Procesamiento de Señales en Comunicaciones

Departamento de Ingeniería Eléctrica y Computadoras
Universidad Nacional del Sur

Contenidos

- Modulación.
- Diseño de Distancia Mínima.
- Desempeño en ruido.
- Detección.
- Ecualización óptima.
- Ecualización adaptativa.
- Modulación de portadoras múltiples

Ecualización Óptima

- Ecualización óptima de ISI nula.
- Métodos de ecualización generalizados (LE, DFE y MLSD).
- Ecualización de espaciamiento fraccionario.
- Ecualización con filtros transversales.
- ISI y Capacidad de canal.

Ecualización

Outline.

La condición de Nyquist (para ISI nula) en general no es satisfecha por el canal, por lo que será necesaria algún tipo de ecualización (que en general amplifica ruido).

Existe un compromiso entre minimizar ISI y minimizar ruido a la salida del muestreo.

El criterio MLSD define el receptor óptimo para detectar una secuencia de símbolos. Usa el WMF para general ISI causal. No se usa ampliamente con PAM porque existen estructuras subóptimas de menor complejidad:

- Ecualización lineal (criterios de ISI nula, MSE mínimo)
- Ecualización con realimentación de decisión
- Precodificación de transmisión

Se asumirá que la distorsión del canal es conocida y no se introducirán restricciones de complejidad de implementación.

Ecualización

Algunas definiciones

Sea f(x) una función real no negativa, con $x \in \Re$.

Media aritmética $(\frac{1}{n}\sum_{i}^{n}c_{i})$

$$< f>_{A,X} = \frac{1}{X} \int_X f(x) dx$$

Media geométrica ($\sqrt[n]{\prod_i^n c_i}$ o $\exp^{\{\frac{1}{n}\sum_i^n \log_e c_i\}}$)

$$< f>_{G,X} = \exp\left\{\frac{1}{X} \int_X \log_e f(x) dx\right\}$$

Ecualización

Propiedades de media aritmética y geométrica

Desigualdad logarítmica
$$< f >_{G,X} \le < f >_{A,X}$$

Invariancia
$$< a>_{A,X} = a, \quad a \text{ constante}$$

Escalamiento
$$< a \cdot f >_{A,X} = a \cdot < f >_{A,X}, < a \cdot f >_{G,X} = a \cdot < f >_{G,X}$$

Distributividad
$$< a \cdot f + b \cdot g >_{A,X} = a < f >_{A,X} + b < g >_{A,X}$$

$$< f \cdot g>_{G,X} = < f>_{G,X} \cdot < g>_{G,X}, < f/tg>_{G,X} = \frac{< f>_{G,X}}{< g>_{G,X}}$$

Resultados disponibles

El WMF representa una forma canónica (a través de la estadística suficiente) de parte de la estructura de varios receptores (incluyendo los basados en ecualización). También permite obtener cotas de desempeño.

Algunas propiedades de la salida del WMF:

- Señal muestreada a la tasa de transmisión (1/T).
- El modelo de canal discreto equivalente es causal y de fase mínima (energía de la respuesta impulsiva concentrada en las primeras muestras).
- El ruido aditivo equivalente es Gaussiano, circularmente simétrico y blanco (muestras complejas independientes).

Resultados disponibles: WMF

Se basa en la existencia de la factorización

$$S_h(z) = A_h^2 G_h(z) G_h^*(1/z^*)$$
 $A_h^2 = \langle S_h \rangle_G$

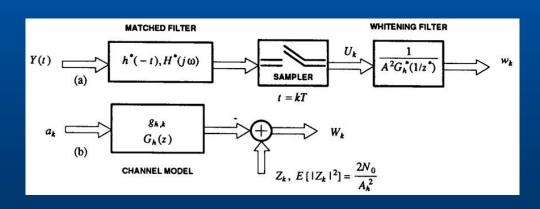
válida no solo para un espectro racional sino también cuando $S_h(e^{jwT})$ y $\log S_h(e^{jwT})$ sean integrables en $(-\pi/T,\pi/T)$ ($S_h(e^{jwT})\neq 0$ cualquier intervalo de frecuencias).

Como
$$\rho_h(k) \leftrightarrow S_h(e^{jwT})$$

$$\rho_h(k) = A_h^2 g_{h,k} * g_{h,-k}^*$$

tal que la energía del pulso recibido es

$$\sigma_h^2 = \rho_h(0) = A_h^2 \sum_{k=0}^{\infty} |g_{h,k}|^2$$



a) WMF consiste en un MF, muestreo a 1/T y filtro de blanqueo de fase máxima; b) El modelo de canal discreto equivalente es un filtro causal de fase mínima, con AWGN circularmente simétrico.

Resultados disponibles: Probabilidad de error

Para el modelo de canal equivalente anterior

$$P_e \cong KQ(1/2\sqrt{\gamma})$$
 $\gamma = d_{\min}^2/\sigma^2$ $\sigma^2 = N_0/A_h^2$

La distancia mínima depende del contexto: se estudiarán el caso de símbolo aislado y la secuencia de símbolos.

Como el argumento de Q(.) tiene mayor impacto que K, se comparará los diseños en función de γ como figura de mérito.

Cota en desempeño del WMF

El WMF permite obtener una cota superior sobre la figura de mérito γ en presencia de ISI. Para el caso de un símbolo aislado, la entrada es $a_0\delta_k$ y la salida

$$W_k = a_0 g_{h,k} + Z_k$$

La distancia mínima será

tal que

$$d_{\min}^2 = \min \sum_{k=0}^{\infty} |a_0^{(1)} g_{h,k} - a_0^{(2)} g_{h,k}|^2 = a_{\min}^2 \sum_{k=0}^{\infty} |g_{h,k}|^2$$
$$\gamma_{MF} = \frac{d_{\min}^2}{\sigma^2} = \frac{a_{\min}^2 \sigma_h^2 / A_h^2}{N_0 / A_h^2} = a_{\min}^2 \frac{\sigma_h^2}{N_0}$$

Como el WMF no tiene en cuenta ISI, el desempeño con ISI se apartará de γMF , y es una medida de su severidad.

Figura de mérito para el MLSD

Ningún receptor con ecualización para reducir ISI puede ser mejor que γ_{MLSD} , tal que cualquier diferencia con γ_{ML} se debe a ISI.

En este caso

$$d_{\min}^2 = \min_{\{\varepsilon_k, 1 \le k \le K, \varepsilon_1 \ne 0\}} \sum_{m=1}^{\infty} |\sum_{k=1}^K \varepsilon_k g_{h,m-k}|^2$$

tal que

$$\gamma_{MLSD} = \frac{d_{\min}^2}{N_0/A_h^2}$$

Una cota superior se obtiene teniendo en cuenta que para $\varepsilon_k = 0$, $2 \le k \le K$ entonces,

$$d_{\min}^2 \leq \min_{\varepsilon_1 \neq 0} \sum_{m=1}^{\infty} |\varepsilon_1 g_{h,m-1}|^2 = \min_{\varepsilon_1 \neq 0} |\varepsilon_1|^2 \sum_{k=0}^{\infty} |g_{h,k}|^2 = a_{\min}^2 \sigma_h^2 / A_h^2$$

tal que

$$\gamma_{MLSD} \le \frac{a_{\min}^2 \sigma_h^2 / A_h^2}{N_0 / A_h^2} = \frac{a_{\min}^2 \sigma_h^2}{N_0} = \gamma_{MF}$$

el igual se logra con un único evento de error

Figura de mérito para el MLSD ...

Ejemplo: Para el canal de fase mínima $G_h(z) = 1 + \alpha z^{-1}$

Para un alfabeto de entrada {0,1}, el de símbolos de error

será {0,+/-1}, ternario.

Existen 2 eventos de error y el más corto es siempre el de menor métrica $(<(1-\alpha^2))$.

Entonces,

$$\gamma_{MLSD} = \gamma_{ML}$$

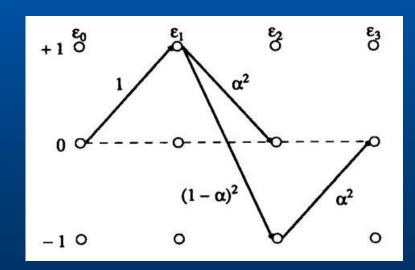


Figura de mérito para el MLSD ...

Una cota inferior,

$$\sum_{m=1}^{\infty} |\sum_{k=1}^{K} \varepsilon_k g_{h,m-k}|^2 \ge |\sum_{k=1}^{K} \varepsilon_k g_{h,1-k}|^2 = |\varepsilon_1 g_{h,0}|^2 = |\varepsilon_1|^2$$

Minimizando ambos lados

$$d_{\min}^2 \ge a_{\min}^2$$

Esto es equivalente a

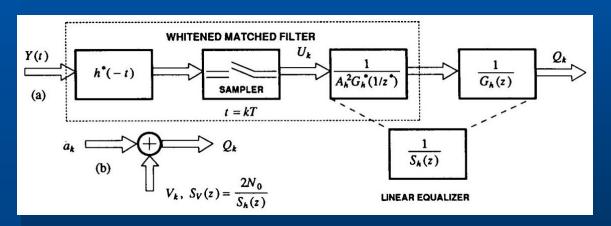
$$\gamma_{MLSD} \ge \frac{a_{\min}^2 A_h^2}{N_0}$$

Será útil para comparación con diferentes ecualizadores.

Ecualización óptima de ISI nula (LE ZF)

Un receptor subóptimo que usa un filtro para satisfacer Nyquist deja como consecuencia la amplificación de ruido.

El filtro óptimo (dándole forma única al criterio de Nyquist) se obtiene combinando el WMF y $G_h^{-1}(z)$: ecualizador lineal ZF (forzando ISI nula).



Ecualizador ZF; a) Formado por un MF, muestreo a 1/T, ecualizador con la inversa de $S_h(z)$; b) modelo de canal equivalente y ruido Gaussiano coloreado.

Figura de mérito para el LE-ZF

La salida del WMF es blanca y circularmente simétrica, de varianza $2N_0/A_h^2$.

Entonces, el ruido blanco en el modelo equivalente tendrá una DEP

$$S_V = \frac{2N_0}{A_h^2} \frac{1}{G_h} \frac{1}{G_h^*} = \frac{2N_0}{S_h}$$

Y con la definición de media aritmética, su varianza

$$\sigma_V^2 = 2\sigma^2 = 2N_0 < S_h^{-1} >_A$$

Finalmente, como la distancia mínima es la de un símbolo a_{min}

$$\gamma_{LE-ZF} = \frac{a_{\min}^2}{N_0} < S_h^{-1} >_A^{-1}$$

Ejemplo:

Para un pulso recibido (filtro todo polo) $h(t) = \sigma_h \sqrt{2a} e^{-aT} u(t)$ se tiene

$$S_h^{-1}(z) = \frac{(1 - \alpha z^{-1})(1 - \alpha z)}{(1 - \alpha^2)\sigma_h^2}$$

Para obtener la figura de mérito es necesario el coeficiente de z^0 (como alternativa a resolver la integral de $< S_h^{-1} >_A^{-1}$), dado por $\frac{(1+\alpha^2)}{(1-\alpha^2)\sigma_h^2}$

Entonces

$$\gamma_{LE-ZF} = a_{\min}^2 \frac{\sigma_h^2}{N_0} \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2} = \gamma_{MF} \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2}$$

Para $|\alpha| \to 1$ entonces $\gamma_{LE-ZF} \to 0$, dado que el polo del espectro se aproxima al circulo unitario.

Ejemplo:

Para un pulso recibido $h(t) = h_0(t) + \alpha h_0(t - T)$

$$S_h^{-1}(z) = \frac{1+\alpha^2}{\sigma_h^2} \frac{1}{(1-\alpha z^{-1})(1+\alpha z)}$$

Y con su expansión en potencias de z^{-k} , el coeficiente z^0 es $\frac{(1+\alpha^2)}{(1-\alpha^2)\sigma_h^2}$, tal que

$$\gamma_{LE-ZF} = a_{\min}^2 \frac{\sigma_h^2}{N_0} \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2}$$

Para $|\alpha| \to 1$ entonces $\gamma_{LE-ZF} \to 0$, dado que el cero del espectro se aproxima al circulo unitario y el LE-ZF no puede ecualizarlo (el espectro no es invertible).

Cota sobre la figura de mérito.

Sea $G_h^{-1}(z)$, correspondiente al ecualizador, con respuesta impulsiva $f_{h,k}$.

Esta respuesta es causal $(G_h^{-1}(\infty)=1)$ y mónica ($f_{h,0}=1$).

Además, como el ruido de entrada al LE ZF es blanco, su varianza usando esa respuesta impulsiva, será

$$\sigma_V^2 = \frac{2N_0}{A_h^2} \sum_{k=0}^{\infty} |f_{h,k}|^2 \ge \frac{2N_0}{A_h^2}$$

con igualdad solo si G(z) = 1 (no existe ISI). Entonces

$$\gamma_{LE-ZF} = \frac{a_{\min}^2}{1/2\sigma_V^2} \le \frac{a_{\min}^2 A_h^2}{N_0}$$

Existencia del LE-ZF

Depende de la existencia del WMF, o sea que $\log S_h(e^{jwT})$ sea integrable. Esto, no es posible si por ejemplo $S_h(e^{jwT})$ es cero en un intervalo.

Mas restrictivo es que $G_h^{-1}(z)$ sea estable y entonces que la varianza de ruido a su salida sea acotada.

El caso problemático es que $G_h^{-1}(z)$ tenga polos sobre el círculo unitario.

Notar que esta ultima condición no implica que no exista el WMF. En consecuencia el MLSD, que también lo utiliza, si puede implementarse.

Ecualización con Realimentación de Decisión ZF (DFE ZF).

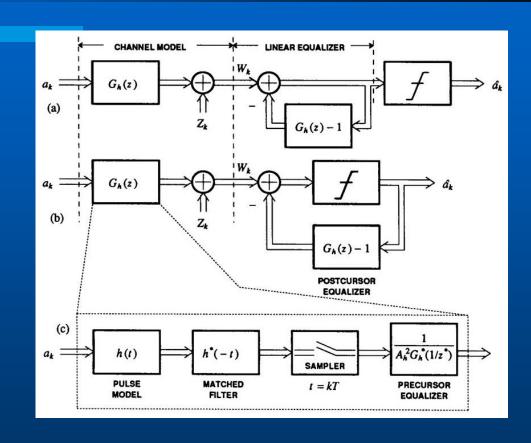
- Receptor no lineal que ofrece un desempeño intermedio entre LE y MLSD.
- Surge de la observación que el canal equivalente a la salida del WMF es causal y mónico. La interferencia a la salida del WMF se debe solo a símbolos pasados: ISI postcursor.
- Con una estimación de esta ISI se puede eliminar para reducir la varianza a la entrada del elemento de decisión.
- La ISI de símbolos futuros se denomina precursor.

Ecualizador DFE ZF;

Una realización alternativa del LE ZF con el ecualizador implementado como un filtro en realimentación;

DFE ZF en el cual el muestreo está dentro del lazo, reduciendo la amplificación de ruido;

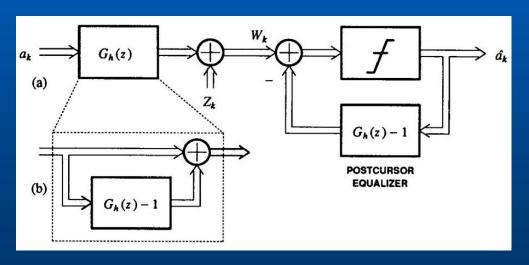
Detalle del modelo de dispersión (canal). El DFE ZF usa un WMF formado por un MF y un ecualizador precursor donde este último funciona como blanqueador.



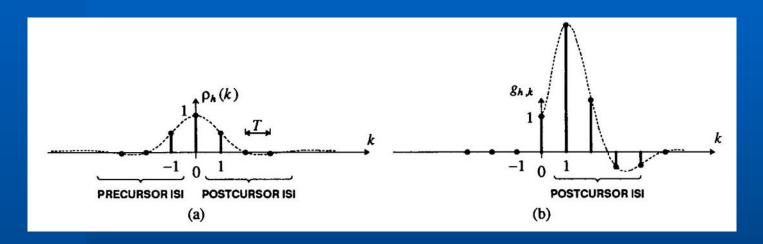
estable siempre que el WMF exista.

Como ahora se usa (realimentado) $G_h(z)$ y no su inversa, el DFE ZF existe y es

Desde la perspectiva de cancelamiento de la ISI, el WMF actúa como ecualizador precursor (generando una señal causal) y la realimentación de forma estable que definen el ecualizador postcursor, para eliminar la ISI remanente.



(a) DFE ZF. (b) Expansión del modelo de canal mostrando que este modelo introduce una ISI postcursor que es cancelada por el DFE. $G_h(z)$ es causal y mónico, $G_h(z)-1$ es estrictamente causal.



Señales en el DFE ZF

- a) señal a la salida del MF es siempre simétrica en torno a k=0;
- b) después del filtro precursor (blanqueador) la señal es causal y de fase mínima. Entonces, solo tiene ISI postcursor que será cancelada por el ecualizador correspondiente. Si no, *propagación de errores...*

Figura de Mérito del DFE-ZF

Teniendo en cuenta decisiones correctas, la componente de señal a la entrada del elemento de decisión es el símbolo libre de ISI, tal que la distancia mínima está dada por a_{\min} , entonces

 $\gamma_{DFE-ZF} = \frac{a_{\min}^2}{N_0/A_h^2}$

Y con la definición

$$A_h^2 = < S_h >_G$$

$$\gamma_{DFE-ZF} = \frac{a_{\min}^2}{N_0} \langle S_h \rangle_G = \frac{a_{\min}^2}{N_0} \frac{1}{\langle S_h^{-1} \rangle_G}$$

Comparando las cotas sobre desempeño

 $\gamma_{LE-ZF} \le \gamma_{DFE-ZF} \le \gamma_{MLSD}$ $\gamma_{MLSD} \le \gamma_{MF}$

Ejemplo:

Para el pulso todo polo, $h(t) = \sigma_h \sqrt{2a} e^{-aT} u(t)$ se tiene que $A_h^2 = \sigma_h^2 (1 - \alpha^2)$

Entonces

$$\gamma_{DFE-ZF} = a_{\min}^2 \frac{\sigma_h^2}{N_0} (1 - \alpha^2)$$

Para $|\alpha| \to 1$, $\gamma_{DFE-ZF} \to 0$ dado que el polo del canal se aproxima al círculo unitario.

Ejemplo:

Para el pulso todo cero, $h(t)=h_0(t)+\alpha h_0(t-T)$ es posible obtener $A_h^2=\frac{\sigma_h^2}{(1+\alpha^2)}$ tal que $\gamma_{DFE-ZF}=a_{\min}^2\frac{\sigma_h^2}{N_0}\frac{1}{1+\alpha^2}$

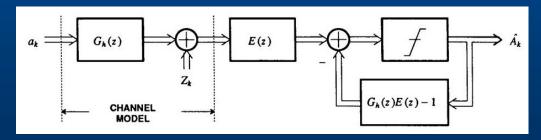
A diferencia del LE ZF, el DFE ZF se comporta adecuadamente para $|\alpha| \to 1$.

Optimalidad del uso del WMF en DFE-ZF

El uso de WMF solo es necesario para que la ISI postcursor se pueda cancelar, no tiene relación con la ISI precursor.

Se puede incluir E(z) teniendo en cuenta:

- Como $G_h(z)$, E(z) debe ser tal que $G_h(z)E(z)$ sea causal.
- Como $G_h(z)$ es mónico,E(z) debe ser mónico para que $G_h(z)E(z)$ sea mónico.



Un DFE ZF genérico se puede realizar introduciendo un filtro causal (y mónico) E(z).

Optimalidad del uso del WMF en DFE-ZF

E(z) que satisfaga esas restricciones, dado que el ruido a la entrada es blanco, tendrá varianza

 $\frac{2N_0}{A_h^2} \sum_{k=0}^{\infty} |e_k|^2 \ge \frac{2N_0}{A_h^2}$

con igual sssi E(z)=1. Entonces, en términos de varianza a la entrada del elemento de decisión, la configuración original (con la factorización de fase mínima) es óptima.

Agregar E(z) tipo pasatodo no cambia la señal en el elemento de decisión, pero aumenta la varianza.

El MLSD no requiere en general la factorización de fase mínima. Sin embargo, si el modelo de canal es IIR, esa factorización garantizará mejor funcionamiento del algoritmo de Viterbi.

Revisión: El proceso de innovación y predicción lineal

Dado un proceso estacionario en sentido amplio X_k , tal que su DEP es real no negativa sobre el círculo unitario, entonces

 $S_X(z) = A_x^2 G_x(z) G_x^*(1/z^*)$

donde $G_x(z)$ es un filtro causal mónico. Si $S_X(z)$ no tiene ceros sobre el círculo unitario, entonces la anterior de fase estrictamente mínima.

Si filtramos $G_x(z)$ con $G_x^{-1}(z)$, la salida es un proceso aleatorio blanco, $S_I(z)=A_x^2$ denominado *innovación*. Y su potencia será A_x^2 . También, $G_x^{-1}(z)$ se denomina *filtro blanqueador*. El filtro blanqueador remueve toda la correlación entre muestras. Entonces puede verse a X_k con 2 componentes: la innovación y una combinación lineal de innovaciones pasadas.

Un *predictor lineal* forma una estimación de la muestra actual de un proceso aleatorio en base a una combinación lineal de muestras pasadas. Si la función transferencia del predictor (estrictamente causal) es $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k}$

El filtro de error de predicción se define comoE(z) = 1 - F(z)

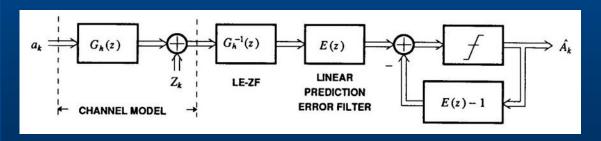
Es posible mostrar que $E(z)=G_x^{-1}(z)$ es óptimo (blanquea y genera un proceso de innovación, i.e., de varianza mínima) cuando $S_X(z)$ satisface la factorización anterior.

Interpretación del DFE-ZF en base a predicción lineal

El ruido a la salida del LE-ZF no es blanco (correlación entre muestras). Se puede usar un filtro de predicción lineal (mónico y causal) para reducir su varianza, pero que introduce ISI postcursor. Esta se cancela con la realimentación del DFE-ZF.

La parte de fase mínima del espectro de entrada al predictor es $G_h^{-1}(z)$. Entonces, el blanqueador óptimo es $G_h(z)$, que se cancela justamente con el LE-ZF.

Es otra forma de ver que el WMF determina el óptimo DFE-ZF. Diferente al LE-ZF, usa las muestras correlacionadas para reducir la varianza de ruido a la entrada del elemento de decisión y cancela la ISI postcursor con el ecualizador de realimentación.



Relación entre el ecualizador precursor DFE y predicción lineal óptima. El ecualizador precursor DFE puede obtenerse aplicando un filtro de predicción lineal a la salida del ruido coloreado de un LE ZF.

Propagación de error en el DFE.

Si se produce un error a la salida del elemento de decisión, el efecto se realimenta sobre la entrada al corregir en forma inadecuada por ISI postcursor.

Esto produce en general un efecto de una cadena de errores (ráfaga).

El desempeño en ese caso no se puede evaluar como anteriormente.

Sin embargo, el compromiso: reducción de los efectos de amplificación de ruido versus propagación de errores se resuelve en general por los beneficios asociados al primer efecto.

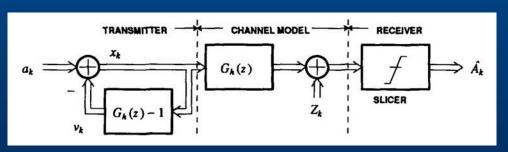
Precodificación en transmisión

Como se puede intercambiar el WMF $G_h(z)$ con el LE $G_h^{-1}(z)$, esto es útil si el canal es invariante (no en wireless) ya que el ecualizador se puede colocar en el transmisor.

Dos razones de utilidad:

- No se tiene efecto de amplificación de ruido porque (a pesar de usar solo el WMF en el receptor) el canal es previamente ecualizado.
- No existirá posibilidad de propagación de errores (si el camino de feedback es adecuado).

Configuración no es práctica porque aumenta la potencia promedio y pico asociada a los símbolos transmitidos.

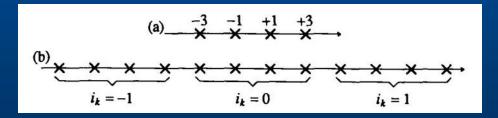


Modificación para reducir la potencia transmitida

Se ejemplificará para un alfabeto unidimensional M-ario (M par) [-(M-1), ..., (M-1)] (todos los impares en (-M,M)).

La modificación es sumar en el transmisor $2Mi_k, \ \{i_k \in I, -\infty < k < \infty\}$, tal que el símbolo expandido es ahora $c_k = a_k + 2Mi_k$

que ahora es el conjunto de todos los impares (no limitados a (-M,M)).



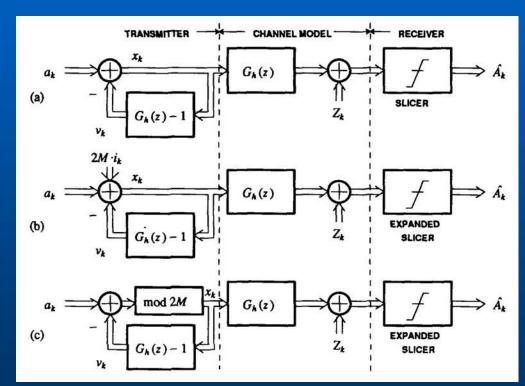
Alfabeto de símbolos para precodificación: a) símbolos originales a_k para M=4; b)símbolos expandidos c_k , mostrados para 3 valores de i_k .

Modificación para reducir la potencia transmitida...

LE ZF ahora en el transmisor como un filtro realimentado;

Para un alfabeto de símbolos especificado, se suma una secuencia arbitraria de muestras $2M \cdot i_k$, tal que se pueda expandir el muestreo en el receptor;

La potencia en el transmisor se puede reducir eligiendo $2M \cdot i_k$ para producir un equivalente módulo 2M.



Modificación para reducir la potencia transmitida ...

 a_k se puede recuperar de c_k reduciéndolo módulo 2M,

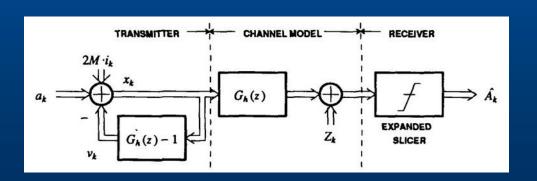
$$a_k = c_k \operatorname{modulo} 2M$$

donde x modulo 2M implica el valor único de $x+2M\cdot m$ tal que m se elige en $-M < x+2M\cdot m \le M$.

El símbolo transmitido será

$$x_k = a_k + 2M i_k - \nu_k$$

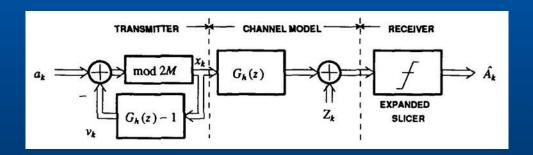
El elemento de decisión expandido, realiza la discriminación (con la operación modulo 2M) sobre impares no limitados a (-M,M).



Modificación para reducir la potencia transmitida ...

El paso final es elegir i_k para que la potencia promedio y pico no sean mayores que en el caso de DFE.

 i_k puede elegirse para limitar x_k al rango (-M,M), lo cual es equivalente a reducirla en módulo 2M.



Como una verificación, se puede demostrar que si los símbolos originales están distribuidos uniformemente, los símbolos con precodificación lo estarán también muy aproximadamente. Entonces tendrán la misma potencia pico y/o promedio.

Ecualización Óptima (resumen)

- Ecualización óptima de ISI nula.
- Métodos de ecualización generalizados (LE, DFE y MLSD).
- Ecualización de espaciamiento fraccionario.
- Ecualización con filtros transversales.
- ISI y Capacidad de canal.