Определитель и обратная матрица

Идея определителя

Краткий план:

- Определитель на плоскости;

Краткий план:

- Определитель на плоскости;
- Определитель в пространстве.

Идея определителя

Рассмотрим оператор преобразования плоскости,

$\mathsf{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Пара векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ переходит в пару векторов $\mathsf{L}\,\mathbf{a}$, $\mathsf{L}\,\mathbf{b}$.

Идея определителя

Рассмотрим оператор преобразования плоскости, $\mathsf{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Пара векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ переходит в пару векторов $\mathsf{L}\,\mathbf{a}$, $\mathsf{L}\,\mathbf{b}$.

Как меняется площадь параллелограмма образованного двумя векторами?

Идея определителя

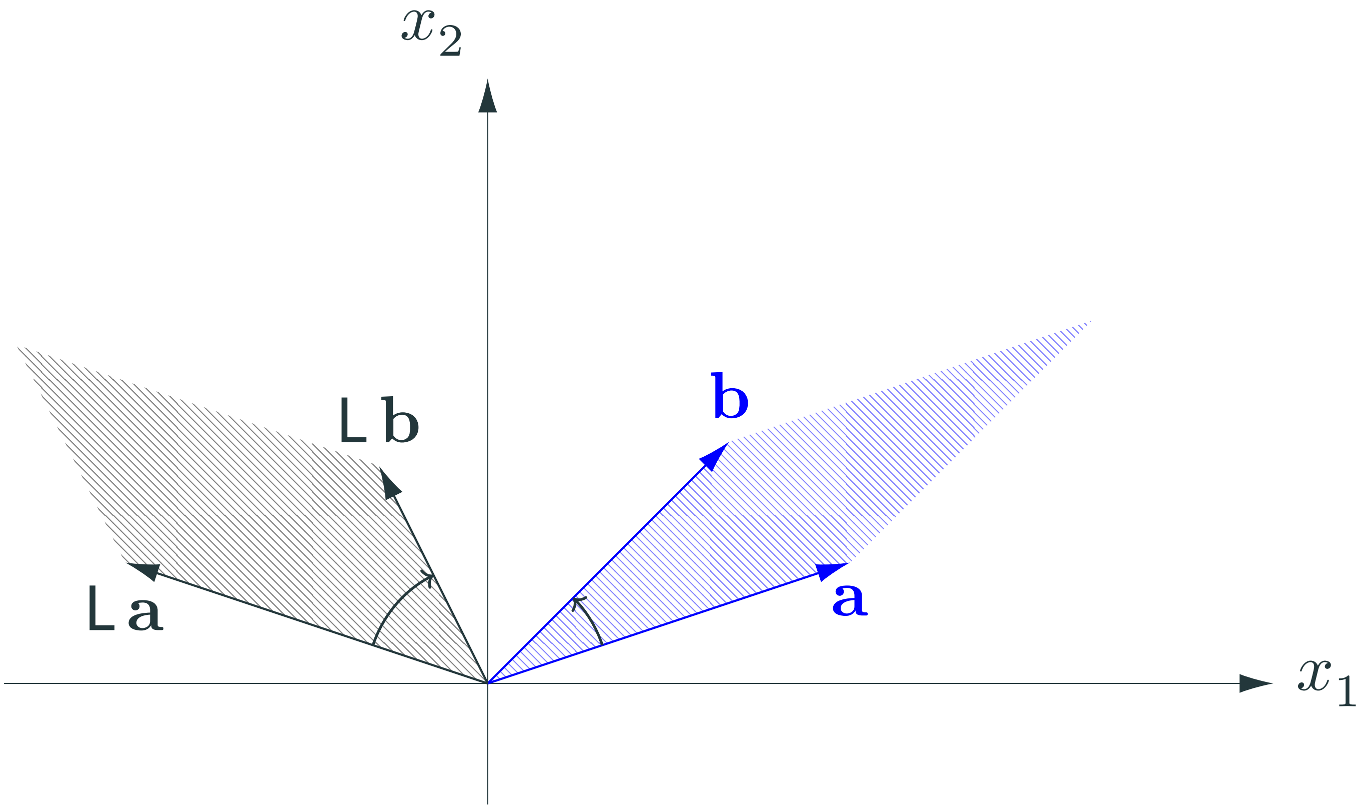
Рассмотрим оператор преобразования плоскости, $\mathsf{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Пара векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ переходит в пару векторов $\mathsf{L}\,\mathbf{a}$, $\mathsf{L}\,\mathbf{b}$.

Как меняется площадь параллелограмма образованного двумя векторами?

Меняется ли направление поворота от первого вектора ко второму?

Идея определителя на картинке



Ориентированная площадь

Определение

Возьмём площадь параллелограмма со сторонами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Если поворот от первого вектора ко второму идёт по часовой стрелке, то дополнительно домножим площадь на (-1).

Полученное число назовём ориентированной площадью параллелограмма и обозначим $S(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Ориентированная площадь

Определение

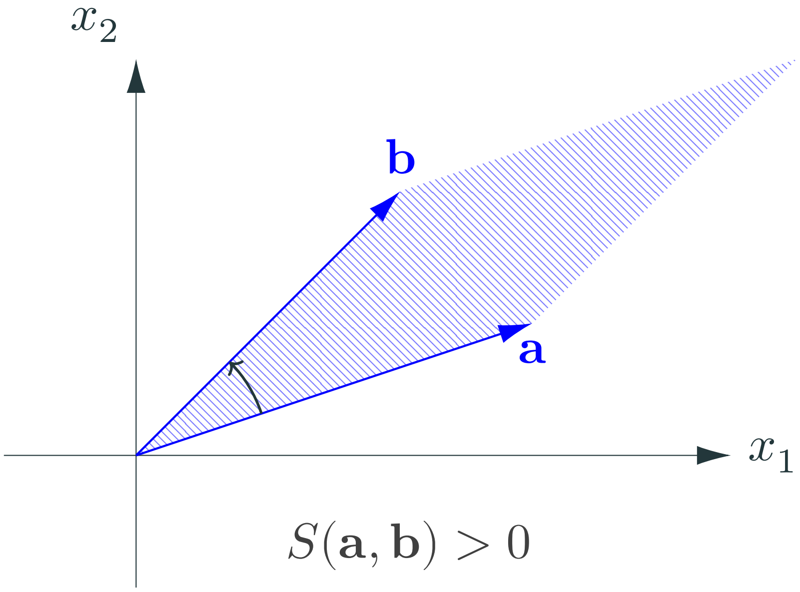
Возьмём площадь параллелограмма со сторонами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Если поворот от первого вектора ко второму идёт по часовой стрелке, то дополнительно домножим площадь на (-1).

Полученное число назовём ориентированной площадью параллелограмма и обозначим $S(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

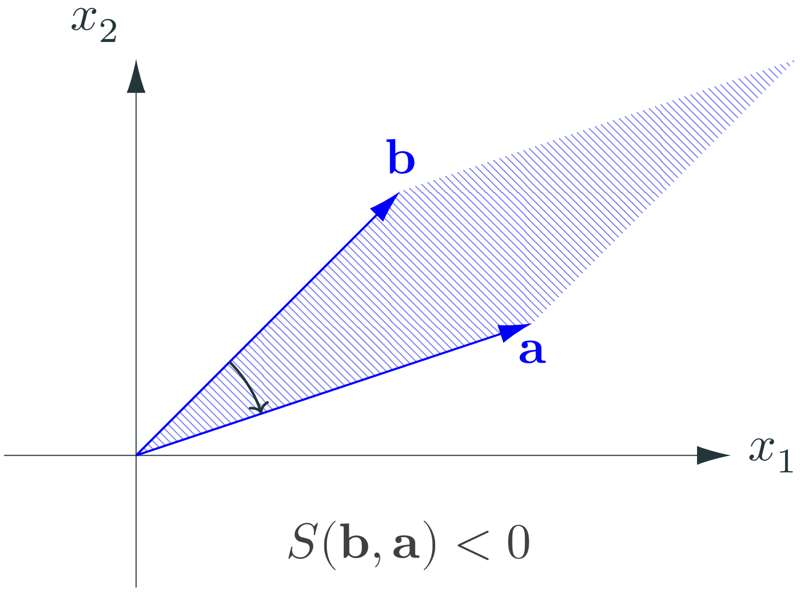
Важен порядок векторов:

$$S(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -S(\mathbf{b}, \mathbf{a}).$$

Ориентированная площадь



$S(\mathbf{a}, \mathbf{b}) > 0$



$S(\mathbf{b}, \mathbf{a}) < 0$

Идея определителя

Определение

Возьмём любые два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, для которых $S(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \neq 0$.

Определитель оператора $\mathsf{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ показывает во сколько раз изменяется ориентированная площадь

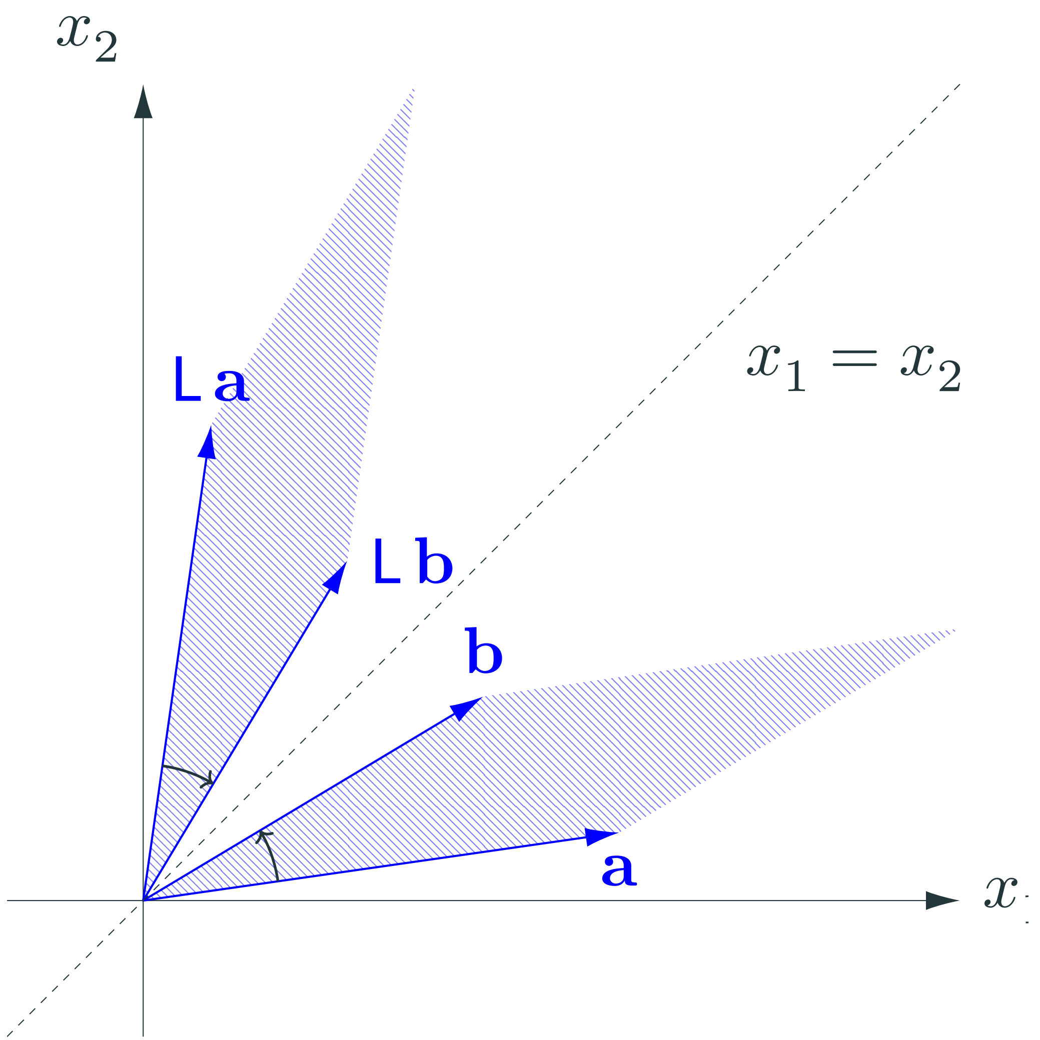
$$\det \mathsf{L} = \frac{S(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{a})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b})}$$

Определитель отражения

Оператор L : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$ отражает относительно $x_1 = x_2$.

Определитель отражения

Оператор L : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$ отражает относительно $x_1 = x_2$.



Определитель отражения

Оператор L : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$ отражает относительно $x_1 = x_2$.

Определитель отражения

Оператор L : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$ отражает относительно $x_1 = x_2$.

Площадь параллелограмма не изменяется.

Меняется направление поворота от первого вектора ко второму.

Определитель отражения

Оператор $\mathsf{L}:\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}a_2\\a_1\end{pmatrix}$ отражает относительно $x_1 = x_2$.

Площадь параллелограмма не изменяется.

Меняется направление поворота от первого вектора ко второму.

$$\det \mathsf{L} = \frac{S(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{b})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b})} = -1$$

Определитель растягивания компонент

Рассмотрим оператор L $: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$.

Определитель растягивания компонент

Рассмотрим оператор L $: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$.

Одна сторона растягивается в два раза, вторая — в три раза.

Меняется направление поворота от первого вектора ко второму.

Определитель растягивания компонент

Рассмотрим оператор L : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$.

Одна сторона растягивается в два раза, вторая — в три раза.

Меняется направление поворота от первого вектора ко второму.

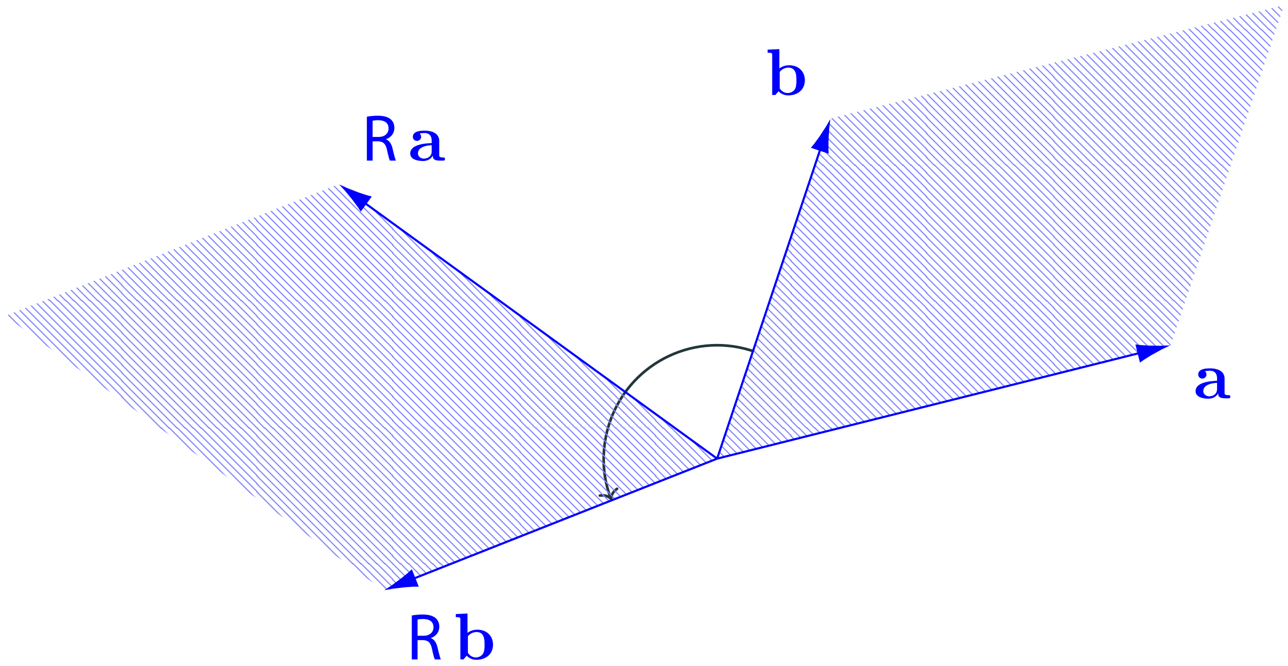
$$\det \mathsf{L} = \frac{S(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{b})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b})} = (-1) \cdot 2 \cdot 3 = -6$$

Определитель поворота

Оператор R $: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ вращает плоскость.

Определитель поворота

Оператор R : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ вращает плоскость.



Определитель поворота

Оператор R : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ вращает плоскость.

Определитель поворота

Оператор $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ вращает плоскость.

При вращении не изменяется площадь параллелограмма.

При вращении не изменяется направление поворота от первого вектора ко второму.

Определитель поворота

Оператор $\mathrm{R} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ вращает плоскость.

При вращении не изменяется площадь параллелограмма.

При вращении не изменяется направление поворота от первого вектора ко второму.

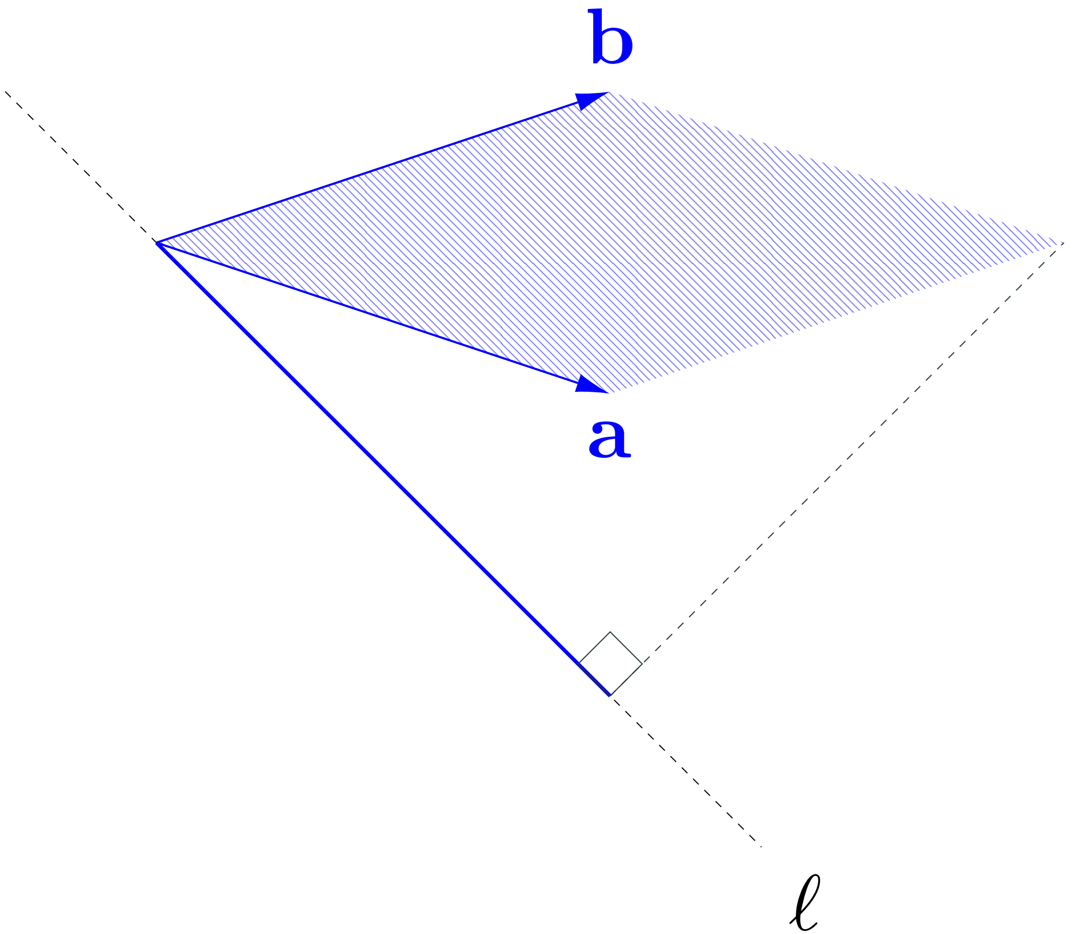
$$\det \mathrm{R} = \frac{S(\mathrm{R}\mathbf{a}, \mathrm{R}\mathbf{b})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b})} = 1$$

Определитель проекции

Оператор H $: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ проецирует векторы на прямую ℓ.

Определитель проекции

Оператор H : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ проецирует векторы на прямую ℓ.



Определитель проекции

Оператор $\mathrm{H} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ проецирует векторы на прямую ℓ.

Определитель проекции

Оператор H : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ проецирует векторы на прямую ℓ.

При проекции любой параллелограмм «складывается» в отрезок нулевой площади.

$$\det \mathrm{H} = \frac{S(\mathrm{H}\mathbf{a}, \mathrm{H}\mathbf{b})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b})} = 0$$

Чем прекрасна ориентированная площадь?

Утверждение

Ориентированная площадь $S(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ линейна по каждому аргументу:

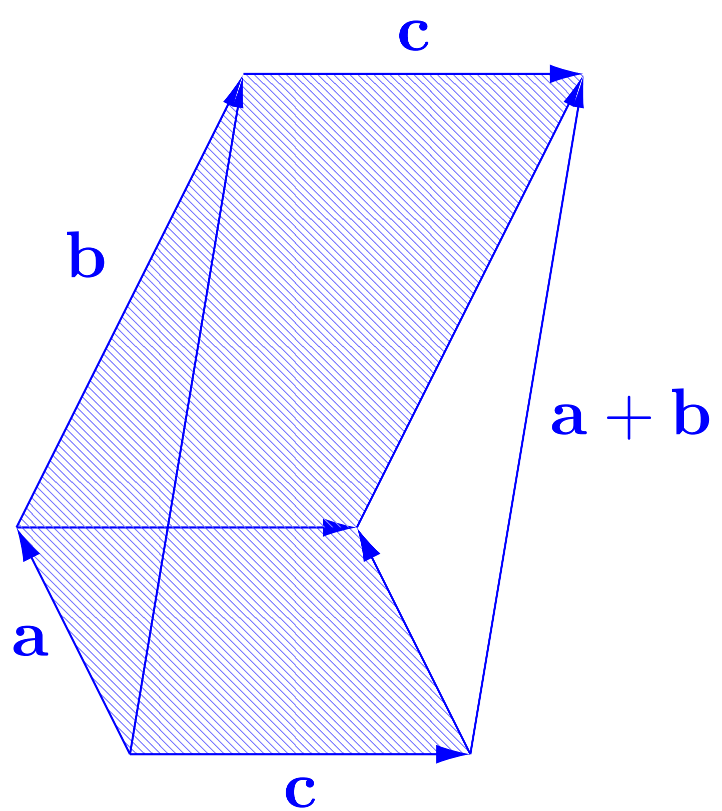
$$S(\lambda\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \lambda S(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \qquad S(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}) = S(\mathbf{a}, \mathbf{c}) + S(\mathbf{b}, \mathbf{c})$$

Чем прекрасна ориентированная площадь?

Утверждение

Ориентированная площадь $S(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ линейна по каждому аргументу:

$$S(\lambda\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \lambda S(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \qquad S(\mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{c}) = S(\mathbf{a}, \mathbf{c}) + S(\mathbf{b}, \mathbf{c})$$



Корректность идеи определителя

Величина $\det \mathsf{L} = \frac{S(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{b})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b})}$ не зависит от выбора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$!

Корректность идеи определителя

Величина $\det \mathsf{L} = \frac{S(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{b})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b})}$ не зависит от выбора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$!

Идея доказательства

Обозначим $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Корректность идеи определителя

Величина $\det \mathsf{L} = \frac{S(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{b})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b})}$ не зависит от выбора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$!

Идея доказательства

Обозначим $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Возьмём $\mathbf{a} = 5\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2$. Найдём $S(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{e}_2)/S(\mathbf{a}, \mathbf{e}_2)$:

Корректность идеи определителя

Величина $\det \mathsf{L} = \frac{S(\mathsf{L}\,\mathbf{a},\mathsf{L}\,\mathbf{b})}{S(\mathbf{a},\mathbf{b})}$ не зависит от выбора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$!

Идея доказательства

Обозначим $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Возьмём $\mathbf{a} = 5\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2$. Найдём $S(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{e}_2)/S(\mathbf{a}, \mathbf{e}_2)$:

$$\frac{S(\mathsf{L}(5\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2), \mathsf{L}\,\mathbf{e}_2)}{S(5\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2)} = \frac{S(\mathsf{L}\,5\mathbf{e}_1, \mathsf{L}\,\mathbf{e}_2) + S(\mathsf{L}\,7\mathbf{e}_2, \mathsf{L}\,\mathbf{e}_2)}{S(5\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + S(7\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2)} =$$

Корректность идеи определителя

Величина $\det \mathsf{L} = \frac{S(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{b})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b})}$ не зависит от выбора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$!

Идея доказательства

Обозначим $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Возьмём $\mathbf{a} = 5\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2$. Найдём $S(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{e}_2)/S(\mathbf{a}, \mathbf{e}_2)$:

$$\frac{S(\mathsf{L}(5\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2), \mathsf{L}\,\mathbf{e}_2)}{S(5\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2)} = \frac{S(\mathsf{L}\,5\mathbf{e}_1, \mathsf{L}\,\mathbf{e}_2) + S(\mathsf{L}\,7\mathbf{e}_2, \mathsf{L}\,\mathbf{e}_2)}{S(5\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + S(7\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2)} =$$

$$= \frac{5S(\mathsf{L}\,\mathbf{e}_1, \mathsf{L}\,\mathbf{e}_2) + 0}{5S(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + 0} = \frac{S(\mathsf{L}\,\mathbf{e}_1, \mathsf{L}\,\mathbf{e}_2)}{S(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)}$$

Ещё один взгляд на определитель

Обозначим $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Ещё один взгляд на определитель

Обозначим $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Определение

Преобразуем параллелограмм, образованный векторами $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, с помощью оператора L.

Определитель линейного оператора $\mathsf{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ равен ориентированной площади полученного параллелограмма.

$$\det \mathsf{L} = S(\mathsf{L}\,\mathbf{e}_1, \mathsf{L}\,\mathbf{e}_2)$$

Определитель в пространстве

Идея: заменим ориентированную площадь параллелограмма $S(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ на ориентированный объём параллелепипеда $S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$.

Определитель в пространстве

Идея: заменим ориентированную площадь параллелограмма $S(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ на ориентированный объём параллелепипеда $S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$.

Определение

Возьмём любые три вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, для которых $S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \neq 0$.

Определитель оператора $\mathsf{L} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ показывает во сколько раз изменяется ориентированный объём

$$\det \mathsf{L} = \frac{S(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{c})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}$$

А что такое ориентированный объём?

А что такое ориентированный объём?

Обозначим $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

А что такое ориентированный объём?

Обозначим $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Определение

Рассмотрим параллелепипед, образованный $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$.

А что такое ориентированный объём?

Обозначим $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Определение

Рассмотрим параллелепипед, образованный $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$.

С помощью поворота:

Совместим вектор $\mathbf{e}_1$ с вектором $\mathbf{a}$;

Затем вектор $\mathbf{e}_2$ «положим» в плоскость $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$.

А что такое ориентированный объём?

Обозначим $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Определение

Рассмотрим параллелепипед, образованный $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$.

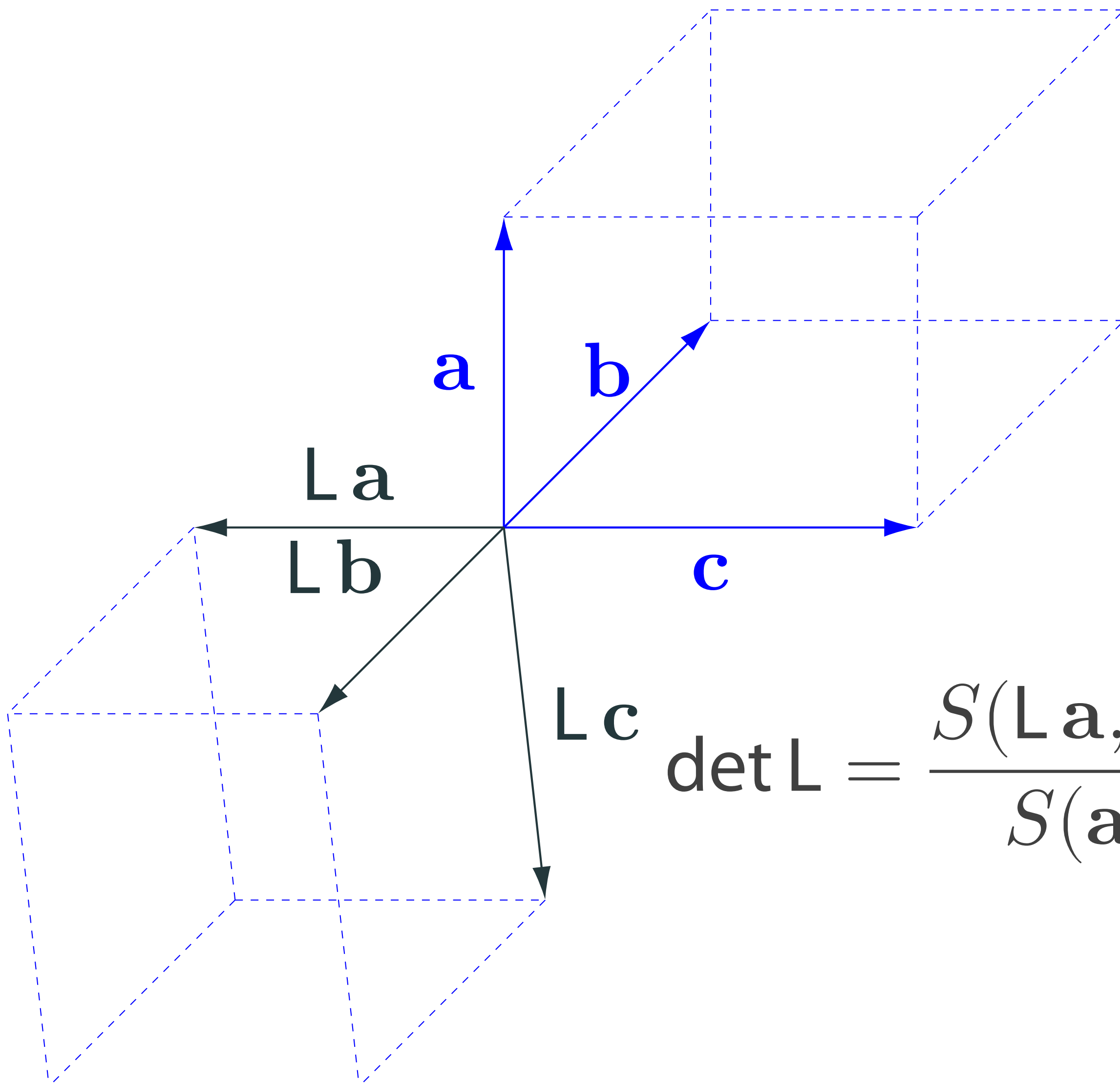
С помощью поворота:

Совместим вектор $\mathbf{e}_1$ с вектором $\mathbf{a}$;

Затем вектор $\mathbf{e}_2$ «положим» в плоскость $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$.

Ориентированный объём $S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ объявим отрицательным, если векторы $\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{c}$ смотрят в разные полупространства.

Определитель в пространстве



$$\det \mathsf{L} = \frac{S(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{b}, \mathsf{L}\,\mathbf{c})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}$$

Определитель растягивания компонент

Рассмотрим оператор L $:\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2a_1 \\ 3a_2 \\ -5a_3 \end{pmatrix}.$

Определитель растягивания компонент

Рассмотрим оператор L $: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2a_1 \\ 3a_2 \\ -5a_3 \end{pmatrix}.$

Одна сторона растягивается в два раза, вторая — в три раза, третья — в пять.

Первые два вектора не изменяют направления при преобразовании.

Третий вектор меняет полупространство, в котором он лежит относительно первых двух.

Определитель растягивания компонент

Рассмотрим оператор L : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2a_1 \\ 3a_2 \\ -5a_3 \end{pmatrix}$.

Одна сторона растягивается в два раза, вторая — в три раза, третья — в пять.

Первые два вектора не изменяют направления при преобразовании.

Третий вектор меняет полупространство, в котором он лежит относительно первых двух.

$$\det \mathsf{L} = \frac{S(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{b}, \mathsf{L}\,\mathbf{c})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})} = (-1) \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = -30$$

Определитель проекции

Оператор H $: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ проецирует векторы на плоскость α.

Определитель проекции

Оператор H $: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ проецирует векторы на плоскость α.

Любой параллелепипед «схлопывается» в плоскую фигуру нулевого объёма.

Определитель проекции

Оператор $\mathrm{H} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ проецирует векторы на плоскость α.

Любой параллелепипед «схлопывается» в плоскую фигуру нулевого объёма.

$$\det \mathrm{H} = \frac{S(\mathrm{H}\mathbf{a}, \mathrm{H}\mathbf{b}, \mathrm{H}\mathbf{c})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})} = 0$$

Свойства определителя

Краткий план:

- Ориентированный объём в $\mathbb{R}^n$;

Краткий план:

- Ориентированный объём в $\mathbb{R}^n$;
- Свойства определителя;

Краткий план:

- Ориентированный объём в $\mathbb{R}^n$;
- Свойства определителя;
- Явная формула для определителя.

Формализация ориентированного объёма

Вектор $\mathbf{e}_i$ содержит на i-м месте единицу, а на остальных — нули.

Формализация ориентированного объёма

Вектор $\mathbf{e}_i$ содержит на i-м месте единицу, а на остальных — нули.

1. Верный гипер-объём базового гипер-кубика:

$$S(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n) = 1$$

Формализация ориентированного объёма

Вектор $\mathbf{e}_i$ содержит на i-м месте единицу, а на остальных — нули.

1. Верный гипер-объём базового гипер-кубика:

$$S(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) = 1$$

2. Линейность по каждому аргументу:

$$S(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n) = S(\mathbf{a}, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n) + \\ + S(\mathbf{b}, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n)$$

$$S(\lambda \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n) = \lambda S(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n)$$

Формализация ориентированного объёма

Вектор $\mathbf{e}_i$ содержит на i-м месте единицу, а на остальных — нули.

1. Верный гипер-объём базового гипер-кубика:
$$S(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) = 1$$

2. Линейность по каждому аргументу:
$$S(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n) = S(\mathbf{a}, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n) + \\ + S(\mathbf{b}, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n)$$
$$S(\lambda \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n) = \lambda S(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n)$$

3. Антисимметричность:
$$S(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n) = -S(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n)$$

Определитель во всей n-мерности

Определение

Возьмём векторы $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$, для которых $S(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) \neq 0$.

Определитель оператора $\mathsf{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ показывает во сколько раз изменяется ориентированный гипер-объём произвольного параллелепипеда:

$$\det \mathsf{L} = \frac{S(\mathsf{L}\,\mathbf{v}_1, \ldots, \mathsf{L}\,\mathbf{v}_n)}{S(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)}$$

Определитель во всей n-мерности

Определение

Возьмём векторы $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$, для которых $S(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) \neq 0$.

Определитель оператора $\mathsf{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ показывает во сколько раз изменяется ориентированный гипер-объём произвольного параллелепипеда:

$$\det \mathsf{L} = \frac{S(\mathsf{L}\,\mathbf{v}_1, \ldots, \mathsf{L}\,\mathbf{v}_n)}{S(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)}$$

Определение

Определитель оператора $\mathsf{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ показывает во сколько раз изменяется ориентированный гипер-объём базового гипер-кубика:

$$\det \mathsf{L} = S(\mathsf{L}\,\mathbf{e}_1, \ldots, \mathsf{L}\,\mathbf{e}_n)$$

Определитель матрицы

Определение

Определителем матрицы называется определитель соответствующего линейного оператора.

Определитель матрицы

Определение

Определителем матрицы называется определитель соответствующего линейного оператора.

В матрице L i-й столбец равен $\mathsf{L}\,\mathbf{e}_i$, поэтому

$$\det \mathsf{L} = S(\mathrm{col}_1 \mathsf{L}, \mathrm{col}_2 \mathsf{L}, \ldots, \mathrm{col}_n \mathsf{L})$$

Определитель матрицы

Определение

Определителем матрицы называется определитель соответствующего линейного оператора.

В матрице L i-й столбец равен L $\mathbf{e}_i$, поэтому

$$\det \mathsf{L} = S(\mathrm{col}_1 \mathsf{L}, \mathrm{col}_2 \mathsf{L}, \ldots, \mathrm{col}_n \mathsf{L})$$

Утверждение

Определитель матрицы можно считать по строкам:

$$\det \mathsf{L} = S(\mathrm{row}_1 \mathsf{L}, \mathrm{row}_2 \mathsf{L}, \ldots, \mathrm{row}_n \mathsf{L})$$

Определитель обозначают det L или $|\,\mathsf{L}\,|$.

Быстрые признаки равенства нулю

1. Если среди векторов есть два одинаковых, то гипер-объём параллелепипеда равен нулю.

$$S(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_n) = 0$$

Быстрые признаки равенства нулю

1. Если среди векторов есть два одинаковых, то гипер-объём параллелепипеда равен нулю.

$$S(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n) = 0$$

2. Если среди векторов есть один нулевой, то гипер-объём параллелепипеда равен нулю.

$$S(\mathbf{0}, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n) = 0$$

Принцип Кавальери

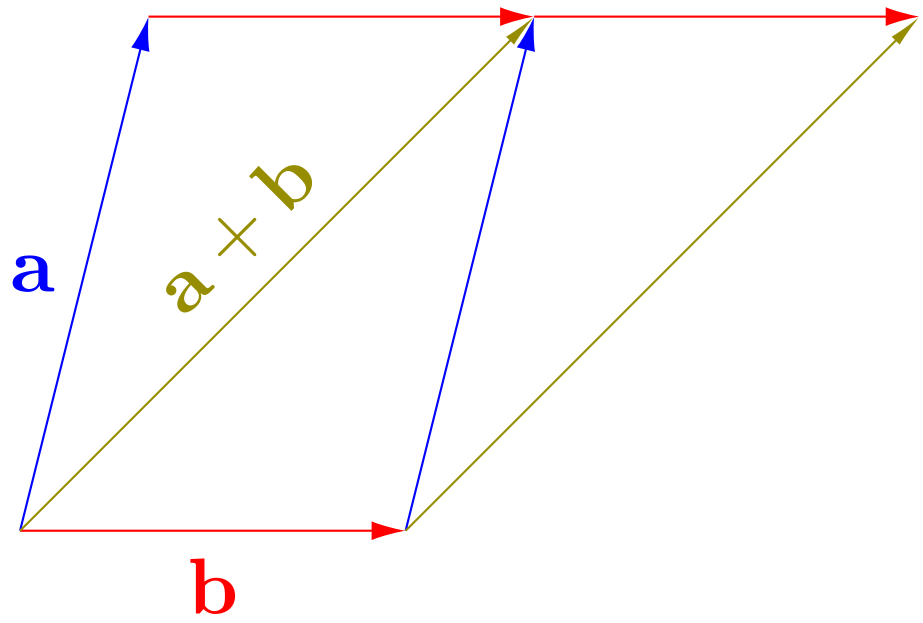
«Скашивание» параллелепипеда вбок не изменяет гипер-объём:

$$S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n) = S(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{b}, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n)$$

Принцип Кавальери

«Скашивание» параллелепипеда вбок не изменяет гипер-объём:

$$S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n) = S(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{b}, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n)$$



Принцип Кавальери на матрице

Единственным ненулевым элементом столбца можно «скосить» всю строку:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ \color{red}{4} & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} =$$

Принцип Кавальери на матрице

Единственным ненулевым элементом столбца можно «скосить» всю строку:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ \color{red}{4} & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ \color{red}{4} & \color{blue}{0} & 7 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} =$$

Принцип Кавальери на матрице

Единственным ненулевым элементом столбца можно «скосить» всю строку:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ {\color{red}4} & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ {\color{red}4} & {\color{blue}0} & 7 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ {\color{red}4} & {\color{blue}0} & {\color{blue}0} \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix}$$

Принцип Кавальери на матрице

Единственным ненулевым элементом столбца можно «скосить» всю строку:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ \color{red}{4} & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ \color{red}{4} & \color{blue}{0} & 7 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ \color{red}{4} & \color{blue}{0} & \color{blue}{0} \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix}$$

Единственным ненулевым элементом строки можно «скосить» весь столбец:

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & -2 \\ \color{red}{4} & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix} =$$

Принцип Кавальери на матрице

Единственным ненулевым элементом столбца можно «скосить» всю строку:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix}$$

Единственным ненулевым элементом строки можно «скосить» весь столбец:

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix} =$$

Принцип Кавальери на матрице

Единственным ненулевым элементом столбца можно «скосить» всю строку:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ {\color{red}4} & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ {\color{red}4} & {\color{blue}0} & 7 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ {\color{red}4} & {\color{blue}0} & {\color{blue}0} \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix}$$

Единственным ненулевым элементом строки можно «скосить» весь столбец:

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & -2 \\ {\color{red}4} & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} {\color{blue}0} & 3 & -2 \\ {\color{red}4} & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} {\color{blue}0} & 3 & -2 \\ {\color{red}4} & 0 & 0 \\ {\color{blue}0} & 1 & -5 \end{vmatrix}$$

Определитель и ранг

Утверждение

Для матрицы L размера $n \times n$ четыре свойства эквиваленты:

1. Определитель равен нулю, $\det L = 0$.

Определитель и ранг

Утверждение

Для матрицы L размера $n \times n$ четыре свойства эквиваленты:

1. Определитель равен нулю, $\det \mathrm{L} = 0$.
2. Столбцы матрицы линейно зависимы.

Определитель и ранг

Утверждение

Для матрицы L размера $n \times n$ четыре свойства эквиваленты:

1. Определитель равен нулю, $\det \mathrm{L} = 0$.
2. Столбцы матрицы линейно зависимы.
3. Строки матрицы линейно зависимы.

Определитель и ранг

Утверждение

Для матрицы L размера $n \times n$ четыре свойства эквиваленты:

1. Определитель равен нулю, $\det \mathrm{L} = 0$.
2. Столбцы матрицы линейно зависимы.
3. Строки матрицы линейно зависимы.
4. Ранг матрицы меньше числа столбцов, $\operatorname{rank} \mathrm{L} < n$.

Определитель композиции

Утверждение

Определитель композиции A и B равен произведению определителей:

$$\det(AB) = \det A \det B$$

Определитель композиции

Утверждение

Определитель композиции A и B равен произведению определителей:

$$\det(AB) = \det A \det B$$

Следствие

$$\det A \det A^{-1} = \det\left(A \cdot A^{-1}\right) = \det \mathrm{I} = 1$$

Спокойствие, только спокойствие!

Утверждение

Свойства нормировки, линейности по аргументам и антисимметричности однозначно определяют функцию гипер-объёма $S(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$.

Спокойствие, только спокойствие!

Утверждение

Свойства нормировки, линейности по аргументам и антисимметричности однозначно определяют функцию гипер-объёма $S(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$.

Утверждение

Отношение гипер-объёмов $\det \mathsf{L} = \frac{S(\mathsf{L}\,\mathbf{v}_1, \ldots, \mathsf{L}\,\mathbf{v}_n)}{S(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)}$ не зависит от выбора $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$.

Формула с перестановками

Определение

Перестановкой называют последовательность из n чисел, в которой каждое число от 1 до n встречается ровно один раз.

Формула с перестановками

Определение

Перестановкой называют последовательность из n чисел, в которой каждое число от 1 до n встречается ровно один раз.

Примеры: (12345), (32145), (21354).

Формула с перестановками

Определение

Перестановкой называют последовательность из n чисел, в которой каждое число от 1 до n встречается ровно один раз.

Примеры: (12345), (32145), (21354).

Определение

Перестановку называют чётной, если требуется чётное число смен местами двух чисел, чтобы привести перестановку к $(1234\ldots n)$.

Если σ — чётная перестановка, то пишут $\operatorname{sign}\sigma = 1$, для нечётной пишут $\operatorname{sign}\sigma = -1$.

Формула с перестановками

Определение

Перестановкой называют последовательность из n чисел, в которой каждое число от 1 до n встречается ровно один раз.

Примеры: (12345), (32145), (21354).

Определение

Перестановку называют чётной, если требуется чётное число смен местами двух чисел, чтобы привести перестановку к $(1234\dots n)$.

Если σ — чётная перестановка, то пишут $\operatorname{sign}\sigma = 1$, для нечётной пишут $\operatorname{sign}\sigma = -1$.

Примеры:

$\operatorname{sign}(12345) = 1$, $\operatorname{sign}(32145) = -1$, $\operatorname{sign}(21354) = 1$.

Расстановка ладей!

Рассмотрим квадратную матрицу.

Перестановку σ будем трактовать как инструкцию, какой элемент взять из очередной строки матрицы.

$$(3124) \sim \begin{pmatrix} . & . & * & . \\ * & . & . & . \\ . & * & . & . \\ . & . & . & * \end{pmatrix}$$

Расстановка ладей!

Рассмотрим квадратную матрицу.

Перестановку σ будем трактовать как инструкцию, какой элемент взять из очередной строки матрицы.

$$(3124) \sim \begin{pmatrix} . & . & * & . \\ * & . & . & . \\ . & * & . & . \\ . & . & . & * \end{pmatrix}$$

С помощью $p(\sigma)$ обозначим произведение этих элементов.

Например, $p(3124) = a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{44}$.

Явная формула

Утверждение

Трём свойствам определителя (нормировке, линейности, антисимметричности) удовлетворяет единственная функция

$$\det \mathrm{L} = \sum_{\sigma} \mathrm{sign}(\sigma) \cdot p(\sigma).$$

Перестановку σ трактуем как инструкцию, какой элемент взять из очередной строки матрицы.

С помощью $p(\sigma)$ обозначено произведение этих элементов.

Иллюстрация для 2×2

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} =$$

Иллюстрация для 2×2

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \underset{\color{red}{\mathrm{sign}(12)=1}}{\begin{pmatrix} a & \\ & d \end{pmatrix}} - \underset{\color{blue}{\mathrm{sign}(21)=-1}}{\begin{pmatrix} & b \\ c & \end{pmatrix}} =$$

Иллюстрация для 2×2

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \underset{\text{sign}(12)=1}{\begin{pmatrix} a & \\ & d \end{pmatrix}} - \underset{\text{sign}(21)=-1}{\begin{pmatrix} & b \\ c & \end{pmatrix}} = ad - bc$$

Иллюстрация для 3×3

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} =$$

Иллюстрация для 3×3

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} =$$

$$= + \begin{pmatrix} a & & \\ & e & \\ & & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & & c \\ d & & \\ & h & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & b & \\ & & f \\ g & & \end{pmatrix}$$

sign$(123)=1$ sign$(312)=1$ sign$(231)=1$

$$- \begin{pmatrix} & & c \\ & e & \\ g & & \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} & b & \\ d & & \\ & & i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & & \\ & & f \\ & h & \end{pmatrix} =$$

sign$(321)=-1$ sign$(213)=-1$ sign$(132)=-1$

Иллюстрация для 3×3

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} =$$

$$= +\underset{\mathrm{sign}(123)=1}{\begin{pmatrix} a & & \\ & e & \\ & & i \end{pmatrix}} + \underset{\mathrm{sign}(312)=1}{\begin{pmatrix} & & c \\ d & & \\ & h & \end{pmatrix}} + \underset{\mathrm{sign}(231)=1}{\begin{pmatrix} & b & \\ & & f \\ g & & \end{pmatrix}}$$

$$- \underset{\mathrm{sign}(321)=-1}{\begin{pmatrix} & & c \\ & e & \\ g & & \end{pmatrix}} - \underset{\mathrm{sign}(213)=-1}{\begin{pmatrix} & b & \\ d & & \\ & & i \end{pmatrix}} - \underset{\mathrm{sign}(132)=-1}{\begin{pmatrix} a & & \\ & & f \\ & h & \end{pmatrix}} =$$

$$= aei + cdh + bfg - ceg - bdi - afh$$

Вычисление определителя

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)

Определитель и транспонирование

Краткий план:

- Транспонирование матрицы;

Краткий план:

- Транспонирование матрицы;
- Определитель и транспонирование;

Краткий план:

- Транспонирование матрицы;
- Определитель и транспонирование;
- Разложение определителя по строке.

Конструктивный подход к транспонированию

Определение транспонирования оператора основано на свойстве

$$\langle \mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathsf{L}^T\,\mathbf{b} \rangle.$$

Конструктивный подход к транспонированию

Определение транспонирования оператора основано на свойстве

$$\langle \mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathsf{L}^T\,\mathbf{b} \rangle.$$

Возьмём, к примеру, $\mathbf{a} = \mathbf{e}_2$ и $\mathbf{b} = \mathbf{e}_3$:

$$\langle \mathsf{col}_2\,\mathsf{L}, \mathbf{e}_3 \rangle = \langle \mathbf{e}_2, \mathsf{col}_3\,\mathsf{L}^T \rangle$$

Конструктивный подход к транспонированию

Определение транспонирования оператора основано на свойстве

$$\langle \mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathsf{L}^T\,\mathbf{b} \rangle.$$

Возьмём, к примеру, $\mathbf{a} = \mathbf{e}_2$ и $\mathbf{b} = \mathbf{e}_3$:

$$\langle \mathsf{col}_2\,\mathsf{L}, \mathbf{e}_3 \rangle = \langle \mathbf{e}_2, \mathsf{col}_3\,\mathsf{L}^T \rangle$$

$$\mathsf{L}_{32} = \mathsf{L}^T_{23}$$

Конструктивный подход к транспонированию

Определение транспонирования оператора основано на свойстве

$$\langle \mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle = \langle \mathbf{a}, \mathsf{L}^T\,\mathbf{b}\rangle.$$

Возьмём, к примеру, $\mathbf{a} = \mathbf{e}_2$ и $\mathbf{b} = \mathbf{e}_3$:

$$\langle \mathsf{col}_2\,\mathsf{L}, \mathbf{e}_3\rangle = \langle \mathbf{e}_2, \mathsf{col}_3\,\mathsf{L}^T\rangle$$

$$\mathsf{L}_{32} = \mathsf{L}^T_{23}$$

Транспонирование меняет местами строки и столбцы матрицы!

Транспонирование матрицы

Пример:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

Транспонирование матрицы

Пример:

$$\mathsf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\mathsf{L}^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

Транспонирование матрицы

Пример:

$$\mathsf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\mathsf{L}^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

Заметим, что $\mathsf{L}^{TT} = \mathsf{L}$.

Транспонирование и определитель

Явная формула определителя:

$$\det \mathsf{L} = \sum_{\sigma} \mathsf{sign}(\sigma) p(\sigma)$$

Транспонирование и определитель

Явная формула определителя:

$$\det \mathsf{L} = \sum_{\sigma} \mathsf{sign}(\sigma) p(\sigma)$$

Перестановка диктует, какой элемент выбрать в каждой строке:

$$(3124) \sim \begin{pmatrix} . & . & * & . \\ * & . & . & . \\ . & * & . & . \\ . & . & . & * \end{pmatrix}$$

Транспонирование и определитель

Явная формула определителя:

$$\det \mathsf{L} = \sum_{\sigma} \mathrm{sign}(\sigma) p(\sigma)$$

Перестановка диктует, какой элемент выбрать в каждой строке:

$$(3124) \sim \begin{pmatrix} . & . & * & . \\ * & . & . & . \\ . & * & . & . \\ . & . & . & * \end{pmatrix}$$

Утверждение

Если в матрице выбран один элемент в каждой строке и в каждом столбце, то при транспонировании это свойство сохраняется.

Транспонирование и определитель

Утверждение

Чётности перестановок, кодирующих координаты элементов по строкам и по столбцам, одинаковые.

$$\begin{pmatrix} . & . & a & . \\ b & . & . & . \\ . & c & . & . \\ . & . & . & d \end{pmatrix}$$

$$(\mathsf{col}_1 \leftrightarrow \mathsf{col}_3) \sim (\mathsf{row}_1 \leftrightarrow \mathsf{row}_2)$$

Транспонирование и определитель

Утверждение

Чётности перестановок, кодирующих координаты элементов по строкам и по столбцам, одинаковые.

$$\begin{pmatrix} . & . & a & . \\ b & . & . & . \\ . & c & . & . \\ . & . & . & d \end{pmatrix}$$

$$(\mathrm{col}_1 \leftrightarrow \mathrm{col}_3) \sim (\mathrm{row}_1 \leftrightarrow \mathrm{row}_2)$$

$$\mathrm{sign}(3124) = \mathrm{sign}(2314)$$

Транспонирование и определитель

Перестановка σ выбирает элемент в каждой строке:

$$\det \mathsf{L} = \sum_{\sigma} \mathrm{sign}(\sigma) p(\sigma)$$

Перестановка σ выбирает элемент в каждом столбце:

$$\det \mathsf{L}^T = \sum_{\sigma} \mathrm{sign}(\sigma) p^T(\sigma)$$

Транспонирование и определитель

Перестановка σ выбирает элемент в каждой строке:

$$\det \mathsf{L} = \sum_{\sigma} \mathsf{sign}(\sigma) p(\sigma)$$

Перестановка σ выбирает элемент в каждом столбце:

$$\det \mathsf{L}^T = \sum_{\sigma} \mathsf{sign}(\sigma) p^T(\sigma)$$

Утверждение

$$\det \mathsf{L} = \det \mathsf{L}^T$$

Разложение по столбцу на примере

Возьмём аддитивность:

$$\begin{vmatrix} -1 & \color{red}{2} & 3 \\ 4 & \color{red}{5} & 6 \\ 7 & \color{red}{8} & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & \color{red}{2} & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & \color{red}{5} & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & \color{red}{8} & 9 \end{vmatrix}$$

Разложение по столбцу на примере

Возьмём аддитивность:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Добавим немного принципа Кавальери:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 7 & 0 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 0 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

Разложение по столбцу на примере

Возьмём аддитивность:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Добавим немного принципа Кавальери:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 7 & 0 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 0 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

Взболтаем и переставим столбцы:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = (-1)^1 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 7 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^2 \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^3 \begin{vmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

Разложение по столбцу на примере

Взболтаем и переставим столбцы:

$$\begin{vmatrix} -1 & {\color{red}2} & 3 \\ 4 & {\color{red}5} & 6 \\ 7 & {\color{red}8} & 9 \end{vmatrix} = (-1)^1 \begin{vmatrix} {\color{red}2} & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 7 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^2 \begin{vmatrix} {\color{red}5} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^3 \begin{vmatrix} {\color{red}8} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

Разложение по столбцу на примере

Взболтаем и переставим столбцы:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = (-1)^1 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 7 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^2 \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^3 \begin{vmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

Снизим размерность:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = (-1)^1 2 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^2 5 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^3 8 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$$

Разложение по столбцу

Выберем любой столбец и «пробежимся» вдоль него!

$$\begin{vmatrix} * & a_{12} & * \\ * & a_{22} & * \\ * & a_{32} & * \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+2} a_{12} \det A^{\times}_{12} + (-1)^{2+2} a_{22} \det A^{\times}_{22} + (-1)^{3+2} a_{32} \det A^{\times}_{32}$$

Матрица $A^{\times}_{ij}$ получается из исходной A вычеркиванием строки i и столбца j.

Разложение по столбцу

Выберем любой столбец и «пробежимся» вдоль него!

$$\begin{vmatrix} * & a_{12} & * \\ * & a_{22} & * \\ * & a_{32} & * \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+2} a_{12} \det A^{\times}_{12} + (-1)^{2+2} a_{22} \det A^{\times}_{22} + (-1)^{3+2} a_{32} \det A^{\times}_{32}$$

Матрица $A^{\times}_{ij}$ получается из исходной A вычеркиванием строки i и столбца j.

Утверждение

$$\det \mathsf{L} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A^{\times}_{ij},$$

Разложение по строке

Можно раскладывать и по строке i:

Утверждение

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}^{\times},$$

Определение

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} матрицы A называют величину

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}^{\times},$$

Матрица $A_{ij}^{\times}$ получается из исходной A вычеркиванием строки i и столбца j.

Метод Гаусса

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)

Метод Крамера

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)

Метод Крамера и нахождение обратной матрицы

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)

Комплексные числа

бонусное видео! Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)