Procesamiento de Señales en Comunicaciones

Departamento de Ingeniería Eléctrica y Computadoras
Universidad Nacional del Sur

Contenidos

- Modulación.
- Diseño de distancia Mínima.
- Desempeño en ruido.
- Detección.
- Ecualización óptima.
- Ecualización adaptativa.
- Modulación de portadoras múltiples

Diseño de distancia mínima.

- Espacio de señales.
- Modelado de señales
- Diseño en base a distancia mínima.
- Aplicación a diferentes modulaciones
  - Pulsos aislados
  - Con ISI.
- Ancho de banda y dimensionalidad.

Espacio de Señales

- En lugar de un diseño heurístico del receptor, como anteriormente, diseño en base a un criterio definido sobre las señales transmitidas: **Distancia Mínima.**

- Señales se pueden representar como vectores en un espacio finito, entonces medida de similaridad entre señales: distancia mínima entre vectores.

- Con este criterio, elección de la señal (entre un conjunto predefinido) que está más próxima a la recibida.

Espacio de Señales

En base a la señal ***Y*** recibida, formada por una de las *L* del conjunto

$$\{\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2, \cdots, \boldsymbol{S}_L\}$$

donde ***Y*** y $\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2, \cdots, \boldsymbol{S}_L$ son vectores con producto interno

$$< \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} >= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k y_k^*$$

en caso de señales discretas, o

$$< \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} >= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt$$

en el caso de señales continuas. Además,

$$\|\boldsymbol{X}\|^2 =< \boldsymbol{X}, \boldsymbol{X} >< \infty$$

Modelado de Señales

- Como L es normalmente grande, se elige un espacio ortogonal (de dimensión $N \leq L$) para la representación de las señales.

- La base ortogonal será $\{\mathbf{\Phi}_1, \mathbf{\Phi}_2, \cdots, \mathbf{\Phi}_N\}$, tal que

$$< \mathbf{\Phi}_i, \mathbf{\Phi}_j >= \delta_{i,j}$$

- Entonces, las señales se pueden escribir

$$\boldsymbol{S}_l = \sum_{n=1}^{N} s_{n,l} \mathbf{\Phi}_n \qquad\qquad s_{n,l} =< \boldsymbol{S}_l, \mathbf{\Phi}_n >$$

Criterio de diseño de distancia mínima

Se supone que la señal recibida es

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{S}_l + \boldsymbol{E}$$

y se busca minimizar

$$\|\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{S}_l\|^2 = \|\boldsymbol{Y}\|^2 + \|\boldsymbol{S}_l\|^2 - 2\, Re\{< \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{S}_l >\}$$

o, como $\|\boldsymbol{Y}\|^2$ es independiente de l,

$$\max_l \left(Re\{< \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{S}_l >\} - 1/2 E_l \right), \quad E_l = \|\boldsymbol{S}_l\|^2$$

Para disminuir la complejidad, usando una base ortogonal,

$$Re\{< \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{S}_l >\} = Re\{\sum_{n=1}^{N} s_{n,l}^{*} < \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{\Phi}_n >\} = Re\{\sum_{n=1}^{N} c_n s_{n,l}^{*}\}$$

entonces

$$\max_l \left(Re\{\sum_{n=1}^{N} c_n s_{n,l}^{*}\} - 1/2 E_l \right) = \min_l \sum_{n=1}^{N} |c_n - s_{n,l}|^2$$

Distancia mínima de un conjunto de señales

- Una medida importante de la inmunidad frente a ruido de un conjunto de señales es

$$d_{min} = \min_{i \neq j} \|\boldsymbol{S}_i - \boldsymbol{S}_j\|$$

•Para ruido Gaussiano, es el parámetro mas importante para predecir la probabilidad de error con este tipo de diseño.

Aplicación a diferentes modulaciones: PAM

Sin ISI,

$$y = a_m + e, \; \{a_m, \; 1 \leq m \leq M\}$$

Entonces, considerando y como un escalar,

$$\min_m \|\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{S}_m\|^2 = \min_m |y - a_m|^2$$

o, en forma equivalente,

$$\max_m \left(2Re\{y a_m^*\} - |a_m|^2\right)$$

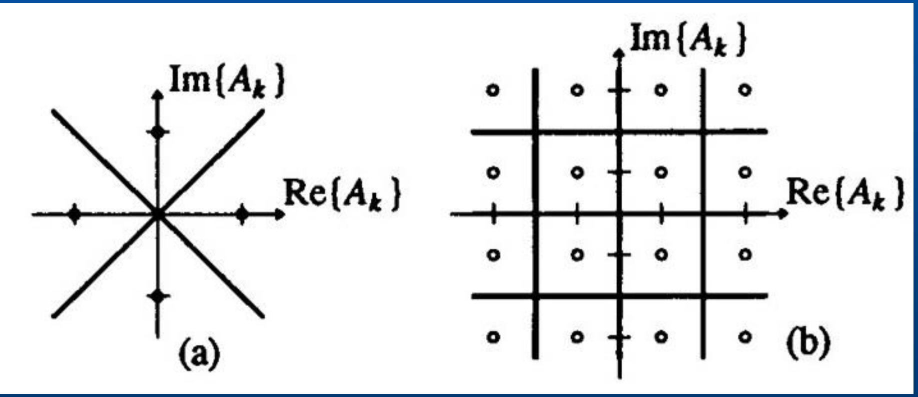
La distancia mínima será

$$d_{\min} = a_{\min}, \quad a_{\min} = \min_{i \neq j} |a_i - a_j|$$

Aplicación a diferentes modulaciones (PAM)

Ejemplo: Umbrales de decisión para QAM

$$\min_l |Q - a_l|^2 = \min_l \left((Re\{Q\} - Re\{a_l\})^2 + (Im\{Q\} - Im\{a_l\})^2 \right)$$



Regiones de decisión para distancia mínima para constelaciones QAM 4 y QAM 16.

Recepción de un pulso aislado de PAM

Suponiendo ahora un formato de pulso específico, $h(t)$, sin ISI

$$y(t) = a_l h(t) + e(t)$$

Por ser una constelación unidimensional $\phi(t) = h(t)/\sigma_h$, y asociando

$$\boldsymbol{Y} \leftrightarrow y(t), \qquad \boldsymbol{S}_l \leftrightarrow a_l \sigma_h \phi(t)$$

el criterio para el receptor resulta

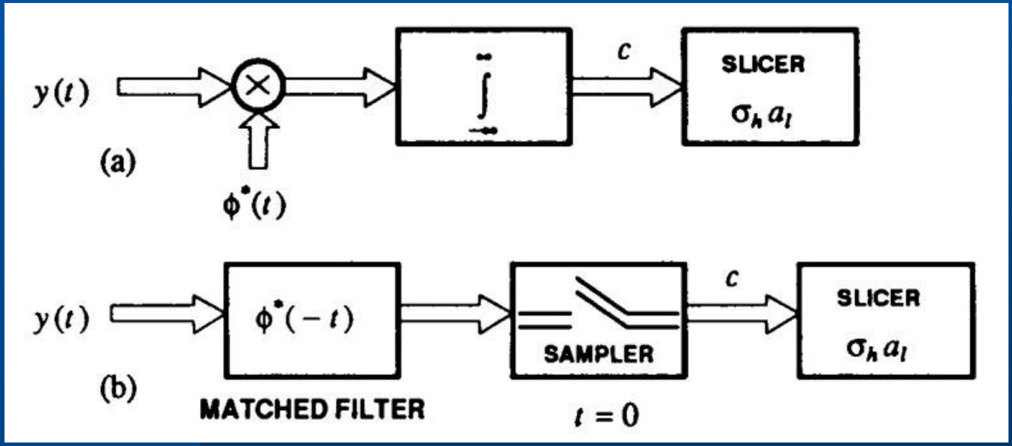
$$\max_l \left(2Re\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} y(t) a_l^* \sigma_h \phi^*(t) dt \right\} - \int_{-\infty}^{\infty} |a_l \sigma_h \phi(t)|^2 dt \right)$$

Recepción de un pulso aislado de PAM…

Definiendo como variable de decisión $c = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)\phi^*(t)dt$ se tiene

$$\min_l |c - \sigma_h a_l|^2 = \max_l \left(2Re\{\sigma_h c a_l^*\} - \sigma_h^2 |a_l|^2\right)$$

que es equivalente a $$\min_l |c - \sigma_h a_l|^2$$



Función transferencia MF: $H^*(jw)/\sigma_h$

Entonces la TF a la salida:

$$|H(jw)|^2/\sigma_h^2$$

Diseño de un receptor PAM de distancia mínima para un pulso aislado. a) Realización en base a un Correlador; b) realización en base a un MF, $c = y(t)\phi^*(-t)\,|_{t=0}$.

Recepción de un pulso aislado de PAM…

Es útil definir la autocorrelación de los pulsos $h(t)$

$$\rho_h(k) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)h^*(t-kT)dt$$

Y como es la versión discreta de un pulso con TF $|H(jw)|^2$, su DFT es

$$\begin{aligned} S_h(e^{jwT}) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho_h(k)e^{jwkT} \\ &= \frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty} |H(j(w+m\frac{2\pi}{T}))|^2 \end{aligned}$$

que se denomina *espectro desdoblado (folded spectrum).* Será muy útil para analizar efectos de ISI.

Recepción de un pulso aislado de PAM…

El diseño de distancia mínima realizado está optimizado en términos de SNR. Sin embargo, se ignoran los efectos de la ISI.

En general, usar un MF como el anterior introduce ISI. El MF no cumple el criterio de Nyquist:

$$\rho_h(k) = \rho_h(0)\delta_k, \quad S_h(e^{jwT}) = \rho_h(0) = \sigma_h^2$$

Ejemplo: Sea $h(t) = \sigma_k \sqrt{2a} e^{-\alpha t} u(t)$, entonces

$$\rho_h(k) = \sigma_h^2 \alpha^{|k|}, \quad \alpha = e^{-aT}$$

Y el *folded spectrum*

$$S_h(e^{jw}) = \frac{\sigma_h^2(1-\alpha^2)}{(1-\alpha e^{-jw})(1-\alpha e^{jw})}$$

que claramente no satisface el criterio de Nyquist

Recepción de un pulso aislado de PAM…

Otro ejemplo:

$h_0(t)$ tal que ortogonal a sus translaciones en *kT*.

Entonces, para $h(t) = h_0(t) + \alpha h_0(t - T)$

La autocorrelación será

$$\rho_h(k) = \{\cdots 0,\ \alpha\sigma_0^2,\ (1+\alpha^2)\sigma_0^2,\ \alpha\sigma_0^2,\ 0, \cdots\},$$

Y el espectro desdoblado

$$S_h(z) = \sigma_0^2(1 + \alpha z^{-1})(1 + \alpha z)$$

→ ISI !!

Recepción de un pulso aislado de PAM…

Finalmente, la distancia mínima se puede obtener de

$$d^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |(a_i - a_j)h(t)|^2 dt$$

o, en forma equivalente

$$d_{\text{min}} = \sigma_h a_{\text{min}}$$

No depende de la forma u otra propiedad del pulso, solo de su energía.

Recepción de un pulso aislado de Pulsos ortogonales

Sin ISI (*N* pulsos ortogonales), $y(t) = \sigma_h \phi_l(t) + e(t)$

donde se tiene un conjunto ortogonal $\{\phi_n(t), \quad 1 \leq n \leq N\}$

El criterio de distancia mínima usa $c_n = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)\phi_n^*(t)dt$, de donde se obtiene

$$\min_l \left(\sum_{n=1, n\neq l}^{N} |c_n|^2 + |c - \sigma_h|^2 \right) = \min_l \left(\sum_{n=1}^{N} |c_n|^2 - 2\sigma_h Re\{c_l\} + \sigma_h^2 \right)$$

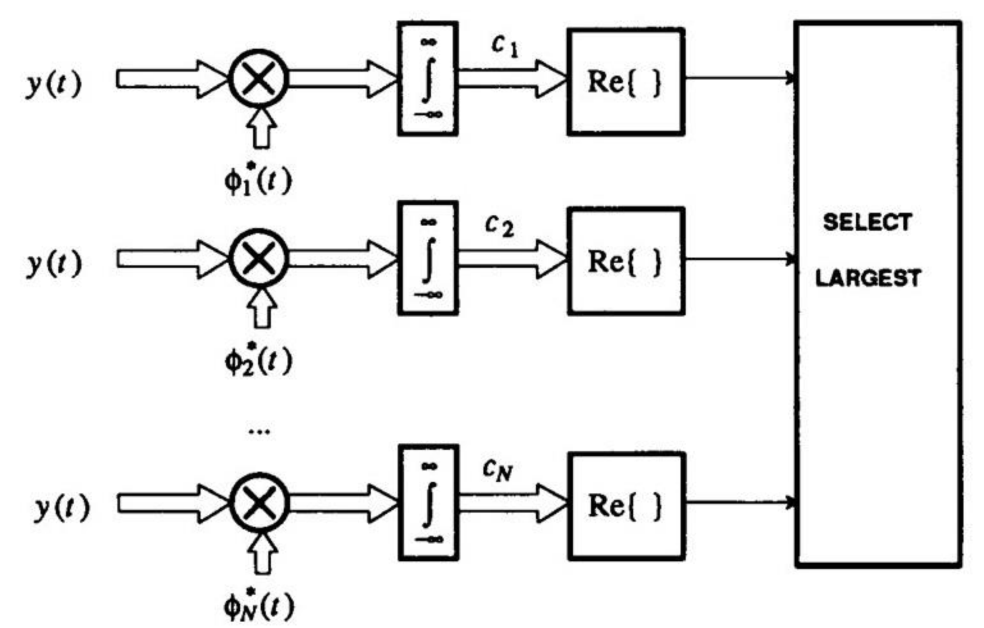
que es equivalente a

$$\max_l \mathrm{Re}\{c_l\}$$

También

$$d_{\min} = \sqrt{2}\sigma_h$$

Recepción de un pulso aislado de Pulsos ortogonales



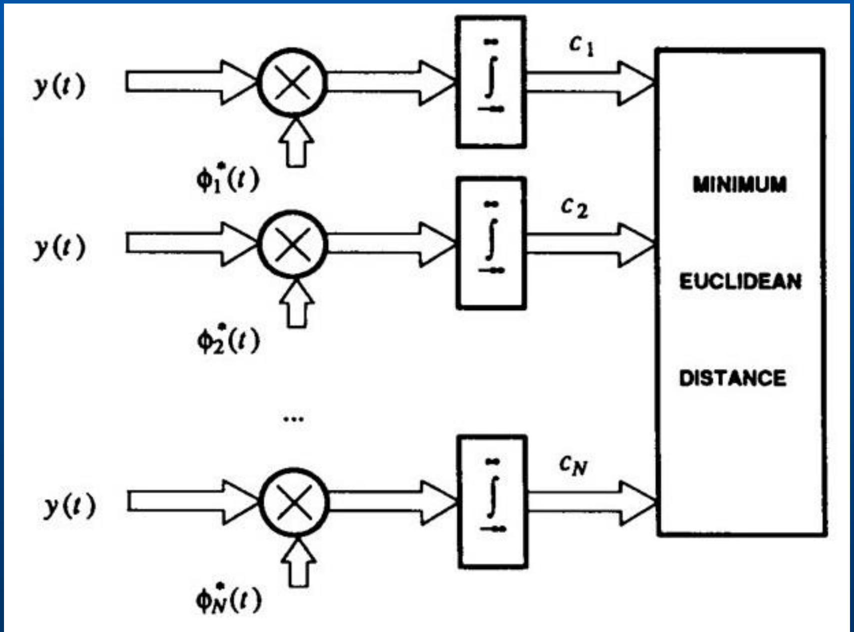
Recepción de un pulso aislado de PAM / PO

En este caso: $y(t) = \sum_{n=1}^{N} a_{n,l}\sigma_h \phi_n(t) + e(t)$

con $\{\phi_n(t), \quad 1 \leq n \leq N\}$

donde l indica cual señal fue transmitida tal que $L = M^N$, M: tamaño de la constelación.

Con $$c_n = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)\phi_n^*(t)dt$$



se minimiza

$$\min_{l} \sum_{n=1,}^{N} |c_n - \sigma_h a_{n,l}|^2$$

Y también

$$d_{\min} = \sigma_h a_{\min}$$

Diseño de distancia mínima (resumen).

- **Espacio de señales.**
- **Modelado de señales**
- **Diseño en base a distancia mínima.**
- **Aplicación a diferentes modulaciones**
  - **Pulsos aislados**
  - **Con ISI.**
- **Ancho de banda y dimensionalidad.**