

Procesamiento de Señales en Comunicaciones

Departamento de Ingeniería Eléctrica y Computadoras
Universidad Nacional del Sur

Contenidos

- **Modulación.**
- **Diseño de Distancia Mínima.**
- **Desempeño en ruido.**
- **Detección.**
- **Ecualización óptima.**
- **Ecualización adaptativa.**
- **Modulación de portadoras múltiples**

Ecualización Óptima

- Ecualización óptima de ISI nula.
- Métodos de ecualización generalizados (LE, DFE)
- Métodos de ecualización generalizados (MLSD).
- Ecualización de espaciamiento fraccionario.
- Ecualización con filtros transversales.
- **ISI y Capacidad de canal.**

ISI y Capacidad de canal

Se estudiarán efectos de ISI sobre la capacidad del canal.

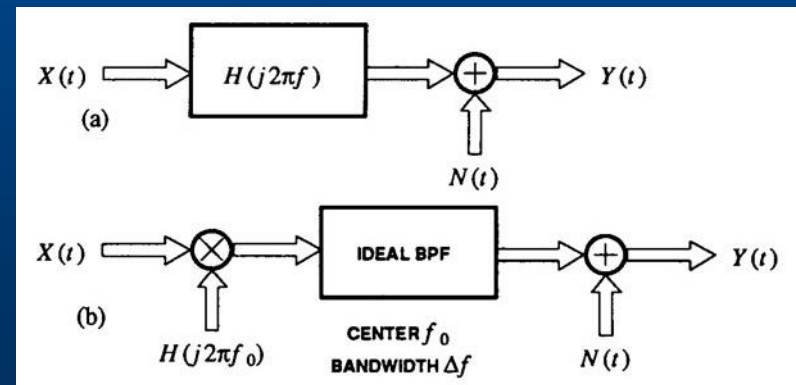
Se desarrollarán algunos resultados:

- ISI siempre reduce la capacidad del canal (a pesar que no siempre aumenta la probabilidad de error, en PAM con MLSD y alta SNR, por ejemplo).
- Es posible generalizar SNR_{norm} como en canales sin ISI ($SNR_{norm} \geq 1$) y cuantificar la diferencia en relación a la SNR asociada a la capacidad del canal.
- Usando PAM y para DFE-ZF esa diferencia es constante en SNR altas, *independientemente del canal* (implicaciones para codificación).
- La diferencia de SNR normalizada para DFE-MSE-U es fija, independientemente de la ISI para toda SNR (no solo en SNR alta) siempre que el filtro de transmisión sea optimizado.

ISI y Capacidad de canal ...

Nivelado (water-pouring) de tiempo continuo.

- Se obtendrá la **capacidad** para un canal continuo $H(j2\pi f)$ con un ruido $S_N(j2\pi f)$
- Los resultados de un canal ideal se pueden usar si consideramos la división del ancho de banda del canal arbitrario en pequeños tramos de ancho Δf , tal que en ese ancho el canal es constante (luego se hará $\Delta f \rightarrow 0$).
- Suponemos una restricción en la potencia disponible $E[X^2(t)] = P_s$.
- Para encontrar la capacidad de canal es necesario hallar una expresión en función de la DEP de la entrada $S_X(j2\pi f)$.



ISI y Capacidad de canal ...

Water pouring continuo ...

La capacidad de cada subcanal es

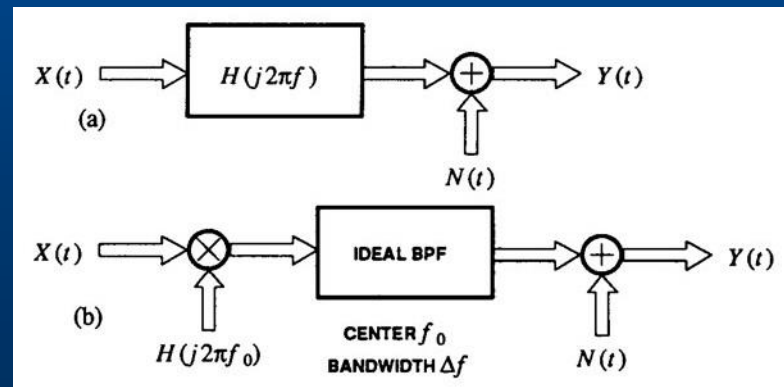
$$C(j2\pi f_0) = \Delta f \log_2 \left(1 + \frac{2S_X(j2\pi f_0)|H(j2\pi f_0)|^2 \Delta f}{2S_N(j2\pi f_0) \Delta f} \right)$$

y la capacidad total

$$C = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \log_2 \left(1 + \frac{S_X |H|^2}{S_N} \right) df \quad [\text{bits/seg}]$$

Canal continuo con ruido aditivo Gaussiano;

Una sub-banda pequeña del canal.



ISI y Capacidad de canal ...

Water-pouring continuo ...

Para introducir la restricción de potencia en la maximización de C , se considera

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \log_2 \left(1 + \frac{S_X |H|^2}{S_N} \right) df + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} S_X df$$

Con multiplicadores de Lagrange se obtiene

$$S_X = \begin{cases} L - \frac{S_N}{|H|^2}, & f \in F \\ 0, & \text{para todo otro } f \end{cases}$$

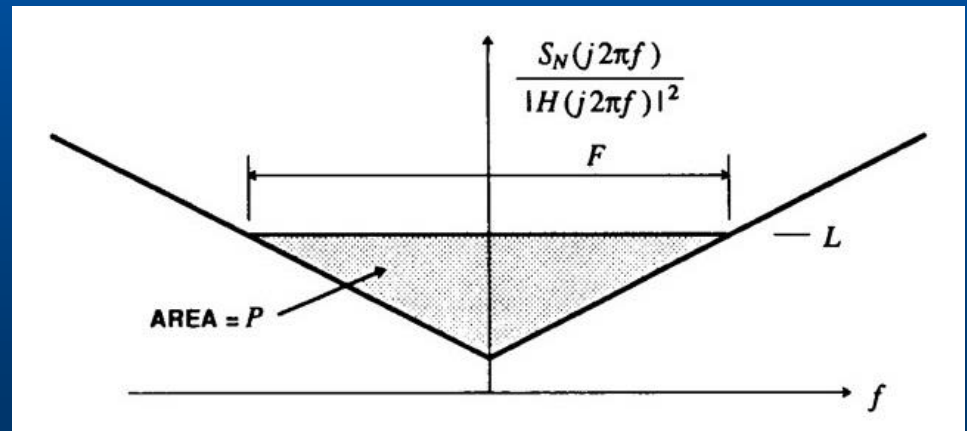
donde $L = 1/2\lambda$ se elige para satisfacer la restricción de potencia y F es el conjunto de frecuencias tal que $L > S_N/|H|^2$, que se denomina *banda de nivelado (water-pouring band)*.

ISI y Capacidad de canal ...

Water pouring continuo ...

- En términos gráficos, se forma una “taza” de valores $S_N/|H|^2$, y se nivela hasta el nivel L tal que el volumen de agua sea igual a la restricción de potencia.
- De esta forma se concentra la potencia transmitida donde $|H|^2/S_N$ es grande, o sea, donde el canal tiene poca atenuación.

El espectro de transmisión que logra la capacidad del canal en cada frecuencia es la profundidad del agua.



ISI y Capacidad de canal ...

Water pouring continuo: **Canal pasabanda**

En términos del canal complejo bandabase y suponiendo H limitada a $f_0 - B/2 \leq |f| \leq f_0 + B/2$

$$C = \int_{-B/2}^{B/2} \log_2 \left(1 + \frac{S_X(j2\pi(f + f_0)) |H(j2\pi(f + f_0))|^2}{S_N(j2\pi(f + f_0))} \right) df$$

que resulta en

$$S_X(j2\pi(f + f_0)) = \begin{cases} L - \frac{S_N(j2\pi(f + f_0))}{|H(j2\pi(f + f_0))|^2}, & f \in F \\ 0, & \text{para todo otro } f \end{cases}$$

donde L se elige tal que

$$\int_{-B/2}^{B/2} S_X(j2\pi(f + f_0)) df = \frac{P_S}{2}$$

ISI y Capacidad de canal ...

Water-pouring continuo: Canal pasabanda

Ejemplo:

Para el caso de un canal ideal pasabanda con ruido blanco Gaussiano de ancho de banda B , $S_N/|H|^2 = N_0$ es constante.

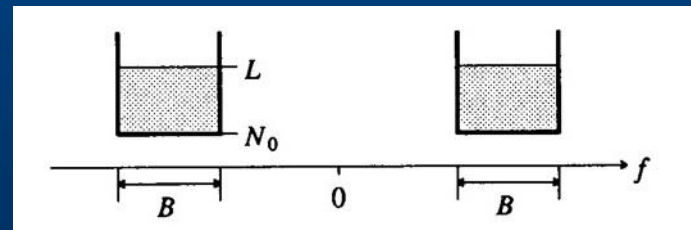
La “taza” (en realidad 2) tiene lados paralelos y la banda de nivelado es el ancho de banda completo.

El volumen en cada taza es $P_S/2$ y la profundidad $S_X = P_S/2B$.

Entonces

$$C = B \log_2(1 + SNR), \quad SNR = P_S/2BN_0$$

Water-pouring para un cana pasabanda ideal de ruido Gaussiano.



ISI y Capacidad de canal ...

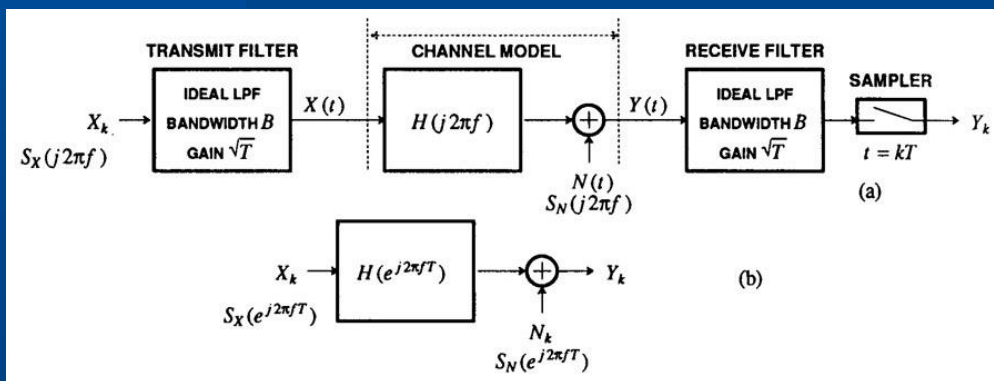
Water-pouring discreto

Asumiendo que no existe aliasing en el muestreo $H(e^{j2\pi fT}) = H(j2\pi f) \quad |f| \leq B$
Entonces

$$S_X(e^{j2\pi fT}) = S_X(j2\pi f), \quad |f| \leq B$$

tal que la restricción de potencia es

$$E[X_k^2] = T \int_{-1/2T}^{1/2T} S_X(e^{j2\pi fT}) df = TE[X^2(t)] = TP_S$$



Canal discreto a través del muestreo de la entrada y la salida;

Modelo del canal discreto resultante.

ISI y Capacidad de canal ...

Water pouring discreto ...

El espectro del ruido a la salida será

$$S_N(e^{j2\pi fT}) = S_N(j2\pi f), \quad |f| \leq B$$

En condiciones de ancho de banda limitado para el sistema continuo, la capacidad del sistema discreto se puede obtener en función de aquel

$$C = \frac{1}{2} \int_{-1/2T}^{1/2T} \log_2 \left(1 + \frac{S_X(e^{j2\pi fT}) |H(e^{j2\pi fT})|^2}{S_N(e^{j2\pi fT})} \right) df$$

donde

$$S_X(e^{j2\pi fT}) = \begin{cases} L - \frac{S_N(e^{j2\pi fT})}{|H(e^{j2\pi fT})|^2}, & f \in F \\ 0, & \text{para todo otro } f \end{cases}$$

donde L se elige para limitar la potencia transmitida a $P_S = E[X_k^2]/T$ con

$$P_S = \int_{-1/2T}^{1/2T} S_X(e^{j2\pi fT}) df$$

ISI y Capacidad de canal ...

Water pouring discreto ...

La capacidad del sistema de tiempo discreto con restricción de potencia de entrada $E[X_S^2] = P_S$ será igual a la capacidad del sistema de tiempo continuo con restricción de potencia de entrada $E[X^2(t)] = P_S/T$, siempre que la banda de water-pouring resultante del sistema de tiempo continuo esté contenida en: $|f| \leq B$.

ISI y Capacidad de canal ...

Water pouring discreto ...

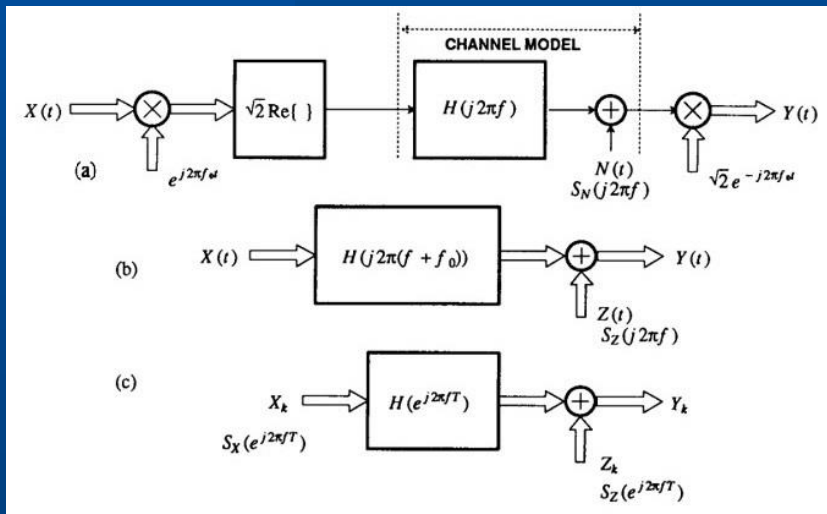
Para el canal pasabanda discreto se puede usar también los resultados asociados al caso continuo. El resultado de la optimización de C resulta en

$$C = \frac{1}{2} \int_{-1/2T}^{1/2T} \log_2 \left(1 + \frac{S_X(e^{j2\pi fT}) |H(e^{j2\pi fT})|^2}{S_Z(e^{j2\pi fT})} \right) df \quad S_X(e^{j2\pi fT}) = \begin{cases} 2L - \frac{S_Z(e^{j2\pi fT})}{|H(e^{j2\pi fT})|^2}, & f \in F \\ 0, & \forall f \end{cases}$$

con

$$S_X(e^{j2\pi fT}) = 2S_X(j2\pi(f + f_0))$$

$$S_Z(e^{j2\pi fT}) = 2S_N(j2\pi(f + f_0))$$



Canal pasabanda continuo;

Canal bandabase complejo equivalente obtenido usando un modulador y un demodulador;

Canal bandabase complejo obtenido usando el muestreo en filtros de transmisión y recepción

ISI y Capacidad de canal ...

Water pouring discreto

Ejemplo.

Cuando el ruido sobre el modelo continuo es blanco con DEP N_0 , $S_Z = 2N_0$. Es conveniente trabajar con un espectro de transmisión normalizado

$$S'_X = \frac{S_X}{2N_0} = \begin{cases} L' - \frac{1}{|H|^2}, & f \in F \\ 0, & \forall f \end{cases}$$

donde L' se elige para satisfacer la restricción $\frac{P_S}{2N_0B} = T \int_{-1/2T}^{1/2T} S'_X df$ que resulta la SNR de un canal ideal AWGN, donde

$$C T = T \int_{-1/2T}^{1/2T} \log_2(1 + S'_X |H|^2) df$$

es la capacidad por muestra.

ISI y Capacidad de canal ...

Water pouring discreto

Ejemplo:

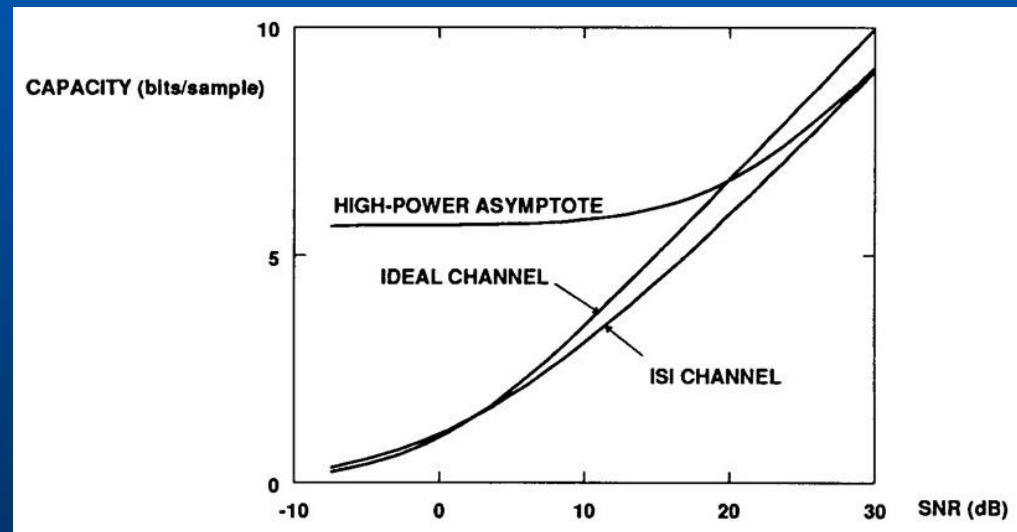
Consideremos el canal de un único cero, $H(z) = (1 - cz^{-1})/\sqrt{1 + |c|^2}$ (normalizado para energía unitaria).

Capacidad por muestra en función de la SNR para un canal de un único cero.

Canal de ISI ($|c| = 0.99$)

Canal ideal ($c=0$)

Asíntota de capacidad



En baja SNR se tiene levemente mayor capacidad con ISI por water-pouring. En alta SNR pérdida modesta.

ISI y Capacidad de canal ...

Water pouring discreto

Ejemplo:

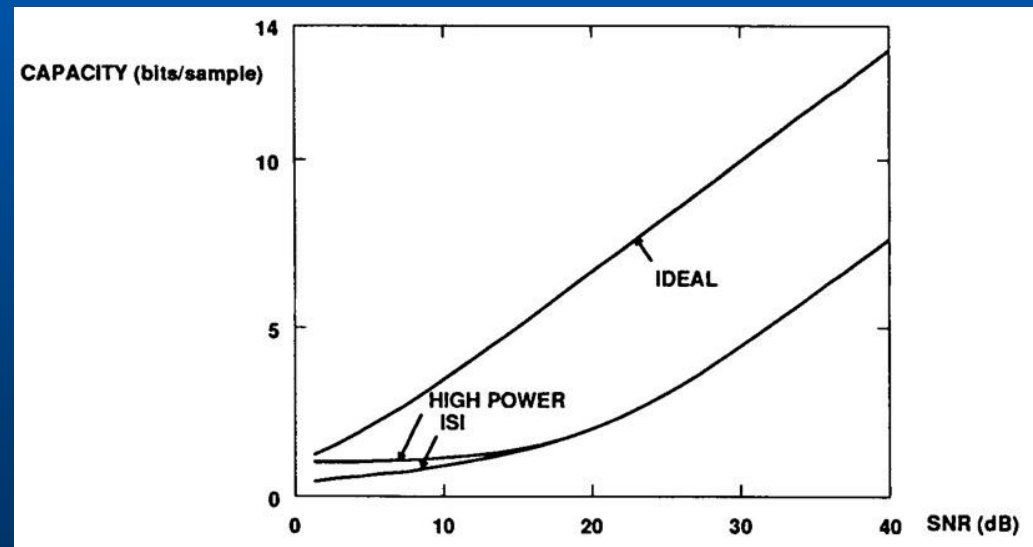
En este caso, el canal tiene un único polo $H(z) = \sqrt{1 + |c|^2} / (1 - cz^{-1})$

Capacidad por muestra en función de la SNR para un canal de un único polo.

Canal de ISI ($|c| = 0.99$)

Canal ideal ($c=0$)

Asíntota de capacidad



Este canal tiene mucha más ISI que el anterior y resulta en pérdida significativa de capacidad.

ISI y Capacidad de canal ...

Relación de C con medias aritmética y geométrica

Para el caso bandabase, suponiendo conocida la banda de water-pouring F e integrando S_X

$$\frac{P_S}{|F|} = \langle S_X \rangle_{A,F} = L - \langle S_N/|H|^2 \rangle_{A,F}$$

Sustituyendo en C se obtiene

$$C = \frac{|F|}{2} \log_2 \left(\frac{P_S/|F| + \langle S_N/|H|^2 \rangle_{A,F}}{\langle S_N/|H|^2 \rangle_{G,F}} \right)$$

Medias aritmética y geométrica aparecen en C de la misma forma que en el desempeño de los ecualizadores!

ISI y Capacidad de canal ...

Relación de C con medias aritmética y geométrica

Ejemplo.

Cuando el ruido es blanco $S_N = N_0$ y

$$C = \frac{|F|}{2} \log_2 \left(\frac{SNR + \langle 1/|H|^2 \rangle_{A,F}}{\langle 1/|H|^2 \rangle_{G,F}} \right)$$

donde $SNR = P_S/|F|N_0$ es la SNR de entrada en la banda de nivelado F .

Lógicamente, cuando no exista ISI ($H=1$) esta ecuación se reduce a la capacidad del canal AWGN.

ISI y Capacidad de canal ...

Eficiencia espectral, SNR y SNR normalizada.

- Se analizará una relación del tipo $SNR_{norm} \geq 1$ (con igualdad si el sistema opera en los límites fundamentales de capacidad) para canales con ISI.
- Se considera un sistema PAM (A_k sustituyendo X_k) para el canal bandabase complejo anterior. La salida del canal Y_k , se aplica a receptores con las estructuras LE, DFE y MLSD.
- Un objetivo es analizar el desempeño en términos de P_e y como se relaciona con C .
- La velocidad de transmisión es $B_0 = 1/T$ y el ancho de banda del canal $B/2$.

ISI y Capacidad de canal ...

Eficiencia espectral, SNR y SNR normalizada

La *eficiencia espectral* depende de la velocidad de transmisión y el ancho de banda del canal continuo. Se supone la máxima velocidad posible B_0 .

Entonces,

$$\nu_c = \frac{C}{B_0} = \frac{|F|}{B_0} \log_2 \left(\frac{P_S/|F| + \langle S_Z/|H|^2 \rangle_{A,F}}{\langle S_Z/|H|^2 \rangle_{G,F}} \right)$$

La *SNR* de entrada depende del canal discreto equivalente,

$$SNR_{in} = \frac{P_S/|F|}{\langle S_Z/|H|^2 \rangle_{A,F}}$$

ISI y Capacidad de canal ...

Eficiencia espectral, SNR y SNR normalizada

La máxima eficiencia espectral para (con $B_0 = B$) se puede escribir como

$$\frac{P_S/|F|}{2^{\nu_c} B_0/|F| < S_Z/|H|^2 >_{G,F} - < S_Z/|H|^2 >_{A,F}} = 1$$

una generalización de $SNR/(2^{\nu_c} - 1) = 1$ obtenida para el canal ideal AWGN.

Esto permite definir una SNR_{norm} para una eficiencia espectral arbitraria ν como

$$SNR_{norm} = \frac{P_S/|F|}{2^{\nu} B_0/|F| < S_Z/|H|^2 >_{G,F} - < S_Z/|H|^2 >_{A,F}}$$

ISI y Capacidad de canal ...

Eficiencia espectral, SNR y SNR normalizada

Como la anterior es una función complicada de P_S , es posible obtener P_S de la 1ra. y sustituir en la 2da. para obtener

$$SNR_{norm} = \frac{2^{\nu_c B_0/|F|} \langle S_Z/|H|^2 \rangle_{G,F} - \langle S_Z/|H|^2 \rangle_{A,F}}{2^{\nu B_0/|F|} \langle S_Z/|H|^2 \rangle_{G,F} - \langle S_Z/|H|^2 \rangle_{A,F}} \geq 1$$

donde, de la misma forma que para el caso ideal, la relación $\nu \leq \nu_c$ es equivalente a la cota $SNR_{min} \geq 1$.

También, esta última es válida para cualquier banda F independiente de la banda de water-pouring.

ISI y Capacidad de canal ...

Eficiencia espectral, SNR y SNR normalizada

En función de la SNR_{in} obtenida anteriormente

$$SNR_{norm} = \frac{SNR_{in}}{2^{\nu B_0/|F|} < S_Z/|H|^2 >_{G,F} / < S_Z/|H|^2 >_{A,F} - 1}$$

A diferencia del canal ideal (donde $SNR/(2^{\nu_c} - 1) = 1$), SNR_{norm} no depende linealmente de P_S (sin ISI aumentarla significaba aumentar linealmente la capacidad para lograr una probabilidad de error) .

Sin embargo, si para SNR altas, tal que el “gap” de SNR en relación a C en esos casos tiene la misma interpretación que en el ideal.

ISI y Capacidad de canal ...

Eficiencia espectral, SNR y SNR normalizada

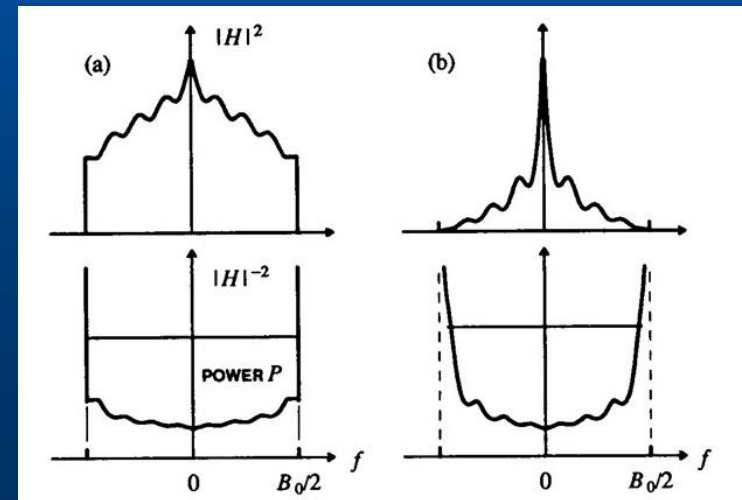
Capacidad en SNR alta.

Si $|F| = B_0$ y P_S es lo suficientemente alta, $\langle S_Z/|H|^2 \rangle_{A,F}$ y $\langle S_Z/|H|^2 \rangle_{G,F}$ son constantes (no una función de P_S) y SNR_{in} es proporcional a P_S . En ese caso SNR_{norm} tiene la misma interpretación que el caso ideal.

No en todos los canales $|F| = B_0$ (en particular si se anulan en alguna banda).

a) cuando H es no nula para todo $|f| \leq B_0$, la taza tiene bordes infinitamente profundos en las bandas laterales;

b) cuando H se hace cero en borde de la banda lateral, los bordes de la taza tienen pendiente finita, y water-pouring nunca completa el ancho de banda. (lo mismo si H se hace cero dentro de la banda).



ISI y Capacidad de canal ...

Eficiencia espectral, SNR y SNR normalizada

Capacidad en SNR alta.

Ejemplo:

Si el ruido del canal pasabanda es blanco, $S_N = 2N_0$ y $|F| = B_0$, tal que

$$SNR_{norm} = \frac{P_S / 2N_0 B_0}{2^\nu < 1/|H|^2 >_{G,F} - < 1/|H|^2 >_{A,F}}$$

Entonces SNR_{norm} y P_S son directamente proporcionales.

Ejemplo.

En los ejemplos de canales de un cero y un polo normalizados es posible visualizar la aproximación de SNR alta con $|F| = B_0$.

Esas asíntotas son útiles para mostrar que se requieren SNR muy altas para lograr la interpretación simple.

ISI y Capacidad de canal ...

Eficiencia espectral, SNR y SNR normalizada
Capacidad en SNR alta.

La banda de water-pouring asegura que $\langle S_Z/|H|^2 \rangle_{G,F}$ y $\langle S_Z/|H|^2 \rangle_{A,F}$ sean finitas.

En SNR altas, de forma que $|F| = B_0$, recordando resultados anteriores, se tiene

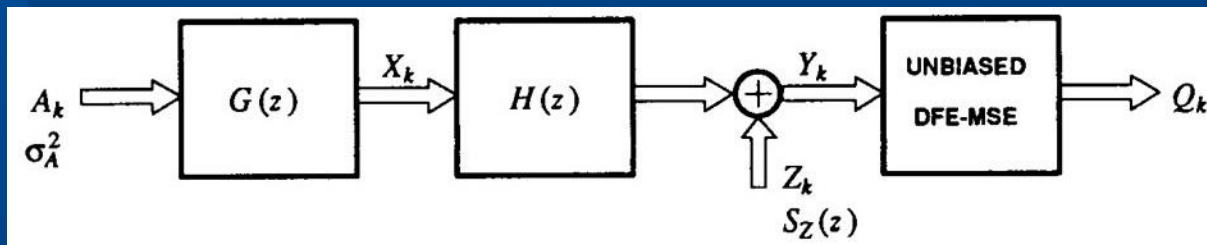
$$C = B_0 \log_2 \left(\frac{\varepsilon_{LE-ZF}^2 + P_S/B_0}{\varepsilon_{DFE-ZF}^2} \right) \quad SNR_{norm} = \frac{P_S/B_0}{2^\nu \varepsilon_{DFE-ZF}^2 - \varepsilon_{LE-ZF}^2}$$

ISI y Capacidad de canal ...

Relación entre Capacidad y DFE MSE U

Algunas suposiciones:

- A_k se elige estacionario, de media cero y mutuamente independientes (i.e., blanco).
- Se incluye un filtro en el transmisor $G(z)$ para controlar la forma de la DEP del canal sujeta a la restricción de potencia promedio.
- El MSE U entre la salida del ecualizador y los símbolos se minimiza mediante filtros precursor y postcursor, pero teniendo en cuenta también $G(z)$.
- Ese MSE corresponde a un espectro como el obtenido por water-pouring que alcanza C .



Configuración usada para obtener la relación canónica entre el DFE MSE U y la capacidad de canal.

ISI y Capacidad de canal ...

Relación entre Capacidad y DFE MSE U

Los resultados de ecualizadores generalizados pueden utilizarse en este contexto sustituyendo el canal H por HG .

Primero se minimiza el MSE para cualquier G , y luego se elige G para un MSE mínimo con las restricciones de potencia.

De esa forma,

$$C = B_0 \log_2 (1 + SNR_{DFE-MSE-U}) ,$$

$$SNR_{DFE-MSE-U} = \frac{\sigma_A^2}{\varepsilon_{DFE-MSE-U}^2}$$

El DFE-MSE-U tiene una relación canónica con C , ya que tiene la forma funcional de la obtenida para un canal ideal (válida para toda SNR).

ISI y Capacidad de canal ...

Impacto de la ISI sobre la capacidad

Consideramos el efecto de H y el ruido sobre la capacidad, haciendo la capacidad del canal con ISI igual a la ideal y obteniendo la relación entre potencias transmitidas en ambos casos (se asume ruido blanco $S_Z = 2N_0$).

$$\frac{P_{S,isi}}{2N_0|F|} = \langle 1/|H|^2 \rangle_{G,F} \left(\frac{P_{S,ideal}}{2N_0B_0} + 1 \right)^{B_0/|F|} - \langle 1/|H|^2 \rangle_{A,F}$$

donde, en general $P_{S,isi}$ puede ser menor, igual o mayor que $P_{S,ideal}$. Cuando la potencia transmitida aumenta, $|F| \rightarrow B_0$ tal que

$$SNR_{in,isi} = \langle 1/|H|^2 \rangle_G (SNR_{in,ideal} + 1) - \langle 1/|H|^2 \rangle_A$$

Asintóticamente, para SNR altas, el efecto de la ISI es incrementar SNR_{in} en $\langle 1/|H|^2 \rangle_G$

ISI y Capacidad de canal ...

Impacto de la ISI sobre la capacidad

Ejemplo. Para $H(z) = \frac{\sqrt{1 - |c|^2}}{1 - cz^{-1}}$, $|c| < 1$ se tiene que

$$\langle 1/|H|^2 \rangle_A = \frac{1 + |c|^2}{1 - |c|^2}, \quad \langle 1/|H|^2 \rangle_G = \frac{1}{1 - |c|^2}$$

de donde resulta

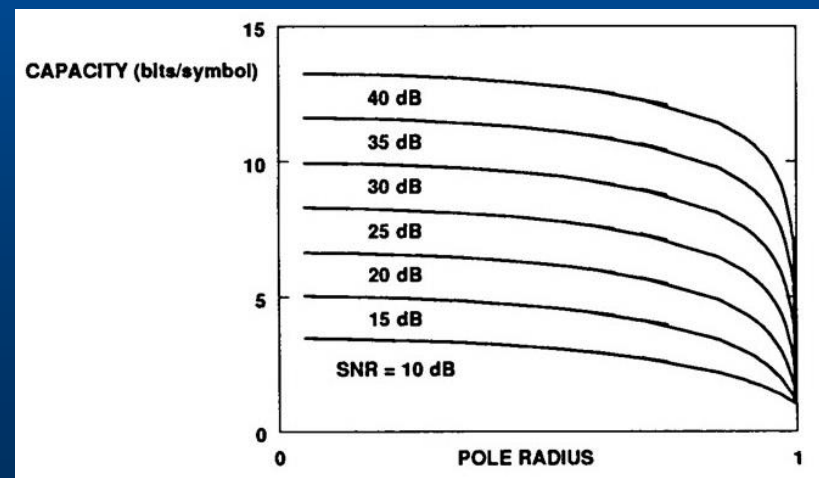
$$C T = \log_2[SNR(1 - |c|^2) + (1 + |c|^2)]$$

con $SNR = P_S/2N_0B_0$

Capacidad por símbolo (eficiencia espectral) de un canal de un polo (con energía de la respuesta impulsiva normalizada) en función del radio del polo.

A mayor $|c|$, mayor ISI.

También mayor C , requiere mayor SNR.



ISI y Capacidad de canal ...

Desempeño del LE y el DFE

La idea es usar los resultados anteriores para comparar desempeño de LE y DFE en condiciones de capacidad.

Se considerará ocupar la banda de water-pouring a alta SNR.

Si el símbolo PAM es αA_k (α permite variar la potencia transmitida), a la entrada al elemento de decisión se le sumará ruido con varianza ε^2 (donde $\varepsilon^2 = \varepsilon_{LE-ZF}^2$ o $\varepsilon^2 = \varepsilon_{DFE-ZF}^2$).

La energía transmitida por símbolo será $P_{ST} = \alpha^2 \sigma_A^2$. Entonces

$$P_e \cong KQ\left(\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right) = KQ\left(\sqrt{\frac{a_{\min}^2 P_{ST}}{2\sigma_A^2 \varepsilon^2}}\right)$$

Relación con capacidad?

ISI y Capacidad de canal ...

Desempeño del LE y el DFE

Con $\nu = \log_2 M$ y como $SNR_{norm} = \frac{P_S T}{2^\nu \varepsilon_{DFE-ZF}^2 - \varepsilon_{LE-ZF}^2}$

se tiene que

$$P_e \cong KQ(\sqrt{\gamma_A \gamma_{isi} SNR_{norm}})$$

donde $\gamma_A = \frac{(M-1)a_{\min}^2}{2\sigma_A^2}$ depende de la constelación (constante para PAM) y

$$\gamma_{isi} = \frac{M\varepsilon_{DFE-ZF}^2 - \varepsilon_{LE-ZF}^2}{(M-1)\varepsilon^2}$$

Si no existe ISI, $\varepsilon_{LE-ZF}^2 = \varepsilon_{DFE-ZF}^2 = \varepsilon^2$ y $\gamma_{isi} = 1$.

ISI y Capacidad de canal ...

Desempeño del LE y el DFE

Dos casos de interés para constelaciones de M grande (alta eficiencia espectral):

$$\gamma_{isi} = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{M\varepsilon_{DFE-ZF}^2 - \varepsilon_{LE-ZF}^2}{(M-1)\varepsilon^2} = \frac{\varepsilon_{DFE-ZF}^2}{\varepsilon^2}$$

1. Para el uso del LE-ZF, $\gamma_{isi} \rightarrow \varepsilon_{DFE-ZF}^2 / \varepsilon_{LE-ZF}^2$ constante, y el gap de SNR con la capacidad aumenta.
2. Para el uso del DFE-ZF, $\gamma_{isi} \rightarrow \varepsilon_{DFE-ZF}^2 / \varepsilon^2 = 1$, no existe degradación debido a la ISI (Price).

ISI y Capacidad de canal ...

Desempeño del LE y el DFE

Restricciones al resultado de Price:

- El ancho de banda debe coincidir con el de water-pouring (i.e., el canal no debe tener bandas nulas).
- Es aplicable a canales continuos siempre que sean estrictamente limitados en frecuencia.
- Se aplica en SNR altas y alta dimensionalidad.
- Se supone que no existen errores en DFE.

Entonces, técnicas de codificación (introducción de redundancia controlada) diseñadas para canales ideales deben funcionar adecuadamente para canales con ISI.

(No se puede obtener similares conclusiones para el DFE-MSE-U porque el MSE no será Gaussiano, debido a la ISI, y el procedimiento para hallar el desempeño no sería adecuado.)

Ecualización Óptima (resumen)

- Ecualización óptima de ISI nula.
- Métodos de ecualización generalizados (LE, DFE)
- Métodos de ecualización generalizados (MLSD).
- Ecualización de espaciamiento fraccionario.
- Ecualización con filtros transversales.
- **ISI y Capacidad de canal.**