Матричная запись

Линейная комбинация и независимость

Краткий план:

- Линейная комбинация векторов;

Краткий план:

- Линейная комбинация векторов;
- Зависимые и независимые наборы векторов.

Линейная комбинация

Определение

Вектор $\mathbf{c}$ называется линейной комбинацией векторов $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, …, $\mathbf{v}_k$, если его можно представить в виде их суммы с некоторыми действительными весами α_i:

$$\mathbf{c} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_k \mathbf{v}_k$$

Линейная комбинация

Определение

Вектор $\mathbf{c}$ называется линейной комбинацией векторов $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, …, $\mathbf{v}_k$, если его можно представить в виде их суммы с некоторыми действительными весами α_i:

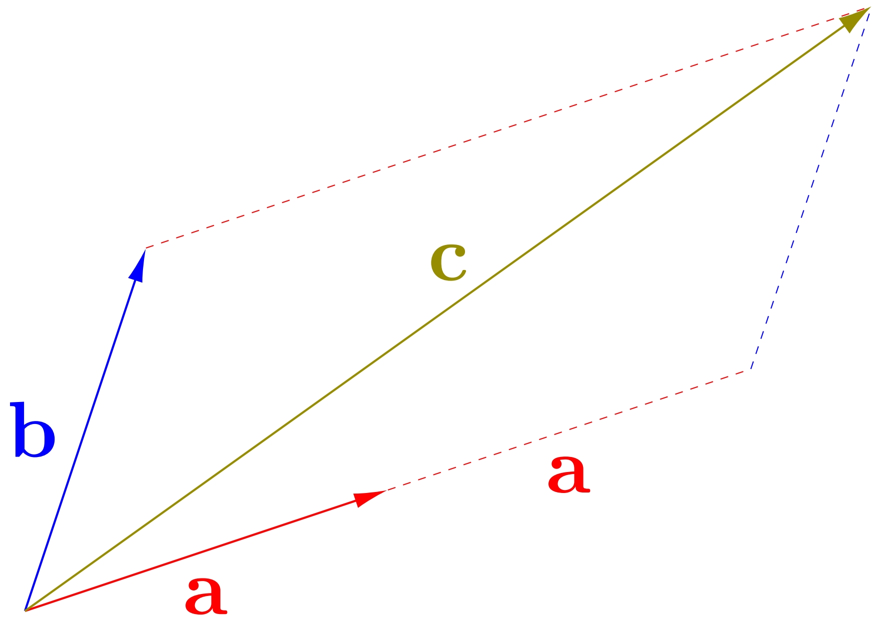
$$\mathbf{c} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_k \mathbf{v}_k$$

Пример. Вектор $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ — это линейная комбинация векторов $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Линейная комбинация: геометрия

$$\mathbf{c} = 2 \cdot \mathbf{a} + 1 \cdot \mathbf{b}$$



Любой вектор — линейная комбинация

Любой вектор $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ — линейная комбинация векторов $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Любой вектор — линейная комбинация

Любой вектор $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ — линейная комбинация векторов $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Аналогично, любой вектор $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ представим в виде:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

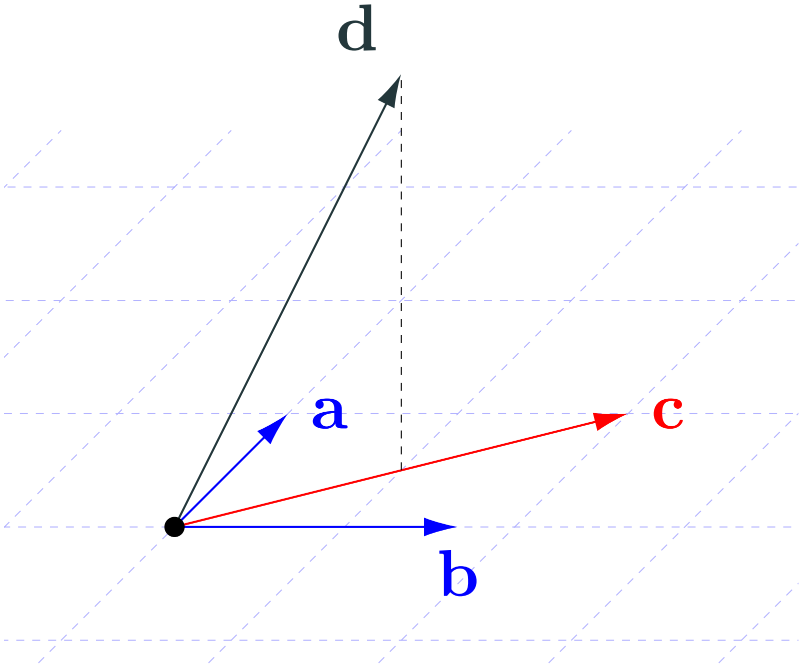
Линейная зависимость

Определение

Набор A из двух и более векторов называется линейно зависимым, если хотя бы один вектор является линейной комбинацией остальных.

Набор $A = \{\mathbf{0}\}$ из одного нулевого вектора также называется линейно зависимым.

Линейная зависимость: геометрия



Набор $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ — линейно зависим.

Набор $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}\}$ — линейно независим.

Линейная зависимость: примеры

Набор $A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ — линейно независимый.

Линейная зависимость: примеры

Набор $A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ — линейно независимый.

Набор $A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ — линейно зависимый:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Линейная зависимость: дубль два

Эквивалентное пределение

Набор векторов $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ называется линейно зависимым, если можно найти такие веса $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, что

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0},$$

и при этом хотя бы одно из чисел α_i отлично от 0.

Линейная зависимость: дубль два

Эквивалентное пределение

Набор векторов $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ называется линейно зависимым, если можно найти такие веса $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, что

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0},$$

и при этом хотя бы одно из чисел α_i отлично от 0.

Доказательство эквивалентности

Вектор с ненулевым коэффициентом α_i перед ним можно выразить через остальные.

Линейная зависимость: дубль два

Эквивалентное пределение

Набор векторов $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ называется линейно зависимым, если можно найти такие веса $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, что

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0},$$

и при этом хотя бы одно из чисел α_i отлично от 0.

Доказательство эквивалентности

Вектор с ненулевым коэффициентом α_i перед ним можно выразить через остальные.

Если вектор $\mathbf{v}_2$ выражен через $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_2 = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_3\mathbf{v}_3$, то искомая нулевая линейная комбинация имеет вид: $\alpha_1\mathbf{v}_1 + (-1)\mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$.

Линейная оболочка

Краткий план:

- Линейная оболочка векторов;

Краткий план:

- Линейная оболочка векторов;
- Базис линейной оболочки векторов;

Краткий план:

- Линейная оболочка векторов;
- Базис линейной оболочки векторов;
- Размерность линейной оболочки векторов.

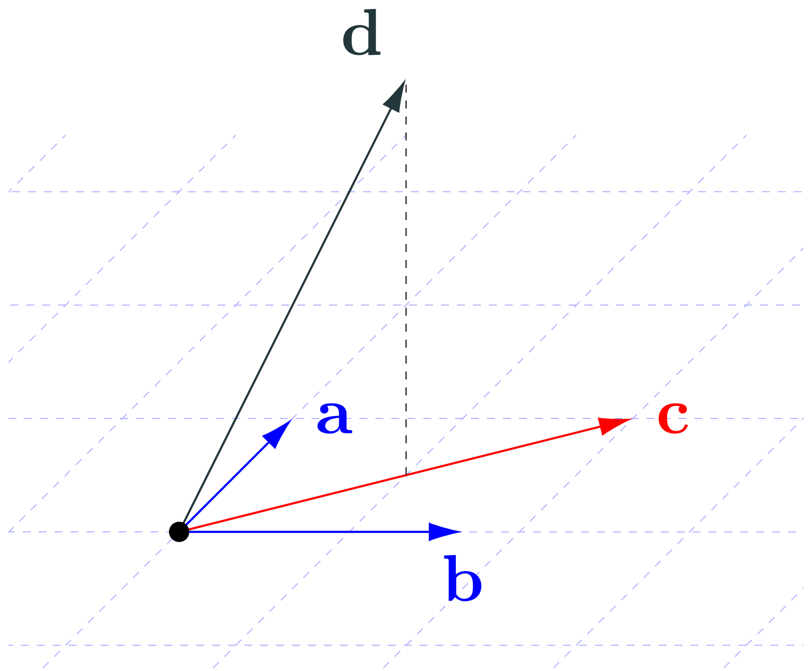
Линейная оболочка

Определение

Множество векторов M, содержащее все возможные линейные комбинации векторов $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$, называется их линейной оболочкой,

$$M = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$$

Линейная оболочка векторов: картинка



Вектор $\mathbf{c}$ лежит в плоскости $\mathrm{Span}\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$.

Вектор $\mathbf{d}$ не лежит в плоскости $\mathrm{Span}\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$.

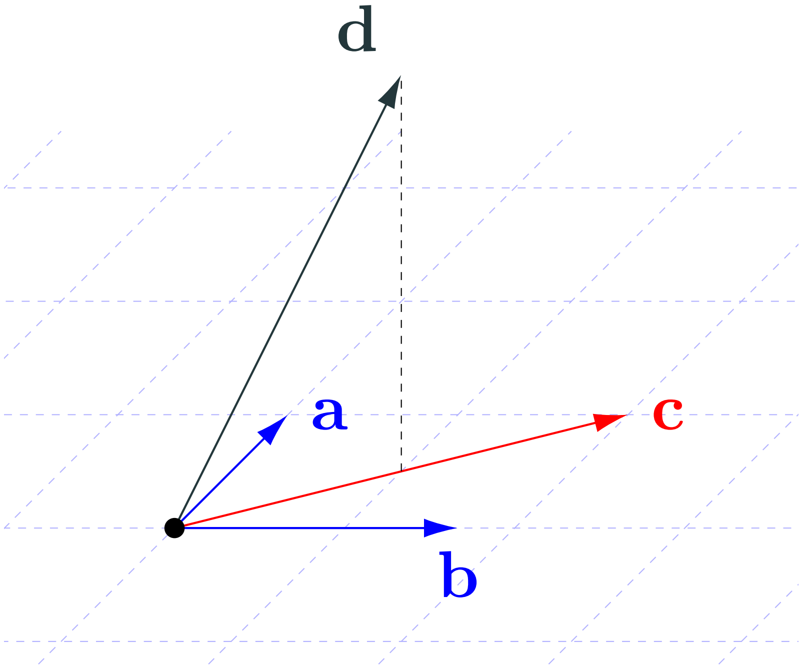
Базис линейной оболочки

Определение

Набор векторов $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_d\}$ называется базисом линейной оболочки $\text{Span}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k\}$, если:

- $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_d\} = \text{Span}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k\}$;
- Набор векторов A линейно независим.

Базис линейной оболочки: картинка



Для линейной оболочки Span$\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ базисами будут $A_1 = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$, $A_2 = \{\mathbf{b}, 2\mathbf{c}\}$, $A_3 = \{3\mathbf{a}, 5\mathbf{c}\}$.

Базис оболочки: примеры

Рассмотрим линейную оболочку

$$M = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

Базис оболочки: примеры

Рассмотрим линейную оболочку

$$M = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

Набор $A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ — базис для M.

Базис оболочки: примеры

Рассмотрим линейную оболочку

$$M = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}\right\}$$

Набор $A = \left\{\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right\}$ — базис для M.

Набор $A = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\-4\end{pmatrix}\right\}$ — базис для M.

Зачем нужен базис?

Утверждение

Если $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_d\}$ — базис линейной оболочки M, то любой вектор $\mathbf{x} \in M$ единственным образом представим в виде

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_d \mathbf{v}_d$$

Зачем нужен базис?

Утверждение

Если $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_d\}$ — базис линейной оболочки M, то любой вектор $\mathbf{x} \in M$ единственным образом представим в виде

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_d \mathbf{v}_d$$

Доказательство

Линейная комбинация базиса совпадает с M, значит любой вектор из M представим как линейная комбинация элементов базиса.

Зачем нужен базис?

Утверждение

Если $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_d\}$ — базис линейной оболочки M, то любой вектор $\mathbf{x} \in M$ единственным образом представим в виде

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_d \mathbf{v}_d$$

Доказательство

Линейная комбинация базиса совпадает с M, значит любой вектор из M представим как линейная комбинация элементов базиса.

Если бы для некоторого $\mathbf{x}$ нашлось два различных представления

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_d \mathbf{v}_d = \alpha'_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha'_d \mathbf{v}_d,$$

то была бы зависимость между элементами базиса, что

Свойства базиса линейной оболочки

Утверждение

Если набор векторов $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ линейно независим, то он сам является базисом своей линейной оболочки $\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$.

Свойства базиса линейной оболочки

Утверждение

Если набор векторов $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ линейно независим, то он сам является базисом своей линейной оболочки Span$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$.

Утверждение

Если наборы векторов A и B — являются базисами для линейной оболочки M, то наборы A и B содержат одинаковое количество векторов.

Свойства базиса линейной оболочки

Утверждение

Если набор векторов $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ линейно независим, то он сам является базисом своей линейной оболочки $\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$.

Утверждение

Если наборы векторов A и B — являются базисами для линейной оболочки M, то наборы A и B содержат одинаковое количество векторов.

Утверждение

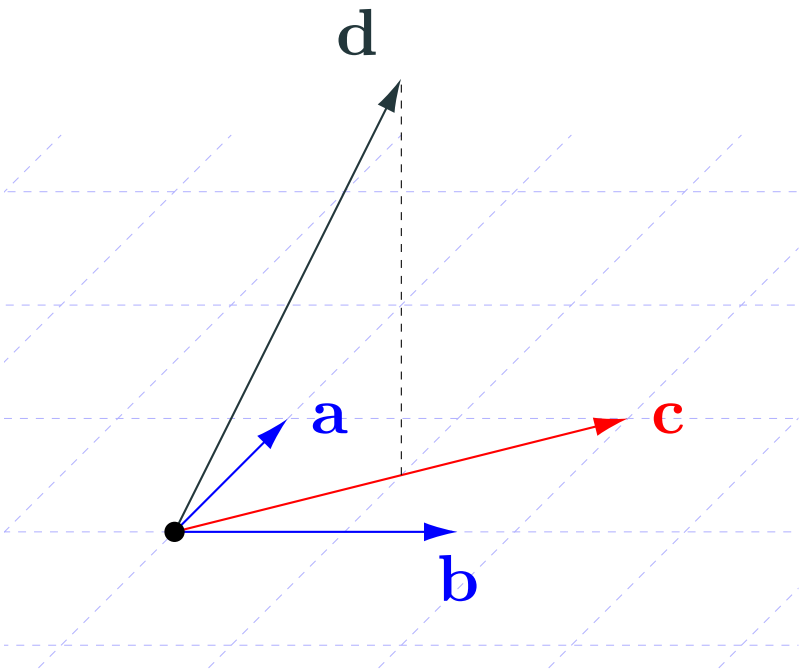
Если набор A содержит k векторов, то базис линейной оболочки $\mathrm{Span}\, A$ содержит k элементов или меньше.

Размерность линейной оболочки

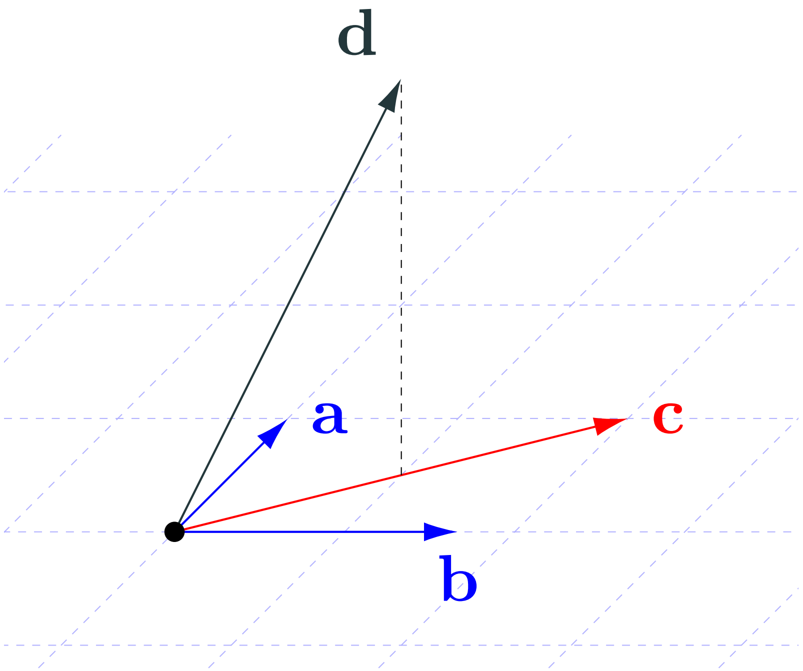
Определение

Если базис линейной оболочки M содержит d элементов, то число d называется размерностью линейной оболочки M.

Размерность линейной оболочки: картинка

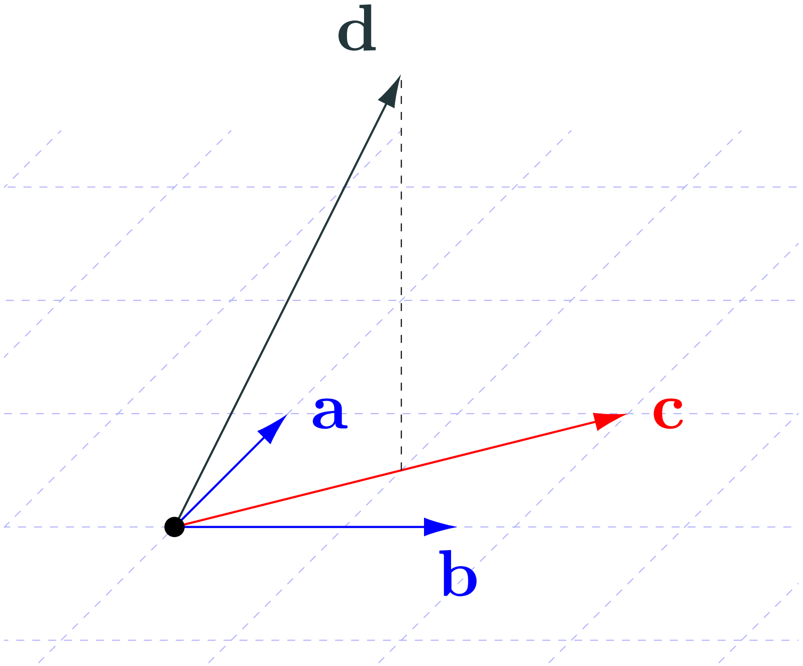


Размерность линейной оболочки: картинка



Размерность $\mathrm{Span}\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ равна 2.

Размерность линейной оболочки: картинка



Размерность $\mathrm{Span}\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ равна 2.

Размерность $\mathrm{Span}\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}\}$ равна 3.

Пространство $\mathbb{R}^n$

Определение

Пространство $\mathbb{R}^n$ — множество всех возможных векторов из n чисел.

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| x_1 \in \mathbb{R}, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

Пространство $\mathbb{R}^n$

Определение

Пространство $\mathbb{R}^n$ — множество всех возможных векторов из n чисел.

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| x_1 \in \mathbb{R}, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Пространство $\mathbb{R}^n$

Определение

Пространство $\mathbb{R}^n$ — множество всех возможных векторов из n чисел.

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| x_1 \in \mathbb{R}, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathrm{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Размерность $\mathbb{R}^n$ равна n.

Линейное пространство

Краткий план:

- Векторное пространство;

Краткий план:

- Векторное пространство;
- Базис векторного пространства;

Краткий план:

- Векторное пространство;
- Базис векторного пространства;
- Размерность векторного пространства.

Векторное пространство

Определение

Множество V произвольных объектов называется конечномерным векторным пространством, если:

- множество V можно взаимно однозначно сопоставить пространству $\mathbb{R}^n$;

Векторное пространство

Определение

Множество V произвольных объектов называется конечномерным векторным пространством, если:

- множество V можно взаимно однозначно сопоставить пространству $\mathbb{R}^n$;
- определено сложение двух объектов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ из V, и оно соответствует сложению столбцов из $\mathbb{R}^n$;

Векторное пространство

Определение

Множество V произвольных объектов называется **конечномерным векторным пространством**, если:

- множество V можно взаимно однозначно сопоставить пространству $\mathbb{R}^n$;
- определено сложение двух объектов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ из V, и оно соответствует сложению столбцов из $\mathbb{R}^n$;
- определено умножение объекта $\mathbf{a}$ из V на число $\lambda \in \mathbb{R}^n$, и оно соответствует умножению столбца $\mathbb{R}^n$ на λ.

Векторное пространство

Определение

Множество V произвольных объектов называется конечномерным векторным пространством, если:

- множество V можно взаимно однозначно сопоставить пространству $\mathbb{R}^n$;
- определено сложение двух объектов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ из V, и оно соответствует сложению столбцов из $\mathbb{R}^n$;
- определено умножение объекта $\mathbf{a}$ из V на число $\lambda \in \mathbb{R}^n$, и оно соответствует умножению столбца $\mathbb{R}^n$ на λ.

Векторное пространство

Определение

Множество V произвольных объектов называется конечномерным векторным пространством, если:

- множество V можно взаимно однозначно сопоставить пространству $\mathbb{R}^n$;
- определено сложение двух объектов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ из V, и оно соответствует сложению столбцов из $\mathbb{R}^n$;
- определено умножение объекта $\mathbf{a}$ из V на число $\lambda \in \mathbb{R}^n$, и оно соответствует умножению столбца $\mathbb{R}^n$ на λ.

Элементы векторного пространства называют векторами.

Векторное пространство

Определение

Множество V произвольных объектов называется конечномерным векторным пространством, если:

- множество V можно взаимно однозначно сопоставить пространству $\mathbb{R}^n$;
- определено сложение двух объектов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ из V, и оно соответствует сложению столбцов из $\mathbb{R}^n$;
- определено умножение объекта $\mathbf{a}$ из V на число $\lambda \in \mathbb{R}^n$, и оно соответствует умножению столбца $\mathbb{R}^n$ на λ.

Элементы векторного пространства называют векторами.

Векторное пространство также называют линейным.

Многочлены

Множество V всех многочленов от t степени не выше трёх:

$$V = \{at^3 + bt^2 + ct + d \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}^n\}$$

Многочлены

Множество V всех многочленов от t степени не выше трёх:

$$V = \{at^3 + bt^2 + ct + d \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}^n\}$$

Взаимно однозначное сопоставление:

$$5t^3 + 6t^2 - 3t + 2 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Многочлены

Множество V всех многочленов от t степени не выше трёх:

$$V = \{at^3 + bt^2 + ct + d \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}^n\}$$

Взаимно однозначное сопоставление:

$$5t^3 + 6t^2 - 3t + 2 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Сложение двух многочленов и умножение многочлена на число соответствуют операциям над столбцами чисел.

Пример векторного пространства

Множество V всех функций $f(t)$ равных нулю вне двух данных точек:

$$V = \{f \mid f(t) = 0 \text{ для всех } t \neq \pm 1\}$$

Пример векторного пространства

Множество V всех функций $f(t)$ равных нулю вне двух данных точек:

$$V = \{f \mid f(t) = 0 \text{ для всех } t \neq \pm 1\}$$

Взаимно однозначное сопоставление:

$$f \leftrightarrow \begin{pmatrix} f(-1) \\ f(1) \end{pmatrix}.$$

Пример векторного пространства

Множество V всех функций $f(t)$ равных нулю вне двух данных точек:

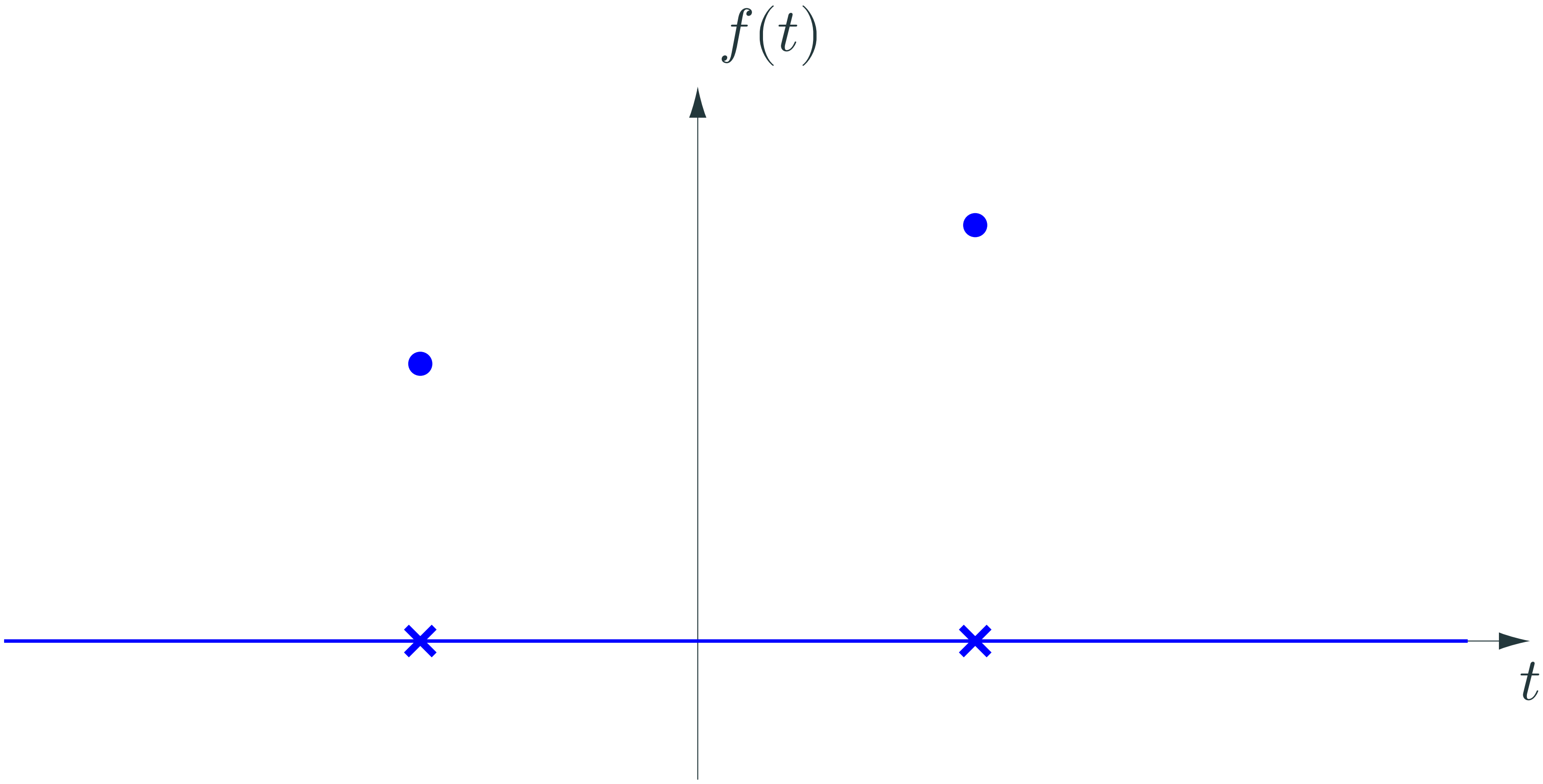
$$V = \{f \mid f(t) = 0 \text{ для всех } t \neq \pm 1\}$$

Взаимно однозначное сопоставление:

$$f \leftrightarrow \begin{pmatrix} f(-1) \\ f(1) \end{pmatrix}.$$

Сложение двух таких функций и умножение число соответствуют операциям над столбцами чисел.

Типичный элемент V



Аналогия с $\mathbb{R}^n$

Определение

Вектор $\mathbf{c}$ называется линейной комбинацией векторов $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_k$, если его можно представить в виде их суммы с некоторыми действительными весами α_i:

$$\mathbf{c} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_k \mathbf{v}_k$$

Аналогия с $\mathbb{R}^n$

Определение

Вектор $\mathbf{c}$ называется линейной комбинацией векторов $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, …, $\mathbf{v}_k$, если его можно представить в виде их суммы с некоторыми действительными весами α_i:

$$\mathbf{c} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_k\mathbf{v}_k$$

Определение

Множество векторов M, содержащее все возможные линейные комбинации векторов $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, …, $\mathbf{v}_k$, называется их линейной оболочкой,

$$M = \mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$$

Аналогия с $\mathbb{R}^n$

Определение

Вектор $\mathbf{c}$ называется линейной комбинацией векторов $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_k$, если его можно представить в виде их суммы с некоторыми действительными весами α_i:

$$\mathbf{c} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_k\mathbf{v}_k$$

Определение

Множество векторов M, содержащее все возможные линейные комбинации векторов $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_k$, называется их линейной оболочкой,

$$M = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$$

Полностью аналогично определяются линейно зависимые и независимые наборы векторов.

Базис и размерность пространства

Определение

Базисом векторного пространства V называется любой набор $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$, такой что

- $V = \mathrm{Span}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$;
- векторы $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ линейно независимы.

Базис и размерность пространства

Определение

Базисом векторного пространства V называется любой набор $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$, такой что

- $V = \text{Span}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$;
- векторы $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ линейно независимы.

Определение

Число векторов в базисе, n, называют размерностью пространства V, $\dim V = n$.

Продолжаем аналогию

Пространство V взаимнооднозначно сопоставлено с $\mathbb{R}^n$ и при этом сложение в V соответствует сложению в $\mathbb{R}^n$, а умножение на число в V соответствует умножению на число в $\mathbb{R}^n$.

Утверждение

Линейная независимость в V соответствует линейной независимости в $\mathbb{R}^n$.

Базис в V соответствует базису в $\mathbb{R}^n$.

Размерность V равна размерности $\mathbb{R}^n$, $\dim V = \dim \mathbb{R}^n = n$.

Формальности

Мы слишком привыкли к свойствам чисел!

Формальности

Мы слишком привыкли к свойствам чисел!

Эквивалентное определение

Множество V называется векторным пространством, если выполнено восемь свойств…

Восемь аксиом: сложение

1. При сложении можно расставлять скобки как хочешь (ассоциативность):
$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$$
2. При сложении можно путать лево и право (коммутативность):
$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$
3. Существует нулевой вектор $\mathbf{0}$:
$$\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$$
4. Для любого вектора $\mathbf{a}$ найдется противоположный вектор $-\mathbf{a}$:
$$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$$

Восемь аксиом: умножение

5. Умножение вектора на число совместимо с умножением чисел:
$$\lambda_1(\lambda_2\mathbf{a}) = (\lambda_1\lambda_2)\mathbf{a}$$
6. Умножение на единицу не меняет вектор:
$$1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$$
7. Раскрывать скобки можно (дистрибутивность умножения):
$$\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$$
8. Раскрывать скобки можно по всякому (дистрибутивность умножения):
$$(\lambda_1 + \lambda_2)\mathbf{a} = \lambda_1\mathbf{a} + \lambda_2\mathbf{a}$$

Матрица линейного оператора

Краткий план:

- Матрица линейного оператора;

Краткий план:

- Матрица линейного оператора;
- Примеры;

Краткий план:

- Матрица линейного оператора;
- Примеры;
- Обобщение на векторное пространство.

Как записать линейный оператор?

Любой вектор $\mathbf{v}$ представим в виде:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + v_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Как записать линейный оператор?

Любой вектор $\mathbf{v}$ представим в виде:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + v_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

По свойству линейности

$$\mathsf{L}\,\mathbf{v} = \mathsf{L} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = v_1\,\mathsf{L} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + v_2\,\mathsf{L} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + v_n\,\mathsf{L} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Как записать линейный оператор?

Любой вектор $\mathbf{v}$ представим в виде:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + v_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

По свойству линейности

$$\mathsf{L}\,\mathbf{v} = \mathsf{L} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = v_1 \,\mathsf{L} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \,\mathsf{L} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + v_n \,\mathsf{L} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Достаточно понять, что оператор L делает с векторами, содержащими одну единичку и нули на остальных местах.

Запишем оператор по столбцам!

Обозначим $\mathbf{e}_i$ — вектор, у которого на i-м месте стоит 1, а на остальных местах — 0.

$$\mathbf{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Запишем оператор по столбцам!

Обозначим $\mathbf{e}_i$ — вектор, у которого на i-м месте стоит 1, а на остальных местах — 0.

$$\mathbf{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Определение

Матрицей линейного оператора $\mathsf{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ назовём прямоугольную табличку чисел, в которой i-ый столбец равен $\mathsf{L}\,\mathbf{e}_i$.

Растягивание компонент

$$\mathsf{L}: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$$

Растягивание компонент

$$\mathsf{L}:\ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$$

Действие оператора L на базисных векторах $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$:

$$\mathsf{L}:\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{L}:\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Растягивание компонент

$$\mathsf{L}: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$$

Действие оператора L на базисных векторах $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$:

$$\mathsf{L}: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{L}: \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Матрица оператора, $\mathsf{L} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$

Перестановка компонент вектора

$$\mathsf{L}: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_3 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Перестановка компонент вектора

$$\mathsf{L}: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_3 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Действие оператора L на базисных векторах $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$:

$$\mathsf{L}: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathsf{L}: \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ \mathsf{L}: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Перестановка компонент вектора

$$\mathsf{L}: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_3 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Действие оператора L на базисных векторах $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$:

$$\mathsf{L}: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathsf{L}: \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ \mathsf{L}: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Матрица оператора, $\mathsf{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Поворот плоскости

$$\mathsf{L} : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$$

Поворот плоскости

$$\mathsf{L}: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$$

Действие оператора L на базисных векторах $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$:

$$\mathsf{L}: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \cos 30^\circ \\ \sin 30^\circ \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{L}: \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -\sin 30^\circ \\ \cos 30^\circ \end{pmatrix}$$

Поворот плоскости

$$\mathsf{L}: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$$

Действие оператора L на базисных векторах $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$:

$$\mathsf{L}: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \cos 30^\circ \\ \sin 30^\circ \end{pmatrix}, \quad \mathsf{L}: \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -\sin 30^\circ \\ \cos 30^\circ \end{pmatrix}$$

Матрица оператора, $\mathsf{L} = \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix}$.

Оператор бездельника!

$$\mathsf{L} : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Оператор бездельника!

$$\mathsf{L}: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Действие оператора L на базисных векторах $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$:

$$\mathsf{L}: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{L}: \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Оператор бездельника!

$$\mathsf{L}: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Действие оператора L на базисных векторах $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$:

$$\mathsf{L}: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{L}: \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Матрица оператора, единичная матрица, $\mathsf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Дописывание нуля

$$\mathsf{L} : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Дописывание нуля

$$\mathsf{L}: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Действие оператора L на базисных векторах $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$:

$$\mathsf{L}: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{L}: \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Дописывание нуля

$$\mathsf{L} : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Действие оператора L на базисных векторах $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$:

$$\mathsf{L} : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{L} : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Матрица оператора, $\mathsf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Матрица размера 3×2 соответствует оператору $\mathsf{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

Удаление компоненты вектора

$$\mathsf{L} : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Удаление компоненты вектора

$$\mathsf{L}: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Действие оператора L на базисных векторах $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$:

$$\mathsf{L}: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathsf{L}: \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathsf{L}: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Удаление компоненты вектора

$$\mathsf{L}: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Действие оператора L на базисных векторах $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$:

$$\mathsf{L}: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathsf{L}: \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathsf{L}: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Матрица оператора, $\mathsf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Матрица размера 2×3 соответствует оператору $\mathsf{L}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

Нумерация элементов матрицы

Сначала строки, потом столбцы!

Нумерация элементов матрицы

Сначала строки, потом столбцы!

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 8 \\ 7 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

Матрица A имеет размер 2×3 и $a_{12} = -2$.

Нумерация элементов матрицы

Сначала строки, потом столбцы!

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 8 \\ 7 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

Матрица A имеет размер 2×3 и $a_{12} = -2$.

Элемент матрицы A, лежащий в строке i в столбце j, обозначают a_{ij}.

Матрица имеет размер $n \times k$, если в ней n строк и k столбцов.

Абстрактное определение

Пусть оператор L действует из пространства V с базисом $\mathbf{e} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ в пространство W с базисом $\mathbf{f} = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_k\}$.

Абстрактное определение

Пусть оператор L действует из пространства V с базисом $\mathbf{e} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ в пространство W с базисом $\mathbf{f} = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_k\}$.

Определение

Матрицей $\mathsf{L}_{\mathbf{ef}}$ линейного оператора L называется табличка чисел, определяемая по следующему алгоритму:

1. Находим вектор $\mathsf{L}\,\mathbf{e}_j \in W$.

Абстрактное определение

Пусть оператор L действует из пространства V с базисом $\mathbf{e} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ в пространство W с базисом $\mathbf{f} = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_k\}$.

Определение

Матрицей $\mathsf{L}_{\mathbf{ef}}$ линейного оператора L называется табличка чисел, определяемая по следующему алгоритму:

1. Находим вектор $\mathsf{L}\,\mathbf{e}_j \in W$.
2. Раскладываем этот вектор по базису $\mathbf{f}$:

$$\mathsf{L}\,\mathbf{e}_j = a_{1j}\mathbf{f}_1 + a_{2j}\mathbf{f}_2 + \dots + a_{kj}\mathbf{f}_k$$

Абстрактное определение

Пусть оператор L действует из пространства V с базисом $\mathbf{e} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ в пространство W с базисом $\mathbf{f} = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_k\}$.

Определение

Матрицей $\mathsf{L}_{\mathbf{ef}}$ линейного оператора L называется табличка чисел, определяемая по следующему алгоритму:

1. Находим вектор $\mathsf{L}\,\mathbf{e}_j \in W$.
2. Раскладываем этот вектор по базису $\mathbf{f}$:

$$\mathsf{L}\,\mathbf{e}_j = a_{1j}\mathbf{f}_1 + a_{2j}\mathbf{f}_2 + \ldots + a_{kj}\mathbf{f}_k$$

3. Помещаем числа $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{kj}$ в столбец j таблички.

Абстрактное определение

Пусть оператор L действует из пространства V с базисом $\mathbf{e} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ в пространство W с базисом $\mathbf{f} = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_k\}$.

Определение

Матрицей $\mathsf{L}_{\mathbf{ef}}$ линейного оператора L называется табличка чисел, определяемая по следующему алгоритму:

1. Находим вектор $\mathsf{L}\,\mathbf{e}_j \in W$.
2. Раскладываем этот вектор по базису $\mathbf{f}$:

$$\mathsf{L}\,\mathbf{e}_j = a_{1j}\mathbf{f}_1 + a_{2j}\mathbf{f}_2 + \dots + a_{kj}\mathbf{f}_k$$

3. Помещаем числа $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{kj}$ в столбец j таблички.
4. Повторяем шаги 1, 2 и 3 для всех столбцов.

Ранг и транспонирование

Краткий план:

- Множество значений оператора;

Краткий план:

- Множество значений оператора;
- Транспонирование матрицы;

Множество значений оператора

Любой вектор $\mathbf{v}$ представим в виде:

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + ... + v_n\mathbf{e}_n$$

Множество значений оператора

Любой вектор $\mathbf{v}$ представим в виде:

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + \ldots + v_n\mathbf{e}_n$$

По свойству линейности

$$\mathsf{L}\,\mathbf{v} = v_1\,\mathsf{L}\,\mathbf{e}_1 + v_2\,\mathsf{L}\,\mathbf{e}_2 + \ldots + v_n\,\mathsf{L}\,\mathbf{e}_n$$

Множество значений оператора

Любой вектор $\mathbf{v}$ представим в виде:

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + \ldots + v_n \mathbf{e}_n$$

По свойству линейности

$$\mathsf{L}\,\mathbf{v} = v_1\,\mathsf{L}\,\mathbf{e}_1 + v_2\,\mathsf{L}\,\mathbf{e}_2 + \ldots + v_n\,\mathsf{L}\,\mathbf{e}_n$$

Утверждение

Множество значение оператор L можно записать в виде линейной оболочки:

$$\mathsf{Image}\,\mathsf{L} = \mathsf{Span}\{\mathsf{L}\,\mathbf{e}_1, \mathsf{L}\,\mathbf{e}_2, \ldots, \mathsf{L}\,\mathbf{e}_n\}$$

Ранг оператора

Определение

Рангом линейного оператора L называют размерность его образа:

$$\operatorname{rank}\mathsf{L} = \dim \operatorname{Image}\mathsf{L} = \dim \operatorname{Span}\{\mathsf{L}\,\mathbf{e}_1, \mathsf{L}\,\mathbf{e}_2, \ldots, \mathsf{L}\,\mathbf{e}_n\}$$

Удаление компоненты вектора

$$\mathsf{L} : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Удаление компоненты вектора

$$\mathsf{L} : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Действие оператора L на базисных векторах $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$:

$$\mathsf{L} : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathsf{L} : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathsf{L} : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Удаление компоненты вектора

$$\mathsf{L}: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Действие оператора L на базисных векторах $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$:

$$\mathsf{L}: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathsf{L}: \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathsf{L}: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathsf{Image\,L} = \mathsf{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Удаление компоненты вектора

$$\mathsf{L}:\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}a_1\\a_3\end{pmatrix}$$

Действие оператора L на базисных векторах $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$:

$$\mathsf{L}:\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \mathsf{L}:\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\ \mathsf{L}:\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$\mathsf{Image\,L}=\mathsf{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Базис для Image L: $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$

$$\mathsf{rank\,L}=\mathsf{dim\,Image\,L}=2$$

Ранг проекции

Если оператор H проецирует векторы на прямую, то rank H $= 1$.

Ранг проекции

Если оператор H проецирует векторы на прямую, то $\operatorname{rank} H = 1$.

Ранг оператора проецирования H равен размерности того множества, на которое проецируют.

Ранг проекции

Если оператор H проецирует векторы на прямую, то $\operatorname{rank} H = 1$.

Ранг оператора проецирования H равен размерности того множества, на которое проецируют.

Определение

Ранг оператора проецирования H также называют следом оператора проецирования, $\operatorname{tr} H = \operatorname{rank} H$.

Умножение матрицы на вектор

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)

Умножение матрицы на матрицу

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)

Три взгляда на умножение матриц

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)

Решение системы уравнений методом Гаусса

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)

Задача о шахматной доске

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)