Определитель и обратная матрица

Идея определителя

Краткий план:

- Определитель на плоскости;

Краткий план:

- Определитель на плоскости;
- Определитель в пространстве.

Идея определителя

Рассмотрим оператор преобразования плоскости,
$\mathsf{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Пара векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ переходит в пару векторов $\mathsf{L}\,\mathbf{a}$, $\mathsf{L}\,\mathbf{b}$.

Идея определителя

Рассмотрим оператор преобразования плоскости,
$\mathsf{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Пара векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ переходит в пару векторов $\mathsf{L}\,\mathbf{a}$, $\mathsf{L}\,\mathbf{b}$.

Как меняется площадь параллелограмма образованного двумя векторами?

Идея определителя

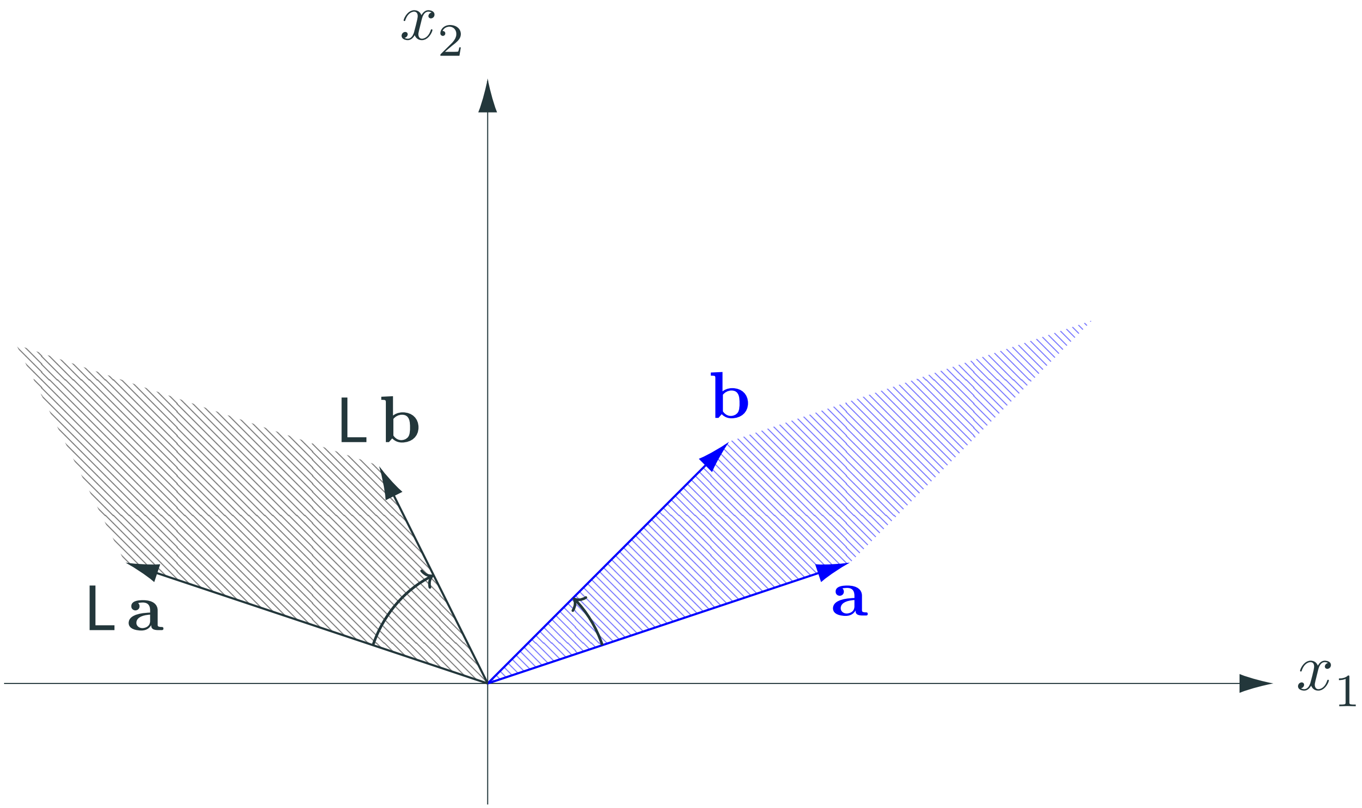
Рассмотрим оператор преобразования плоскости,
$\mathsf{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Пара векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ переходит в пару векторов $\mathsf{L}\,\mathbf{a}$, $\mathsf{L}\,\mathbf{b}$.

Как меняется площадь параллелограмма образованного двумя векторами?

Меняется ли направление поворота от первого вектора ко второму?

Идея определителя на картинке



Ориентированная площадь

Определение

Возьмём площадь параллелограмма со сторонами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Если поворот от первого вектора ко второму идёт по часовой стрелке, то дополнительно домножим площадь на (-1).

Полученное число назовём ориентированной площадью параллелограмма и обозначим $S(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Ориентированная площадь

Определение

Возьмём площадь параллелограмма со сторонами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Если поворот от первого вектора ко второму идёт по часовой стрелке, то дополнительно домножим площадь на (-1).

Полученное число назовём ориентированной площадью параллелограмма и обозначим $S(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Важен порядок векторов:

$$S(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -S(\mathbf{b}, \mathbf{a}).$$

Идея определителя

Определение

Возьмём любые два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, для которых $S(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \neq 0$.

Определитель оператора $\mathsf{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ показывает во сколько раз изменяется ориентированная площадь

$$\det \mathsf{L} = \frac{S(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{a})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b})}$$

Определитель отражения

Рассмотрим оператор L : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$, отражение относительно $x_1 = x_2$.

Определитель отражения

Рассмотрим оператор L : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$, отражение относительно $x_1 = x_2$.

картинка

Определитель отражения

Рассмотрим оператор L : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$, отражение относительно $x_1 = x_2$.

Определитель отражения

Рассмотрим оператор L : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$, отражение относительно $x_1 = x_2$.

Площадь параллелограмма не изменяется.

Меняется направление поворота от первого вектора ко второму.

Определитель отражения

Рассмотрим оператор L : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$, отражение относительно $x_1 = x_2$.

Площадь параллелограмма не изменяется.

Меняется направление поворота от первого вектора ко второму.

$$\det \mathsf{L} = \frac{S(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{b})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b})} = -1$$

Определитель растягивания компонент

Рассмотрим оператор L : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$.

Определитель растягивания компонент

Рассмотрим оператор L $: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$.

Одна сторона растягивается в два раза, вторая — в три раза.

Меняется направление поворота от первого вектора ко второму.

Определитель растягивания компонент

Рассмотрим оператор L : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$.

Одна сторона растягивается в два раза, вторая — в три раза.

Меняется направление поворота от первого вектора ко второму.

$$\det \mathsf{L} = \frac{S(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{b})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b})} = (-1) \cdot 2 \cdot 3 = -6$$

Определитель поворота

Оператор R $: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ вращает плоскость на 30° против часовой стрелки.

Определитель поворота

Оператор R $: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ вращает плоскость на 30° против часовой стрелки.

картинка

Определитель поворота

Оператор R $: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ вращает плоскость на 30° против часовой стрелки.

Определитель поворота

Оператор R $: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ вращает плоскость на 30° против часовой стрелки.

При вращении не изменяется площадь параллелограмма.

При вращении не изменяется направление поворота от первого вектора ко второму.

Определитель поворота

Оператор $\mathsf{R} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ вращает плоскость на 30° против часовой стрелки.

При вращении не изменяется площадь параллелограмма.

При вращении не изменяется направление поворота от первого вектора ко второму.

$$\det \mathsf{R} = \frac{\mathsf{R}(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{b})}{\mathsf{R}(\mathbf{a}, \mathbf{b})} = 1$$

Определитель проекции

Оператор H $: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ проецирует векторы на прямую ℓ.

картинка

Определитель проекции

Оператор H : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ проецирует векторы на прямую ℓ.

картинка

При проекции любой параллелограмм «складывается» в отрезок нулевой площади.

Определитель проекции

Оператор $\mathsf{H} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ проецирует векторы на прямую ℓ.

картинка

При проекции любой параллелограмм «складывается» в отрезок нулевой площади.

$$\det \mathsf{H} = \frac{S(\mathsf{H}\mathbf{a}, \mathsf{H}\mathbf{b})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b})} = 0$$

Чем прекрасна ориентированная площадь?

Утверждение

Ориентированная площадь $S(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ линейна по каждому аргументу:

$$S(\lambda\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \lambda S(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \quad S(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}) = S(\mathbf{a}, \mathbf{c}) + S(\mathbf{b}, \mathbf{c})$$

Чем прекрасна ориентированная площадь?

Утверждение

Ориентированная площадь $S(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ линейна по каждому аргументу:

$$S(\lambda\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \lambda S(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \quad S(\mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{c}) = S(\mathbf{a}, \mathbf{c}) + S(\mathbf{b}, \mathbf{c})$$

здесь картинка.

Корректность идеи определителя

Величина $\det \mathsf{L} = \frac{S(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{b})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b})}$ не зависит от выбора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$!

Корректность идеи определителя

Величина $\det \mathsf{L} = \frac{S(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{b})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b})}$ не зависит от выбора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$!

Идея доказательства

Обозначим $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Корректность идеи определителя

Величина $\det \mathsf{L} = \frac{S(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{b})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b})}$ не зависит от выбора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$!

Идея доказательства

Обозначим $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Возьмём $\mathbf{a} = 5\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2$. Найдём $S(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{e}_2)/S(\mathbf{a}, \mathbf{e}_2)$:

Корректность идеи определителя

Величина $\det \mathsf{L} = \frac{S(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{b})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b})}$ не зависит от выбора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$!

Идея доказательства

Обозначим $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Возьмём $\mathbf{a} = 5\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2$. Найдём $S(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{e}_2)/S(\mathbf{a}, \mathbf{e}_2)$:

$$\frac{S(\mathsf{L}(5\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2), \mathsf{L}\,\mathbf{e}_2)}{S(5\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2)} = \frac{S(\mathsf{L}\,5\mathbf{e}_1, \mathsf{L}\,\mathbf{e}_2) + S(\mathsf{L}\,7\mathbf{e}_2, \mathsf{L}\,\mathbf{e}_2)}{S(5\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + S(7\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2)} =$$

Корректность идеи определителя

Величина $\det \mathsf{L} = \frac{S(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{b})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b})}$ не зависит от выбора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$!

Идея доказательства

Обозначим $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Возьмём $\mathbf{a} = 5\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2$. Найдём $S(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{e}_2)/S(\mathbf{a}, \mathbf{e}_2)$:

$$\frac{S(\mathsf{L}(5\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2), \mathsf{L}\,\mathbf{e}_2)}{S(5\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2)} = \frac{S(\mathsf{L}\,5\mathbf{e}_1, \mathsf{L}\,\mathbf{e}_2) + S(\mathsf{L}\,7\mathbf{e}_2, \mathsf{L}\,\mathbf{e}_2)}{S(5\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + S(7\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2)} =$$

$$= \frac{5S(\mathsf{L}\,\mathbf{e}_1, \mathsf{L}\,\mathbf{e}_2) + 0}{5S(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + 0} = \frac{S(\mathsf{L}\,\mathbf{e}_1, \mathsf{L}\,\mathbf{e}_2)}{S(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)}$$

Ещё один взгляд на определитель

Обозначим $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Ещё один взгляд на определитель

Обозначим $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Определение

Преобразуем параллелограмм, образованный векторами $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, с помощью оператора L.

Определитель линейного оператора $\mathsf{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ равен ориентированной площади полученного параллелограмма.

$$\det \mathsf{L} = S(\mathsf{L}\,\mathbf{e}_1, \mathsf{L}\,\mathbf{e}_2)$$

Определитель в пространстве

Идея: заменим ориентированную площадь параллелограмма $S(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ на ориентированный объём параллелепипеда $S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$.

Определитель в пространстве

Идея: заменим ориентированную площадь параллелограмма $S(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ на ориентированный объём параллелепипеда $S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$.

Определение

Возьмём любые три вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, для которых $S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \neq 0$.

Определитель оператора $\mathsf{L} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ показывает во сколько раз изменяется ориентированный объём

$$\det \mathsf{L} = \frac{S(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{c})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}$$

А что такое ориентированный объём?

А что такое ориентированный объём?

Обозначим $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

А что такое ориентированный объём?

Обозначим $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Определение

Рассмотрим параллелепипед, образованный $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$.

А что такое ориентированный объём?

Обозначим $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Определение

Рассмотрим параллелепипед, образованный $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$.

С помощью поворота:

Совместим вектор $\mathbf{e}_1$ с вектором $\mathbf{a}$;

Затем вектор $\mathbf{e}_2$ «положим» в плоскость $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$.

А что такое ориентированный объём?

Обозначим $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Определение

Рассмотрим параллелепипед, образованный $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$.

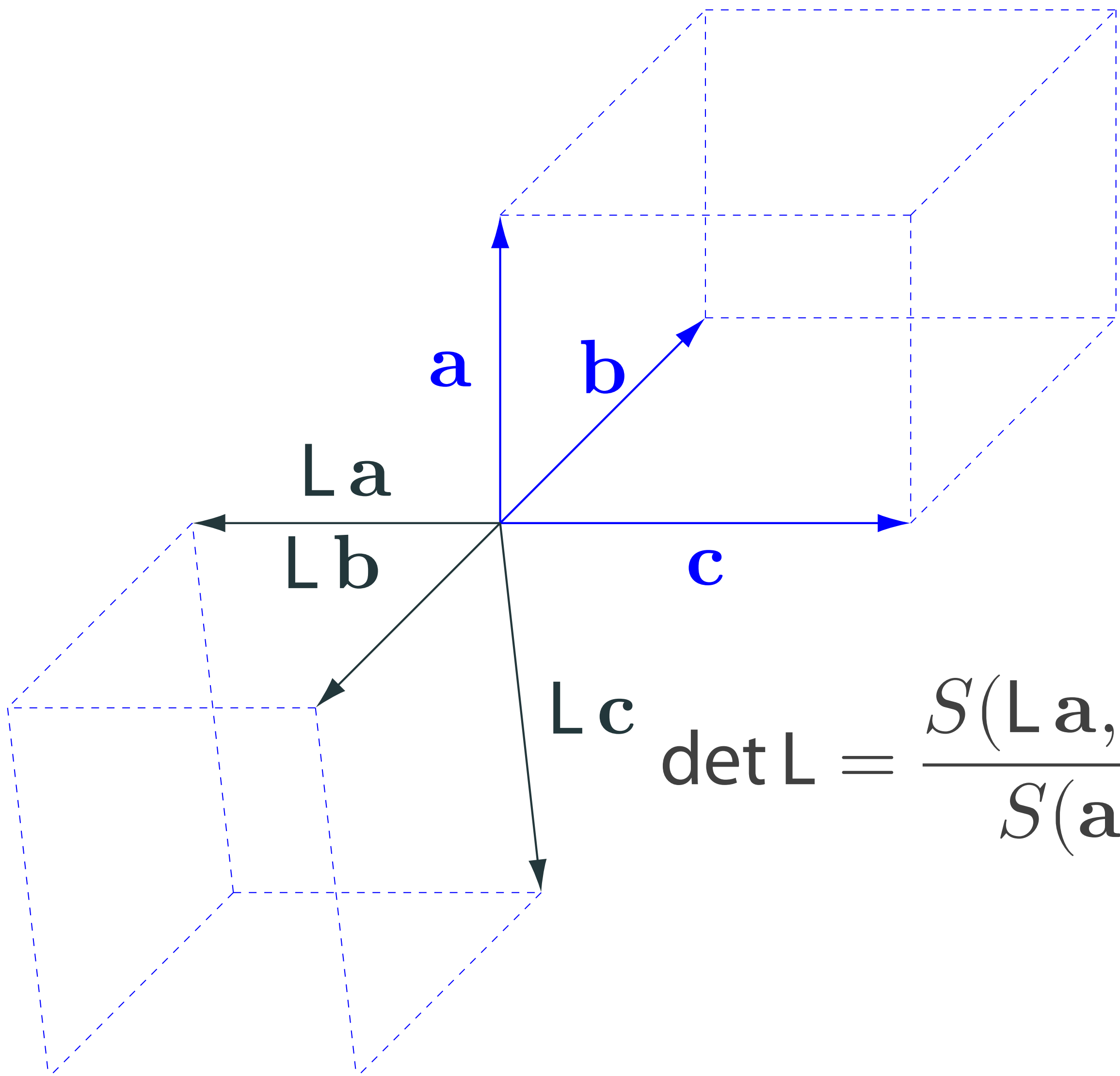
С помощью поворота:

Совместим вектор $\mathbf{e}_1$ с вектором $\mathbf{a}$;

Затем вектор $\mathbf{e}_2$ «положим» в плоскость $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$.

Ориентированный объём $S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ объявим отрицательным, если векторы $\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{c}$ смотрят в разные полупространства.

Определитель в пространстве



$$\det \mathsf{L} = \frac{S(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{b}, \mathsf{L}\,\mathbf{c})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}$$

Определитель растягивания компонент

Рассмотрим оператор L $: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2a_1 \\ 3a_2 \\ -5a_3 \end{pmatrix}.$

Определитель растягивания компонент

Рассмотрим оператор L : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2a_1 \\ 3a_2 \\ -5a_3 \end{pmatrix}$.

Одна сторона растягивается в два раза, вторая — в три раза, третья — в пять.

Первые два вектора не изменяют направления при преобразовании.

Третий вектор меняет полупространство, в котором он лежит относительно первых двух.

Определитель растягивания компонент

Рассмотрим оператор L : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2a_1 \\ 3a_2 \\ -5a_3 \end{pmatrix}$.

Одна сторона растягивается в два раза, вторая — в три раза, третья — в пять.

Первые два вектора не изменяют направления при преобразовании.

Третий вектор меняет полупространство, в котором он лежит относительно первых двух.

$$\det \mathsf{L} = \frac{S(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{b}, \mathsf{L}\,\mathbf{c})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})} = (-1) \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = -30$$

Определитель проекции

Оператор H $: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ проецирует векторы на плоскость α.

Определитель проекции

Оператор H $: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ проецирует векторы на плоскость α.

Любой параллелепипед «схлопывается» в плоскую фигуру нулевого объёма.

Определитель проекции

Оператор $\mathrm{H} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ проецирует векторы на плоскость α.

Любой параллелепипед «схлопывается» в плоскую фигуру нулевого объёма.

$$\det \mathrm{H} = \frac{S(\mathrm{H}\mathbf{a}, \mathrm{H}\mathbf{b}, \mathrm{H}\mathbf{c})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})} = 0$$

Свойства определителя

Краткий план:

- Ориентированный объём в $\mathbb{R}^n$;

Краткий план:

- Ориентированный объём в $\mathbb{R}^n$;
- Свойства определителя;

Краткий план:

- Ориентированный объём в $\mathbb{R}^n$;
- Свойства определителя;
- Явная формула для определителя.

Формализация ориентированного объёма

Вектор $\mathbf{e}_i$ содержит на i-м месте единицу, а на остальных — нули.

Формализация ориентированного объёма

Вектор $\mathbf{e}_i$ содержит на i-м месте единицу, а на остальных — нули.

1. Верный гипер-объём базового гипер-кубика:

$$S(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) = 1$$

Формализация ориентированного объёма

Вектор $\mathbf{e}_i$ содержит на i-м месте единицу, а на остальных — нули.

1. Верный гипер-объём базового гипер-кубика:

$$S(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) = 1$$

2. Линейность по каждому аргументу:

$$S(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n) = S(\mathbf{a}, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n) + \\ + S(\mathbf{b}, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n)$$

$$S(\lambda \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n) = \lambda S(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n)$$

Формализация ориентированного объёма

Вектор $\mathbf{e}_i$ содержит на i-м месте единицу, а на остальных — нули.

1. Верный гипер-объём базового гипер-кубика:

$$S(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) = 1$$

2. Линейность по каждому аргументу:

$$S(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n) = S(\mathbf{a}, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n) +$$
$$+ S(\mathbf{b}, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n)$$
$$S(\lambda \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n) = \lambda S(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n)$$

3. Антисимметричность:

$$S(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n) = -S(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n)$$

Определитель во всей n-мерности

Определение

Возьмём векторы $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$, для которых $S(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) \neq 0$.

Определитель оператора $\mathsf{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ показывает во сколько раз изменяется ориентированный гипер-объём произвольного параллелепипеда:

$$\det \mathsf{L} = \frac{S(\mathsf{L}\,\mathbf{v}_1, \ldots, \mathsf{L}\,\mathbf{v}_n)}{S(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)}$$

Определитель во всей n-мерности

Определение

Возьмём векторы $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$, для которых $S(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) \neq 0$.

Определитель оператора $\mathsf{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ показывает во сколько раз изменяется ориентированный гипер-объём произвольного параллелепипеда:

$$\det \mathsf{L} = \frac{S(\mathsf{L}\,\mathbf{v}_1, \ldots, \mathsf{L}\,\mathbf{v}_n)}{S(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)}$$

Определение

Определитель оператора $\mathsf{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ показывает во сколько раз изменяется ориентированный гипер-объём базового гипер-кубика:

$$\det \mathsf{L} = S(\mathsf{L}\,\mathbf{e}_1, \ldots, \mathsf{L}\,\mathbf{e}_n)$$

Определитель матрицы

Определение

Определителем матрицы называется определитель соответствующего линейного оператора.

Определитель матрицы

Определение

Определителем матрицы называется определитель соответствующего линейного оператора.

В матрице L i-й столбец равен L $\mathbf{e}_i$, поэтому

$$\det \mathsf{L} = S(\mathrm{col}_1 \mathsf{L}, \mathrm{col}_2 \mathsf{L}, \ldots, \mathrm{col}_n \mathsf{L})$$

Определитель матрицы

Определение

Определителем матрицы называется определитель соответствующего линейного оператора.

В матрице L i-й столбец равен $\mathsf{L}\,\mathbf{e}_i$, поэтому

$$\det \mathsf{L} = S(\mathrm{col}_1 \mathsf{L}, \mathrm{col}_2 \mathsf{L}, \ldots, \mathrm{col}_n \mathsf{L})$$

Утверждение

Определитель матрицы можно считать по строкам:

$$\det \mathsf{L} = S(\mathrm{row}_1 \mathsf{L}, \mathrm{row}_2 \mathsf{L}, \ldots, \mathrm{row}_n \mathsf{L})$$

Быстрые признаки равенства нулю

1. Если среди векторов есть два одинаковых, то гипер-объём параллелепипеда равен нулю.

$$S(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n) = 0$$

Быстрые признаки равенства нулю

1. Если среди векторов есть два одинаковых, то гипер-объём параллелепипеда равен нулю.

$$S(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n) = 0$$

2. Если среди векторов есть один нулевой, то гипер-объём параллелепипеда равен нулю.

$$S(\mathbf{0}, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n) = 0$$

Принцип Кавальери

«Скашивание» параллелепипеда вбок не изменяет гипер-объём:

$$S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_n) = S(\mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{b}, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_n)$$

картинка

Принцип Кавальери на матрице

Единственным ненулевым элементом столбца можно «скосить» всю строку:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ \color{red}{4} & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \to$$

Принцип Кавальери на матрице

Единственным ненулевым элементом столбца можно «скосить» всю строку:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \to$$

Принцип Кавальери на матрице

Единственным ненулевым элементом столбца можно «скосить» всю строку:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ {\color{red}4} & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ {\color{red}4} & {\color{green}0} & 7 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ {\color{red}4} & {\color{green}0} & {\color{green}0} \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

Принцип Кавальери на матрице

Единственным ненулевым элементом столбца можно «скосить» всю строку:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

Единственным ненулевым элементом строки можно «скосить» весь столбец:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \to$$

Принцип Кавальери на матрице

Единственным ненулевым элементом столбца можно «скосить» всю строку:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ \color{red}{4} & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ \color{red}{4} & \color{green}{0} & 7 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ \color{red}{4} & \color{green}{0} & \color{green}{0} \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

Единственным ненулевым элементом строки можно «скосить» весь столбец:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ \color{red}{4} & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \color{green}{0} & 3 & -2 \\ \color{red}{4} & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \to$$

Принцип Кавальери на матрице

Единственным ненулевым элементом столбца можно «скосить» всю строку:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

Единственным ненулевым элементом строки можно «скосить» весь столбец:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

Определитель и ранг

Утверждение

Для матрицы L размера $n \times n$ четыре свойства эквиваленты:

1. Определитель равен нулю, $\det \mathrm{L} = 0$.

Определитель и ранг

Утверждение

Для матрицы L размера $n \times n$ четыре свойства эквиваленты:

1. Определитель равен нулю, $\det \mathrm{L} = 0$.
2. Столбцы матрицы линейно зависимы.

Определитель и ранг

Утверждение

Для матрицы L размера $n \times n$ четыре свойства эквиваленты:

1. Определитель равен нулю, $\det \mathrm{L} = 0$.
2. Столбцы матрицы линейно зависимы.
3. Строки матрицы линейно зависимы.

Определитель и ранг

Утверждение

Для матрицы L размера $n \times n$ четыре свойства эквиваленты:

1. Определитель равен нулю, $\det \mathsf{L} = 0$.
2. Столбцы матрицы линейно зависимы.
3. Строки матрицы линейно зависимы.
4. Ранг матрицы меньше числа столбцов, $\operatorname{rank} \mathsf{L} < n$.

Определитель композиции

Утверждение

Определитель композиции A и B равен произведению определителей:

$$\det(AB) = \det A \det B$$

Определитель композиции

Утверждение

Определитель композиции A и B равен произведению определителей:

$$\det(AB) = \det A \det B$$

Следствие

$$\det A \det A^{-1} = \det(A \cdot A^{-1}) = \det \mathrm{I} = 1$$

Спокойствие, только спокойствие!

Утверждение

Свойства нормировки, линейности по аргументам и антисимметричности однозначно определяют функцию гипер-объёма $S(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$.

Спокойствие, только спокойствие!

Утверждение

Свойства нормировки, линейности по аргументам и антисимметричности однозначно определяют функцию гипер-объёма $S(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$.

Утверждение

Отношение гипер-объёмов $\det \mathsf{L} = \frac{S(\mathsf{L}\,\mathbf{v}_1, \dots, \mathsf{L}\,\mathbf{v}_n)}{S(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)}$ не зависит от выбора $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$.

Формула с перестановками

Определение

Перестановкой называют последовательность из n чисел, в которой каждое число от 1 до n встречается ровно один раз.

Формула с перестановками

Определение

Перестановкой называют последовательность из n чисел, в которой каждое число от 1 до n встречается ровно один раз.

Примеры: (12345), (32145), (21354).

Формула с перестановками

Определение

Перестановкой называют последовательность из n чисел, в которой каждое число от 1 до n встречается ровно один раз.

Примеры: (12345), (32145), (21354).

Определение

Перестановку называют чётной, если требуется чётное число смен местами двух чисел, чтобы привести перестановку к $(1234 \ldots n)$.

Если σ — чётная перестановка, то пишут $\operatorname{sign} \sigma = 1$, для нечётной пишут $\operatorname{sign} \sigma = -1$.

Формула с перестановками

Определение

Перестановкой называют последовательность из n чисел, в которой каждое число от 1 до n встречается ровно один раз.

Примеры: (12345), (32145), (21354).

Определение

Перестановку называют чётной, если требуется чётное число смен местами двух чисел, чтобы привести перестановку к $(1234\dots n)$.

Если σ — чётная перестановка, то пишут $\operatorname{sign}\sigma = 1$, для нечётной пишут $\operatorname{sign}\sigma = -1$.

Примеры:

$\operatorname{sign}(12345) = 1$, $\operatorname{sign}(32145) = -1$, $\operatorname{sign}(21354) = 1$.

Расстановка ладей!

Рассмотрим квадратную матрицу.

Перестановку σ будем трактовать как инструкцию, какой элемент взять из очередной строки матрицы.

$$(3124) \sim \begin{pmatrix} . & . & * & . \\ * & . & . & . \\ . & * & . & . \\ . & . & . & * \end{pmatrix}$$

Расстановка ладей!

Рассмотрим квадратную матрицу.

Перестановку σ будем трактовать как инструкцию, какой элемент взять из очередной строки матрицы.

$$(3124) \sim \begin{pmatrix} . & . & * & . \\ * & . & . & . \\ . & * & . & . \\ . & . & . & * \end{pmatrix}$$

С помощью $p(\sigma)$ обозначим произведение этих элементов.

Например, $p(3124) = a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{44}$.

Явная формула

Утверждение

Трём свойствам определителя (нормировке, линейности, антисимметричности) удовлетворяет единственная функция

$$\det \mathsf{L} = \sum_{\sigma} \mathsf{sign}(\sigma) \cdot p(\sigma).$$

Перестановку σ трактуем как инструкцию, какой элемент взять из очередной строки матрицы.

С помощью $p(\sigma)$ обозначено произведение этих элементов.

Иллюстрация для 2×2

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} =$$

Иллюстрация для 2×2

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \underset{\text{sign}(12)=1}{\begin{pmatrix} a & \\ & d \end{pmatrix}} - \underset{\text{sign}(21)=-1}{\begin{pmatrix} & b \\ c & \end{pmatrix}} =$$

Иллюстрация для 2×2

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & \\ & d \end{pmatrix}}_{\textsf{sign}(12)=1} - \underbrace{\begin{pmatrix} & b \\ c & \end{pmatrix}}_{\textsf{sign}(21)=-1} = ad - bc$$

Иллюстрация для 3×3

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} =$$

Иллюстрация для 3×3

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} =$$

$$= + \begin{pmatrix} a & & \\ & e & \\ & & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & & c \\ d & & \\ & h & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & b & \\ & & f \\ g & & \end{pmatrix}$$

$\text{sign}(123)=1$ $\quad$ $\text{sign}(312)=1$ $\quad$ $\text{sign}(231)=1$

$$- \begin{pmatrix} & & c \\ & e & \\ g & & \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} & b & \\ d & & \\ & & i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & & \\ & & f \\ & h & \end{pmatrix} =$$

$\text{sign}(321)=-1$ $\quad$ $\text{sign}(213)=-1$ $\quad$ $\text{sign}(132)=-1$

Иллюстрация для 3×3

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} =$$

$$= + \underbrace{\begin{pmatrix} a & & \\ & e & \\ & & i \end{pmatrix}}_{\text{sign}(123)=1} + \underbrace{\begin{pmatrix} & & c \\ d & & \\ & h & \end{pmatrix}}_{\text{sign}(312)=1} + \underbrace{\begin{pmatrix} & b & \\ & & f \\ g & & \end{pmatrix}}_{\text{sign}(231)=1}$$

$$- \underbrace{\begin{pmatrix} & & c \\ & e & \\ g & & \end{pmatrix}}_{\text{sign}(321)=-1} - \underbrace{\begin{pmatrix} & b & \\ d & & \\ & & i \end{pmatrix}}_{\text{sign}(213)=-1} - \underbrace{\begin{pmatrix} a & & \\ & & f \\ & h & \end{pmatrix}}_{\text{sign}(132)=-1} =$$

$$= aei + cdh + bfg - ceg - bdi - afh$$

Вычисление определителя

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)

Метод Гаусса

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)

Метод Крамера

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)

Метод Крамера и нахождение обратной матрицы

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)

Комплексные числа

бонусное видео! Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)