

2023-2024 春季学期匡亚明学院数学物理方法期末试题 (吴盛俊)

某科铃兰 御条当琴

2024 年 5 月 20 日

* 期末的范围是 7 – 12 章, 其中第 7 章是数学物理方程的引入, 8 – 11 章是常微分方程的级数解, 12 章是常微分方程的非级数解. 另, 2024 年 5 月 20 日, 数理方法和您同在.

一、简答题 (共 20 分)

1. 列出学过的泛定方程并举例;
2. 说明本征函数法的思想并 (不一定要) 举例;
3. 说明 Green 函数法求解定解问题的思维;
4. 说明球谐函数的来源、定义和主要性质.

二、求解下述方程 (使用本征函数法和冲量定理法)(20 分)

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = A \sin \omega t \cos \frac{2\pi x}{L} \\ u_x|_{x=0} = u_x|_{x=L} = 0 \\ u|_{t=0} = B \cos \frac{3\pi x}{L} \end{cases}$$

三、给球体表面一个稳定的电压, 且球内外均不包含电荷. 边界条件为

$$u|_{r=R} = u_1 \sin \theta \sin \varphi + u_2 \sin^2 \theta \cos 2\varphi$$

求解球内球外电势分布.(15 分)

四、求解下述方程 (15 分)

$$\begin{cases} u_t - ia^2 \Delta u = 0 \\ u|_{\rho=\rho_0} = u|_{z=0} = u|_{z=H} = 0 \\ u(\rho, \phi, z, t=0) = u_1 J_2 \left(\frac{x_1^{(2)}}{\rho_0} \rho \right) \sin 2\phi \sin \frac{3\pi z}{H} \end{cases}$$

五、完成下列问题 (30 分, 每问 10 分)

(1) 已知一个方形区域, 其内部没有热源, 一条边长 L_1 , 另一条边长 L_2 , 如图所示. 最上方的边的温度 (即 L_2 温度) 恒为 $T_1 \sin \frac{2\pi x}{L_1}$, 其余边的温度均为 0. 求温度不随时间变化的稳定解.

(2) 针对方程

$$\begin{cases} u_t - a^2 \Delta_2 u = 0 \\ u|_{x=0} = u|_{x=L_1} = u|_{y=0} = 0 \\ u|_{y=L_2} = T_1 \sin \frac{2\pi x}{L_1} \\ u|_{t=0} = T_1 \sin \frac{2\pi x}{L_1} \sin \frac{\pi y}{2L_2} \end{cases}$$

(i) 求该方程的点源响应函数;

(ii) 求解该方程.

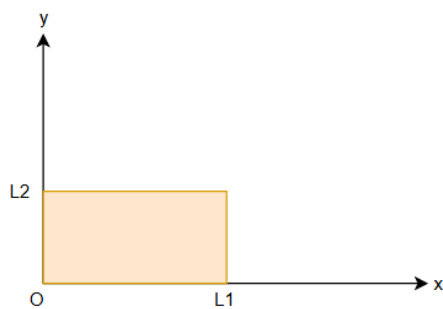


图 1: 第 5 题图像