Линейная алгебра: от идеи к формуле

Борис Демешев

НИУ ВШЭ

Содержание лекции

Краткое напутствие

Зачем нужна линейная алгебра?

- Линейная алгебра прекрасна сама по себе!
- Работает «под капотом» практически всех методов машинного обучения.

Особенности курса:

1. Собственные числа до определителей.
2. Определители до матриц.

Краткий план:

- Вектор — это столбик чисел.
- Сложение двух векторов и умножение на число.
- Расстояние и косинус угла между векторами.

Вектор

Рабочее определение:

Вектор — столбец из нескольких чисел.

$$v = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 3 \\ -3.45 \end{pmatrix}$$

Вектор

Рабочее определение:

Вектор — столбец из нескольких чисел.

$$v = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 3 \\ -3.45 \end{pmatrix}$$

Идея вектора:

Вектор — всё, что можно описать столбцом из нескольких чисел.

Длина вектора

Евклидова длина вектора:

Длина или норма вектора
$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$.

TODO: картинка с теоремой Пифагора

Простая арифметика

Сложение и вычитание — поэлементные:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3.5 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Умножение на число — поэлементное:

$$4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3.5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Простая геометрия

TODO: картинка

геометрия суммы векторов и произведение число на вектор

Расстояние между векторами

Евклидово расстояние между векторами

Евклидова метрика:

$$d(a, b) = \|a - b\| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + ... + (a_n - b_n)^2}$$

TODO: картинка с расстоянием между векторами

Пространство $\mathbb{R}^n$

Пространство $\mathbb{R}^n$:

Множество всех возможных векторов из n чисел.

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| x_1 \in \mathbb{R}, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

Пространство $\mathbb{R}^n$

Пространство $\mathbb{R}^n$:

Множество всех возможных векторов из n чисел.

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| x_1 \in \mathbb{R}, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

Размерность пространства $\mathbb{R}^n$:

Количество чисел в каждом векторе, n.

Скалярное произведение и угол

Скалярное произведение векторов a и b:

$$\langle a, b\rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n.$$

Скалярное произведение и угол

Скалярное произведение векторов a и b:

$\langle a, b \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n.$

Косинус угла между векторами a и b:

Косинусная близость, cosine similarity:

$$\cos \angle(a, b) = \frac{\langle a, b \rangle}{\|a\| \|b\|}$$

Косинус определён, если $\|a\| > 0$ и $\|b\| > 0$.

Вектор как направленный отрезок

TODO: Картинка, где изображён угол между векторами

Почти любой объект — вектор!

С помощью вектора можно закодировать:

- многочлен

$$3x^2 + 6x - 7 \to (3, 6, -7)$$

- характеристики индивида

  Блондин с ростом 182 см и весов 81 килограмм $-$

- TODO

Ортогональность векторов

Векторы a и b ортогональны, если $a \perp b$,

$$\langle a, b \rangle = 0$$

Также говорят «перпендикулярны».

TODO: картинка

Векторы a и b ортогональны, векторы a и c нет.

Содержание лекции

Краткий план:

Вокруг метрик и скалярного произведения:

- Да будет больше разных расстояний!
- Делаем из вектора прямую и гиперплоскость.
- Ядерные функции из скалярного произведения.

Больше метрик в студию!

Манхэттэнская метрика

Расстояние по Майкопски:

$$d(a, b) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + ... + |a_n - b_n|$$

TODO:

Два вектора с евклидовым и манхэттенским расстоянием.

У нас и у них

TODO:

Рядом картинки Манхэттэна и Майкопа

Ещё больше метрик!

Метрика Чебышёва

$$d(a,b) = \text{max}\left\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|, \ldots, |a_n - b_n|\right\}$$

Метрика Минковского

$$d_p(a,b) = \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i|^p\right)^{1/p}$$

Частные случаи метрики Минковского

Евклидова метрика, $p = 2$

$$\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + ... + (a_n - b_n)^2} = d_2(a, b)$$

Манхэттэнская метрика, $p = 1$

$$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + ... + |a_n - b_n| = d_1(a, b)$$

Метрика Чебышёва, $p \to \infty$

$$\max\{|a_1 - b_1|, ... , |a_n - b_n|\} = \lim_{p \to \infty} d_p(a, b)$$

Вектор порождает прямую

Прямая порождённая вектором a, $\mathrm{Lin}\, a$

множество векторов, получаемых при домножении вектора a на произвольное число,

$$\mathrm{Lin}\, a = \{t \cdot a | t \in \mathbb{R}\}$$

TODO: картинка прямой порожденной вектором

Вектор задаёт гиперплоскость

Вектор a фиксирован, например, $a = (1, 2, 3)$.

TODO: две картинки рядом

$\langle a, v \rangle = 0$ и $\langle a, v \rangle = 1$

Ядерные функции

Векторная функция f фиксирована, например,

$$f : \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 \\ v_1^2 + v_2^2 \end{pmatrix}$$

Ядерная функция, ядро K

Скалярное произведение в спрямляющем пространстве: $K(a, b) = \langle f(a), f(b) \rangle$.

Спрямляющее пространство:

TODO: картинка с исходным и спрямляющим пространством

Содержание лекции

- Вектор как столбец чисел
- Вокруг метрик и скалярного произведения
- Линейный оператор: первые шаги
- Проекция и поворот на плоскости: формулы
- Ещё больше линейных операторов
- Проекция: собственные векторы и собственные числа, транспонирование
- Поворот: обращение, транспонирование, собственные числа и векторы
- Линейная алгебра и игра Ним
- Задача о переворачивании монетки на шахматной доске

Линейный оператор

Идея линейности

Результат не изменится, если поменять местами действие L и

- растягивание вектора, например, $L(42a) = 42L(a)$;
- усреднение двух векторов, $L(0.5a + 0.5b) = 0.5L(a) + 0.5L(b)$.

Стандартное определение линейности

Линейная функция L из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^k$

- Для любого числа t и вектора $a \in \mathbb{R}^n$: $L(ta) = tL(a)$.
- Для любых двух векторов a и b из $\mathbb{R}^n$: $L(a + b) = L(a) + L(b)$.

$L(a) \equiv La$

Растягивание координат

Обобщаем умножение вектора на число!

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$$

TODO: картинка

Перестановка координат вектора

На пути к произвольному повороту

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

TODO: картинка

Обрезка компонент вектора

На пути к произвольной проекции

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

TODO: картинка

Дописывание нулей

Увеличиваем размерность пространства

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

TODO: картинка

Первая проекция

Проекция на прямую $x_1 + 2x_2 = 0$

Оператор $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

TODO: картинка для аргументации линейности

Первый поворот

Поворот на 30° против часовой стрелки

Оператор $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

TODO: картинка для аргументации линейности

Ортогональный линейный оператор

Идея ортогональности

Действие L не изменяет углов и расстояний.

Ортогональный оператор $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Для любых векторов a и b: $\langle La, Lb \rangle = \langle a, b \rangle$

Содержание лекции

видео с ДОСКОЙ

вывод формулы поворота на плоскости

вывод формулы проекции на плоскости

Содержание лекции

- Вектор как столбец чисел
- Вокруг метрик и скалярного произведения
- Линейный оператор: первые шаги
- Проекция и поворот на плоскости: формулы
- Ещё больше линейных операторов
- Проекция: собственные векторы и собственные числа, транспонирование
- Поворот: обращение, транспонирование, собственные числа и векторы
- Линейная алгебра и игра Ним
- Задача о переворачивании монетки на шахматной доске

Композиция линейных операторов

Делай раз, делай два!

Если последовательно применить два линейных действия, то получится линейное действие, $L_2(L_1(a)) = L(a)$.

доказательство

- $L_2(L_1(ta)) = L_2(tL_1(a)) = aL_2(L_1(a))$
- $L_2(L_1(a+b)) = L_2(L_1(a) + L_1(b)) =$
  $L_2(L_1(a)) + L_2(L_1(a))$

Транспонирование

У любого оператора L есть брат L^T

- $d(La, b) = d(a, L^T b)$
- $\angle(La, b) = \angle(a, L^T b)$

Транспонирование оператора L

$\langle La, b\rangle = \langle a, L^T b\rangle$

Некоторые действия можно отменить!

Тождественный оператор I

Для любого вектора v: $I(v) = v$.

Обратный оператор L^{-1}

$L^{-1}L(a) = a$

Не у всех действий L есть обратное L^{-1}!

Обратимы ли поворот и проекция?

TODO: картинка обратимость поворота и необратимость проекции

Собственные векторы и собственные числа

Определение

Если для действия L найдётся такой вектор v, что $Lv = \lambda \cdot v$, где $\lambda \in \mathbb{R}$, то:

- вектор v называется собственным;
- число λ называется собственным.

Растягивание вдоль осей

Рассмотрим $L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$

Собственные векторы с $\lambda = 2$

$$v = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Собственные векторы с $\lambda = -3$

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$$

Обращение растягивания

Рассмотрим $L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$

Обратное действие

$$L^{-1} : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_1 \\ \frac{1}{-3}a_2 \end{pmatrix}$$

$$L^{-1}L = I$$

Транспонирование растягивания

Рассмотрим $L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$

Транспонирование

$$\langle La, b\rangle = (2a_1)b_1 + (-3a_2)b_2 =$$
$$a_1(2b_1) + a_2(-3b_2) = \langle a, Lb\rangle$$

$$L^T = L$$

Содержание лекции

- Вектор как столбец чисел
- Вокруг метрик и скалярного произведения
- Линейный оператор: первые шаги
- Проекция и поворот на плоскости: формулы
- Ещё больше линейных операторов
- Проекция: собственные векторы и собственные числа, транспонирование
- Поворот: обращение, транспонирование, собственные числа и векторы
- Линейная алгебра и игра Ним
- Задача о переворачивании монетки на шахматной доске

видео с ДОСКОЙ

геометрический смысл собственных векторов

геометрический смысл транспонирования

отсутствие обратного действия

Содержание лекции

Вектор как столбец чисел

Вокруг метрик и скалярного произведения

Линейный оператор: первые шаги

Проекция и поворот на плоскости: формулы

Ещё больше линейных операторов

Проекция: собственные векторы и собственные числа, транспонирование

Поворот: обращение, транспонирование, собственные числа и векторы

Линейная алгебра и игра Ним

Задача о переворачивании монетки на шахматной доске

видео с ДОСКОЙ

геометрический смысл собственных векторов

геометрический смысл транспонирования

обратный поворот на плоскости

Содержание лекции

- Вектор как столбец чисел
- Вокруг метрик и скалярного произведения
- Линейный оператор: первые шаги
- Проекция и поворот на плоскости: формулы
- Ещё больше линейных операторов
- Проекция: собственные векторы и собственные числа, транспонирование
- Поворот: обращение, транспонирование, собственные числа и векторы
- Линейная алгебра и игра Ним
- Задача о переворачивании монетки на шахматной доске

видео с ДОСКОЙ

Важная мысль

что числа — могут быть и 0-1 или комплексные.

доказываем

что позиция в Ним проигрышна, если и только если сумма векторов кучек равна нулю

Содержание лекции

Вектор как столбец чисел

Вокруг метрик и скалярного произведения

Линейный оператор: первые шаги

Проекция и поворот на плоскости: формулы

Ещё больше линейных операторов

Проекция: собственные векторы и собственные числа, транспонирование

Поворот: обращение, транспонирование, собственные числа и векторы

Линейная алгебра и игра Ним

Задача о переворачивании монетки на шахматной доске

видео с ДОСКОЙ в шахматном смысле

Важная мысль

что вектором может быть всё!

вектор это

- Клетка на доске как вектор
- Чётность расстановки монеток на доске как вектор