

# Procesamiento de Señales en Comunicaciones

Departamento de Ingeniería Eléctrica y Computadoras  
Universidad Nacional del Sur

# Contenidos

- **Modulación.**
- **Diseño de distancia Mínima.**
- **Desempeño en ruido.**
- **Detección.**
- **Ecualización óptima.**
- **Ecualización adaptativa.**
- **Modulación de portadoras múltiples**

# Diseño de distancia mínima.

- Espacio de señales.
- Modelado de señales
- Diseño en base a distancia mínima.
- Aplicación a diferentes modulaciones
  - Pulsos aislados
  - Con ISI.
- Ancho de banda y dimensionalidad.

## Diseño de distancia mínima para PAM con ISI

En este caso consideramos

$$y(t) = \sum_{k=1}^K a_k h(t - kT) + e(t)$$

donde  $h(t)$  es el pulso recibido (no satisface necesariamente Nyquist), con energía  $\sigma_h^2$  y  $e(t)$  es ruido.

Ahora consideramos secuencias de símbolos de longitud  $K$ ,  $\{a_k, 1 \leq k \leq K\}$  en lugar de símbolos aislados.

Si cada símbolo es de un alfabeto de tamaño  $M$ , el tamaño (posibles combinaciones) de las señales será

$$L = M^K$$

La base ortogonal no es útil en este caso.

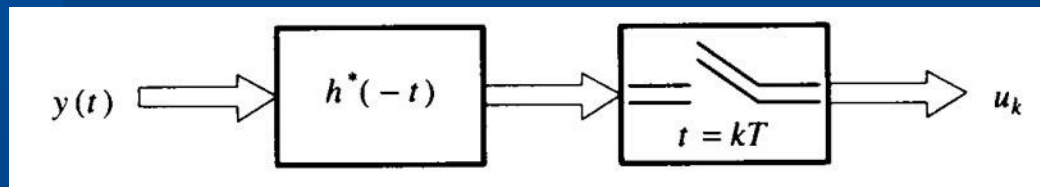
## Diseño del receptor

Utilizando el criterio de distancia mínima, se obtiene

$$\max_{\{a_k, 1 \leq k \leq K\}} \left( 2\operatorname{Re}\left\{ \sum_{k=1}^K u_k a_k^* \right\} - \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^K a_k a_m^* \rho_h(m-k) \right)$$

donde

$$u_k = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) h^*(t - kT) dt$$



$$y(t) \rightarrow u_k$$

Front-end del receptor de MF muestreado. Permite el mapeo de un criterio continuo a un criterio discreto.

# Diseño del receptor

## Algunas observaciones:

- Maximizar la anterior requiere repetir el cálculo para todas las posibles  $M^K$  secuencias, tal que *se detectan  $K$  símbolos simultáneamente* (no símbolo por símbolo como antes).
- Este criterio (distancia mínima) define un filtro que *no satisface Nyquist* para eliminar ISI. Compensa ISI de una forma totalmente diferente.
- Como para Nyquist el ancho de banda de señal  $B \geq 1/2T$ , entonces en general no se verifica el Teorema de muestreo ( $f_s \geq 2B$ ) y se tendrá *aliasing*.
- Problemas prácticos: *alta complejidad* (implementación crece exponencialmente con  $K$ ).

## PAM con ISI: Criterio discreto equivalente

- Una propiedad del espectro desdoblado (folded spectrum) será de utilidad para obtener una estructura básica para el receptor de distancia mínima en el caso de considerar ISI.
- Consideramos primero un caso particular donde no existe ISI y luego el caso general.

## PAM con ISI: Criterio discreto equivalente...

### Caso especial: pulsos ortogonales

Se cumple Nyquist, i.e.  $\rho_h(k) = \sigma_h^2 \delta_k^2$ , entonces

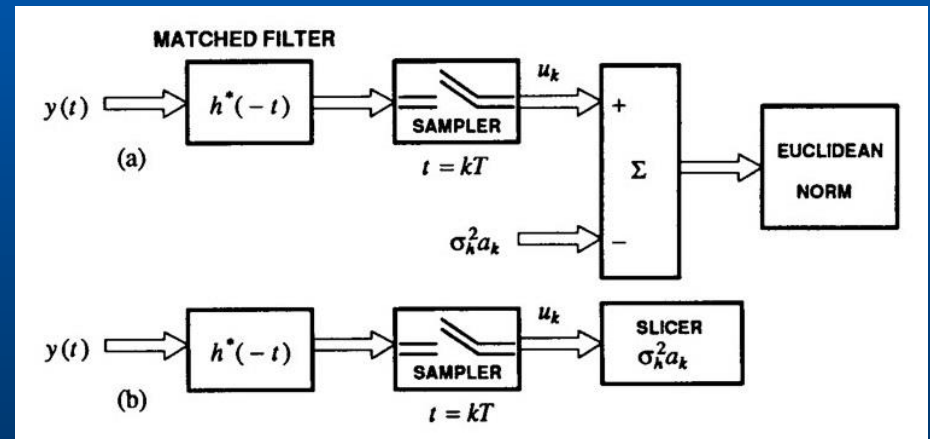
$$\max_{\{a_k, 1 \leq k \leq K\}} \left( 2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^K u_k a_k^* \right\} - \sigma_h^2 \sum_{k=1}^K |a_k|^2 \right) = \min_{\{a_k, 1 \leq k \leq K\}} \sum_{k=1}^K |u_k - \sigma_h^2 a_k|^2$$

tal que a la salida del MF muestreado es

$$u_k = \sigma_h^2 a_k + e_k$$

sin ISI.

Si la norma se toma símbolo por símbolo, el receptor se simplifica considerablemente (fig. b).



Receptor de PAM de distancia mínima cuando PAM satisface el criterio de Nyquist.; a) el receptor se aplica a cada conjunto de secuencias de símbolos; b) el caso especial donde los símbolos se eligen independientemente (detección por símbolo).



## PAM con ISI: Criterio discreto equivalente...

Estructura más general que en el caso de no ISI

Ejemplo:

Para eliminar componente de cc en PAM bandabase uso de señalización Manchester:  $a_k = 0$  para bit 0,  $|a_k| = 1$  para bit 1, donde el signo de  $a_k$  se elige como el opuesto al del último  $a_k$  no cero.

Mientras la realización fig. b anterior viola esta regla (podría detectar 2 símbolos positivos o negativos seguidos), la implementación adecuada es la de fig. a.

Caso de redundancia, ya que si bien la secuencia pareciera considerar  $3^K$  secuencias, la restricción del código solo considera  $2^K$ .

## PAM con ISI: Criterio discreto equivalente ...

Caso general:

Cálculo directo impráctico porque:

- La decisión para una única secuencia tiene complejidad  $K^2$ . Para el caso ortogonal complejidad lineal (veremos que se puede extender al caso general!)
- El número total de secuencias es  $M^K$ . Solución con **Algoritmo de Viterbi** (más adelante).

## PAM con ISI: Criterio discreto equivalente ...

Para obtener un diseño de complejidad lineal de la decisión se utilizará la **factorización espectral** del espectro desdoblado dada por

$$S_h(z) = A_h^2 G_h(z) G_h^*(1/z^*)$$

donde  $G_h(z)$  es una función transferencia mónica (término de orden cero unitario) de fase mínima, y  $S_h(z)$  es no negativa real sobre el círculo unitario.

En el dominio tiempo, la autocorrelación de los pulsos será

$$\rho_h(k) = A_h^2 (g_{h,k} * g_{h,-k}^*)$$

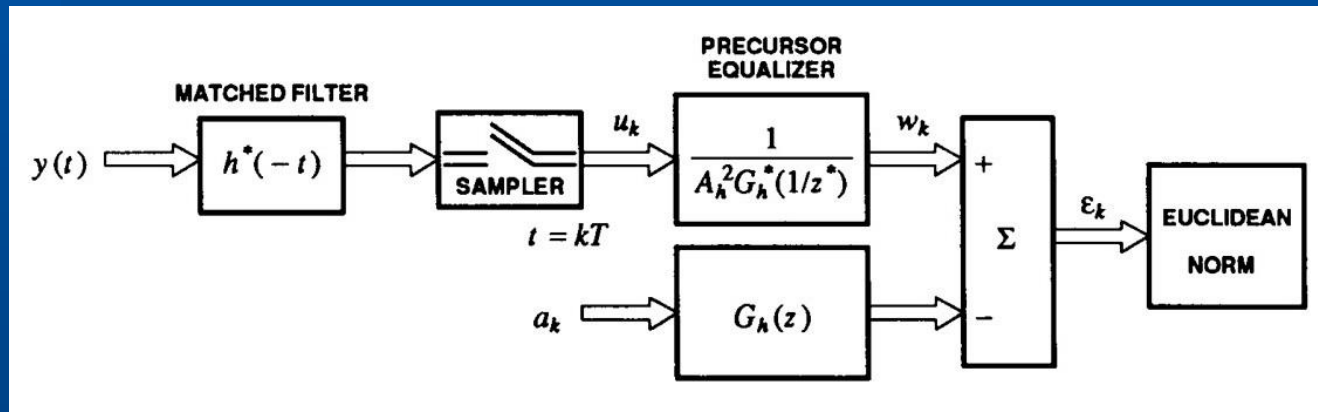
## PAM con ISI: Criterio discreto equivalente ...

Para  $u_k$  la salida del MF muestreado, el *ecualizador precursor* es el filtro con esa entrada y función transferencia

$$\frac{1}{A_h^2 G_h^*(1/z^*)}$$

cuya salida es  $w_k$ , tal que el criterio ahora es

$$\min_{\{a_k, 1 \leq k \leq K\}} \sum_{m=1}^{\infty} |w_m - \sum_{k=1}^K a_k g_{h,m-k}|^2$$



Extensión del esquema anterior, donde el criterio de distancia mínima continuo muestreado se transforma en un criterio de distancia mínima discreto equivalente.

## PAM con ISI: Criterio discreto equivalente ...

Observaciones:

- Este diseño es posible siempre que exista la factorización espectral del espectro desdoblado  $S_h(z)$ .
- Es una generalización del caso ortogonal y, si  $G_h(z)$  es FIR, el cálculo de la métrica de cada secuencia tiene complejidad lineal (proporcional a  $K$ ).
- Este criterio es una versión discreta equivalente del diseño continuo muestreado original.
- El ecualizador de la rama superior se denomina *precursor* porque elimina una parte de la ISI (la parte anticausal).
- En presencia de ISI ( $G_h(z) \neq 1$ ) no es equivalente al diseño de detección símbolo por símbolo.

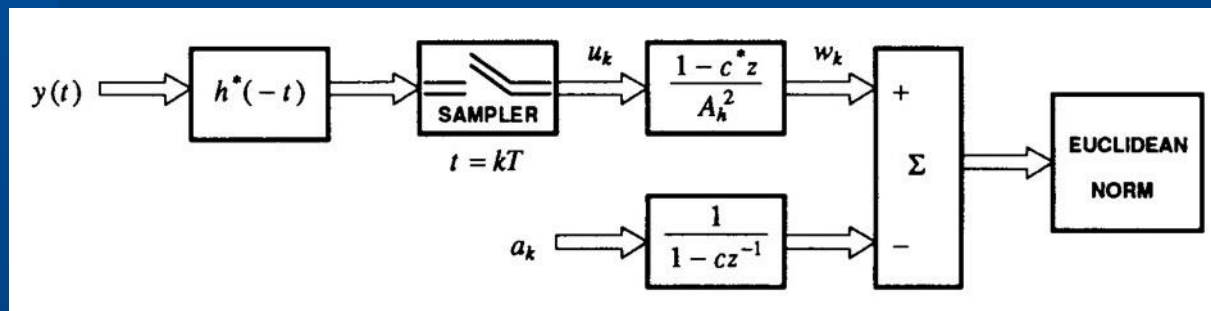
## PAM con ISI: Criterio discreto equivalente ...

Como  $G_h(z)$  es de fase mínima,  $G_h^*(1/z^*)$  y  $1/G_h^*(1/z^*)$  son de fase máxima. Para ser estable este filtro tiene que ser anticausal (impráctico).

Pero si es FIR (o aprox.) puede implementarse con un filtro causal y un retardo.

Ejemplo:

$$S_h(z) = \frac{A_h^2}{(1 - cz^{-1})(1 - c^*z)}, \quad |c| < 1 \quad \text{Entonces: precursor FIR anticausal}$$

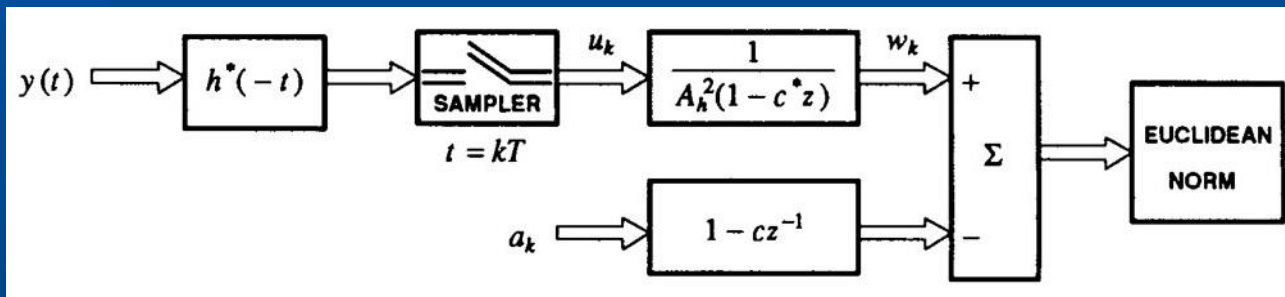


## PAM con ISI: Criterio discreto equivalente ...

Ejemplo:

$$S_h(z) = A_h^2(1 - cz^{-1})(1 - c^*z), \quad |c| < 1$$

El filtro precursor es IIR anticausal, solo aproximable mediante un filtro FIR anticausal.



## PAM con ISI: Criterio discreto equivalente ...

Equivalencia entre criterios:

La salida del MF muestreado se puede escribir como

$$u_k = \sum_{m=1}^K a_m \rho_h(k-m) + e_k = a_k * \rho_h(k) + e_k$$

Función transferencia  $S_h(z)$

Con esta entrada al filtro precursor, la función transferencia para los símbolos queda

$$\frac{S_h(z)}{A_h^2 G_h^*(1/z^*)} = G_h(z)$$

tal que la salida es

$$w_k = \sum_{m=1}^K a_m g_{h,k-m} + e'_k$$

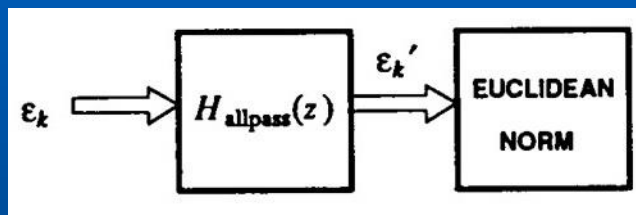
Un filtrado causal!! (se eliminó la parte anticausal)



## PAM con ISI: Criterio discreto equivalente ....

Solución no única del criterio discreto:

Como  $S_h(z)$  puede no ser de fase mínima, si intercalamos un pasatodo  $H_{allpass}(z)$



Por teorema de Parseval:

$$\sum_{m=1}^{\infty} |\epsilon_m|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} |\epsilon'_m|^2$$

por lo que desplazando el pasatodo hacia atrás en las dos ramas, la secuencia detectada será la misma. Equivalente, sin embargo ISI en general mayor, porqué?.

## PAM con ISI: Criterio discreto equivalente ....

Distancia mínima:

Para dos secuencias  $\{\tilde{a}_k, 1 \leq k \leq K\}$  y  $\{\hat{a}_k, 1 \leq k \leq K\}$  consideramos

$$\varepsilon_k = \tilde{a}_k - \hat{a}_k$$

Entonces, entre dos señales

$$d^2 = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K \varepsilon_i \varepsilon_j^* \rho_h(j-i)$$

o, en forma discreta (con  $\rho_h(k) = A_h^2 (g_{h,k} * g_{h,-k}^*)$ ), resulta en el siguiente problema de minimización

$$d_{\min}^2 = \min_{\varepsilon_k, 1 \leq k \leq K} A_h^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{i=1}^K \varepsilon_i g_{h,k-i} \right|^2$$

Esto lo estudiaremos en clases siguientes.

## Ancho de banda y dimensionalidad

Una propiedad importante de diseño de señales es la eficiencia espectral. En relación al criterio de Nyquist generalizado, se establece  $B \geq N/2T$  para eliminar ISI en  $N$  pulsos ortogonales.

Se trabaja en general con un espacio de  $L$  señales de dimensión finita  $N$ .

Cual es la relación entre el ancho de banda de esta señales y la dimensión ??

## Ancho de banda y dimensionalidad ...

### Teorema de Landau-Pollak:

*Dado un conjunto de  $2Bt_0 + 1$  señales ortonormales  $\phi_i(t)$ , tal que para cualquier  $f(t)$  con energía  $\sigma_f^2$  limitada a  $B$  Hz, para cualquier constante  $0 < \varepsilon < 1$ , y para cualquier  $t_0$  suficientemente grande se cumple*

$$\int_0^{t_0} |f(t)|^2 dt > \sigma_f^2 (1 - \varepsilon)$$

*Y existe un conjunto de  $2Bt_0 + 1$  coeficientes  $f_i$ , tal que*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| f(t) - \sum_{i=0}^{2Bt_0} f_i \phi_i(t) \right|^2 dt < 12 \sigma_f^2 \varepsilon$$

*Entonces, dimensión del espacio:  $2Bt_0 + 1$*

Una  $f(t)$  así acotada se puede aproximar con dimensiones dadas por el teorema

## Ancho de banda y dimensionalidad ...

Relación con el criterio de Nyquist generalizado:

Consideremos una secuencia de  $K$  símbolos transmitidos, y  $h_n(t)$ ,  $1 \leq n \leq N$  es un conjunto ortogonal de pulsos de ancho de banda  $B$  Hz.

Una señal PAM /PO combinada será

$$s(t) = \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{n=1}^N A_{k,n} h_n(t - kT)$$

y estará en un espacio  $NK$ -dimensional.

Puede mostrarse que está limitada en tiempo a  $(0, KT)$ . Entonces por el teorema puede aproximarse por  $(2 B K T + 1)$  funciones ortogonales.

$$2BKT + 1 \geq NK, \quad B \geq \frac{NK-1}{2KT}$$

Entonces, si  $K \rightarrow \infty$  se verifica  
Nyquist generalizado  $N/2T$

## Ancho de banda y dimensionalidad ...

El **producto tiempo-ancho de banda**  $2Bt_0$  juega un papel fundamental en señales aproximadamente limitadas en tiempo y frecuencia: a menor  $2Bt_0$ , mas artificial es la aproximación.

El teorema considera señales limitadas en frecuencia y aproximadamente limitadas en tiempo. El dual también es posible.

## Ancho de banda y dimensionalidad ...

Ejemplo:

En DS-SS (espectro disperso de secuencia directa),  $h(t)$  se modula en amplitud.

Para evitar ISI el ancho de banda debe ser mayor que  $1/2T$ . Pero en este caso se usa  $B \gg$ , ***tal que  $2BT$  es muy grande.***

Entonces,  $h(t)$  está muy precisamente limitada en tiempo, ISI normalmente no es un problema.

## Ancho de banda y dimensionalidad ...

Ejemplo:

En modulación de pulsos ortogonales (ej. FSK).

Para satisfacer Nyquist generalizado  $2BT > N$ .

Si  $N$  es grande entonces los pulsos van a estar confinados a  $T$  (menos susceptible a ISI).

Aunque no es una premisa de esta modulación es una ventaja.



## Ancho de banda y dimensionalidad ...

Ejemplo:

En modulación multiportadora, cuando la dimensionalidad del conjunto de señales aumenta,  $B$  se mantiene constante pero aumenta  $T$ .

La clave es la eficiencia espectral aproximadamente constante. Por Nyquist  $N = 2BT$ , tal que aumentando  $T$ , aumenta  $N$ .

Entonces, también a mayor  $N$ , mas limitado a  $T$  queda el símbolo (con el prefijo cíclico, la ISI se elimina totalmente).

# Diseño de distancia mínima (resumen).

- Espacio de señales.
- Modelado de señales
- Diseño en base a distancia mínima.
- Aplicación a diferentes modulaciones
  - Pulsos aislados
  - Con ISI.
- Ancho de banda y dimensionalidad.