

# Procesamiento de Señales en Comunicaciones

Departamento de Ingeniería Eléctrica y Computadoras  
Universidad Nacional del Sur

# Contenidos

- **Modulación.**
- **Diseño de Distancia Mínima.**
- **Desempeño en ruido.**
- **Detección.**
- **Ecualización óptima.**
- **Ecualización adaptativa.**
- **Modulación de portadoras múltiples**

# Ecualización Adaptativa

- **Ecualizadores de complejidad reducida.**
- Ecualizador lineal adaptativo.
- DFE adaptativo.
- Ecualizador de espaciamiento fraccionario.
- Ecualización pasabanda.

# Ecualización en procesamiento adaptativo de señales

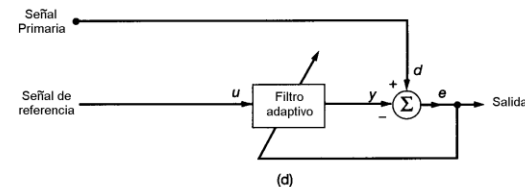
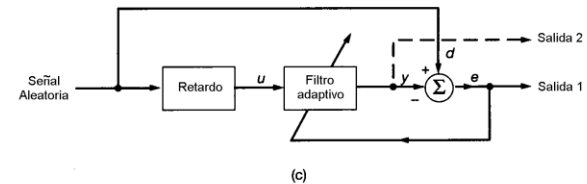
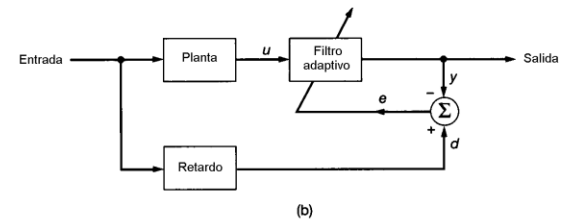
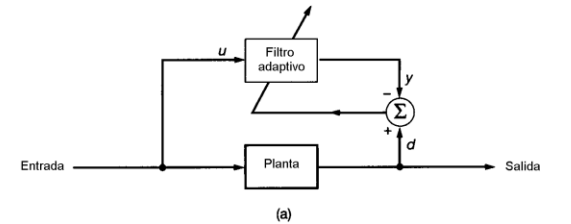
En un contexto práctico el problema de distorsión de la señal recibida requiere considerar múltiples factores:

- El formato del pulso difícilmente sea conocido exactamente a priori en el receptor.
- Los esquemas vistos (LE, WMF, DFE) utilizan filtros IIR cuya realización puede requerir complejidad considerable.
- El diseño y la optimizaciones realizadas consideraron solo aspectos muy directos, dejando de lado otros como: manejo del rango dinámico de la señal, corrección del sincronismo (offset) de tiempo y/o frecuencia, etc.
- Varios de los canales más populares (el inalámbrico, por ejemplo), no solo no es conocido a priori en el receptor sino que varía en el tiempo.

# Procesamiento adaptativo de señales

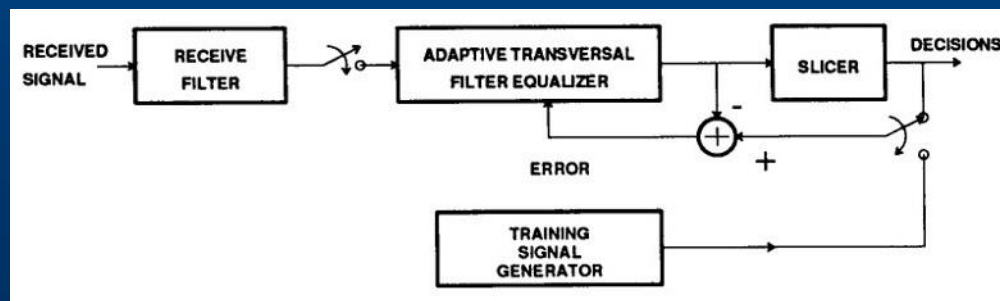
Contextos generales (y de comunicaciones) donde se utiliza:

- Identificación de sistemas (estimación de canal en OFDM usando señal de entrenamiento).
- Filtrado inverso (**ecualización**, predistorsión en amplificadores no lineales).
- Predicción (blanqueo de señales, reducción de rango dinámico, etc.).
- Cancelamiento de interferencias (eliminar correlación similar entre señales).



## Ecualización adaptativa

- Suponemos ahora el *canal desconocido*, tal que el filtro de recepción no es en general un MF (solo un pasabajos para eliminar ruido).
- El ecualizador será un filtro transversal (FIR).
- El objetivo es ajustar los coeficientes del ecualizador para minimizar un compromiso entre ruido e ISI a la entrada del elemento de decisión.
- Dos modos de funcionamiento:
  - Modo de entrenamiento.
  - Modo controlado por decisiones.



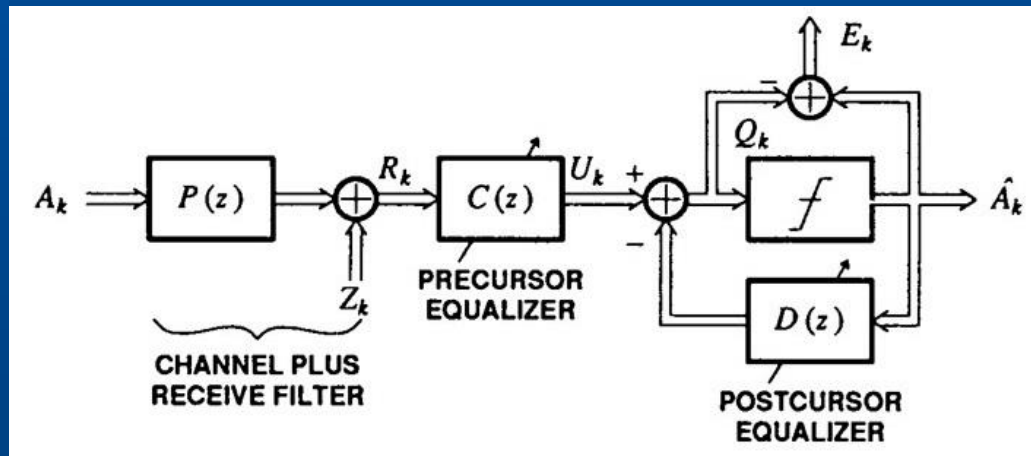
# Ecualizadores de complejidad restringida

## Estructura del ecualizador

Ecualizador lineal (LE)  $C(z) = \sum_{m=-L}^L c_m z^{-m}$

## Ecualizador con realimentación de decisión (DFE)

$$C(z) = \sum_{m=-(N-1)}^0 c_m z^{-m} \quad D(z) = \sum_{m=1}^M d_m z^{-m}$$



## Ecualizadores de complejidad restringida ...

### Solución de MSE mínimo.

Se supondrá que el canal es conocido (con señal y ruido estacionarios) para obtener el ecualizador óptimo con complejidad restringida que minimice el MSE.

Entonces, los coeficientes del LE  $\mathbf{c}^T = [c_{-L}, \dots, c_L]$

Las muestras de entrada:  $\mathbf{r}_k^T = [r_{k+L}, \dots, r_k, \dots, r_{k-L}]$

Se trata de minimizar  $E[|e_k|^2]$ , donde  $e_k = A_k - Q_k$   $Q_k = \mathbf{c}^T \mathbf{r}_k$

Entonces,

$$E[|e_k|^2] = E[|A_k|^2] - 2\text{Re}\{\mathbf{c}^H\}\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{c}^H \boldsymbol{\Phi} \mathbf{c}$$

donde

$$\boldsymbol{\alpha} = E[A_k \mathbf{r}_k^*], \quad \boldsymbol{\Phi} = E[\mathbf{r}^* \mathbf{r}_k^T] = \begin{bmatrix} \phi_0 & \phi_{-1} & \cdots & \phi_{-(N-1)} \\ \phi_1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \phi_{N-1} & \cdots & \cdots & \phi_0 \end{bmatrix}, \quad \phi_j = E[r_{k+j} r_k^*]$$



## Ecualizadores de complejidad restringida ...

Algunas propiedades de la matriz autocorrelación  $\Phi$  :

- Es una matriz Hermitiana, i.e.,  $\Phi^H = \Phi$
- Es una matriz Toeplitz, i.e., el elemento  $(i,j)$  es función de  $(i-j)$ .
- Es una matriz positiva semidefinida, i.e., la forma  $x^H \Phi x$  es real y no negativa para cualquier vector  $x$  .

Se asumirá que  $\Phi$  es no singular.

## Ecualizadores de complejidad restringida ...

Completando cuadrados en la expresión del MSE

$$E[|e_k|^2] = E[|A_k|^2] - \alpha^H \Phi^{-1} \alpha + (\Phi^{-1} \alpha - c)^H \Phi (\Phi^{-1} \alpha - c)$$

De forma que el mínimo se obtiene para

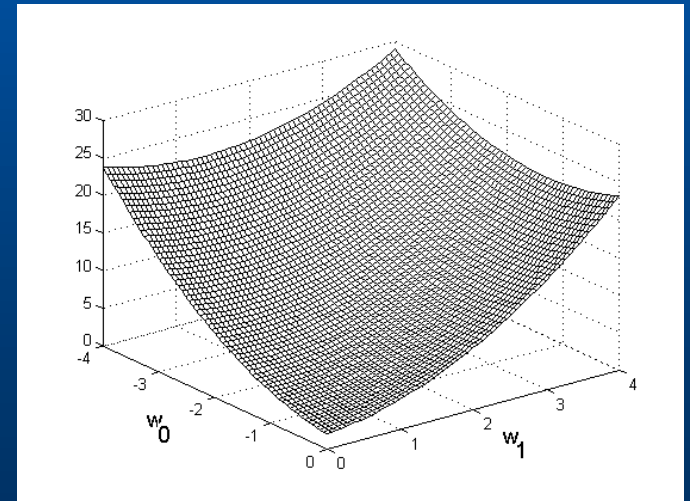
$$c_{opt} = \Phi^{-1} \alpha$$

Y tendrá el valor

$$\xi_{min} = E[|A_k|^2] - \alpha^H \Phi^{-1} \alpha$$

Entonces, el MSE se puede escribir

$$E[|e_k|^2] = \xi_{min} + (c - c_{opt})^H \Phi (c - c_{opt})$$



## Ecualizadores de complejidad restringida ...

Otra forma de obtener el mínimo es derivando la expresión del MSE (es necesario tener en cuenta la existencia de las derivadas!).

Como

$$c = c_R + jc_I, \quad \alpha = \alpha_R + j\alpha_I, \quad \Phi = \Phi_R + j\Phi_I$$

Se puede verificar que

$$\nabla_c E[|e_k|^2] = \nabla_{c_R} + j\nabla_{c_I} = 2\Phi c - 2\alpha = 0$$

## Ecualizadores de complejidad restringida ...

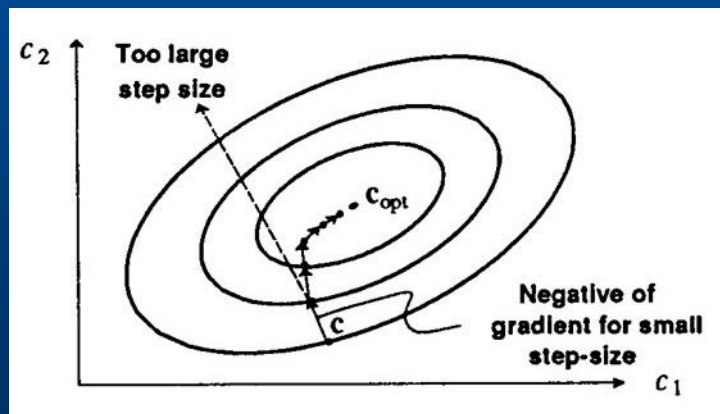
**El algoritmo Steepest Descent SD** (gradiente del MSE).

Una forma recursiva de resolver el sistema de ecuaciones para el MSE óptimo.

En términos del espacio de coeficientes, el MSE es una función cuadrática con un único mínimo.

$$c_{j+1} = c_j - \frac{\beta}{2} \nabla c_j E[|e_k|^2]$$

Contornos de nivel de igual MSE y una ilustración de la convergencia del algoritmo SD.



## Ecualizadores de complejidad restringida ...

### Convergencia del SD.

A partir del gradiente

$$\mathbf{c}_{j+1} = \mathbf{c}_j + \beta(\boldsymbol{\alpha} - \Phi \mathbf{c}_j) = (\mathbf{I} - \beta \Phi) \mathbf{c}_j + \beta \boldsymbol{\alpha}$$

Restando  $\mathbf{c}_{opt}$  de esta y con  $\mathbf{q}_j = \mathbf{c}_j - \Phi^{-1} \boldsymbol{\alpha}$

$$\mathbf{q}_{j+1} = (\mathbf{I} - \beta \Phi) \mathbf{q}_j = (\mathbf{I} - \beta \Phi)^{j+1} \mathbf{q}_0$$

El comportamiento de esta ecuación depende de los autovalores de la matriz  $\Phi$

## Ecualizadores de complejidad restringida ...

Propiedades de una matriz  $A$  Hermitiana:

- Los autovalores de  $A$  son reales.
- Para  $\lambda_i, \lambda_j$ , dos autovalores distintos de  $A$ , los autovectores asociados son ortogonales, i.e.,  $v_i^H v_j = 0$
- Suponiendo todos los autovalores de  $A$  distintos y los autovectores normalizados, tal que  $v_i^H v_i = 1$ . Entonces  $V^{-1} = V^H$
- Se verifica la factorización  $A = V \Lambda V^H$
- Si  $A$  es positiva definida, todos sus autovalores son positivos.

## Ecualizadores de complejidad restringida ...

En base a las propiedades anteriores  $\Phi = \sum_{i=1}^N \lambda_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H$

de forma que  $(\mathbf{I} - \beta \Phi)^j = \sum_{i=1}^N (1 - \beta \lambda_i)^j \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H$

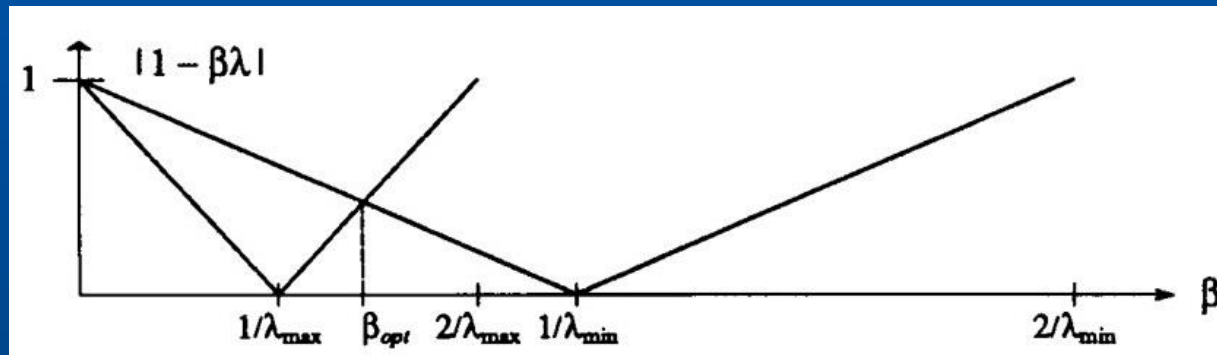
Y se tendrán  $N$  modos de convergencia, cuya velocidad de convergencia es gobernada por  $\beta$ .

La condición para que  $\mathbf{q}_j$  converja a cero es que  $0 < \beta < \frac{2}{\lambda_{\max}}$

## Ecualizadores de complejidad restringida ...

Interesa obtener el  $\beta$  para obtener la mas rápida velocidad de convergencia del SG.  
Se puede verificar que

$$\beta_{opt} = \frac{2}{\lambda_{min} + \lambda_{max}}$$



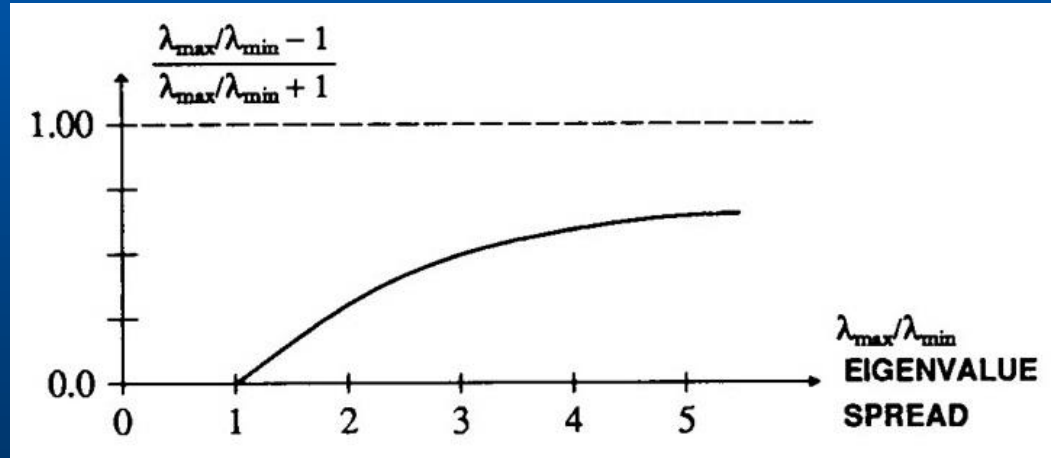
Elección del tamaño del paso para la más rápida convergencia del algoritmo de SD.



## Ecualizadores de complejidad restringida ...

Para esa velocidad de convergencia, los modos de los autovalores máximo y mínimo convergen a igual velocidad, proporcional a

$$\left( \frac{\lambda_{\max}/\lambda_{\min} - 1}{\lambda_{\max}/\lambda_{\min} + 1} \right)^j$$



Relación entre la mayor velocidad de convergencia y la dispersión de autovalores.

## Ecualizadores de complejidad restringida ...

En base a

$$E[|E_k|^2] - \xi_{\min} = \sum_{i=1}^N \lambda_i |(\mathbf{c}_k - \mathbf{c}_{opt})^H \mathbf{v}_i|^2$$

Es posible analizar el  $\beta$  para optimizar la velocidad de convergencia del MSE (en lugar del vector de parámetros).

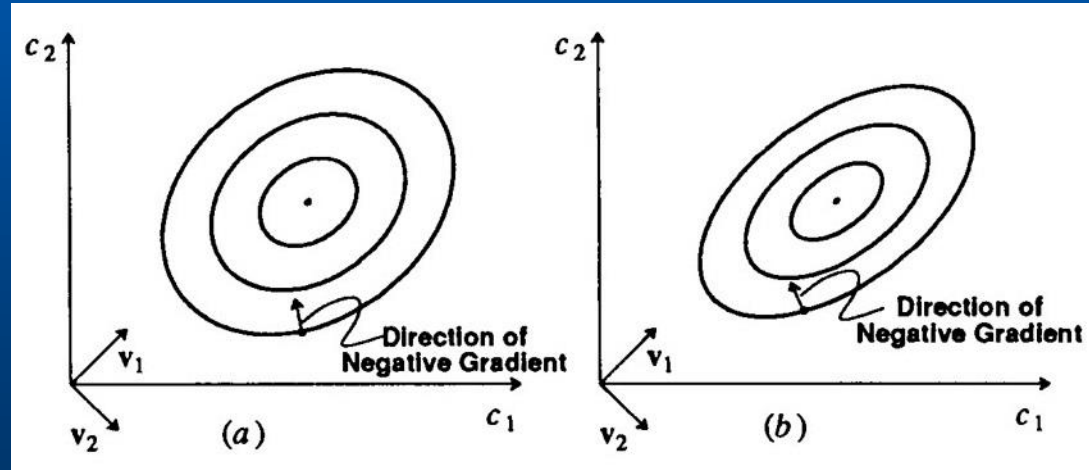
En ese caso, y pesar de depender de las condiciones iniciales, un valor razonable es

$$\beta = 1/\lambda_{\max}$$

## Ecualizadores de complejidad restringida ...

La dispersión de autovalores determina completamente el comportamiento del algoritmo.

El comportamiento en convergencia en función del modo correspondiente, puede ser subamortiguado, crítico o sobreamortiguado, dependiendo del valor de  $\beta$  elegido.

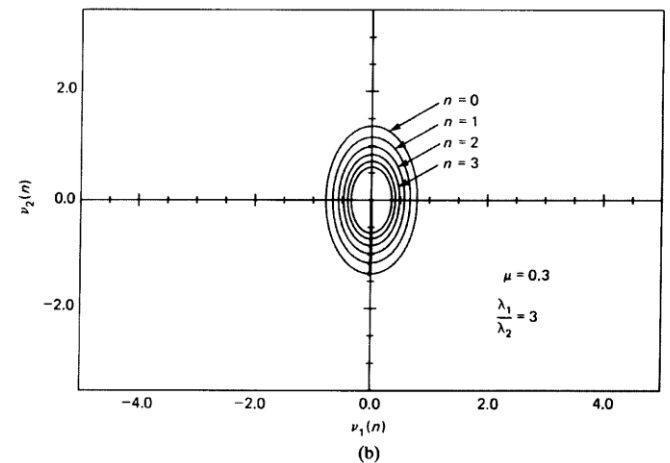
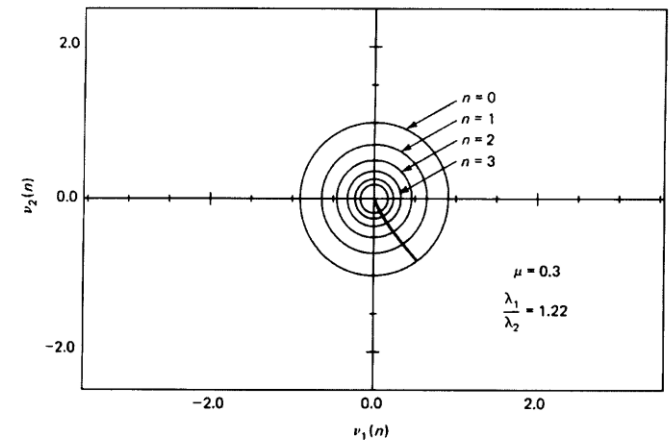


Efecto de la dispersión de autovalores sobre la convergencia;  
a) Dispersión baja; b) Dispersión alta.

## Ecualizadores de complejidad restringida ...

### Ejemplo de convergencia del algoritmo SD

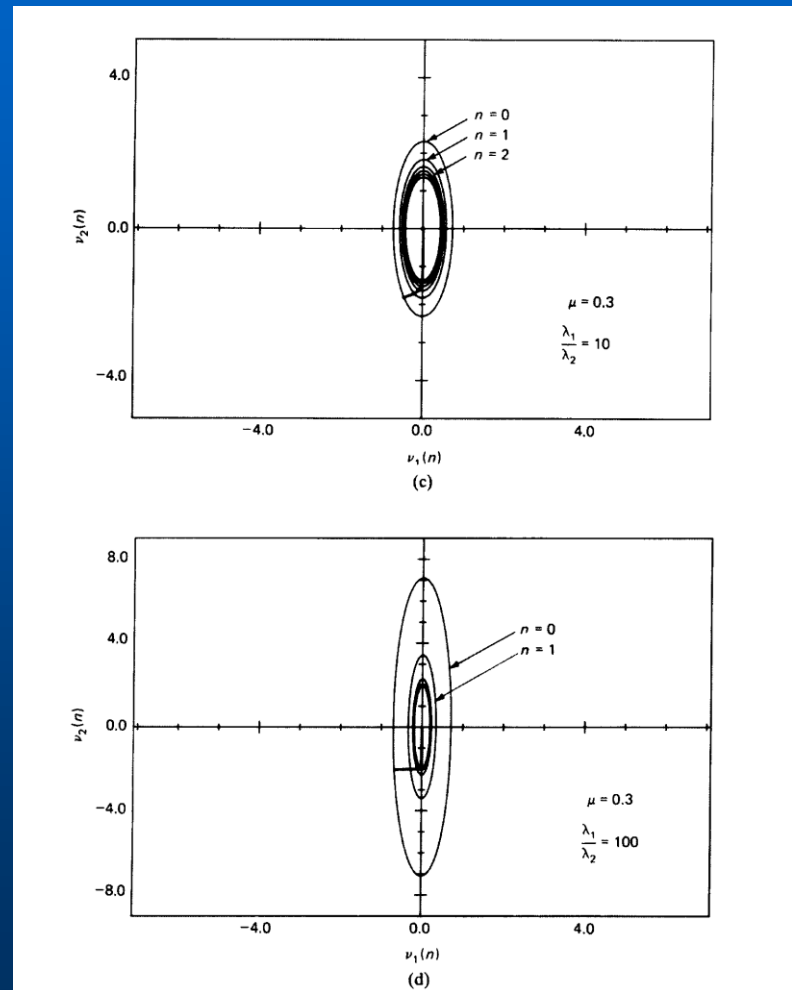
Contornos de nivel de igual MSE y una ilustración de la convergencia del algoritmo SD.



## Ecualizadores de complejidad restringida ...

### Ejemplo de convergencia del algoritmo SD

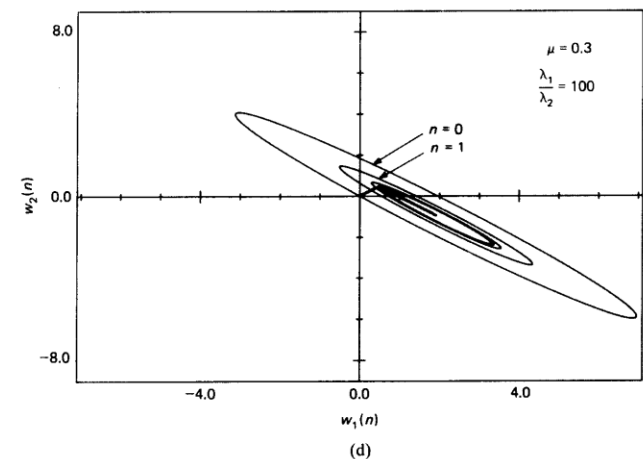
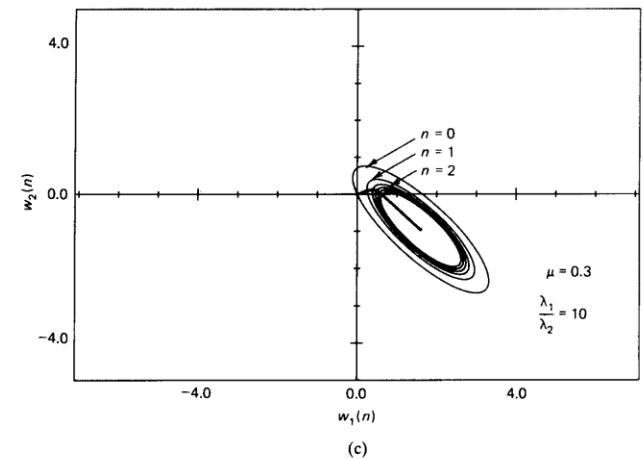
Contornos de nivel de igual MSE y una ilustración de la convergencia del algoritmo SD.



## Ecualizadores de complejidad restringida ...

### Ejemplo de convergencia del algoritmo SD

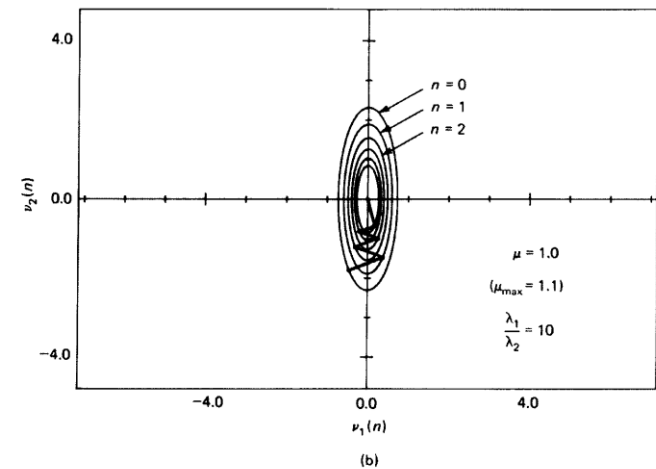
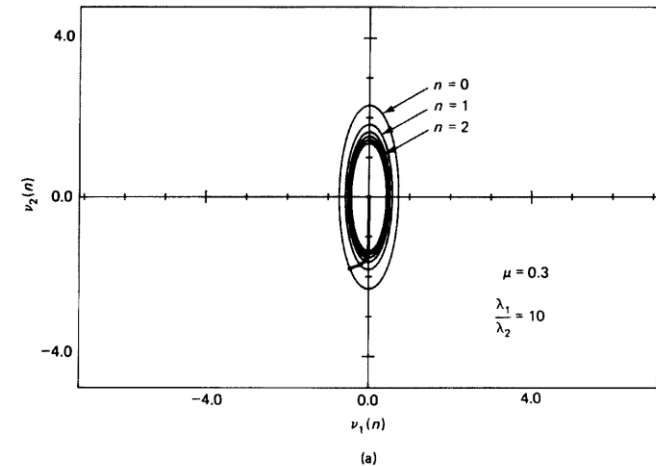
Contornos de nivel de igual MSE y una ilustración de la convergencia del algoritmo SD.



## Ecualizadores de complejidad restringida ...

### Ejemplo de convergencia del algoritmo SD

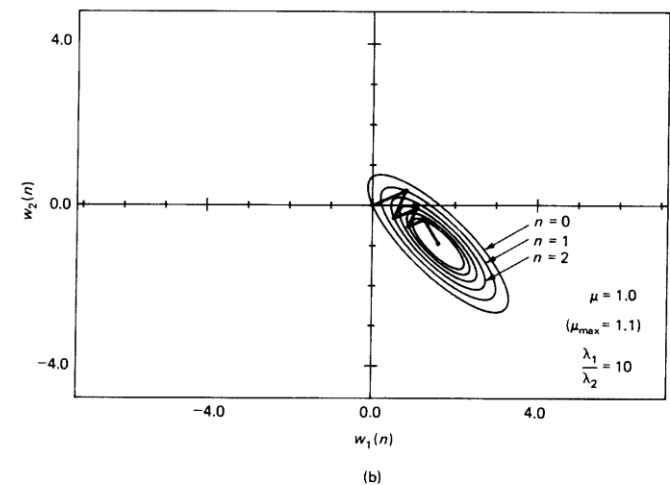
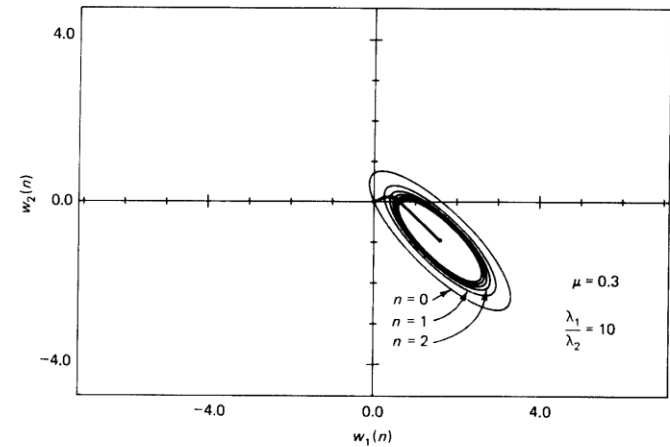
Contornos de nivel de igual MSE y una ilustración de la convergencia del algoritmo SD.



## Ecualizadores de complejidad restringida ...

### Ejemplo de convergencia del algoritmo SD

Contornos de nivel de igual MSE y una ilustración de la convergencia del algoritmo SD.

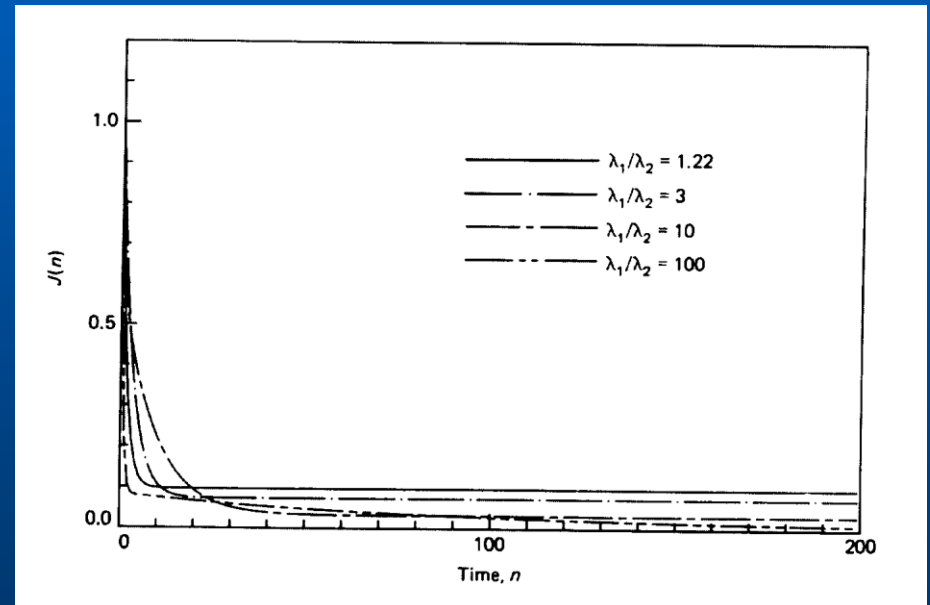




## Ecualizadores de complejidad restringida ...

### Ejemplo de convergencia del algoritmo SD

Curvas de aprendizaje como ilustración de la convergencia del algoritmo SD.



## Ecualizadores de complejidad restringida ...

Es interesante relacionar la dispersión de autovalores con la DEP correspondiente

$$S(e^{jw}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi_k e^{jwk}$$

$$\min_w S(e^{jw}) < \lambda_i < \max_w S(e^{jw})$$

donde el índice de los Autovalores depende del orden de la matriz autocorrelación  $N$ , tal que para  $N \rightarrow \infty$

$$\lambda_{\max} \rightarrow \max_w S(e^{jw}), \quad \lambda_{\min} \rightarrow \min_w S(e^{jw})$$

# Ecualización Adaptativa (resumen)

- **Ecualizadores de complejidad reducida.**
- Ecualizador lineal adaptativo.
- DFE adaptativo.
- Ecualizador de espaciamiento fraccionario.
- Ecualización pasabanda.