Спектральное разложение

Собственные числа и векторы

Краткий план:

- Собственные числа и собственные векторы матрицы.

Краткий план:

- Собственные числа и собственные векторы матрицы.
- Характеристический многочлен.

Краткий план:

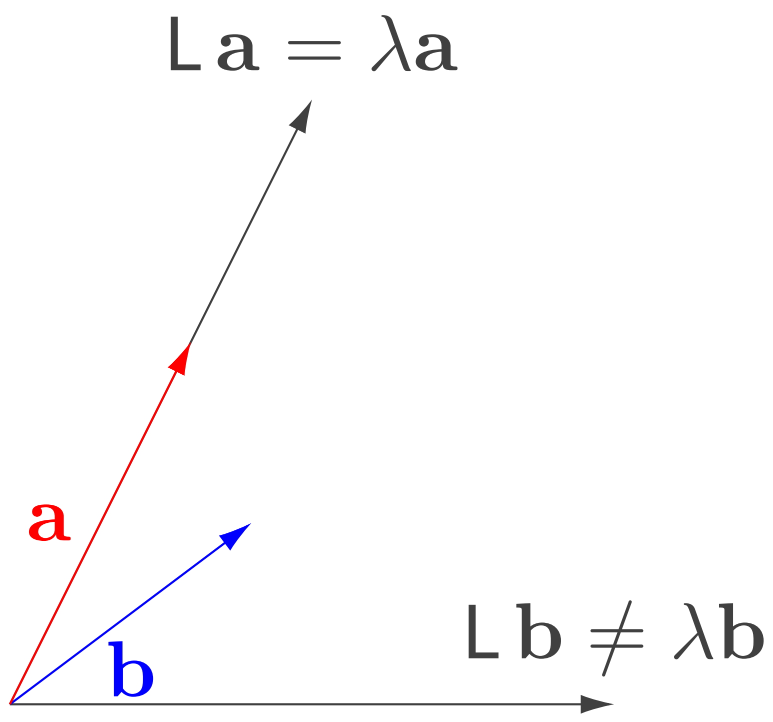
- Собственные числа и собственные векторы матрицы.
- Характеристический многочлен.
- Алгебраическая кратность.

От оператора к матрице

Определение

Если для оператора $\mathrm{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ найдётся такой ненулевой вектор $\mathbf{v}$, что $\mathrm{L}\,\mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v}$, где $\lambda \in \mathbb{R}$, то:

- вектор $\mathbf{v}$ называется собственным вектором;
- число λ называется собственным числом.



Собственные числа и векторы матрицы

Определение

Собственными числами и собственными векторами матрицы размера $n \times n$ называются собственные числа и векторы соответствующего линейного оператора.

Собственные числа и векторы матрицы

Определение

Собственными числами и собственными векторами матрицы размера $n \times n$ называются собственные числа и векторы соответствующего линейного оператора.

Для абстрактного векторного пространства V матрица $\mathrm{L}_{\mathbf{ee}}$ линейного оператора $\mathrm{L} : V \to V$ зависит от выбора базиса $\mathbf{e}$. При этом выбор базиса $\mathbf{e}$ никак не влияет на собственные числа и собственные векторы.

Количество собственных векторов

Из уравнения L $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ находим вектор $\mathbf{v}$ и число λ.

Количество собственных векторов

Из уравнения L $\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$ находим вектор $\mathbf{v}$ и число λ.

Если найдётся один собственный вектор $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, то любой вектор $\mathbf{v}' = c \cdot \mathbf{v}$ также будет собственным:

Количество собственных векторов

Из уравнения $\mathsf{L}\,\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ находим вектор $\mathbf{v}$ и число λ.

Если найдётся один собственный вектор $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, то любой вектор $\mathbf{v}' = c \cdot \mathbf{v}$ также будет собственным:

$$\mathsf{L}\,\mathbf{v}' = \mathsf{L}\,c\mathbf{v} = c\,\mathsf{L}\,\mathbf{v} = c\lambda\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}'.$$

Количество собственных векторов

Из уравнения $\mathsf{L}\,\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ находим вектор $\mathbf{v}$ и число λ.

Если найдётся один собственный вектор $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, то любой вектор $\mathbf{v}' = c \cdot \mathbf{v}$ также будет собственным:

$$\mathsf{L}\,\mathbf{v}' = \mathsf{L}\,c\mathbf{v} = c\,\mathsf{L}\,\mathbf{v} = c\lambda\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}'.$$

Система уравнений $\mathsf{L}\,\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ должна иметь бесконечное количество решений!

Как найти собственные числа?

Перепишем систему $\mathsf{L}\,\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ в виде $(\mathsf{L} - \lambda\mathsf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Как найти собственные числа?

Перепишем систему $\mathsf{L}\,\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ в виде $(\mathsf{L} - \lambda\mathsf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Система имеет бесконечное количество решений, если и только если $\det(\mathsf{L} - \lambda\mathsf{I}) = 0$.

Как найти собственные числа?

Перепишем систему $\mathsf{L}\,\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ в виде $(\mathsf{L} - \lambda\mathsf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Система имеет бесконечное количество решений, если и только если $\det(\mathsf{L} - \lambda\mathsf{I}) = 0$.

Алгоритм

1. Из уравнения $\det(\mathsf{L} - \lambda\mathsf{I}) = 0$ находим собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$.

Как найти собственные числа?

Перепишем систему $\mathsf{L}\,\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ в виде $(\mathsf{L} - \lambda\mathsf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Система имеет бесконечное количество решений, если и только если $\det(\mathsf{L} - \lambda\mathsf{I}) = 0$.

Алгоритм

1. Из уравнения $\det(\mathsf{L} - \lambda\mathsf{I}) = 0$ находим собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$.
2. Для каждого λ_i решаем систему $(\mathsf{L} - \lambda_i\mathsf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ относительно $\mathbf{v}$, то есть находим все собственные векторы.

Характеристический многочлен

Определение

Многочлен $\mathrm{char}_{\mathsf{L}}(\lambda) = \det(\mathsf{L} - \lambda \mathsf{I})$ называется *характеристическим многочленом* линейного оператора L.

Характеристический многочлен

Определение

Многочлен $\operatorname{char}_L(\lambda) = \det(L - \lambda I)$ называется *характеристическим многочленом* линейного оператора L.

Характеристическим многочленом матрицы называется характеристический многочлен соответствующего линейного оператора.

Характеристический многочлен: пример

Рассмотрим матрицу $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$

Характеристический многочлен: пример

Рассмотрим матрицу $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

$$\mathrm{char}_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathrm{I}) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 & 0 \\ 6 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 7-\lambda \end{vmatrix} =$$

Характеристический многочлен: пример

Рассмотрим матрицу $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

$$\mathrm{char}_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathrm{I}) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 & 0 \\ 6 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 7-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (7-\lambda) \begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 \\ 6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda)((4-\lambda)^2 - 36) =$$

Характеристический многочлен: пример

Рассмотрим матрицу $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$

$$\mathrm{char}_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathrm{I}) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 & 0 \\ 6 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 7-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (7-\lambda) \begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 \\ 6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda)((4-\lambda)^2 - 36) =$$

$$= -(\lambda - 7)(\lambda + 2)(\lambda - 10) = -\lambda^3 + 15\lambda^2 - 36\lambda - 140$$

Характеристический многочлен

По характеристическому многочлену можно найти:

Характеристический многочлен

По характеристическому многочлену можно найти:

1. Собственные числа A из уравнения $\text{char}_A(\lambda) = 0$.

$$\text{char}_A(\lambda) = -(\lambda - 7)(\lambda + 2)(\lambda - 10)$$

$$\lambda_1 = 7, \ \lambda_2 = -2, \ \lambda_3 = 10.$$

Характеристический многочлен

По характеристическому многочлену можно найти:

1. Собственные числа A из уравнения $\text{char}_A(\lambda) = 0$.

$$\text{char}_A(\lambda) = -(\lambda - 7)(\lambda + 2)(\lambda - 10)$$

$$\lambda_1 = 7,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = 10.$$

2. Определитель A из равенства $\text{char}_A(0) = \det(A - 0 \cdot \text{I})$.

$$\text{char}_A(\lambda) = -\lambda^3 + 15\lambda^2 - 36\lambda - 140$$

$$\det A = \text{char}_A(0) = -140.$$

Алгебраическая кратность

Утверждение

По основной теореме алгебры любой многочлен f с действительными коэффициентами можно единственным образом представить в виде:

$$f(x) = (x - x_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x - x_p)^{k_p} g(x),$$

где $x_1, \ldots, x_p \in \mathbb{R}$ — различные корни многочлена f, а многочлен g действительных корней не имеет.

Алгебраическая кратность

Утверждение

По основной теореме алгебры любой многочлен f с действительными коэффициентами можно единственным образом представить в виде:

$$f(x) = (x - x_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x - x_p)^{k_p} g(x),$$

где $x_1, \ldots, x_p \in \mathbb{R}$ — различные корни многочлена f, а многочлен g действительных корней не имеет.

Определение

Число k_i называется алгебраической кратностью корня x_i.

Алгебраическая кратность: пример

Если $\operatorname{char}_A(\lambda) = -(\lambda - 7)^2(\lambda + 3)$, то собственное число $\lambda = 7$ имеет алгебраическую кратность 2, а собственное число $\lambda = -3$ имеет алгебраическую кратность 1.

Алгебраическая кратность: пример

Если $\text{char}_A(\lambda) = -(\lambda - 7)^2(\lambda + 3)$, то собственное число $\lambda = 7$ имеет алгебраическую кратность 2, а собственное число $\lambda = -3$ имеет алгебраическую кратность 1.

Если L : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, то сумма алгебраических кратностей k_i действительных собственных чисел $\lambda_i \in \mathbb{R}$ не превосходит n:

$$\sum_{i=1}^{p} k_i \leq n.$$

Теорема Гамильтона-Кэли

Утверждение

Если подставить матрицу A в характеристический многочлен $\mathrm{char}_A(\lambda)$, то получится матрица из нулей,

$$\mathrm{char}_A(A) = \mathbf{0};$$

Теорема Гамильтона-Кэли

Утверждение

Если подставить матрицу A в характеристический многочлен $\text{char}_A(\lambda)$, то получится матрица из нулей,

$$\text{char}_A(A) = \mathbf{0};$$

Пример. Если $\text{char}_A(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 8$, то $A^2 - 3A + 8\mathrm{I} = \mathbf{0}$ и $A^2 = 3A - 8\mathrm{I}$.

Нахождение собственных чисел и векторов

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)

Диагонализация матрицы

Краткий план:

- Собственные векторы как линейное пространство.

Краткий план:

- Собственные векторы как линейное пространство.
- Геометрическая кратность собственных чисел.

Краткий план:

- Собственные векторы как линейное пространство.
- Геометрическая кратность собственных чисел.
- Диагонализация матрицы.

Множество собственных векторов

Оператор $\mathsf{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ имеет собственное число $\lambda \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим множество Eig_λ — множество всех собственных векторов, растягивающихся в λ раз, дополненное нулевым вектором $\mathbf{0}$:

$$\mathrm{Eig}_\lambda \mathsf{L} = \{\mathbf{v} \mid \mathsf{L}\,\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}\}.$$

Множество собственных векторов

Оператор $\mathsf{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ имеет собственное число $\lambda \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим множество Eig_λ — множество всех собственных векторов, растягивающихся в λ раз, дополненное нулевым вектором $\mathbf{0}$:

$$\mathsf{Eig}_\lambda \mathsf{L} = \{\mathbf{v} \mid \mathsf{L}\,\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}\}.$$

Утверждение

Множество $\mathsf{Eig}_\lambda \mathsf{L}$ является векторным пространством:

Множество собственных векторов

Оператор $\mathsf{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ имеет собственное число $\lambda \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим множество Eig_λ — множество всех собственных векторов, растягивающихся в λ раз, дополненное нулевым вектором $\mathbf{0}$:

$$\mathrm{Eig}_\lambda \mathsf{L} = \{\mathbf{v} \mid \mathsf{L}\,\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}\}.$$

Утверждение

Множество $\mathrm{Eig}_\lambda \mathsf{L}$ является векторным пространством:

Если вектор $\mathbf{v}$ растягивается в λ раз, то и вектор $t\mathbf{v}$ растягивается в λ раз.

Множество собственных векторов

Оператор $\mathsf{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ имеет собственное число $\lambda \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим множество Eig_λ — множество всех собственных векторов, растягивающихся в λ раз, дополненное нулевым вектором $\mathbf{0}$:

$$\mathsf{Eig}_\lambda \mathsf{L} = \{\mathbf{v} \mid \mathsf{L}\,\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}\}.$$

Утверждение

Множество $\mathsf{Eig}_\lambda \mathsf{L}$ является векторным пространством:

Если вектор $\mathbf{v}$ растягивается в λ раз, то и вектор $t\mathbf{v}$ растягивается в λ раз.

Если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ растягивается в λ раз, то и их сумма $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ растягивается в λ раз.

Геометрическая кратность

Определение

Размерность пространства $\mathrm{Eig}_{\lambda}\,\mathrm{L}$ называется **геометрической кратностью** собственного числа $\lambda \in \mathbb{R}$.

Геометрическая кратность

Определение

Размерность пространства $\operatorname{Eig}_\lambda L$ называется геометрической кратностью собственного числа $\lambda \in \mathbb{R}$.

Эквивалентное определение

Максимальное количество линейно независимых собственных векторов, соответствующих собственному числу $\lambda \in \mathbb{R}$ называют его геометрической кратностью.

Разные кратности связаны!

Утверждение

Геометрическая кратность собственного числа $\lambda \in \mathbb{R}$ не превосходит его алгебраической кратности и не меньше единицы.

Разные кратности связаны!

Утверждение

Геометрическая кратность собственного числа $\lambda \in \mathbb{R}$ не превосходит его алгебраической кратности и не меньше единицы.

Пример. У матрицы A характеристический многочлен равен $\mathrm{char}_A(\lambda) = -(\lambda - 7)(\lambda - 9)^2$.

Разные кратности связаны!

Утверждение

Геометрическая кратность собственного числа $\lambda \in \mathbb{R}$ не превосходит его алгебраической кратности и не меньше единицы.

Пример. У матрицы A характеристический многочлен равен $\operatorname{char}_A(\lambda) = -(\lambda - 7)(\lambda - 9)^2$.

Числу $\lambda = 7$ соответствует ровно один линейно независимый собственный вектор.

Разные кратности связаны!

Утверждение

Геометрическая кратность собственного числа $\lambda \in \mathbb{R}$ не превосходит его алгебраической кратности и не меньше единицы.

Пример. У матрицы A характеристический многочлен равен $\mathrm{char}_A(\lambda) = -(\lambda - 7)(\lambda - 9)^2$.

Числу $\lambda = 7$ соответствует ровно один линейно независимый собственный вектор.

Числу $\lambda = 9$ соответствуют один или два линейно независимых собственных вектора.

Независимость собственных векторов

Утверждение

Если векторы набора $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ относятся к различным собственным числам, то набор A линейно независимый.

Независимость собственных векторов

Утверждение

Если векторы набора $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ относятся к различным собственным числам, то набор A линейно независимый.

Идея доказательства

Пусть вектора $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ и $\mathbf{v}_3$ растягиваются в 2, 3 и 8 раз соответственно, и $\mathbf{v}_3 = 7\mathbf{v}_1 - 4\mathbf{v}_2$.

Независимость собственных векторов

Утверждение

Если векторы набора $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ относятся к различным собственным числам, то набор A линейно независимый.

Идея доказательства

Пусть вектора $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ и $\mathbf{v}_3$ растягиваются в 2, 3 и 8 раз соответственно, и $\mathbf{v}_3 = 7\mathbf{v}_1 - 4\mathbf{v}_2$.

Домножим A на обе части равенства, $8\mathbf{v}_3 = 2 \cdot 7\mathbf{v}_1 - 3 \cdot 4\mathbf{v}_2$.

Независимость собственных векторов

Утверждение

Если векторы набора $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ относятся к различным собственным числам, то набор A линейно независимый.

Идея доказательства

Пусть вектора $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ и $\mathbf{v}_3$ растягиваются в 2, 3 и 8 раз соответственно, и $\mathbf{v}_3 = 7\mathbf{v}_1 - 4\mathbf{v}_2$.

Домножим A на обе части равенства, $8\mathbf{v}_3 = 2 \cdot 7\mathbf{v}_1 - 3 \cdot 4\mathbf{v}_2$.

Поделим на большее собственное число,
$\mathbf{v}_3 = \frac{2}{8} \cdot 7\mathbf{v}_1 - \frac{3}{8} \cdot 4\mathbf{v}_2$.

Независимость собственных векторов

Утверждение

Если векторы набора $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ относятся к различным собственным числам, то набор A линейно независимый.

Идея доказательства

Пусть вектора $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ и $\mathbf{v}_3$ растягиваются в 2, 3 и 8 раз соответственно, и $\mathbf{v}_3 = 7\mathbf{v}_1 - 4\mathbf{v}_2$.

Домножим A на обе части равенства, $8\mathbf{v}_3 = 2 \cdot 7\mathbf{v}_1 - 3 \cdot 4\mathbf{v}_2$.

Поделим на большее собственное число,
$\mathbf{v}_3 = \frac{2}{8} \cdot 7\mathbf{v}_1 - \frac{3}{8} \cdot 4\mathbf{v}_2$.

Повторим бесконечно много раз, $\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$. Противоречие.

Базис из собственных векторов

Векторы отвечающие различным собственным числам независимы.

Базис из собственных векторов

Векторы отвечающие различным собственным числам независимы.

В каждом пространстве $\mathrm{Eig}_{\lambda_i} L$ найдётся базис из $\gamma_i = \dim \mathrm{Eig}_{\lambda_i} L$ собственных векторов.

Базис из собственных векторов

Векторы отвечающие различным собственным числам независимы.

В каждом пространстве $\mathrm{Eig}_{\lambda_i} L$ найдётся базис из $\gamma_i = \dim \mathrm{Eig}_{\lambda_i} L$ собственных векторов.

Утверждение

Если $\sum_i \gamma_i = n$, то в $\mathbb{R}^n$ существует базис из n векторов, являющихся собственными векторами оператора L.

Диагонализация: обозначения

Допустим, у оператора $\mathsf{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ нашлось n линейно независимых собственных векторов $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$, которым соответствуют собственные числа $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$.

Диагонализация: обозначения

Допустим, у оператора L : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ нашлось n линейно независимых собственных векторов $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$, которым соответствуют собственные числа $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$.

Запишем все собственные векторы в матрицу P столбцами друг за другом.

А в матрицу D поместим все собственные числа на главную диагональ.

$$P = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \ldots & \mathbf{v}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Диагонализация: мне повезёт!

Утверждение

Если у оператора $\mathsf{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ нашлось n линейно независимых собственных векторов $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$, то L представим в виде

$$\mathsf{L} = PDP^{-1}.$$

Диагонализация: мне повезёт!

Утверждение

Если у оператора $\mathsf{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ нашлось n линейно независимых собственных векторов $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$, то L представим в виде

$$\mathsf{L} = PDP^{-1}.$$

Доказательство

Заметим, что $P\mathbf{e}_i = \mathbf{v}_i$, и $\mathsf{L}\,P\mathbf{e}_i = \lambda_i P\mathbf{e}_i$.

Диагонализация: мне повезёт!

Утверждение

Если у оператора L $: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ нашлось n линейно независимых собственных векторов $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$, то L представим в виде

$$\mathsf{L} = PDP^{-1}.$$

Доказательство

Заметим, что $P\mathbf{e}_i = \mathbf{v}_i$, и L $P\mathbf{e}_i = \lambda_i P\mathbf{e}_i$.

Домножаем на P^{-1} и получаем P^{-1} L $P\mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i$.

Диагонализация: мне повезёт!

Утверждение

Если у оператора $\mathsf{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ нашлось n линейно независимых собственных векторов $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$, то L представим в виде

$$\mathsf{L} = PDP^{-1}.$$

Доказательство

Заметим, что $P\mathbf{e}_i = \mathbf{v}_i$, и $\mathsf{L}\,P\mathbf{e}_i = \lambda_i P\mathbf{e}_i$.

Домножаем на P^{-1} и получаем $P^{-1}\,\mathsf{L}\,P\mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i$.

Диагональная матрица растягивает базисные вектора, $P^{-1}\,\mathsf{L}\,P\mathbf{e}_i = D\mathbf{e}_i$.

Диагонализация: мне повезёт!

Утверждение

Если у оператора $\mathsf{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ нашлось n линейно независимых собственных векторов $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$, то L представим в виде

$$\mathsf{L} = PDP^{-1}.$$

Доказательство

Заметим, что $P\mathbf{e}_i = \mathbf{v}_i$, и $\mathsf{L}\,P\mathbf{e}_i = \lambda_i P\mathbf{e}_i$.

Домножаем на P^{-1} и получаем $P^{-1}\,\mathsf{L}\,P\mathbf{e}_i = \lambda_i\mathbf{e}_i$.

Диагональная матрица растягивает базисные вектора, $P^{-1}\,\mathsf{L}\,P\mathbf{e}_i = D\mathbf{e}_i$.

$$D = P^{-1}\,\mathsf{L}\,P, \text{ или } \mathsf{L} = PDP^{-1}$$

Диагонализация матрицы

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)

След матрицы

Краткий план:

- Сумма диагональных элементов.

Краткий план:

- Сумма диагональных элементов.
- Свойства следа.

След квадратной матрицы

Определение

Следом квадратной матрицы L называют сумму её диагональных элементов.

$$\operatorname{tr} \mathrm{L} = \ell_{11} + \ell_{22} + \ldots + \ell_{nn}$$

След квадратной матрицы

Определение

Следом квадратной матрицы L называют сумму её диагональных элементов.

$$\mathrm{tr}\, \mathrm{L} = \ell_{11} + \ell_{22} + \ldots + \ell_{nn}$$

Пример. $\mathrm{tr} \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} = 4 + 1 = 5.$

Основное свойство следа

Утверждение

Если матрицы A и B имеют размер $n \times k$, то

$$\operatorname{tr} A^T B = \sum_{ij} a_{ij} b_{ij} = \operatorname{tr} B^T A$$

Основное свойство следа

Утверждение

Если матрицы A и B имеют размер $n \times k$, то

$$\operatorname{tr} A^T B = \sum_{ij} a_{ij} b_{ij} = \operatorname{tr} B^T A$$

Пример. $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$.

$$\operatorname{tr} A^T B = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4$$

Основное свойство следа

Утверждение

Если матрицы A и B имеют размер $n \times k$, то

$$\operatorname{tr} A^T B = \sum_{ij} a_{ij} b_{ij} = \operatorname{tr} B^T A$$

Доказательство

$$\operatorname{tr} A^T B = \sum_i \langle \operatorname{row}_i A^T, \operatorname{col}_i B \rangle =$$

$$= \sum_i \langle \operatorname{col}_i A, \operatorname{col}_i B \rangle = \sum_{ij} a_{ij} b_{ij}$$

И ещё немного свойств

Если A имеет размер $n \times k$, а B — размер $k \times n$, то:

$$\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$$

И ещё немного свойств

Если A имеет размер $n \times k$, а B — размер $k \times n$, то:

$$\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$$

След — линейный оператор, превращающий матрицы размера $n \times n$ в числа!

И ещё немного свойств

Если A имеет размер $n \times k$, а B — размер $k \times n$, то:

$$\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$$

След — линейный оператор, превращающий матрицы размера $n \times n$ в числа!

$$\operatorname{tr} \lambda A = \lambda \operatorname{tr} A$$

$$\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$$

Зачем нужен след?

Зачем нужен след?

Элегантно позволяет записывать сложные выражения.

$$\sum_{ij} a_{ij}^2 = \operatorname{tr} A^T A$$

Зачем нужен след?

Элегантно позволяет записывать сложные выражения.

$$\sum_{ij} a_{ij}^2 = \operatorname{tr} A^T A$$

Упрощает теоретические выкладки.

Вокруг собственных чисел

Краткий план:

- Реинкарнация теоремы Виета.

Краткий план:

- Реинкарнация теоремы Виета.
- Обратимость и собственные числа.

Краткий план:

- Реинкарнация теоремы Виета.
- Обратимость и собственные числа.
- Собственные числа проектора.

Характеристический многочлен и след

Рассмотрим пример характеристического многочлена:

$$\mathrm{char}_B(\lambda) = \mathrm{det}(B - \lambda \mathrm{I}) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 5 & 6 \\ 1 & 2-\lambda & 2 \\ 4 & 3 & 7-\lambda \end{vmatrix} =$$

Характеристический многочлен и след

Рассмотрим пример характеристического многочлена:

$$\mathrm{char}_B(\lambda) = \det(B - \lambda \mathrm{I}) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 5 & 6 \\ 1 & 2-\lambda & 2 \\ 4 & 3 & 7-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (4-\lambda)(2-\lambda)(7-\lambda) + \ldots = -\lambda^3 + \lambda^2(4+2+7) + \ldots$$

Характеристический многочлен и след

Рассмотрим пример характеристического многочлена:

$$\mathrm{char}_B(\lambda) = \mathrm{det}(B - \lambda \mathrm{I}) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 5 & 6 \\ 1 & 2-\lambda & 2 \\ 4 & 3 & 7-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (4-\lambda)(2-\lambda)(7-\lambda) + \ldots = -\lambda^3 + \lambda^2(4+2+7) + \ldots$$

$$= -\lambda^3 + \mathrm{tr}\, A \cdot \lambda^2 + \ldots$$

Характеристический многочлен и след

Утверждение

В характеристическом многочлене $\operatorname{char}_A(\lambda)$ матрицы A размера $n \times n$ перед λ^{n-1} стоит $(-1)^{n-1} \operatorname{tr} A$:

$$\operatorname{char}_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \operatorname{tr} A \lambda^{n-1} + \dots$$

Характеристический многочлен и след

Утверждение

В характеристическом многочлене $\operatorname{char}_A(\lambda)$ матрицы A размера $n \times n$ перед λ^{n-1} стоит $(-1)^{n-1} \operatorname{tr} A$:

$$\operatorname{char}_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \operatorname{tr} A \lambda^{n-1} + \ldots$$

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \; \operatorname{char}_A(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 3$$

Характеристический многочлен и след

Утверждение

В характеристическом многочлене $\mathrm{char}_A(\lambda)$ матрицы A размера $n \times n$ перед λ^{n-1} стоит $(-1)^{n-1}$ tr A:

$$\mathrm{char}_A(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}\,\mathrm{tr}\,A\lambda^{n-1} + \ldots$$

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \ \mathrm{char}_A(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 3$$

Пример.

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}, \ \mathrm{char}_B(\lambda) = -\lambda^3 + 13\lambda^2 + \ldots$$

Реинкарнация теоремы Виета

Утверждение

Если у матрицы A размера $n \times n$ ровно n действительных собственных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, то

Реинкарнация теоремы Виета

Утверждение

Если у матрицы A размера $n \times n$ ровно n действительных собственных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, то

$$\operatorname{char}_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdot \ldots \cdot (\lambda_n - \lambda)$$

Реинкарнация теоремы Виета

Утверждение

Если у матрицы A размера $n \times n$ ровно n действительных собственных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, то

$$\mathrm{char}_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdot \ldots \cdot (\lambda_n - \lambda)$$

Следствия

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i;$$

Реинкарнация теоремы Виета

Утверждение

Если у матрицы A размера $n \times n$ ровно n действительных собственных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, то

$$\operatorname{char}_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdot \ldots \cdot (\lambda_n - \lambda)$$

Следствия

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i;$$

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i;$$

Пополним критерий вырожденности!

Матрица A размера $n \times n$ называется вырожденной, если:

1. $\det A = 0$;
2. Система $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ имеет бесконечное количество решений;
3. Система $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ имеет ноль или бесконечное количество решений;
4. $\operatorname{rank} A < n$;
5. Столбцы A линейно зависимы;
6. Строки A линейно зависимы;
7. A^{-1} не существует;
8. У матрицы A есть $\lambda = 0$.

Собственные числа проектора

Оператор H : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ проецирует $\mathbb{R}^n$ на некоторую линейную оболочку M.

Собственные числа проектора

Оператор H $: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ проецирует $\mathbb{R}^n$ на некоторую линейную оболочку M.

Утверждение

Собственные числа проектора H равны 0 или 1.

Собственные числа проектора

Оператор H $: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ проецирует $\mathbb{R}^n$ на некоторую линейную оболочку M.

Утверждение

Собственные числа проектора H равны 0 или 1.

Собственными векторами с $\lambda = 0$ будут векторы, ортогональные M.

Собственные числа проектора

Оператор H $: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ проецирует $\mathbb{R}^n$ на некоторую линейную оболочку M.

Утверждение

Собственные числа проектора H равны 0 или 1.

Собственными векторами с $\lambda = 0$ будут векторы, ортогональные M.

Собственными векторами с $\lambda = 1$ будут векторы из M.

Собственные числа проектора

Оператор H : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ проецирует $\mathbb{R}^n$ на некоторую линейную оболочку M.

Утверждение

Собственные числа проектора H равны 0 или 1.

Собственными векторами с $\lambda = 0$ будут векторы, ортогональные M.

Собственными векторами с $\lambda = 1$ будут векторы из M.

У проектора ровно n линейно независимых собственных векторов.

Ранг и след проектора

Оператор H $: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ проецирует $\mathbb{R}^n$ на некоторую линейную оболочку M.

Ранг и след проектора

Оператор H : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ проецирует $\mathbb{R}^n$ на некоторую линейную оболочку M.

Ранг проектора — число элементов в базисе M.

Ранг и след проектора

Оператор H : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ проецирует $\mathbb{R}^n$ на некоторую линейную оболочку M.

Ранг проектора — число элементов в базисе M.

След проектора — кратность собственного числа $\lambda = 1$:

$$\text{tr}\, H = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n$$

Ранг и след проектора

Оператор H $: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ проецирует $\mathbb{R}^n$ на некоторую линейную оболочку M.

Ранг проектора — число элементов в базисе M.

След проектора — кратность собственного числа $\lambda = 1$:

$$\operatorname{tr} H = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$$

Утверждение

Для проектора H след и ранг равны размерности множества, на которое проецирует H,

$$\operatorname{rank} \mathrm{H} = \operatorname{tr} \mathrm{H}.$$

Комплексные собственные числа

Краткий план:

- Комплексные числа.

Краткий план:

- Комплексные числа.
- Основная теорема алгебры.

Краткий план:

- Комплексные числа.
- Основная теорема алгебры.
- Снова след и определитель.

Комплексные числа как мистика

Множество $\mathbb{C}$ вида

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

с естественным сложением и умножением по правилу $i^2 = -1$ называется множеством комплексных чисел.

Комплексные числа как мистика

Множество $\mathbb{C}$ вида

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

с естественным сложением и умножением по правилу $i^2 = -1$ называется множеством комплексных чисел.

Пример.

$$(5 + 6i) + (2 + i) = 7 + 7i$$

Комплексные числа как мистика

Множество $\mathbb{C}$ вида

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

с естественным сложением и умножением по правилу $i^2 = -1$ называется множеством комплексных чисел.

Пример.

$$(5 + 6i) + (2 + i) = 7 + 7i$$

$$(5 + 6i)(2 + i) = 10 + 17i + 6i^2 = 10 - 6 + 17i = 4 + 17i$$

Комплексные числа как мистика

Множество $\mathbb{C}$ вида

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

с естественным сложением и умножением по правилу $i^2 = -1$ называется множеством комплексных чисел.

Пример.

$$(5 + 6i) + (2 + i) = 7 + 7i$$

$$(5 + 6i)(2 + i) = 10 + 17i + 6i^2 = 10 - 6 + 17i = 4 + 17i$$

$$\frac{5 + 6i}{2 - i} = \frac{(5 + 6i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{4 + 17i}{4 - i^2} = \frac{4}{5} + \frac{17}{5}i$$

Комплексные числа как операторы

Идея

Комплексное число $a + bi$ — способ записывать повороты плоскости, растяжения плоскости и композиции этих действий.

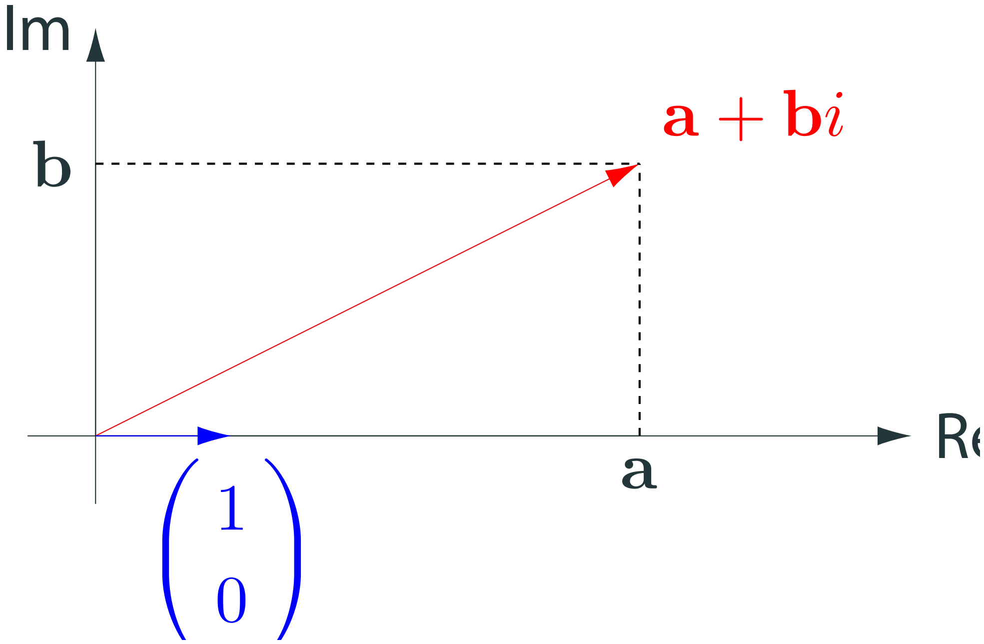
Комплексные числа как операторы

Идея

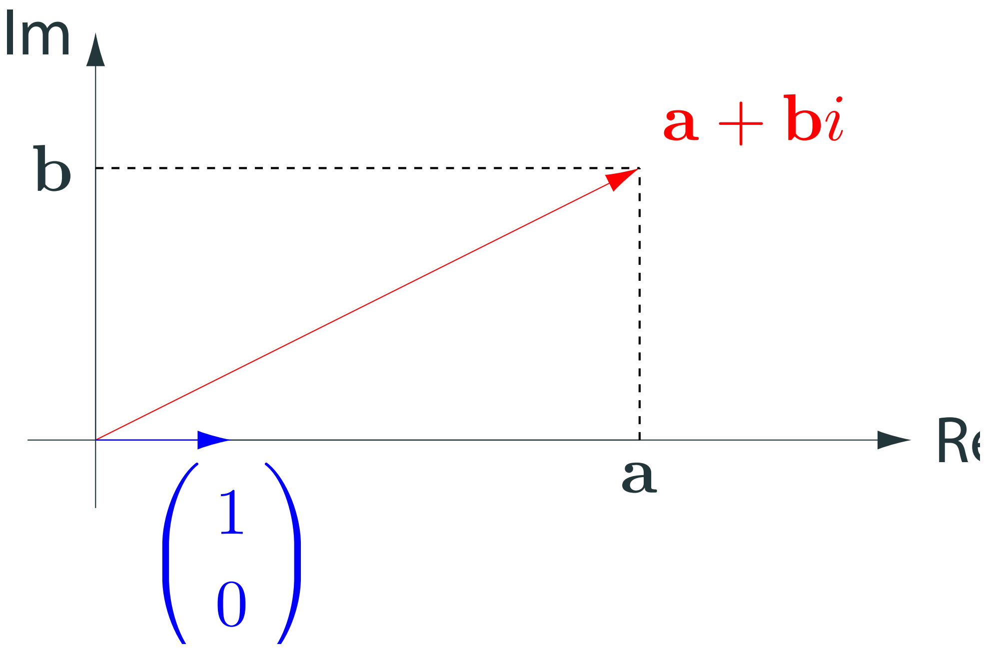
Комплексное число $a + bi$ — способ записывать повороты плоскости, растяжения плоскости и композиции этих действий.

$a + bi \ \leftrightarrow$ преобразование плоскости!

Комплексные числа как операторы



Комплексные числа как операторы



Число $a+bi$ кодирует преобразование плоскости

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}.$$

Никакой мистики!

Поворот на 90°:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow 0 + 1 \cdot i = i$$

Никакой мистики!

Поворот на 90°:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow 0 + 1 \cdot i = i$$

Растягивание в 7 раз:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow 7 + 0 \cdot i = 7$$

Никакой мистики!

Поворот на 90°:

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \leftrightarrow 0 + 1 \cdot i = i$$

Растягивание в 7 раз:

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix} \leftrightarrow 7 + 0 \cdot i = 7$$

Растягивание в $\sqrt{2}$ раз и вращение на 45°:

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \leftrightarrow 1 + 1 \cdot i = 1 + i$$

Никакой мистики!

Поворот на 90°:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow 0 + 1 \cdot i = i$$

Два поворота подряд на 90°:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow -1 + 0i = -1$$

Никакой мистики!

Поворот на 90°:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow 0 + 1 \cdot i = i$$

Два поворота подряд на 90°:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow -1 + 0i = -1$$

Если повернуться на 90°, а затем повернуться ещё на 90°, то развернёшься в обратную сторону, $i \cdot i = -1$.

Комплексные числа как операторы

Определение

Множество $\mathbb{C}$ преобразований плоскости, включающее повороты плоскости, растяжения плоскости в произвольное количество раз и композиции этих двух действий, называется множеством комплексных чисел.

Комплексные числа как операторы

Определение

Множество $\mathbb{C}$ преобразований плоскости, включающее повороты плоскости, растяжения плоскости в произвольное количество раз и композиции этих двух действий, называется множеством комплексных чисел.

Растягивание в 7 раз $\leftrightarrow 7$.

Комплексные числа как операторы

Определение

Множество $\mathbb{C}$ преобразований плоскости, включающее повороты плоскости, растяжения плоскости в произвольное количество раз и композиции этих двух действий, называется множеством комплексных чисел.

Растягивание в 7 раз $\leftrightarrow 7$.

Поворот на $90^\circ \leftrightarrow i$.

Комплексные числа как операторы

Определение

Множество $\mathbb{C}$ преобразований плоскости, включающее повороты плоскости, растяжения плоскости в произвольное количество раз и композиции этих двух действий, называется множеством комплексных чисел.

Растягивание в 7 раз $\leftrightarrow 7$.

Поворот на $90^\circ \leftrightarrow i$.

Для $z \in \mathbb{C}$ определяют:

Модуль $|z|$ — во сколько раз изменяется длина вектора.

Аргумент $\arg z$ — на сколько изменяется угол вектора.

Основная теорема алгебры

Утверждение

Любой многочлен $f(z)$ степени n имеет ровно n корней, если считать корни $z \in \mathbb{C}$ с учётом алгебраической кратности.

Основная теорема алгебры

Утверждение

Любой многочлен $f(z)$ степени n имеет ровно n корней, если считать корни $z \in \mathbb{C}$ с учётом алгебраической кратности.

$$f(z) = a(z - z_1)(z - z_2) \cdot \ldots \cdot (z - z_n)$$

Основная теорема алгебры

Утверждение

Любой многочлен $f(z)$ степени n имеет ровно n корней, если считать корни $z \in \mathbb{C}$ с учётом алгебраической кратности.

$$f(z) = a(z - z_1)(z - z_2) \cdot \ldots \cdot (z - z_n)$$

Следствие

У любой квадратной матрицы размера $n \times n$ найдётся ровно n комплексных собственных чисел $\lambda \in \mathbb{C}$ с учётом алгебраической кратности.

След линейного оператора

Определение

Следом линейного оператора $\mathsf{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ называют сумму всех его комплексных собственных чисел $\lambda_i \in \mathbb{C}$,

$$\operatorname{tr} \mathsf{L} = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n.$$

След линейного оператора

Определение

Следом линейного оператора $\mathsf{L}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ называют сумму всех его комплексных собственных чисел $\lambda_i \in \mathbb{C}$,

$$\operatorname{tr}\mathsf{L} = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n.$$

Пример. Если $\operatorname{char}_A(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda - 5)^2$, то $\operatorname{tr} A = 1 + 5 + 5 = 11$.

След линейного оператора

Определение

Следом линейного оператора $\mathsf{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ называют сумму всех его комплексных собственных чисел $\lambda_i \in \mathbb{C}$,

$$\operatorname{tr} \mathsf{L} = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n.$$

Пример. Если $\operatorname{char}_A(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda - 5)^2$, то $\operatorname{tr} A = 1 + 5 + 5 = 11$.

Пример. Если $\operatorname{char}_A(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda - 2 + 3i)(\lambda - 2 - 3i)$, то $\operatorname{tr} A = 1 + (2 - 3i) + (2 + 3i) = 5$.

Определитель линейного оператора

Утверждение

Определитель линейного оператора $\mathsf{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ равен произведению всех его комплексных собственных чисел $\lambda_i \in \mathbb{C}$,

$$\det \mathsf{L} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n.$$

Нахождение проектора

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)

Прогнозирование с помощью мнк

Это скринкаст, слайдов здесь нет :)

Бонус: задача про Чабана и 101 овцу

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)