos casos se requiere un PLL para compensar la rotación a la salida del ecualizador.

Ecualización Adaptativa (resumen)

- Ecualizadores de complejidad reducida.
- Ecualizador lineal Adaptativo.
- DFE Adaptativo.
- Ecualizador de espaciamiento fraccionario.
- Ecualización pasabanda.