

Procesamiento de Señales en Comunicaciones

Departamento de Ingeniería Eléctrica y Computadoras
Universidad Nacional del Sur

Contenidos

- **Modulación.**
- **Diseño de Distancia Mínima.**
- **Desempeño en ruido.**
- **Detección.**
- **Ecualización óptima.**
- **Ecualización adaptativa.**
- **Modulación de portadoras múltiples**

Detección

- **Detección de un único símbolo.**
- **Detección de un vector señal.**
- Detección de señales continuas en ruido Gaussiano.
- Detección no coherente óptima.
- Detección óptima de PAM con ISI.
- Detector de secuencias: Algoritmo de Viterbi.

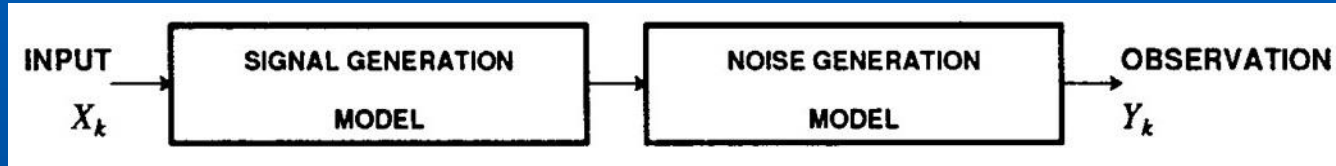
Detección:

- Los diseños con *sentido común* anteriores son óptimos?
- Veremos criterios de optimización del diseño transmisor – receptor.
- La metodología es obtener receptores óptimos modelando estadísticamente la relación entre las señales transmitidas y recibidas.
- Para señales continuas se denomina *estimación* (comunicaciones analógicas: recuperación solo aproximada), aquí consideramos señales discretas, *detección* (comunicaciones digitales: regeneración casi exacta).

Consideraremos el caso más simple inicialmente (símbolo real aislado) y progresivamente introduciremos contextos más realistas (símbolos complejos, ISI).

Detección: modelo básico

- El problema de detección de la señal recibida requiere un modelo estadístico:
 - Modelo de *generación de la señal*: determinístico (darle formato, filtrado).
 - Modelo de *generación del ruido* (estocástico).



Ejemplo: Si X_k es una secuencia de símbolos, entonces, el *generador de señal* puede ser un filtro de transmisión discreto equivalente, y el generador de ruido AWGN, independiente de X_k .

Ejemplo: Si X_k es una secuencia de bits, el *generador de señal* puede ser un codificador que produce otra secuencia de bits, y el generador de ruido puede modelarse como un *canal binario simétrico* (BSC).

Para realizar una decisión sobre X_k con la observación Y_k , dos métodos:

- Maximum a posteriori* (MAP ó Bayes)
- Maximum Likelihood* (ML): caso especial de MAP para entradas equiprobables.

Detección de un símbolo (real) aislado

Observaciones discretas

La salida Y del modelo general de ruido puede ser discreta. La entrada es una única variable aleatoria (v.a.) X (o símbolo A del alfabeto Ω_A).

MAP selecciona \hat{a} tal que maximice

$$p_{A|Y}(\hat{a}|y) = \frac{p_{Y|A}(y|\hat{a})p_A(\hat{a})}{p_Y(y)}$$

Y también minimiza en general la probabilidad de error de detección:

$$P_e = Pr[\hat{a} \neq a]$$

Por otro lado, **ML** selecciona \hat{a} tal que maximice $p_{Y|A}(y|\hat{a})$ (no requiere la distribución de los símbolos).

Detección de símbolo (real) aislado ...

Observaciones discretas

Ejemplo: Para el modelo de ruido aditivo discreto $Y = A + N$ donde A y N toman valores 0 o 1 y se obtienen por lanzamiento de una moneda. i.e. $y = 0, 1$, or 2

$$p_{Y|A}(0|0) = 0.5, p_{Y|A}(0|1) = 0, \rightarrow \hat{a} = 0.$$

Detección ML $p_{Y|A}(1|0) = p_{Y|A}(1|1) = 0.5, \rightarrow \hat{a} = 0 \text{ o } 1.$

$$p_{Y|A}(2|0) = 0, p_{Y|A}(2|1) = 0.5, \rightarrow \hat{a} = 1.$$

Como $p_A(\hat{a}) = 0.5$ para cada \hat{a} posible, entonces MAP y ML son equivalentes.

Detección de símbolo (real) aislado ...

Observaciones discretas

Ejemplo: Para el modelo de ruido aditivo discreto $Y = A + N$ donde N se obtiene por lanzamiento de una moneda, pero ahora $p_A(0) = 0.75$, $p_A(1) = 0.25$

Detección ML

$$\begin{aligned}p_{Y|A}(0|0) &= 0.5, p_{Y|A}(0|1) = 0, \rightarrow \hat{a} = 0. \\p_{Y|A}(1|0) &= p_{Y|A}(1|1) = 0.5, \rightarrow \hat{a} = 0 \circ 1. \\p_{Y|A}(2|0) &= 0, p_{Y|A}(2|1) = 0.5, \rightarrow \hat{a} = 1.\end{aligned}$$

Para MAP, si $y = 0 \circ y = 2$, equivalente a ML. Reescribiendo para $y = 1$

$$p_{Y|A}(1|\hat{a}) = \begin{cases} 0.5; & \text{si } \hat{a} = 1 \\ 0.5; & \text{si } \hat{a} = 0 \end{cases}$$

Se tiene

$$p_{A|Y}(\hat{a}|1) = \begin{cases} 0.5 \times 0.25 / 0.5 = 0.25; & \text{si } \hat{a} = 1 \\ 0.5 \times 0.75 / 0.5 = 0.75; & \text{si } \hat{a} = 0 \end{cases} \rightarrow \hat{a} = 0$$

Detección de símbolo (real) aislado ...

Observaciones discretas

Ejemplo: Probabilidad de error

Si $y = 0$ o $y = 2$, no existe error tanto para ML como para MAP.

Si $y = 1$,

ML comete errores con probabilidad 0.5, con $p_Y(1) = 0.5$, tal que la probabilidad de error es: 0.25.

MAP comete errores con probabilidad 0.25, con $p_Y(1) = 0.5$, tal que la probabilidad de error es 0.125.

Detección de símbolo (real) aislado ...

Observaciones discretas

Para mostrar que el detector MAP minimiza la probabilidad de error, la probabilidad de decisión correcta es:

$$\Pr[\text{decision correcta}] = \sum_{y \in \Omega_Y} \Pr[\text{decision correcta} / Y=y] p_Y(y)$$

Como $p_Y(y) \geq 0$, la probabilidad de una decisión correcta se maximiza si, para cada observación, y maximiza $\Pr[\text{decision correcta} / Y=y]$.

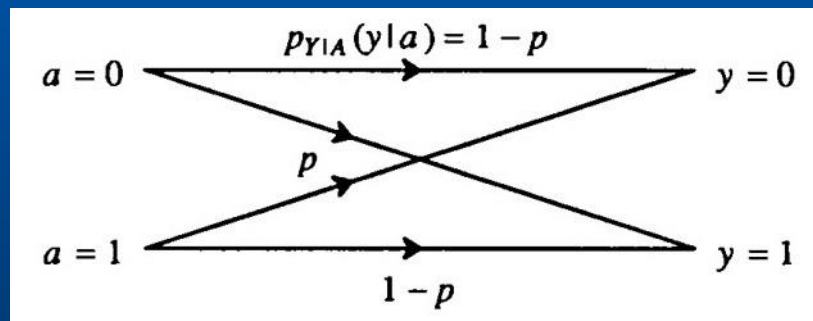
Esto es justamente lo que hace el detector MAP ya que la probabilidad de una decisión correcta es

$$\Pr[\text{decision correcta} / Y=y] = p_{A/Y}(\hat{a}/y)$$

Detección de símbolo (real) aislado ...

Observaciones discretas

El modelo mas simple de generación de ruido que brinda observaciones discretas es el *canal binario simétrico* (BSC) y está caracterizado por p , la probabilidad de error (crossover).



Probabilidades de transición para el canal binario simétrico.

Detección de símbolo (real) aislado ...

Observaciones continuas

El modelo de generación de ruido N tiene valores de ruido aditivo continuo de forma que las observaciones son continuas.

MAP, \hat{a} tal que maximice
$$p_{A|Y}(\hat{a}|y) = \frac{f_{Y|A}(y|\hat{a})p_A(\hat{a})}{f_Y(y)}$$

ML, \hat{a} tal que maximice
$$f_{Y|A}(y|\hat{a})$$

Detección de símbolo (real) aislado ...

Observaciones continuas

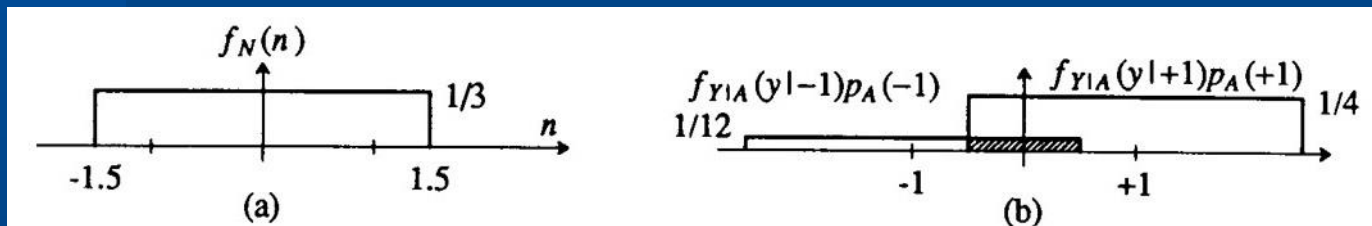
Ejemplo: Supongamos que A toma valores ± 1 de acuerdo a una moneda “cargada” tal que $p_A(+1) = 0.75$ y $p_A(-1) = 0.25$.

Se define $Y = A + N$ con la pdf de N continua.

En base al detector MAP, si $A = +1$ no existe error.

Ocurren errores 1/3 de las veces cuando $A = -1$ ($y > -0.5$).

Entonces $P_e = p_A(-1)/3 = 1/12$



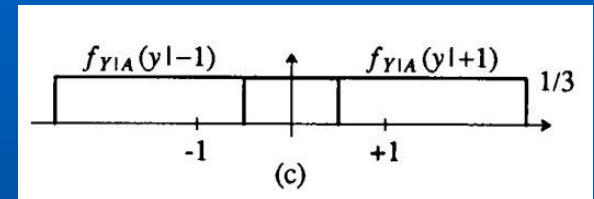
a) pdf de ruido uniformemente distribuido; b) para $\hat{a} = \pm 1$, se ilustra el criterio MAP $f_{Y/A}(y/\hat{a})p_A(\hat{a})$. Este detector decidirá por $\hat{a} = +1$ para cualquier observación $y > -0.5$.

Detección de símbolo (real) aislado ...

Observaciones continuas

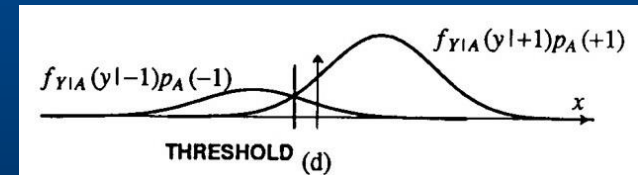
Ejemplo: Suponiendo el mismo contexto anterior. Para el criterio ML, las funciones son iguales en $-0.5 < y < +0.5$.

Para el umbral en el origen, se produce un error $1/6$ para cada símbolo posible. Entonces $P_e = 1/6$



Ejemplo: El mismo ejemplo anterior pero ahora con ruido Gaussiano aditivo. Para MAP umbral está asociado a la intersección de las curvas. Para ML está en cero.

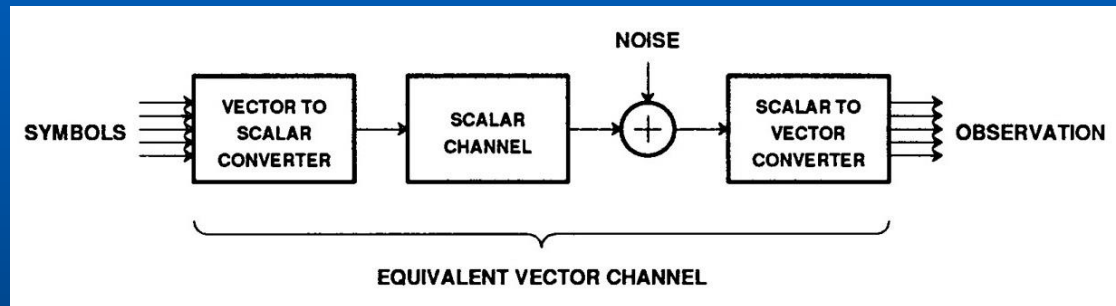
Este modelo de generación de ruido será el más utilizado más adelante.



Detección de un vector señal

El generador de señal acepta una entrada X y la mapea en un vector de señal \mathbf{S} de dimensión M . La observación es un vector \mathbf{Y} . El ruido queda especificado por (si las componentes son independientes)

$$f_{\mathbf{Y}|\mathbf{S}}(y|\mathbf{s}) = \prod_{k=1}^M f_{Y_k|S_k}(y_k|s_k)$$



Ejemplo: Una señal vectorial consistente en un conjunto conocido de señales en ruido aditivo sigue este modelo. El receptor de distancia mínima se podía usar en ese caso.

Ejemplo: Una señal vectorial (bloque) con elementos binarios como entrada a un canal binario simétrico (BSC) es un bloque de código binario.

Detección de un vector señal ...

Detección ML: Se elige \hat{s} entre $S = [s_1, \dots, s_M]$ tal que maximice $f_{Y|S}(y|\hat{s})$. Es simple porque no se necesita tener en cuenta la estadística de S .

Ejemplo 1: Para el caso de AWGN $\mathbf{Y} = \mathbf{S} + \mathbf{Z}$, donde el vector complejo \mathbf{Z} se supone circularmente simétrico con componentes no correlacionadas (i.e. independientes) de varianza $2\sigma^2$. \mathbf{Y} tiene pdf

$$f_{Y|S}(y|\hat{s}) = f_{Z|S}(y - \hat{s}|\hat{s}) = f_Z(y - \hat{s})$$

con $f_Z(z) = \prod_{k=1}^K f_{Z_k}(z_k)$

Para una v.a. Gaussiana compleja con partes real e imaginaria independientes se tiene que

$$f_{Z_k}(z_k) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-|z_k|^2/2\sigma^2}$$

Entonces:

$$f_Z(z) = \frac{1}{(2\pi)^K \sigma^{2K}} e^{-\|z\|^2/2\sigma^2}$$

Como maximizar $f_Z(z)$ es equivalente a minimizar $\|z\|^2 = \|\mathbf{y} - \hat{s}\|^2$, el detector ML es equivalente a un detector de distancia mínima.

Detección de un vector señal ...

Ejemplo 2: Para un BSC con componentes de ruido independientes, las componentes del vector señal (de dimensión M) son binarias. La pdf es

$$p_{Y_k|S_k}(y|\hat{s}) = \begin{cases} p, & y \neq \hat{s} \\ 1 - p, & y = \hat{s} \end{cases}$$

Si $d_H(\hat{s}, \mathbf{y})$ (distancia de Hamming) es el número de componentes en el que difieren \hat{s} e \mathbf{y} , entonces

$$p_{\mathbf{Y}|\mathbf{S}}(\mathbf{y}, \hat{s}) = p^{d_H(\hat{s}, \mathbf{y})} (1 - p)^{M - d_H(\hat{s}, \mathbf{y})} = (1 - p)^M \left(\frac{p}{1 - p} \right)^{d_H(\hat{s}, \mathbf{y})}$$

Para $p < 1/2$ el detector ML selecciona \hat{s} para minimizar $d_H(\hat{s}, \mathbf{y})$.

Detección de un vector señal ...

Detección ML:

Los dos modelos de generación de ruido con componentes de ruido independientes, el ruido aditivo Gaussiano (AWGN) y el BSC, resultan en un detector ML similar:

Seleccionar el vector señal que está más próximo al vector observación.

La única diferencia entre los dos casos es la forma en que se define “**distancia**”:

- Euclidiana en el caso de AWGN
- Hamming en el caso BSC

En ambos casos el espacio de observaciones Ω_Y se divide en regiones de decisión: conducen a decidir $\hat{s} = s_i$

Detección de un vector señal ...

Detector MAP: Es considerablemente mas complicado que el ML y requiere el conocimiento de la varianza del ruido (para el modelo AWGN) o la probabilidad de error (para BSC). Además se requiere $p_S(\hat{s})$.

Dada la observación \mathbf{y} , el detector MAP selecciona $\hat{\mathbf{s}}$ tal que maximice

$$p_{S|Y}(\hat{s}|\mathbf{y}) = \frac{p_{Y|S}(\mathbf{y}|\hat{s})p_S(\hat{s})}{f_Y(\mathbf{y})}$$

Ejemplo: Para el caso de AWGN, el detector MAP maximiza

$$f_Z(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{s}})p_S(\hat{s}) = \frac{1}{(2\pi)^M \sigma^{2M}} e^{\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{s}}\|^2\right)} p_S(\hat{s})$$

Equivalente a minimizar

$$\|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{s}}\|^2 - 2\sigma^2 \ln(p_S(\hat{s}))$$

Detección de un vector señal ...

Probabilidad de error para BSC con detector ML

Para el caso de dos señales s_i, s_j a distancia (de Hamming) d , suponemos s_i transmitida por un BSC.

El detector ML elige s_j en lugar de s_i si los bits recibidos en y determinan menor d . Cualquier error que afecte una componente donde las señales son iguales no impactará en d .

Suponemos (peor caso) un error de detección se produce siempre que los bits de y están equidistantes de las dos señales. Entonces, un error de detección ocurre si existen más de t errores en los d bits en que difieren las señales, o sea

$$t = \begin{cases} (d-1)/2; & d \text{ impar} \\ (d/2) - 1; & d \text{ par} \end{cases}$$

Como el número de errores en d es binomial $Q(d, p) = \sum_{i=t+1}^d \binom{d}{i} p^i (1-p)^{d-i}$

Para tres o mas señales, es posible usar la Cota de Unión para obtener $P_e \cong CQ(d_{\min}, p)$

Detección de un vector señal ...

Probabilidad de error para BSC con detector ML

Ejemplo:

Supongamos $s_i = [000000]$ y $s_j = [110111]$. La distancia de Hamming es $d=5$.

Transmitiendo s_i por un canal BSC con probabilidad de error p , el detector ML cometerá un error en s_j si 3 o más de los bits recibidos en 5 posiciones diferentes han sido cambiados por el canal.

La probabilidad de que esto ocurra es

$$\begin{aligned} Q(5, p) &= \binom{5}{3} p^3 (1-p)^2 + \binom{5}{4} p^4 (1-p) + \binom{5}{5} p^5 \\ &= 10p^3(1-p)^2 + 5p^4(1-p) + p^5 \end{aligned}$$

Detección (resumen)

- **Detección de un único símbolo.**
- **Detección de un vector señal.**
- Detección de señales continuas en ruido Gaussiano.
- Detección no coherente óptima.
- Detección óptima de PAM con ISI.
- Detector de secuencias: Algoritmo de Viterbi.