

# Квадратичные формы

# Квадратичная форма

# Краткий план:

- Определение квадратичной формы.

# Краткий план:

- Определение квадратичной формы.
- Определённость формы.

# Квадратичная форма

## Определение

Многочлен от нескольких переменных  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , который содержит только слагаемые вида  $x_i^2$  и  $x_i x_j$  квадратичной формой.

# Квадратичная форма

## Определение

Многочлен от нескольких переменных  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , который содержит только слагаемые вида  $x_i^2$  и  $x_i x_j$  квадратичной формой.

Функция  $f(x, y) = x^2 + 6xy - 7y^2$  — квадратичная форма.

# Квадратичная форма

## Определение

Многочлен от нескольких переменных  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , который содержит только слагаемые вида  $x_i^2$  и  $x_i x_j$  квадратичной формой.

Функция  $f(x, y) = x^2 + 6xy - 7y^2$  — квадратичная форма.

Функция  $f(x, y, z) = x^2 + 6xz - 8xy + 3z + 9$  — не квадратичная форма.

# Зачем нужны квадратичные формы?

Многие функции хорошо аппроксимируются суммой вида

$$f(x, y) \approx 6 + 2x + 4y + 7x^2 + 8xy - 9y^2$$



# Зачем нужны квадратичные формы?

Многие функции хорошо аппроксимируются суммой вида

$$f(x, y) \approx 6 + 2x + 4y + 7x^2 + 8xy - 9y^2$$

Свойства квадратичной формы позволяют понять свойства многих функций!

# Квадратичная форма и матрицы

$$(x_1 \ x_2 \ x_3) \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3 \\ -1 & 7 & 2 \\ -3 & 2 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

# Квадратичная форма и матрицы

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3 \\ -1 & 7 & 2 \\ -3 & 2 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$
$$= 5x_1^2 + 7x_2^2 + 11x_3^2 - 2x_1x_2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3$$

# Квадратичная форма и матрицы

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3 \\ -1 & 7 & 2 \\ -3 & 2 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$
$$= 5x_1^2 + 7x_2^2 + 11x_3^2 - 2x_1x_2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3$$

## Утверждение

Любая квадратичная форма  $f(\mathbf{x})$  может быть записана в виде

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x},$$

где  $A$  — симметричная матрица,  $A^T = A$ .

# Квадратичные формы в нуле

## Утверждение

Любая квадратичная форма  $f$  равна 0 в точке 0,

$$f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}^T \cdot A \cdot \mathbf{0} = 0.$$

# Квадратичные формы в нуле

## Утверждение

Любая квадратичная форма  $f$  равна 0 в точке 0,

$$f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}^T \cdot A \cdot \mathbf{0} = 0.$$

Нас будет интересовать знак формы  $f(\mathbf{x})$  при  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ .

# Положительно определённая форма

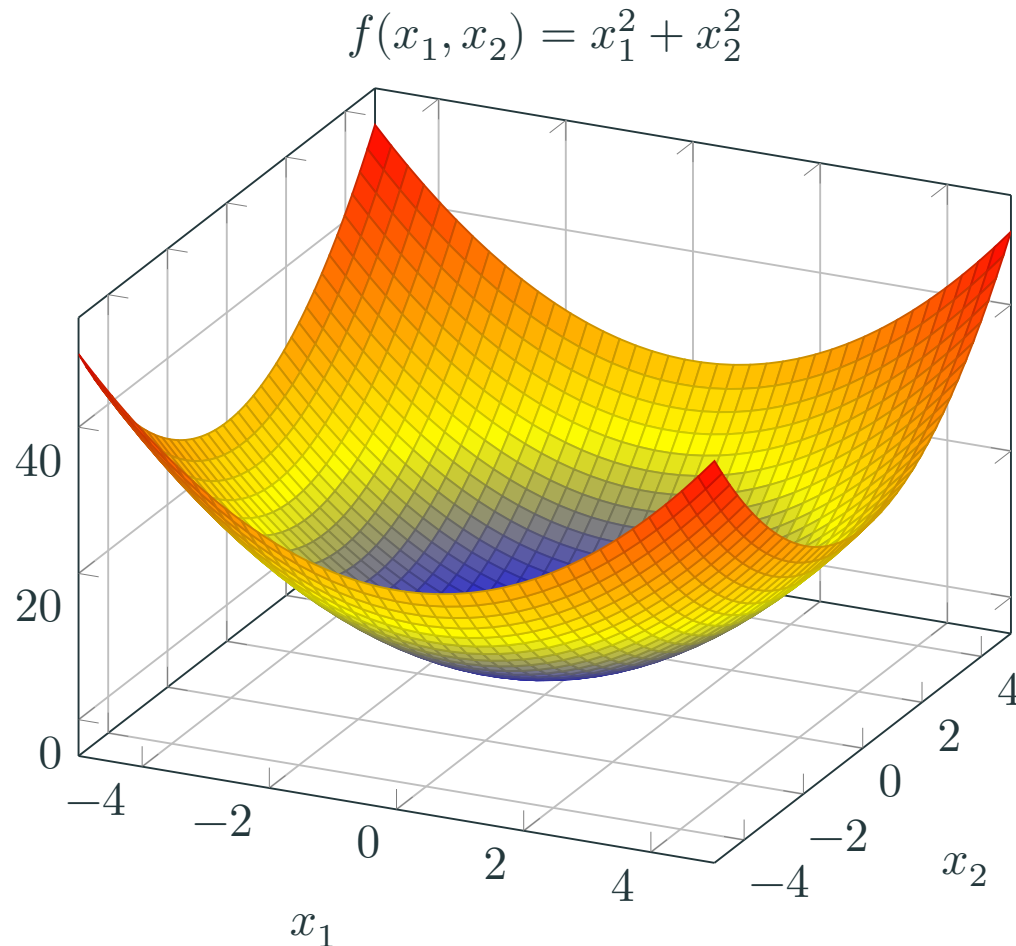
## Определение

Форма  $f$  называется **положительно определённой**, если  $f(\mathbf{x}) > 0$  при  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ .

# Положительно определённая форма

## Определение

Форма  $f$  называется **положительно определённой**, если  $f(\mathbf{x}) > 0$  при  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ .





# Отрицательно определённая форма

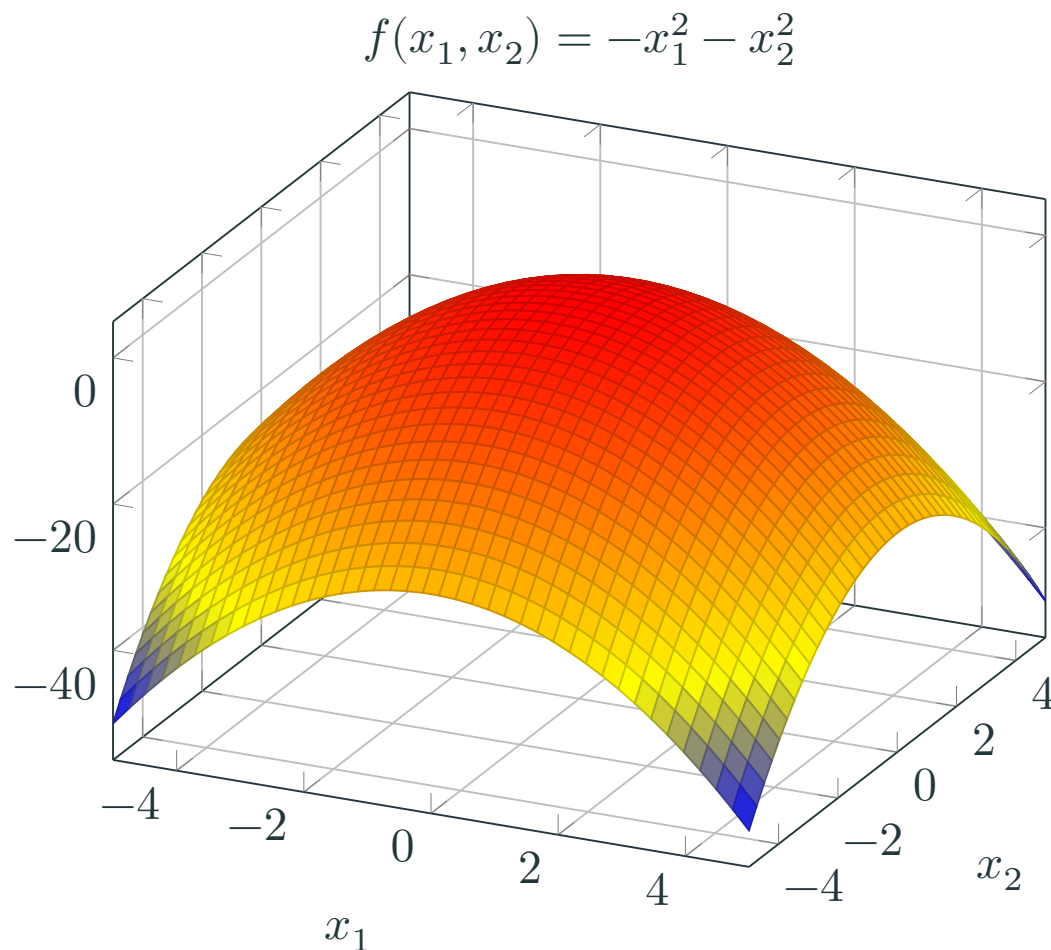
## Определение

Форма  $f$  называется отрицательно определённой, если  $f(\mathbf{x}) < 0$  при  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ .

# Отрицательно определённая форма

## Определение

Форма  $f$  называется **отрицательно определённой**, если  $f(\mathbf{x}) < 0$  при  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ .



# Положительно полуопределённая форма

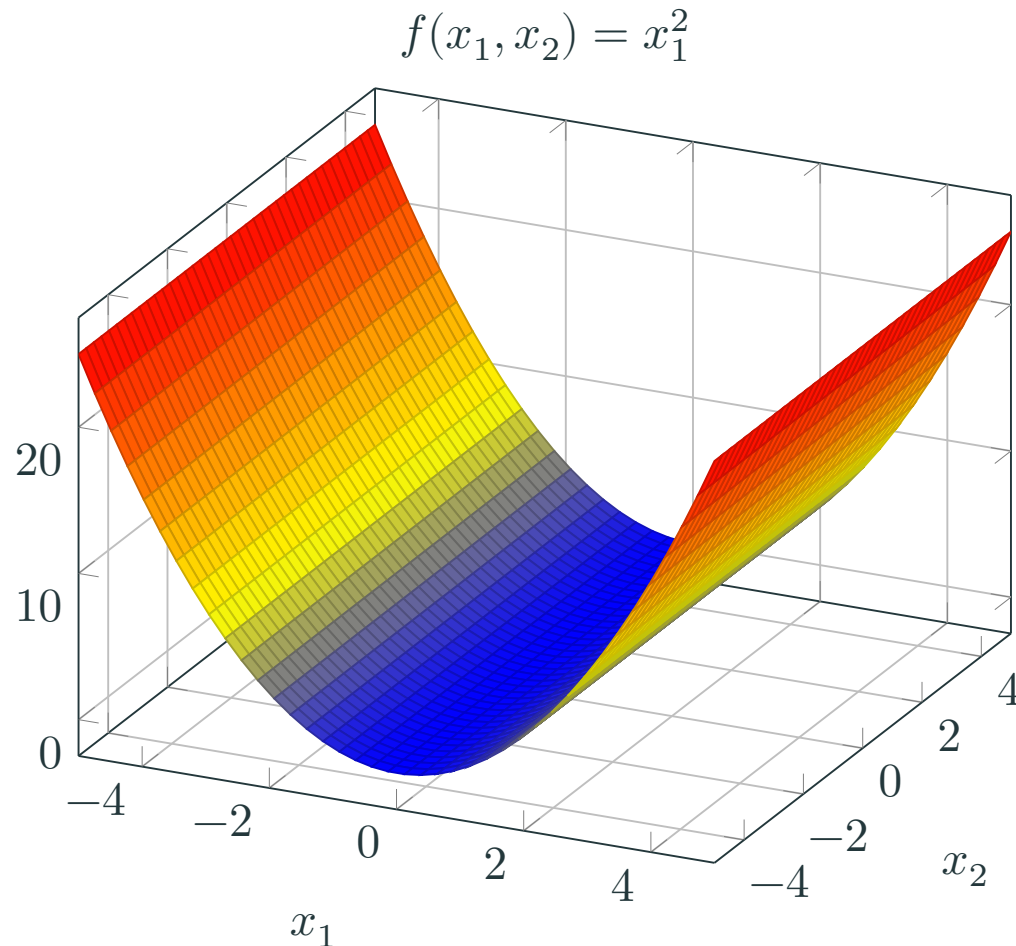
## Определение

Форма  $f$  называется **положительно полуопределённой** или **неотрицательно определённой**, если  $f(\mathbf{x}) \geq 0$ .

# Положительно полуопределённая форма

## Определение

Форма  $f$  называется **положительно полуопределённой** или **неотрицательно определённой**, если  $f(\mathbf{x}) \geq 0$ .



# Отрицательно полуопределённая форма

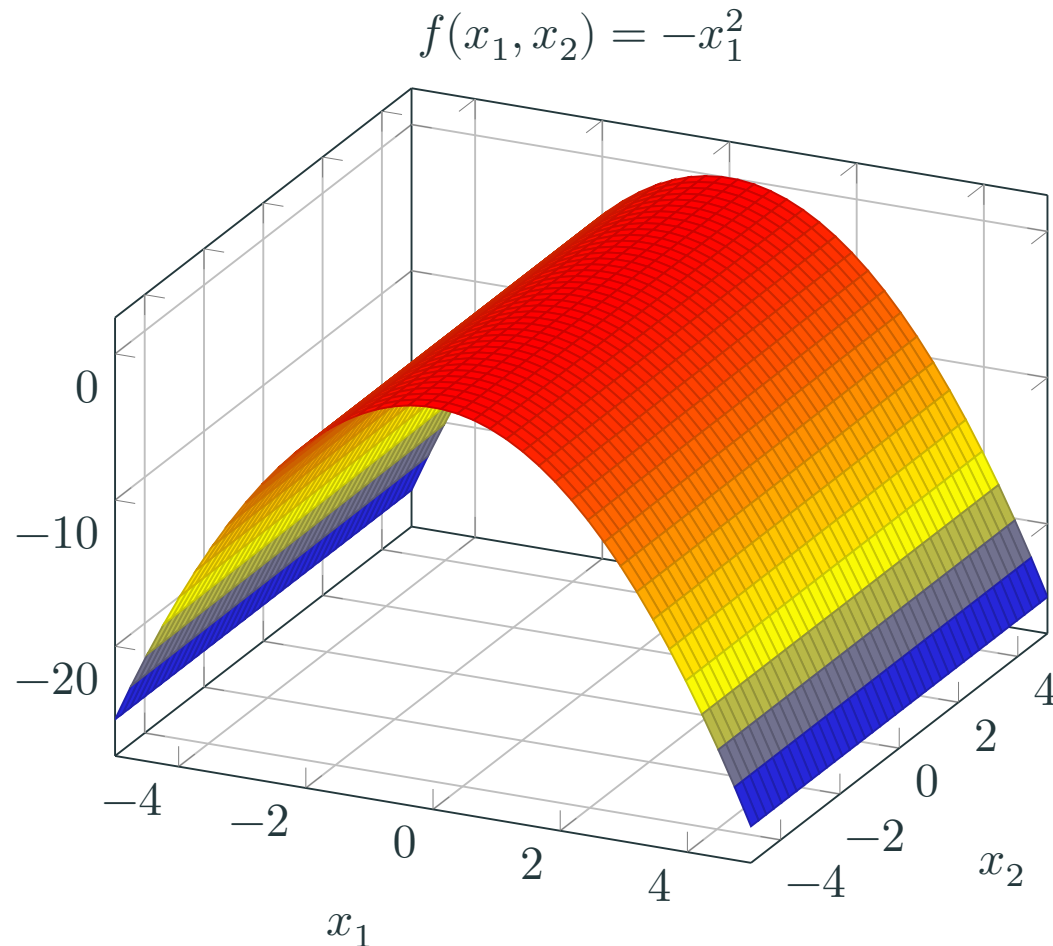
## Определение

Форма  $f$  называется отрицательно полуопределённой или неположительно определённой, если  $f(\mathbf{x}) \leq 0$ .

# Отрицательно полуопределённая форма

## Определение

Форма  $f$  называется **отрицательно полуопределённой** или **неположительно определённой**, если  $f(\mathbf{x}) \leq 0$ .



# Неопределённая форма

## Определение

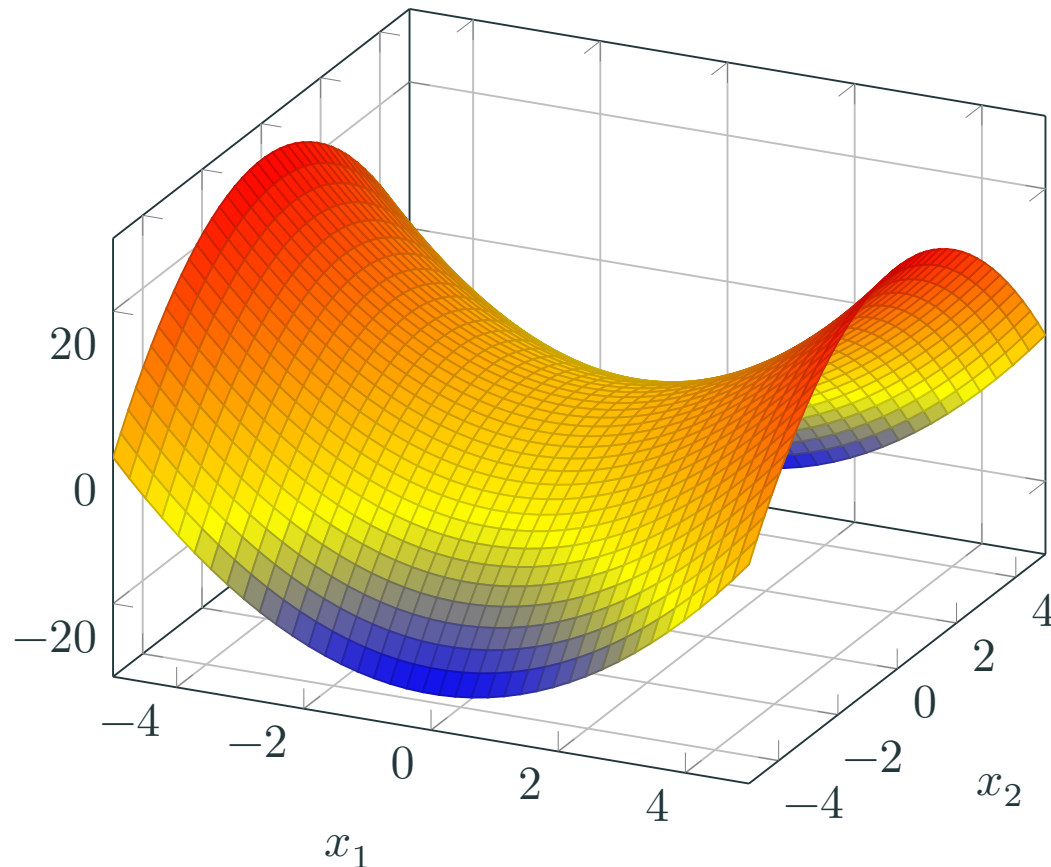
Форма  $f$  называется **неопределённой**, если она принимает и положительные и отрицательные значения.

# Неопределённая форма

## Определение

Форма  $f$  называется **неопределённой**, если она принимает и положительные и отрицательные значения.

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$$





# Метод полных квадратов

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)

# Расширенный критерий Сильвестра: пример

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)

# Ортогонализация Грамма-Шмидта: пример

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)

## **Бонус: задача про переливание красок**

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)