Векторы и операторы

Вектор: длина и скалярное произведение

Краткое напутствие

Зачем нужна линейная алгебра?

- Линейная алгебра прекрасна сама по себе!

Краткое напутствие

Зачем нужна линейная алгебра?

- Линейная алгебра прекрасна сама по себе!
- Работает «под капотом» практически всех методов машинного обучения.

Краткий план:

- Вектор — это столбец чисел.

Краткий план:

- Вектор — это столбец чисел.
- Сложение двух векторов и умножение на число.

Краткий план:

- Вектор — это столбец чисел.
- Сложение двух векторов и умножение на число.
- Расстояние и косинус угла между векторами.

Вектор

Рабочее определение

Вектор — столбец из нескольких чисел.

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 3 \\ -3.45 \end{pmatrix}$$

Вектор

Рабочее определение

Вектор — столбец из нескольких чисел.

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 3 \\ -3.45 \end{pmatrix}$$

Идея вектора

Вектор — всё, что можно описать столбцом из нескольких чисел.

Вектор

Рабочее определение

Вектор — столбец из нескольких чисел.

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 3 \\ -3.45 \end{pmatrix}$$

Идея вектора

Вектор — всё, что можно описать столбцом из нескольких чисел.

Мы не пишем стрелочку над вектором.

Вектор

Рабочее определение

Вектор — столбец из нескольких чисел.

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 3 \\ -3.45 \end{pmatrix}$$

Идея вектора

Вектор — всё, что можно описать столбцом из нескольких чисел.

Мы не пишем стрелочку над вектором.

Вектор из нулей обозначаем $\mathbf{0}$.

Пространство $\mathbb{R}^n$

Определение

Пространство $\mathbb{R}^n$:

Множество всех возможных векторов из n чисел.

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| x_1 \in \mathbb{R}, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

Пространство $\mathbb{R}^n$

Определение

Пространство $\mathbb{R}^n$:

Множество всех возможных векторов из n чисел.

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| x_1 \in \mathbb{R}, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

Определение

Размерность пространства $\mathbb{R}^n$:

Количество чисел в каждом векторе, n.

Длина вектора

Евклид, около 300 лет до н.э.

wikipedia.org / общественное достояние

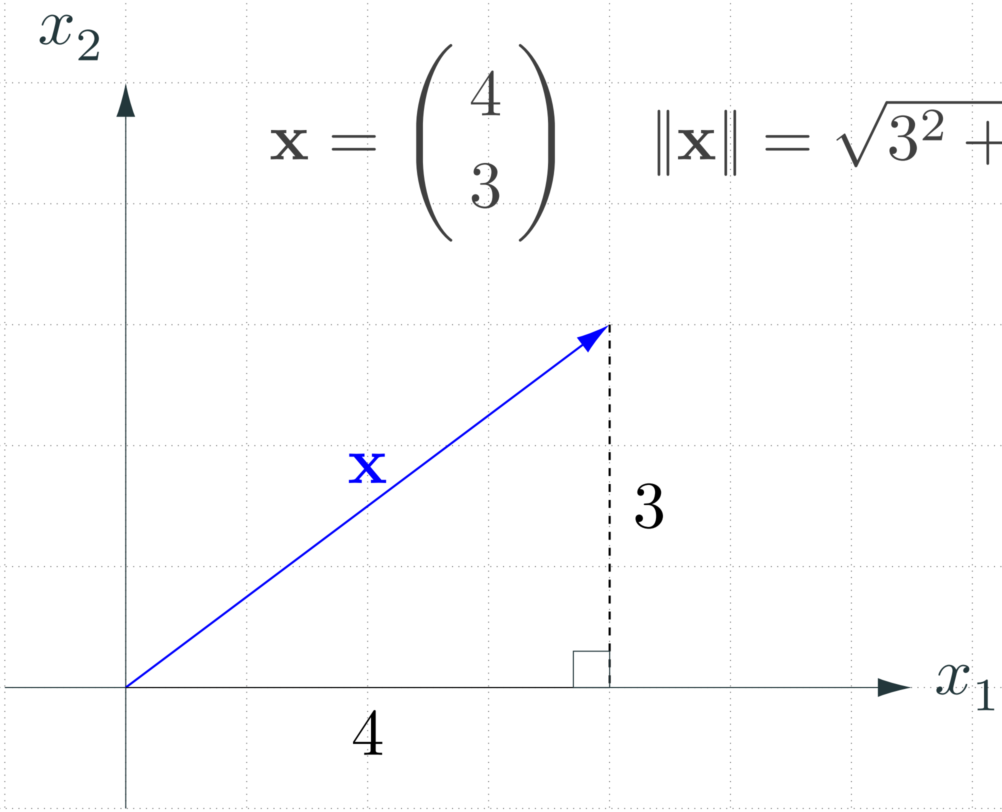
Определение

Евклидова длина или норма вектора

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Длина вектора

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \|\mathbf{x}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

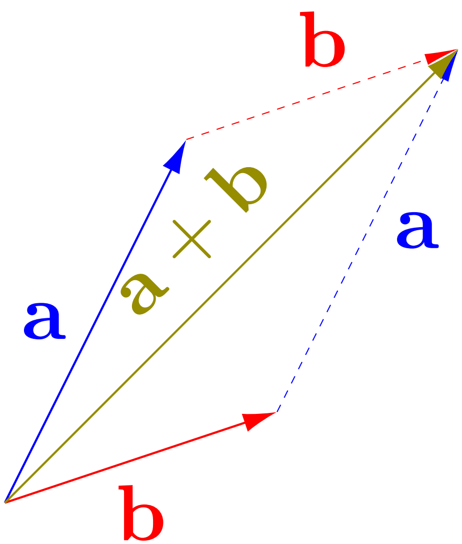


Сложение и вычитание двух векторов

Определение

Сложение и вычитание двух векторов выполняем поэлементно:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3.5 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

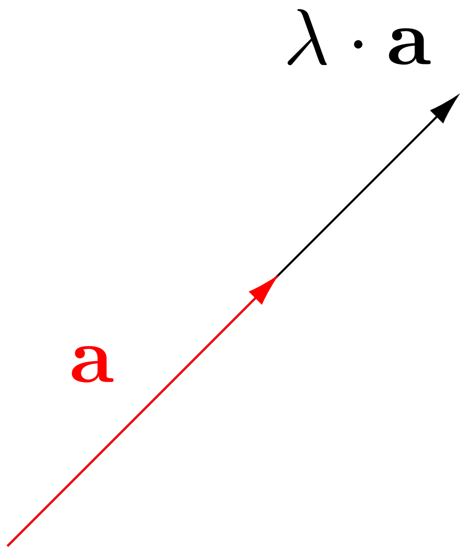


Умножение вектора на число

Определение

Умножение вектора на число выполняем поэлеметно:

$$4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3.5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \\ -4 \end{pmatrix}$$



Расстояние между векторами

Определение

Евклидово расстояние между векторами

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + ... + (a_n - b_n)^2}$$

Расстояние между векторами

Определение

Евклидово расстояние между векторами

$$d(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \|\mathbf{a}-\mathbf{b}\| = \sqrt{(a_1-b_1)^2+\ldots+(a_n-b_n)^2}$$

По определению, $d(\mathbf{a},\mathbf{b}) \geq 0$.

Также говорят Евклидова метрика.

Расстояние между векторами

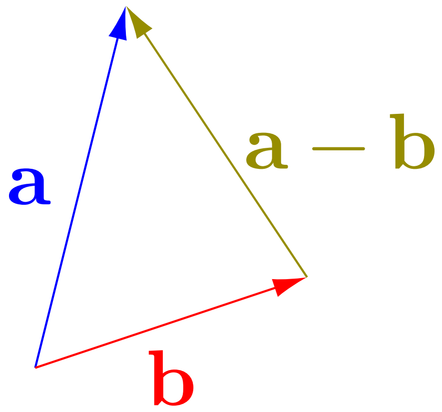
Определение

Евклидово расстояние между векторами

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + ... + (a_n - b_n)^2}$$

По определению, $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \geq 0$.

Также говорят Евклидова метрика.



Скалярное произведение и угол

Определение

Скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n.$$

Скалярное произведение и угол

Определение

Скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$:

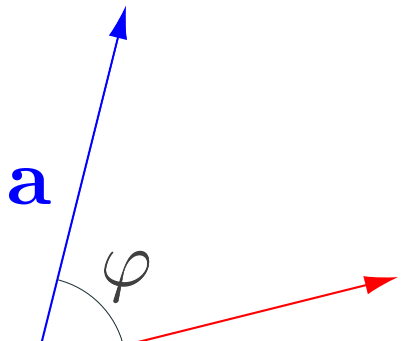
$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n.$$

Определение

Косинус угла и угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$:

$$\cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|} \quad \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \arccos \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}$$

Угол определён, если $\|\mathbf{a}\| > 0$ и $\|\mathbf{b}\| > 0$.



Свойства скалярного произведения

- Скалярное произведение вектора на себя равно квадрату длины $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = \|\mathbf{a}\|^2$

Свойства скалярного произведения

- Скалярное произведение вектора на себя равно квадрату длины $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = \|\mathbf{a}\|^2$
- Линейность по каждому аргументу
  $\langle \lambda\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \lambda\mathbf{b} \rangle = \lambda\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$
  $\langle \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$

Свойства скалярного произведения

- Скалярное произведение вектора на себя равно квадрату длины $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = \|\mathbf{a}\|^2$
- Линейность по каждому аргументу
  $\langle \lambda \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \lambda \mathbf{b} \rangle = \lambda \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$
  $\langle \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$
- Симметричность
  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle$

Свойства скалярного произведения

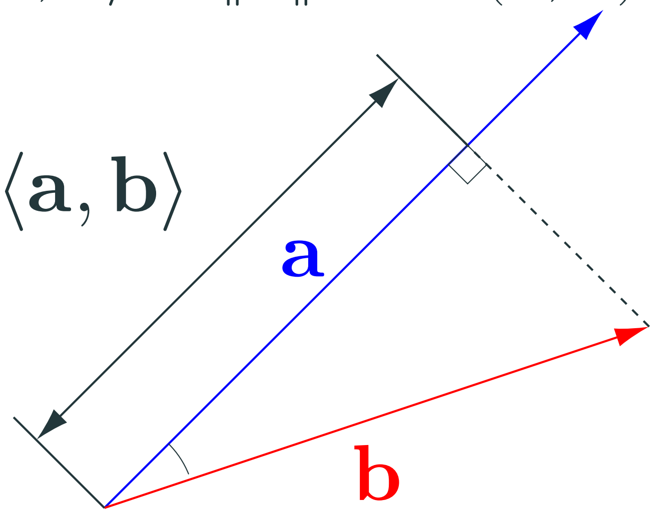
- Скалярное произведение вектора на себя равно квадрату длины $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = \|\mathbf{a}\|^2$
- Линейность по каждому аргументу
  $\langle \lambda\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \lambda\mathbf{b} \rangle = \lambda\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$
  $\langle \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$
- Симметричность
  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle$
- Скалярное произведение для ненулевых векторов
  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$

Скалярное произведение и проекция

- Следствие формулы $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$

Скалярное произведение и проекция

- Следствие формулы $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$
- Если вектор $\mathbf{a}$ имеет единичную длину, $\|\mathbf{a}\| = 1$, то $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{b}\| \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ — длина* проекции b на a.



Ортогональность векторов

Определение

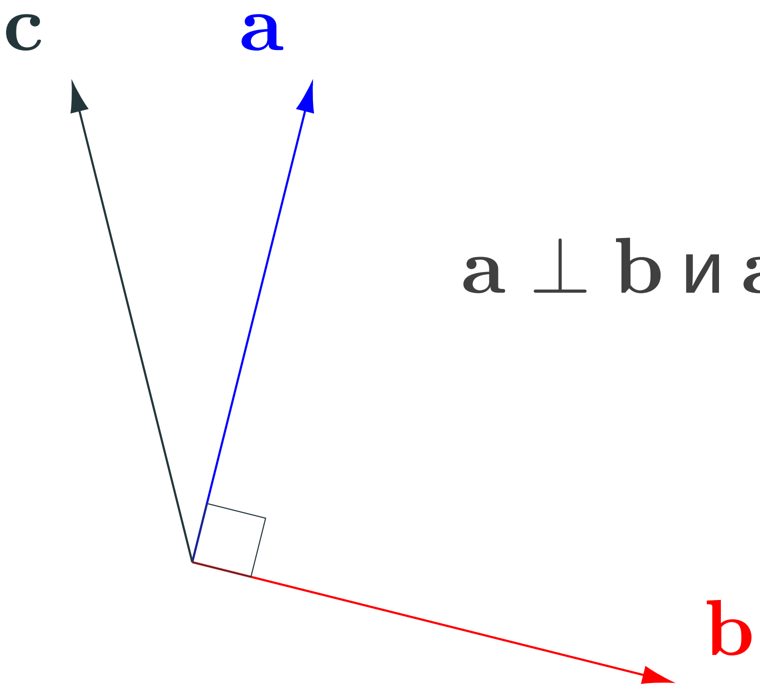
Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ ортогональны, $a \perp b$, если

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0$$

Также говорят «перпендикулярны».

Ортогональность векторов

Для ненулевых векторов $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$:



$\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ и $\mathbf{a} \not\perp \mathbf{c}$