Procesamiento de Señales en Comunicaciones

Departamento de Ingeniería Eléctrica y Computadoras
Universidad Nacional del Sur

Contenidos

- Modulación.
- Diseño de Distancia Mínima.
- Desempeño en ruido.
- Detección.
- Ecualización óptima.
- Ecualización adaptativa.
- Modulación de portadoras múltiples

Detección

- Detección de un único símbolo.
- Detección de un vector señal.
- Detección de señales continuas en ruido Gaussiano.
- Detección no coherente óptima.
- Detección óptima de PAM con ISI.
- Detector de secuencias: Algoritmo de Viterbi.

Detección de señales conocidas en AWGN

Consideraremos la detección ML de una de *L* señales en ruido Gaussiano.

- Caso de señales discretas: ruido blanco (revisión) y ruido coloreado.
- Caso de señales continuas (estadística suficiente).
- Aplicación a señales pasabanda.
- Aplicación a detección no coherente.

Detección de señales conocidas en AWGN ...

Señal recibida discreta (en general compleja)

$$Y_k = s_{m,k} + Z_k, \quad 0 \leq k < \infty, \quad \{s_{l,k}, 1 \leq l \leq L\}$$

Caso de ruido blanco: Extensión del caso vectorial para $N \to \infty$. El detector ML calcula el mínimo de

$$D_l = \sum_{k=0}^{\infty} |Y_k - s_{l,k}|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |Y_k|^2 + \sum_{k=0}^{\infty} |s_{l,k}|^2 - 2\mathrm{Re}\{\sum_{k=0}^{\infty} Y_k s_{l,k}^*\}$$

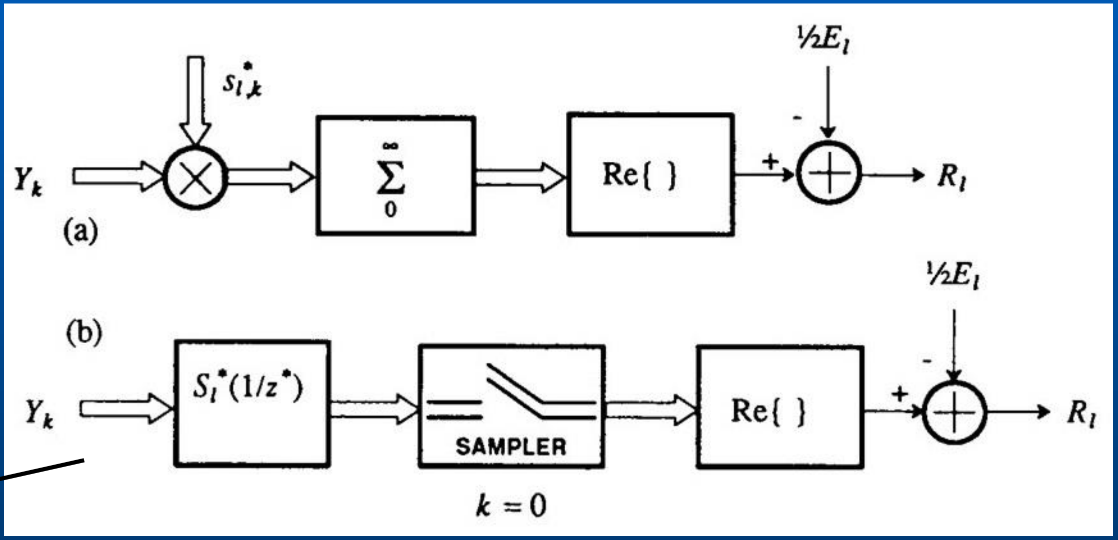
Equivalente a la maximización de

$$R_l = \mathrm{Re}\{\sum_{k=0}^{\infty} Y_k s_{l,k}^*\} - \frac{1}{2}E_l, \quad E_l = \sum_{k=0}^{\infty} |s_{l,k}|^2$$

Detección de señales conocidas en AWGN ...

Señal recibida discreta, ruido blanco

Versión discreta similar al receptor visto para diferentes modulaciones.



Anticausal (realizable si FIR, sino solo aproximación)

Dos interpretaciones del detector ML para una señal discreta conocida en ruido: a) Correlador; b) MF en tiempo discreto.

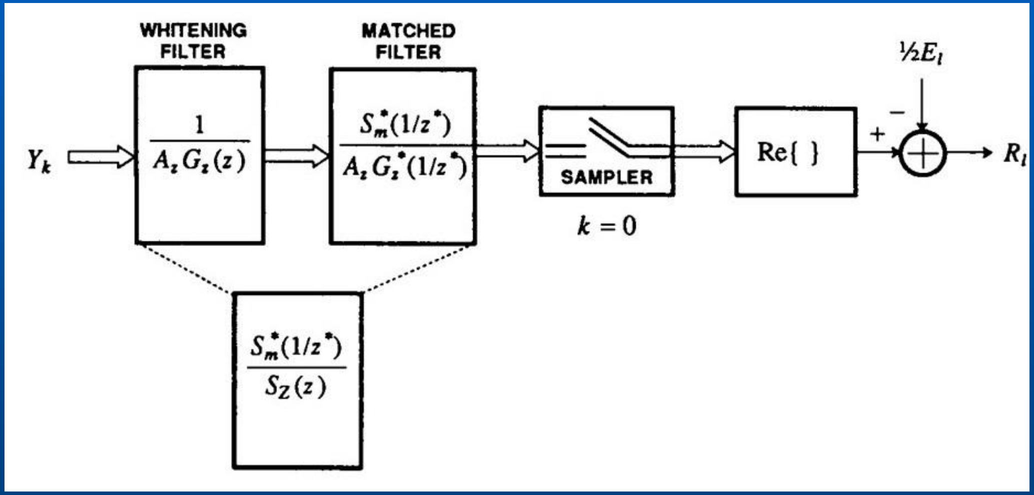
Detección de señales conocidas en AWGN ...

Señal discreta, ruido coloreado

Se asume que existe

$$S_Z(z) = A_z^2 G_z(z) G_z^*(1/z^*)$$

tal que el filtro de blanqueo $1/A_z G_z(z)$ es de fase mínima.



El filtro de blanqueo de fase mínima sobre el espectro de ruido $S_Z(z)$, permite aplicar el detector de MF a la señal. El filtrado de blanqueo preserva la estadística circular simétrica del ruido, entonces no afectará la probabilidad de error del detector.

Detección de señales conocidas en AWGN ...

Señal recibida continua

$$Y(t) = s_m(t) + Z(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad \text{con} \quad \{s_l(t), 1 \leq l \leq L, 0 \leq t \leq T\}$$

donde, *T* es suficientemente grande (pero finito) y $Z(t)$ es un proceso Gaussiano circularmente simétrico con $R_Z(\tau) \leftrightarrow S_Z(jw)$

La idea es mapear $Z(t),\ 0 \leq t \leq T$ a tiempo discreto equivalente usando una expansión adecuada, i.e.

$$Z(t) = \sum_{i=1}^{\infty} Z_i \phi_i(t), \quad 0 \leq t \leq T$$

donde las funciones ortogonales $\phi_i(t)$ verifican

$$\int_0^T \phi_i(t)\phi_j^*(t)dt = \delta_{i-j}$$

Detección de señales conocidas en AWGN ...

Señal recibida continua

En particular, si los coeficientes no están correlacionados, $E(Z_i Z_j^*) = \sigma_i^2 \delta_{i-j}$, es posible desarrollar el detector ML usando la *Expansión de Karhunen – Loeve*

$$Z_j = \int_0^T Z(t)\phi_j^*(t)dt$$

donde Z_j son v.a. Gaussianas circularmente simétricas y entonces independientes.

La condición para la existencia de esta expansión es

$$\int_0^T R_Z(t-\tau)\phi_j(\tau)d\tau = \sigma_j^2 \phi_j(t), \quad 1 \leq j < \infty \quad 0 \leq t \leq T$$

Por similaridad con matrices: $\phi_i(t)$ es la autofunción de $R_Z(\tau)$ con el correspondiente autovalor σ_j^2 .

Existen en todos los casos que estudiaremos, pero definen una condición.

Detección de señales conocidas en AWGN ...

Entonces, expandiendo la señal recibida

$$Y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} Y_i \phi_i(t), \quad Y_i = s_{m,i} + Z_i, \quad 0 \leq t \leq T$$

con

$$s_{m,i} = \int_0^T s_m(t) \phi_i^*(t) dt$$

Es un problema equivalente discreto si se tienen en cuenta las varianzas diferentes, entonces

$$\frac{Y_i}{\sigma_i} = \frac{s_{m,i}}{\sigma_i} + \frac{Z_i}{\sigma_i}, \quad 1 \leq i < \infty$$

Detección de señales conocidas en AWGN ...

Entonces, usando el detector ML discreto a este problema equivalente, la idea es minimizar

$$D_l = \sum_{i=1}^{\infty} \left| \frac{Y_i}{\sigma_i} - \frac{s_{l,i}}{\sigma_i} \right|^2$$

para $0 \leq l \leq L$. O también

$$R_l = \mathrm{Re}\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{Y_i s_{l,i}^*}{\sigma_i^2} \} - \frac{1}{2} E_l, \quad E_l = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|s_{l,i}|^2}{\sigma_i^2}$$

Detección de señales conocidas en AWGN ...

El criterio a maximizar puede relacionarse con las señales continuas originales. En particular, si existe $g_l(t)$ que satisface

$$\int_0^T R_Z(t-\tau)g_l(\tau)d\tau = s_l(t), \quad 1 \leq l \leq L, \quad 0 \leq t \leq T$$

Entonces, el criterio a maximizar anterior puede escribirse como

$$R_l = \mathrm{Re}\{\int_0^T Y(t)g_l^*(t)dt\} - \frac{1}{2}E_l, \quad E_l = \int_0^T s_l(t)g_l^*(t)dt$$

Por ejemplo, si $R_Z(\tau) = N_0\delta(t)$, entonces $N_0 g_l(t) = s_l(t)$. En este caso el receptor correlaciona con cada una de las señales conocidas $s_l(t), 1 \leq l \leq L$.

La detección de una señal continua (infinitas dimensiones) se puede realizar con un número finito (L) de variables (sin perder información!).

Detección de señales conocidas en AWGN ...

Diferentes interpretaciones de la realización del detector

Para $T \to \infty$, $g_l(t)$ es causal tal que

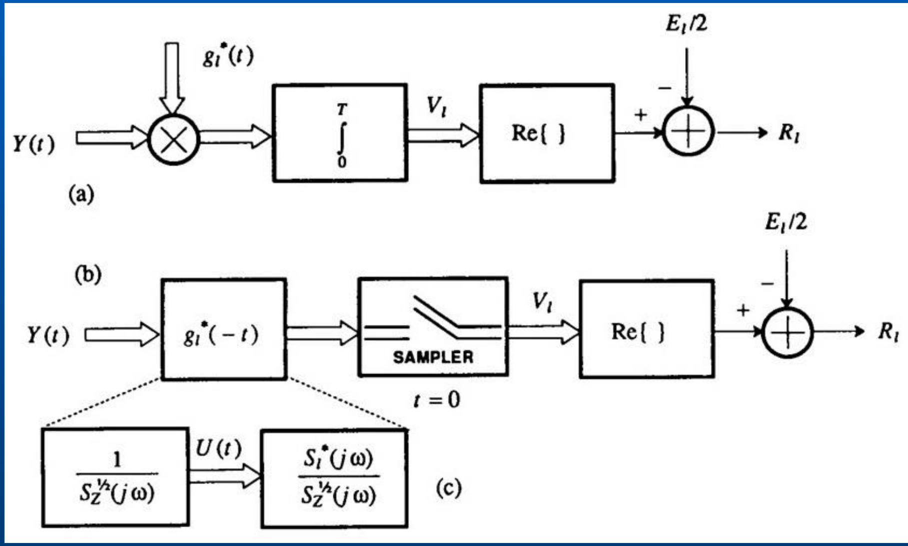
$$R_Z(t) * g_l(t) = s_l(t)$$

es una convolución, ó

$$G_l(jw) = S_l(jw)/S_Z(jw)$$

y un nuevo equivalente tiene en cuenta la factorización

$$S_Z(jw) = S_Z^{1/2}(jw) S_Z^{1/2}(jw)$$

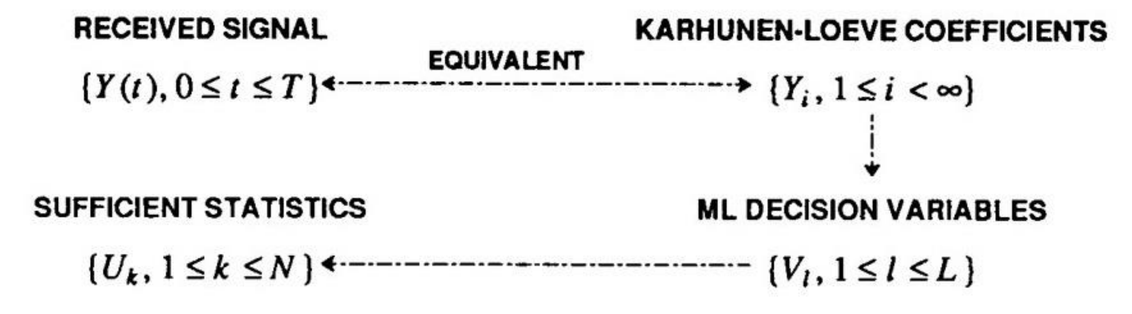


Detector ML para una señal continua conocida en ruido gaussiano aditivo; a) receptor correlador; b) receptor MF; c) receptor MF para $T \to \infty$.

Detección de señales conocidas en AWGN ...

Generación de una *estadística suficiente*

- $Y(t)$ señal recibida (continua).
- Y_i coeficientes de Karhunen-Loeve (discretos pero infinitos).
- $V_l = \mathrm{Re}\{\int_0^T Y(t) g_l^*(t) dt\}, \quad 1 \leq l \leq L$ (discretas). Existencia.
- Si, $N \leq L,\ U_k, 1 \leq k \leq N$ (*N:* dimensión del espacio de señales blanqueado).



Mapeo de la señal recibida *Y(t)* a través de las variables de decisión, las cuales retienen toda la información relevante para la detección de las señales conocidas.

Detección de señales conocidas en AWGN ...

Generación de una estadística suficiente:

Si $f_l(t)$ es la respuesta de un filtro de blanqueo $1/S_Z^{1/2}(jw)$ a $s_l(t)$, entonces

$$F_l(jw) = \frac{S_l(jw)}{S_Z^{1/2}(jw)}$$

y tal que

$$f_l(t) = \sum_{k=1}^{N} F_{l,k}\psi_k(t), \quad F_{l,k} = \int_0^{\infty} f_l(t)\psi_k^*(t)dt$$

que genera un subespacio de señales de dimensión $N \leq L$.

Detección de señales conocidas en AWGN ...

Generación de una estadística suficiente...

Entonces, en función de la nueva base $\psi_k(t)$

$$U_k = \int_0^\infty U(t)\psi_k^*(t)dt, \ \ 1 \le k \le \infty$$

pero

$$U(t) = f_l(t) + W(t)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} U_k &= \int_0^\infty f_l(t)\psi_k^*(t)dt + \int_0^\infty W(t)\psi_k^*(t)dt \\ &= \begin{cases} F_{l,k} + W_k, & 1 \le k \le N \\ W_k, & N+1 \le k < \infty \end{cases} \end{aligned}$$

Estadística suficiente

Detección de señales conocidas en AWGN ...

Generación de una estadística suficiente...

Características de U_k como estadística suficiente

- Solo las primeras *N* componentes de U_k tienen componente de señal.
- Las componentes restantes son estadísticamente independientes de las primeras.
- $\{U_k, N+1 \leq k < \infty\}$ es irrelevante para la detección de la señal, independientemente del criterio utilizado.

Este último mapeo: $Y(t) \to U_k \to f_m(t), 1 \leq m \leq N$ es similar a la expansión básica del espacio de señales $s_m(t)$, excepto que a la salida del filtro de blanqueo (por ello pueden no tener la misma dimensión).

También, se puede mostrar que $V_l = \sum_{k=1}^{N} F_{l,k}^* U_k,\ 1 \leq l \leq L$, y entonces usarla como estadística suficiente. Como en general $N \leq L$, se prefiere U_k.

Detección de señales conocidas en AWGN ...

Aplicaciones de una estadística suficiente:

En base a la estadística suficiente y un criterio de optimalidad (MAP o ML), la estructura óptima se obtiene por:

- Calcular la estadística suficiente de orden N (o L). Este conjunto de variables reemplaza a la señal recibida a los propósitos de detección.
- Determinar la estadística suficiente para una condición de ruido conocida y conjunto de señales conocido.
- Determinar el resto de la estructura del receptor mediante el criterio de optimalidad aplicado a la estadística suficiente y sus propiedades.

Se mostrará que, para ruido gaussiano, las estructuras de receptores de distancia mínima son óptimos con respecto al criterio ML si:

- Se utiliza un filtro de blanqueo en el receptor.
- Se utiliza una estadística suficiente.

Detección de señales conocidas en AWGN ...

Estadística suficiente de una señal continua pasabanda.

La estadística suficiente en este caso, además del blanqueo debería incluir demodulación. La señal real pasabanda es

$$Y(t) = s_m(t) + N(t),\ s_m(t) = \sqrt{2}\text{Re}\{\tilde{s}_m(t)e^{jw_c t}\}$$

De la ecuación integral se tiene

$$g_m = \sqrt{2}\text{Re}\{\tilde{g}_m(t)e^{jw_c t}\}$$

tal que

$$\int_0^T R_N(t-\tau)\sqrt{2}\text{Re}\{\tilde{g}_m(t)e^{jw_c t}\}d\tau = \sqrt{2}\text{Re}\{\tilde{s}_m(t)e^{jw_c t}\}, \quad 0 \leq t \leq T$$

o en términos de señales bandabase

$$\int_0^T R_N(t-\tau)\tilde{g}_m(t)e^{-jw_c(t-\tau)}d\tau = \tilde{s}_m(t), \quad 0 \leq t \leq T$$

Detección de señales conocidas en AWGN ...

Estadística suficiente de una señal continua pasabanda ...

Entonces para $T \to \infty$

$$\tilde{G}_m(jw) \to \frac{\tilde{S}_m(jw)}{S_N[j(w+w_c)]}$$

como

$$V_m = \int_0^T Y(t) g_m(t) dt \;=\; \sqrt{2}\mathrm{Re}\{\int_0^T Y(t) e^{-jw_c t} \tilde{g}_m^*(t)\}, \quad 1 \leq m \leq L$$

la estadística suficiente será

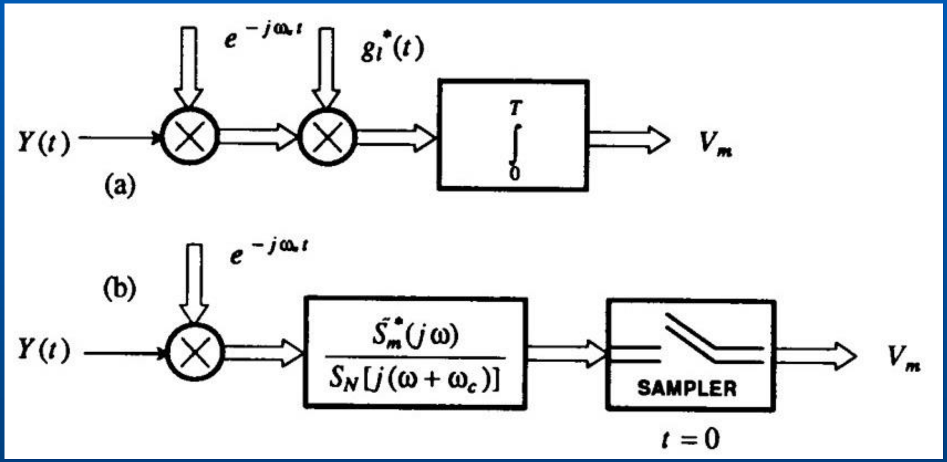
$$\tilde{V}_m = \int_0^T Y(t) e^{-jw_c t} \tilde{g}_m^*(t), \quad 1 \leq m \leq L$$

Detección de señales conocidas en AWGN ...

Estadística suficiente de una señal continua pasabanda ...

$$\tilde{V}_m = \int_0^T Y(t) e^{-jw_c t} \tilde{g}_m^*(t), \quad 1 \leq m \leq L$$

Realización con MF similar a la de distancia mínima ya analizada excepto por la normalización del filtro acoplado.



Generación de *L* estadísticas suficientes para la señal continua pasabanda recibida *Y(t)*: a) correlador; b) MF, valido para $T \to \infty$.

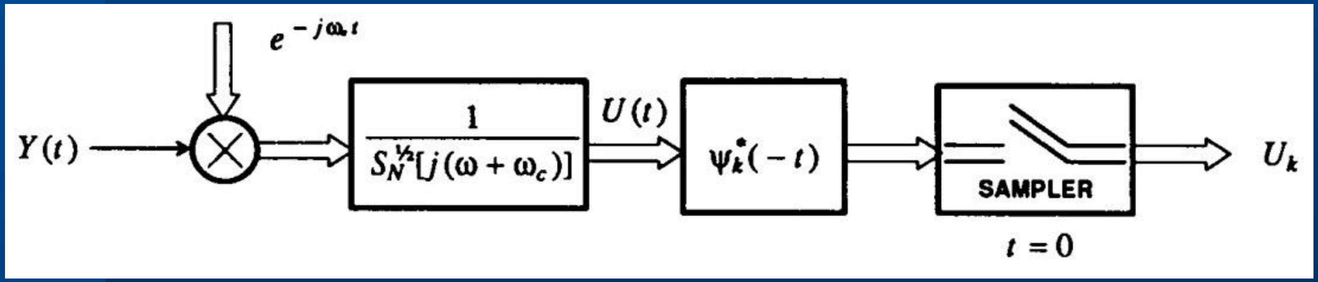
Detección de señales conocidas en AWGN ...

Estadística suficiente de una señal continua pasabanda ...

Para reducir el número de variables de una estadística suficiente (de *L* para *N*), se puede generar una señal pasabanda $U(t)$.

Una base ortogonal $\{\psi_k(t), 1 \leq k \leq N\}$ para $\{f_m(t), 1 \leq m \leq L\}$ a partir de

$$F_m(jw) = \frac{\tilde{S}_m(jw)}{S_N^{1/2}[(j(w + w_c)]}$$



Receptor para generar *N* estadísticas suficientes para la señal continua pasabanda.

Detección óptima de señal continua de fase no conocida

Utilización de los resultados anteriores cuando no se conoce la fase del conjunto de señales transmitidas (caso de FSK). Verificación de los diseños de distancia mínima para este caso.

$$Y(t) = \sqrt{2}\text{Re}\{\tilde{s}_m(t)e^{j(w_c t+\Theta)}\} + N(t), \quad 1 \leq m \leq L$$

Con $\{\tilde{s}_m(t), 1 \leq m \leq L\}$ barriendo un espacio de dimensión *L* y este tiene una base ortogonal de dimensión *N* $\{\phi_n(t), 1 \leq n \leq N\}$, entonces una estadística suficiente es

$$\tilde{V}_n = \int_0^\infty Y(t)e^{jw_c t}\phi_n^*(t)dt, \quad 1 \leq n \leq N$$

que se puede escribir como

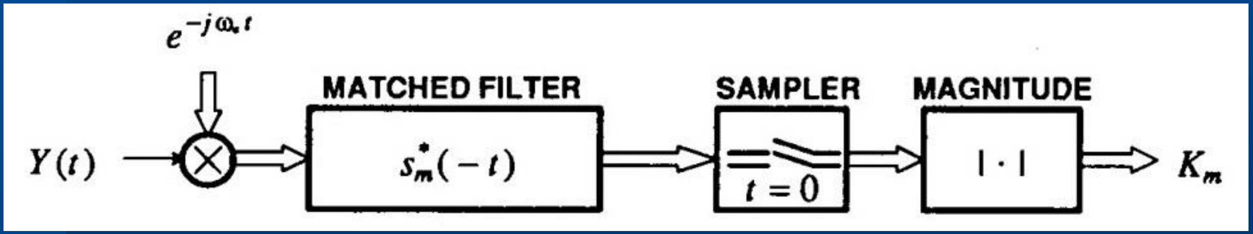
$$\boldsymbol{V} = e^{j\theta}\tilde{\boldsymbol{S}}_m + \boldsymbol{Z}$$

Detección óptima de señal continua de fase no conocida ...

El detector ML se obtiene en base a $f_{\boldsymbol{V}|\boldsymbol{S}_m}(\boldsymbol{v}|\boldsymbol{s}_m)$.

Para el caso de ruido Gaussiano y usando propiedades de funciones de Bessel, el detector ML selecciona *m* que maximice

$$K_m = |< \boldsymbol{v}, \tilde{\boldsymbol{s}}_m >| = |\sum_{n=1}^{N} \nu_n \tilde{s}_{m,n}^*| = |\int_{-\infty}^{\infty} Y(t) e^{-jw_c t} \tilde{s}_m^*(t) dt|$$

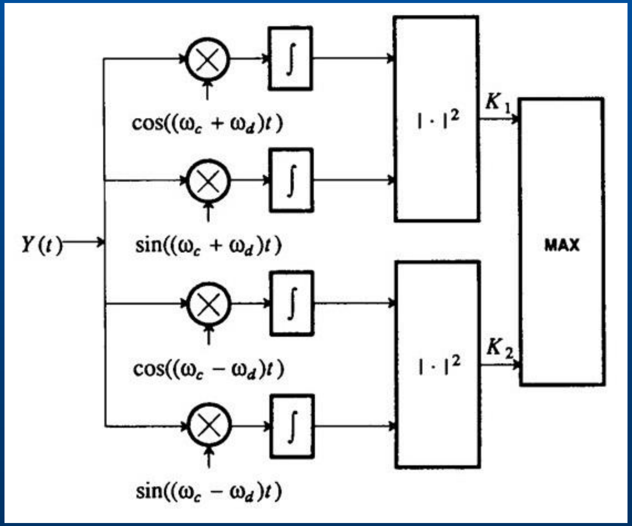


Detección óptima de señal continua de fase no conocida ...

Ejemplo: FSK binaria con $\tilde{s}_1(t) = e^{-jw_d t}$ y $\tilde{s}_2(t) = e^{jw_d t}$

Una implementación sería con 2 filtros $g(t) = \begin{cases} e^{j(w \pm w_c)t}, & -T \leq t \leq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

Otra implementación equivalente óptima no coherente para FSK binaria usando correladores.



Detección óptima de señal continua de fase no conocida ...

Probabilidad de error para detección no coherente

A partir de la estadística suficiente y la métrica

$$K_m = \left| e^{j\theta} < \tilde{\boldsymbol{S}}_l, \tilde{\boldsymbol{S}}_m > + < \boldsymbol{Z}, \tilde{\boldsymbol{S}}_m > \right|$$

Ejemplo FSK: Si $w_1 - w_2 = 2w_d$ las señales son ortogonales, i.e. $< \tilde{\boldsymbol{S}}_1, \tilde{\boldsymbol{S}}_2 >= 0$

Suponiendo $\tilde{\boldsymbol{S}}_1$ transmitida,

$$\begin{aligned} K_1 &= \left| e^{j\theta} \left\| \tilde{\boldsymbol{S}}_1 \right\|^2 + < \boldsymbol{Z}, \tilde{\boldsymbol{S}}_1 > \right| \\ K_2 &= \left| < \boldsymbol{Z}, \tilde{\boldsymbol{S}}_2 > \right| \end{aligned}$$

Entonces

$$P[error|\tilde{\boldsymbol{S}}_1] = Pr\{ \left| < \boldsymbol{Z}, \tilde{\boldsymbol{S}}_2 > \right| > \left| e^{j\theta} \left\| \tilde{\boldsymbol{S}}_1 \right\|^2 + < \boldsymbol{Z}, \tilde{\boldsymbol{S}}_1 > \right| \}$$

Detección (resumen)

- **Detección de un único símbolo.**
- **Detección de un vector señal.**
- **Detección de señales continuas en ruido Gaussiano.**
- **Detección no coherente óptima.**
- **Detección óptima de PAM con ISI.**
- **Detector de secuencias: Algoritmo de Viterbi.**