Спектральное разложение

Собственные числа и векторы

Краткий план:

- Собственные числа и собственные векторы матрицы.

Краткий план:

- Собственные числа и собственные векторы матрицы.
- Характеристический многочлен.

Краткий план:

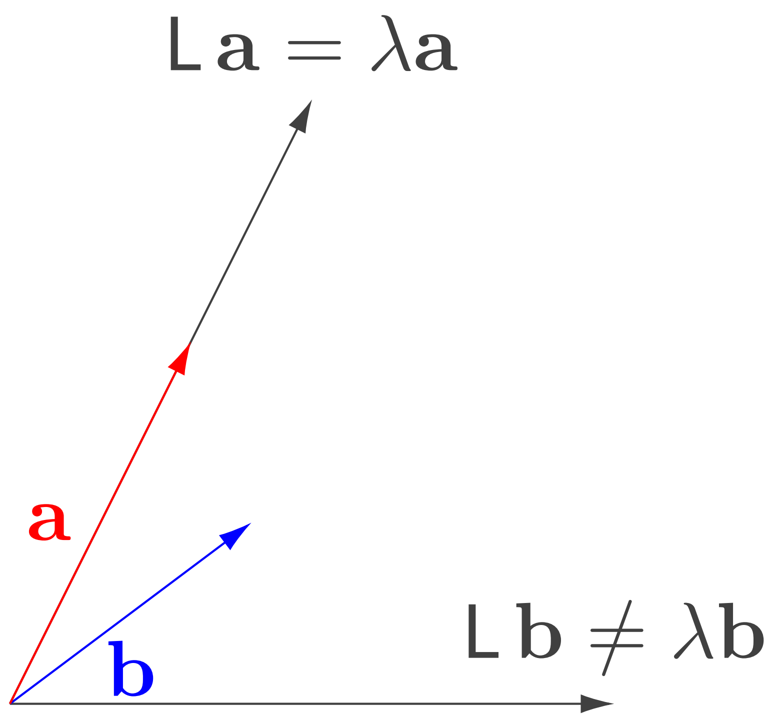
- Собственные числа и собственные векторы матрицы.
- Характеристический многочлен.
- Алгебраическая кратность.

От оператора к матрице

Определение

Если для оператора $\mathrm{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ найдётся такой ненулевой вектор $\mathbf{v}$, что $\mathrm{L}\,\mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v}$, где $\lambda \in \mathbb{R}$, то:

- вектор $\mathbf{v}$ называется собственным вектором;
- число λ называется собственным числом.



Собственные числа и векторы матрицы

Определение

Собственными числами и собственными векторами матрицы размера $n \times n$ называются собственные числа и векторы соответствующего линейного оператора.

Собственные числа и векторы матрицы

Определение

Собственными числами и собственными векторами матрицы размера $n \times n$ называются собственные числа и векторы соответствующего линейного оператора.

Для абстрактного векторного пространства V матрица $\mathrm{L}_{\mathbf{ee}}$ линейного оператора $\mathrm{L} : V \to V$ зависит от выбора базиса $\mathbf{e}$. При этом выбор базиса $\mathbf{e}$ никак не влияет на собственные числа и собственные векторы.

Количество собственных векторов

Из уравнения $\mathrm{L}\,\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ находим вектор $\mathbf{v}$ и число λ.

Количество собственных векторов

Из уравнения L $\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$ находим вектор $\mathbf{v}$ и число λ.

Если найдётся один собственный вектор $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, то любой вектор $\mathbf{v}' = c \cdot \mathbf{v}$ также будет собственным:

Количество собственных векторов

Из уравнения $\mathsf{L}\,\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ находим вектор $\mathbf{v}$ и число λ.

Если найдётся один собственный вектор $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, то любой вектор $\mathbf{v}' = c \cdot \mathbf{v}$ также будет собственным:

$$\mathsf{L}\,\mathbf{v}' = \mathsf{L}\,c\mathbf{v} = c\,\mathsf{L}\,\mathbf{v} = c\lambda\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}'.$$

Количество собственных векторов

Из уравнения $\mathsf{L}\,\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ находим вектор $\mathbf{v}$ и число λ.

Если найдётся один собственный вектор $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, то любой вектор $\mathbf{v}' = c \cdot \mathbf{v}$ также будет собственным:

$$\mathsf{L}\,\mathbf{v}' = \mathsf{L}\,c\mathbf{v} = c\,\mathsf{L}\,\mathbf{v} = c\lambda\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}'.$$

Система уравнений $\mathsf{L}\,\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ должна иметь бесконечное количество решений!

Как найти собственные числа?

Перепишем систему $\mathsf{L}\,\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ в виде $(\mathsf{L} - \lambda\mathsf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Как найти собственные числа?

Перепишем систему $\mathsf{L}\,\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ в виде $(\mathsf{L} - \lambda\mathsf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Система имеет бесконечное количество решений, если и только если $\det(\mathsf{L} - \lambda\mathsf{I}) = 0$.

Как найти собственные числа?

Перепишем систему $\mathsf{L}\,\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ в виде $(\mathsf{L} - \lambda\mathsf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Система имеет бесконечное количество решений, если и только если $\det(\mathsf{L} - \lambda\mathsf{I}) = 0$.

Алгоритм

1. Из уравнения $\det(\mathsf{L} - \lambda\mathsf{I}) = 0$ находим собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$.

Как найти собственные числа?

Перепишем систему $\mathsf{L}\,\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ в виде $(\mathsf{L} - \lambda\mathsf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Система имеет бесконечное количество решений, если и только если $\det(\mathsf{L} - \lambda\mathsf{I}) = 0$.

Алгоритм

1. Из уравнения $\det(\mathsf{L} - \lambda\mathsf{I}) = 0$ находим собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$.
2. Для каждого λ_i решаем систему $\det(\mathsf{L} - \lambda_i\mathsf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ относительно $\mathbf{v}$, то есть находим все собственные векторы.

Характеристический многочлен

Определение

Многочлен $\mathrm{char}_{\mathrm{L}}(\lambda) = \det(\mathrm{L} - \lambda \mathrm{I})$ называется характеристическим многочленом линейного оператора L.

Характеристический многочлен

Определение

Многочлен $\mathrm{char}_L(\lambda) = \det(L - \lambda I)$ называется характеристическим многочленом линейного оператора L.

Характеристическим многочленом матрицы называется характеристический многочлен соответствующего линейного оператора.

Характеристический многочлен: пример

Рассмотрим матрицу $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

Характеристический многочлен: пример

Рассмотрим матрицу $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

$$\mathrm{char}_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathrm{I}) = \begin{bmatrix} 4-\lambda & 6 & 0 \\ 6 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 7-\lambda \end{bmatrix} =$$

Характеристический многочлен: пример

Рассмотрим матрицу $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

$$\mathrm{char}_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathrm{I}) = \begin{bmatrix} 4-\lambda & 6 & 0 \\ 6 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 7-\lambda \end{bmatrix} =$$

$$= (7-\lambda) \begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 \\ 6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda)((4-\lambda)^2 - 36) =$$

Характеристический многочлен: пример

Рассмотрим матрицу $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

$$\mathrm{char}_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathrm{I}) = \begin{bmatrix} 4-\lambda & 6 & 0 \\ 6 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 7-\lambda \end{bmatrix} =$$

$$= (7-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 \\ 6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda)((4-\lambda)^2 - 36) =$$

$$= -(\lambda - 7)(\lambda + 2)(\lambda - 10) = -\lambda^3 + 15\lambda^2 - 36\lambda - 140$$

Характеристический многочлен

По характеристическому многочлену можно найти:

Характеристический многочлен

По характеристическому многочлену можно найти:

1. Собственные числа из уравнения $\text{char}_A(\lambda) = 0$.

$$\text{char}_A(\lambda) = -(\lambda - 7)(\lambda + 2)(\lambda - 10)$$

$$\lambda_1 = 7, \ \lambda_2 = -2, \ \lambda_3 = 10.$$

Характеристический многочлен

По характеристическому многочлену можно найти:

1. Собственные числа из уравнения $\mathrm{char}_A(\lambda) = 0$.

$$\mathrm{char}_A(\lambda) = -(\lambda - 7)(\lambda + 2)(\lambda - 10)$$

$$\lambda_1 = 7,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = 10.$$

2. Определитель $\det L$ из равенства $\mathrm{char}_A(0) = \det L$.

$$\mathrm{char}_A(\lambda) = -\lambda^3 + 15\lambda^2 - 36\lambda - 140$$

$$\det A = \mathrm{char}_A(0) = -140.$$

Алгебраическая кратность

Утверждение

По основной теореме алгебры любой многочлен f с действительными коэффициентами можно единственным образом представить в виде:

$$f(x) = (x - x_1)^{k_1} \ldots (x - x_p)^{k_p} g(x),$$

где $x_1, \ldots, x_p \in \mathbb{R}$ — различные корни многочлена f, а многочлен g действительных корней не имеет.

Алгебраическая кратность

Утверждение

По основной теореме алгебры любой многочлен f с действительными коэффициентами можно единственным образом представить в виде:

$$f(x) = (x - x_1)^{k_1} \ldots (x - x_p)^{k_p} g(x),$$

где $x_1, \ldots, x_p \in \mathbb{R}$ — различные корни многочлена f, а многочлен g действительных корней не имеет.

Определение

Число k_i называется алгебраической кратностью корня x_i.

Алгебраическая кратность: пример

Если $\mathrm{char}_A(\lambda) = -(\lambda - 7)^2(\lambda + 3)$, то собственное число $\lambda = 7$ имеет алгебраическую кратность 2, а собственное число $\lambda = -3$ имеет алгебраическую кратность 1.

Алгебраическая кратность: пример

Если $\mathrm{char}_A(\lambda) = -(\lambda - 7)^2(\lambda + 3)$, то собственное число $\lambda = 7$ имеет алгебраическую кратность 2, а собственное число $\lambda = -3$ имеет алгебраическую кратность 1.

Если L $: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, то сумма алгебраических кратностей k_i действительных собственных чисел $\lambda_i \in \mathbb{R}$ не превосходит n:

$$\sum_{i=1}^{p} k_i \leq n.$$

Теорема Гамильтона-Кэли

Утверждение

Если подставить матрицу A в характеристический многочлен $\mathrm{char}_A(\lambda)$, то получится матрица из нулей,

$$\mathrm{char}_A(A) = \mathbf{0};$$

Теорема Гамильтона-Кэли

Утверждение

Если подставить матрицу A в характеристический многочлен $\text{char}_A(\lambda)$, то получится матрица из нулей,

$$\text{char}_A(A) = \mathbf{0};$$

Пример. Если $\text{char}_A(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 8$, то $A^2 - 3A + 8\text{I} = \mathbf{0}$ и $A^2 = 3A - 8\text{I}$.

Нахождение собственных чисел и векторов

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)

Диагонализация матрицы

Краткий план:

- Собственные векторы как линейное пространство.

Краткий план:

- Собственные векторы как линейное пространство.
- Геометрическая кратность собственного вектора.

Краткий план:

- Собственные векторы как линейное пространство.
- Геометрическая кратность собственного вектора.
- Диагонализация матрицы.

Множество собственных векторов

Оператор $\mathsf{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ имеет собственное число $\lambda \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим множество Eig_λ — множество всех собственных векторов, растягивающиеся в λ раз дополненное нулевым вектором $\mathbf{0}$:

$$\mathsf{Eig}_\lambda \mathsf{L} = \{\mathbf{v} \mid \mathsf{L}\,\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}\}.$$

Множество собственных векторов

Оператор $\mathsf{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ имеет собственное число $\lambda \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим множество Eig_λ — множество всех собственных векторов, растягивающиеся в λ раз дополненное нулевым вектором $\mathbf{0}$:

$$\mathsf{Eig}_\lambda \mathsf{L} = \{\mathbf{v} \mid \mathsf{L}\,\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}\}.$$

Утверждение

Множество $\mathsf{Eig}_\lambda \mathsf{L}$ является векторным пространством:

Множество собственных векторов

Оператор $\mathsf{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ имеет собственное число $\lambda \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим множество Eig_λ — множество всех собственных векторов, растягивающиеся в λ раз дополненное нулевым вектором $\mathbf{0}$:

$$\mathsf{Eig}_\lambda \mathsf{L} = \{\mathbf{v} \mid \mathsf{L}\,\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}\}.$$

Утверждение

Множество $\mathsf{Eig}_\lambda \mathsf{L}$ является векторным пространством:

Если вектор $\mathbf{v}$ растягивается в λ раз, то и вектор $t\mathbf{v}$ растягивается в λ раз.

Множество собственных векторов

Оператор $\mathsf{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ имеет собственное число $\lambda \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим множество Eig_λ — множество всех собственных векторов, растягивающиеся в λ раз дополненное нулевым вектором $\mathbf{0}$:

$$\mathsf{Eig}_\lambda \mathsf{L} = \{\mathbf{v} \mid \mathsf{L}\,\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}\}.$$

Утверждение

Множество $\mathsf{Eig}_\lambda \mathsf{L}$ является векторным пространством:

Если вектор $\mathbf{v}$ растягивается в λ раз, то и вектор $t\mathbf{v}$ растягивается в λ раз.

Если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ растягивается в λ раз, то и их сумма $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ растягивается в λ раз.

Геометрическая кратность

Определение

Размерность пространства $\mathrm{Eig}_\lambda L$ называется **геометрической кратностью** собственного числа λ.

Геометрическая кратность

Определение

Размерность пространства $\mathrm{Eig}_{\lambda}\,L$ называется геометрической кратностью собственного числа λ.

Эквивалентное определение

Максимальное количество линейно независимых собственных векторов, соответствующих собственному числу λ называют его геометрической кратностью.

Независимость собственных векторов

Утверждение

Если векторы набора $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ относятся к различным собственным числам, то набор A линейно независимый.

Независимость собственных векторов

Утверждение

Если векторы набора $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ относятся к различным собственным числам, то набор A линейно независимый.

Идея доказательства

Пусть вектора $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ и $\mathbf{v}_3$ растягиваются в 2, 3 и 8 раз соответственно, и $\mathbf{v}_3 = 7\mathbf{v}_1 - 4\mathbf{v}_2$.

Независимость собственных векторов

Утверждение

Если векторы набора $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ относятся к различным собственным числам, то набор A линейно независимый.

Идея доказательства

Пусть вектора $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ и $\mathbf{v}_3$ растягиваются в 2, 3 и 8 раз соответственно, и $\mathbf{v}_3 = 7\mathbf{v}_1 - 4\mathbf{v}_2$.

Домножим A на обе части равенства. $8\mathbf{v}_3 = 2 \cdot 7\mathbf{v}_1 - 3 \cdot 4\mathbf{v}_2$.

Независимость собственных векторов

Утверждение

Если векторы набора $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ относятся к различным собственным числам, то набор A линейно независимый.

Идея доказательства

Пусть вектора $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ и $\mathbf{v}_3$ растягиваются в 2, 3 и 8 раз соответственно, и $\mathbf{v}_3 = 7\mathbf{v}_1 - 4\mathbf{v}_2$.

Домножим A на обе части равенства. $8\mathbf{v}_3 = 2 \cdot 7\mathbf{v}_1 - 3 \cdot 4\mathbf{v}_2$.

Поделим на большее собственное число.

$\mathbf{v}_3 = \frac{2}{8} \cdot 7\mathbf{v}_1 - \frac{3}{8} \cdot 4\mathbf{v}_2$.

Независимость собственных векторов

Утверждение

Если векторы набора $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ относятся к различным собственным числам, то набор A линейно независимый.

Идея доказательства

Пусть вектора $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ и $\mathbf{v}_3$ растягиваются в 2, 3 и 8 раз соответственно, и $\mathbf{v}_3 = 7\mathbf{v}_1 - 4\mathbf{v}_2$.

Домножим A на обе части равенства. $8\mathbf{v}_3 = 2 \cdot 7\mathbf{v}_1 - 3 \cdot 4\mathbf{v}_2$.

Поделим на большее собственное число.

$\mathbf{v}_3 = \frac{2}{8} \cdot 7\mathbf{v}_1 - \frac{3}{8} \cdot 4\mathbf{v}_2$.

Повторим бесконечно много раз. $\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$. Противоречие.

Базис из собственных векторов

Векторы отвечающие различным собственным числам независимы.

Базис из собственных векторов

Векторы отвечающие различным собственным числам независимы.

В каждом пространстве $\mathrm{Eig}_{\lambda_i} L$ найдётся базис из $\gamma_i = \dim \mathrm{Eig}_{\lambda_i} L$ собственных векторов.

Базис из собственных векторов

Векторы отвечающие различным собственным числам независимы.

В каждом пространстве $\operatorname{Eig}_{\lambda_i} L$ найдётся базис из $\gamma_i = \dim \operatorname{Eig}_{\lambda_i} L$ собственных векторов.

Если $\sum_i \gamma_i = n$, то в $\mathbb{R}^n$ существует базис из n векторов, являющихся собственными векторами оператора L.

Диагонализация: обозначения

Допустим, у оператора $\mathsf{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ нашлось n линейно независимых собственных векторов $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$, которым соответствуют собственные числа $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$.

Диагонализация: обозначения

Допустим, у оператора L : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ нашлось n линейно независимых собственных векторов $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$, которым соответствуют собственные числа $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$.

Запишем все собственные векторы в матрицу P столбцами друг за другом.

А в матрицу D поместим все собственные числа на главную диагональ.

$$P = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \vdots & \mathbf{v}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Диагонализация: мне повезёт!

Утверждение

Если у оператора $\mathsf{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ нашлось n линейно независимых собственных векторов $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$, то L представим в виде

$$\mathsf{L} = PDP^{-1}.$$

Диагонализация: мне повезёт!

Утверждение

Если у оператора $\mathsf{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ нашлось n линейно независимых собственных векторов $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$, то L представим в виде

$$\mathsf{L} = PDP^{-1}.$$

Доказательство

Заметим, что $P\mathbf{e}_i = \mathbf{v}_i$, и $\mathsf{L}\,P\mathbf{e}_i = \lambda_i P\mathbf{e}_i$.

Диагонализация: мне повезёт!

Утверждение

Если у оператора L $: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ нашлось n линейно независимых собственных векторов $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$, то L представим в виде

$$\mathsf{L} = PDP^{-1}.$$

Доказательство

Заметим, что $P\mathbf{e}_i = \mathbf{v}_i$, и L $P\mathbf{e}_i = \lambda_i P\mathbf{e}_i$.

Домножаем на P^{-1} и получаем P^{-1} L $P\mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i$.

Диагонализация: мне повезёт!

Утверждение

Если у оператора $\mathsf{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ нашлось n линейно независимых собственных векторов $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$, то L представим в виде

$$\mathsf{L} = PDP^{-1}.$$

Доказательство

Заметим, что $P\mathbf{e}_i = \mathbf{v}_i$, и $\mathsf{L}\,P\mathbf{e}_i = \lambda_i P\mathbf{e}_i$.

Домножаем на P^{-1} и получаем $P^{-1}\,\mathsf{L}\,P\mathbf{e}_i = \lambda_i\mathbf{e}_i$.

Диагональная матрица растягивает базисные вектора, $P^{-1}\,\mathsf{L}\,P\mathbf{e}_i = D\mathbf{e}_i$.

Диагонализация: мне повезёт!

Утверждение

Если у оператора $\mathsf{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ нашлось n линейно независимых собственных векторов $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$, то L представим в виде

$$\mathsf{L} = PDP^{-1}.$$

Доказательство

Заметим, что $P\mathbf{e}_i = \mathbf{v}_i$, и $\mathsf{L}\,P\mathbf{e}_i = \lambda_i P\mathbf{e}_i$.

Домножаем на P^{-1} и получаем $P^{-1}\,\mathsf{L}\,P\mathbf{e}_i = \lambda_i\mathbf{e}_i$.

Диагональная матрица растягивает базисные вектора, $P^{-1}\,\mathsf{L}\,P\mathbf{e}_i = D\mathbf{e}_i$.

$$D = P^{-1}\,\mathsf{L}\,P, \text{ или } \mathsf{L} = PDP^{-1}$$

Диагонализация матрицы

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)

Нахождение проектора

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)

Прогнозирование с помощью мнк

Это скринкаст, слайдов здесь нет :)

Бонус: задача про Чабана и 101 овцу

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)