

# Procesamiento de Señales en Comunicaciones

Departamento de Ingeniería Eléctrica y Computadoras  
Universidad Nacional del Sur

# Contenidos

- **Modulación.**
- **Diseño de Distancia Mínima.**
- **Desempeño en ruido.**
- **Detección.**
- **Ecualización óptima.**
- **Ecualización adaptativa.**
- **Modulación de portadoras múltiples**

# Ecualización Óptima

- **Ecualización óptima de ISI nula.**
- Métodos de ecualización generalizados (LE, DFE y MLSD).
- Ecualización de espaciamiento fraccionario.
- Ecualización con filtros transversales.
- ISI y Capacidad de canal.

# Ecualización

## Outline.

La condición de Nyquist (para ISI nula) en general no es satisfecha por el canal, por lo que será necesario algún tipo de ecualización (que en general amplifica ruido).

Existe un compromiso entre minimizar ISI y minimizar ruido a la salida del muestreo.

El criterio MLSD define el receptor óptimo para detectar una secuencia de símbolos. Usa el WMF para general ISI causal. No se usa ampliamente con PAM porque existen estructuras subóptimas de menor complejidad:

- Ecualización lineal
- Ecualización con realimentación de decisión
- Precodificación de transmisión

Se asumirá en esta clase un criterio de ISI nula y en la próxima MSE mínimo. También, se asumirá que la distorsión del canal es conocida y no se introducirán restricciones de complejidad de implementación.

# Ecualización

## Algunas definiciones

Sea  $S_x(e^{jw})$  una función real no negativa.

Media aritmética ( $\frac{1}{n} \sum_i^n c_i$ )

$$\langle S_x(e^{jw}) \rangle_A = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_x(e^{jw}) dw = \sigma_x^2$$

Media geométrica ( $\sqrt[n]{\prod_i^n c_i}$  o  $\exp\{\frac{1}{n} \sum_i^n \log_e c_i\}$ )

$$\langle S_x(e^{jw}) \rangle_G = \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log_e S_x(e^{jw}) dw \right\}$$

# Ecualización

Propiedades de media aritmética y geométrica

Desigualdad logarítmica  $\langle S_x \rangle_G \leq \langle S_x \rangle_A$

Invariancia  $\langle a \rangle_A = a, \quad a \text{ constante}$

Escalamiento  $\langle a \cdot S_x \rangle_A = a \cdot \langle S_x \rangle_A, \quad \langle a \cdot S_x \rangle_G = a \cdot \langle S_x \rangle_G$

Distributividad  $\langle a \cdot S_x + b \cdot F_x \rangle_A = a \langle S_x \rangle_A + b \langle F_x \rangle_A$

$$\langle S_x \cdot F_x \rangle_G = \langle S_x \rangle_G \cdot \langle F_x \rangle_G, \quad \langle S_x / F_x \rangle_G = \frac{\langle S_x \rangle_G}{\langle F_x \rangle_G}$$

# Ecualización

Un uso práctico de media aritmética y geométrica

Determinación del “tipo” de espectro (ruido blanco o señal periódica). Si definimos como una **medida de cuan plano es el espectro**  $S_x(e^{jw})$  (flatness) a

$$\gamma_x^2 = \frac{\langle S_x(e^{jw}) \rangle_G}{\langle S_x(e^{jw}) \rangle_A} = \frac{\exp \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log S_x(e^{jw}) dw \right]}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_x(e^{jw}) dw}$$

Como  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_x(e^{jw}) dw = \sigma_x^2$ , la varianza de  $S_x(e^{jw})$ , es posible mostrar que

$$0 \leq \gamma_x^2 \leq 1$$

En los extremos, si  $\gamma_x^2 = 1$ ,  $S_x(e^{jw}) = \sigma_x^2 = \text{constante}$  (ruido blanco) y si  $\gamma_x^2 = 0$ ,  $S_x(e^{jw})$  es un espectro de línea (sinusoidal). **Útil en procesamiento de voz.**

# Ecualización óptima de ISI nula

## Resultados disponibles

El WMF representa una forma canónica (a través de la estadística suficiente) de parte de la estructura de varios receptores (incluyendo los basados en ecualización) .  
**También permite obtener cotas de desempeño.**

Algunas propiedades de la salida del WMF:

- Señal muestreada a la tasa de transmisión ( $1/T$ ).
- El modelo de canal discreto equivalente es causal y de fase mínima (energía de la respuesta impulsiva concentrada en las primeras muestras).
- El ruido aditivo equivalente es Gaussiano, circularmente simétrico y blanco (muestras complejas independientes).



## Ecualización óptima de ISI nula ...

Resultados disponibles: WMF

Se basa en la existencia de la factorización

$$S_h(z) = A_h^2 G_h(z) G_h^*(1/z^*) \quad A_h^2 = \langle S_h \rangle_G$$

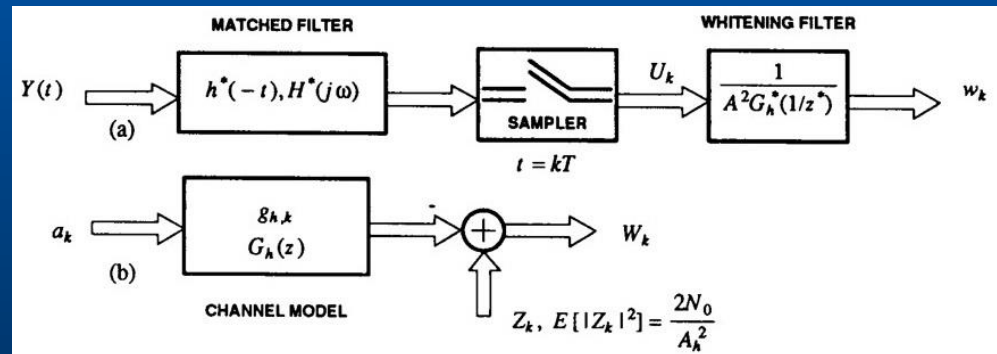
válida no solo para un espectro racional sino también cuando  $S_h(e^{j\omega T})$  y  $\log S_h(e^{j\omega T})$  sean integrables en  $(-\pi/T, \pi/T)$  ( $S_h(e^{j\omega T}) \neq 0$  en cualquier intervalo de frecuencias).

Como  $\rho_h(k) \leftrightarrow S_h(e^{j\omega T})$

$$\rho_h(k) = A_h^2 g_{h,k} * g_{h,-k}^*$$

tal que la energía del pulso recibido es

$$\sigma_h^2 = \rho_h(0) = A_h^2 \sum_{k=0}^{\infty} |g_{h,k}|^2$$



a) WMF consiste en un MF, muestreo a  $1/T$  y filtro de blanqueo de fase máxima; b) El modelo de canal discreto equivalente es un filtro causal de fase mínima, con AWGN circularmente simétrico.

## Ecualización óptima de ISI nula ...

Resultados disponibles: Probabilidad de error

Para el modelo de canal equivalente anterior

$$P_e \cong KQ(1/2\sqrt{\gamma}) \quad \gamma = d_{\min}^2/\sigma^2 \quad \sigma^2 = N_0/A_h^2$$

La distancia mínima depende del contexto: se estudiarán el caso de símbolo aislado y la secuencia de símbolos.

Como el argumento de  $Q(.)$  tiene mayor impacto que  $K$ , se comparará los diseños en función de  $\gamma$  como figura de mérito.

## Ecualización óptima de ISI nula ...

### Cota en desempeño del WMF (símbolo aislado)

El WMF permite obtener una cota superior sobre la figura de mérito  $\gamma$  en presencia de ISI. Para el caso de un símbolo aislado, la entrada es  $a_0\delta_k$  y la salida

$$W_k = a_0 g_{h,k} + Z_k$$

La distancia mínima será

$$d_{\min}^2 = \min \sum_{k=0}^{\infty} |a_0^{(1)} g_{h,k} - a_0^{(2)} g_{h,k}|^2 = a_{\min}^2 \sum_{k=0}^{\infty} |g_{h,k}|^2$$

tal que

$$\gamma_{MF} = \frac{d_{\min}^2}{\sigma^2} = \frac{a_{\min}^2 \sigma_h^2 / A_h^2}{N_0 / A_h^2} = a_{\min}^2 \frac{\sigma_h^2}{N_0}$$

Como el WMF no tiene en cuenta ISI, el desempeño con ISI se apartará de  $\gamma_{MF}$ , y es una medida de su severidad.

## Ecualización óptima de ISI nula ...

### Figura de mérito para el MLSD: cota superior

Ningún receptor con ecualización para reducir ISI puede ser mejor que  $\gamma_{MLSD}$ , tal que cualquier diferencia con  $\gamma_{ML}$  se debe a ISI.

En este caso

$$d_{\min}^2 = \min_{\{\varepsilon_k, 1 \leq k \leq K, \varepsilon_1 \neq 0\}} \sum_{m=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^K \varepsilon_k g_{h,m-k} \right|^2$$

tal que

$$\gamma_{MLSD} = \frac{d_{\min}^2}{N_0/A_h^2}$$

Una cota superior se obtiene teniendo en cuenta que para  $\varepsilon_k = 0$ ,  $2 \leq k \leq K$  entonces,

$$d_{\min}^2 \leq \min_{\varepsilon_1 \neq 0} \sum_{m=1}^{\infty} |\varepsilon_1 g_{h,m-1}|^2 = \min_{\varepsilon_1 \neq 0} |\varepsilon_1|^2 \sum_{k=0}^{\infty} |g_{h,k}|^2 = a_{\min}^2 \sigma_h^2 / A_h^2$$

tal que

$$\gamma_{MLSD} \leq \frac{a_{\min}^2 \sigma_h^2 / A_h^2}{N_0 / A_h^2} = \frac{a_{\min}^2 \sigma_h^2}{N_0} = \gamma_{MF}$$

## Ecualización óptima de ISI nula ...

Figura de mérito para el MLSD ...

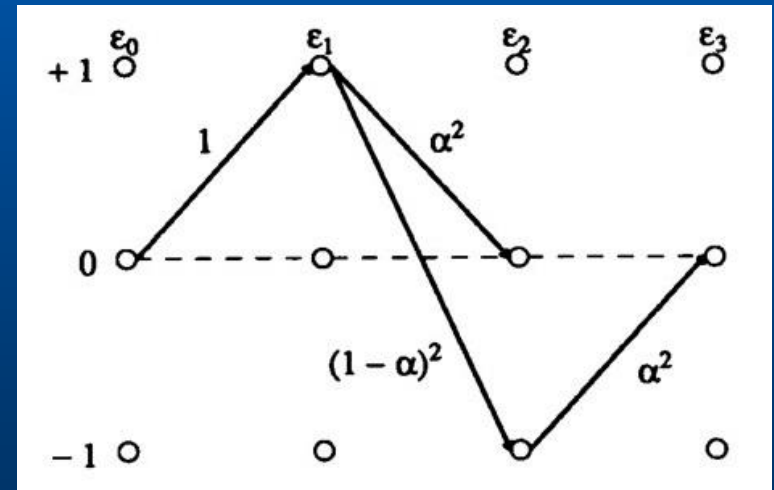
Ejemplo: Para el canal de fase mínima  $G_h(z) = 1 + \alpha z^{-1}$ .

Para un alfabeto de entrada  $\{0,1\}$ , el de símbolos de error será  $\{0, \pm 1\}$ , ternario.

Existen 2 eventos de error y el más corto es siempre el de menor métrica ( $d_{min}^2 = 1 + \alpha^2$ ).

Entonces, como se tiene un único error en ese evento

$$\gamma_{MLSD} = \gamma_{MF}$$



## Ecualización óptima de ISI nula ...

Figura de mérito para el MLSD: Cota inferior

Una cota inferior,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^K \varepsilon_k g_{h,m-k} \right|^2 \geq \left| \sum_{k=1}^K \varepsilon_k g_{h,1-k} \right|^2 = |\varepsilon_1 g_{h,0}|^2 = |\varepsilon_1|^2$$

Minimizando ambos lados

$$d_{\min}^2 \geq a_{\min}^2$$

Esto es equivalente a

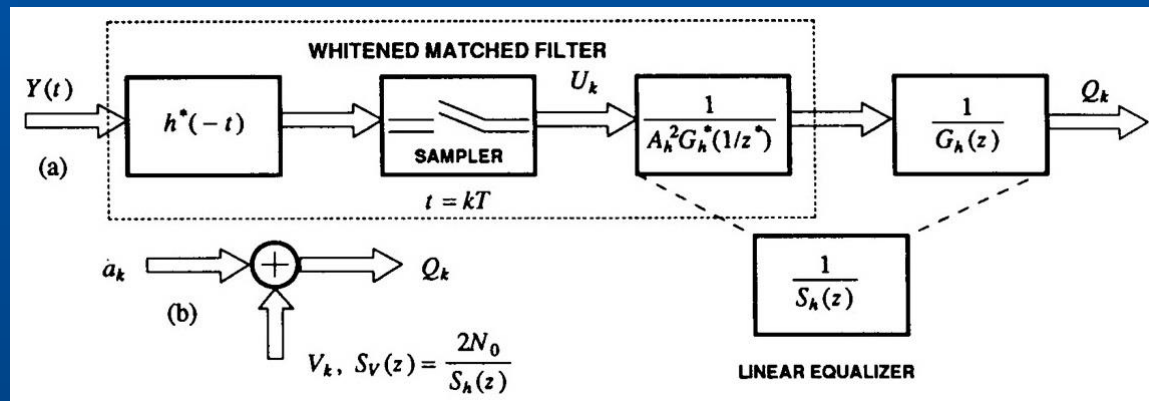
$$\gamma_{MLSD} \geq \frac{a_{\min}^2 A_h^2}{N_0}$$

que será útil para comparación con diferentes ecualizadores.

## Ecualización óptima de ISI nula (LE ZF)

Un receptor subóptimo que usa un filtro para satisfacer Nyquist deja como consecuencia la *amplificación de ruido*.

El filtro óptimo (dándole forma única al criterio de Nyquist) se obtiene combinando el WMF y  $G_h^{-1}(z)$ : **ecualizador lineal ZF** (zero forcing ISI).



Ecualizador ZF; a) Formado por un MF, muestreo a  $1/T$ , ecualizador con la inversa de  $S_h(z)$ ; b) modelo de canal equivalente y ruido Gaussiano coloreado.

## Ecualización óptima LE ZF ...

### Figura de mérito para el LE-ZF

La salida del WMF es blanca y circularmente simétrica, de varianza  $2N_0/A_h^2$ .

Entonces, el ruido blanco en el modelo equivalente tendrá una DEP

$$S_V = \frac{2N_0}{A_h^2} \frac{1}{G_h} \frac{1}{G_h^*} = \frac{2N_0}{S_h}$$

Y con la definición de media aritmética, su varianza

$$\sigma_V^2 = 2\sigma^2 = 2N_0 \langle S_h^{-1} \rangle_A$$

Finalmente, como la distancia mínima es la de un símbolo  $a_{min}$

$$\gamma_{LE-ZF} = \frac{a_{min}^2}{N_0} \langle S_h^{-1} \rangle_A^{-1}$$



## Ecualización óptima LE ZF ...

Ejemplo:

Para un pulso recibido (filtro todo polo)  $h(t) = \sigma_h \sqrt{2a} e^{-aT} u(t)$  se tiene

$$S_h^{-1}(z) = \frac{(1 - \alpha z^{-1})(1 - \alpha z)}{(1 - \alpha^2)\sigma_h^2}$$

Para obtener la figura de mérito, y como  $S_h^{-1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} r_k z^{-k}$  con  $r_k$  su función autocorrelación, es necesario el coeficiente de  $z^0$  (correspondiente a la varianza) para obtener  $\langle S_h^{-1} \rangle_A^{-1}$ , dado por  $\frac{(1 + \alpha^2)}{(1 - \alpha^2)\sigma_h^2}$

Entonces

$$\gamma_{LE-ZF} = a_{\min}^2 \frac{\sigma_h^2}{N_0} \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2} = \gamma_{MF} \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2}$$

Para  $|\alpha| \rightarrow 1$  entonces  $\gamma_{LE-ZF} \rightarrow 0$ , dado que el polo del espectro se aproxima al círculo unitario.

## Ecualización óptima LE ZF ...

Ejemplo:

Para un pulso recibido  $h(t) = h_0(t) + \alpha h_0(t - T)$

$$S_h^{-1}(z) = \frac{1 + \alpha^2}{\sigma_h^2} \frac{1}{(1 - \alpha z^{-1})(1 + \alpha z)}$$

Y en términos de la función autocorrelación  $r_k$ , el coeficiente  $z^0$  es  $\frac{(1+\alpha^2)}{(1-\alpha^2)\sigma_h^2}$ , tal que

$$\gamma_{LE-ZF} = a_{\min}^2 \frac{\sigma_h^2}{N_0} \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2}$$

Para  $|\alpha| \rightarrow 1$  entonces  $\gamma_{LE-ZF} \rightarrow 0$ , dado que el cero del espectro se aproxima al círculo unitario y el LE-ZF no puede ecualizarlo (el espectro no es invertible).

## Ecualización óptima LE ZF ...

### Cota superior sobre la figura de mérito.

Sea  $G_h^{-1}(z)$ , correspondiente al ecualizador, con respuesta impulsiva  $f_{h,k}$ .

Esta respuesta es causal ( $G_h^{-1}(\infty) = 1$ ) y mónica ( $f_{h,0} = 1$ ).

Además, como el ruido de entrada al LE ZF es blanco, su varianza usando esa respuesta impulsiva, será

$$\sigma_V^2 = \frac{2N_0}{A_h^2} \sum_{k=0}^{\infty} |f_{h,k}|^2 \geq \frac{2N_0}{A_h^2}$$

con igualdad solo si  $G(z) = 1$  (no existe ISI). Entonces

$$\gamma_{LE-ZF} = \frac{a_{\min}^2}{1/2 \cdot \sigma_V^2} \leq \frac{a_{\min}^2 A_h^2}{N_0}$$

## Ecualización óptima LE ZF ...

### Existencia del LE-ZF

Depende de la existencia del WMF, o sea que  $\log S_h(e^{jwT})$  sea integrable. Esto, no es posible si por ejemplo  $S_h(e^{jwT})$  es cero en un intervalo.

Mas restrictivo es que  $G_h^{-1}(z)$  sea estable y entonces que la varianza de ruido a su salida sea acotada.

El caso problemático es que  $G_h^{-1}(z)$  tenga polos sobre el círculo unitario.

Notar que esta ultima condición no implica que no exista el WMF. En consecuencia el MLSD, que también lo utiliza, si puede implementarse.

# Ecualización óptima DFE ZF

## Ecualización con Realimentación de Decisión ZF (DFE ZF).

- Receptor **no lineal** que ofrece un desempeño intermedio entre LE y MLSD.
- Surge de la observación que el canal equivalente a la salida del WMF es causal y mónico. La interferencia a la salida del WMF se debe solo a símbolos pasados: *ISI postcursor*.
- Con una estimación de esta ISI se puede eliminar para reducir la varianza a la entrada del elemento de decisión.
- La ISI de símbolos futuros se denomina *precursor*.

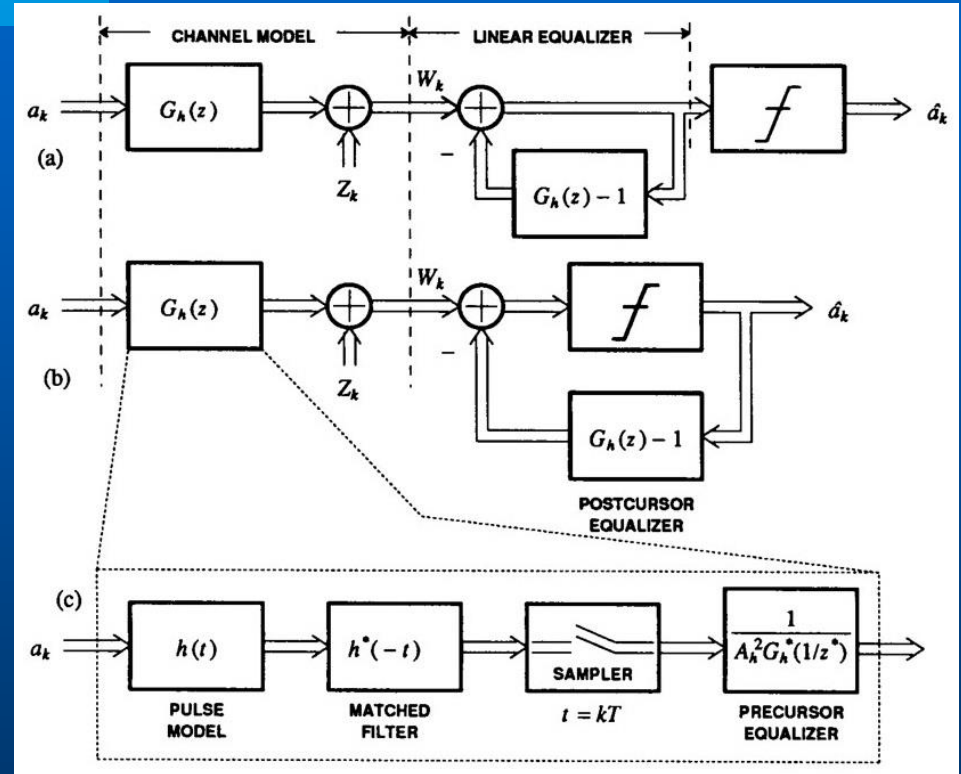
# Ecualización óptima DFE ZF ...

## Ecualizador DFE ZF;

Una realización alternativa del LE ZF con el ecualizador  $G_h(z)^{-1}$  implementado como un filtro en realimentación;

DFE ZF en el cual el muestreo está dentro del lazo, reduciendo la amplificación de ruido;

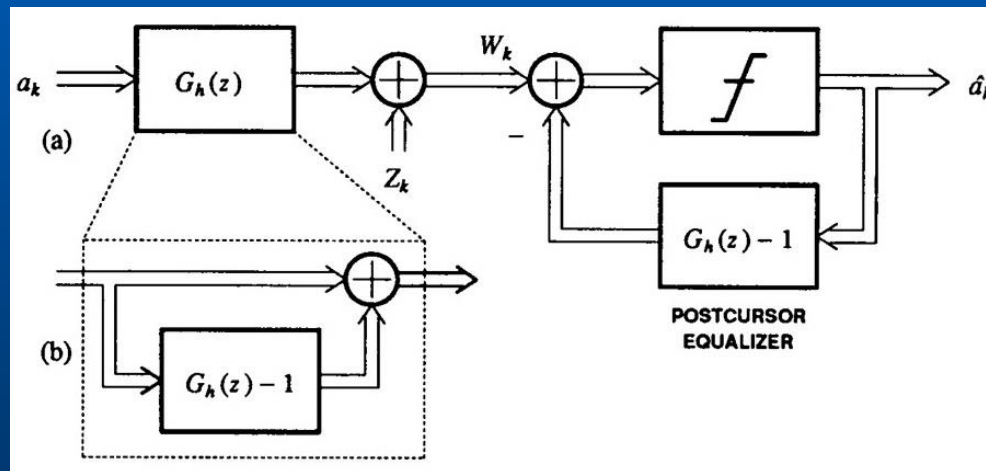
Detalle del modelo de dispersión (canal). El DFE ZF usa un WMF formado por un MF y un ecualizador precursor donde este último funciona como blanqueador.



Como ahora se usa (realimentado)  $G_h(z)$  y no su inversa, el DFE ZF existe y es estable siempre que el WMF exista.

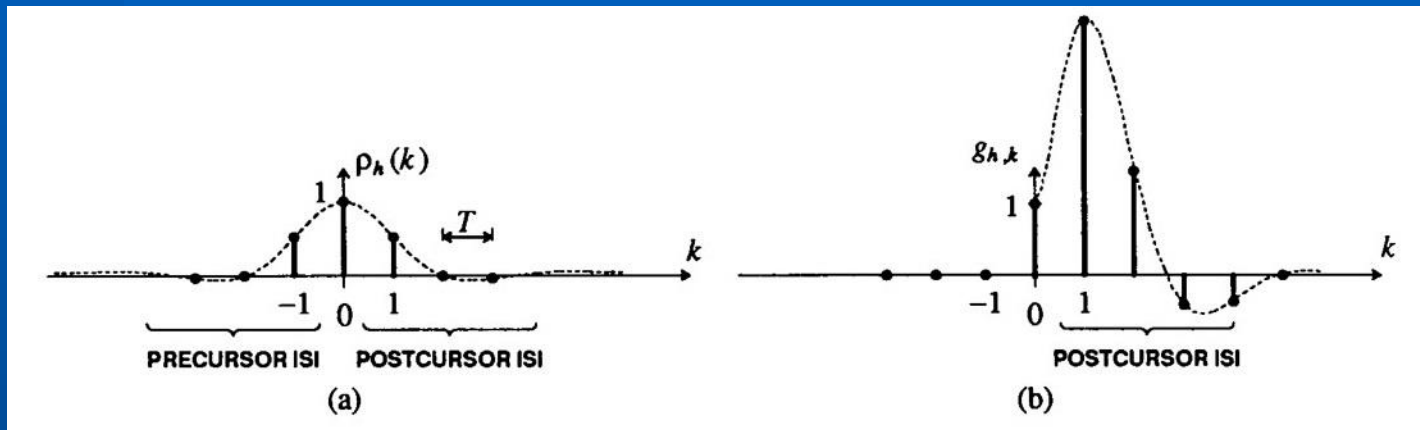
## Ecualización óptima DFE ZF ...

Desde la perspectiva de cancelamiento de la ISI, el WMF actúa como ecualizador precursor (generando una señal causal) y la realimentación de forma estable, que definen el ecualizador postcursor, actúa para eliminar la ISI remanente.



(a) DFE ZF. (b) Expansión del modelo de canal mostrando que este modelo introduce una ISI postcursor que es cancelada por el DFE.  $G_h(z)$  es causal y mónico,  $G_h(z) - 1$  es estrictamente causal.

## Ecualización óptima DFE ZF ...



## Señales en el DFE ZF

- a) señal a la salida del MF es siempre simétrica en torno a  $k=0$ ;
- b) después del filtro precursor (blanqueador) la señal es causal y de fase mínima. Entonces, solo tiene ISI postcursor que será cancelada por el ecualizador correspondiente. Si no, *propagación de errores...*



## Ecualización óptima DFE ZF ...

### Figura de Mérito del DFE-ZF

Teniendo en cuenta decisiones correctas, la componente de señal a la entrada del elemento de decisión es el símbolo libre de ISI, tal que la distancia mínima está dada por  $a_{\min}$ , entonces

$$\gamma_{DFE-ZF} = \frac{a_{\min}^2}{N_0/A_h^2}$$

Y con la definición

$$A_h^2 = \langle S_h \rangle_G$$

Se tiene que 
$$\gamma_{DFE-ZF} = \frac{a_{\min}^2}{N_0} \langle S_h \rangle_G = \frac{a_{\min}^2}{N_0} \frac{1}{\langle S_h^{-1} \rangle_G}$$

Comparando las cotas sobre desempeño

$$\gamma_{LE-ZF} \leq \gamma_{DFE-ZF} \leq \gamma_{MLSD} \quad \gamma_{MLSD} \leq \gamma_{MF}$$

## Ecualización óptima DFE ZF ...

Ejemplo:

Para el pulso todo polo,  $h(t) = \sigma_h \sqrt{2a} e^{-aT} u(t)$  se tiene que  $A_h^2 = \sigma_h^2 (1 - \alpha^2)$

Entonces

$$\gamma_{DFE-ZF} = a_{\min}^2 \frac{\sigma_h^2}{N_0} (1 - \alpha^2)$$

Para  $|\alpha| \rightarrow 1$ ,  $\gamma_{DFE-ZF} \rightarrow 0$  dado que el polo del canal se aproxima al círculo unitario.

Ejemplo:

Para el pulso todo cero,  $h(t) = h_0(t) + \alpha h_0(t - T)$  es posible obtener  $A_h^2 = \frac{\sigma_h^2}{(1 + \alpha^2)}$

tal que

$$\gamma_{DFE-ZF} = a_{\min}^2 \frac{\sigma_h^2}{N_0} \frac{1}{1 + \alpha^2}$$

A diferencia del LE ZF, el DFE ZF se comporta adecuadamente para  $|\alpha| \rightarrow 1$ .

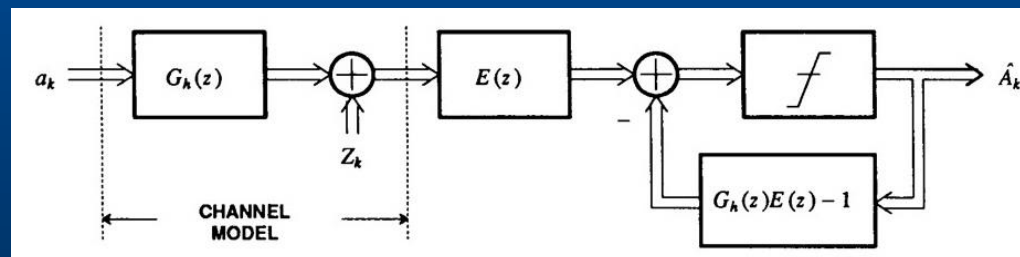
## Ecualización óptima DFE ZF ...

### Optimalidad del uso del WMF en DFE-ZF

El uso de WMF solo es necesario para que la ISI postcursor se pueda cancelar, no tiene relación con la ISI precursor.

Se puede incluir  $E(z)$  teniendo en cuenta:

- Como  $G_h(z)$ ,  $E(z)$  debe ser tal que  $G_h(z)E(z)$  sea causal.
- Como  $G_h(z)$  es mónico,  $E(z)$  debe ser mónico para que  $G_h(z)E(z)$  sea mónico.



Un DFE ZF genérico se puede realizar introduciendo un filtro causal (y mónico)  $E(z)$ .

## Ecualización óptima DFE ZF ...

Optimalidad del uso del WMF en DFE-ZF

$E(z)$  que satisfaga esas restricciones, dado que el ruido a la entrada es blanco, tendrá varianza

$$\frac{2N_0}{A_h^2} \sum_{k=0}^{\infty} |e_k|^2 \geq \frac{2N_0}{A_h^2}$$

con igual sssi  $E(z) = 1$ . Entonces, en términos de varianza a la entrada del elemento de decisión, la configuración original (con la factorización de fase mínima) es óptima.

Agregar  $E(z)$  tipo pasatodo no cambia la señal en el elemento de decisión, pero aumenta la varianza.

El MLSD no requiere en general la factorización de fase mínima. Sin embargo, si el modelo de canal es IIR, esa factorización garantizará mejor funcionamiento del algoritmo de Viterbi.

## Revisión: El proceso de innovación y predicción lineal

Dado un proceso estacionario en sentido amplio  $X_k$ , tal que su DEP es real no negativa sobre el círculo unitario, entonces

$$S_X(z) = A_x^2 G_x(z) G_x^*(1/z^*)$$

donde  $G_x(z)$  es un filtro causal mónico. Si  $S_X(z)$  no tiene ceros sobre el círculo unitario, entonces la anterior es de fase estrictamente mínima.

Si filtramos  $G_x(z)$  con  $G_x^{-1}(z)$ , la salida es un proceso aleatorio blanco,  $S_I(z) = A_x^2$  denominado *innovación*. Y su potencia será  $A_x^2$ . También,  $G_x^{-1}(z)$  se denomina *filtro blanqueador*.

El filtro blanqueador remueve toda la correlación entre muestras. Entonces puede verse a  $X_k$  con 2 componentes: la innovación y una combinación lineal de innovaciones pasadas.

## Revisión: El proceso de innovación y predicción lineal

Un *predictor lineal* forma una estimación de la muestra actual de un proceso aleatorio en base a una combinación lineal de muestras pasadas. Si la función transferencia del predictor (estrictamente causal) es

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k z^{-k}$$

El *filtro de error de predicción* se define como

$$E(z) = 1 - F(z)$$

Es posible mostrar que  $E(z) = G_x^{-1}(z)$  es óptimo (blanquea y genera un proceso de innovación, i.e., de varianza mínima) cuando  $S_X(z)$  satisface la factorización anterior.

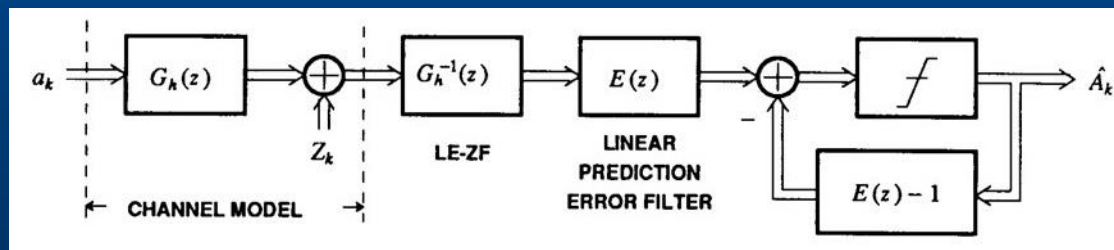
## Ecualización óptima DFE ZF ...

### Interpretación del DFE-ZF en base a predicción lineal

El ruido a la salida del LE-ZF no es blanco (correlación entre muestras). Se puede usar un filtro de predicción lineal (mónico y causal) para reducir su varianza, pero que introduce ISI postcursor. Esta se cancela con la realimentación del DFE-ZF.

La parte de fase mínima del espectro de entrada al predictor es  $G_h^{-1}(z)$ . Entonces, el blanqueador óptimo es  $G_h(z)$ , que se cancela justamente con el LE-ZF.

Es otra forma de ver que el WMF determina el óptimo DFE-ZF. Diferente al LE-ZF, usa las muestras correlacionadas para reducir la varianza de ruido a la entrada del elemento de decisión y cancela la ISI postcursor con el ecualizador de realimentación.



Relación entre el ecualizador precursor DFE y predicción lineal óptima. El ecualizador precursor DFE puede obtenerse aplicando un filtro de predicción lineal a la salida del ruido coloreado de un LE ZF.

## Ecualización óptima DFE ZF ...

### **Propagación de error en el DFE.**

Si se produce un error a la salida del elemento de decisión, el efecto se realimenta sobre la entrada al corregir en forma inadecuada por ISI postcursor.

Esto produce en general un efecto de una cadena de errores (ráfaga).

El desempeño en ese caso no se puede evaluar como anteriormente.

Sin embargo, el compromiso: reducción de los efectos de amplificación de ruido versus propagación de errores se resuelve en general por los beneficios asociados al primer efecto.



# Ecualización óptima ZF: Precodificación

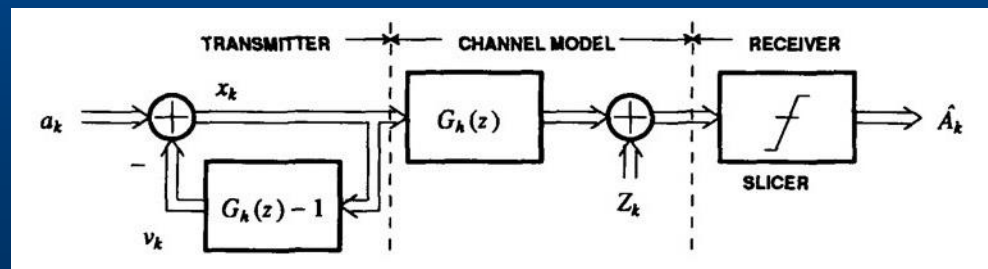
## Precodificación en transmisión

Como se puede intercambiar el WMF  $G_h(z)$  con el LE  $G_h^{-1}(z)$ , esto es útil si el canal es invariante (no en wireless) ya que el ecualizador se puede colocar en el transmisor.

Dos razones de utilidad:

- No se tiene efecto de amplificación de ruido porque (a pesar de usar solo el WMF en el receptor) el canal es previamente ecualizado.
- No existirá posibilidad de propagación de errores (si el camino de feedback es adecuado).

Configuración no es práctica porque aumenta la potencia promedio y pico asociada a los símbolos transmitidos.



## Ecualización óptima ZF: Precodificación ...

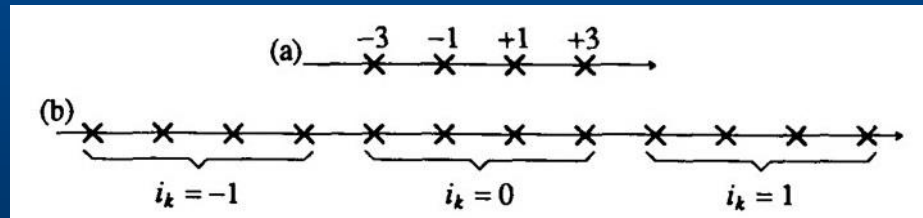
### Modificación para reducir la potencia transmitida

Se ejemplificará para un alfabeto unidimensional (PAM)  $M$ -ario ( $M$  par)  $[-(M-1), \dots, (M-1)]$  (todos los impares en  $(-M, M)$  ).

La modificación es sumar en el transmisor  $2Mi_k$ ,  $\{i_k \in I, -\infty < k < \infty\}$ , tal que el símbolo expandido es ahora

$$c_k = a_k + 2Mi_k$$

que ahora es el conjunto de todos los impares ( no limitados a  $(-M, M)$  ).



Alfabeto de símbolos para precodificación: a) símbolos originales  $a_k$  para  $M=4$ ;  
b) símbolos expandidos  $c_k$ , mostrados para 3 valores de  $i_k$ .

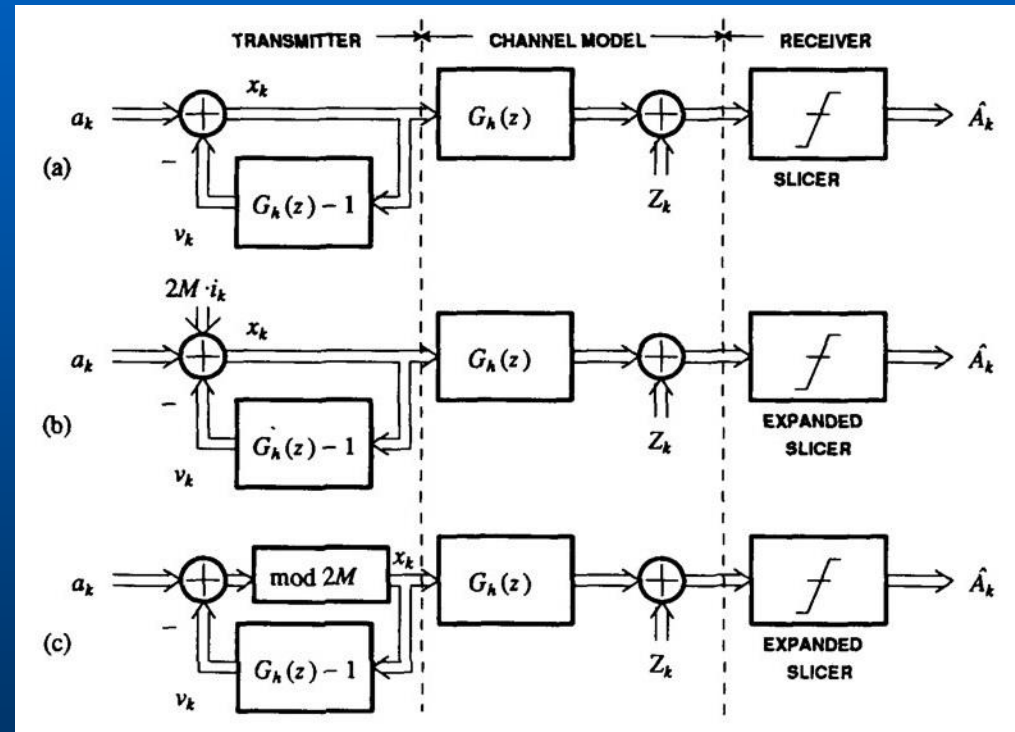
## Ecualización óptima ZF: Precodificación ...

### Modificación para reducir la potencia transmitida...

LE ZF ahora en el transmisor como un filtro realimentado;

Para un alfabeto de símbolos especificado, se suma una secuencia arbitraria de muestras  $2M \cdot i_k$ , tal que se pueda expandir el muestreo en el receptor;

La potencia en el transmisor se puede reducir eligiendo  $2M \cdot i_k$  para producir un equivalente módulo  $2M$ .



## Ecualización óptima ZF: Precodificación ...

Modificación para reducir la potencia transmitida ...

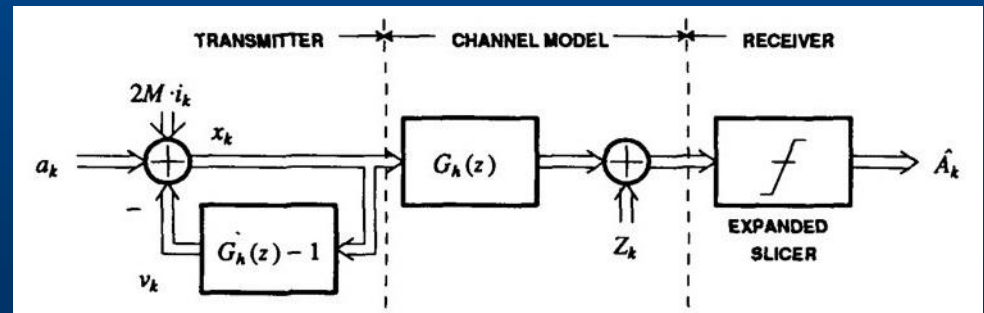
$a_k$  se puede recuperar de  $c_k$  reduciéndolo módulo  $2M$ ,

$$a_k = c_k \text{ modulo } 2M$$

donde  $x$  modulo  $2M$  implica el valor único de  $x + 2M \cdot m$  tal que  $m$  se elige en  $-M < x + 2M \cdot m \leq M$ .

El símbolo transmitido será  $x_k = a_k + 2M i_k - \nu_k$

El elemento de decisión expandido, realiza la discriminación (con la operación modulo  $2M$ ) sobre impares no limitados a  $(-M, M)$ .

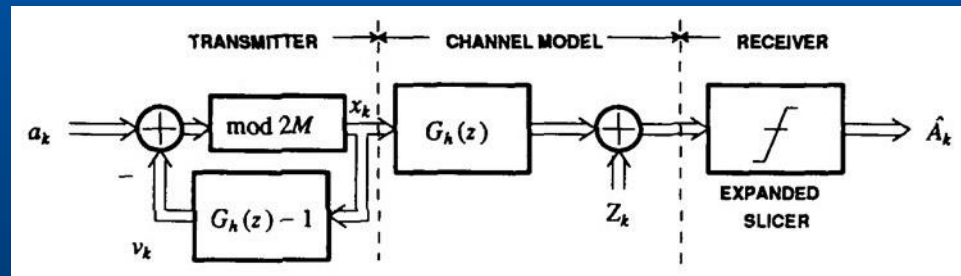


## Ecualización óptima ZF: Precodificación ...

Modificación para reducir la potencia transmitida ...

El paso final es elegir  $i_k$  para que la potencia promedio y pico no sean mayores que en el caso de DFE.

$i_k$  puede elegirse para limitar  $x_k$  al rango  $(-M, M)$ , lo cual es equivalente a reducirla en módulo  $2M$ .



Como una verificación, se puede demostrar que si los símbolos originales están distribuidos uniformemente, los símbolos con precodificación lo estarán también muy aproximadamente. Entonces tendrán la misma potencia pico y/o promedio.

# Ecualización Óptima (resumen)

- **Ecualización óptima de ISI nula.**
- Métodos de ecualización generalizados (LE, DFE y MLSD).
- Ecualización de espaciamiento fraccionario.
- Ecualización con filtros transversales.
- ISI y Capacidad de canal.