

# Procesamiento de Señales en Comunicaciones

Departamento de Ingeniería Eléctrica y Computadoras  
Universidad Nacional del Sur

# Contenidos

- **Modulación.**
- **Diseño de Distancia Mínima.**
- **Desempeño en ruido.**
- **Detección.**
- **Ecualización óptima.**
- **Ecualización adaptativa.**
- **Modulación de portadoras múltiples**

# Desempeño en Ruido

- Procesos Gaussianos complejos.
- Probabilidad de error: Resultados generales.
- Probabilidad de error PAM sin ISI.
- Desempeño de Distancia Mínima pulso aislado.
  - PAM; Pulsos Ortogonales (PO); Combinación PAM / PO.
- Desempeño de Distancia Mínima para PAM con ISI.
- Espectro Disperso.
- Capacidad y Modulación.

## Desempeño de distancia mínima de PAM con ISI

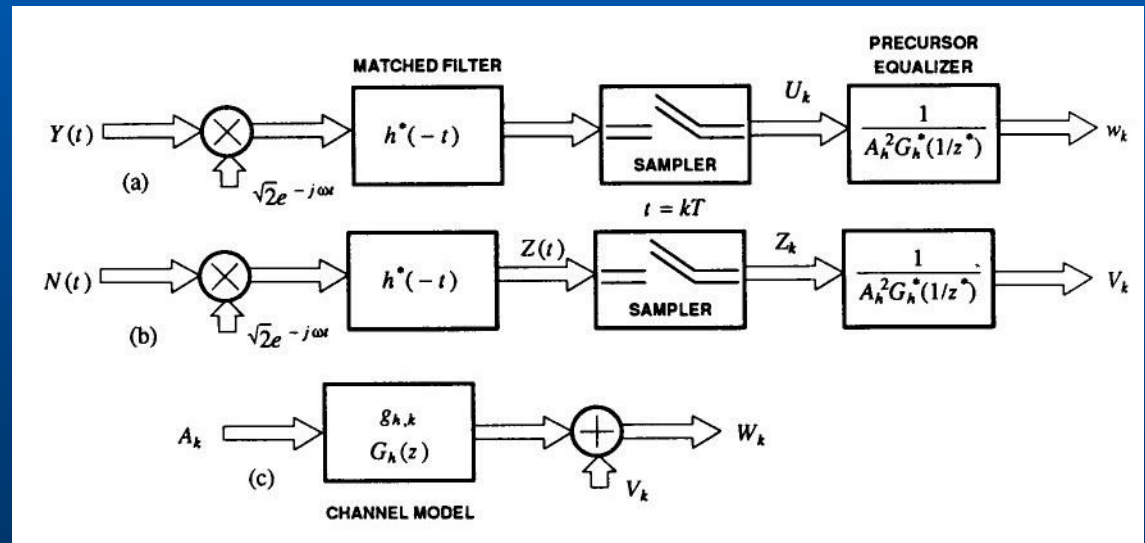
El ruido a la salida del filtro acoplado muestreado es coloreado, pero a la salida del ecualizador precursor **es blanco!**

El filtro acoplado, el muestreo de símbolos y el ecualizador precursor se denominan **filtro acoplado de blanqueo (WMF)**.

Para señal  $Y(t)$  →

Para ruido  $N(t)$  →

Para símbolos →  
(equivalente discreto)



El WMF para detección de PAM con ISI. a) Front-end de filtrado y muestreo; b) respuesta al AWGN del canal; c) modelo discreto equivalente.

## Desempeño de distancia mínima de PAM con ISI ...

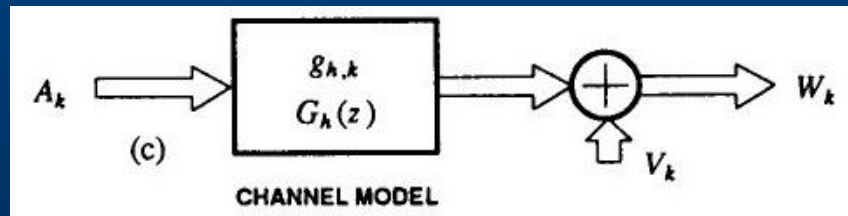
### Respuesta del WMF a los símbolos

La respuesta del WMF a un pulso aislado  $h(t)$ , la salida del muestreo es  $\rho_h(t)$ , cuyo espectro desdoblado tiene la factorización

$$S_h(z) = A_h^2 G_h(z) G_h^*(1/z^*)$$

Entonces, la salida del ecualizador precursor estará filtrada por

$$S_h(z) \frac{1}{A_h^2 G_h^*(1/z^*)} = G_h(z)$$



## Desempeño de distancia mínima de PAM con ISI ...

Respuesta del WMF al ruido

A la salida del MF

$$S_Z(j\omega) = 2N_0 |H(j\omega)|^2$$

Después del muestreo

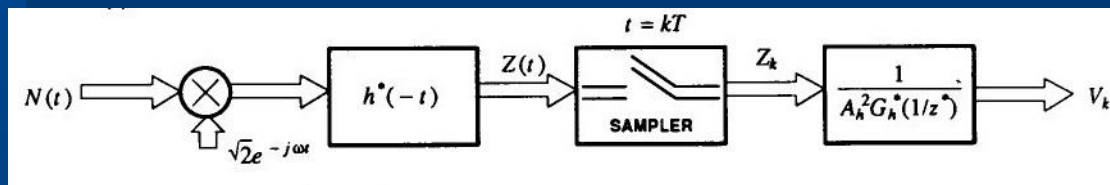
$$S_Z(e^{j\omega T}) = 2N_0 S_h(e^{j\omega T}), \text{ con } S_h(z) = A_h^2 G_h(z) G_h^*(1/z^*)$$

entonces, a la salida del filtro acoplado el ruido es en general no blanco.

Sin embargo,

$$S_V(z) = 2N_0 S_h(z) \frac{1}{A_h^2 G_h^*(1/z^*)} \frac{1}{A_h^2 G_h(z)} = \frac{2N_0}{A_h^2}$$

o sea Gaussiano blanco circularmente simétrico (con  $Re$  e  $Im$  de varianza  $\sigma^2 = N_0/A_h^2$ ).



## Desempeño de distancia mínima de PAM con ISI ...

### Receptor de distancia mínima

La salida del WMF será

$$W_k = \sum_{m=1}^K a_m g_{h,k-m} + V_k$$

donde la señal conocida tiene componentes (infinitas a menos que  $G_h(z)$  sea FIR)

$$s_k = \sum_{m=1}^K a_m g_{h,k-m}, \quad 1 \leq k < \infty$$

El receptor de distancia mínima realiza la minimización

$$\min_{\{a_k, 1 \leq k \leq K\}} \sum_{k=1}^{\infty} \left| W_k - \sum_{m=1}^K a_m g_{h,k-m} \right|^2$$

## Desempeño de distancia mínima de PAM con ISI ...

### Probabilidad de error

En base a los resultados previos

$$P_e \cong KQ\left(\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right)$$

es la probabilidad de la **secuencia de error de símbolos** (uno o más errores en una secuencia de  $K$  símbolos). La distancia mínima entre secuencias será

$$d_{\min} = \min_{\{\epsilon_k, 1 \leq k \leq K\}} \sum_{m=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^K \epsilon_k g_{h,m-k} \right|^2$$

donde  $\epsilon_k = a_k^{(1)} - a_k^{(2)}$  es una secuencia de error de símbolos para dos secuencias arbitrarias diferentes.



## Espectro disperso (SS)

- SS es un medio de transmisión en el que la señal ocupa un ancho de banda mucho mayor que el mínimo necesario para enviar la información;
- La dispersión del ancho de banda se logra mediante un código que es independiente de los datos;
- Para volver al ancho de banda original se utiliza la recepción sincronizada con el código en el receptor;

## Espectro disperso (SS) ...

Ancho de banda y probabilidad de error:

A pesar de utilizar un ancho de banda grande, teniendo en cuenta el resultado para PAM (con  $d_{min} = \sigma_h^2 a_{min}$  y varianza de ruido  $\sigma^2 = \sigma_h^2 N_0$ , no se disminuye la SNR en el detector

$$P_e \cong KQ \left( \frac{\sigma_h^2 a_{min}}{2\sigma_h \sqrt{N_0}} \right) = KQ \left( \frac{\sigma_h a_{min}}{2\sqrt{N_0}} \right)$$

i.e., depende de la energía del pulso pero no del ancho de banda.

Es útil la probabilidad de error en términos de la SNR, con  $P_S = \frac{\sigma_A^2 \sigma_h^2}{T}$ ,  $SNR = \frac{P_S}{2N_0 B}$

$$P_e \cong KQ(\sqrt{2BT \cdot \eta_A \cdot SNR})$$

donde  $\eta_A = a_{min}^2 / 4\sigma_A^2$  depende de la constelación (independiente de cualquier escalamiento).

## Espectro disperso (SS) ...

Generación de pulsos de banda ancha:

Uso de forma de onda para definir *chip*  $h_c(t)$ , tal que el intervalo de símbolo se divide en  $T_c = T/N$ .

Uso de una *secuencia de dispersión*  $\{x_m, 0 \leq m \leq N - 1\}$  tal que

$$h(t) = \sum_{m=0}^{N-1} x_m h_c(t - mT_c) \qquad H(j\omega) = H_c(j\omega) \sum_{m=0}^{N-1} x_m e^{-j\omega m T_c}$$

EL chip determina el ancho de banda (normalmente para satisfacer Nyquist), i.e.  $B = 1/2T_c = N/2T$  con un factor de expansión  $N = T/T_c$ .

## Espectro disperso (SS) ...

### ISI y espectro disperso

Por la alta dimensionalidad  $2BT$ , el pulso transmitido puede hacerse bien limitado en tiempo.

El pulso recibido es afectado por el canal; interesa la señal a la salida del MF  $\rho_h(t)$  (ancho de banda  $B$  y TF  $|H(jw)|^2$ ).

*Ejemplo:* Suponiendo  $|H(jw)|^2$  se mantiene constante en  $B$ . Si la energía de pulso  $h(t)$  se normaliza, entonces  $|H(jw)|^2 = 1/2B$  y a la salida del MF

$$\rho_k(t) = \text{sinc}(2\pi Bt)$$

Si  $2BT$  entero y después del muestreo

$$\rho_k(kT) = \text{sinc}(k\pi 2BT) = \delta_k \quad \text{cumple Nyquist.}$$

Obs.:

- Para un canal ideal, la salida del filtro acoplado no depende de la fase solo de la magnitud del espectro de  $h(t)$ .
- La duración en tiempo del pulso a la salida del filtro acoplado puede ser mucho menor que el intervalo de símbolo.

## Espectro disperso (SS) ...

### ISI y espectro disperso

Condiciones suficientes para que  $\rho_h(t)$  cumpla Nyquist (aprox. ejemplo)

- $h_c(t)$  corresponde a un pasabajas ideal con  $B = 1/2T_c$
- La secuencia  $x_m$  se elige tal que  $\left| \sum_{m=0}^{N-1} x_m e^{-j\omega m T_c} \right|^2 = 1, \forall \omega.$

• Ejemplo:  $x_m = \delta_{k-L}$  para algún  $0 \leq L \leq N-1$ . Como el pico de señal es muy grande se generan problemas prácticos.

• Ejemplo:  $|x_m|^2 = 1/N, 0 \leq m \leq N-1$  Para cumplir la anterior en frecuencias equiespaciadas  $2\pi/NT_c$ .

Para  $|DFT|$  constante y  $|x_m|^2 \cong 1$  se utiliza registros de desplazamiento (secuencia de longitud máxima), y el resultado es *espectro disperso de secuencia directa (DS-SS)*.

## Espectro disperso (SS) ...

### ISI y espectro disperso

El *efecto del canal* se obtiene de  $h(t) * b(t) * h^*(-t) = \rho_h(t) * b(t)$ , tal que siempre que la duración de  $b(t)$  sea menor que el intervalo de símbolo  $T$ , la dispersión del canal no tendrá efecto significativo.

Ejemplo: para un canal

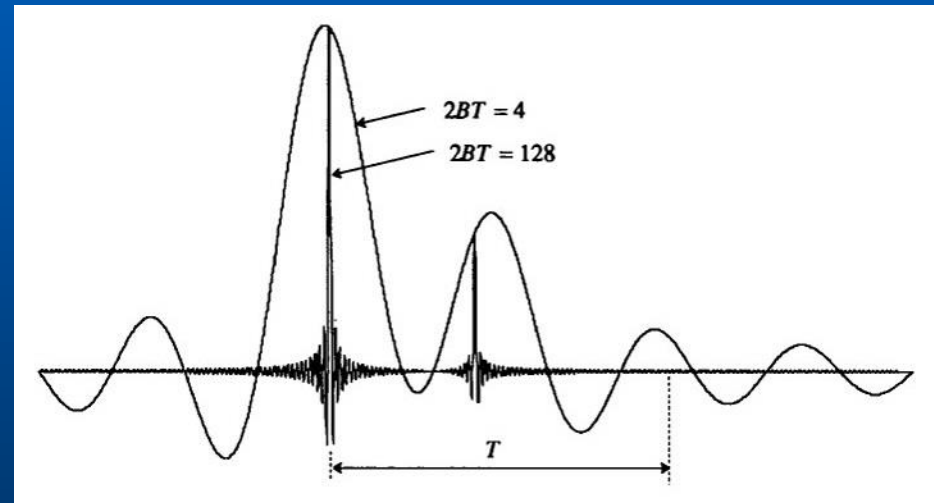
$$b(t) = \delta(t) + \alpha\delta(t - \tau)$$

A la salida del muestreo del MF

$$f(kT) = \delta_k + \alpha \text{sinc}(2\pi B(kT - \tau))$$

**Conclusión:**

**Espectro disperso no es inmune a ISI**  
(fundamentalmente para  $\tau \leq T$ )



$$\tau = 0.4T, \alpha = 0.5$$

Pulsos aislados a la salida de un MF para un canal multicamino con dos caminos.

## Espectro disperso (SS) ...

### Interferencia causal (jamming)

Incrementos en ancho de banda no afectan la probabilidad de error pero reducen ISI, también ayuda contra interferencias.

Un interferente causal (jammer) genera ruido  $N_0 = P_J/2B$  de forma que

$$SNR = \frac{P_S}{2BN_0} = \frac{P_S}{P_J}$$

independiente de  $B$ . La probabilidad de error depende de  $T/T_c = 2BT$  : **ganancia de procesamiento**.

Ejemplo:

Si la ganancia de procesamiento es  $2BT=10000$  (30 dB), esta es la potencia efectiva de supresión de un interferente. O sea, al ir de 1 a 10000, expandiendo el ancho de banda en 1000, se puede tolerar 30 dB de interferencia con la misma probabilidad de error.

# Capacidad y modulación

Alternativas para comparar técnicas de modulación:

- Potencia promedio transmitida
- Probabilidad de error
- Eficiencia espectral
- Ganancia de codificación necesaria
- Costo de implementación

Comparaciones en base a *SNR normalizada por tasa de transmisión*, teniendo en cuenta:

- Canal ideal de ancho de banda  $B$  y AWGN con  $\text{DEP } N_0$
- Potencia promedio transmitida  $P_S$
- La probabilidad de error de símbolo refleja el desempeño del sistema.



## Capacidad y modulación ...

Probabilidad de error de PAM

$$P_e \cong KQ(\sqrt{2BT \cdot \eta_A \cdot \text{SNR}}) \quad \nu = \frac{\log_2 M}{BT}$$

$$\eta_A = a_{\min}^2 / 4\sigma_A^2 ?$$

Ejemplo: PAM bandabase de  $M$  puntos equiprobables,  $a_{\min} = 2$ ,  $\sigma_A^2 = \frac{M^2-1}{2}$ ,

$$\eta_A = \frac{3}{M^2 - 1} = \frac{3}{2^{2BT\nu} - 1}$$

Ejemplo: PAM pasabanda  $M = L \times L$ ,  $a_{\min} = 2$ ,  $\sigma_A^2 = 2^{\frac{M-1}{3}}$

$$\eta_A = \frac{3}{2(M-1)} = \frac{3}{2(2^{BT\nu} - 1)}$$

A mayor  $M$ , menor  $\eta_A$ , debe aumentar  $\text{SNR}$  para mantener  $P_e$

## Capacidad y modulación ...

Es útil obtener  $P_e$  compatible con Nyquist  $1/T=2B$  (máxima SNR, mínima  $P_e$  ).

$$P_e \cong KQ \left( \sqrt{3 \frac{SNR}{2^\nu - 1}} \right)$$

válido para PAM bandabase y pasabanda (QAM).

Una alternativa de comparación es igualar argumentos de  $Q(.)$  para las diferentes modulaciones y comparar SNR.

Para evitar problemas de comparación para distintas eficiencias espectrales es mas útil trabajar con la *SNR normalizada por la tasa de transmisión*

$$SNR_{norm} = \frac{SNR}{2^\nu - 1}$$

## Capacidad y modulación ...

Capacidad de un canal Gaussiano ideal:

Como  $P_e \cong KQ\left(\sqrt{3SNR_{norm}}\right)$  sirve para comparar PAM bandabase, pasabanda con diferentes tasas, debe existir alguna relación fundamental entre SNR y eficiencia espectral.

La capacidad de un canal (o equivalentemente la eficiencia espectral) define la máxima tasa que se puede usar en ese canal.

Para un canal AWGN con limitación de potencia es

$$C = B \log_2(1 + SNR) \quad [bits/seg]$$

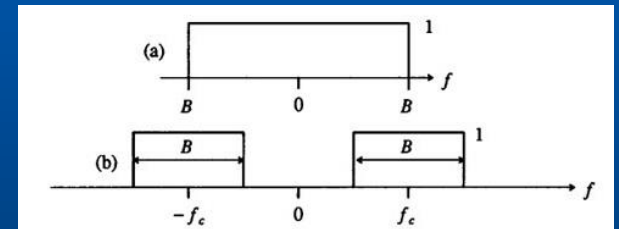
$$SNR = P_S/2N_0B$$

que definen límite sobre la eficiencia espectral

o, en forma equivalente

$$\frac{SNR}{2^{\nu_c} - 1} = 1$$

$$\nu_c = C/B = \log_2(1 + SNR),$$



Canales pasabanda y bandabase equivalentes.

## Capacidad y modulación ...

SNR normalizada en velocidad

Como en general  $\nu < \nu_c$ , entonces  $SNR_{norm} = \frac{2^{\nu_c} - 1}{2^\nu - 1} \geq 1$

Otra forma de expresar el límite fundamental, ahora en términos de SNR en relación a la capacidad del canal o la eficiencia espectral ideal.

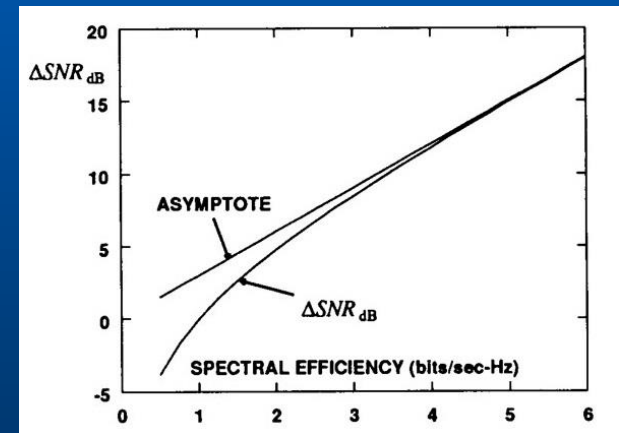
También es útil graficar

$$SNR_{norm,dB} = SNR_{dB} - \Delta SNR_{dB},$$

$$\Delta SNR_{dB} = 10 \log_{10}(2^\nu - 1)$$

Para  $\nu$  altas, asíntota:  $\Delta SNR_{dB} \cong 3\nu$

i.e., por cada bit/seg-Hz de aumento, 3 dB de SNR.



Diferencia entre SNR y SNR normalizada. La asíntota es la misma relación ignorando el término "1".

## Capacidad y modulación ....

### Utilización de la SNR normalizada en comparaciones

- Comparación entre modulaciones diferentes para similar  $P_e$
- Comparación entre una modulación y límites fundamentales
- Comparaciones entre modulaciones diferentes operando a diferentes velocidades y eficiencias espectrales.

Relación entre  $P_e$  y  $SNR_{norm}$ , y comparación con la capacidad  $SNR_{norm} = 1$

## Capacidad y modulación ...

PAM bandabase y pasabanda

$$P_e \cong KQ(\sqrt{\gamma_A \cdot SNR_{norm}})$$

$\gamma_A$  depende de la constelación y es independiente del escalamiento, dependencia de  $K$ ?

Ejemplo: PAM pasabanda

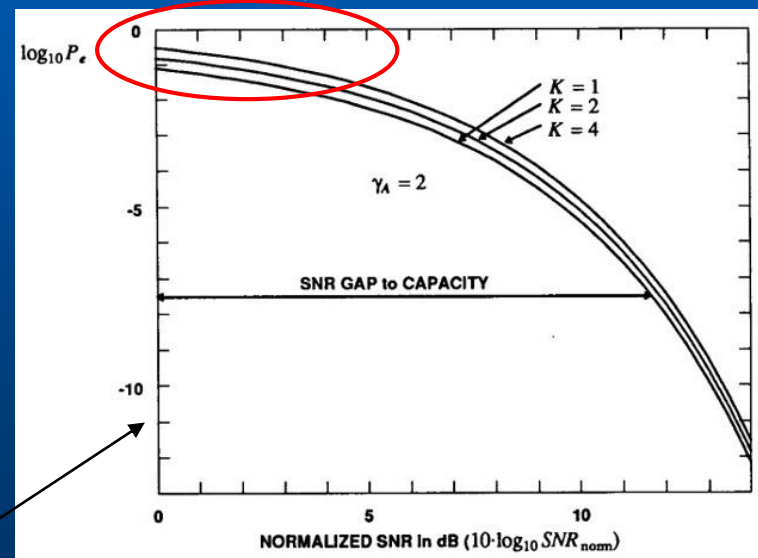
Es posible visualizar el desempeño en relación al límite fundamental:

Brecha con la capacidad (gap to capacity)

Efecto de  $K$  no es importante.

$$\gamma_A = \eta_A(2^\nu - 1)$$

Debido a aproximaciones en cálculo de  $P_e$



$$\frac{SNR}{2^{\nu_c} - 1} = 1$$

$K$  tiene un efecto menor en la probabilidad de error en PAM pasabanda.

## Capacidad y modulación ...

PAM bandabase y pasabanda

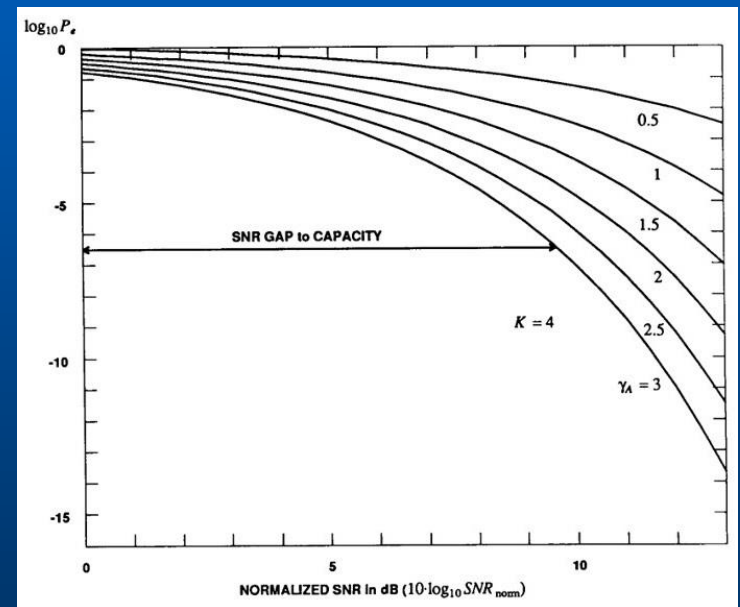
Efecto de  $\gamma_A$

Ejemplo: PAM pasabanda

Todas las QAM rectangulares son equivalentes en términos de SNR normalizada, para lograr una probabilidad de error,  $\gamma_A = 3$ .

Para QAM cuadradas, se requiere diferentes SNR

$$SNR = SNR_{norm}(2^\nu - 1) = SNR_{norm}(M - 1)$$



Efecto de  $\gamma_A$  en la probabilidad de error en PAM pasabanda.

## Capacidad y modulación ...

### PAM pasabanda

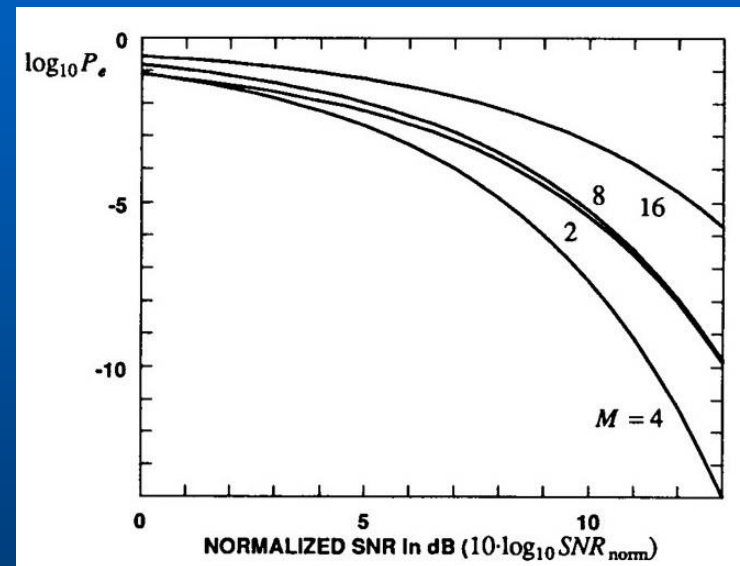
Ejemplo: PSK

$$\sigma_A^2 = 1, a_{\min} = 2 \sin(\pi/M)$$

tal que

$$\gamma_A = 2(M-1) \sin^2(\pi/M)$$

Para  $M=4$ ,  $\gamma_A = 3$  (equivalente a QAM). Para  $M=2$  y  $M>4$  peor desempeño que QAM



Relación entre probabilidad de error y  $M$  (número de puntos de la constelación).



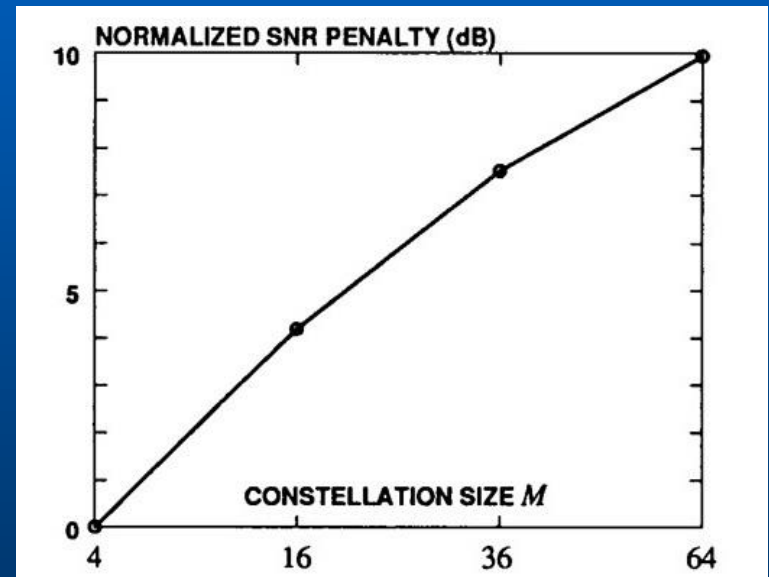
## Capacidad y modulación ...

PAM pasabanda

Ejemplo: Comparación entre QAM y PSK (igualando argumentos de  $Q(\cdot)$ )

$$\frac{SNR_{norm,PSK}}{SNR_{norm,QAM}} = \frac{3}{2(M-1)\sin^2(\pi/M)}$$

Excepto  $M=4$ , en todos los casos PSK requiere mayor SNR que QAM.



Penalización para PSK en relación a QAM en términos de M. Comienza en  $M=4$  porque es la menor QAM.

## Capacidad y modulación ...

### Espectro disperso

En lugar de la máxima velocidad (Nyquist) se usa una velocidad menor (ya que ISI no es un problema), entonces

$$P_e \cong KQ(\sqrt{3\gamma_{SS} \cdot SNR_{norm}}) \quad \gamma_{SS} = \frac{BT(M^{1/BT} - 1)}{M - 1}$$

Para la máxima velocidad  $2BT=2$  y  $\gamma_{SS} = 1$ . En general  $\gamma_{SS} < 1$ .

Esto indica que aumenta la brecha de SNR a la capacidad en general.

Esto no considera las aplicaciones usuales de espectro disperso de múltiples usuarios en un único canal.

## Capacidad y modulación ...

### Pulsos ortogonales

$N$  pulsos en ancho de banda  $B$ , entonces duración aproximada  $T=N/2B$ , así

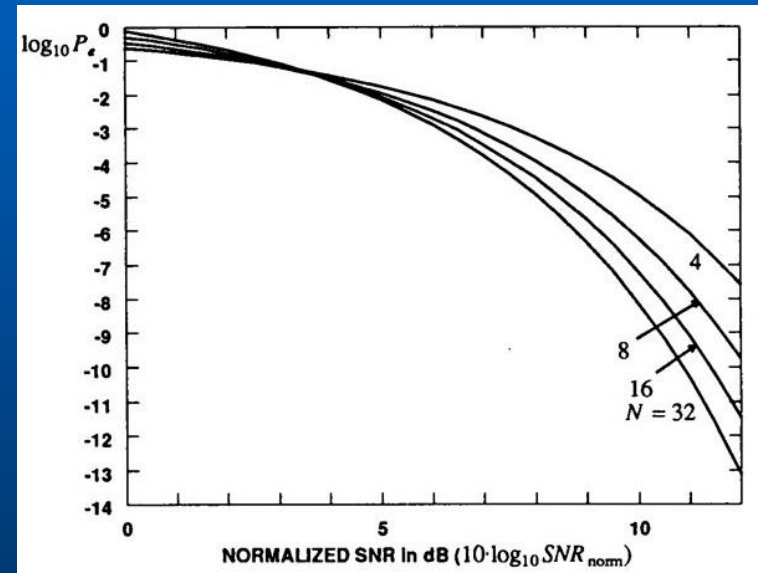
$$P_e \cong (N - 1)Q(\sqrt{\gamma_N \cdot SNR_{norm}})$$

tal que

$$\gamma_N = \frac{1}{2}N(N^{2/N} - 1)$$

que es monotonamente creciente con  $N$ .

La brecha a la capacidad disminuye con  $N$ .



Efecto de  $N$  sobre la probabilidad de error en modulación de pulsos ortogonales.

PAM combinado con pulsos ortogonales: desempeño muy similar a PAM

# Desempeño en Ruido (resumen)

- **Procesos Gaussianos complejos.**
- **Probabilidad de error: Resultados generales.**
- **Probabilidad de error PAM sin ISI.**
- **Desempeño de Distancia Mínima pulso aislado.**
  - PAM; Pulsos Ortogonales (PO); Combinación PAM / PO.
- **Desempeño de Distancia Mínima para PAM con ISI.**
- **Espectro Disperso.**
- **Capacidad y Modulación.**