Векторы и операторы

Транспонирование оператора и ортогональность

Транспонирование

У любого оператора L есть брат L^T.

Определение

Транспонированным оператором, L^T, называется оператор, для которого

$$\langle \mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathsf{L}^T\,\mathbf{b} \rangle.$$

Транспонирование

Почему L и L^{T} операторы-«братья»?

Транспонирование

Почему L и L^T операторы-«братья»?

$$(\mathsf{L}^T)^T = \mathsf{L}$$

Транспонирование

Почему L и L^T операторы-«братья»?

$$(\mathsf{L}^T)^T = \mathsf{L}$$

Доказательство:

Транспонирование

Почему L и L^T операторы-«братья»?

$$(\mathsf{L}^T)^T = \mathsf{L}$$

Доказательство:

- $\langle \mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathsf{L}^T\,\mathbf{b} \rangle$

Транспонирование

Почему L и L^T операторы-«братья»?

$$(\mathsf{L}^T)^T = \mathsf{L}$$

Доказательство:

- $\langle \mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathsf{L}^T\,\mathbf{b} \rangle$
- $\langle \mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{b} \rangle = \langle \mathsf{L}^T\,\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$

Транспонирование

Почему L и L^T операторы-«братья»?

$$(\mathsf{L}^T)^T = \mathsf{L}$$

Доказательство:

- $\langle \mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathsf{L}^T\,\mathbf{b} \rangle$
- $\langle \mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{b} \rangle = \langle \mathsf{L}^T\,\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$
- $\langle \mathsf{L}^T\,\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{b} \rangle$

Транспонирование растяжения

- Исходный оператор L : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$

Транспонирование растяжения

- Исходный оператор L $: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$
- $\langle \mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 2a_1 b_1 - 3a_2 b_2 = \langle \mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{b} \rangle$

Транспонирование растяжения

- Исходный оператор L : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$
- $\langle \mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 2a_1 b_1 - 3a_2 b_2 = \langle \mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{b} \rangle$
- $\mathsf{L}^T = \mathsf{L}$

Транспонирование поворота

- Исходный оператор L — поворот на плоскоти на 30° против часовой стрелки.

Транспонирование поворота

- Исходный оператор L — поворот на плоскоти на 30° против часовой стрелки.
- $\langle \mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle = \langle \mathbf{a}, \mathsf{L}^T\,\mathbf{b}\rangle$

Транспонирование поворота

- Исходный оператор L — поворот на плоскоти на 30° против часовой стрелки.
- $\langle \mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathsf{L}^T\,\mathbf{b} \rangle$
- Поворот не меняет длины.

Транспонирование поворота

- Исходный оператор L — поворот на плоскоти на 30° против часовой стрелки.
- $\langle \mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle = \langle \mathbf{a}, \mathsf{L}^T\,\mathbf{b}\rangle$
- Поворот не меняет длины.
- $\angle(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \angle(\mathbf{a}, \mathsf{L}^T\,\mathbf{b})$

Транспонирование поворота

- Исходный оператор L — поворот на плоскоти на 30° против часовой стрелки.
- $\langle \mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathsf{L}^T\,\mathbf{b} \rangle$
- Поворот не меняет длины.
- $\angle(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \angle(\mathbf{a}, \mathsf{L}^T\,\mathbf{b})$
- L^T — поворот на плоскоти на 30° по часовой стрелке.

Транспонирование поворота

- Исходный оператор L — поворот на плоскоти на 30° против часовой стрелки.
- $\langle \mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathsf{L}^T\,\mathbf{b} \rangle$
- Поворот не меняет длины.
- $\angle(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \angle(\mathbf{a}, \mathsf{L}^T\,\mathbf{b})$
- L^T — поворот на плоскоти на 30° по часовой стрелке.
- $\mathsf{L}^T = \mathsf{L}^1$

Транспонирование дописывания нуля

- Исходный оператор $\mathsf{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^2, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathsf{L} : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Транспонирование дописывания нуля

- Исходный оператор $\mathsf{L}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$:

  $$\mathsf{L}: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $\langle \mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle (a_1, a_2, 0), (b_1, b_2, b_3) \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + 0 b_3$

Транспонирование дописывания нуля

- Исходный оператор $\mathsf{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^2, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathsf{L} : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $\langle \mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle (a_1, a_2, 0), (b_1, b_2, b_3) \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + 0 b_3$
- Третья компонента $\mathbf{b}$ не важна!

Транспонирование дописывания нуля

- Исходный оператор $\mathsf{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$:
  $$\mathsf{L} : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$
- $\langle \mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle (a_1, a_2, 0), (b_1, b_2, b_3) \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + 0 b_3$
- Третья компонента $\mathbf{b}$ не важна!
- $\mathsf{L}^T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$:
  $$\mathsf{L} : \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Транспонирование дописывания нуля

- Исходный оператор $\mathsf{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^2, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$:
$$\mathsf{L} : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$
- $\langle \mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle (a_1, a_2, 0), (b_1, b_2, b_3) \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + 0 b_3$
- Третья компонента $\mathbf{b}$ не важна!
- $\mathsf{L}^T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$:
$$\mathsf{L} : \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$
- $\langle \mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{b} \rangle = \langle (a_1, a_2), (b_1, b_2) \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2$

Транспонирование дописывания нуля

- Исходный оператор $\mathsf{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathsf{L} : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

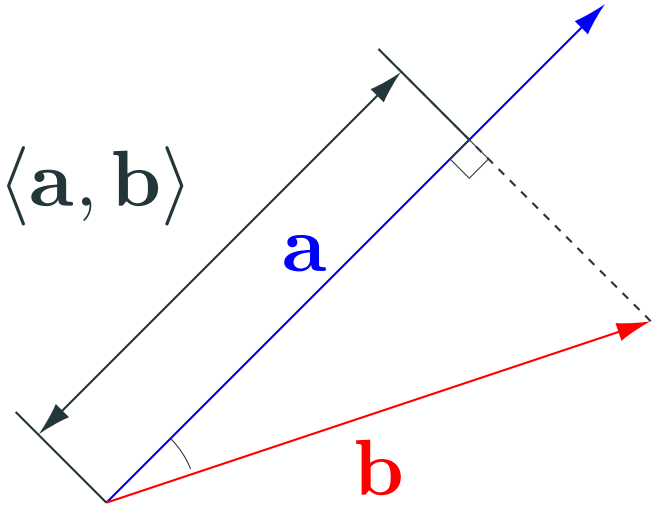
- $\langle \mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle (a_1, a_2, 0), (b_1, b_2, b_3) \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + 0 b_3$
- Третья компонента $\mathbf{b}$ не важна!
- $\mathsf{L}^T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$:

$$\mathsf{L} : \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

- $\langle \mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{b} \rangle = \langle (a_1, a_2), (b_1, b_2) \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2$
- L^T — удаление третьей компоненты вектора.

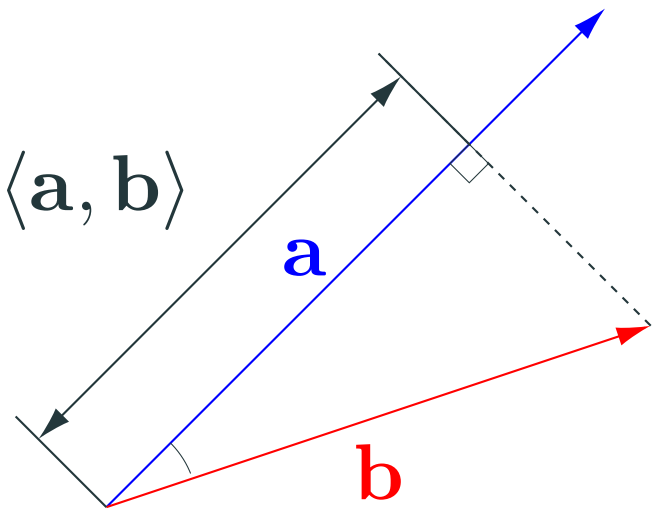
Транспонирование проекции

- Исходный оператор $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, проекция на прямую $x_1 + 2x_2 = 0$.



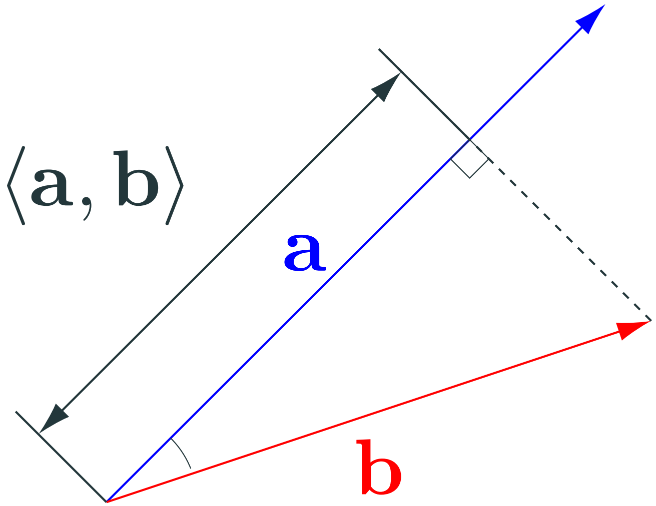
Транспонирование проекции

- Исходный оператор $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, проекция на прямую $x_1 + 2x_2 = 0$.
- Временно $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\| = 1$.



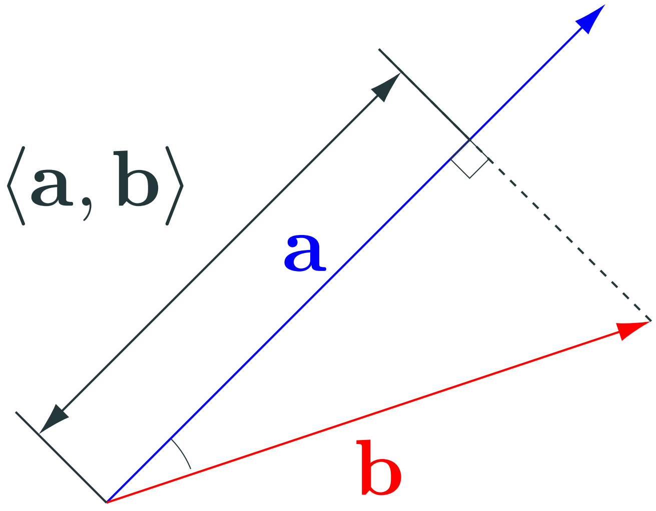
Транспонирование проекции

- Исходный оператор $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, проекция на прямую $x_1 + 2x_2 = 0$.
- Временно $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\| = 1$.
- $\langle H\mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle = \langle \mathbf{a}, H\mathbf{b}\rangle$



Транспонирование проекции

- Исходный оператор $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, проекция на прямую $x_1 + 2x_2 = 0$.
- Временно $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\| = 1$.
- $\langle H\mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle = \langle \mathbf{a}, H\mathbf{b}\rangle$
- $H^T = H$.



Ортогональный оператор

Определение

Оператор $\mathsf{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ называется ортогональным, если

- оператор сохраняет длины, $\|\mathsf{L}\,\mathbf{a}\| = \|\mathbf{a}\|$;
- оператор сохраняет углы, $\angle(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{b}) = \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Ортогональный оператор

Определение

Оператор $\mathsf{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ называется ортогональным, если

- оператор сохраняет длины, $\|\mathsf{L}\,\mathbf{a}\| = \|\mathbf{a}\|$;
- оператор сохраняет углы, $\angle(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{b}) = \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Эквивалентное определение

Оператор $\mathsf{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ называется ортогональным, если

$$\langle \mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle.$$

Ортогональный оператор

Определение

Оператор $\mathsf{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ называется ортогональным, если

- оператор сохраняет длины, $\|\mathsf{L}\,\mathbf{a}\| = \|\mathbf{a}\|$;
- оператор сохраняет углы, $\angle(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{b}) = \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Эквивалентное определение

Оператор $\mathsf{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ называется ортогональным, если

$$\langle \mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle.$$

Эквивалентное определение

Оператор $\mathsf{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ называется ортогональным, если

$$\mathsf{L}^T = \mathsf{L}^{-1}.$$

Ортогональный оператор: примеры

- Перестановка двух компонент вектора

  $$L: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

Ортогональный оператор: примеры

- Перестановка двух компонент вектора

  $$\mathsf{L} : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

- Поворот на плоскости на 30° против часовой стрелки.

Полтора доказательства

Сохранение длин и углов эквивалентно сохранению скалярного произведения.

Полтора доказательства

Сохранение длин и углов эквивалентно сохранению скалярного произведения.

- Скалярное произведение задаёт углы и длины:
  $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} \quad \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}$

Полтора доказательства

Сохранение длин и углов эквивалентно сохранению скалярного произведения.

- Скалярное произведение задаёт углы и длины:
  $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} \quad \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}$
- Длина и угол задают скалярное произведение:
  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$

Полтора доказательства

Сохранение длин и углов эквивалентно сохранению скалярного произведения.

- Скалярное произведение задаёт углы и длины:
  $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} \quad \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}$
- Длина и угол задают скалярное произведение:
  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$

Полтора доказательства

Сохранение длин и углов эквивалентно сохранению скалярного произведения.

- Скалярное произведение задаёт углы и длины:
  $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} \quad \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}$
- Длина и угол задают скалярное произведение:
  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$

Из условия $\mathsf{L}^T = \mathsf{L}^{-1}$ следует сохранение скалярного произведения.

- $\langle \mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathsf{L}^T\,\mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathsf{L}^{-1}\,\mathbf{b} \rangle$

Полтора доказательства

Сохранение длин и углов эквивалентно сохранению скалярного произведения.

- Скалярное произведение задаёт углы и длины: $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} \quad \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}$
- Длина и угол задают скалярное произведение: $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$

Из условия $\mathsf{L}^T = \mathsf{L}^{-1}$ следует сохранение скалярного произведения.

- $\langle \mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathsf{L}^T \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathsf{L}^{-1} \mathbf{b} \rangle$
- Обозначаем $\mathbf{c} = \mathsf{L}^{-1}\mathbf{b}$ и $\langle \mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle$