

Определитель и обратная матрица

Идея определителя

Краткий план:

- Определитель на плоскости;

Краткий план:

- Определитель на плоскости;
- Определитель в пространстве.

Идея определителя

Рассмотрим оператор преобразования плоскости,
 $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Пара векторов \mathbf{a} , \mathbf{b} переходит в пару векторов $L \mathbf{a}$, $L \mathbf{b}$.

Идея определителя

Рассмотрим оператор преобразования плоскости,
 $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Пара векторов \mathbf{a} , \mathbf{b} переходит в пару векторов $L \mathbf{a}$, $L \mathbf{b}$.

Как меняется площадь параллелограмма образованного двумя векторами?

Идея определителя

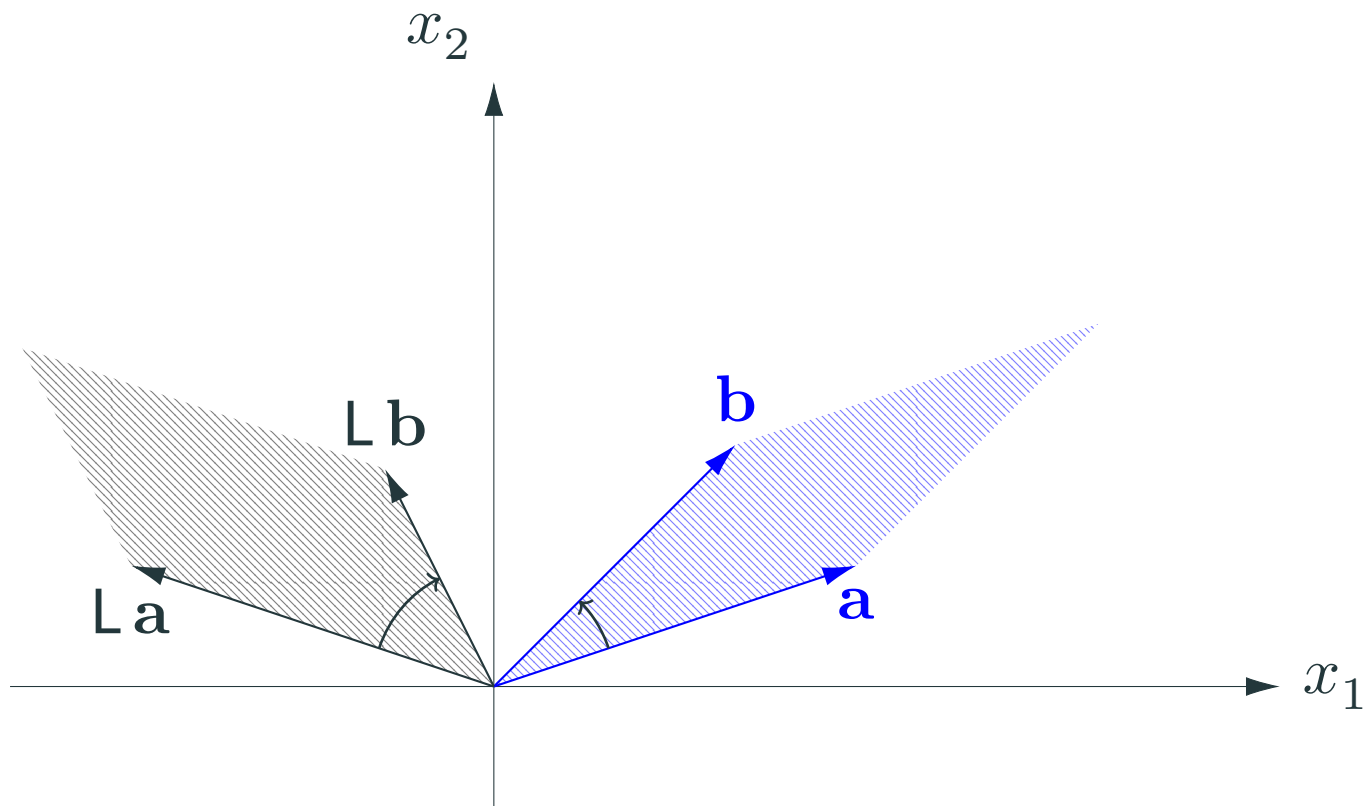
Рассмотрим оператор преобразования плоскости,
 $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Пара векторов \mathbf{a} , \mathbf{b} переходит в пару векторов $L \mathbf{a}$, $L \mathbf{b}$.

Как меняется площадь параллелограмма образованного двумя векторами?

Меняется ли направление поворота от первого вектора ко второму?

Идея определителя на картинке



Ориентированная площадь

Определение

Возьмём площадь параллелограмма со сторонами \mathbf{a} и \mathbf{b} . Если поворот от первого вектора ко второму идёт по часовой стрелке, то дополнительно домножим площадь на (-1) .

Полученное число назовём **ориентированной площадью** параллелограмма и обозначим $S(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Ориентированная площадь

Определение

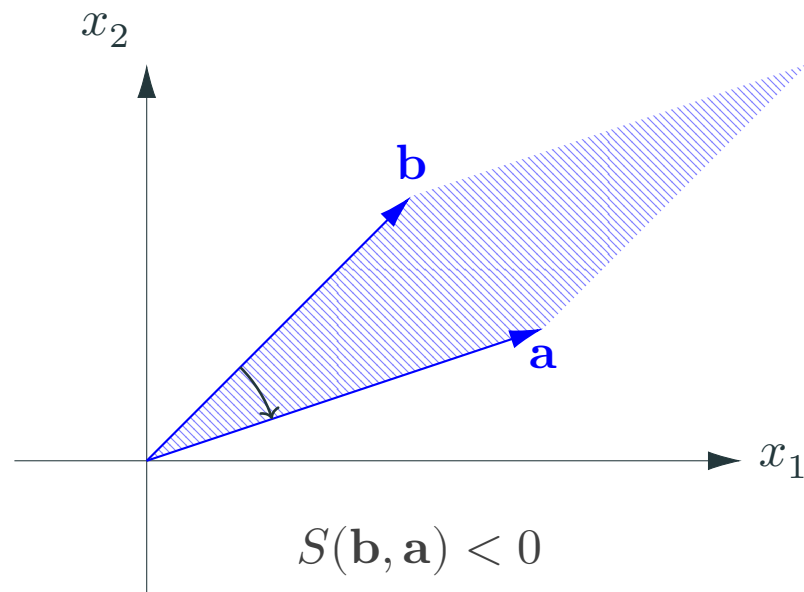
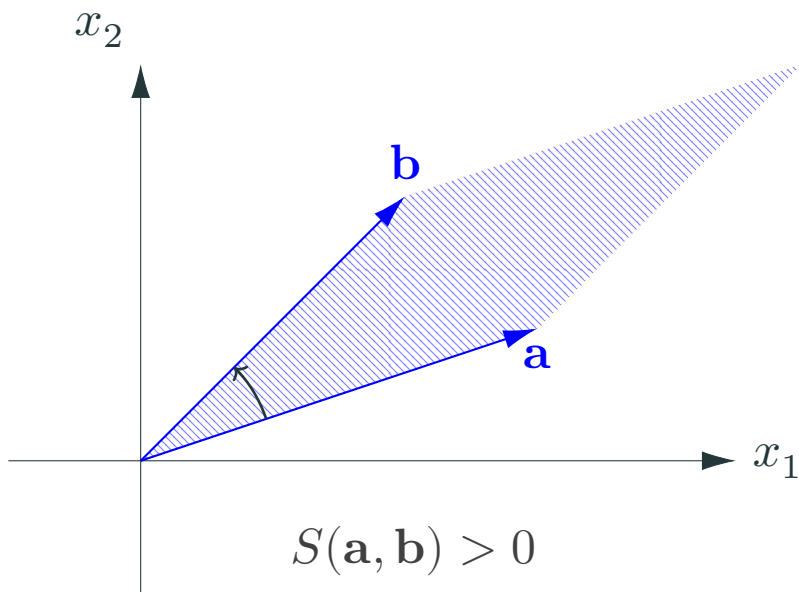
Возьмём площадь параллелограмма со сторонами \mathbf{a} и \mathbf{b} . Если поворот от первого вектора ко второму идёт по часовой стрелке, то дополнительно домножим площадь на (-1) .

Полученное число назовём **ориентированной площадью** параллелограмма и обозначим $S(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Важен порядок векторов:

$$S(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -S(\mathbf{b}, \mathbf{a}).$$

Ориентированная площадь



Идея определителя

Определение

Возьмём любые два вектора \mathbf{a} и \mathbf{b} , для которых $S(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \neq 0$.

Определитель оператора $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ показывает во сколько раз изменяется ориентированная площадь

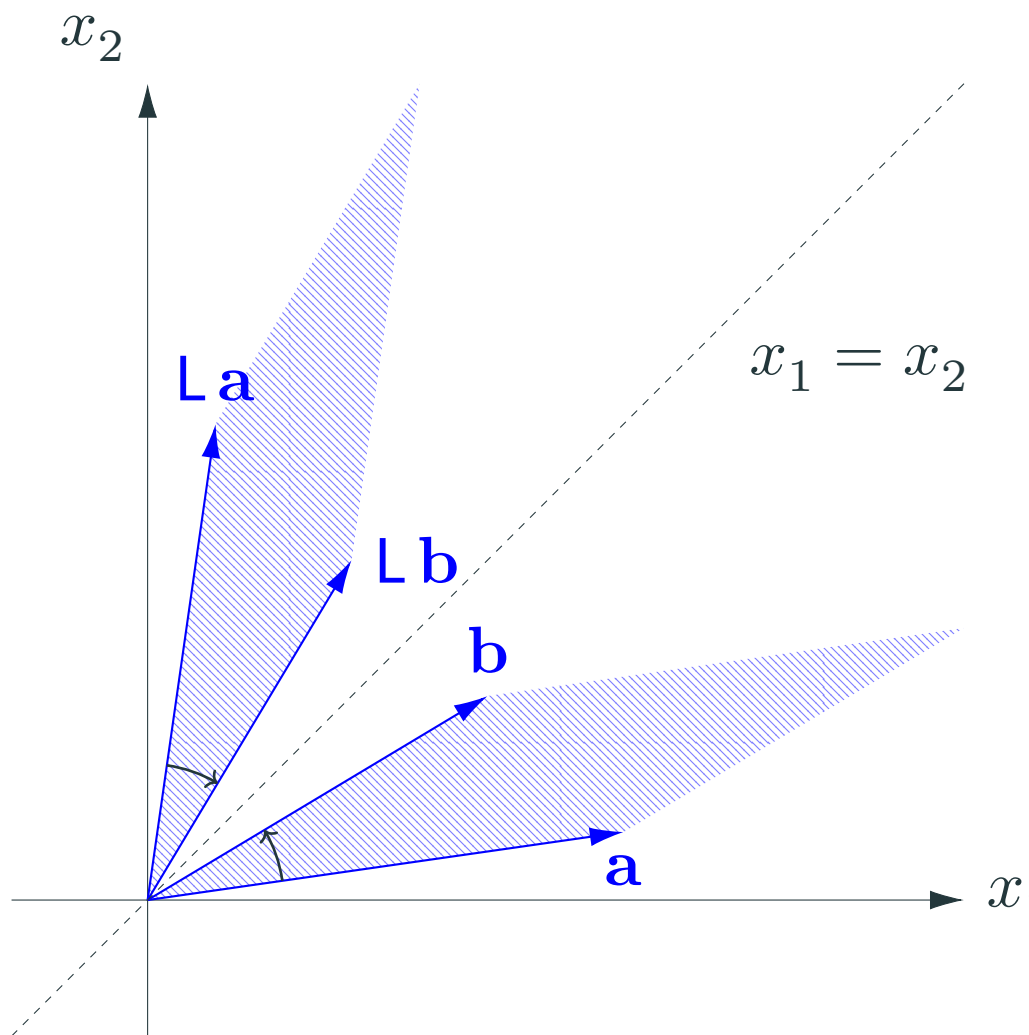
$$\det L = \frac{S(L \mathbf{a}, L \mathbf{b})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b})}$$

Определитель отражения

Оператор $L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$ отражает относительно
 $x_1 = x_2$.

Определитель отражения

Оператор $L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$ отражает относительно $x_1 = x_2$.



Определитель отражения

Оператор $L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$ отражает относительно
 $x_1 = x_2$.

Определитель отражения

Оператор $L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$ отражает относительно $x_1 = x_2$.

Площадь параллелограмма не изменяется.

Меняется направление поворота от первого вектора ко второму.

Определитель отражения

Оператор $L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$ отражает относительно $x_1 = x_2$.

Площадь параллелограмма не изменяется.

Меняется направление поворота от первого вектора ко второму.

$$\det L = \frac{S(L \mathbf{a}, L \mathbf{b})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b})} = -1$$

Определитель растягивания компонент

Рассмотрим оператор $L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$.

Определитель растягивания компонент

Рассмотрим оператор $L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$.

Первый базисный вектор e_1 растягивается в два раза.

Второй базисный вектор e_2 растягивается в три раза и отражается.

Меняется направление поворота от первого вектора ко второму.

Определитель растягивания компонент

Рассмотрим оператор $L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$.

Первый базисный вектор e_1 растягивается в два раза.

Второй базисный вектор e_2 растягивается в три раза и отражается.

Меняется направление поворота от первого вектора ко второму.

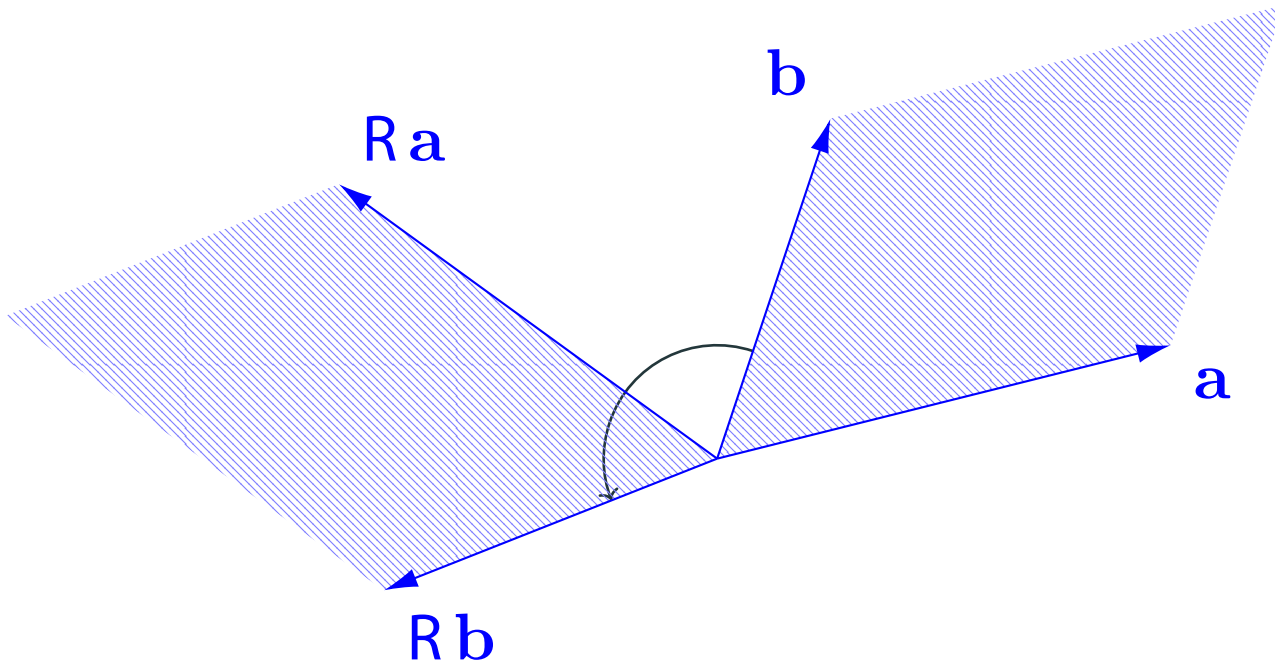
$$\det L = \frac{S(L \mathbf{a}, L \mathbf{b})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b})} = (-1) \cdot 2 \cdot 3 = -6$$

Определитель поворота

Оператор $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ вращает плоскость.

Определитель поворота

Оператор $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ вращает плоскость.



Определитель поворота

Оператор $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ вращает плоскость.

Определитель поворота

Оператор $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ вращает плоскость.

При вращении не изменяется площадь параллелограмма.

При вращении не изменяется направление поворота от первого вектора ко второму.

Определитель поворота

Оператор $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ вращает плоскость.

При вращении не изменяется площадь параллелограмма.

При вращении не изменяется направление поворота от первого вектора ко второму.

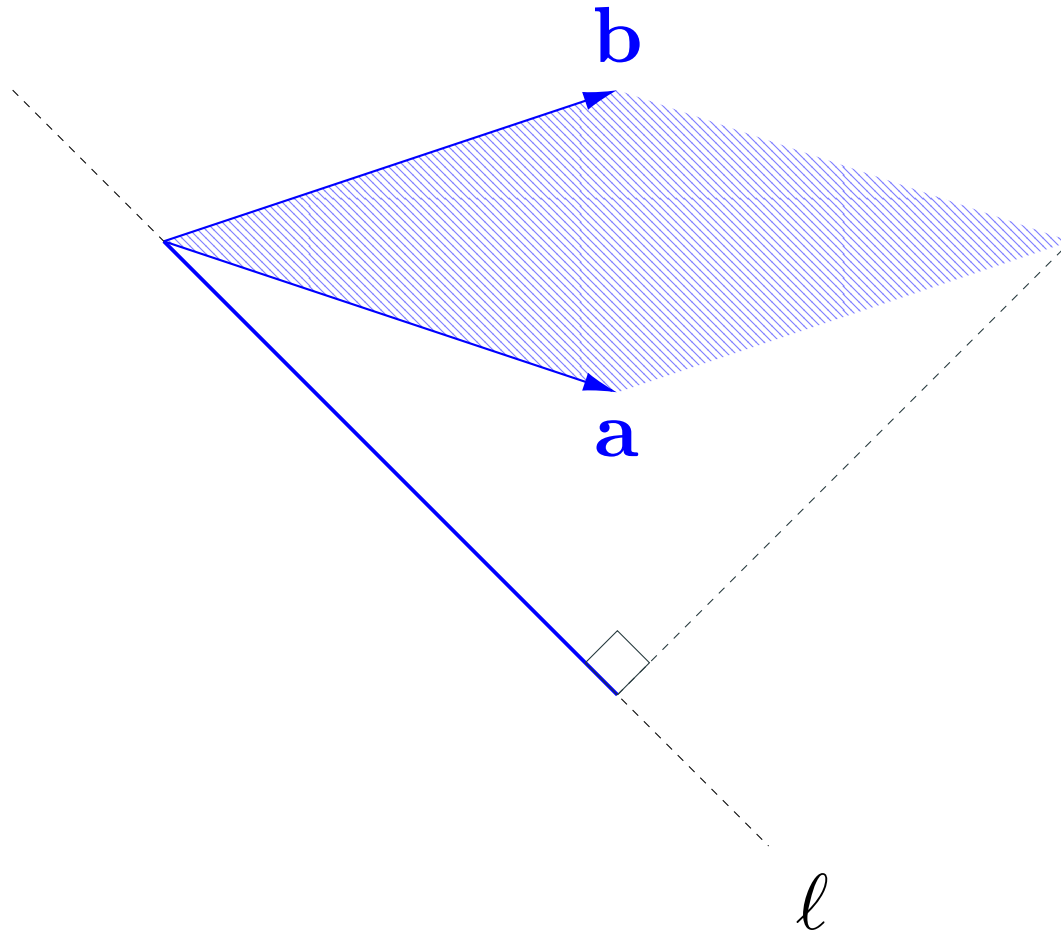
$$\det R = \frac{S(R\mathbf{a}, R\mathbf{b})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b})} = 1$$

Определитель проекции

Оператор $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ проецирует векторы на прямую ℓ .

Определитель проекции

Оператор $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ проецирует векторы на прямую ℓ .



Определитель проекции

Оператор $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ проецирует векторы на прямую ℓ .

Определитель проекции

Оператор $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ проецирует векторы на прямую ℓ .

При проекции любой параллелограмм «складывается» в отрезок нулевой площади.

$$\det H = \frac{S(H\mathbf{a}, H\mathbf{b})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b})} = 0$$

Чем прекрасна ориентированная площадь?

Утверждение

Ориентированная площадь $S(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ линейна по каждому аргументу:

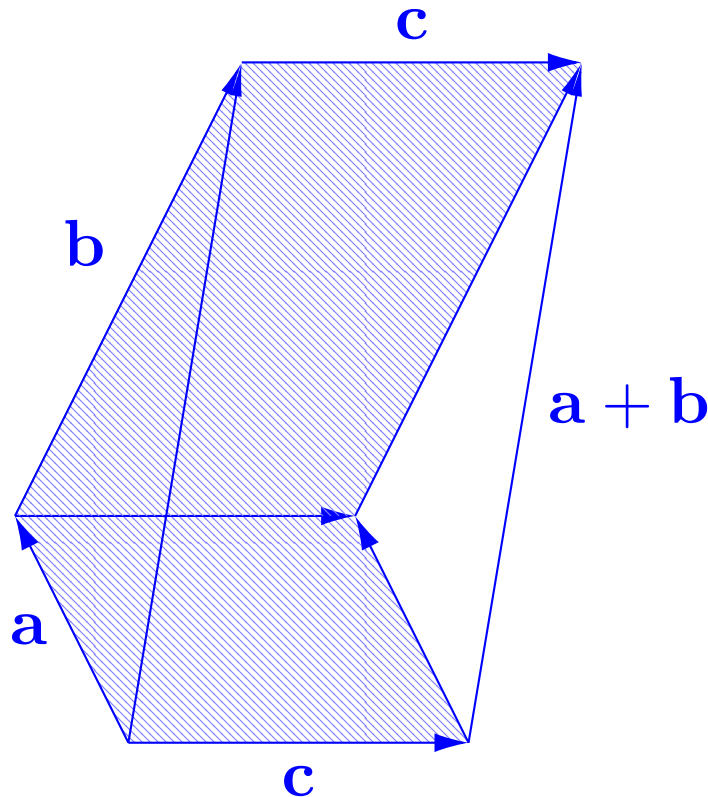
$$S(\lambda \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \lambda S(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \quad S(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}) = S(\mathbf{a}, \mathbf{c}) + S(\mathbf{b}, \mathbf{c})$$

Чем прекрасна ориентированная площадь?

Утверждение

Ориентированная площадь $S(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ линейна по каждому аргументу:

$$S(\lambda \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \lambda S(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \quad S(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}) = S(\mathbf{a}, \mathbf{c}) + S(\mathbf{b}, \mathbf{c})$$



Корректность идеи определителя

Величина $\det L = \frac{S(L\mathbf{a}, L\mathbf{b})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b})}$ не зависит от выбора \mathbf{a} и \mathbf{b} !

Корректность идеи определителя

Величина $\det L = \frac{S(L \mathbf{a}, L \mathbf{b})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b})}$ не зависит от выбора \mathbf{a} и \mathbf{b} !

Идея доказательства

Обозначим $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Корректность идеи определителя

Величина $\det L = \frac{S(L \mathbf{a}, L \mathbf{b})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b})}$ не зависит от выбора \mathbf{a} и \mathbf{b} !

Идея доказательства

Обозначим $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Возьмём $\mathbf{a} = 5\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2$. Найдём $S(L \mathbf{a}, L \mathbf{e}_2)/S(\mathbf{a}, \mathbf{e}_2)$:

Корректность идеи определителя

Величина $\det L = \frac{S(L \mathbf{a}, L \mathbf{b})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b})}$ не зависит от выбора \mathbf{a} и \mathbf{b} !

Идея доказательства

Обозначим $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Возьмём $\mathbf{a} = 5\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2$. Найдём $S(L \mathbf{a}, L \mathbf{e}_2)/S(\mathbf{a}, \mathbf{e}_2)$:

$$\frac{S(L(5\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2), L \mathbf{e}_2)}{S(5\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2)} = \frac{S(L 5\mathbf{e}_1, L \mathbf{e}_2) + S(L 7\mathbf{e}_2, L \mathbf{e}_2)}{S(5\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + S(7\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2)} =$$

Корректность идеи определителя

Величина $\det L = \frac{S(L \mathbf{a}, L \mathbf{b})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b})}$ не зависит от выбора \mathbf{a} и \mathbf{b} !

Идея доказательства

Обозначим $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Возьмём $\mathbf{a} = 5\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2$. Найдём $S(L \mathbf{a}, L \mathbf{e}_2)/S(\mathbf{a}, \mathbf{e}_2)$:

$$\begin{aligned} \frac{S(L(5\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2), L \mathbf{e}_2)}{S(5\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2)} &= \frac{S(L 5\mathbf{e}_1, L \mathbf{e}_2) + S(L 7\mathbf{e}_2, L \mathbf{e}_2)}{S(5\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + S(7\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2)} = \\ &= \frac{5S(L \mathbf{e}_1, L \mathbf{e}_2) + 0}{5S(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + 0} = \frac{S(L \mathbf{e}_1, L \mathbf{e}_2)}{S(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)} \end{aligned}$$

Ещё один взгляд на определитель

Обозначим $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ещё один взгляд на определитель

Обозначим $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Определение

Преобразуем параллелограмм, образованный векторами \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 , с помощью оператора L .

Определитель линейного оператора $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ равен ориентированной площади полученного параллелограмма.

$$\det L = S(L \mathbf{e}_1, L \mathbf{e}_2)$$

Определитель в пространстве

Заменим ориентированную площадь параллелограмма $S(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ на ориентированный объём параллелепипеда $S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$.

Определитель в пространстве

Заменим ориентированную площадь параллелограмма $S(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ на ориентированный объём параллелепипеда $S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$.

Определение

Возьмём любые три вектора \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} , для которых $S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \neq 0$.

Определитель оператора $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ показывает во сколько раз изменяется ориентированный объём

$$\det L = \frac{S(L \mathbf{a}, L \mathbf{b}, L \mathbf{c})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}$$

А что такое ориентированный объём?

А что такое ориентированный объём?

Обозначим $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

А что такое ориентированный объём?

Обозначим $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Определение

Рассмотрим параллелепипед, образованный \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} .

А что такое ориентированный объём?

Обозначим $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Определение

Рассмотрим параллелепипед, образованный \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} .

С помощью поворота:

Совместим вектор \mathbf{e}_1 с вектором \mathbf{a} ;

Затем вектор \mathbf{e}_2 «положим» в плоскость \mathbf{a} , \mathbf{b} .

А что такое ориентированный объём?

Обозначим $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Определение

Рассмотрим параллелепипед, образованный \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} .

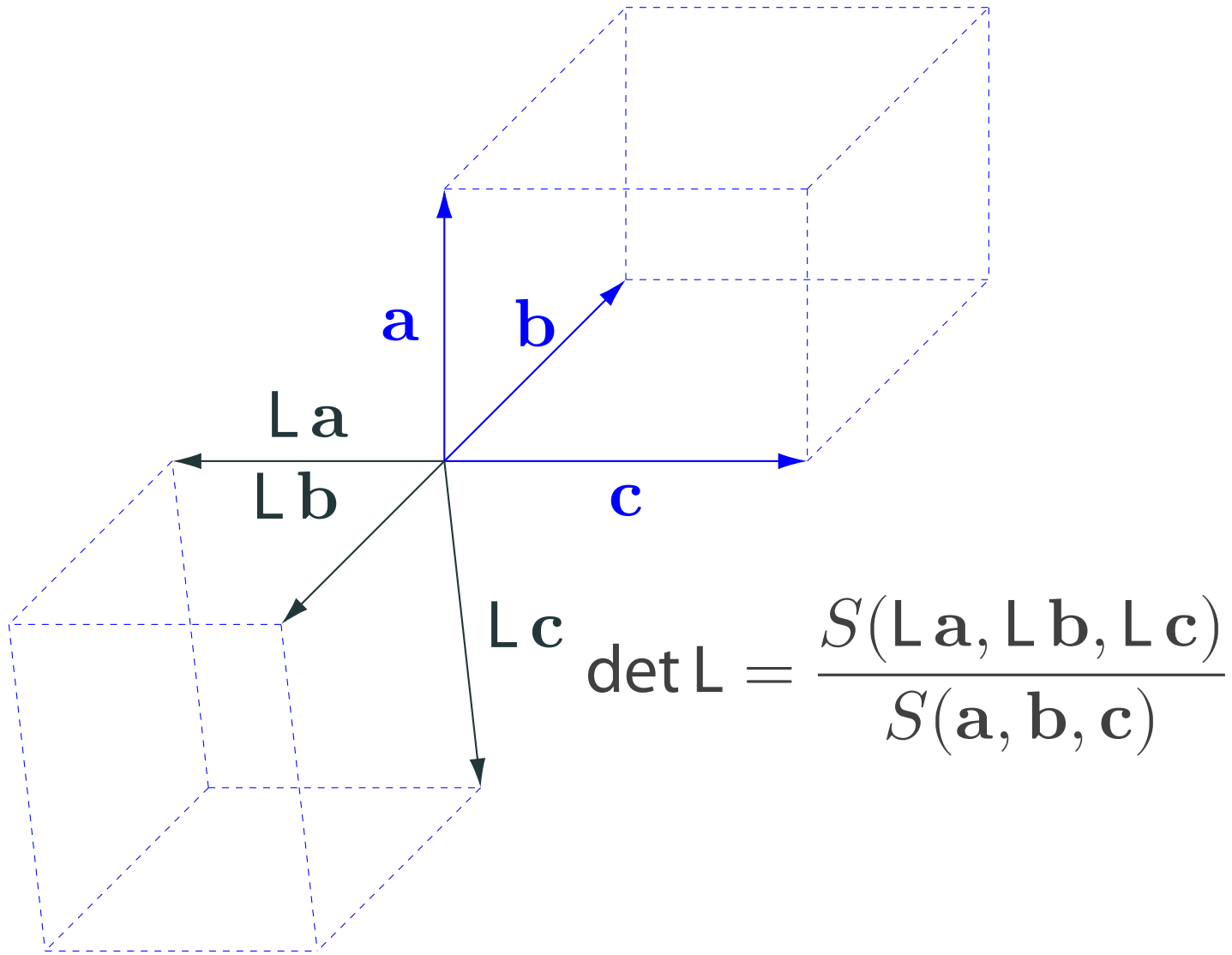
С помощью поворота:

Совместим вектор \mathbf{e}_1 с вектором \mathbf{a} ;

Затем вектор \mathbf{e}_2 «положим» в плоскость \mathbf{a} , \mathbf{b} .

Ориентированный объём $S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ объявим отрицательным, если векторы \mathbf{e}_3 и \mathbf{c} смотрят в разные полупространства.

Определитель в пространстве



Определитель растягивания компонент

Рассмотрим оператор L : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2a_1 \\ 3a_2 \\ -5a_3 \end{pmatrix}$.

Определитель растягивания компонент

Рассмотрим оператор $L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2a_1 \\ 3a_2 \\ -5a_3 \end{pmatrix}$.

Базисный вектор e_1 растягивается в два раза, e_2 — в три раза, e_3 — в пять.

Первые два вектора, e_1 и e_2 , не изменяют направления при преобразовании.

Третий вектор, e_3 , меняет полупространство, в котором он лежит относительно первых двух.

Определитель растягивания компонент

Рассмотрим оператор $L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2a_1 \\ 3a_2 \\ -5a_3 \end{pmatrix}$.

Базисный вектор e_1 растягивается в два раза, e_2 — в три раза, e_3 — в пять.

Первые два вектора, e_1 и e_2 , не изменяют направления при преобразовании.

Третий вектор, e_3 , меняет полупространство, в котором он лежит относительно первых двух.

$$\det L = \frac{S(L \mathbf{a}, L \mathbf{b}, L \mathbf{c})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})} = (-1) \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = -30$$

Определитель проекции

Оператор $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ проецирует векторы на плоскость α .

Определитель проекции

Оператор $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ проецирует векторы на плоскость α .

Любой параллелепипед «складывается» в плоскую фигуру нулевого объёма.

Определитель проекции

Оператор $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ проецирует векторы на плоскость α .
Любой параллелепипед «складывается» в плоскую фигуру нулевого объёма.

$$\det H = \frac{S(Ha, Hb, Hc)}{S(a, b, c)} = 0$$

Свойства определителя

Краткий план:

- Ориентированный объём в \mathbb{R}^n ;

Краткий план:

- Ориентированный объём в \mathbb{R}^n ;
- Свойства определителя;

Краткий план:

- Ориентированный объём в \mathbb{R}^n ;
- Свойства определителя;
- Явная формула для определителя.

Формализация ориентированного объёма

Вектор e_i содержит на i -м месте единицу, а на остальных — нули.

Формализация ориентированного объёма

Вектор e_i содержит на i -м месте единицу, а на остальных — нули.

1. Верный гипер-объём базового гипер-кубика:

$$S(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1$$

Формализация ориентированного объёма

Вектор \mathbf{e}_i содержит на i -м месте единицу, а на остальных — нули.

1. Верный гипер-объём базового гипер-кубика:

$$S(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) = 1$$

2. Линейность по каждому аргументу:

$$S(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n) = S(\mathbf{a}, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n) + S(\mathbf{b}, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n)$$

$$S(\lambda \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n) = \lambda S(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n)$$

Формализация ориентированного объёма

Вектор \mathbf{e}_i содержит на i -м месте единицу, а на остальных — нули.

1. Верный гипер-объём базового гипер-кубика:

$$S(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) = 1$$

2. Линейность по каждому аргументу:

$$S(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n) = S(\mathbf{a}, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n) + S(\mathbf{b}, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n)$$

$$S(\lambda \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n) = \lambda S(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n)$$

3. Антисимметричность:

$$S(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n) = -S(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n)$$

Определитель во всей n -мерности

Определение

Возьмём векторы $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$, для которых $S(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \neq 0$.

Определитель оператора $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ показывает во сколько раз изменяется ориентированный гипер-объём произвольного параллелепипеда:

$$\det L = \frac{S(L \mathbf{v}_1, \dots, L \mathbf{v}_n)}{S(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)}$$

Определитель во всей n -мерности

Определение

Возьмём векторы $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$, для которых $S(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \neq 0$.

Определитель оператора $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ показывает во сколько раз изменяется ориентированный гипер-объём произвольного параллелепипеда:

$$\det L = \frac{S(L \mathbf{v}_1, \dots, L \mathbf{v}_n)}{S(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)}$$

Определение

Определитель оператора $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ показывает во сколько раз изменяется ориентированный гипер-объём базового гипер-кубика:

$$\det L = S(L \mathbf{e}_1, \dots, L \mathbf{e}_n)$$

Определитель матрицы

Определение

Определителем матрицы называется определитель соответствующего линейного оператора.

Определитель матрицы

Определение

Определителем матрицы называется определитель соответствующего линейного оператора.

В матрице L i -й столбец равен $L e_i$, поэтому

$$\det L = S(\operatorname{col}_1 L, \operatorname{col}_2 L, \dots, \operatorname{col}_n L)$$

Определитель матрицы

Определение

Определителем матрицы называется определитель соответствующего линейного оператора.

В матрице L i -й столбец равен $L e_i$, поэтому

$$\det L = S(\text{col}_1 L, \text{col}_2 L, \dots, \text{col}_n L)$$

Утверждение

Определитель матрицы можно считать по строкам:

$$\det L = S(\text{row}_1 L, \text{row}_2 L, \dots, \text{row}_n L)$$

Определитель обозначают $\det L$ или $|L|$.

Быстрые признаки равенства нулю

1. Если среди векторов есть два одинаковых, то гипер-объём параллелепипеда равен нулю.

$$S(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n) = 0$$

Быстрые признаки равенства нулю

1. Если среди векторов есть два одинаковых, то гипер-объём параллелепипеда равен нулю.

$$S(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n) = 0$$

2. Если среди векторов есть один нулевой, то гипер-объём параллелепипеда равен нулю.

$$S(\mathbf{0}, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n) = 0$$

Принцип Кавальери

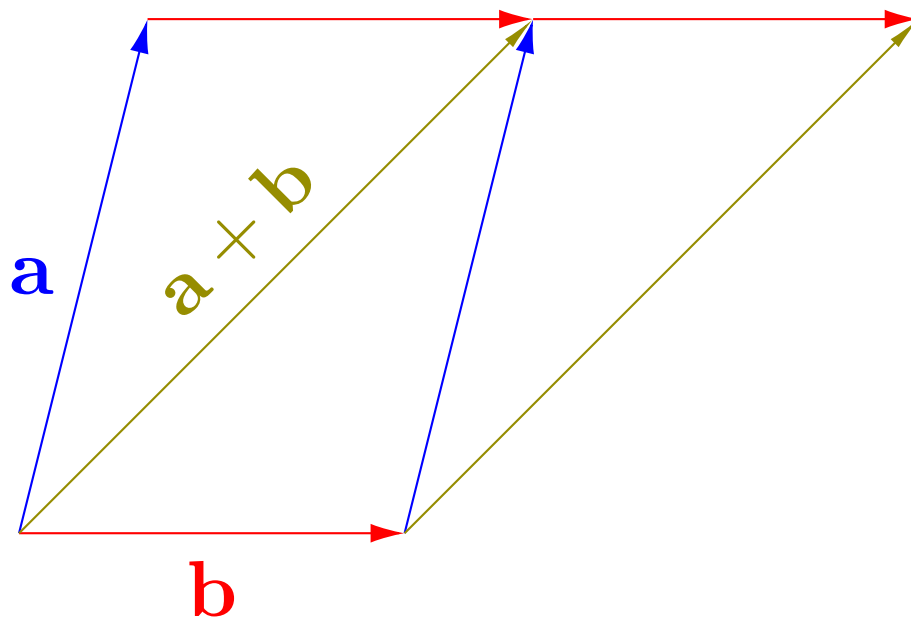
«Скашивание» параллелепипеда вбок не изменяет гипер-объём:

$$S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n) = S(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{b}, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n)$$

Принцип Кавальери

«Скашивание» параллелепипеда вбок не изменяет гипер-объём:

$$S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n) = S(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{b}, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n)$$



Принцип Кавальери на матрице

Единственным ненулевым элементом столбца можно «скосить» всю строку:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} =$$

Принцип Кавальери на матрице

Единственным ненулевым элементом столбца можно «СКОСИТЬ» всю строку:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ \textcolor{red}{4} & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ \textcolor{red}{4} & \textcolor{blue}{0} & 7 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} =$$

Принцип Кавальери на матрице

Единственным ненулевым элементом столбца можно «скосить» всю строку:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix}$$

Принцип Кавальери на матрице

Единственным ненулевым элементом столбца можно «СКОСИТЬ» всю строку:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix}$$

Единственным ненулевым элементом строки можно «СКОСИТЬ» весь столбец:

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix} =$$

Принцип Кавальери на матрице

Единственным ненулевым элементом столбца можно «СКОСИТЬ» всю строку:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix}$$

Единственным ненулевым элементом строки можно «СКОСИТЬ» весь столбец:

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix} =$$

Принцип Кавальери на матрице

Единственным ненулевым элементом столбца можно «СКОСИТЬ» всю строку:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ \textcolor{red}{4} & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ \textcolor{red}{4} & \textcolor{blue}{0} & 7 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ \textcolor{red}{4} & \textcolor{blue}{0} & \textcolor{blue}{0} \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix}$$

Единственным ненулевым элементом строки можно «СКОСИТЬ» весь столбец:

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & -2 \\ \textcolor{red}{4} & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \textcolor{blue}{0} & 3 & -2 \\ \textcolor{red}{4} & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \textcolor{blue}{0} & 3 & -2 \\ \textcolor{red}{4} & 0 & 0 \\ \textcolor{blue}{0} & 1 & -5 \end{vmatrix}$$

Определитель и ранг

Утверждение

Для матрицы L размера $n \times n$ четыре свойства эквиваленты:

1. Определитель равен нулю, $\det L = 0$.

Определитель и ранг

Утверждение

Для матрицы L размера $n \times n$ четыре свойства эквиваленты:

1. Определитель равен нулю, $\det L = 0$.
2. Столбцы матрицы линейно зависимы.

Определитель и ранг

Утверждение

Для матрицы L размера $n \times n$ четыре свойства эквиваленты:

1. Определитель равен нулю, $\det L = 0$.
2. Столбцы матрицы линейно зависимы.
3. Строки матрицы линейно зависимы.

Определитель и ранг

Утверждение

Для матрицы L размера $n \times n$ четыре свойства эквиваленты:

1. Определитель равен нулю, $\det L = 0$.
2. Столбцы матрицы линейно зависимы.
3. Строки матрицы линейно зависимы.
4. Ранг матрицы меньше числа столбцов, $\text{rank } L < n$.

Определитель композиции

Утверждение

Определитель композиции A и B равен произведению определителей:

$$\det(AB) = \det A \det B$$

Определитель композиции

Утверждение

Определитель композиции A и B равен произведению определителей:

$$\det(AB) = \det A \det B$$

Следствие

$$\det A \det A^{-1} = \det(A \cdot A^{-1}) = \det I = 1$$

Спокойствие, только спокойствие!

Утверждение

Свойства нормировки, линейности по аргументам и антисимметричности однозначно определяют функцию гипер-объёма $S(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$.

Спокойствие, только спокойствие!

Утверждение

Свойства нормировки, линейности по аргументам и антисимметричности однозначно определяют функцию гипер-объёма $S(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$.

Утверждение

Отношение гипер-объёмов $\det L = \frac{S(L \mathbf{v}_1, \dots, L \mathbf{v}_n)}{S(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)}$ не зависит от выбора $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$.

Формула с перестановками

Определение

Перестановкой называют последовательность из n чисел, в которой каждое число от 1 до n встречается ровно один раз.

Формула с перестановками

Определение

Перестановкой называют последовательность из n чисел, в которой каждое число от 1 до n встречается ровно один раз.

Примеры: (12345) , (32145) , (21354) .

Формула с перестановками

Определение

Перестановкой называют последовательность из n чисел, в которой каждое число от 1 до n встречается ровно один раз.

Примеры: (12345) , (32145) , (21354) .

Определение

Перестановку называют **чётной**, если требуется чётное число смен местами двух чисел, чтобы привести перестановку к $(1234 \dots n)$.

Если σ — чётная перестановка, то пишут $\text{sign } \sigma = 1$, для нечётной пишут $\text{sign } \sigma = -1$.

Формула с перестановками

Определение

Перестановкой называют последовательность из n чисел, в которой каждое число от 1 до n встречается ровно один раз.

Примеры: (12345) , (32145) , (21354) .

Определение

Перестановку называют **чётной**, если требуется чётное число смен местами двух чисел, чтобы привести перестановку к $(1234 \dots n)$.

Если σ — чётная перестановка, то пишут $\text{sign } \sigma = 1$, для нечётной пишут $\text{sign } \sigma = -1$.

Примеры:

$$\text{sign}(12345) = 1, \text{sign}(32145) = -1, \text{sign}(21354) = 1.$$

Расстановка ладей!

Рассмотрим квадратную матрицу.

Перестановку σ будем трактовать как инструкцию, какой элемент взять из очередной строки матрицы.

$$(3124) \sim \begin{pmatrix} . & . & * & . \\ * & . & . & . \\ . & * & . & . \\ . & . & . & * \end{pmatrix}$$

Расстановка ладей!

Рассмотрим квадратную матрицу.

Перестановку σ будем трактовать как инструкцию, какой элемент взять из очередной строки матрицы.

$$(3124) \sim \begin{pmatrix} . & . & * & . \\ * & . & . & . \\ . & * & . & . \\ . & . & . & * \end{pmatrix}$$

С помощью $p(\sigma)$ обозначим произведение этих элементов.

Например, $p(3124) = a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{44}$.

Явная формула

Утверждение

Трёх свойствам определителя (нормировке, линейности, антисимметричности) удовлетворяет единственная функция

$$\det L = \sum_{\sigma} \text{sign}(\sigma) \cdot p(\sigma).$$

Перестановку σ трактуем как инструкцию, какой элемент взять из очередной строки матрицы.

С помощью $p(\sigma)$ обозначено произведение этих элементов.

Иллюстрация для 2×2

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} =$$

Иллюстрация для 2×2

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = + \begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} =$$

sign(12)=1 sign(21)=-1

Иллюстрация для 2×2

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = + \begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = ad - bc$$

sign(12)=1 sign(21)=-1

Иллюстрация для 3×3

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} =$$

Иллюстрация для 3×3

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \\ = + \begin{pmatrix} a & & \\ & e & \\ & & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & & c \\ d & & \\ & h & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & b & \\ & & f \\ g & & \end{pmatrix} \\ \text{sign}(123)=1 \quad \text{sign}(312)=1 \quad \text{sign}(231)=1 \\ - \begin{pmatrix} & & c \\ & e & \\ g & & \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} & b & \\ d & & \\ & & i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & & \\ & & f \\ & h & \end{pmatrix} = \\ \text{sign}(321)=-1 \quad \text{sign}(213)=-1 \quad \text{sign}(132)=-1 \end{aligned}$$

Иллюстрация для 3×3

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} &= \\ &= + \begin{pmatrix} a & & \\ & e & \\ & & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & & c \\ d & & \\ & h & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & b & \\ & & f \\ g & & \end{pmatrix} \\ &\quad \text{sign}(123)=1 \quad \text{sign}(312)=1 \quad \text{sign}(231)=1 \\ &- \begin{pmatrix} & & c \\ & e & \\ g & & \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} & b & \\ d & & \\ & & i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & & \\ & & f \\ & h & \end{pmatrix} = \\ &\quad \text{sign}(321)=-1 \quad \text{sign}(213)=-1 \quad \text{sign}(132)=-1 \\ &= aei + cdh + bfg - ceg - bdi - afh \end{aligned}$$

Вычисление определителя

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)

Определитель и транспонирование

Краткий план:

- Транспонирование матрицы;

Краткий план:

- Транспонирование матрицы;
- Определитель и транспонирование;

Краткий план:

- Транспонирование матрицы;
- Определитель и транспонирование;
- Разложение определителя по столбцу или строке.

Конструктивный подход к транспонированию

Определение транспонирования оператора основано на свойстве

$$\langle L \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, L^T \mathbf{b} \rangle.$$

Конструктивный подход к транспонированию

Определение транспонирования оператора основано на свойстве

$$\langle L \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, L^T \mathbf{b} \rangle.$$

Возьмём, к примеру, $\mathbf{a} = \mathbf{e}_2$ и $\mathbf{b} = \mathbf{e}_3$:

$$\langle \text{col}_2 L, \mathbf{e}_3 \rangle = \langle \mathbf{e}_2, \text{col}_3 L^T \rangle$$

Конструктивный подход к транспонированию

Определение транспонирования оператора основано на свойстве

$$\langle L \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, L^T \mathbf{b} \rangle.$$

Возьмём, к примеру, $\mathbf{a} = \mathbf{e}_2$ и $\mathbf{b} = \mathbf{e}_3$:

$$\langle \text{col}_2 L, \mathbf{e}_3 \rangle = \langle \mathbf{e}_2, \text{col}_3 L^T \rangle$$

$$L_{32} = L_{23}^T$$

Конструктивный подход к транспонированию

Определение транспонирования оператора основано на свойстве

$$\langle L \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, L^T \mathbf{b} \rangle.$$

Возьмём, к примеру, $\mathbf{a} = \mathbf{e}_2$ и $\mathbf{b} = \mathbf{e}_3$:

$$\langle \text{col}_2 L, \mathbf{e}_3 \rangle = \langle \mathbf{e}_2, \text{col}_3 L^T \rangle$$

$$L_{32} = L_{23}^T$$

Транспонирование меняет местами строки и столбцы матрицы!

Транспонирование матрицы

Пример:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

Транспонирование матрицы

Пример:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

$$L^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

Транспонирование матрицы

Пример:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

$$L^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

Заметим, что $L^{TT} = L$.

Транспонирование и определитель

Явная формула определителя:

$$\det L = \sum_{\sigma} \text{sign}(\sigma) p(\sigma)$$

Транспонирование и определитель

Явная формула определителя:

$$\det L = \sum_{\sigma} \text{sign}(\sigma) p(\sigma)$$

Перестановка диктует, какой элемент выбрать в каждой строке:

$$(3124) \sim \begin{pmatrix} . & . & * & . \\ * & . & . & . \\ . & * & . & . \\ . & . & . & * \end{pmatrix}$$

Транспонирование и определитель

Явная формула определителя:

$$\det L = \sum_{\sigma} \text{sign}(\sigma) p(\sigma)$$

Перестановка диктует, какой элемент выбрать в каждой строке:

$$(3124) \sim \begin{pmatrix} . & . & * & . \\ * & . & . & . \\ . & * & . & . \\ . & . & . & * \end{pmatrix}$$

Утверждение

Если в матрице выбран один элемент в каждой строке и в каждом столбце, то при транспонировании это свойство сохраняется.

Транспонирование и определитель

Утверждение

Чётности перестановок, кодирующих координаты элементов по строкам и по столбцам, одинаковые.

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & a & \cdot \\ b & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & c & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & d \end{pmatrix}$$

$$(\text{col}_1 \leftrightarrow \text{col}_3) \sim (\text{row}_1 \leftrightarrow \text{row}_2)$$

Транспонирование и определитель

Утверждение

Чётности перестановок, кодирующих координаты элементов по строкам и по столбцам, одинаковые.

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & a & \cdot \\ b & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & c & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & d \end{pmatrix}$$

$$(\text{col}_1 \leftrightarrow \text{col}_3) \sim (\text{row}_1 \leftrightarrow \text{row}_2)$$

$$\text{sign}(3124) = \text{sign}(2314)$$

Транспонирование и определитель

Перестановка σ выбирает элемент в каждой строке:

$$\det L = \sum_{\sigma} \text{sign}(\sigma) p(\sigma)$$

Перестановка σ выбирает элемент в каждом столбце:

$$\det L^T = \sum_{\sigma} \text{sign}(\sigma) p^T(\sigma)$$

Транспонирование и определитель

Перестановка σ выбирает элемент в каждой строке:

$$\det L = \sum_{\sigma} \text{sign}(\sigma) p(\sigma)$$

Перестановка σ выбирает элемент в каждом столбце:

$$\det L^T = \sum_{\sigma} \text{sign}(\sigma) p^T(\sigma)$$

Утверждение

$$\det L = \det L^T$$

Рецепт разложения по столбцу

Возьмём аддитивность:

$$\begin{vmatrix} -1 & \color{red}{2} & 3 \\ 4 & \color{red}{5} & 6 \\ 7 & \color{red}{8} & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & \color{red}{2} & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & \color{red}{5} & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & \color{red}{8} & 9 \end{vmatrix}$$

Рецепт разложения по столбцу

Возьмём аддитивность:

$$\begin{vmatrix} -1 & \color{red}{2} & 3 \\ 4 & \color{red}{5} & 6 \\ 7 & \color{red}{8} & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & \color{red}{2} & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & \color{red}{5} & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & \color{red}{8} & 9 \end{vmatrix}$$

Добавим немного принципа Кавальери:

$$\begin{vmatrix} -1 & \color{red}{2} & 3 \\ 4 & \color{red}{5} & 6 \\ 7 & \color{red}{8} & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \color{blue}{0} & \color{red}{2} & \color{blue}{0} \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ \color{blue}{0} & \color{red}{5} & \color{blue}{0} \\ 7 & 0 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ \color{blue}{0} & \color{red}{8} & \color{blue}{0} \end{vmatrix}$$

Рецепт разложения по столбцу

Возьмём аддитивность:

$$\begin{vmatrix} -1 & \color{red}{2} & 3 \\ 4 & \color{red}{5} & 6 \\ 7 & \color{red}{8} & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & \color{red}{2} & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & \color{red}{5} & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & \color{red}{8} & 9 \end{vmatrix}$$

Добавим немного принципа Кавальери:

$$\begin{vmatrix} -1 & \color{red}{2} & 3 \\ 4 & \color{red}{5} & 6 \\ 7 & \color{red}{8} & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \color{blue}{0} & \color{red}{2} & \color{blue}{0} \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ \color{blue}{0} & \color{red}{5} & \color{blue}{0} \\ 7 & 0 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ \color{blue}{0} & \color{red}{8} & \color{blue}{0} \end{vmatrix}$$

Взболтаем и переставим столбцы:

$$\begin{vmatrix} -1 & \color{red}{2} & 3 \\ 4 & \color{red}{5} & 6 \\ 7 & \color{red}{8} & 9 \end{vmatrix} = (-1)^1 \begin{vmatrix} \color{red}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 7 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^2 \begin{vmatrix} \color{red}{5} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^3 \begin{vmatrix} \color{red}{8} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

Рецепт разложения по столбцу

Взболтаем и переставим столбцы:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = (-1)^1 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 7 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^2 \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^3 \begin{vmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

Рецепт разложения по столбцу

Взболтаем и переставим столбцы:

$$\begin{vmatrix} -1 & \color{red}{2} & 3 \\ 4 & \color{red}{5} & 6 \\ 7 & \color{red}{8} & 9 \end{vmatrix} = (-1)^1 \begin{vmatrix} \color{red}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 7 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^2 \begin{vmatrix} \color{red}{5} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^3 \begin{vmatrix} \color{red}{8} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

Снизим размерность:

$$\begin{vmatrix} -1 & \color{red}{2} & 3 \\ 4 & \color{red}{5} & 6 \\ 7 & \color{red}{8} & 9 \end{vmatrix} = (-1)^1 \color{red}{2} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^2 \color{red}{5} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^3 \color{red}{8} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$$

Разложение по столбцу

Выберем любой столбец и «пробежимся» вдоль него!

$$\begin{vmatrix} * & a_{12} & * \\ * & a_{22} & * \\ * & a_{32} & * \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12}^{\times} + (-1)^{2+2} a_{22} \det A_{22}^{\times} + (-1)^{3+2} a_{32} \det A_{32}^{\times}$$

Матрица A_{ij}^{\times} получается из исходной A вычеркиванием строки i и столбца j .

Разложение по столбцу

Выберем любой столбец и «пробежимся» вдоль него!

$$\begin{vmatrix} * & a_{12} & * \\ * & a_{22} & * \\ * & a_{32} & * \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12}^{\times} + (-1)^{2+2} a_{22} \det A_{22}^{\times} + (-1)^{3+2} a_{32} \det A_{32}^{\times}$$

Матрица A_{ij}^{\times} получается из исходной A вычеркиванием строки i и столбца j .

Утверждение

$$\det L = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}^{\times},$$

Разложение по строке

Можно раскладывать и по строке i :

Утверждение

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}^{\times},$$

Определение

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} матрицы A называют величину

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}^{\times},$$

Матрица A_{ij}^{\times} получается из исходной A вычеркиванием строки i и столбца j .

Метод Гаусса

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)

Метод Крамера

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)

Метод Крамера и нахождение обратной матрицы

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)

Поиск обратной матрицы: итоги

Краткий план:

- Метод Гаусса;

Краткий план:

- Метод Гаусса;
- Метод Крамера;

Краткий план:

- Метод Гаусса;
- Метод Крамера;
- Критерии наличия обратной матрицы.

Как поймать двух зайцев?

Если нужно решить две системы уравнений, $Ax = b$ и $Ay = c$, то можно решать их одновременно!

Как поймать двух зайцев?

Если нужно решить две системы уравнений, $Ax = b$ и $Ay = c$, то можно решать их одновременно!

Вместо двух систем

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & 1 & 17 \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 7 & 1 & 6 \end{array} \right)$$

Как поймать двух зайцев?

Если нужно решить две системы уравнений, $Ax = b$ и $Ay = c$, то можно решать их одновременно!

Вместо двух систем

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & 1 & 17 \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 7 & 1 & 6 \end{array} \right)$$

решаем систему с двойной правой частью:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 3 & 10 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 7 & 1 & 17 & 6 \end{array} \right).$$

Как поймать двух зайцев?

Решаем систему с двойной правой частью:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 3 & 10 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 7 & 1 & 17 & 6 \end{array} \right)$$

Как поймать двух зайцев?

Решаем систему с двойной правой частью:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 3 & 10 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 7 & 1 & 17 & 6 \end{array} \right)$$

Приводим левую часть к виду единичной матрицы используя гауссовские преобразования:

- перестановку строк;
- домножение строки на ненулевое число;
- прибавление одной строки к другой с любым весом.

Как поймать двух зайцев?

Решаем систему с двойной правой частью:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 3 & 10 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 7 & 1 & 17 & 6 \end{array} \right)$$

Приводим левую часть к виду единичной матрицы используя гауссовские преобразования:

- перестановку строк;
- домножение строки на ненулевое число;
- прибавление одной строки к другой с любым весом.

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

Как поймать двух зайцев?

Решаем систему с двойной правой частью:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 3 & 10 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 7 & 1 & 17 & 6 \end{array} \right)$$

Приводим левую часть к виду единичной матрицы используя гауссовские преобразования:

- перестановку строк;
- домножение строки на ненулевое число;
- прибавление одной строки к другой с любым весом.

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right) \quad \text{Видим ответ: } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Метод Гаусса

Для нахождения обратной матрицы для A нужно решить систему $A \cdot B = I$.

Для примера

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 6 \\ 6 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Метод Гаусса

Для нахождения обратной матрицы для A нужно решить систему $A \cdot B = I$.

Для примера

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 6 \\ 6 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Приписываем справа единичную матрицу I :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Метод Гаусса

Приписываем справа единичную матрицу I:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Если $\det A \neq 0$, то с помощью гауссовских преобразований получаем единичную слева:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Метод Гаусса

Приписываем справа единичную матрицу I:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Если $\det A \neq 0$, то с помощью гауссовских преобразований получаем единичную слева:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Решение системы, матрицу A^{-1} , читаем справа:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Метод Крамера

Рассмотрим систему $Ax = b$ из n уравнений с n неизвестными.

Метод Крамера

Рассмотрим систему $Ax = b$ из n уравнений с n неизвестными.

Утверждение

Если $\det A \neq 0$, то решение системы единственно и

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A},$$

где матрица A_i получена из матрицы A заменой i -го столбца на правую часть b .

Метод Крамера для обратной матрицы

Матрица A имеет размер $n \times n$.

Метод Крамера для обратной матрицы

Матрица A имеет размер $n \times n$.

Утверждение

Если $\det A \neq 0$, то матрица $B = A^{-1}$ существует и

$$b_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \det(A_{ji}^{\times})}{\det A},$$

где матрица A_{ji}^{\times} получена из матрицы A вычёркиванием строки j и столбца i .

Метод Крамера для обратной матрицы

Матрица A имеет размер $n \times n$.

Утверждение

Если $\det A \neq 0$, то матрица $B = A^{-1}$ существует и

$$b_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \det(A_{ji}^{\times})}{\det A},$$

где матрица A_{ji}^{\times} получена из матрицы A вычёркиванием строки j и столбца i .

Напомним, что $C_{ji} = (-1)^{i+j} \det(A_{ji}^{\times})$ называется алгебраическим дополнением к a_{ji} .

Метод Крамера для обратной матрицы

Алгоритм обращения матрицы A .

1. Находим определитель $\det A$. Если $\det A = 0$, то матрица A не обратимая.

Метод Крамера для обратной матрицы

Алгоритм обращения матрицы A .

1. Находим определитель $\det A$. Если $\det A = 0$, то матрица A не обратимая.
2. Для каждого элемента A находим алгебраическое дополнение $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij}^\times)$. Помещаем все дополнения в матрицу C .

Метод Крамера для обратной матрицы

Алгоритм обращения матрицы A .

1. Находим определитель $\det A$. Если $\det A = 0$, то матрица A не обратимая.
2. Для каждого элемента A находим алгебраическое дополнение $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij}^\times)$. Помещаем все дополнения в матрицу C .
3. Транспонируем матрицу C и получаем **присоединённую матрицу** $\operatorname{adj} A = C^T$.

Метод Крамера для обратной матрицы

Алгоритм обращения матрицы A .

1. Находим определитель $\det A$. Если $\det A = 0$, то матрица A не обратимая.
2. Для каждого элемента A находим алгебраическое дополнение $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij}^\times)$. Помещаем все дополнения в матрицу C .
3. Транспонируем матрицу C и получаем **присоединённую матрицу** $\operatorname{adj} A = C^T$.
4. Делим матрицу $\operatorname{adj} A$ на $\det A$ и получаем $A^{-1} = \operatorname{adj} A / \det A$.

Вырожденная матрица

Матрица A размера $n \times n$ называется **вырожденной**, если:

1. $\det A = 0$;

Вырожденная матрица

Матрица A размера $n \times n$ называется **вырожденной**, если:

1. $\det A = 0$;
2. Система $Ax = 0$ имеет бесконечное количество решений;

Вырожденная матрица

Матрица A размера $n \times n$ называется **вырожденной**, если:

1. $\det A = 0$;
2. Система $Ax = 0$ имеет бесконечное количество решений;
3. Система $Ax = b$ имеет ноль или бесконечное количество решений;

Вырожденная матрица

Матрица A размера $n \times n$ называется **вырожденной**, если:

1. $\det A = 0$;
2. Система $Ax = 0$ имеет бесконечное количество решений;
3. Система $Ax = b$ имеет ноль или бесконечное количество решений;
4. $\text{rank } A < n$;

Вырожденная матрица

Матрица A размера $n \times n$ называется **вырожденной**, если:

1. $\det A = 0$;
2. Система $Ax = 0$ имеет бесконечное количество решений;
3. Система $Ax = b$ имеет ноль или бесконечное количество решений;
4. $\text{rank } A < n$;
5. Столбцы A линейно зависимы;

Вырожденная матрица

Матрица A размера $n \times n$ называется **вырожденной**, если:

1. $\det A = 0$;
2. Система $Ax = 0$ имеет бесконечное количество решений;
3. Система $Ax = b$ имеет ноль или бесконечное количество решений;
4. $\text{rank } A < n$;
5. Столбцы A линейно зависимы;
6. Строки A линейно зависимы;

Вырожденная матрица

Матрица A размера $n \times n$ называется **вырожденной**, если:

1. $\det A = 0$;
2. Система $Ax = 0$ имеет бесконечное количество решений;
3. Система $Ax = b$ имеет ноль или бесконечное количество решений;
4. $\text{rank } A < n$;
5. Столбцы A линейно зависимы;
6. Строки A линейно зависимы;
7. A^{-1} не существует;

Вырожденная матрица

Матрица A размера $n \times n$ называется **вырожденной**, если:

1. $\det A = 0$;
2. Система $Ax = 0$ имеет бесконечное количество решений;
3. Система $Ax = b$ имеет ноль или бесконечное количество решений;
4. $\text{rank } A < n$;
5. Столбцы A линейно зависимы;
6. Строки A линейно зависимы;
7. A^{-1} не существует;

Невырожденная матрица

Матрица A размера $n \times n$ называется невырожденной, если:

1. $\det A \neq 0$;

Невырожденная матрица

Матрица A размера $n \times n$ называется **невырожденной**, если:

1. $\det A \neq 0$;
2. Система $Ax = b$ имеет единственное решение;

Невырожденная матрица

Матрица A размера $n \times n$ называется невырожденной, если:

1. $\det A \neq 0$;
2. Система $Ax = b$ имеет единственное решение;
3. $\text{rank } A = n$;

Невырожденная матрица

Матрица A размера $n \times n$ называется **невырожденной**, если:

1. $\det A \neq 0$;
2. Система $Ax = b$ имеет единственное решение;
3. $\text{rank } A = n$;
4. Столбцы A линейно независимы;

Невырожденная матрица

Матрица A размера $n \times n$ называется **невырожденной**, если:

1. $\det A \neq 0$;
2. Система $Ax = b$ имеет единственное решение;
3. $\text{rank } A = n$;
4. Столбцы A линейно независимы;
5. Строки A линейно независимы;

Невырожденная матрица

Матрица A размера $n \times n$ называется **невырожденной**, если:

1. $\det A \neq 0$;
2. Система $Ax = b$ имеет единственное решение;
3. $\text{rank } A = n$;
4. Столбцы A линейно независимы;
5. Строки A линейно независимы;
6. A^{-1} существует;

LU-разложение

Краткий план:

- Треугольные квадратные матрицы;

Краткий план:

- Треугольные квадратные матрицы;
- LU-разложение;

Краткий план:

- Треугольные квадратные матрицы;
- LU-разложение;
- Применение LU-разложения.

Треугольные матрицы

Определение

Квадратная матрица называется **верхнетреугольной**, если ниже диагонали у неё стоят нулевые числа, например,

$$U = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Треугольные матрицы

Определение

Квадратная матрица называется **верхнетреугольной**, если ниже диагонали у неё стоят нулевые числа, например,

$$U = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

При перемножении верхнетреугольных матриц получается верхнетреугольная.

Треугольные матрицы

Определение

Квадратная матрица называется **верхнетреугольной**, если ниже диагонали у неё стоят нулевые числа, например,

$$U = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

При перемножении верхнетреугольных матриц получается верхнетреугольная. Определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов.

Треугольные матрицы

Определение

Квадратная матрица называется **нижнетреугольной**, если ниже диагонали у неё стоят нулевые числа, например,

$$L = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Треугольные матрицы

Определение

Квадратная матрица называется **нижнетреугольной**, если ниже диагонали у неё стоят нулевые числа, например,

$$L = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

При перемножении нижнетреугольных матриц получается нижнетреугольная.

Треугольные матрицы

Определение

Квадратная матрица называется **нижнетреугольной**, если ниже диагонали у неё стоят нулевые числа, например,

$$L = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

При перемножении нижнетреугольных матриц получается нижнетреугольная. Определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов.

Гауссовские преобразования

Рассмотрим систему уравнений в матричном виде:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & 1 & 17 \end{array} \right)$$

Гауссовские преобразования

Рассмотрим систему уравнений в матричном виде:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & 1 & 17 \end{array} \right)$$

Гауссовские преобразования уравнений системы:

1. Домножение строки на ненулевое число;
2. Перестановка двух строк местами;
3. Прибавление к данной строке другой строки, домноженной на произвольное λ .

Гауссовские преобразования

Рассмотрим систему уравнений в матричном виде:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & 1 & 17 \end{array} \right)$$

Гауссовские преобразования уравнений системы:

1. Домножение строки на ненулевое число;
2. Перестановка двух строк местами;
3. Прибавление к данной строке другой строки, домноженной на произвольное λ .

Каждое из этих действий можно закодировать умножением на матрицу!

Домножение строки как матрица

Домножим вторую строка матрицы A на 7:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \textcolor{red}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} =$$

Домножение строки как матрица

Домножим вторую строку матрицы A на 7:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 7d & 7e & 7f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Левая матрица задаёт веса строк для правой матрицы!

Перестановка строк как матрица

Переставим первую и вторую строки матрицы A :

$$\begin{pmatrix} 0 & \color{red}{1} & 0 \\ \color{red}{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} =$$

Перестановка строк как матрица

Переставим первую и вторую строки матрицы A :

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{d} & \mathbf{e} & \mathbf{f} \\ \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Левая матрица задаёт веса строк для правой матрицы!

Прибавление строки как матрица

Из второй строки вычтем первую строку с весом 4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} =$$

Прибавление строки как матрица

Из второй строки вычтем первую строку с весом 4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d - 4a & e - 4b & f - 4c \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Левая матрица задаёт веса строк для правой матрицы!

Прибавление строки как матрица

Из второй строки вычтем первую строку с весом 4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d - 4a & e - 4b & f - 4c \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Левая матрица задаёт веса строк для правой матрицы!

Прибавлению строки к другой строке ниже соответствует нижнетреугольная матрица.

Вычитание — антоним прибавления

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Вычитание — антоним прибавления

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Левая матрица отвечает за вычитание первой строки из второй с весом 4.

Вычитание — антоним прибавления

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Левая матрица отвечает за вычитание первой строки из второй с весом 4.

Правая матрица отвечает за прибавление первой строки ко второй с весом 4.

Переход к треугольной матрице

С помощью метода Гаусса мы приводим квадратную матрицу к ступенчатому верхнетреугольному виду:

$$A \xrightarrow{g_1} A_1 \xrightarrow{g_2} A_2 \xrightarrow{g_3} \dots A_{k-1} \xrightarrow{g_k} U$$

Переход к треугольной матрице

С помощью метода Гаусса мы приводим квадратную матрицу к ступенчатому верхнетреугольному виду:

$$A \xrightarrow{g_1} A_1 \xrightarrow{g_2} A_2 \xrightarrow{g_3} \dots A_{k-1} \xrightarrow{g_k} U$$

В матричном виде:

$$U = G_k \cdot G_{k-1} \cdot \dots \cdot G_2 \cdot G_1 A$$

Уменьшим список разрешённых действий!

Алгоритм приведения к ступенчатому виду

1. Выберем первое уравнение так, чтобы в нём была переменная x_1 .
2. Вычитаем первое уравнение из остальных так, чтобы в них пропала переменная x_1 .
3. Зафиксируем первое уравнение и работаем с остальными.

Уменьшим список разрешённых действий!

Алгоритм приведения к ступенчатому виду

1. Выберем первое уравнение так, чтобы в нём была переменная x_1 .
2. Вычитаем первое уравнение из остальных так, чтобы в них пропала переменная x_1 .
3. Зафиксируем первое уравнение и работаем с остальными.

Выводы:

- Можно обойтись без домножения строк на число.

Уменьшим список разрешённых действий!

Алгоритм приведения к ступенчатому виду

1. Выберем первое уравнение так, чтобы в нём была переменная x_1 .
2. Вычитаем первое уравнение из остальных так, чтобы в них пропала переменная x_1 .
3. Зафиксируем первое уравнение и работаем с остальными.

Выводы:

- Можно обойтись без домножения строк на число.
- Все перестановки строк можно сделать в начале.

LU-разложение

С помощью метода Гаусса мы приводим квадратную матрицу к ступенчатому верхнетреугольному виду:

$$A \xrightarrow{p} A_1 \xrightarrow{\ell_1} A_2 \xrightarrow{\ell_2} \dots A_{k-1} \xrightarrow{\ell_k} U$$

LU-разложение

С помощью метода Гаусса мы приводим квадратную матрицу к ступенчатому верхнетреугольному виду:

$$A \xrightarrow{p} A_1 \xrightarrow{\ell_1} A_2 \xrightarrow{\ell_2} \dots A_{k-1} \xrightarrow{\ell_k} U$$

В матричном виде:

$$U = L_k \cdot L_{k-1} \cdot \dots \cdot L_2 \cdot L_1 \cdot P \cdot A.$$

LU-разложение

С помощью метода Гаусса мы приводим квадратную матрицу к ступенчатому верхнетреугольному виду:

$$A \xrightarrow{p} A_1 \xrightarrow{\ell_1} A_2 \xrightarrow{\ell_2} \dots A_{k-1} \xrightarrow{\ell_k} U$$

В матричном виде:

$$U = L_k \cdot L_{k-1} \cdot \dots \cdot L_2 \cdot L_1 \cdot P \cdot A.$$

Отменим действия L_i .

$$L_1^{-1} \cdot L_2^{-1} \cdot \dots \cdot L_{k-1}^{-1} \cdot L_k^{-1} \cdot U = P \cdot A.$$

LU-разложение

С помощью метода Гаусса мы приводим квадратную матрицу к ступенчатому верхнетреугольному виду:

$$A \xrightarrow{p} A_1 \xrightarrow{\ell_1} A_2 \xrightarrow{\ell_2} \dots A_{k-1} \xrightarrow{\ell_k} U$$

В матричном виде:

$$U = L_k \cdot L_{k-1} \cdot \dots \cdot L_2 \cdot L_1 \cdot P \cdot A.$$

Отменим действия L_i .

$$L_1^{-1} \cdot L_2^{-1} \cdot \dots \cdot L_{k-1}^{-1} \cdot L_k^{-1} \cdot U = P \cdot A.$$

Гауссовские преобразования эквивалентны разложению

$$L \cdot U = P \cdot A.$$

Зачем нужно LU -разложение?

Если LU -разложение матрицы A получено, то можно очень быстро

- найти определитель матрицы A ;
- решить любую систему $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Зачем нужно LU -разложение?

Если LU -разложение матрицы A получено, то можно очень быстро

- найти определитель матрицы A ;
- решить любую систему $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -4 & 1 & 8 \\ 6 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

Зачем нужно LU -разложение?

Если LU -разложение матрицы A получено, то можно очень быстро

- найти определитель матрицы A ;
- решить любую систему $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -4 & 1 & 8 \\ 6 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-2) \cdot (-1) \cdot 1 = 2$$

Резюме

- Определитель измеряет изменение площади и объёма.

Резюме

- Определитель измеряет изменение площади и объёма.
- Свойства определителя.

Резюме

- Определитель измеряет изменение площади и объёма.
- Свойства определителя.
- Обращение матрицы методом Гаусса.

Резюме

- Определитель измеряет изменение площади и объёма.
- Свойства определителя.
- Обращение матрицы методом Гаусса.
- Обращение матрицы методом Крамера.

Резюме

- Определитель измеряет изменение площади и объёма.
- Свойства определителя.
- Обращение матрицы методом Гаусса.
- Обращение матрицы методом Крамера.
- Метод Гаусса как LU -разложение.

Резюме

- Определитель измеряет изменение площади и объёма.
- Свойства определителя.
- Обращение матрицы методом Гаусса.
- Обращение матрицы методом Крамера.
- Метод Гаусса как LU -разложение.
- Бонус: комплексные числа.

Резюме

- Определитель измеряет изменение площади и объёма.
- Свойства определителя.
- Обращение матрицы методом Гаусса.
- Обращение матрицы методом Крамера.
- Метод Гаусса как LU -разложение.
- Бонус: комплексные числа.

Резюме

- Определитель измеряет изменение площади и объёма.
- Свойства определителя.
- Обращение матрицы методом Гаусса.
- Обращение матрицы методом Крамера.
- Метод Гаусса как LU -разложение.
- Бонус: комплексные числа.

Следующая лекция: спектральное разложение и диагонализация.

Комплексные числа

бонусное видео! Это видеофрагмент с доской, слайдов
здесь нет :)