# Procesamiento de Señales en Comunicaciones

Departamento de Ingeniería Eléctrica y Computadoras
Universidad Nacional del Sur

# Contenidos

- Modulación.
- Diseño de distancia Mínima.
- Desempeño en ruido.
- Detección.
- Ecualización óptima.
- Ecualización adaptativa.
- Modulación de portadoras múltiples

# Diseño de distancia mínima.

- Espacio de señales.
- Modelado de señales
- Diseño en base a distancia mínima.
- Aplicación a diferentes modulaciones
  - Pulsos aislados
  - Con ISI.
- Ancho de banda y dimensionalidad.

# Diseño de distancia mínima para PAM con ISI

En este caso consideramos
$$y(t) = \sum_{k=1}^{K} a_k h(t - kT) + e(t)$$

donde *h(t)* es el pulso recibido (no satisface necesariamente Nyquist), con energía $\sigma_h^2$ y *e(t)* es ruido.

Ahora consideramos secuencias de símbolos de longitud *K*, $\{a_k,\ 1 \leq k \leq K\}$ en lugar de símbolos aislados.

Si cada símbolo es de un alfabeto de tamaño $M$, el tamaño (posibles combinaciones) de las señales será
$$L = M^K$$

La base ortogonal no es útil en este caso.

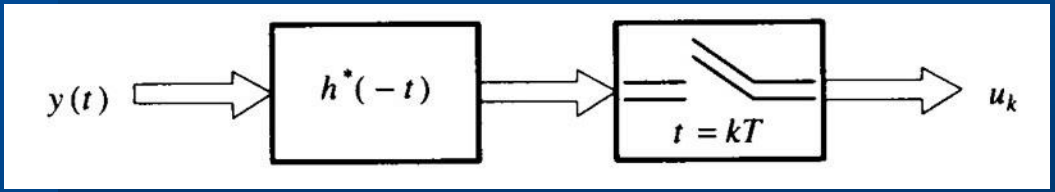
# Diseño del receptor

Utilizando el criterio de distancia mínima, se obtiene

$$\max_{\{a_k, 1\leq k\leq K\}} \left( 2Re\{\sum_{k=1}^{K} u_k a_k^*\} - \sum_{k=1}^{K}\sum_{m=1}^{K} a_k a_m^* \rho_h(m-k) \right)$$

donde

$$u_k = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) h^*(t-kT)dt$$




$$y(t) \rightarrow u_k$$

Front-end del receptor de MF muestreado. Permite el mapeo de un criterio continuo a un criterio discreto.

# Diseño del receptor

Algunas observaciones:

- Maximizar la anterior requiere repetir el cálculo para todas las posibles $M^K$ secuencias, tal que *se detectan K símbolos simultáneamente* (no símbolo por símbolo como antes).
- Este criterio (distancia mínima) define un filtro que *no satisface Nyquist* para eliminar ISI. Compensa ISI de una forma totalmente diferente.
- Como para Nyquist el ancho de banda de señal $B \geq 1/2T$, entonces en general no se verifica el Teorema de muestreo ( $f_s \geq 2B$) y se tendrá *aliasing*.
- Problemas prácticos: *alta complejidad* (implementación crece exponencialmente con *K*).

## PAM con ISI: Criterio discreto equivalente

- Una propiedad del espectro desdoblado (folded spectrum) será de utilidad para obtener una estructura básica para el receptor de distancia mínima en el caso de considerar ISI.

- Consideramos primero un caso particular donde no existe ISI y luego el caso general.

# PAM con ISI: Criterio discreto equivalente...

## Caso especial: pulsos ortogonales

Se cumple Nyquist, i.e. $\rho_h(k) = \sigma_h^2 \delta_k^2$ , entonces

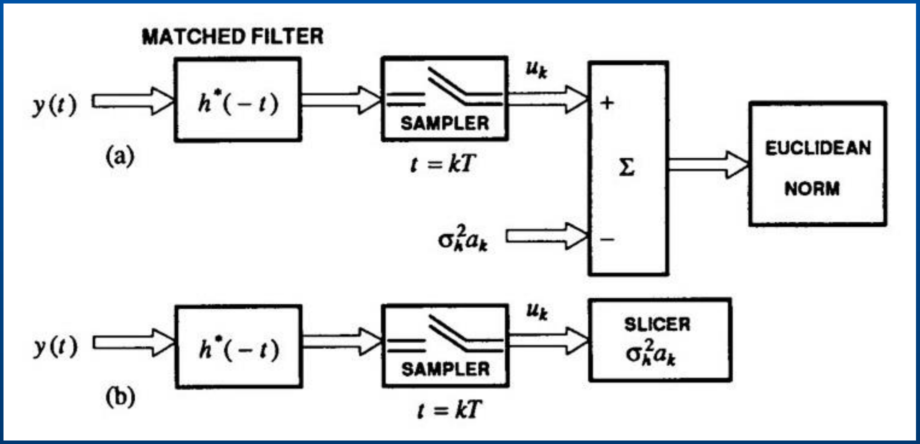
$$\max_{\{a_k, 1\le k\le K\}} \left( 2Re\{\sum_{k=1}^{K} u_k a_k^*\} - \sigma_h^2 \sum_{k=1}^{K} |a_k|^2 \right) = \min_{\{a_k, 1\le k\le K\}} \sum_{k=1}^{K} |u_k - \sigma_h^2 a_k|^2$$

tal que a la salida del MF muestreado es

$$u_k = \sigma_h^2 a_k + e_k$$

sin ISI.

Si la norma se toma símbolo por símbolo, el receptor se simplifica considerablemente (fig. b).




Receptor de PAM de distancia mínima cuando PAM satisface el criterio de Nyquist.; a) el receptor se aplica a cada conjunto de secuencias de símbolos; b) el caso especial donde los símbolos se eligen independientemente (detección por símbolo).

# PAM con ISI: Criterio discreto equivalente...

Estructura más general que en el caso de no ISI

Ejemplo:

Para eliminar componente de cc en PAM bandabase uso de señalización Manchester: $a_k = 0$ para bit 0, $|a_k| = 1$ para bit 1, donde el signo de $a_k$ se elige como el opuesto al del último $a_k$ no cero.

Mientras la realización fig. b anterior viola esta regla (podría detectar 2 símbolos positivos o negativos seguidos), la implementación adecuada es la de fig. a.

Caso de redundancia, ya que si bien la secuencia pareciera considerar $3^K$ secuencias, la restricción del código solo considera $2^K$.

# PAM con ISI: Criterio discreto equivalente ...

Caso general:

Cálculo directo impráctico porque:

- La decisión para una única secuencia tiene complejidad $K^2$. Para el caso ortogonal complejidad lineal (veremos que se puede extender al caso general!)
- El número total de secuencias es $M^K$. Solución con Algoritmo de Viterbi (más adelante).

# PAM con ISI: Criterio discreto equivalente ...

Para obtener un diseño de complejidad lineal de la decisión se utilizará la factorización espectral del espectro desdoblado dada por

$$S_h(z) = A_h^2 G_h(z) G_h^*(1/z^*)$$

donde $G_h(z)$ es una función transferencia mónica (término de orden cero unitario) de fase mínima, y $S_h(z)$ es no negativa real sobre el círculo unitario.

En el dominio tiempo, la autocorrelación de los pulsos será

$$\rho_h(k) = A_h^2 (g_{h,k} * g_{h,-k}^*)$$

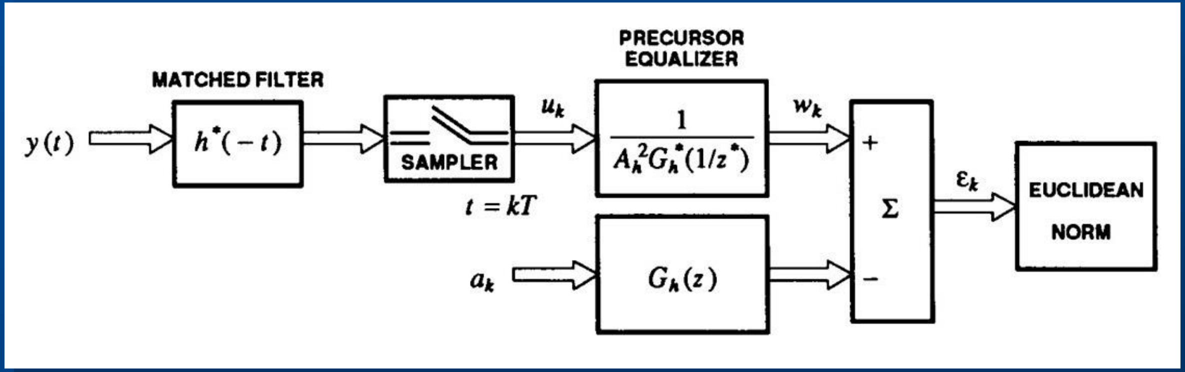
# PAM con ISI: Criterio discreto equivalente ...

Para $u_k$ la salida del MF muestreado, el *ecualizador precursor* es el filtro con esa entrada y función transferencia $\dfrac{1}{A_h^2 G_h^*(1/z^*)}$

cuya salida es $w_k$, tal que el criterio ahora es

$$\max_{\{a_k, 1\leq k\leq K\}} \left( 2Re\{\sum_{k=1}^{K} u_k a_k^*\} - \sum_{k=1}^{K}\sum_{m=1}^{K} a_k a_m^* \rho_h(m-k) \right)$$

$$= \min_{\{a_k, 1\leq k\leq K\}} \sum_{m=1}^{\infty} |w_m - \sum_{k=1}^{K} a_k g_{h,m-k}|^2$$




Extensión del esquema anterior, donde el criterio de distancia mínima continuo muestreado se transforma en un criterio de distancia mínima discreto equivalente.

## PAM con ISI: Criterio discreto equivalente ...

Observaciones:

- Este diseño es posible siempre que exista la factorización espectral del espectro desdoblado $S_h(z)$.
- Es una generalización del caso ortogonal y, si $G_h(z)$ es FIR, el cálculo de la métrica de cada secuencia tiene complejidad lineal (proporcional a *K)*.
- Este criterio es una versión discreta equivalente del diseño continuo muestreado original.
- El ecualizador de la rama superior se denomina *precursor* porque elimina una parte de la ISI (la parte anticausal).
- En presencia de ISI ( $G_h(z) \neq 1$ ) no es equivalente al diseño de detección símbolo por símbolo.

## PAM con ISI: Criterio discreto equivalente ...

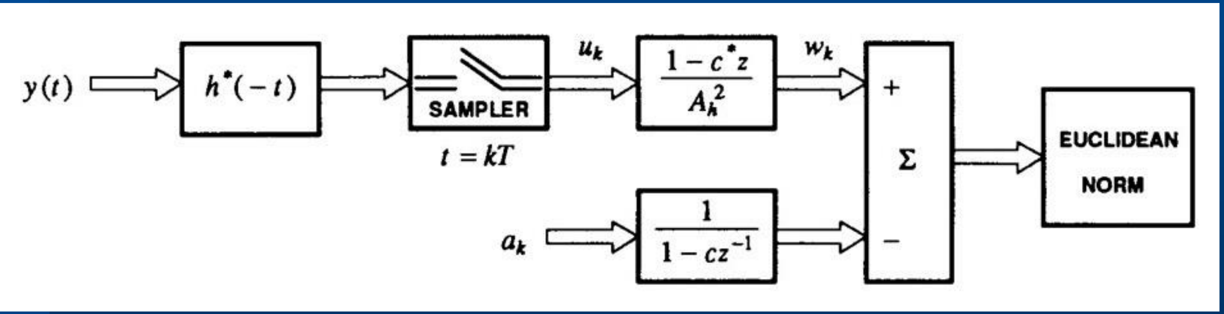
Como $G_h(z)$ es de fase mínima, $G_h^*(1/z^*)$ y $1/G_h^*(1/z^*)$ son de fase máxima. Para ser estable este filtro tiene que ser anticausal (impráctico).

Pero si es FIR (o aprox.) puede implementarse con un filtro causal y un retardo.

Ejemplo:

$$S_h(z) = \frac{A_h^2}{(1 - cz^{-1})(1 - c^* z)}, \quad |c| < 1$$

Entonces: precursor FIR anticausal

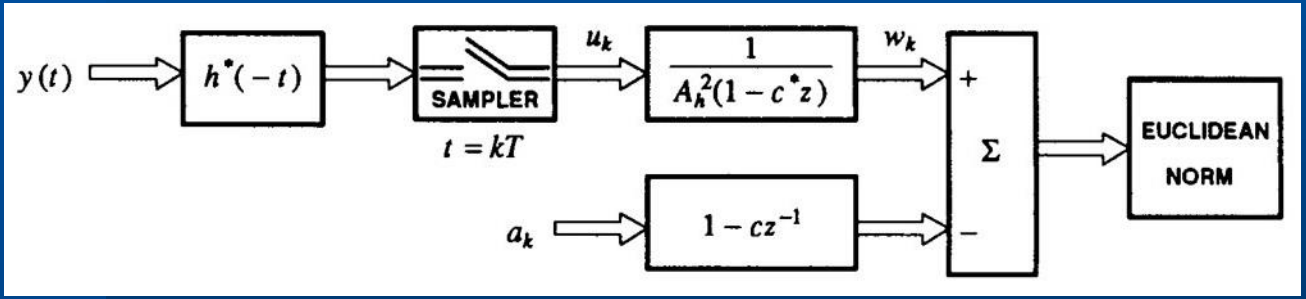


# PAM con ISI: Criterio discreto equivalente ...

Ejemplo:

$$S_h(z) = A_h^2(1 - cz^{-1})(1 - c^* z), \quad |c| < 1$$

El filtro precursor es IIR anticausal, solo aproximable mediante un filtro FIR anticausal.



# PAM con ISI: Criterio discreto equivalente ...

Equivalencia entre criterios:

La salida del MF muestreado se puede escribir como

$$u_k = \sum_{m=1}^{K} a_m \rho_h(k-m) + e_k = a_k * \rho_h(k) + e_k$$

Función transferencia $S_h(z)$

Con esta entrada al filtro precursor, la función transferencia para los símbolos queda

$$\frac{S_h(z)}{A_h^2 G_h^*(1/z^*)} = G_h(z)$$

tal que la salida es

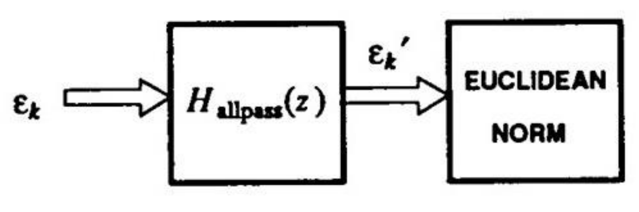
$$w_k = \sum_{m=1}^{K} a_m g_{h,k-m} + e'_k$$

Un filtrado causal!! (se eliminó la parte anticausal)

# PAM con ISI: Criterio discreto equivalente ....

Solución no única del criterio discreto:

Como $S_h(z)$ puede no ser de fase mínima, si intercalamos un pasatodo $H_{allpass}(z)$




Por teorema de Parseval:

$$\sum_{m=1}^{\infty} |\varepsilon_m|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} |\varepsilon_m'|^2$$

por lo que desplazando el pasatodo hacia atrás en las dos ramas, la secuencia detectada será la misma. Equivalente, sin embargo ISI en general mayor, porqué?.

# PAM con ISI: Criterio discreto equivalente ....

Distancia mínima:

Para dos secuencias $\{\tilde{a}_k,\ 1 \le k \le K\}$ y $\{\hat{a}_k,\ 1 \le k \le K\}$

consideramos

$$\varepsilon_k = \tilde{a}_k - \hat{a}_k$$

Entonces, entre dos señales

$$d^2 = \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{K} \varepsilon_i \varepsilon_j^* \rho_h(j-i)$$

o, en forma discreta (con $\rho_h(k) = A_h^2 (g_{h,k} * g_{h,-k}^*)$ ) , resulta en el siguiente problema de minimización

$$d_{\text{min}}^2 = \min_{\varepsilon_k,\ 1 \le k \le K} A_h^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{i=1}^{K} \varepsilon_i g_{h,k-i} \right|^2$$

Esto lo estudiaremos en clases siguientes.

# Ancho de banda y dimensionalidad

Una propiedad importante de diseño de señales es la eficiencia espectral. En relación al criterio de Nyquist generalizado, se establece $B \geq N/2T$ para eliminar ISI en *N* pulsos ortogonales.

Se trabaja en general con un espacio de *L* señales de dimensión finita *N*.

Cual es la relación entre el ancho de banda de esta señales y la dimensión ??

## Ancho de banda y dimensionalidad ...

Teorema de Landau-Pollak:

*Dado un conjunto de* $2Bt_0 + 1$ *señales ortonormales* $\phi_i(t)$*, tal que para cualquier* $f(t)$ *con energía* $\sigma_f^2$ *limitada a* $B$ *Hz, para cualquier constante* $0 < \varepsilon < 1$ *, y para cualquier* $t_0$ *suficientemente grande se cumple*

$$\int_0^{t_0} |f(t)|^2 dt > \sigma_f^2(1-\varepsilon)$$

*Y existe un conjunto de* $2Bt_0 + 1$ *coeficientes* $f_i$ *, tal que*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - \sum_{i=0}^{2Bt_0} f_i \phi_i(t)|^2 dt < 12\sigma_f^2 \varepsilon$$

*Entonces, dimensión del espacio:* $2Bt_0 + 1$

Una *f(t)* así acotada se puede aproximar con dimensiones dadas por el teorema

# Ancho de banda y dimensionalidad ...

Relación con el criterio de Nyquist generalizado:

Consideremos una secuencia de *K* símbolos transmitidos, y $h_n(t),\ 1 \leq n \leq N$ es un conjunto ortogonal de pulsos de ancho de banda $B$ Hz.

Una señal PAM /PO combinada será

$$s(t) = \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{n=1}^{N} A_{k,n} h_n(t - kT)$$

y estará en un espacio *NK*-dimensional.

Puede mostrarse que está limitada en tiempo a (*0,KT*). Entonces por el teorema puede aproximarse por (2 B K T + 1) funciones ortogonales.

$$2BKT + 1 \geq NK,\ B \geq \frac{NK-1}{2KT}$$

Entonces, si $K \to \infty$ se verifica

Nyquist generalizado $N/2T$

# Ancho de banda y dimensionalidad ...

El ***producto tiempo-ancho de banda*** $2Bt_0$ juega un papel fundamental en señales aproximadamente limitadas en tiempo y frecuencia: a menor $2Bt_0$, mas artificial es la aproximación.

El teorema considera señales limitadas en frecuencia y aproximadamente limitadas en tiempo. El dual también es posible.

# Ancho de banda y dimensionalidad ...

Ejemplo:

En DS-SS (espectro disperso de secuencia directa), *h(t)* se modula en amplitud.

Para evitar ISI el ancho de banda debe ser mayor que *1/2T*. Pero en este caso se usa *B* >>, ***tal que 2BT es muy grande***.

Entonces, *h(t)* está muy precisamente limitada en tiempo, ISI normalmente no es un problema.

# Ancho de banda y dimensionalidad ...

Ejemplo:

En modulación de pulsos ortogonales (ej. FSK).

Para satisfacer Nyquist generalizado $2BT > N$.

Si $N$ es grande entonces los pulsos van a estar confinados a $T$ (menos susceptible a ISI).

Aunque no es una premisa de esta modulación es una ventaja.

# Ancho de banda y dimensionalidad ...

Ejemplo:

En modulación multiportadora, cuando la dimensionalidad del conjunto de señales aumenta, *B* se mantiene constante pero aumenta *T*.

La clave es la eficiencia espectral aproximadamente constante. Por Nyquist $N = 2BT$, tal que aumentando *T,* aumenta *N.*

Entonces, también a mayor *N*, mas limitado a *T* queda el símbolo (con el prefijo cíclico, la ISI se elimina totalmente).

# Diseño de distancia mínima (resumen).

- **Espacio de señales.**
- **Modelado de señales**
- **Diseño en base a distancia mínima.**
- **Aplicación a diferentes modulaciones**
  - **Pulsos aislados**
  - **Con ISI.**
- **Ancho de banda y dimensionalidad.**