Определитель и обратная матрица

Идея определителя

Краткий план:

- Определитель на плоскости;

Краткий план:

- Определитель на плоскости;
- Определитель в пространстве.

Идея определителя

Рассмотрим оператор преобразования плоскости,

$\mathsf{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Пара векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ переходит в пару векторов $\mathsf{L}\,\mathbf{a}$, $\mathsf{L}\,\mathbf{b}$.

Идея определителя

Рассмотрим оператор преобразования плоскости,
$\mathsf{L}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Пара векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ переходит в пару векторов $\mathsf{L}\,\mathbf{a}$, $\mathsf{L}\,\mathbf{b}$.

Как меняется площадь параллелограмма образованного двумя векторами?

Идея определителя

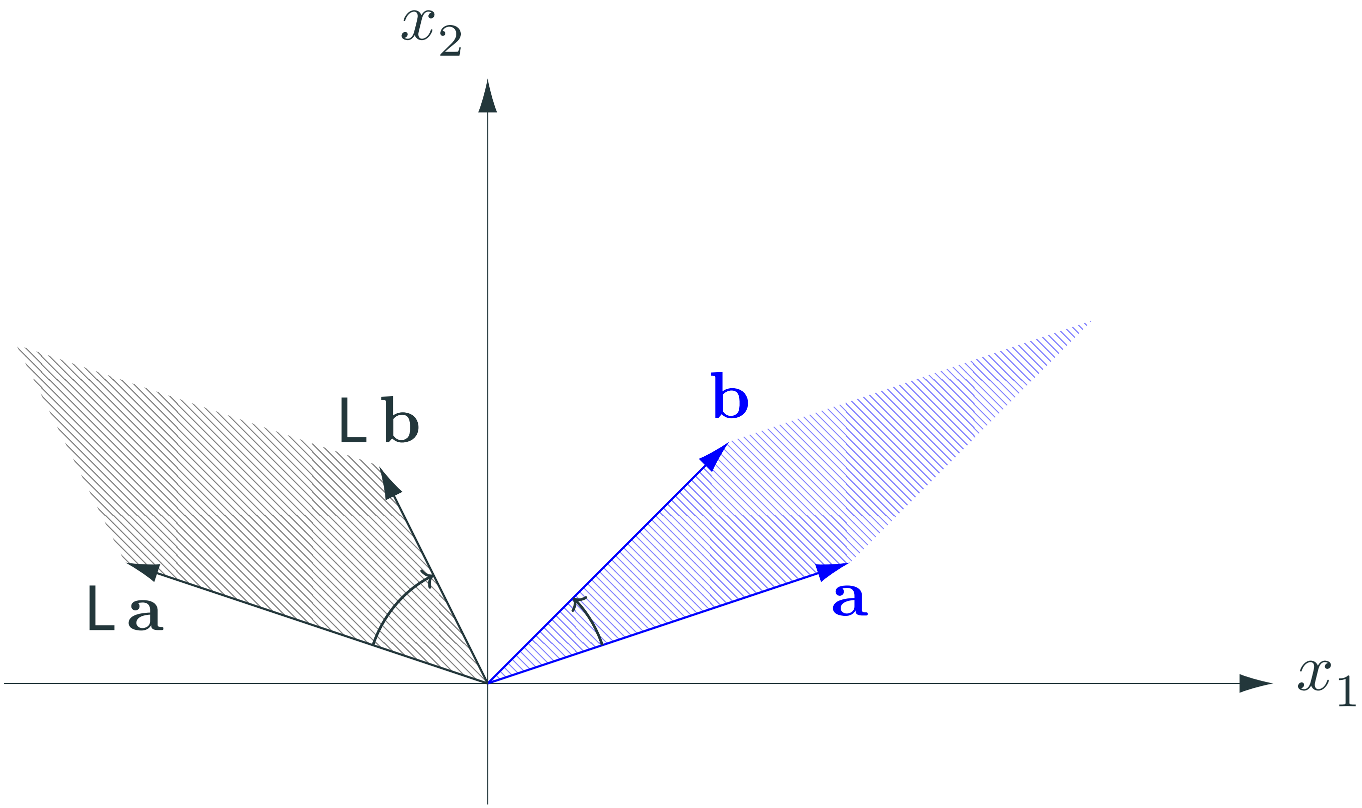
Рассмотрим оператор преобразования плоскости, $\mathrm{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Пара векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ переходит в пару векторов $\mathrm{L}\,\mathbf{a}$, $\mathrm{L}\,\mathbf{b}$.

Как меняется площадь параллелограмма образованного двумя векторами?

Меняется ли направление поворота от первого вектора ко второму?

Идея определителя на картинке



Ориентированная площадь

Определение

Возьмём площадь параллелограмма со сторонами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Если поворот от первого вектора ко второму идёт по часовой стрелке, то дополнительно домножим площадь на (-1).

Полученное число назовём ориентированной площадью параллелограмма и обозначим $S(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Ориентированная площадь

Определение

Возьмём площадь параллелограмма со сторонами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Если поворот от первого вектора ко второму идёт по часовой стрелке, то дополнительно домножим площадь на (-1).

Полученное число назовём ориентированной площадью параллелограмма и обозначим $S(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Важен порядок векторов:

$$S(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -S(\mathbf{b}, \mathbf{a}).$$

Идея определителя

Определение

Возьмём любые два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, для которых $S(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \neq 0$.

Определитель оператора $\mathsf{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ показывает во сколько раз изменяется ориентированная площадь

$$\det \mathsf{L} = \frac{S(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{a})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b})}$$

Определитель отражения

Рассмотрим оператор L : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$, отражение относительно $x_1 = x_2$.

Определитель отражения

Рассмотрим оператор L : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$, отражение относительно $x_1 = x_2$.

картинка

Определитель отражения

Рассмотрим оператор L $: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$, отражение относительно $x_1 = x_2$.

Определитель отражения

Рассмотрим оператор L : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$, отражение относительно $x_1 = x_2$.

Площадь параллелограмма не изменяется.

Меняется направление поворота от первого вектора ко второму.

Определитель отражения

Рассмотрим оператор L : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$, отражение относительно $x_1 = x_2$.

Площадь параллелограмма не изменяется.

Меняется направление поворота от первого вектора ко второму.

$$\det \mathsf{L} = \frac{S(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{b})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b})} = -1$$

Определитель растягивания компонент

Рассмотрим оператор L : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$.

Определитель растягивания компонент

Рассмотрим оператор L $: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}.$

Одна сторона растягивается в два раза, вторая — в три раза.

Меняется направление поворота от первого вектора ко второму.

Определитель растягивания компонент

Рассмотрим оператор L : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$.

Одна сторона растягивается в два раза, вторая — в три раза.

Меняется направление поворота от первого вектора ко второму.

$$\det \mathsf{L} = \frac{S(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{b})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b})} = (-1) \cdot 2 \cdot 3 = -6$$

Определитель поворота

Оператор R : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ вращает плоскость на 30° против часовой стрелки.

Определитель поворота

Оператор R $: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ вращает плоскость на 30° против часовой стрелки.

картинка

Определитель поворота

Оператор R $: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ вращает плоскость на 30° против часовой стрелки.

Определитель поворота

Оператор R : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ вращает плоскость на 30° против часовой стрелки.

При вращении не изменяется площадь параллелограмма.

При вращении не изменяется направление поворота от первого вектора ко второму.

Определитель поворота

Оператор $\mathsf{R} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ вращает плоскость на 30° против часовой стрелки.

При вращении не изменяется площадь параллелограмма.

При вращении не изменяется направление поворота от первого вектора ко второму.

$$\det \mathsf{R} = \frac{\mathsf{R}(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{b})}{\mathsf{R}(\mathbf{a}, \mathbf{b})} = 1$$

Определитель проекции

Оператор H $: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ проецирует векторы на прямую ℓ.

картинка

Определитель проекции

Оператор H : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ проецирует векторы на прямую ℓ.

картинка

При проекции любой параллелограмм «складывается» в отрезок нулевой площади.

Определитель проекции

Оператор $\mathsf{H} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ проецирует векторы на прямую ℓ.

картинка

При проекции любой параллелограмм «складывается» в отрезок нулевой площади.

$$\det \mathsf{H} = \frac{S(\mathsf{H}\mathbf{a}, \mathsf{H}\mathbf{b})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b})} = 0$$

Чем прекрасна ориентированная площадь?

Утверждение

Ориентированная площадь $S(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ линейна по каждому аргументу:

$$S(\lambda\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \lambda S(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \quad S(\mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{c}) = S(\mathbf{a}, \mathbf{c}) + S(\mathbf{b}, \mathbf{c})$$

Чем прекрасна ориентированная площадь?

Утверждение

Ориентированная площадь $S(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ линейна по каждому аргументу:

$$S(\lambda\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \lambda S(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \quad S(\mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{c}) = S(\mathbf{a}, \mathbf{c}) + S(\mathbf{b}, \mathbf{c})$$

здесь картинка.

Корректность идеи определителя

Величина $\det \mathsf{L} = \frac{S(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{b})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b})}$ не зависит от выбора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$!

Корректность идеи определителя

Величина $\det \mathsf{L} = \frac{S(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{b})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b})}$ не зависит от выбора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$!

Идея доказательства

Обозначим $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Корректность идеи определителя

Величина $\det \mathsf{L} = \frac{S(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{b})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b})}$ не зависит от выбора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$!

Идея доказательства

Обозначим $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Возьмём $\mathbf{a} = 5\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2$. Найдём $S(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{e}_2)/S(\mathbf{a}, \mathbf{e}_2)$:

Корректность идеи определителя

Величина $\det \mathsf{L} = \frac{S(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{b})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b})}$ не зависит от выбора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$!

Идея доказательства

Обозначим $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Возьмём $\mathbf{a} = 5\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2$. Найдём $S(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{e}_2)/S(\mathbf{a}, \mathbf{e}_2)$:

$$\frac{S(\mathsf{L}(5\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2), \mathsf{L}\,\mathbf{e}_2)}{S(5\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2)} = \frac{S(\mathsf{L}\,5\mathbf{e}_1, \mathsf{L}\,\mathbf{e}_2) + S(\mathsf{L}\,7\mathbf{e}_2, \mathsf{L}\,\mathbf{e}_2)}{S(5\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + S(7\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2)} =$$

Корректность идеи определителя

Величина $\det \mathsf{L} = \frac{S(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{b})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b})}$ не зависит от выбора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$!

Идея доказательства

Обозначим $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Возьмём $\mathbf{a} = 5\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2$. Найдём $S(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{e}_2)/S(\mathbf{a}, \mathbf{e}_2)$:

$$\frac{S(\mathsf{L}(5\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2), \mathsf{L}\,\mathbf{e}_2)}{S(5\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2)} = \frac{S(\mathsf{L}\,5\mathbf{e}_1, \mathsf{L}\,\mathbf{e}_2) + S(\mathsf{L}\,7\mathbf{e}_2, \mathsf{L}\,\mathbf{e}_2)}{S(5\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + S(7\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2)} =$$

$$= \frac{5S(\mathsf{L}\,\mathbf{e}_1, \mathsf{L}\,\mathbf{e}_2) + 0}{5S(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + 0} = \frac{S(\mathsf{L}\,\mathbf{e}_1, \mathsf{L}\,\mathbf{e}_2)}{S(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)}$$

Ещё один взгляд на определитель

Обозначим $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ещё один взгляд на определитель

Обозначим $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Определение

Преобразуем параллелограмм, образованный векторами $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, с помощью оператора L.

Определитель линейного оператора $\mathsf{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ равен ориентированной площади полученного параллелограмма.

$$\det \mathsf{L} = S(\mathsf{L}\,\mathbf{e}_1, \mathsf{L}\,\mathbf{e}_2)$$

Определитель в пространстве

Идея: заменим ориентированную площадь параллелограмма $S(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ на ориентированный объём параллелепипеда $S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$.

Определитель в пространстве

Идея: заменим ориентированную площадь параллелограмма $S(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ на ориентированный объём параллелепипеда $S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$.

Определение

Возьмём любые три вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, для которых $S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \neq 0$.

Определитель оператора $\mathsf{L} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ показывает во сколько раз изменяется ориентированный объём

$$\det \mathsf{L} = \frac{S(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{c})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}$$

А что такое ориентированный объём?

А что такое ориентированный объём?

Обозначим $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

А что такое ориентированный объём?

Обозначим $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Определение

Рассмотрим параллелепипед, образованный $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$.

А что такое ориентированный объём?

Обозначим $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Определение

Рассмотрим параллелепипед, образованный $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$.

С помощью поворота:

Совместим вектор $\mathbf{e}_1$ с вектором $\mathbf{a}$;

Затем вектор $\mathbf{e}_2$ «положим» в плоскость $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$.

А что такое ориентированный объём?

Обозначим $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Определение

Рассмотрим параллелепипед, образованный $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$.

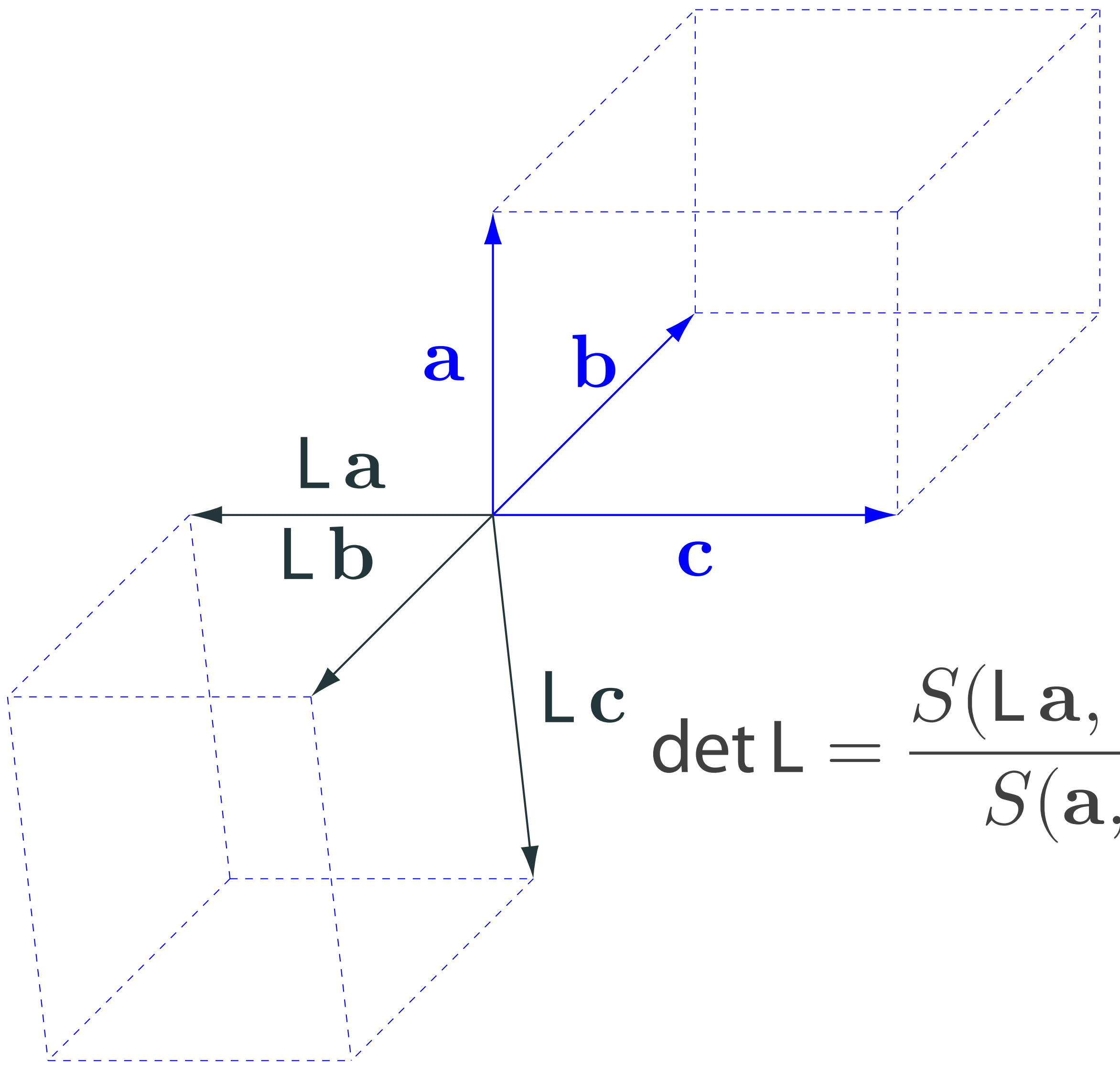
С помощью поворота:

Совместим вектор $\mathbf{e}_1$ с вектором $\mathbf{a}$;

Затем вектор $\mathbf{e}_2$ «положим» в плоскость $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$.

Ориентированный объём $S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ объявим отрицательным, если векторы $\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{c}$ смотрят в разные полупространства.

Определитель в пространстве



$$\det \mathsf{L} = \frac{S(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{b}, \mathsf{L}\,\mathbf{c})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}$$

Определитель растягивания компонент

Рассмотрим оператор L : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2a_1 \\ 3a_2 \\ -5a_3 \end{pmatrix}$.

Определитель растягивания компонент

Рассмотрим оператор L $: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2a_1 \\ 3a_2 \\ -5a_3 \end{pmatrix}.$

Одна сторона растягивается в два раза, вторая — в три раза, третья — в пять.

Первые два вектора не изменяют направления при преобразовании.

Третий вектор меняет полупространство, в котором он лежит относительно первых двух.

Определитель растягивания компонент

Рассмотрим оператор L : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2a_1 \\ 3a_2 \\ -5a_3 \end{pmatrix}$.

Одна сторона растягивается в два раза, вторая — в три раза, третья — в пять.

Первые два вектора не изменяют направления при преобразовании.

Третий вектор меняет полупространство, в котором он лежит относительно первых двух.

$$\det \mathsf{L} = \frac{S(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{b}, \mathsf{L}\,\mathbf{c})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})} = (-1) \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = -30$$

Определитель проекции

Оператор H $: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ проецирует векторы на плоскость α.

Определитель проекции

Оператор H $: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ проецирует векторы на плоскость α.

Любой параллелепипед «схлопывается» в плоскую фигуру нулевого объёма.

Определитель проекции

Оператор $\mathsf{H} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ проецирует векторы на плоскость α.

Любой параллелепипед «схлопывается» в плоскую фигуру нулевого объёма.

$$\det \mathsf{H} = \frac{S(\mathsf{H}\mathbf{a}, \mathsf{H}\mathbf{b}, \mathsf{H}\mathbf{c})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})} = 0$$

Вычисление определителя

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)

Метод Гаусса

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)

Метод Крамера

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)

Метод Крамера и нахождение обратной матрицы

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)

Комплексные числа

бонусное видео! Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)