

Procesamiento de Señales en Comunicaciones

Departamento de Ingeniería Eléctrica y Computadoras
Universidad Nacional del Sur

Contenidos

- **Modulación.**
- **Diseño de Distancia Mínima.**
- **Desempeño en ruido.**
- **Detección.**
- **Ecualización óptima.**
- **Ecualización adaptativa.**
- **Modulación de portadoras múltiples**

Detección

- Detección de un único símbolo.
- Detección de un vector señal.
- Detección de señales continuas en ruido Gaussiano.
- Detección no coherente óptima.
- **Detección óptima de PAM con ISI.**
- **Detector de secuencias: Algoritmo de Viterbi.**

Detección óptima para PAM con ISI

Extensión de resultados anteriores (criterio de distancia mínima y WMF para ruido coloreado) en los siguientes aspectos:

- La salida del WMF es una estadística suficiente para la señal recibida (con cualquier criterio).
- El receptor de distancia mínima es el detector ML para un conjunto de M^K señales conocidas en una secuencia de K símbolos: el **detector de secuencias de ML (MLSD)**.
- Estos resultados se extienden para el caso de ruido coloreado y en particular los asociados al WMF.

Detección óptima para PAM con ISI ...

Salida del WMF como estadística suficiente:

Si la señal recibida es una secuencia de K símbolos, cada uno de un alfabeto de tamaño M , será

$$Y(t) = \sqrt{2}\text{Re}\left\{ \sum_{k=1}^K a_k h(t - kT) e^{j\omega_c t} \right\} + N(t)$$

Suponiendo $N(t)$ AWGN, esta puede interpretarse como una parte de las de un conjunto de $L = M^K$ señales, para las que (ya vimos) una estadística suficiente es

$$\int_{-\infty}^{\infty} Y(t) \sum_{k=1}^K a_k^* h^*(t - kT) e^{-j\omega_c t} dt = \sum_{k=1}^K a_k^* U_k$$

donde

$$U_k = \int_{-\infty}^{\infty} Y(t) e^{-j\omega_c t} h^*(t - kT) dt, \quad 1 \leq k \leq K$$

Esta correlación debe repetirse para toda secuencia de $L = M^K$ símbolos $\{a_k, 1 \leq k \leq K\}$.

Detección óptima para PAM con ISI ...

Salida del WMF como estadística suficiente ...

En la práctica calcular $L = M^K$ tendría alta complejidad si K es grande.

Sin embargo, la anterior correlación puede sustituirse por las variables de decisión

$$\{U_k, 1 \leq k \leq K\}$$

que forman una estadística suficiente.

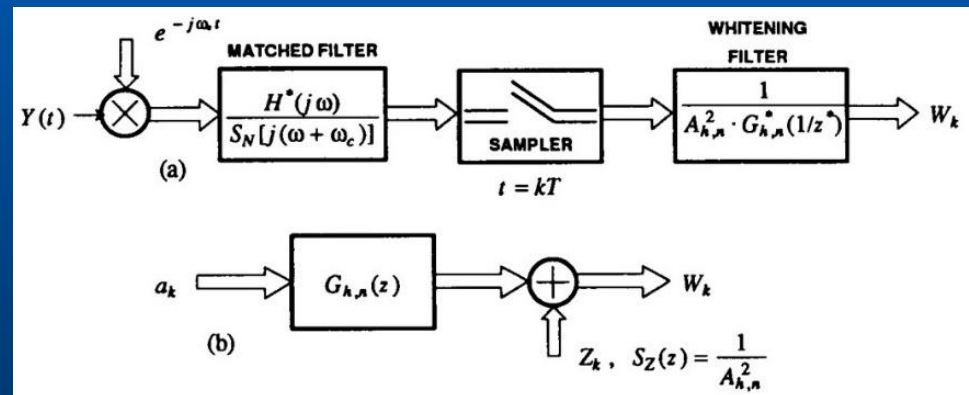
Esto reduce la estadística suficiente de $L = M^K$ a K muestras.

Detección óptima para PAM con ISI ...

Salida del WMF como estadística suficiente ...

Para ruido coloreado, considerando los resultados para $T \rightarrow \infty$, tal que la salida del demodulador es blanqueada con $1/S_N^{1/2}[j(\omega + \omega_c)]$ o alternativamente con un MF.

a) Receptor de MF para PAM con ruido coloreado



b) modelo equivalente discreto.

DetECCIÓN ÓPTIMA PARA PAM CON ISI ...

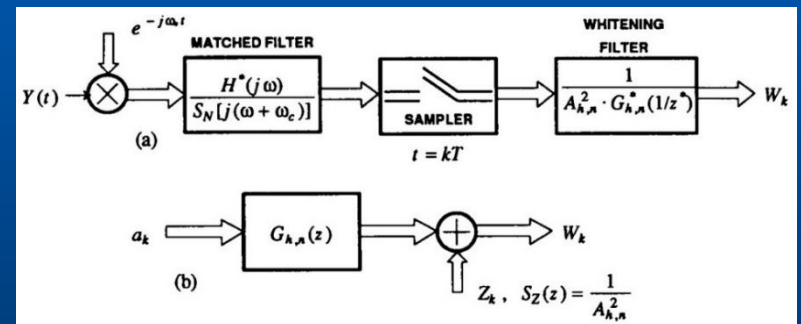
Salida del WMF como estadística suficiente ...

La salida del muestreador tiene una dep

$$S_{h,n}(e^{j\omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{|H(j\omega + m\frac{2\pi}{T})|^2}{S_N(j\omega + \omega_c + m\frac{2\pi}{T})}$$

Para la que se asume disponer de la factorización

$$S_{h,n}(z) = A_{h,n}^2 G_{h,n}(z) G_{h,n}^*(1/z^*)$$



a) Receptor de MF para PAM con ruido coloreado,
b) modelo equivalente discreto.

El uso del WMF para este caso general es notable ya que el muestreo sobre la señal mas ruido (no es a la tasa de Nyquist) puede introducir aliasing (esto tiene, como se verá, implicaciones prácticas).

Detección óptima para PAM con ISI ...

Detector de secuencias de ML (MLSD)

Para el equivalente discreto de la figura anterior, el detector ML fue obtenido antes: se elige la secuencia que minimiza

$$\min_{\{a_k, 1 \leq k \leq K\}} \sum_{k=1}^{\infty} \left| W_m - \sum_{k=1}^K a_k g_{h,m-k} \right|^2$$

- *El criterio MLSD es equivalente a un criterio de señal continua como el utilizado por el criterio de distancia mínima.*
- *Usando el WMF como estadística suficiente el criterio es óptimo en sentido ML (asume todas las secuencias de igual probabilidad).*

Detección de secuencias: Algoritmo de Viterbi

Cuando la señal corresponde a una secuencia de K símbolos y se tiene un alfabeto de tamaño M , el número total de señales es M^K .

En consecuencia, como en el caso del MLSD, calcular cada una de las K distancias tiene una complejidad que crece exponencialmente con el tiempo (tiempo es proporcional a K).

Una aplicación práctica requiere que la complejidad sea lineal (lo que corresponde a una velocidad de cómputo *fija*).

Para lograr una reducción de complejidad notable, la idea es asumir cierta estructura sobre el conjunto de señales transmitidas: el modelo de generación de señal es una *máquina de estados finita (FSM)*.



Detección de secuencias: Algoritmo de Viterbi

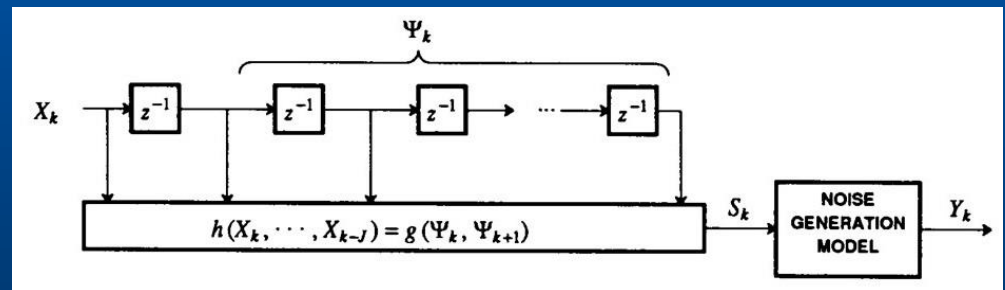
Generador de señal en base a una FSM

El algoritmo de Viterbi es aplicable cuando:

- La componente de ruido en cada muestra es independiente.
- La señal se genera con una FSM: cadena de Markov homogénea (invariante).
- Para maximizar la probabilidad de detección se utiliza distancia mínima.

El modelo generador de señal es una muestra de las transiciones de estado de una *cadena de Markov*

Un modelo de generación de señal de observación producido por un registro de desplazamiento y un modelo de generación de ruido.



Objetivo: Detector de secuencias a distancia mínima para detectar la secuencia de estados dada la observación Y_k , la cual es perturbada con ruido.

Se verá como obtener la solución de distancia mínima (Viterbi) y luego analizaremos su desempeño.

Detección de secuencias: Algoritmo de Viterbi

Cadena de Markov homogénea y FSM

$$S_k = g(\psi_k, \psi_{k+1})$$

donde ψ_k es una secuencia de estados de una cadena de Markov homogénea y $g(\cdot, \cdot)$ es una función sin memoria.

La FSM satisface

- La salida S_k depende solo del estado actual ψ_k y de la entrada actual X_k .
- El próximo estado ψ_{k+1} depende solo del estado actual ψ_k y de la entrada actual X_k .
- Es una cadena homogénea si la probabilidad de transición $p(\psi_k|\psi_{k-1})$ no depende del instante k (invariancia en el tiempo), i.e.

$$p(j|i) = p_{\psi_{k+1}|\psi_k}(j|i)$$

Detección de secuencias: Algoritmo de Viterbi ...

Generador de señal en base a una FSM

Ejemplo: Para PAM con ISI y el WMF, se tiene un modelo discreto de generación de señal, $G_{h,n}(z)$ seguido por el modelo de generación del ruido.

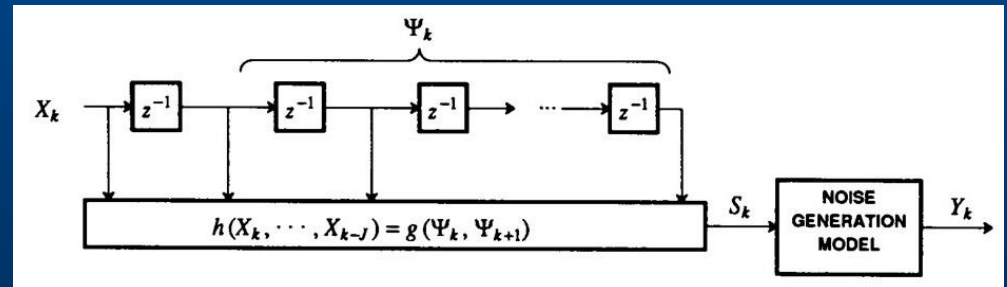
Si $G_{h,n}(z)$ es FIR ($S_{h,n}(z)$ es un filtro todo ceros, o solo cierto número de $h(t - kT)$ después del MF son no ortogonales), entonces

$$G_{h,n}(z) = \sum_{k=0}^J g_{h,k} z^{-k}$$

tal que, la FSM tiene como estado

$$\Psi_k = [a_{k-1}, a_{k-2}, \dots, a_{k-J}]$$

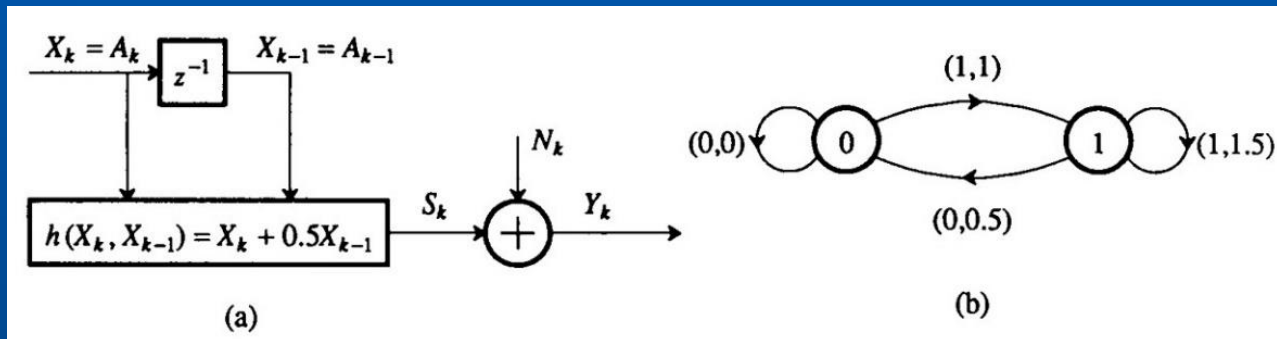
$$g(\Psi_k, \Psi_{k+1}) = \sum_{i=0}^J g_{h,i} a_{k-i}$$



Detección de secuencias: Algoritmo de Viterbi ...

Generador de señal en base a una FSM

Ejemplo: Modelo de ISI $s_k = x_k + 0.5x_{k-1}$



a) Modelo generador de señal con ISI como un registro de desplazamiento (cadena de Markov si los símbolos son i.i.d.) y modelo de ruido, b) Diagrama de transición de estados suponiendo símbolos binarios. Los arcos denotan (bit de entrada/señal de salida).

El resultado es que ahora, dependiendo del símbolo binario, se tienen como salidas: 0.0, 0.5, 1.0, o 1.5 (asumiendo 0 el registro inicial). Entonces se genera redundancia no deseada.

Detección de secuencias: Algoritmo de Viterbi ...

Diagrama Trellis (alternativa al diagrama de estados)

Ejemplo: Para el caso anterior binario con un modelo de ISI.

La trellis tiene cierta cantidad de *nodos* unidos por *ramas* (asociadas a las transiciones).

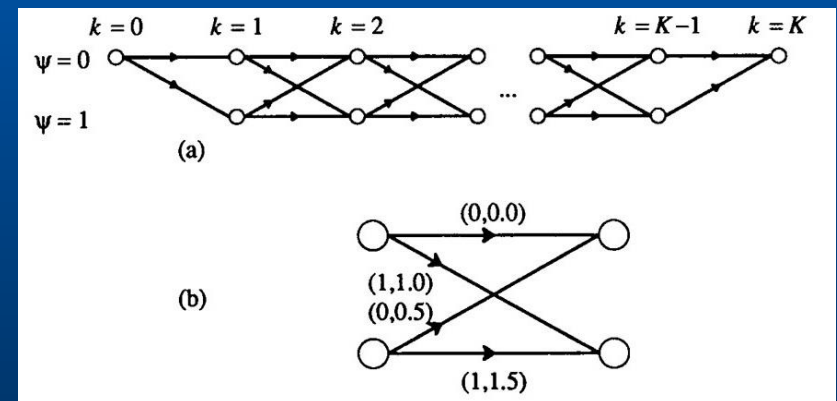
La *memoria J* de la trellis es la correspondiente al modelo de ISI (generación de señal).

Una secuencia de ramas a través de la trellis hasta el final se denomina *camino*.

A cada camino corresponde a una secuencia de entrada $X_k, 1 \leq k \leq K$.

Entonces, decidir por una secuencia de entrada es equivalente a decidir por un camino sobre la trellis.

Para simplificar, supondremos transmitir el estado 0 antes del inicio y después del final. Entonces, la longitud de la trellis es $K+J$.



a) Una trellis de dos estados y las posibles transiciones de estado para la cadena de Markov del ejemplo de ISI binaria (**comienzan y terminan en el estado 0**); b) una etapa rotulada con los pares (X_k, S_k) asociados a la transición del estado correspondiente.

Detección de secuencias: Algoritmo de Viterbi ...

Diagrama Trellis ...

Ejemplo: QPSK (secuencia 5 símbolos)

Arriba: símbolos que generan las transiciones.
Abajo: observación correspondiente.

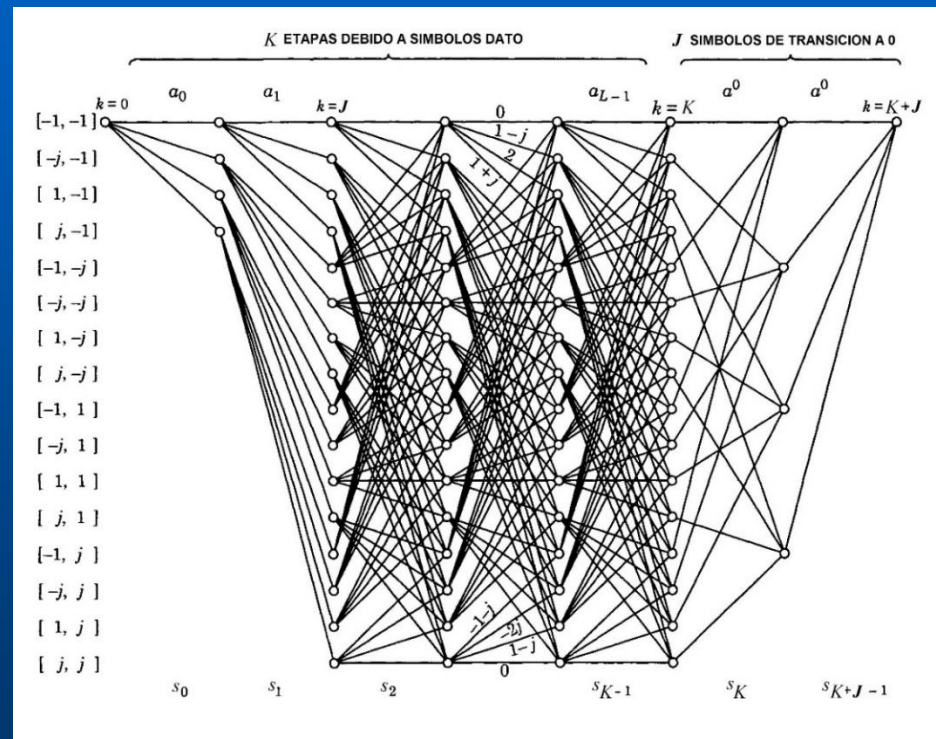
Existen $K+J$ etapas.

Hay 4 ramas saliendo de cada nodo en las primeras K , y luego solo una en las restantes.

Todos los estados son alcanzables después de J etapas. Las siguientes $K-J$ etapas son idénticas.

Las ramas se rotulan por la única salida posible asociada con la transición de estado.

Las entradas de cada estado no están rotuladas, pero tienen asignado el siguiente orden: $(-1, -j, 1, j)$. Ej.: con estado $(-1, -1)$ y entrada $-j$, la salida es $1-j$.



Secuencia de 5 símbolos sobre una trellis de 16 estados para QPSK cuando el canal es $s_k = x_k - x_{k-2}$ (memoria $J = 2$).

Detección de secuencias: Algoritmo de Viterbi ...

Detector de secuencias

Diseñar detector de la secuencia de estados Ψ_k , entrada X_k , salida S_k , o camino por la trellis (todos equivalentes) en base a observaciones Y_k ruidosas.

Ejemplo:

En el caso Gaussiano el detector selecciona la señal \hat{s}_k que minimiza la distancia euclidiana $\sum_{k=0}^{K+J-1} |y_k - \hat{s}_k|^2$, donde y_k es la observación.

Ejemplo:

Para el BSC, el detector de secuencia minimiza $\sum_{k=0}^{K+J-1} d_H(y_k, \hat{s}_k)$

Detección de secuencias: Algoritmo de Viterbi ...

Para relacionar las distancias con la trellis, cada rama determina un par (y_k, \hat{s}_k) que permite definir la *métrica de rama*. La suma de las métricas de rama es la *métrica de camino*. Se busca la menor métrica de camino para todas las secuencias.

En cada nodo de la trellis, el camino de menor métrica (parcial) se denomina *camino superviviente* (el número de candidatos es M , 2 en caso binario).

El algoritmo de Viterbi encuentra el camino con la menor métrica de camino computando las métricas de rama secuencialmente reteniendo solo los caminos supervivientes.

Detección de secuencias: Algoritmo de Viterbi ...

Como se realiza generar caminos supervivientes?

Reteniendo solo caminos parciales de métrica mínima que llegan a cada nodo para generar nuevos caminos de métrica parcial.

Se retiene los caminos supervivientes por cada nodo y por cada etapa de la trellis, hasta completar las etapas. La secuencia óptima recibida será la que una las ramas de caminos supervivientes.

Detección de secuencias: Algoritmo de Viterbi ...

Ejemplo:

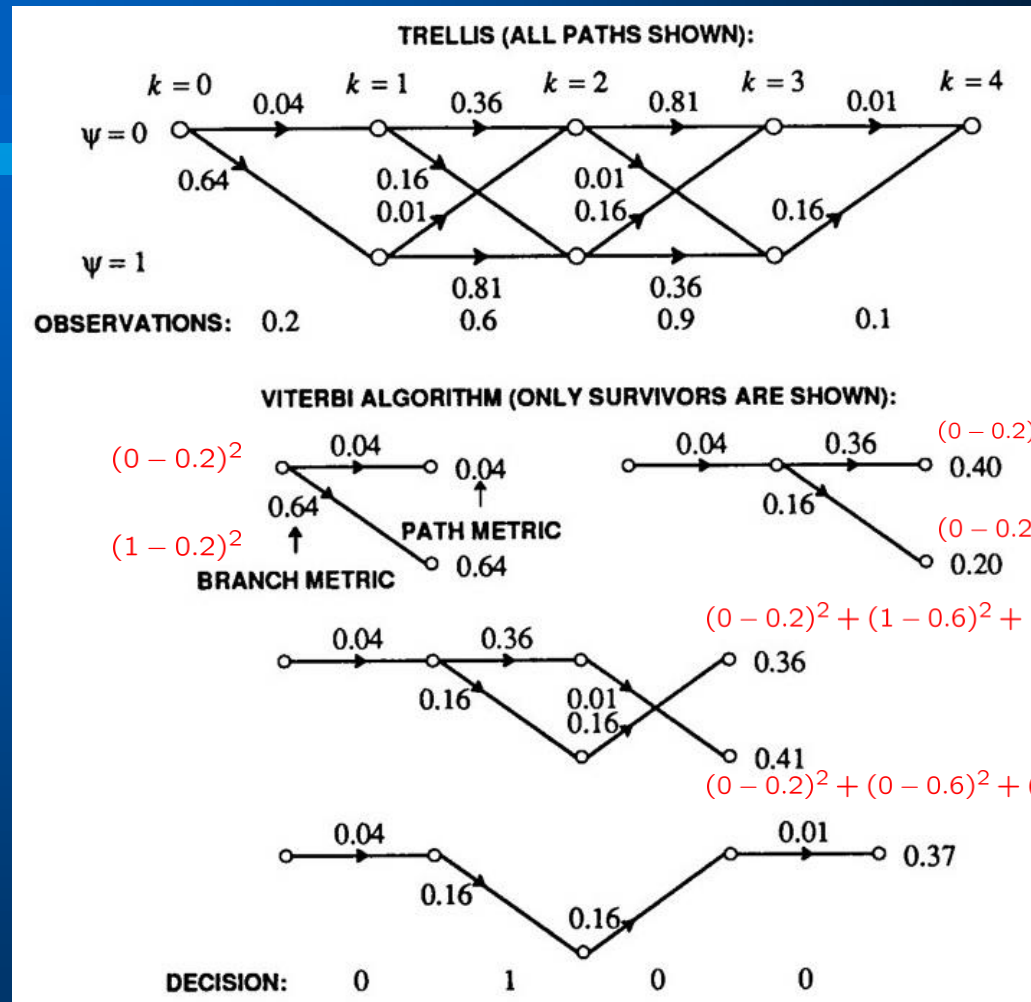
Modelo de PAM con ISI

$$s_k = x_k + 0.5x_{k-1}$$

La secuencia recibida es
(0.2, 0.6, 0.9, 0.1)

La secuencia detectada por
métrica de símbolo por
símbolo: (0, 1, 1, 0)

La secuencia detectada por
la métrica de secuencia:
(0, 1, 0, 0)



Trellis de dos estados con las métricas de rama. El algoritmo encuentra el camino con la métrica mínima sin considerar más de dos caminos a la vez.

Detección de secuencias: Algoritmo de Viterbi ...

El algoritmo no determina el camino óptimo hasta llegar al nodo terminal de la trellis (se introduce un retardo considerable $K+J$).

Para el ejemplo anterior, cuando $k \geq 2$ todos los caminos supervivientes coinciden desde $k=0$ a $k=1$. La decisión ML se puede realizar a partir de $k=2$ (no es necesario esperar hasta el nodo terminal de la trellis).

Cuando todos los caminos supervivientes hasta k coinciden con los de $k-d$, se dice que los caminos convergieron a *profundidad d* .

Como la coincidencia de caminos supervivientes puede no ocurrir, se puede truncar el algoritmo a profundidad d (decisión por la menor métrica en k en base a caminos de longitud d).

Entonces retardo será solo de profundidad d .

Detección de secuencias MAP y ML

El algoritmo de Viterbi es una técnica eficiente para resolver el problema de detección de secuencias de distancia mínima.

Se mostrará como generalizar el algoritmo de Viterbi para resolver el problema del detector de secuencias de ML y MAP para cualquier modelo generador de señal (con cualquier cadena de Markov asociada) y un generador de ruido (con componentes independientes).

Sea $\Psi = [\psi_0, \dots, \psi_{K+J}] \in \{0, \dots, Q-1\}^{K+J+1}$

los estados de una FSM, desde $k=0$ hasta $K+J$, donde $Q \in I$ (estados de la trellis) y J es la memoria.

Las observaciones serán $Y = [Y_0, \dots, Y_{K+J-1}]$

Detección de secuencias MAP y ML ...

Dada una observación \mathbf{y} , el detector de secuencias MAP selecciona Ψ (una secuencia) que *maximiza la probabilidad a posteriori* $p(\Psi/\mathbf{y})$.

Como $f(\mathbf{y})$ es independiente de Ψ , el detector de secuencias MAP puede maximizar en forma equivalente $p(\Psi/\mathbf{y})f(\mathbf{y})$. Por la Regla de Bayes, eso es equivalente a maximizar $f(\mathbf{y}/\Psi)p(\Psi)$.

Teniendo en cuenta la regla de Bayes y la propiedad de cadenas de Markov

$$p(\Psi) = p(\Psi_0) \prod_{k=0}^{K+J-1} p(\Psi_{k+1}/\Psi_k) \quad p(\Psi_0) = 1 \quad (\text{se asume conocido})$$

Y también, con muestras de ruido independientes y como y_k depende solo de dos estados de Ψ , se tiene que

$$f(\mathbf{y}/\Psi) = \prod_{k=0}^{K+J-1} f(y_k/\Psi_k, \Psi_{k+1})$$

Detección de secuencias MAP y ML ...

Entonces el detector de secuencias MAP maximiza

$$f(\mathbf{y}/\Psi)p(\Psi) = \prod_{k=0}^{K+J-1} \left[f(y_k/\Psi_k, \Psi_{k+1})p(\Psi_{k+1}/\Psi_k) \right]$$

La interpretación es la de una *métrica de camino*, donde el término interno es la *métrica de rama* para la transición (Ψ_k, Ψ_{k+1}) .

El detector MAP calcula la métrica de camino para cada camino de la trellis y decide por la de mayor valor.

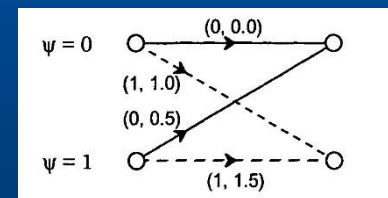
Detección de secuencias MAP y ML ...

Notación: Suponemos Q estados, $0, \dots, Q-1$. La transición comienza en el estado 0 (conocido) y termina en $K+J$.

Sean $a^{(p,q)}$, $s^{(p,q)}$ los datos de entrada y salida del generador de señal para una transición posible entre el estado $p \in \{0, \dots, Q-1\}$ y es estado $q \in \{0, \dots, Q-1\}$

Ejemplo: Secuencia PAM binaria con ISI $H(z) = 1 + 0.5z^{-1}$

$$\begin{aligned} a^{(0,0)} &= 0, \quad a^{(0,1)} = 1, \quad a^{(1,0)} = 0, \quad a^{(1,1)} = 1 \\ s^{(0,0)} &= 0, \quad s^{(0,1)} = 1, \quad s^{(1,0)} = 0.5, \quad s^{(1,1)} = 1.5 \end{aligned}$$



Detección de secuencias MAP y ML ...

Entonces, la métrica de rama del detector de secuencias MAP se puede escribir

$$\gamma_k(p, q) = f(y_k/s^{(p,q)})p(a^{(p,q)})$$

donde $p(a^{(p,q)})$ es la probabilidad a priori del símbolo $a^{(p,q)}$.

Si todos los símbolos son igualmente probables, entonces $p(a^{(p,q)})$ es constante y puede suprimirse (o si no se conocen las probabilidades a priori pueden suponerse equiprobables). En ese caso el *detector de secuencias MAP* se reduce al *detector de secuencias ML*.

Detección de secuencias MAP y ML ...

El algoritmo de Viterbi puede usarse para calcular el camino de mayor métrica, con una pequeña modificación para tener en cuenta el producto de la métrica, esa forma se denomina *algoritmo de Viterbi multiplicativo*.

Definiendo el camino superviviente desde el origen hasta el estado p en tiempo k con la mayor métrica como $\alpha_k(p)$

Entonces, con el algoritmo de Viterbi, la métrica de camino parcial en $k+1$ está relacionada con la del tiempo k por

$$\alpha_{k+1}(q) = \max_p \{ \alpha_k(p) \gamma_k(p, q) \}$$

Detección de secuencias MAP y ML ...

Ejemplo:

Para el caso donde el generador de ruido es AWGN complejo $Y_k = S_k + N_k$.
Entonces, la métrica de rama es

$$\gamma_k(p, q) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-|y_k - s^{(p,q)}|^2 / 2\sigma^2} p(a^{(p,q)})$$

O teniendo en cuenta el negativo del logaritmo, la métrica de rama es proporcional a

$$|y_k - s^{(p,q)}|^2 - 2\sigma^2 \log(p(a^{(p,q)})) + 2\sigma^2 \log(2\pi\sigma^2)$$

El último término es igual para todas las ramas y puede omitirse. Si las probabilidades a priori son iguales, también el segundo. En ese caso se tiene el detector de secuencias ML y se verifica la optimalidad del algoritmo de Viterbi con la regla de secuencias a distancia mínima.

Detección de secuencias:...

Probabilidad de error de secuencia

Es la probabilidad que *uno o mas* estados de la trellis estén en error (sin tener en cuenta el número).

Esta probabilidad de error está dominada por el camino de menor distancia al correcto. Cuando la longitud de la secuencia K es grande el número de caminos a distancia mínima crece, tanto que la probabilidad de error de secuencia $\rightarrow 1$!

En general, en aplicaciones prácticas es *más útil conocer la probabilidad de error de bit o de símbolo*, cuya relación con la de error de secuencia no es trivial.

Una forma es *calcular la probabilidad de error de secuencia por unidad de tiempo y luego relacionarla con la probabilidad de error de bit o símbolo*.

Otra alternativa, que no estudiaremos, es sustituir el criterio del detector de secuencias y directamente minimizar la probabilidad de error de símbolo sobre secuencias (algoritmo BCJR, Bahl-Cocke-Jelinek-Raviv).

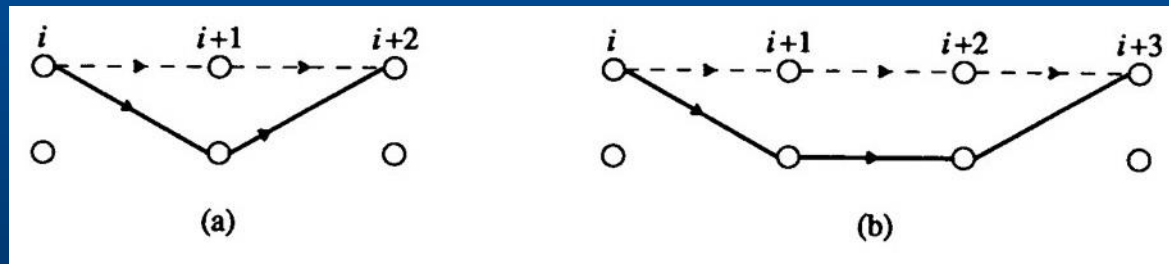
Detección de secuencias ...

Eventos de error.

Si $\{\Psi_k\}$ es la secuencia correcta de estados y $\{\hat{\Psi}_k\}$ la seleccionada por el algoritmo de Viterbi, estas convergerán y divergirán varias veces.

Cada separación (o divergencia) se denomina *evento de error*. La longitud de un evento de error es el número de nodos incorrectos en el camino.

Ejemplo:



Se muestran 2 eventos de error, a) el evento de error más corto para la trellis del ejemplo de PAM con ISI; b) un evento de error de longitud mayor. En ambos casos se asume que la trayectoria de estados correcta es todos ceros (mostrada en línea a trazos).

Detección de secuencias ...

Eventos de error ...

Un evento de error tiene uno o más errores de símbolo.

Se puede mostrar (cotas de unión) que la probabilidad de error de símbolo está dominada por la probabilidad del evento de error de distancia mínima (en SNR altas). Para AWGN y BSC

$$Pr[\text{error de simbolo}] \cong CQ(d_{\min}/2\sigma) \quad Pr[\text{error de simbolo}] \cong CQ(d_{\min}, p)$$

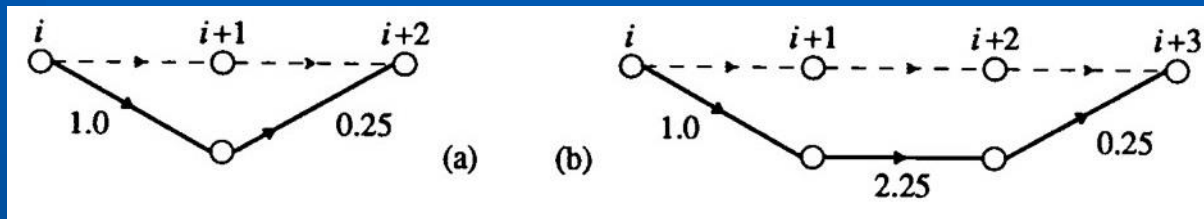
Un procedimiento para obtener la distancia a cualquier evento de error, para el caso de AWGN o BSC, es el siguiente:

- Asumir una secuencia correcta (todos ceros, por ejemplo).
- Para el canal sin ruido: rotular cada rama de la trellis con la raíz de su métrica de distancia a la secuencia correcta.
- Si la secuencia obtenida tiene métricas de rama cero, entonces no existen eventos de error.
- Para cada evento de error, la distancia es la de la métrica de camino asociada.

Detección de secuencias ...

Eventos de error ...

Ejemplo: Para el modelo de ISI,



Eventos de error de la trellis del ejemplo con las métricas de distancia a las ramas correctas, suponiendo que estas últimas son las líneas de trazos.

La distancia del 1er evento es $\sqrt{1.25}$ (distancia mínima, mas probable) y la del segundo evento es $\sqrt{3.5}$. Entonces, se puede mostrar que

$$Pr[\text{error de simbolo}] \cong Q(\sqrt{1.25}/2\sigma)$$

Detección de secuencias ...

Eventos de error ...

- En el ejemplo la distancia mínima del evento de error se obtuvo por inspección.
- El propio algoritmo de Viterbi puede utilizarse para hallar la distancia mínima de eventos de error a la secuencia correcta.
 - Se excluye el superviviente en cada etapa (el único con métrica de camino cero).
 - De las remanentes, el superviviente en cada nodo determina un evento de error.
 - Almacenando los eventos de error de distancia mínima, cuando todos los supervivientes tengan una métrica parcial mayor que esa mínima, se encontró la distancia mínima del evento de error para esa secuencia correcta.
- En general quien domina la probabilidad de error es la distancia mínima global d_{min} no la distancia mínima a un camino particular de la trellis.
- Usualmente no es necesario analizar todos los caminos correctos para hallar la distancia mínima.

Detección de secuencias ...

Cálculo de la distancia mínima para ISI

En lugar de calcular todos los eventos de error y en función de ellos el de distancia mínima, uso del modelo de FSM para la ISI para simplificar.

Se define un símbolo de error $\varepsilon_k = a_k - \tilde{a}_k$, entonces la distancia mínima está dada por

$$d_{\min}^2 = \min_{\varepsilon_k, 1 \leq k \leq K} \sum_{m=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^K \varepsilon_k g_{h,m-k} \right|^2$$

sobre símbolos de error no nulos. Para utilizar Viterbi, se asume $G_h(z)$ FIR, tal que ($g_{h,k} = 0, k > J$)

$$d_{\min}^2 = \min_{\varepsilon_k, 1 \leq k \leq K} \sum_{m=1}^{K+J} \left| \sum_{k=1}^J \varepsilon_k g_{h,m-k} \right|^2$$

La sumatoria en m es finita (aunque en la práctica se tienen valores de K grandes).

Detección de secuencias ...

Cálculo de la distancia mínima ...

La minimización se realiza por Viterbi sobre una trellis con estados

$$\Psi_k = [\varepsilon_{k-1}, \dots, \varepsilon_{k-2}, \varepsilon_{k-J}]$$

y ramas de métrica

$$|\sum_{i=0}^J g_{h,i} \varepsilon_{k-J}|^2$$

La minimización se logra hallando los caminos no nulos a través de la trellis, usando la métrica de rama anterior, con métrica de camino mínima., i.e., todos los caminos de secuencias de error de símbolo comenzando con $\varepsilon_1 \neq 0$.

Detección de secuencias ...

Cálculo de la distancia mínima ...

En general, la desventaja de este tipo de evaluación de d_{min} es que, si el tamaño del alfabeto original es M , el del alfabeto de símbolos de error puede ser $M \times M$.

Ejemplo:

Si los símbolos son reales, M es impar tal que $[-(M-1)/2, (M-1)/2]$, el rango de los símbolos de error es $[-(M-1), (M-1)]$, o sea $(2M-1)$ valores distintos (mucho menor que $M \times M$).

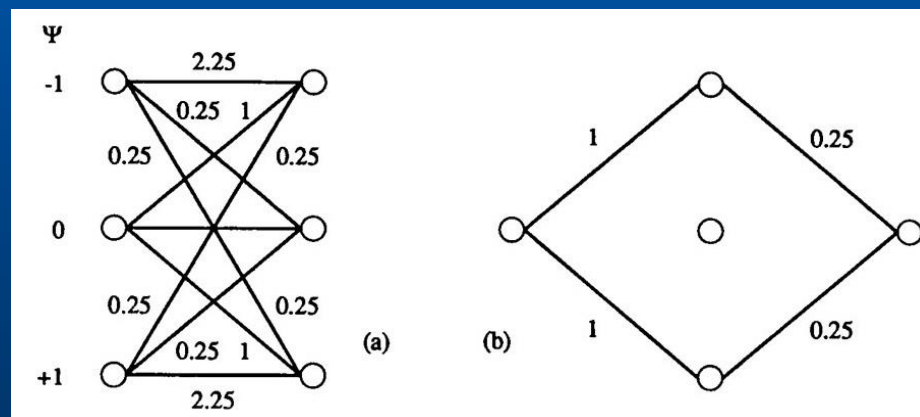
La ventaja es que la métrica de cada rama es independiente de otras ramas aisladamente (no de pares de ramas, como el camino correcto y el camino de error).

Detección de secuencias ...

Cálculo de la distancia mínima ...

Ejemplo:

Para el modelo de ISI, la métrica de rama es $(\varepsilon_k + 0.5\varepsilon_{k-1})^2$. Si los símbolos son binarios (0,1), los símbolos de error serán ternarios (0, +/-1).



a) Trellis para encontrar la distancia mínima para el ejemplo con ISI; b) eventos de error de distancia mínima 2.

Detección de secuencias ...

Cálculo de la distancia mínima ...

Es posible mostrar que el coeficiente C , que completa el análisis de probabilidad de error, se obtiene de las siguientes cotas

$$P \leq C \leq R$$

$$P = \sum_{\Psi \in A} Pr[\Psi]$$

$$R = \sum_{e \in B} w(e) Pr[\Psi]$$

donde

A es el conjunto de caminos Ψ que definen un evento de error de distancia mínima.

B es el conjunto de eventos de error que tienen distancia mínima ($w(e)$ número de símbolos en error en el evento e).

Detección de secuencias ...

Cálculo de la distancia mínima ...

Ejemplo:

Para el modelo de ISI, independientemente de la trayectoria correcta, existe solo un evento de error de distancia mínima que puede comenzar en cualquier instante.

Si $a_k = 0$ (con probabilidad $\frac{1}{2}$), el evento de error es el superior y corresponde a $\varepsilon_k = -1$. Si $a_k = 1$ (también con probabilidad $\frac{1}{2}$) es posible el evento de error inferior $\varepsilon_k = +1$. Entonces, $P=1$.

Como el evento de error incluye un símbolo de error, $w(e) = 1$, $e \in B$ y como existe un único evento de error de distancia mínima posible por cada camino correcto de la trellis, $R=1$.

Entonces $C=1$ y $Pr[\text{error de símbolo}] \cong Q(\sqrt{1.25}/2\sigma)$

Detección (resumen)

- Detección de un único símbolo.
- Detección de un vector señal.
- Detección de señales continuas en ruido Gaussiano.
- Detección no coherente óptima.
- **Detección óptima de PAM con ISI.**
- **Detector de secuencias: Algoritmo de Viterbi.**