Procesamiento de Señales en Comunicaciones

Departamento de Ingeniería Eléctrica y Computadoras
Universidad Nacional del Sur

Contenidos

- Modulación.
- Diseño de Distancia Mínima.
- Desempeño en ruido.
- Detección.
- Ecualización óptima.
- Ecualización adaptativa.
- Modulación de portadoras múltiples

Ecualización Adaptativa

- Ecualizadores de complejidad reducida.
- Ecualizador lineal adaptativo.
- DFE adaptativo.
- Ecualizador de espaciamiento fraccionario.
- Ecualización pasabanda.

Ecualización en procesamiento adaptativo de señales

En un contexto práctico el problema de distorsión de la señal recibida requiere considerar múltiples factores:

- El formato del pulso difícilmente sea conocido exactamente a priori en el receptor.
- Los esquemas vistos (LE, WMF, DFE) utilizan filtros IIR cuya realización puede requerir complejidad considerable.
- El diseño y las optimizaciones realizadas consideraron solo aspectos muy directos, dejando de lado otros como: manejo del rango dinámico de la señal, corrección del sincronismo (offset) de tiempo y/o frecuencia, etc.
- Varios de los canales más populares (el inalámbrico, por ejemplo), no solo no es conocido a priori en el receptor sino que varía en el tiempo.

Procesamiento adaptativo de señales

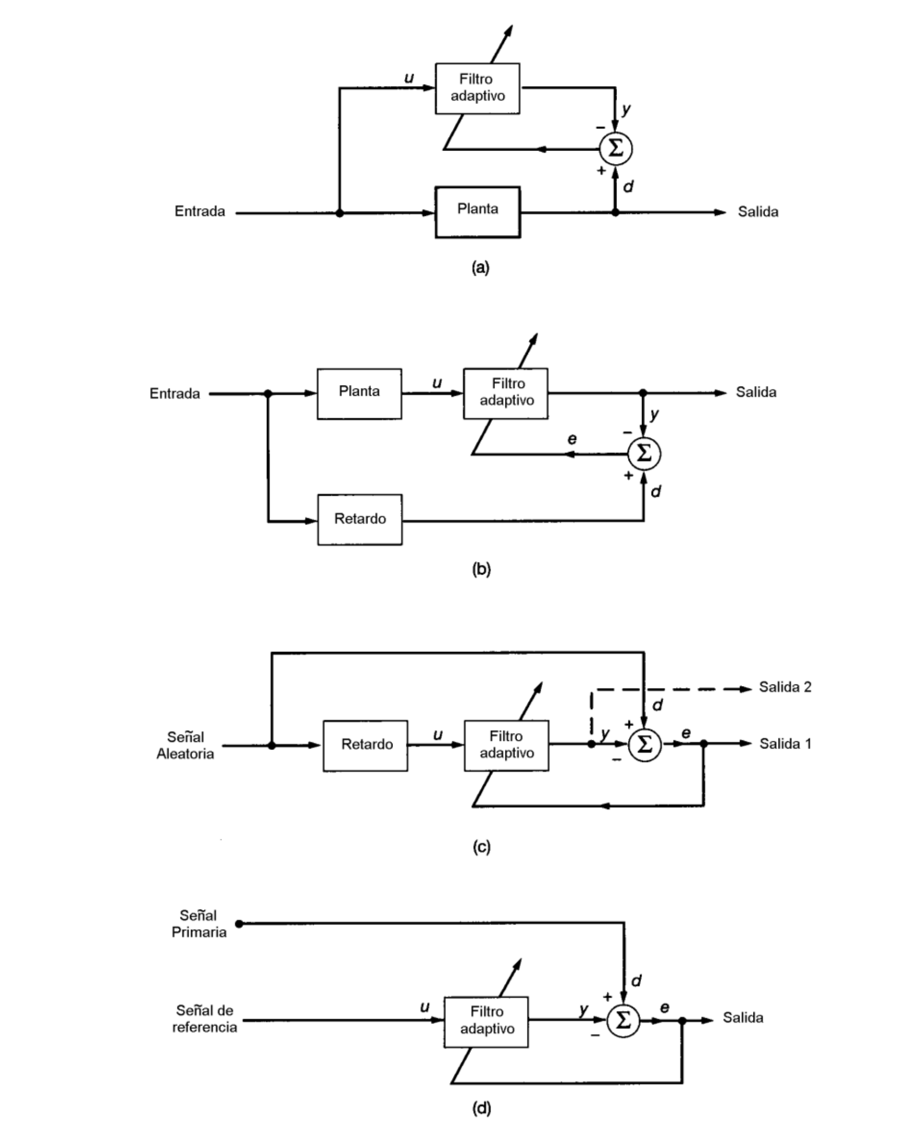
Contextos generales (y de comunicaciones) donde se utiliza:

a) Identificación de sistemas (estimación de canal en OFDM usando señal de entrenamiento).

b) Filtrado inverso (**ecualización**, predistorsión en amplificadores no lineales).

c) Predicción (blanqueo de señales, reducción de rango dinámico, etc.).

d) Cancelamiento de interferencias (eliminar correlación similar entre señales).



Procesamiento adaptativo de señales

- Modelos de filtrado adaptativo:

Teniendo en cuenta posible variación en el tiempo, son fundamentalmente FIR. Existen casos de uso de modelos IIR (predicción, compresión de rango dinámico) y excepcionalmente IIR Notch (cancelamiento de interferencias de banda estrecha). Existen soluciones SISO y/o MIMO.

- Algoritmos de adaptación:

Basados en criterios de filtrado óptimo FIR (Wiener y/o Kalman), dos familias de algoritmos (según complejidad):

  – Gradiente estocástico (LMS) y sus variantes (complejidad lineal).
  – Cuadrados mínimos recursivo (RLS) y sus variantes (complejidad cuadrática).

Existen soluciones específicas de complejidad intermedia.

Ecualización adaptativa

- Suponemos ahora que el *canal es desconocido*, tal que el filtro de recepción no es en general un MF (en bandabase, solo un pasabajos para eliminar ruido).

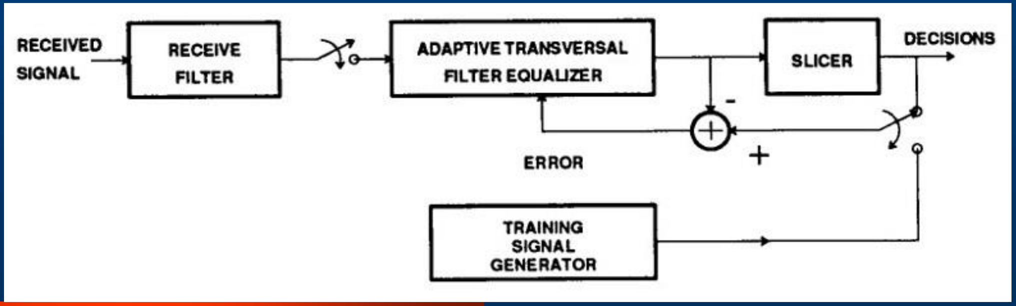
- El ecualizador es un filtro transversal (FIR).

- El objetivo es ajustar los coeficientes del ecualizador para minimizar un compromiso (MSE) entre ruido e ISI a la entrada del elemento de decisión.

- Dos modos de funcionamiento:

  Modo de entrenamiento (transitorio inicial, existen ruido e ISI).

  Modo controlado por decisiones (después de convergencia o en estado estacionario, solo existe ruido).



Ecualizadores de complejidad reducida

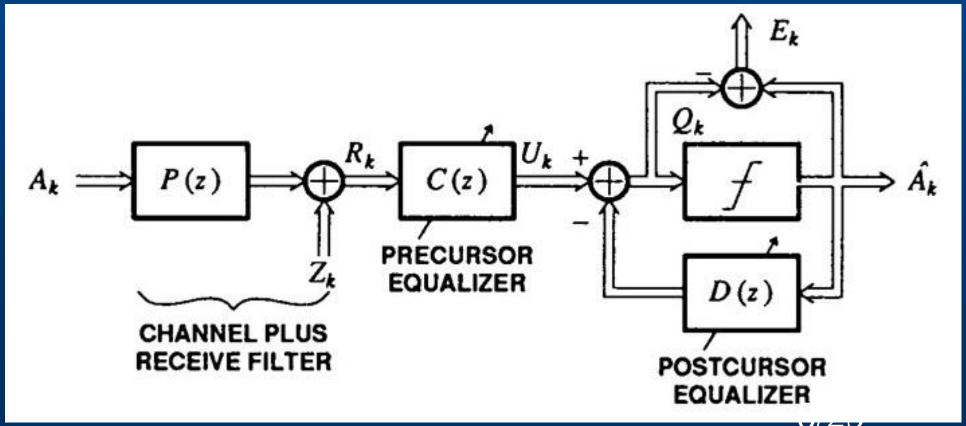
Definimos una estructura de filtro con grados finitos de libertad y complejidad reducida (FIR). Luego se analiza un esquema de optimización de los coeficientes (MSE mínimo).

Ecualizador lineal (LE) $$C(z) = \sum_{m=-L}^{L} c_m z^{-m}$$ (causal con un retardo)

Ecualizador con realimentación de decisión (DFE)

$$C(z) = \sum_{m=-(N-1)}^{0} c_m z^{-m} \qquad D(z) = \sum_{m=1}^{M} d_m z^{-m}$$

Ecualizador bandabase, no incluye demodulación previa (si *D(z)=0*, LE, sino DFE).



Ecualizadores de complejidad reducida …

Solución de MSE mínimo.

Para este análisis se supondrá que el canal es conocido (con señal y ruido estacionarios) para obtener el ecualizador óptimo con complejidad reducida que minimice el MSE.

Entonces, comenzando con el LE $\boldsymbol{c}^T = [c_{-L}, \cdots, c_L]$

Las muestras de entrada: $\boldsymbol{r}_k^T = [r_{k+L}, \cdots, r_k, \cdots, r_{k-L}]$

Se trata de minimizar $E[|e_k|^2]$, donde $e_k = A_k - Q_k$ $\quad Q_k = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{r}_k$

Entonces,

$$E[|e_k|^2] = E[|A_k|^2] - 2\mathrm{Re}\{\boldsymbol{c}^H \boldsymbol{\alpha}\} + \boldsymbol{c}^H \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{c}$$

donde

$$\boldsymbol{\alpha} = E[A_k \boldsymbol{r}_k^*], \quad \boldsymbol{\Phi} = E[\boldsymbol{r}^* \boldsymbol{r}_k^T] = \begin{bmatrix} \phi_0 & \phi_{-1} & \cdots & \phi_{-(N-1)} \\ \phi_1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \phi_{N-1} & \cdots & \cdots & \phi_0 \end{bmatrix}, \qquad \phi_j = E[r_{k+j} r_k^*]$$

Ecualizadores de complejidad reducida …

Algunas propiedades de la matriz autocorrelación $\mathbf{\Phi}$:

- Es una matriz Hermitiana, i.e., $\mathbf{\Phi}^H = \mathbf{\Phi}$
- Es una matriz Toeplitz, i.e., el elemento *(i,j)* es función de *(i-j)*.
- Es una matriz positiva semidefinida, i.e., la forma $\boldsymbol{x}^H \mathbf{\Phi} \boldsymbol{x}$ es real y no negativa para cualquier vector $\boldsymbol{x}$.

Se asumirá que $\mathbf{\Phi}$ es no singular.

Ejemplo:

Para símbolos A_k de media 0, no correlacionados y con varianza σ_a^2 y el canal tiene respuesta impulsiva p_k , la autocorrelación del modelo de canal será:

$$\phi_j = \sigma_a^2 \sum_k p_{k+j} p_k^* + 2N_0 \rho_f(j)$$

donde $\rho_f(j)$ es la autocorrelación asociada a la respuesta impulsiva del filtro de recepción $f(t)$.

Ecualizadores de complejidad reducida …

Completando cuadrados en la expresión del MSE

$$E[|e_k|^2] = E[|A_k|^2] - \boldsymbol{\alpha}^H \boldsymbol{\Phi}^{-1} \boldsymbol{\alpha} + (\boldsymbol{\Phi}^{-1}\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{c})^H \boldsymbol{\Phi} (\boldsymbol{\Phi}^{-1}\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{c})$$

De forma que el mínimo se obtiene para

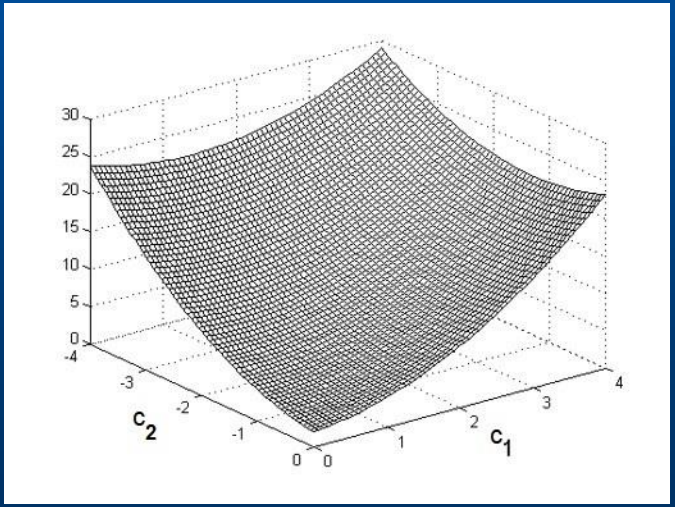
$$\boldsymbol{c}_{opt} = \boldsymbol{\Phi}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$$

Y tendrá el valor

$$\xi_{\text{min}} = E[|A_k|^2] - \boldsymbol{\alpha}^H \boldsymbol{\Phi}^{-1} \boldsymbol{\alpha}$$

Entonces, el MSE se puede escribir

$$E[|e_k|^2] = \xi_{\text{min}} + (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{c}_{opt})^H \boldsymbol{\Phi} (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{c}_{opt})$$



Ecualizadores de complejidad redecida ...

Otra forma de obtener el mínimo es derivando la expresión del MSE (es necesario tener en cuenta la existencia de las derivadas del MSE como una función real de dos vectores, la parte real e imaginaria de $\boldsymbol{c}$).

Entonces, como

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}_R + j\boldsymbol{c}_I, \quad \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_R + j\boldsymbol{\alpha}_I, \quad \boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}_R + j\boldsymbol{\Phi}_I$$

Se puede verificar que

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{c}} E[|e_k|^2] = \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{c}_R + j\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{c}_I = 2\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{c} - 2\boldsymbol{\alpha} = 0$$

Principio de ortogonalidad (idea de cuando se llega a la solución)

$$\begin{aligned} E[e_k \boldsymbol{r}_k^*] &= E[(A_k - \boldsymbol{c}_{opt}^T \boldsymbol{r}_k)\boldsymbol{r}_k^*] = E[A_k \boldsymbol{r}_k^* - \boldsymbol{r}_k^* \boldsymbol{r}_k^T \boldsymbol{c}_{opt}] \\ &= \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{c}_{opt} = 0 \end{aligned}$$

Ecualizadores de complejidad reducida …

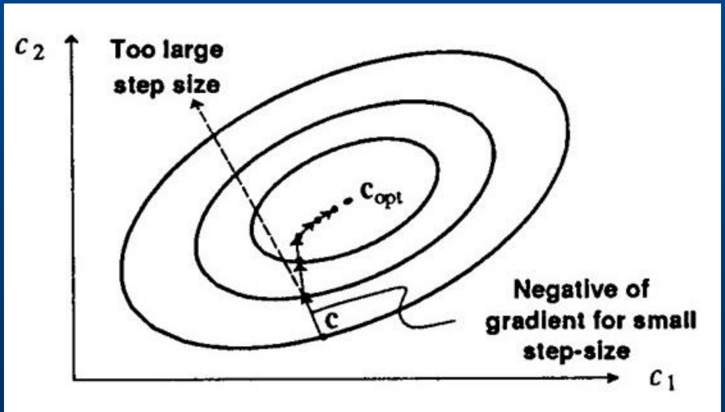
Algoritmo Steepest Descent SD (gradiente del MSE).

Una forma *recursiva* de resolver el sistema de ecuaciones para el MSE óptimo.

En términos del espacio de coeficientes, el MSE es una función cuadrática con un único mínimo. Entonces el algoritmo SD es (agregando un subíndice de iteración al vector de coeficientes, $\boldsymbol{c}_j$).

$$\boldsymbol{c}_{j+1} = \boldsymbol{c}_j - \frac{\beta}{2} \nabla_{\boldsymbol{c}_j} E[|e_k|^2]$$

Contornos de nivel de igual MSE y una ilustración de la convergencia del algoritmo SD(cuya velocidad depende de la constante β).



Ecualizadores de complejidad reducida …

Convergencia del SD.

A partir del gradiente

$$\boldsymbol{c}_{j+1} = \boldsymbol{c}_j + \beta(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{c}_j) = (\boldsymbol{I} - \beta\boldsymbol{\Phi})\boldsymbol{c}_j + \beta\boldsymbol{\alpha}$$

Restando $\boldsymbol{c}_{opt}$ de esta y con $\boldsymbol{q}_j = \boldsymbol{c}_j - \boldsymbol{\Phi}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$

El comportamiento de esta ecuación depende de los autovalores de la matriz $\boldsymbol{\Phi}$

$$\boldsymbol{q}_{j+1} = (\boldsymbol{I} - \beta\boldsymbol{\Phi})\boldsymbol{q}_j = (\boldsymbol{I} - \beta\boldsymbol{\Phi})^{j+1}\boldsymbol{q}_0$$

Ejemplo: Con un único coeficiente $c_{opt} = \alpha/\phi_0$, entonces

$$c_{j+1} = (1 - \beta\phi_0)c_j + \beta\alpha$$

tal que restando c_{opt}

$$(c_{j+1} - c_{opt}) = (1 - \beta\phi_0)(c_j - c_{opt}) = (1 - \beta\phi_0)^j(c_0 - c_{opt})$$

que indica que $c_j \to c_{opt}$ siempre que $|1 - \beta\phi_0| < 1$.

Ecualizadores de complejidad reducida …

Propiedades de una matriz $\boldsymbol{A}$ Hermitiana:

- Los autovalores de $\boldsymbol{A}$ son reales.
- Para λ_i, λ_j , dos autovalores distintos de $\boldsymbol{A}$, los autovectores asociados son ortogonales, i.e., $\boldsymbol{v}_i^H \boldsymbol{v}_j = 0$
- Suponiendo todos los autovalores de $\boldsymbol{A}$ distintos y los autovectores normalizados, tal que $\boldsymbol{v}_i^H \boldsymbol{v}_i = 1$. Entonces $\boldsymbol{V}^{-1} = \boldsymbol{V}^H$
- Se verifica la factorización $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{V} \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{V}^H$
- Si $\boldsymbol{A}$ es positiva definida, todos sus autovalores son positivos.

Ecualizadores de complejidad reducida …

En base a las propiedades anteriores $\boldsymbol{\Phi} = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \boldsymbol{v}_i \boldsymbol{v}_i^H$

de forma que

$$(\boldsymbol{I} - \beta\boldsymbol{\Phi})^j = \sum_{i=1}^{N} (1 - \beta\lambda_i)^j \boldsymbol{v}_i \boldsymbol{v}_i^H$$

Y se tendrán *N* modos de convergencia, cuya velocidad de convergencia está gobernada por β .

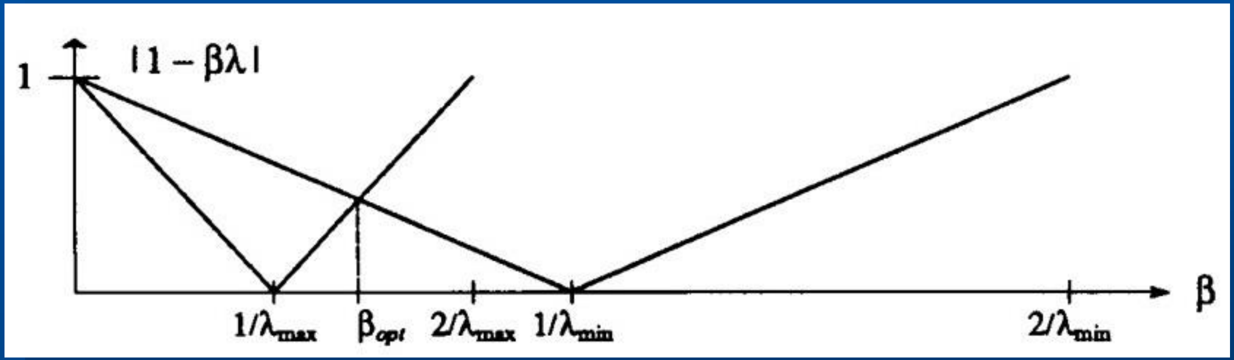
La condición para que $\boldsymbol{q}_j$ converja a cero es que $0 < \beta < \frac{2}{\lambda_{\text{max}}}$

Ecualizadores de complejidad reducida ...

Interesa obtener el β para obtener la mas rápida velocidad de convergencia del vector de coeficientes del algoritmo SD.

Se puede verificar que

$$\beta_{opt} = \frac{2}{\lambda_{min} + \lambda_{max}}$$

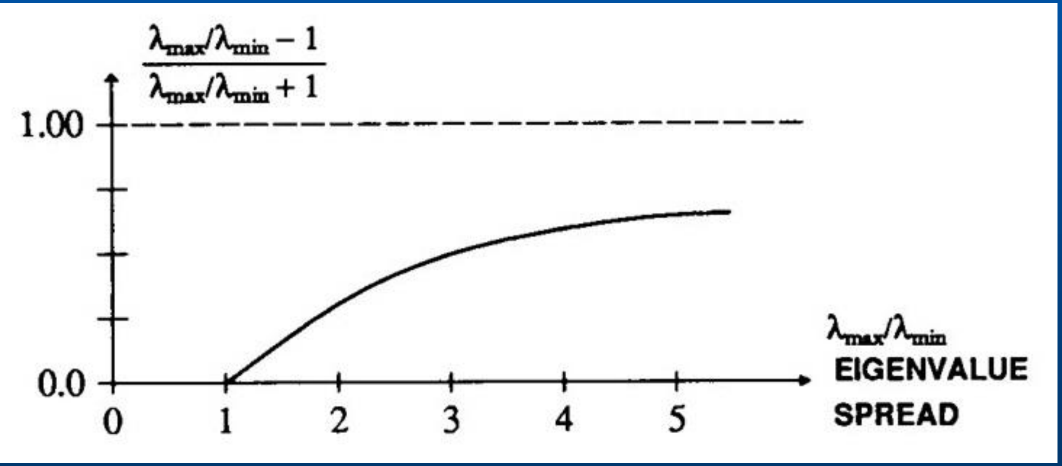


Elección del tamaño del paso para la más rápida convergencia del vector de coeficientes del algoritmo de SD.

Ecualizadores de complejidad reducida ...

Para esa velocidad de convergencia del vector de coeficientes, los modos de los autovalores máximo y mínimo convergen a igual velocidad, proporcional a

$$\left(\frac{\lambda_{\max}/\lambda_{\min}-1}{\lambda_{\max}/\lambda_{\min}+1}\right)^{j}$$



Relación entre la mayor velocidad de convergencia del vector de coeficientes y la dispersión de autovalores.

Ecualizadores de complejidad reducida …

Por otro lado, en base a los autovalores λ_i y sus correspondientes autovectores $\boldsymbol{v}_i$, se tiene

$$E[|E_k|^2] - \xi_{\text{min}} = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i |(\boldsymbol{c}_k - \boldsymbol{c}_{opt})^H \boldsymbol{v}_i|^2$$

Es posible analizar el β para optimizar la velocidad de convergencia del MSE (en lugar del vector de parámetros).

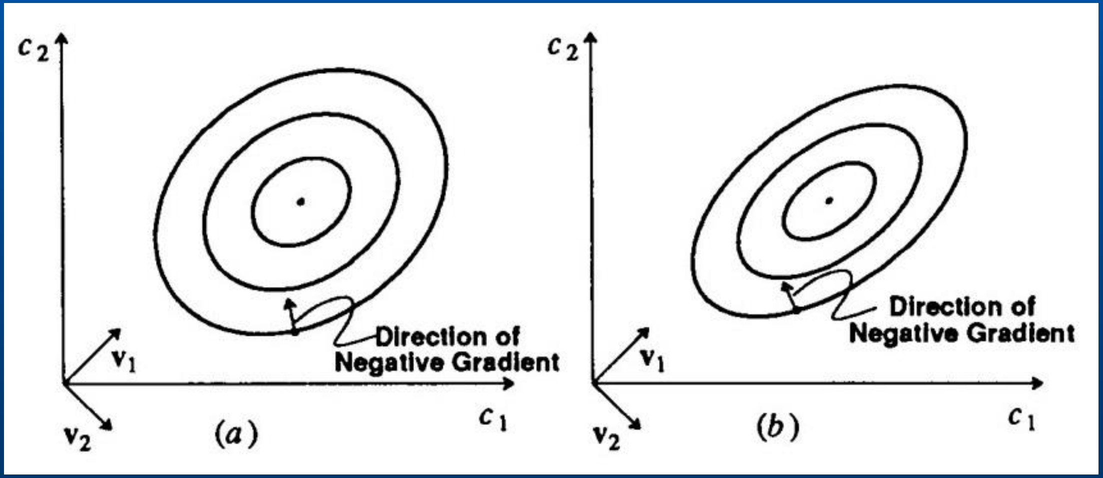
En ese caso, y teniendo en cuenta que también depende de las condiciones iniciales, un valor razonable es

$$\beta = 1/\lambda_{\text{max}}$$

Ecualizadores de complejidad reducida ...

La dispersión de autovalores determina completamente el comportamiento del algoritmo.

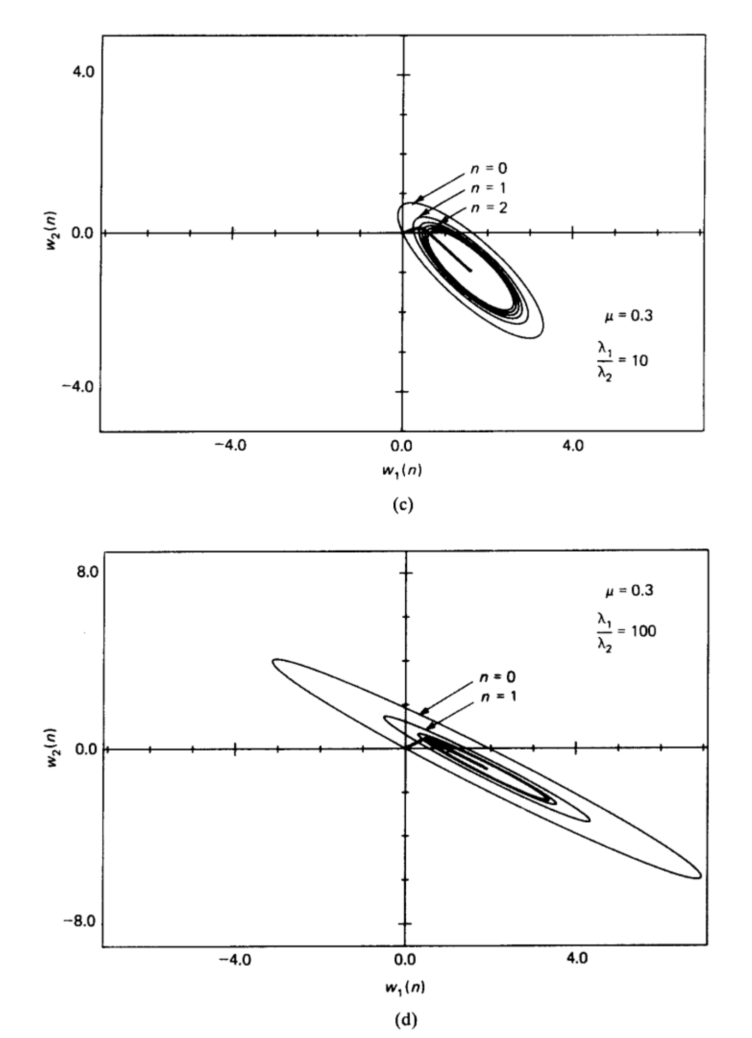
El comportamiento en convergencia en función del modo correspondiente, puede ser subamortiguado, crítico o sobreamortiguado, dependiendo del valor de β elegido.



Efecto de la dispersión de autovalores sobre la convergencia;
a) Dispersión baja; b) Dispersión alta.

Ecualizadores de complejidad reducida ...

Ejemplo de convergencia del algoritmo SD

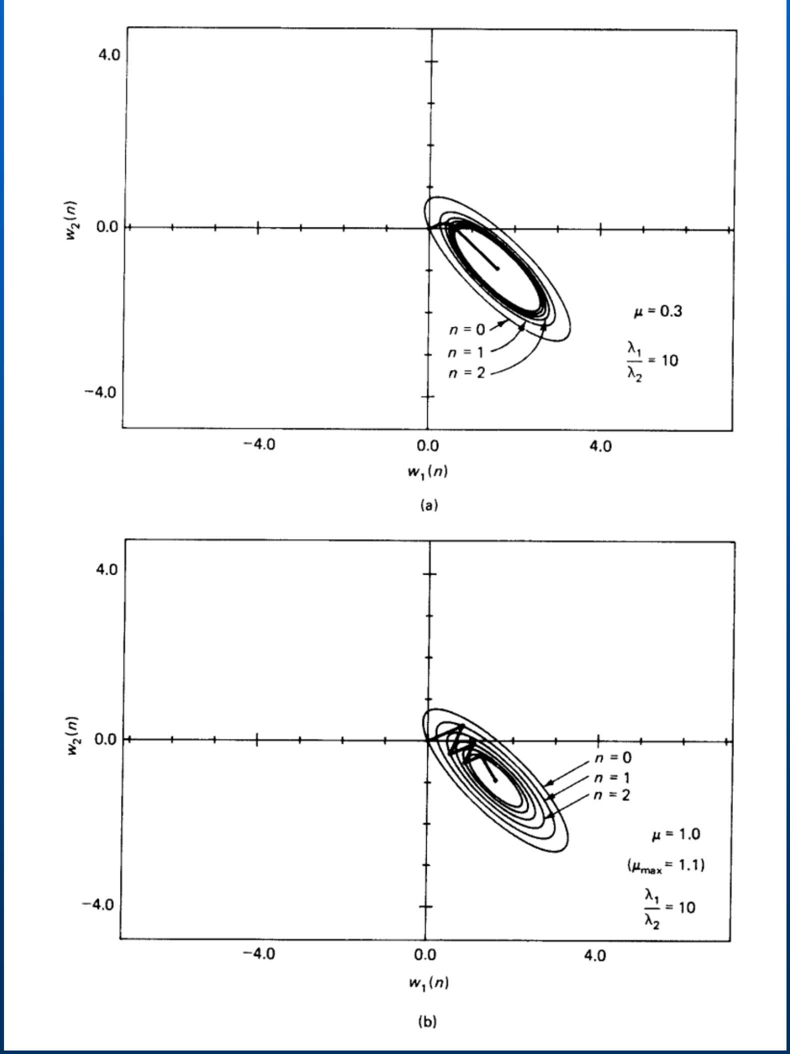


Contornos de nivel de igual MSE y una ilustración de la convergencia del algoritmo SD para diferentes dispersiones de autovalores.

Ecualizadores de complejidad reducida ...

Ejemplo de convergencia del algoritmo SD

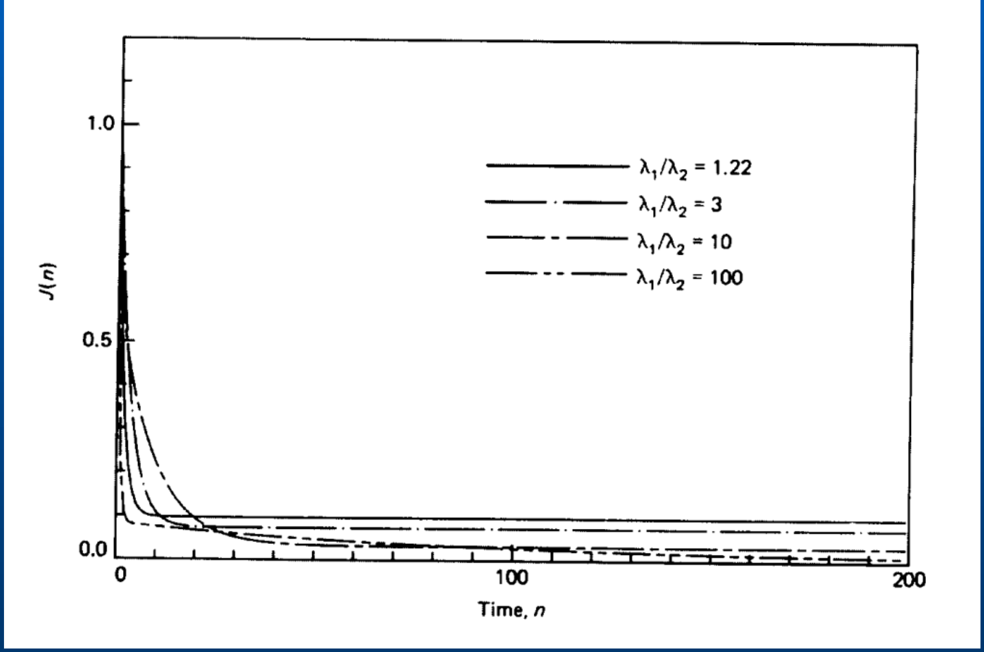
Contornos de nivel de igual MSE y una ilustración de la convergencia del algoritmo SD para diferentes β .



Ecualizadores de complejidad reducida ...

Ejemplo de convergencia del algoritmo SD

Curvas de aprendizaje (valor del MSE por iteración) como ilustración de la convergencia del algoritmo SD para diferentes valores de dispersión de autovalores.



Ecualizadores de complejidad reducida ...

Es interesante relacionar la dispersión de autovalores con la DEP correspondiente

$$S(e^{jw}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi_k e^{jwk}$$

Los autovalores de la matriz $\mathbf{\Phi}$ (Toeplitz) satisfacen

$$\min_w S(e^{jw}) < \lambda_i < \max_w S(e^{jw})$$

donde el índice de los autovalores depende del orden de $\mathbf{\Phi}$ (*N*), tal que para $N \rightarrow \infty$

$$\lambda_{\text{max}} \rightarrow \max_w S(e^{jw}), \quad \lambda_{\text{min}} \rightarrow \min_w S(e^{jw})$$

Entonces, la convergencia será lenta para DEP donde la diferencia entre los valores extremos sea grande.

Ecualización Adaptativa (resumen)

- Ecualizadores de complejidad reducida.
- Ecualizador lineal adaptativo.
- DFE adaptativo.
- Ecualizador de espaciamiento fraccionario.
- Ecualización pasabanda.