

# Procesamiento de Señales en Comunicaciones

Departamento de Ingeniería Eléctrica y Computadoras  
Universidad Nacional del Sur

# Contenidos

- **Modulación.**
- **Diseño de Distancia Mínima.**
- **Desempeño en ruido.**
- **Detección.**
- **Ecualización óptima.**
- **Ecualización adaptativa.**
- **Modulación de portadoras múltiples**

# Modulación

- Introducción.
- PAM bandabase
  - Criterio de Nyquist.
- **PAM pasabanda.**
- **Filtro acoplado**
  - **espectro disperso**
- Modulación de pulsos ortogonales
  - Criterio de Nyquist generalizado.
- Combinación PAM y pulsos ortogonales
  - Modulación Multiportadora.
  - CDMA.

## Representación de señales pasabanda.

### Divisor de fase

$$\Phi(jw) = \begin{cases} 1, & w \geq 0, \\ 0, & w < 0 \end{cases}$$

deja pasar solo frecuencias positivas y por asimetría  $\phi(t)$  (respuesta impulsiva) es compleja. Entonces salida = *señal analítica*.

En el dominio frecuencia, el divisor de fase es equivalente a la **Transformada de Hilbert**

$$H(jw) = -j \operatorname{sign}(w)$$

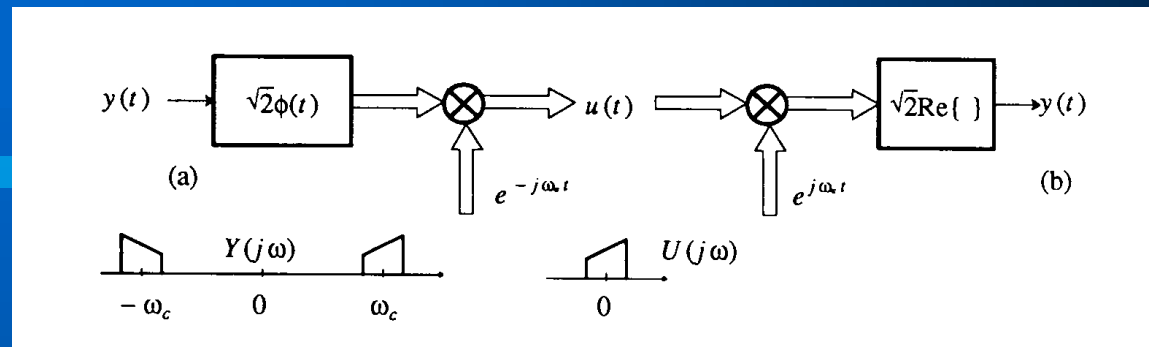
con  $h(t)$  (respuesta impulsiva) real, si la entrada es  $x(t)$ , la salida será  $\hat{x}(t)$

Ejemplo: Si una entrada real al divisor de fase es  $x(t)$ , entonces la salida será:

$$\Phi(jw) = 1/2[1 + \operatorname{sign}(w)] = 1/2[1 + jH(jw)]$$

$$\begin{aligned} X(jw)\Phi(jw) &= 1/2X(jw)[1 + \operatorname{sign}(w)] \\ &\Leftrightarrow 1/2[x(t) + j\hat{x}(t)] \end{aligned}$$

## Representación bandabase de señales pasabanda.



Obtención de la representación banda base compleja  $u(t)$  a partir de una señal pasabanda  $y(t)$ . a) Obtención de  $u(t)$  de  $y(t)$ . b) Recuperación de  $y(t)$  de  $u(t)$ . Se incluye el factor de escala  $\sqrt{2}$  para que ambas señales tengan la misma energía.

- Matemáticamente, la señal compleja banda base: **envolvente compleja**, puede expresarse por

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(y(t) + j\hat{y}(t))e^{-j\omega_c t}$$

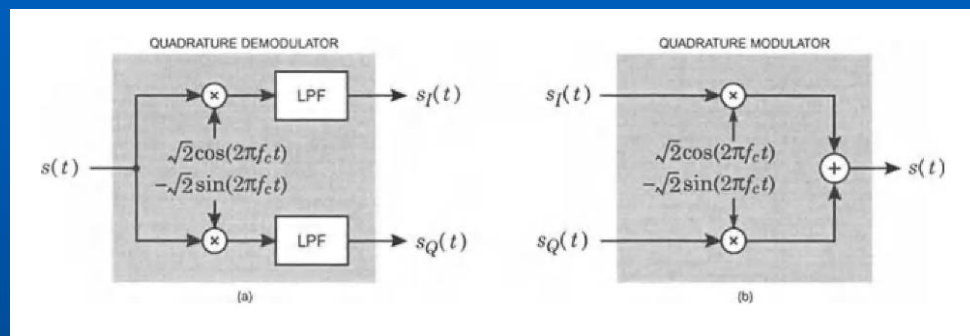
- La señal original pasabanda puede recuperarse de la representación banda base compleja a través de

$$y(t) = \sqrt{2} \text{Re}\{u(t)e^{j\omega_c t}\}$$

que se denomina *representación canónica*.

# Formas convencionales de modulación

El esquema anterior es equivalente a:



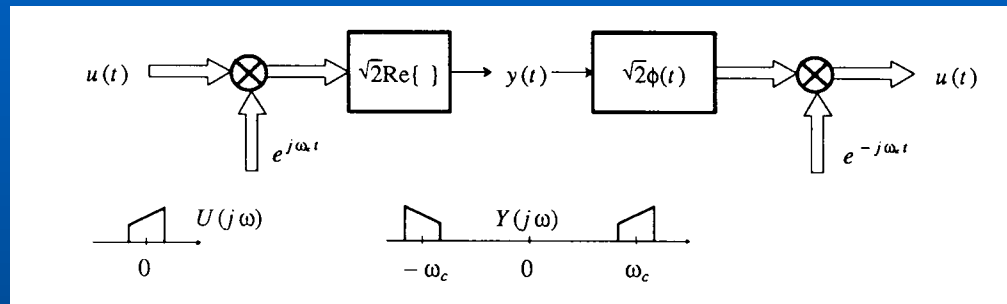
$$\begin{aligned} s(t) &= \sqrt{2} \operatorname{Re}\{(s_I(t) + js_Q(t))e^{j\omega_c t}\} \\ &= \sqrt{2}s_I(t) \cos(\omega_c t) - \sqrt{2}s_Q(t) \sin(\omega_c t) \end{aligned}$$

Aquí la envolvente compleja es:  $\tilde{s}(t) = (s_I(t) + js_Q(t))$

Una propiedad importante es que, para un sistema lineal con entrada  $s(t)$  y respuesta impulsiva  $h(t)$ ,  $S(j\omega)H(j\omega)$  tiene como equivalente bandabase  $\tilde{S}(j\omega)\tilde{H}(j\omega)$

## Formas convencionales de modulación

Un modulador convierte una señal banda base compleja  $u(t)$  en una señal pasabanda real  $y(t)$ , simplemente revirtiendo la figura anterior, o sea



Todas las técnicas de modulación comunmente usadas pueden representarse en esta forma:

- AM-DSB,
- AM-SSB y
- QAM.

Se distinguen por como mapean la señal que lleva información (moduladora) en la señal banda base compleja  $u(t)$ .

## Formas convencionales de modulación

- **AM-DSB**, moduladora  $a(t)$  se mapea en una señal pasabanda haciendo  $u(t)=a(t)$ . La señal banda base  $u(t)$  es real y tiene DEP simétrica alrededor de portadora.

$$y(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re}\{a(t)e^{j\omega_c t}\} = \sqrt{2}a(t) \cos(\omega_c t)$$

La señal pasabanda es compleja con simetría conjugada alrededor de la portadora ya que la señal banda base es real.

- **AM-SSB**: real  $a(t)$ , pero señal banda base compleja se obtiene con divisor de fase

$$u(t) = 1/2[a(t) + j\hat{a}(t)].$$

Como la señal banda base es analítica, la señal pasabanda tiene solo componentes de frecuencia correspondientes a la banda por encima de la portadora.

- **QAM**: se tienen dos señales moduladoras reales  $a(t)$  y  $b(t)$  tal que  $u(t) = a(t) + j b(t)$ . La señal banda base compleja no es ni analítica ni tiene simetría compleja alrededor de cc. La señal pasabanda tiene en bandas laterales superior e inferior y no tiene una simetría particular alrededor de portadora.

$$y(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re}\{(a(t) + jb(t))e^{j\omega_c t}\} = \sqrt{2}a(t) \cos(\omega_c t) - \sqrt{2}b(t) \sin(\omega_c t)$$



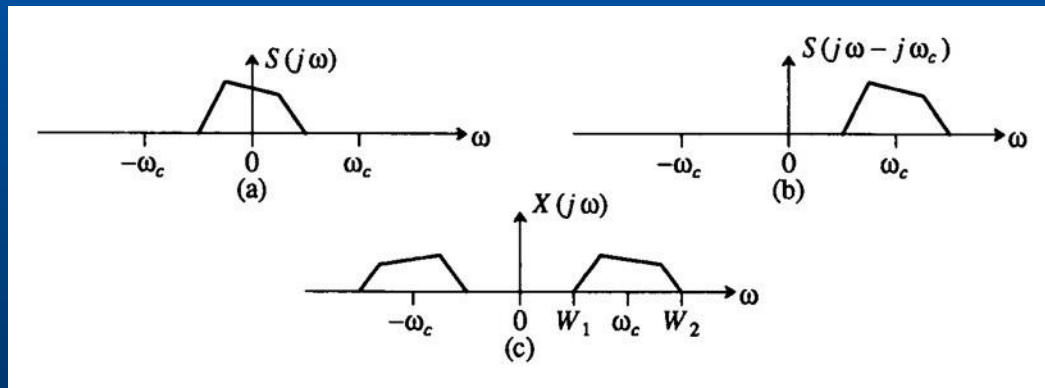
## PAM pasabanda

Señal banda base (QAM en general)  
compleja

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k g(t - kT)$$

Señal pasabanda correspondiente

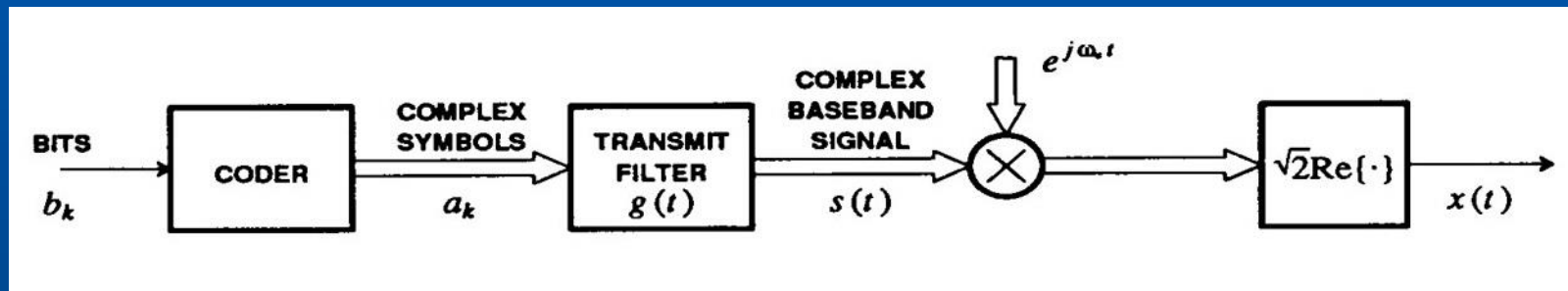
$$x(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re}\{s(t)e^{j\omega_c t}\}$$



a) Ejemplo de una señal bandabase; b) La versión analítica pasabanda; c) El equivalente real pasabanda

## PAM pasabanda: transmisión

$$x(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \left\{ e^{j\omega_c t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k g(t - kT) \right\}$$

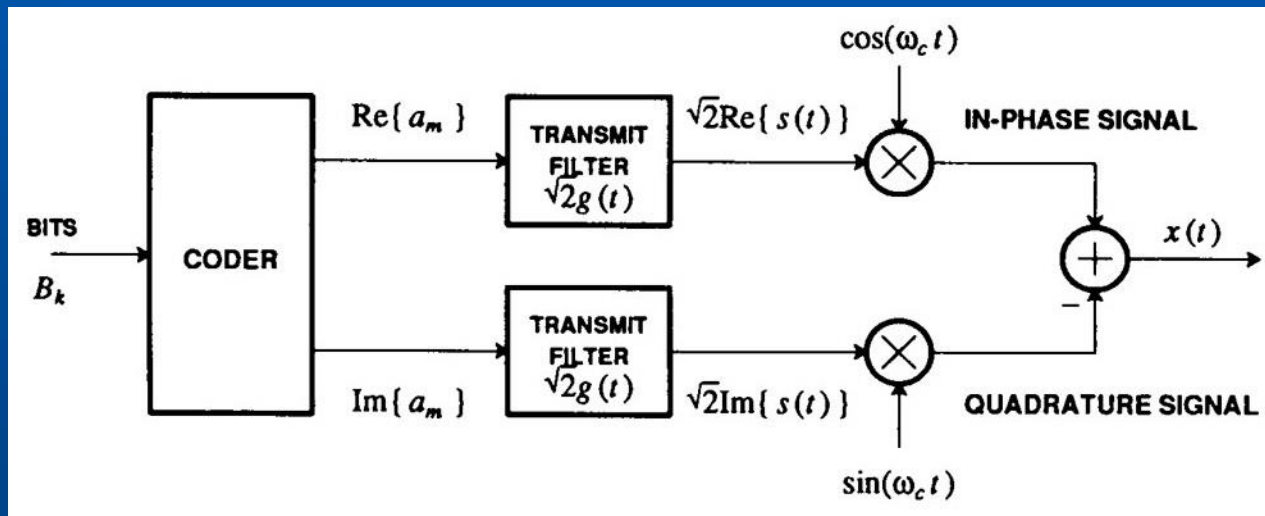


Modulador PAM pasabanda. La diferencia más importante con el modulador PAM bandabase es que el codificador mapea bits en símbolos de datos complejos.

## PAM pasabanda (cont.): transmisor

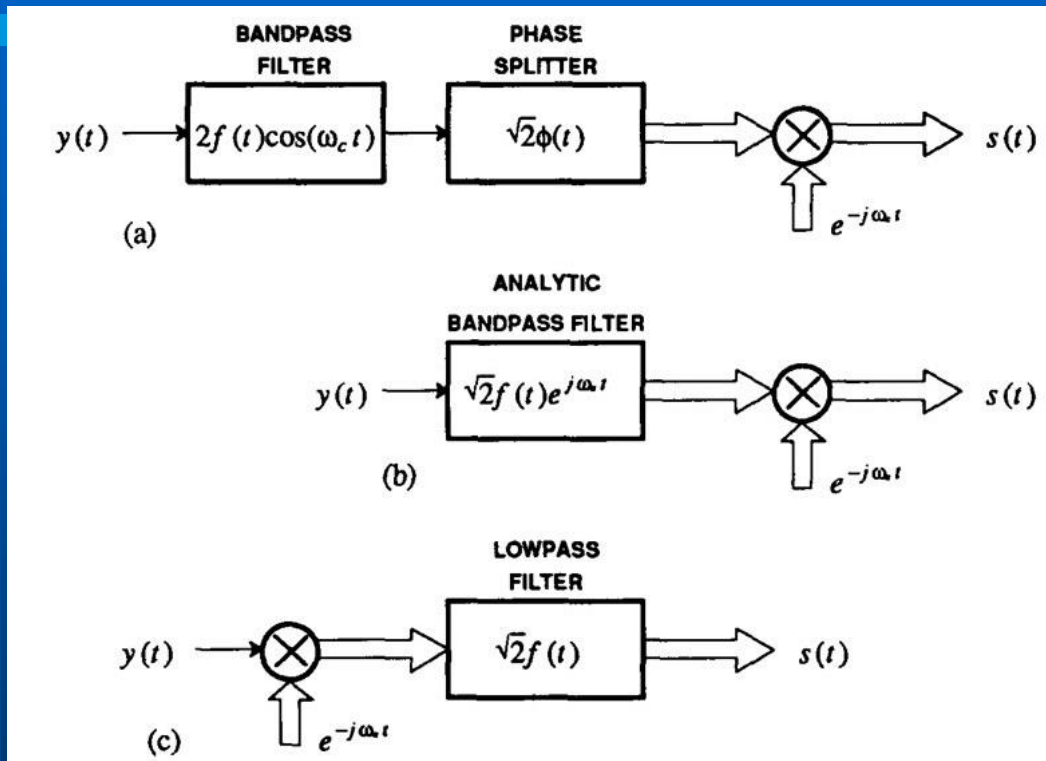
Si  $g(t)$  es en general real

$$x(t) = \sqrt{2} \left[ \cos(\omega_c t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{Re}\{a_k\} g(t - kT) \right] - \sqrt{2} \left[ \sin(\omega_c t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{Im}\{a_k\} g(t - kT) \right]$$



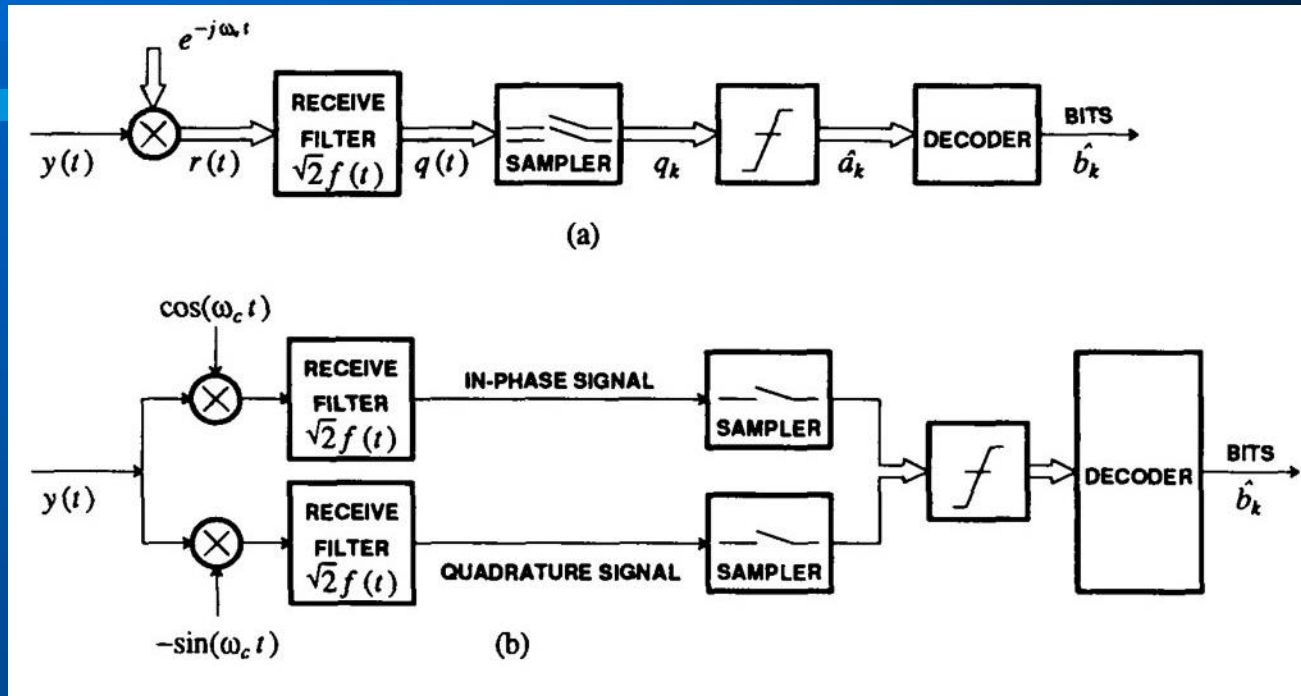
Transmisor PAM pasabanda. Realiza la misma función que el transmisor anterior cuando el filtro de transmisión  $g(t)$  toma valores reales.

## PAM pasabanda (cont.): recepción



3 demoduladores equivalentes que incluyen el filtro de recepción con respuesta impulsiva  $f(t)$

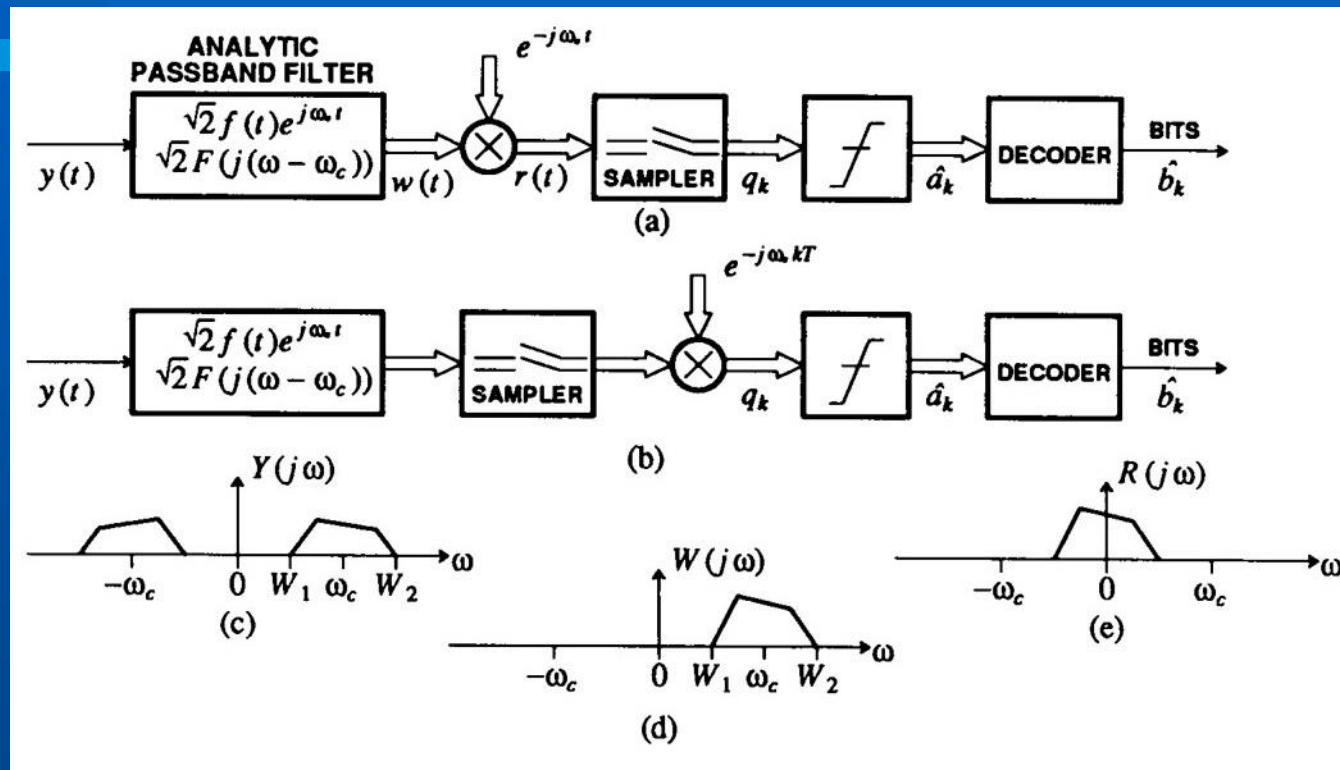
## PAM pasabanda (cont.): recepción



Estructura del demodulador PAM con el filtro de recepción bandabase. a) En base a señales complejas, b) estructura equivalente con señales reales.

El comparador (slicer) en el caso complejo supone un slicer para parte en fase y otro para la parte en cuadratura.

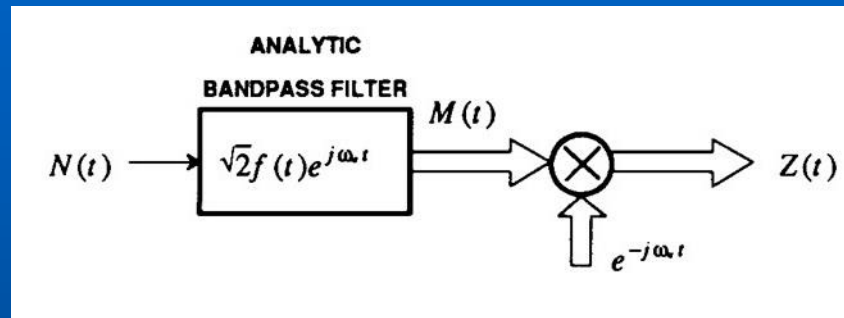
## PAM pasabanda (cont.): recepción



2 receptores equivalentes a los anteriores (combinando demodulador y detector PAM) usando el filtro pasabanda analítico. En el 2do, la demodulación se realiza en forma discreta (útil para sincronización).

## Ruido a la salida del receptor

Si solo existe ruido  $N(t)$  bandabase a la entrada del receptor,



a la salida del filtro de recepción el ruido será:

$$S_M(jw) = 2N_o|F(j(w - w_c))|^2$$

Entonces, como

$$R_Z(\tau) = e^{-jw_c\tau} R_M(\tau)$$

resulta

$$S_Z(jw) = S_M(j(w + w_c)) = 2N_o|F(jw)|^2$$

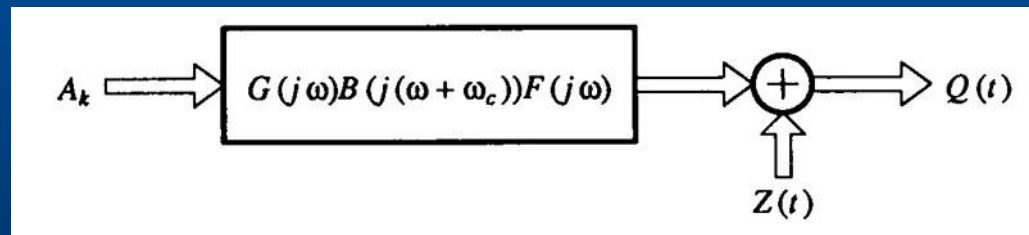
y se controla a través del ancho de banda del filtro de recepción.

## Canal bandabase equivalente

Si  $B(jw)$  es la respuesta en frecuencia del canal y  $G(jw)$  es la TF del pulso transmitido, el pulso bandabase recibido será

$$H(jw) = B(j(w + w_c))G(jw)$$

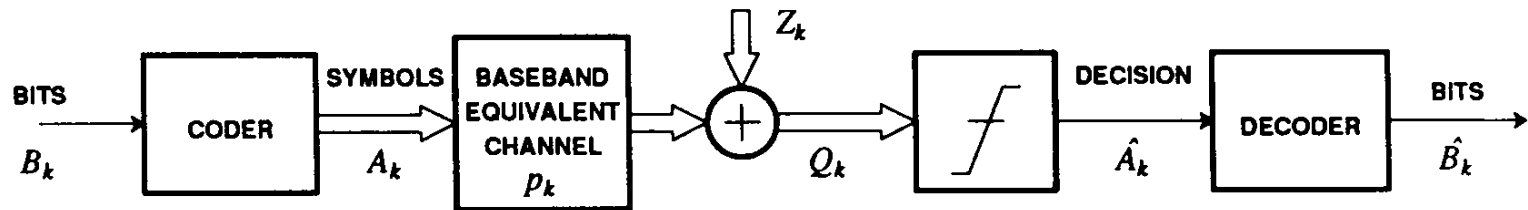
Entonces, si  $F(jw)$  es la TF del filtro de recepción, el **modelo de canal bandabase equivalente** (incluyendo: modulador, demodulador y filtros de transmisión y recepción) tiene la forma:



donde  $Z(t)$  es el ruido de canal después del filtrado y la demodulación.



## Representación discreta equivalente



**Figure 6-22.** A passband communication system can be modeled using a complex-valued discrete-time channel.

$$P(jw) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} G[j(w - \frac{2\pi}{T}k)] B_E[j(w - \frac{2\pi}{T}k)] F[j(w - \frac{2\pi}{T}k)]$$

$$B_E(jw) = B[j(w + w_c)]$$

## Receptor PAM completo

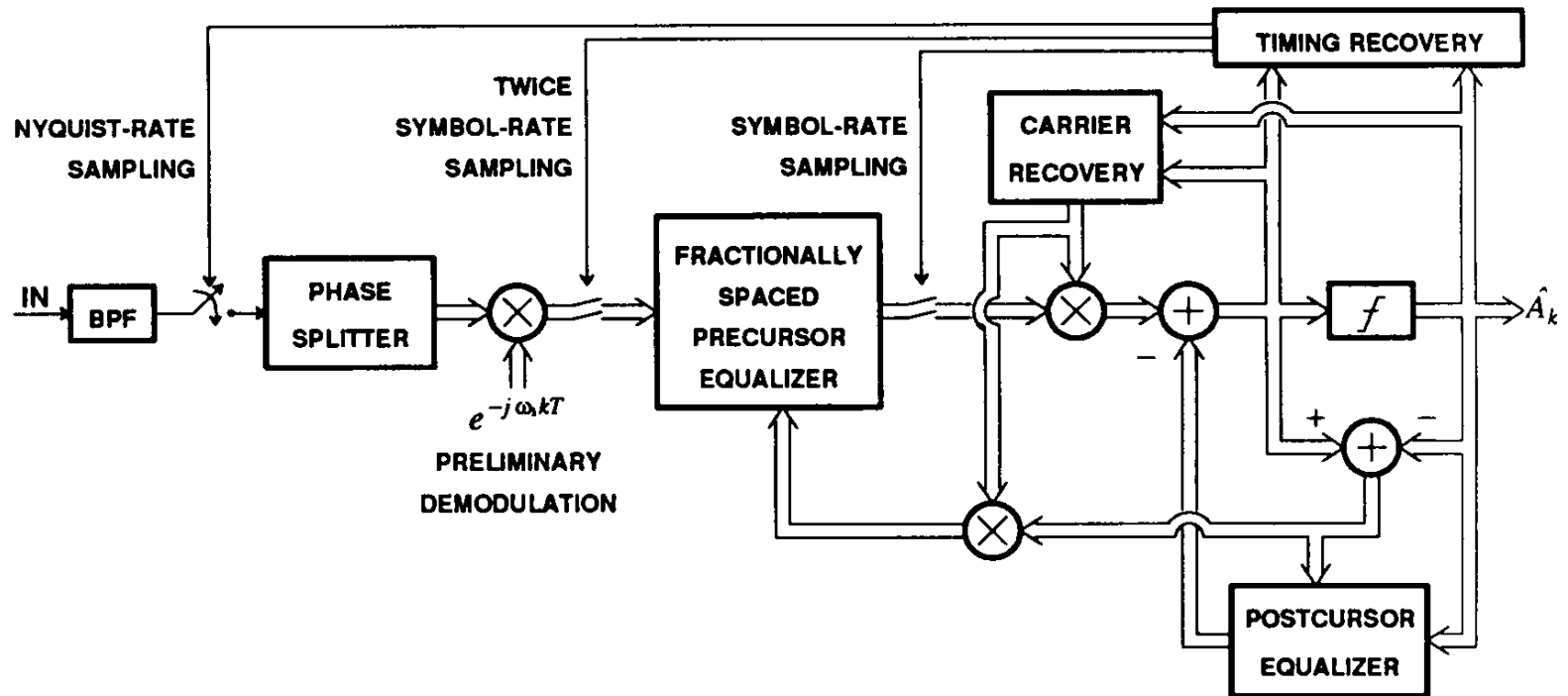
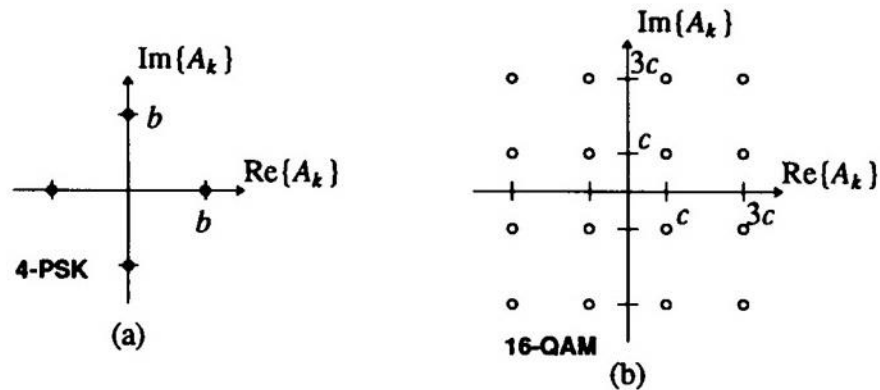


Figure 6-23. Block diagram of a typical passband PAM receiver.

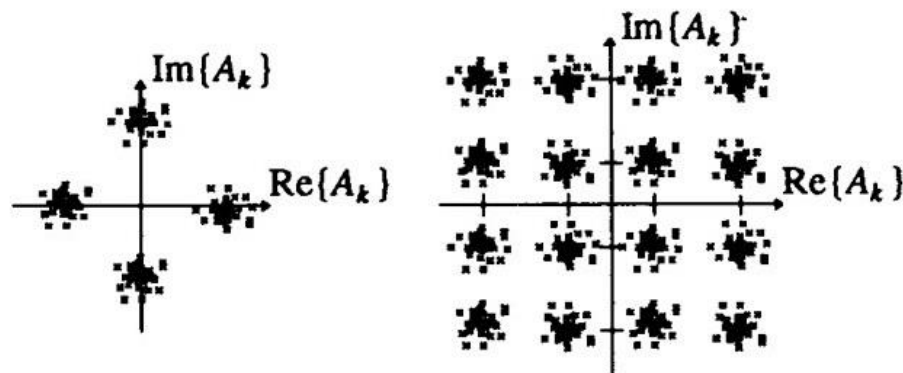
# Diseño del alfabeto

En base al modelo discreto equivalente se puede pensar en formas posibles de alfabetos o constelaciones

## Constelaciones típicas

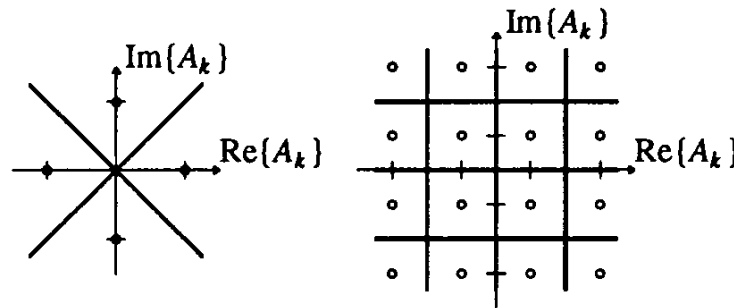


## Efectos del ruido



## Diseño del alfabeto

Umbral de decisión: Debido al ruido (Gaussiano) la salida de los slicers tomará el valor del símbolo más próximo en la constelación (criterio de Máxima Verosimilitud). Por ello el plano de la constelación se divide en **umbrales de decisión**.



**Figure 6-26.** The ML detectors for the constellations in Figure 6-24 have the decision regions shown.

El criterio de diseño es maximizar la distancia mínima entre puntos de la constelación.

## Diseño de la constelación: ejemplos...

$$M = 2^N \text{ Nro. de bits}$$

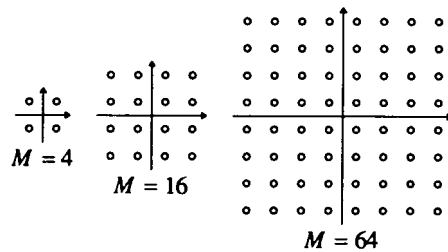


Figure 6-27. Some QAM constellations.

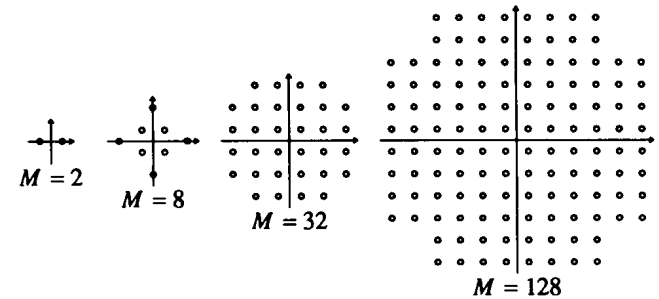


Figure 6-28. Cross constellations.

N par

N impar

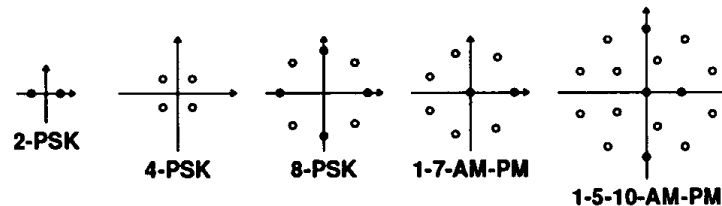


Figure 6-29. Constellations using phase-shift keying and amplitude modulation.

## Codificación diferencial

Como las constelaciones útiles son invariantes rotacionalmente, existirá una ambigüedad de fase, en general de  $\pi/2$ .

La ambigüedad se elimina con *Codificación diferencial*.

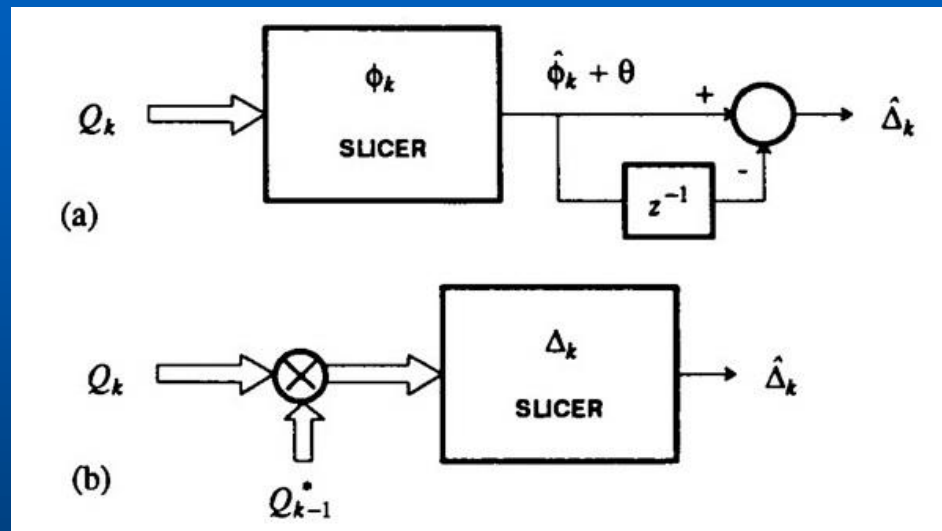
Por ejemplo. para PSK los símbolos tienen la forma:  $A_k = e^{j\phi_k}$ , tal que

$$\phi_k = \phi_{k-1} + \Delta_k$$

donde las fases  $\phi_k$  se eligen de alguna constelación. La información está asociada a  $\Delta_k$ .

## Codificación diferencial y DPSK

Si la entrada al detector es:  $Q_k = e^{j\phi_k + \theta_k} + Z_k$



Para el caso de **codificación y detección diferencial**: a) Coherente, lo que requiere una referencia de fase precisa. En ausencia de ruido, la entrada al elemento de decisión es  $\Delta_k$  (independiente de  $\theta_k$ ); b) Diferencial, la cual permite una rotación de fase arbitraria de variación lenta de los símbolos. Existirá un incremento del ruido a la salida.

## Eficiencia Espectral PAM

$$\nu = \frac{\log_2 M}{BT}$$

Bandabase: para el ancho de banda mínimo (Nyquist) ,  $B=1/2T$ :  $\nu = 2 \log_2 M$

Pasabanda: doble de ancho de banda anterior,  $\nu = \log_2 M$

QAM:  $N$  por portadora,  $\nu = \log_2 N^2 = 2 \log_2 N$



## Filtro acoplado (Matched Filter, MF): un pulso aislado

La estructura de receptor no es óptima en ningún sentido. Aquí consideramos un pulso aislado (sin ISI) y el diseño del filtro de recepción  $f(t)$ ,

### Caso bandabase

Maximización de:

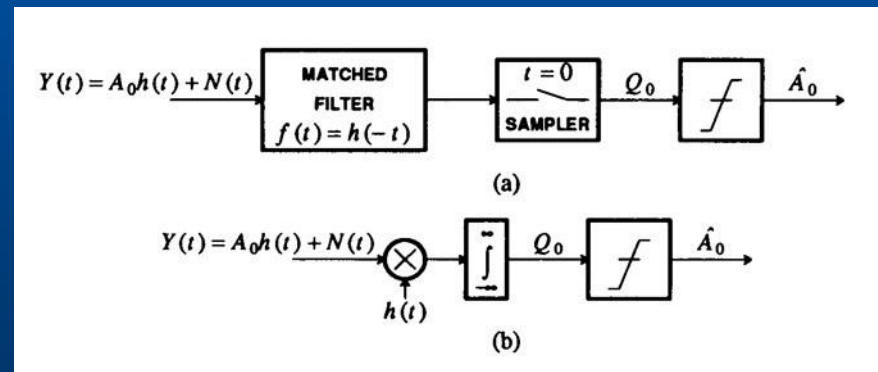
$$SNR_o = \frac{\sigma_A^2 \left[ \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) f(-\tau) d\tau \right]^2}{N_0 \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(-\tau) d\tau \right]^2}$$

Solución:

$$f(t) = Kh(-t) \Leftrightarrow KH^*(j\omega)$$

tal que

$$SNR_o \leq \frac{\sigma_A^2 \sigma_h^2}{N_0}$$



a) Receptor de filtro acoplado b) receptor de correlación. Ambos maximizan SNR a la salida.

## Filtro acoplado: un pulso aislado (cont.)

### Caso pasabanda

Maximización de:

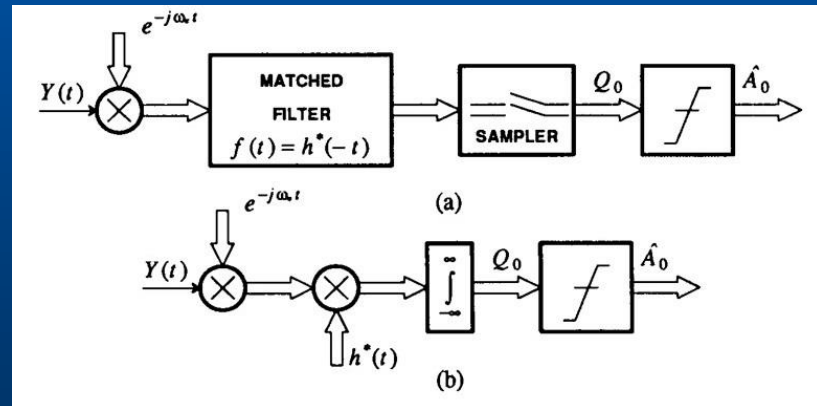
$$SNR_o = \frac{\sigma_A^2 \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) f(-\tau) d\tau \right|^2}{2N_0 \int_{-\infty}^{\infty} |f(-\tau)|^2 d\tau}$$

Sol.:

$$f(t) = Kh(-t)$$

tal que

$$SNR_o \leq \frac{\sigma_A^2 \sigma_h^2}{2N_0}$$



## Espectro Disperso (SS)

- Salida de MF depende de la energía del pulso, no del ancho de banda, en SS (que es un caso de PAM) se usa un ancho de banda mucho mayor que mínimo de Nyquist  $\pi/T$ .
- Ventajas:
  - Menor sensibilidad a distorsiones localizadas en frecuencia (ej. desvanecimiento multicamino selectivo en frecuencia).
  - Menor sensibilidad a jamming (interferentes causales).
  - Señal de Espectro Disperso (SS) enmascarable en el espectro (no “vista” por otras SS).
  - Se puede compartir el espectro.

Ej. En jamming (con interferentes causales): Si la señal de SS tiene ancho de banda  $B$  y potencia de jamming  $P_j$  tal que  $N_0 = P_j/2B$ , entonces con MF:

$$SNR_o = \frac{\sigma_A^2 \sigma_h^2}{N_0} = 2B \frac{\sigma_A^2 \sigma_h^2}{P_j}$$

→ Aumenta con ancho de banda!!

# Modulación (resumen)

- Introducción.
- PAM bandabase
  - Criterio de Nyquist.
- **PAM pasabanda.**
- **Filtro acoplado**
  - **espectro disperso**
- Modulación de pulsos ortogonales
  - Criterio de Nyquist generalizado.
- Combinación PAM y pulsos ortogonales
  - Modulación Multiportadora.
  - CDMA.