

# Векторы и операторы

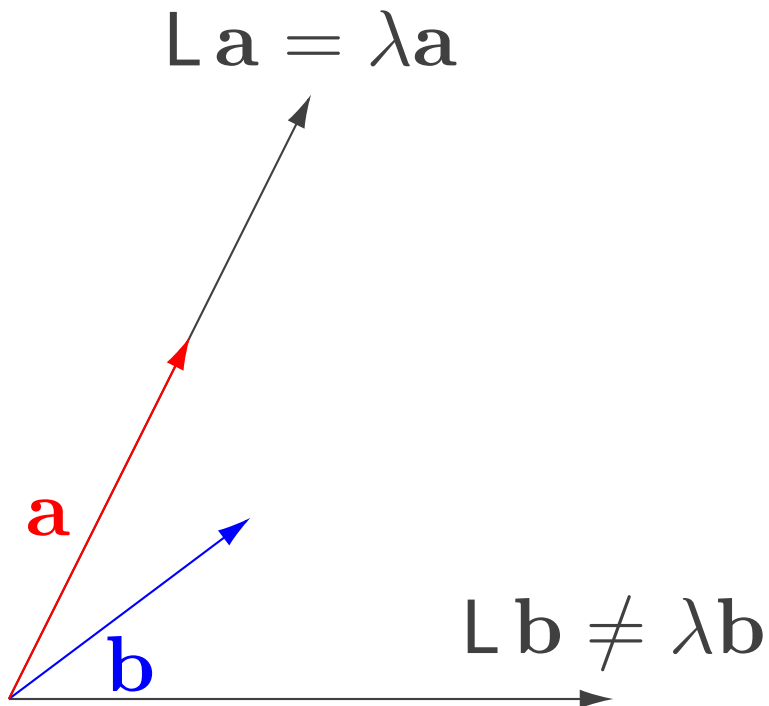
# Собственные векторы и собственные числа

# Собственные векторы и собственные числа

## Определение

Если для действия  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  найдётся такой вектор  $v$ , что  $L v = \lambda \cdot v$ , где  $\lambda \in \mathbb{R}$ , то:

- вектор  $v$  называется **собственным**;
- число  $\lambda$  называется **собственным**.



# Собственные вектора: растягивание осей

- Оператор

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$$

# Собственные вектора: растягивание осей

- Оператор

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$$

- Собственные векторы с  $\lambda = 2$

$$v = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

# Собственные вектора: растягивание осей

- Оператор

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$$

- Собственные векторы с  $\lambda = 2$

$$v = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Собственные векторы с  $\lambda = -3$

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$$

# Собственные вектора: перестановка $a_i$

- Оператор  $L$  — перестановка компонент вектора:

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_4 \\ a_3 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

# Собственные вектора: перестановка $a_i$

- Оператор  $L$  — перестановка компонент вектора:

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_4 \\ a_3 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

- Собственные векторы с  $\lambda = 1$

Одинаковые числа на переставляемых местах:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ x \\ a_3 \\ x \end{pmatrix}$$



# Собственные векторы: поворот

- Не у каждого линейного оператора есть собственные векторы!

# Собственные векторы: поворот

- Не у каждого линейного оператора есть собственные векторы!
- Исходный оператор  $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , поворот на  $30^\circ$  против часовой стрелки.

# Собственные векторы: поворот

- Не у каждого линейного оператора есть собственные векторы!
- Исходный оператор  $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , поворот на  $30^\circ$  против часовой стрелки.
- Ни собственных векторов, ни чисел нет!

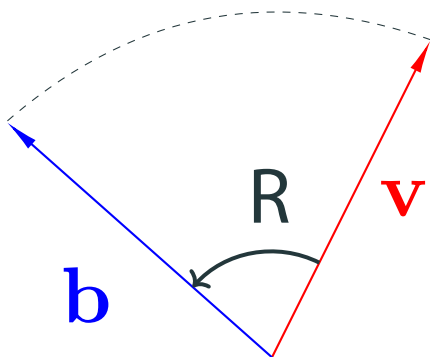
# Собственные векторы: поворот

- Не у каждого линейного оператора есть собственные векторы!
- Исходный оператор  $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , поворот на  $30^\circ$  против часовой стрелки.
- Ни собственных векторов, ни чисел нет!

# Собственные векторы: поворот

- Не у каждого линейного оператора есть собственные векторы!
- Исходный оператор  $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , поворот на  $30^\circ$  против часовой стрелки.
- Ни собственных векторов, ни чисел нет!

$$R \mathbf{v} = \mathbf{b}$$



# Собственные вектора: проекция

- Оператор  $L$  — проекция на прямую  $\ell : x_1 + 2x_2 = 0$ .

# Собственные вектора: проекция

- Оператор  $L$  — проекция на прямую  $\ell : x_1 + 2x_2 = 0$ .
- Собственные векторы с  $\lambda = 1$   
Любой вектор на прямой  $\ell$ .

# Собственные вектора: проекция

- Оператор  $L$  — проекция на прямую  $\ell : x_1 + 2x_2 = 0$ .
- Собственные векторы с  $\lambda = 1$   
Любой вектор на прямой  $\ell$ .
- Собственные векторы с  $\lambda = 0$   
Любой вектор ортогональный прямой  $\ell$ .



# Резюме

- Вектор — столбец чисел.

# Резюме

- Вектор — столбец чисел.
- Скалярное произведение «знает» о длине и угле.

# Резюме

- Вектор — столбец чисел.
- Скалярное произведение «знает» о длине и угле.
- Линейный оператор — «уважает» сложение векторов.

# Резюме

- Вектор — столбец чисел.
- Скалярное произведение «знает» о длине и угле.
- Линейный оператор — «уважает» сложение векторов.
- Примеры: поворот, проекция, перестановка компонент, растягивание осей.

# Резюме

- Вектор — столбец чисел.
- Скалярное произведение «знает» о длине и угле.
- Линейный оператор — «уважает» сложение векторов.
- Примеры: поворот, проекция, перестановка компонент, растягивание осей.
- Обращение и транспонирование.

# Резюме

- Вектор — столбец чисел.
- Скалярное произведение «знает» о длине и угле.
- Линейный оператор — «уважает» сложение векторов.
- Примеры: поворот, проекция, перестановка компонент, растягивание осей.
- Обращение и транспонирование.
- Собственные векторы растягиваются в собственное число раз.

# Резюме

- Вектор — столбец чисел.
- Скалярное произведение «знает» о длине и угле.
- Линейный оператор — «уважает» сложение векторов.
- Примеры: поворот, проекция, перестановка компонент, растягивание осей.
- Обращение и транспонирование.
- Собственные векторы растягиваются в собственное число раз.
- **Бонусное видео:** как выиграть в Ним?