# Квадратичные формы

# Понятие квадратичной формы

# Краткий план:

- Определение квадратичной формы.

# Краткий план:

- Определение квадратичной формы.
- Определённость формы.

# Квадратичная форма

**Определение**

Многочлен от нескольких переменных $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, который содержит только слагаемые вида $x_i^2$ и $x_i x_j$ квадратичной формой.

# Квадратичная форма

**Определение**

Многочлен от нескольких переменных $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, который содержит только слагаемые вида $x_i^2$ и $x_i x_j$ квадратичной формой.

Функция $f(x, y) = x^2 + 6xy - 7y^2$ — квадратичная форма.

# Квадратичная форма

**Определение**

Многочлен от нескольких переменных $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, который содержит только слагаемые вида $x_i^2$ и $x_i x_j$ квадратичной формой.

Функция $f(x, y) = x^2 + 6xy - 7y^2$ — квадратичная форма.

Функция $f(x, y, z) = x^2 + 6xz - 8xy + 3z + 9$ — не квадратичная форма.

# Зачем нужны квадратичные формы?

Многие функции хорошо аппроксимируются суммой вида

$$f(x,y) \approx a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2$$

Квадратичной формой является часть $dx^2 + exy + fy^2$.

# Зачем нужны квадратичные формы?

Многие функции хорошо аппроксимируются суммой вида

$$f(x, y) \approx a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2$$

Квадратичной формой является часть $dx^2 + exy + fy^2$.

Свойства квадратичных формы позволяют понять свойства многих функций!

# Зачем нужны квадратичные формы?

Многие функции хорошо аппроксимируются суммой вида

$$f(x, y) \approx a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2$$

Квадратичной формой является часть $dx^2 + exy + fy^2$.

Свойства квадратичных формы позволяют понять свойства многих функций!

Именно благодаря квадратичной форме можно понять, имеет ли функция экстремум в критической точке.

# Квадратичная форма и матрицы

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & {\color{red}-1} & {\color{blue}-3} \\ {\color{red}-1} & 7 & 2 \\ {\color{blue}-3} & 2 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

# Квадратичная форма и матрицы

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3 \\ -1 & 7 & 2 \\ -3 & 2 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$= 5x_1^2 + 7x_2^2 + 11x_3^2 - 2x_1x_2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3$$

# Квадратичная форма и матрицы

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3 \\ -1 & 7 & 2 \\ -3 & 2 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$= 5x_1^2 + 7x_2^2 + 11x_3^2 - 2x_1x_2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3$$

**Утверждение**

Любая квадратичная форма $f(\mathbf{x})$ может быть записана в виде

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x},$$

где $A$ — симметричная матрица, $A^T = A$.

# Квадратичные формы в нуле

**Утверждение**

Любая квадратичная форма $f$ равна $0$ в точке $\mathbf{0}$,

$$f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}^T \cdot A \cdot \mathbf{0} = 0.$$

# Квадратичные формы в нуле

**Утверждение**

Любая квадратичная форма $f$ равна $0$ в точке $\mathbf{0}$,

$$f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}^T \cdot A \cdot \mathbf{0} = 0.$$

Нас будет интересовать знак формы $f(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

# Положительно определённая форма

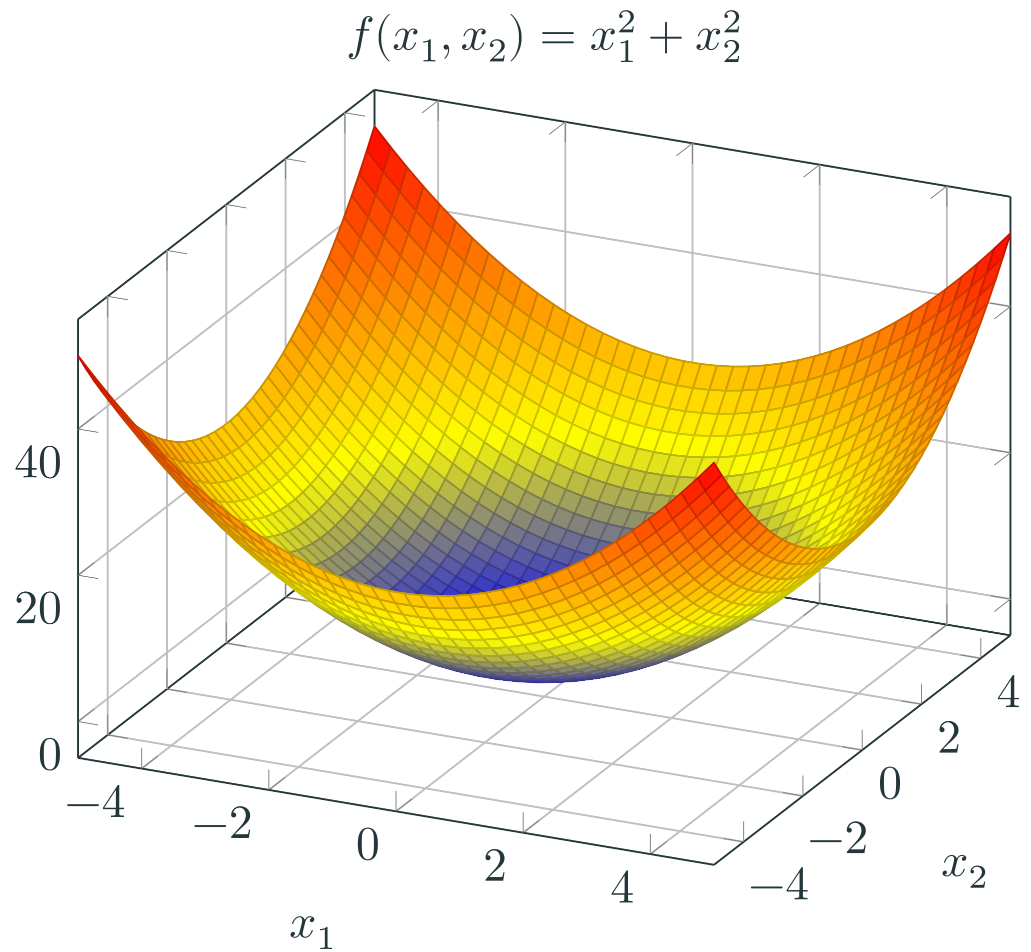
**Определение**

Форма $f$ называется положительно определённой, если $f(\mathbf{x}) > 0$ при $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

# Положительно определённая форма

**Определение**

Форма $f$ называется положительно определённой, если $f(\mathbf{x}) > 0$ при $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.



# Отрицательно определённая форма

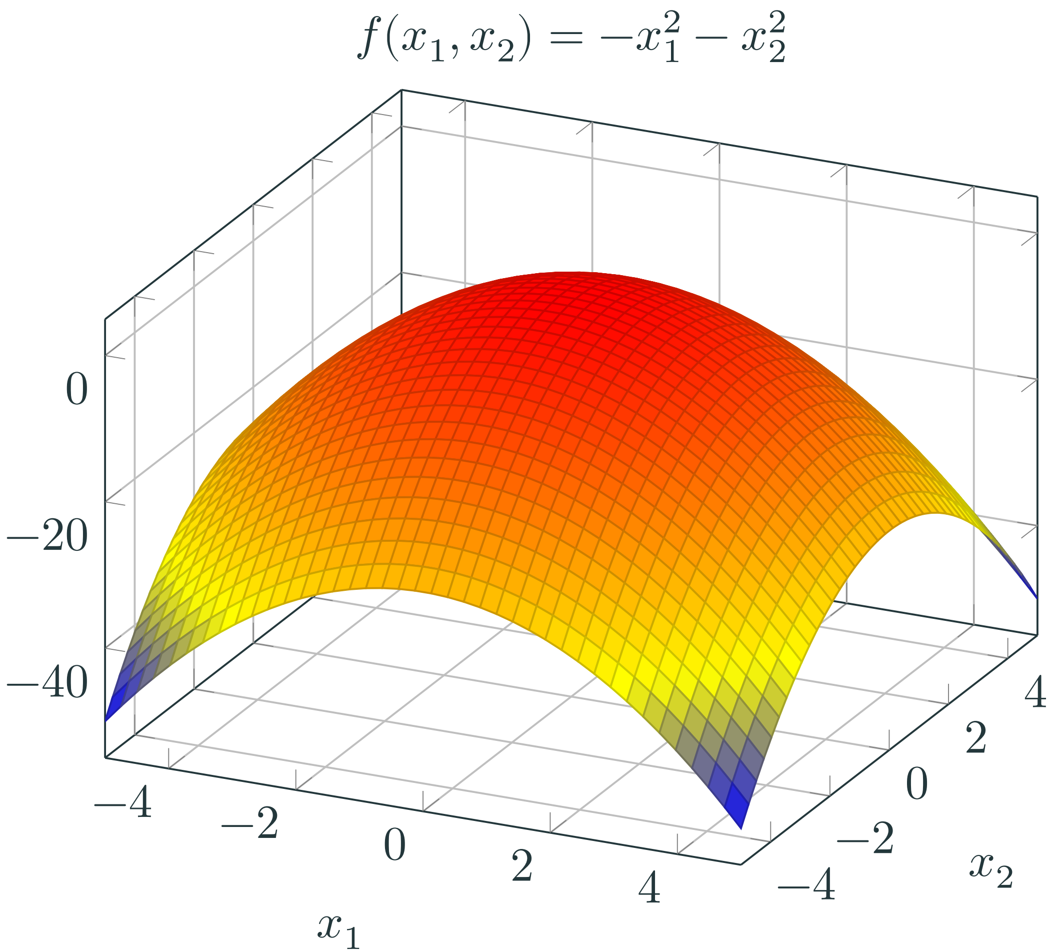
**Определение**

Форма $f$ называется отрицательно определённой, если $f(\mathbf{x}) < 0$ при $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

# Отрицательно определённая форма

**Определение**

Форма $f$ называется отрицательно определённой, если $f(\mathbf{x}) < 0$ при $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.



# Положительно полуопределённая форма

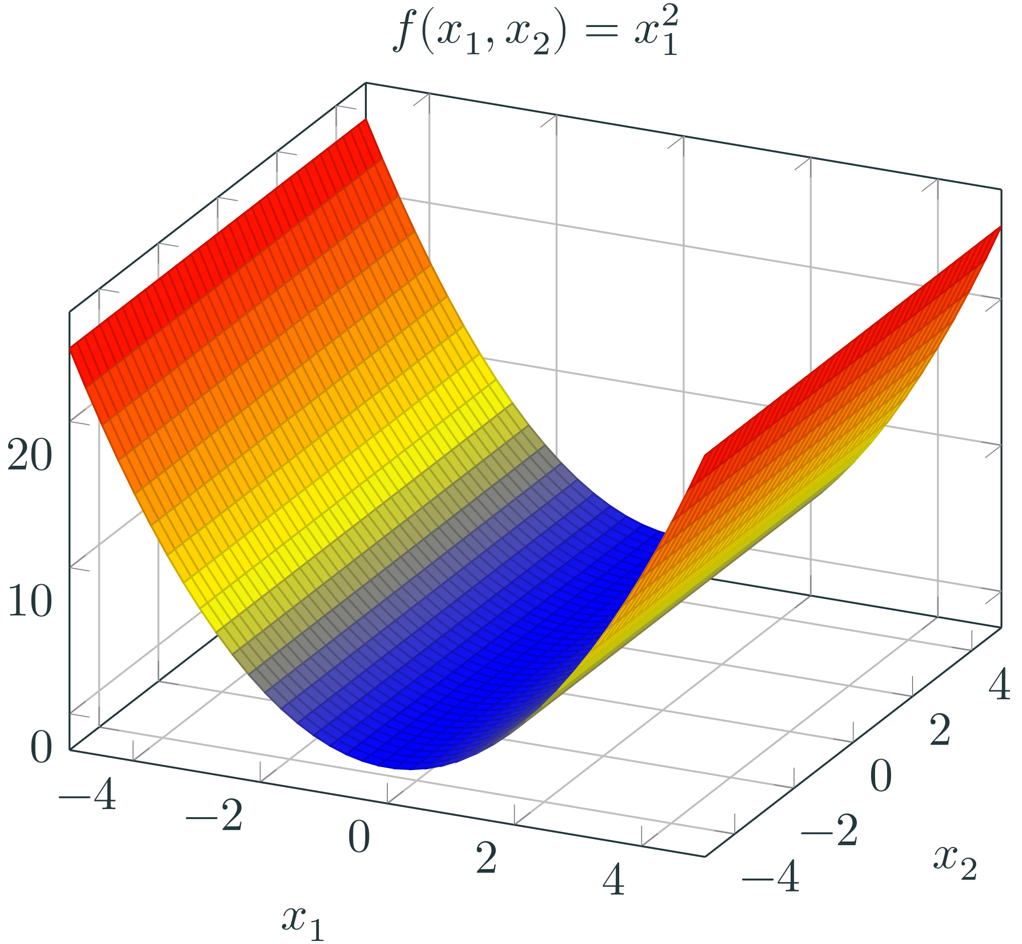
**Определение**

Форма $f$ называется положительно полуопределённой или неотрицательно определённой, если $f(\mathbf{x}) \geq 0$.

# Положительно полуопределённая форма

**Определение**

Форма $f$ называется положительно полуопределённой или неотрицательно определённой, если $f(\mathbf{x}) \geq 0$.



# Отрицательно полуопределённая форма

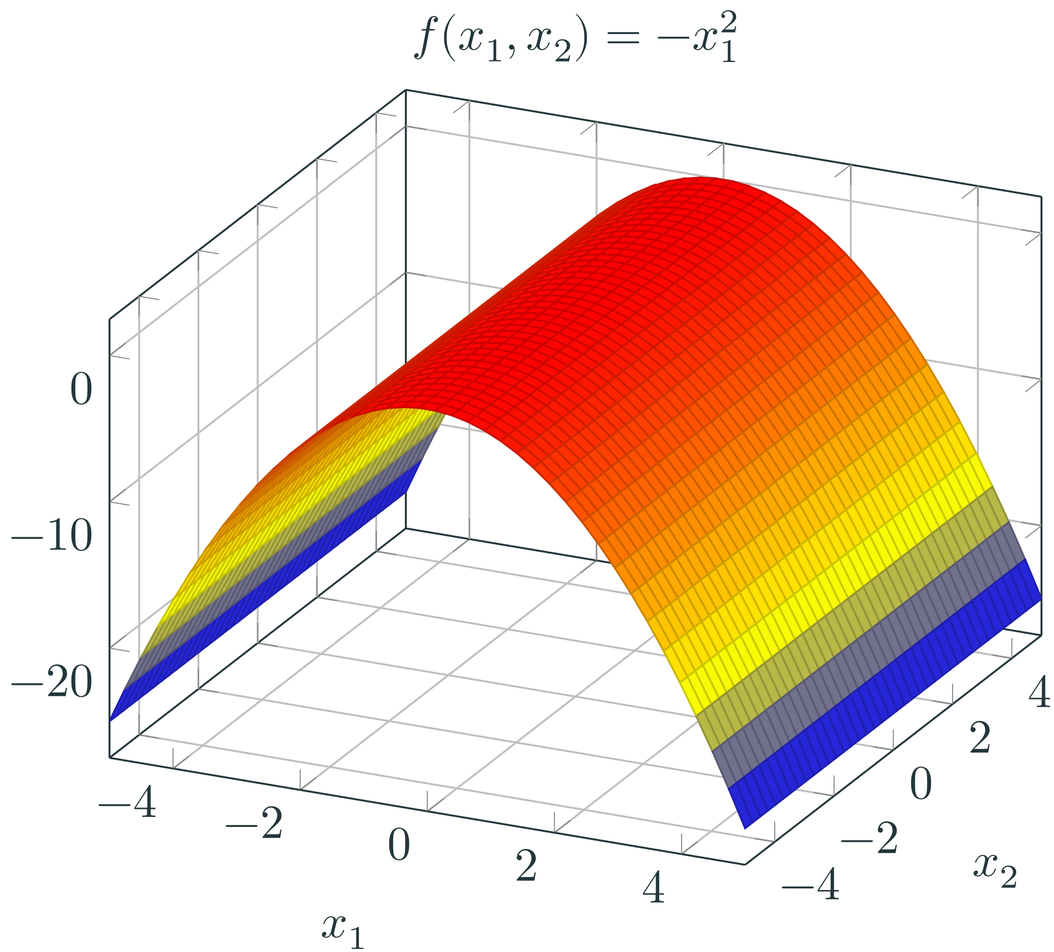
**Определение**

Форма $f$ называется отрицательно полуопределённой или неположительно определённой, если $f(\mathbf{x}) \leq 0$.

# Отрицательно полуопределённая форма

**Определение**

Форма $f$ называется отрицательно полуопределённой или неположительно определённой, если $f(\mathbf{x}) \leq 0$.



# Неопределённая форма

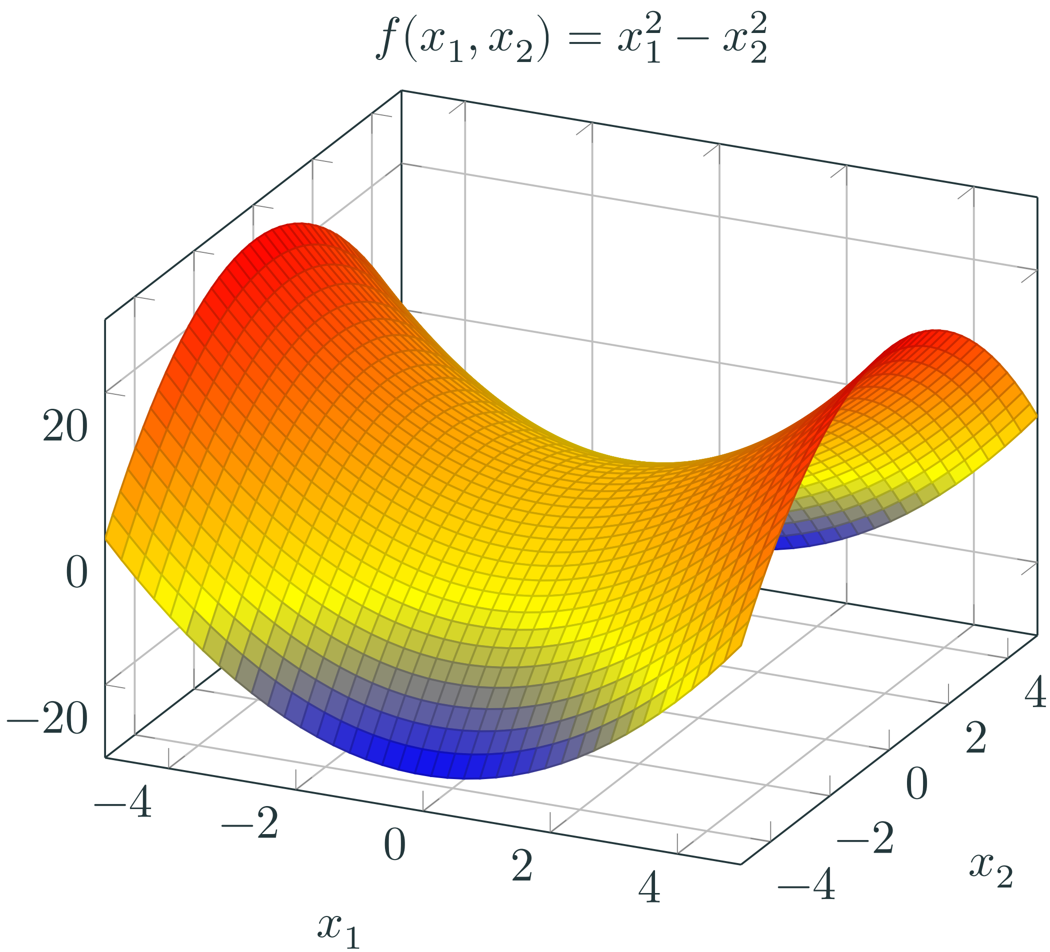
**Определение**

Форма $f$ называется неопределённой, если она принимает и положительные и отрицательные значения.

# Неопределённая форма

**Определение**

Форма $f$ называется неопределённой, если она принимает и положительные и отрицательные значения.



# Когда форма равна нулю?

**Утверждение**

Если форма $f$ равна $0$ в точке $\mathbf{x}$, то она равна нулю и в любой точке $t\mathbf{x}$.

# Когда форма равна нулю?

**Утверждение**

Если форма $f$ равна $0$ в точке $\mathbf{x}$, то она равна нулю и в любой точке $t\mathbf{x}$.

**Доказательство**

$$f(t\mathbf{x}) = t\mathbf{x}^T \cdot A \cdot t\mathbf{x} = t^2\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 0$$

# Когда форма равна нулю?

**Утверждение**

Если форма $f$ равна $0$ в точке $\mathbf{x}$, то она равна нулю и в любой точке $t\mathbf{x}$.

**Доказательство**

$$f(t\mathbf{x}) = t\mathbf{x}^T \cdot A \cdot t\mathbf{x} = t^2\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 0$$

Квадратичная форма возможно равна нулю на прямых, проходящих через $\mathbf{0}$.

# Метод полных квадратов

## Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)

# Диагонализация квадратичной формы

# Краткий план:

- Симметричная матрица и собственные числа.

# Краткий план:

- Симметричная матрица и собственные числа.
- Диагонализация квадратичной формы.

# Всегда диагонализуема!

**Утверждение**

Если $A$ — симметричная матрица, $A^T = A$, то у неё всегда найдётся ровно $n$ действительных собственных чисел $\lambda_i$

# Всегда диагонализуема!

**Утверждение**

Если $A$ — симметричная матрица, $A^T = A$, то у неё всегда найдётся ровно $n$ действительных собственных чисел $\lambda_i$ и ровно $n$ линейно независимых ортогональных собственных векторов.

# Всегда диагонализуема!

**Утверждение**

Если $A$ — симметричная матрица, $A^T = A$, то у неё всегда найдётся ровно $n$ действительных собственных чисел $\lambda_i$ и ровно $n$ линейно независимых ортогональных собственных векторов.

**Следствие**

У симметричной $A$ можно найти $n$ ортогональных собственных векторов единичной длины.

Симметричная матрица $A$ всегда диагонализуема!

# Чем хороши ортогональные векторы?

Векторы $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ — ортогональные и единичной длины.

$$P = \begin{pmatrix} | & & | \\ \mathbf{v}_1 & \ldots & \mathbf{v}_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

# Чем хороши ортогональные векторы?

Векторы $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ — ортогональные и единичной длины.

$$P = \begin{pmatrix} | & & | \\ \mathbf{v}_1 & \ldots & \mathbf{v}_n \\ | & & | \end{pmatrix} \qquad P^T = \begin{pmatrix} - & \mathbf{v}_1^T & - \\ & \vdots & \\ - & \mathbf{v}_n^T & - \end{pmatrix}$$

# Чем хороши ортогональные векторы?

Векторы $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ — ортогональные и единичной длины.

$$P = \begin{pmatrix} | & & | \\ \mathbf{v}_1 & \ldots & \mathbf{v}_n \\ | & & | \end{pmatrix} \qquad P^T = \begin{pmatrix} — & \mathbf{v}_1^T & — \\ & \vdots & \\ — & \mathbf{v}_n^T & — \end{pmatrix}$$

$$P^T P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} = \mathsf{I}$$

# Чем хороши ортогональные векторы?

Векторы $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ — ортогональные и единичной длины.

$$P = \begin{pmatrix} | & & | \\ \mathbf{v}_1 & \ldots & \mathbf{v}_n \\ | & & | \end{pmatrix} \qquad P^T = \begin{pmatrix} — & \mathbf{v}_1^T & — \\ & \vdots & \\ — & \mathbf{v}_n^T & — \end{pmatrix}$$

$$P^T P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} = \mathsf{I}$$

$$P^T = P^{-1}$$

# Диагонализация формы

**Утверждение**

Квадратичная форма $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ с симметричной $A$ представима в виде

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P D P^{-1} \mathbf{x},$$

где $D$ — диагональная матрица из собственных чисел матрицы $A$, а $P$ — матрица из линейно независимых собственных векторов матрицы $A$.

# Диагонализация формы

**Утверждение**

Квадратичная форма $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ с симметричной $A$ представима в виде

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P D P^{-1} \mathbf{x},$$

где $D$ — диагональная матрица из собственных чисел матрицы $A$, а $P$ — матрица из линейно независимых собственных векторов матрицы $A$.

**Утверждение**

Всегда можно выбрать ортогональные собственные векторы $A$ единичной длины, при этом представление примет вид:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P D P^T \mathbf{x} = (P^T \mathbf{x})^T D (P^T \mathbf{x}),$$

# Диагонализация формы

**Утвеждение**

Всегда можно выбрать ортогональные собственные векторы единичной длины, при этом представление примет вид:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P D P^T \mathbf{x} = (P^T \mathbf{x})^T D (P^T \mathbf{x}),$$

где $D$ — диагональная матрица из собственных чисел матрицы $A$, а $P$ — матрица из собственных векторов матрицы $A$.

# Диагонализация формы

**Утвеждение**

Всегда можно выбрать ортогональные собственные векторы единичной длины, при этом представление примет вид:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P D P^T \mathbf{x} = (P^T \mathbf{x})^T D (P^T \mathbf{x}),$$

где $D$ — диагональная матрица из собственных чисел матрицы $A$, а $P$ — матрица из собственных векторов матрицы $A$.

Это просто удачная замена переменных $\mathbf{y} = P^T \mathbf{x}$!

# Диагонализация формы

**Утвеждение**

Всегда можно выбрать ортогональные собственные векторы единичной длины, при этом представление примет вид:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P D P^T \mathbf{x} = (P^T \mathbf{x})^T D (P^T \mathbf{x}),$$

где $D$ — диагональная матрица из собственных чисел матрицы $A$, а $P$ — матрица из собственных векторов матрицы $A$.

Это просто удачная замена переменных $\mathbf{y} = P^T \mathbf{x}$!

$$f(\mathbf{x}) = (P^T \mathbf{x})^T D (P^T \mathbf{x}) = \mathbf{y}^T D \mathbf{y} =$$

$$= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$$

# Определённость формы

Пример, $f(\mathbf{x}) = 5y_1^2 + 6y_2^2 - 9y_3^2$.

# Определённость формы

Пример, $f(\mathbf{x}) = 5y_1^2 + 6y_2^2 - 9y_3^2$.

Квадратичная форма $f$ неопределена.

# Определённость формы

Пример, $f(\mathbf{x}) = 5y_1^2 + 6y_2^2 - 9y_3^2$.

Квадратичная форма $f$ неопределена.

**Утверждение**

Квадратичная форма

$$f(\mathbf{x}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + ... + \lambda_n y_n^2$$

является…

# Определённость формы

Пример, $f(\mathbf{x}) = 5y_1^2 + 6y_2^2 - 9y_3^2$.

Квадратичная форма $f$ неопределена.

**Утверждение**

Квадратичная форма

$$f(\mathbf{x}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + ... + \lambda_n y_n^2$$

является…

положительно определённой, если все $\lambda_i > 0$.

# Определённость формы

Пример, $f(\mathbf{x}) = 5y_1^2 + 6y_2^2 - 9y_3^2$.

Квадратичная форма $f$ неопределена.

**Утверждение**

Квадратичная форма

$$f(\mathbf{x}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$$

является…

положительно определённой, если все $\lambda_i > 0$.

отрицательно определённой, если все $\lambda_i < 0$.

# Определённость формы

Пример, $f(\mathbf{x}) = 5y_1^2 + 6y_2^2 - 9y_3^2$.

Квадратичная форма $f$ неопределена.

**Утверждение**

Квадратичная форма

$$f(\mathbf{x}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$$

является…

положительно определённой, если все $\lambda_i > 0$.

отрицательно определённой, если все $\lambda_i < 0$.

положительно полуопределённой, если все $\lambda_i \geq 0$.

# Определённость формы

Пример, $f(\mathbf{x}) = 5y_1^2 + 6y_2^2 - 9y_3^2$.

Квадратичная форма $f$ неопределена.

**Утверждение**

Квадратичная форма

$$f(\mathbf{x}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + ... + \lambda_n y_n^2$$

является…

положительно определённой, если все $\lambda_i > 0$.

отрицательно определённой, если все $\lambda_i < 0$.

положительно полуопределённой, если все $\lambda_i \geq 0$.

отрицательно полуопределённой, если все $\lambda_i \leq 0$.

# Определённость формы

Пример, $f(\mathbf{x}) = 5y_1^2 + 6y_2^2 - 9y_3^2$.

Квадратичная форма $f$ неопределена.

**Утверждение**

Квадратичная форма

$$f(\mathbf{x}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + ... + \lambda_n y_n^2$$

является…

положительно определённой, если все $\lambda_i > 0$.

отрицательно определённой, если все $\lambda_i < 0$.

положительно полуопределённой, если все $\lambda_i \geq 0$.

отрицательно полуопределённой, если все $\lambda_i \leq 0$.

неопределённой, если найдётся $\lambda_i > 0$ и $\lambda_j < 0$.

# Кусочек доказательства

**Утверждение**

Для симметричной матрицы $A$, $A^T = A$, собственные вектора, соответствующие разным $\lambda$, ортогональны.

# Кусочек доказательства

**Утверждение**

Для симметричной матрицы $A$, $A^T = A$, собственные вектора, соответствующие разным $\lambda$, ортогональны.

**Доказательство**

К примеру, $A\mathbf{x} = 5\mathbf{x}$ и $A\mathbf{y} = 7\mathbf{y}$.

# Кусочек доказательства

**Утверждение**

Для симметричной матрицы $A$, $A^T = A$, собственные вектора, соответствующие разным $\lambda$, ортогональны.

**Доказательство**

К примеру, $A\mathbf{x} = 5\mathbf{x}$ и $A\mathbf{y} = 7\mathbf{y}$.

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \langle 5\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = 5\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$$

# Кусочек доказательства

**Утверждение**

Для симметричной матрицы $A$, $A^T = A$, собственные вектора, соответствующие разным $\lambda$, ортогональны.

**Доказательство**

К примеру, $A\mathbf{x} = 5\mathbf{x}$ и $A\mathbf{y} = 7\mathbf{y}$.

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \langle 5\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = 5\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$$
$$\langle \mathbf{x}, A\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, 7\mathbf{y}\rangle = 7\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$$

# Кусочек доказательства

**Утверждение**

Для симметричной матрицы $A$, $A^T = A$, собственные вектора, соответствующие разным $\lambda$, ортогональны.

**Доказательство**

К примеру, $A\mathbf{x} = 5\mathbf{x}$ и $A\mathbf{y} = 7\mathbf{y}$.

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \langle 5\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = 5\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$$
$$\langle \mathbf{x}, A\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, 7\mathbf{y}\rangle = 7\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$$
$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, A^T\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, A\mathbf{y}\rangle$$

# Кусочек доказательства

**Утверждение**

Для симметричной матрицы $A$, $A^T = A$, собственные вектора, соответствующие разным $\lambda$, ортогональны.

**Доказательство**

К примеру, $A\mathbf{x} = 5\mathbf{x}$ и $A\mathbf{y} = 7\mathbf{y}$.

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle 5\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 5\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$$
$$\langle \mathbf{x}, A\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, 7\mathbf{y} \rangle = 7\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$$
$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, A^T\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, A\mathbf{y} \rangle$$

Равенство возможно, только если $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$:

$$5\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 7\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$$

# Критерий Сильвестра

# Краткий план:

- Критерий Сильвестра.

# Краткий план:

- Критерий Сильвестра.
- Расширенный критерий Сильвестра.

# Обозначение

Будем вычёркивать из матрицы $A$ строки и столбцы так, чтобы остались строки и столбцы с одинаковыми номерами.

# Обозначение

Будем вычёркивать из матрицы $A$ строки и столбцы так, чтобы остались строки и столбцы с одинаковыми номерами.

Скажем, оставим в матрице $A$ только $2$-ю и $4$-ю строки и $2$-й и $4$-й столбцы.

# Обозначение

Будем вычёркивать из матрицы $A$ строки и столбцы так, чтобы остались строки и столбцы с одинаковыми номерами.

Скажем, оставим в матрице $A$ только $2$-ю и $4$-ю строки и $2$-й и $4$-й столбцы.

Определитель полученной подматрицы обозначим $m_{24}$.

# Обозначение

Будем вычёркивать из матрицы $A$ строки и столбцы так, чтобы остались строки и столбцы с одинаковыми номерами.

Скажем, оставим в матрице $A$ только $2$-ю и $4$-ю строки и $2$-й и $4$-й столбцы.

Определитель полученной подматрицы обозначим $m_{24}$.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & \color{blue}{6} & 2 & \color{blue}{1} \\ 3 & 2 & 9 & 5 \\ -1 & \color{blue}{1} & 5 & \color{blue}{8} \end{pmatrix}, \quad m_{24} = \begin{vmatrix} \color{blue}{6} & \color{blue}{1} \\ \color{blue}{1} & \color{blue}{8} \end{vmatrix} = 47.$$

# Названия миноров

**Определения**

В матрице $A$ вычеркнули несколько строк и столбцов так, что остались строки и столбцы с одинаковыми номерами.

Определитель полученной подматрицы называется главным минором.

# Названия миноров

**Определения**

В матрице $A$ вычеркнули несколько строк и столбцов так, что остались строки и столбцы с одинаковыми номерами.

Определитель полученной подматрицы называется главным минором.

**Определения**

В матрице $A$ вычеркнули несколько строк и столбцов так, что остались строки и столбцы с номерами $1, 2, \ldots, k$.

Определитель полученной подматрицы называется угловым минором.

# Названия миноров

**Определения**

В матрице $A$ вычеркнули несколько строк и столбцов так, что остались строки и столбцы с одинаковыми номерами.

Определитель полученной подматрицы называется главным минором.

**Определения**

В матрице $A$ вычеркнули несколько строк и столбцов так, что остались строки и столбцы с номерами $1, 2, \ldots, k$.

Определитель полученной подматрицы называется угловым минором.

**Определение**

Порядком минора называется число строк (или столбцов) в соответствующей подматрице.

# Критерий Сильвестра

**Утверждение**

Симметричная матрица $A$ является положительно определённой, если и только если

$m_1 > 0, m_{12} > 0, m_{123} > 0, m_{1234} > 0, \ldots$

# Критерий Сильвестра

**Утверждение**

Симметричная матрица $A$ является положительно определённой, если и только если

$m_1 > 0, m_{12} > 0, m_{123} > 0, m_{1234} > 0, \ldots$

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

$$m_1 = 5,\ m_{12} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 26,\ m_{123} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 9 \end{vmatrix} = 184$$

# Наблюдение

**Утверждение**

Если помножить на $(-1)$ все элементы матрицы $A$ размера $n \times n$, то определитель матрицы $A$…

# Наблюдение

**Утверждение**

Если помножить на $(-1)$ все элементы матрицы $A$ размера $n \times n$, то определитель матрицы $A\ldots$

поменяет знак, если $n$ — нечётное;

# Наблюдение

**Утверждение**

Если помножить на $(-1)$ все элементы матрицы $A$ размера $n \times n$, то определитель матрицы $A$…

поменяет знак, если $n$ — нечётное;

сохранит знак, если $n$ — чётное.

# Наблюдение

**Утверждение**

Если помножить на $(-1)$ все элементы матрицы $A$ размера $n \times n$, то определитель матрицы $A$…

поменяет знак, если $n$ — нечётное;

сохранит знак, если $n$ — чётное.

Легко получим критерий отрицательной определённости!

# Критерий Сильвестра

**Утверждение**

Симметричная матрица $A$ является отрицательно определённой, если и только если

$m_1 < 0$, $m_{12} > 0$, $m_{123} < 0$, $m_{1234} > 0$, …

# Критерий Сильвестра

**Утверждение**

Симметричная матрица $A$ является отрицательно определённой, если и только если

$m_1 < 0$, $m_{12} > 0$, $m_{123} < 0$, $m_{1234} > 0$, …

Пример.

$$B = \begin{pmatrix} -5 & -2 & -3 \\ -2 & -6 & -2 \\ -3 & -2 & -9 \end{pmatrix}$$

$$m_1 = -5,\ m_{12} = \begin{vmatrix} -5 & -2 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} = 26,\ m_{123} = \begin{vmatrix} -5 & -2 & -3 \\ -2 & -6 & -2 \\ -3 & -2 & -9 \end{vmatrix} = -184$$

# Расширенный критерий

**Утверждение**

Симметричная матрица $A$ является положительно полуопределённой, если и только если (для всех $i$, $j$, $k$, $\ldots$)

$m_i \geq 0$, $m_{ij} \geq 0$, $m_{ijk} \geq 0$, $m_{ijkl} \geq 0$, $\ldots$

# Расширенный критерий

**Утверждение**

Симметричная матрица $A$ является положительно полуопределённой, если и только если (для всех $i$, $j$, $k$, $\ldots$)

$m_i \geq 0$, $m_{ij} \geq 0$, $m_{ijk} \geq 0$, $m_{ijkl} \geq 0$, $\ldots$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$m_1 = 4,\ m_2 = 9,\ m_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

# Расширенный критерий

**Утверждение**

Симметричная матрица $A$ является отрицательно полуопределённой, если и только если (для всех $i$, $j$, $k$, $\ldots$)

$m_i \leq 0$, $m_{ij} \geq 0$, $m_{ijk} \leq 0$, $m_{ijkl} \geq 0$, $\ldots$

# Расширенный критерий

**Утверждение**

Симметричная матрица $A$ является отрицательно полуопределённой, если и только если (для всех $i$, $j$, $k$, $\ldots$)

$m_i \le 0$, $m_{ij} \ge 0$, $m_{ijk} \le 0$, $m_{ijkl} \ge 0$, $\ldots$

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}$$

$$m_1 = -4,\ m_2 = -9,\ m_{12} = \begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 6 & -9 \end{vmatrix} = 0$$

# Резюме для положительной формы

**Утверждение**

Квадратичная форма $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ является положительно определённой, если

# Резюме для положительной формы

**Утверждение**

Квадратичная форма $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ является положительно определённой, если

1. В любой точке $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ она положительна, $f(\mathbf{x}) > 0$.

# Резюме для положительной формы

**Утверждение**

Квадратичная форма $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ является положительно определённой, если

1. В любой точке $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ она положительна, $f(\mathbf{x}) > 0$.
2. Все собственные числа матрицы $A$ положительны, $\lambda_i > 0$.

# Резюме для положительной формы

**Утверждение**

Квадратичная форма $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ является положительно определённой, если

1. В любой точке $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ она положительна, $f(\mathbf{x}) > 0$.
2. Все собственные числа матрицы $A$ положительны, $\lambda_i > 0$.
3. Все угловые миноры матрицы $A$ положительны, $m_{12\ldots k} > 0$.

# Резюме для отрицательной формы

**Утверждение**

Квадратичная форма $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ является отрицательно определённой, если

# Резюме для отрицательной формы

**Утверждение**

Квадратичная форма $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ является отрицательно определённой, если

1. В любой точке $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ она отрицательна, $f(\mathbf{x}) < 0$.

# Резюме для отрицательной формы

**Утверждение**

Квадратичная форма $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ является отрицательно определённой, если

1. В любой точке $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ она отрицательна, $f(\mathbf{x}) < 0$.
2. Все собственные числа матрицы $A$ отрицательны, $\lambda_i < 0$.

# Резюме для отрицательной формы

**Утверждение**

Квадратичная форма $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ является отрицательно определённой, если

1. В любой точке $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ она отрицательна, $f(\mathbf{x}) < 0$.
2. Все собственные числа матрицы $A$ отрицательны, $\lambda_i < 0$.
3. Нечётные угловые миноры матрицы $A$ отрицательны, а чётные — положительны.

# Резюме для полуопределённости

**Утверждение**

Квадратичная форма $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ является положительно полуопределённой (неотрицательно определённой), если

# Резюме для полуопределённости

**Утверждение**

Квадратичная форма $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ является положительно полуопределённой (неотрицательно определённой), если

1. В любой точке $\mathbf{x}$ она неотрицательна, $f(\mathbf{x}) \geq 0$.

# Резюме для полуопределённости

**Утверждение**

Квадратичная форма $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ является положительно полуопределённой (неотрицательно определённой), если

1. В любой точке $\mathbf{x}$ она неотрицательна, $f(\mathbf{x}) \geq 0$.
2. Все собственные числа матрицы $A$ неотрицательны, $\lambda_i \geq 0$.

# Резюме для полуопределённости

**Утверждение**

Квадратичная форма $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ является положительно полуопределённой (неотрицательно определённой), если

1. В любой точке $\mathbf{x}$ она неотрицательна, $f(\mathbf{x}) \geq 0$.
2. Все собственные числа матрицы $A$ неотрицательны, $\lambda_i \geq 0$.
3. Все главные миноры матрицы $A$ неотрицательны.

# Резюме для полуопределённости

**Утверждение**

Квадратичная форма $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ является отрицательно полуопределённой (неположительно определённой), если

# Резюме для полуопределённости

**Утверждение**

Квадратичная форма $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ является отрицательно полуопределённой (неположительно определённой), если

1. В любой точке $\mathbf{x}$ она неположительна, $f(\mathbf{x}) \leq 0$.

# Резюме для полуопределённости

**Утверждение**

Квадратичная форма $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ является отрицательно полуопределённой (неположительно определённой), если

1. В любой точке $\mathbf{x}$ она неположительна, $f(\mathbf{x}) \leq 0$.
2. Все собственные числа матрицы $A$ неположительны, $\lambda_i \leq 0$.

# Резюме для полуопределённости

**Утверждение**

Квадратичная форма $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ является отрицательно полуопределённой (неположительно определённой), если

1. В любой точке $\mathbf{x}$ она неположительна, $f(\mathbf{x}) \leq 0$.
2. Все собственные числа матрицы $A$ неположительны, $\lambda_i \leq 0$.
3. Нечётные главные миноры матрицы $A$ неположительны, а чётные — неотрицательны.

# Расширенный критерий Сильвестра: пример

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)

# Матрица Грама

# Краткий план:

- Матрица Грама.

# Краткий план:

- Матрица Грама.
- Матрица Грама и проекция.

# Краткий план:

- Матрица Грама.
- Матрица Грама и проекция.
- Ортогональный базис.

# Матрица Грама

**Определение**

Возьмём векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ из $\mathbb{R}^n$. Матрица их попарных скалярных произведений называется матрицей Грама,

$$M = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 \rangle & \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle & \ldots & \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_k \rangle \\ \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1 \rangle & \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2 \rangle & \ldots & \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_k \rangle \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \langle \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_1 \rangle & \langle \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_2 \rangle & \ldots & \langle \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k \rangle \end{pmatrix} = X^T X$$

# Матрица Грама

**Определение**

Возьмём векторы $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, …, $\mathbf{x}_k$ из $\mathbb{R}^n$. Матрица их попарных скалярных произведений называется матрицей Грама,

$$M = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 \rangle & \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_k \rangle \\ \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1 \rangle & \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_k \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_1 \rangle & \langle \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k \rangle \end{pmatrix} = X^T X$$

А определитель этой матрицы называется определителем Грама, $G = \det M$.

# Свойства матрицы Грама

**Утверждение**

Векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ линейно независимы, если и только если определитель Грама отличен от нуля, $G \neq 0$.

# Свойства матрицы Грама

**Утверждение**

Векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ линейно независимы, если и только если определитель Грама отличен от нуля, $G \neq 0$.

**Утверждение**

Матрица Грама положительно полуопределена.

# Свойства матрицы Грама

**Утверждение**

Векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ линейно независимы, если и только если определитель Грама отличен от нуля, $G \neq 0$.

**Утверждение**

Матрица Грама положительно полуопределена.

**Утверждение**

Если $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ лежат в $\mathbb{R}^n$, то определитель Грама $G$ равен квадрату объёма параллелепипеда, образованного векторами $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$.

# Положительная полуопределённость

**Утверждение**

Матрица Грама положительно полуопределена.

# Положительная полуопределённость

**Утверждение**

Матрица Грама положительно полуопределена.

**Доказательство**

$$\mathbf{v}^T M \mathbf{v} = \sum_{ij} v_i v_j \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle = \sum_{ij} \langle v_i \mathbf{x}_i, v_j \mathbf{x}_j \rangle =$$

# Положительная полуопределённость

**Утверждение**

Матрица Грама положительно полуопределена.

**Доказательство**

$$\mathbf{v}^T M \mathbf{v} = \sum_{ij} v_i v_j \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle = \sum_{ij} \langle v_i \mathbf{x}_i, v_j \mathbf{x}_j \rangle =$$

$$= \langle \sum_i v_i \mathbf{x}_i, \sum_j v_j \mathbf{x}_j \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle \geq 0$$

# Поиск проекции

Хотим найти проекцию $\hat{\mathbf{y}}$ вектора $\mathbf{y}$ на $\mathrm{Span}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k\}$.

# Поиск проекции

Хотим найти проекцию $\hat{\mathbf{y}}$ вектора $\mathbf{y}$ на Span$\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k\}$.

Проекция $\hat{\mathbf{y}}$ — линейная комбинация $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$,

$$\hat{\mathbf{y}} = v_1\mathbf{x}_1 + \dots + v_k\mathbf{x}_k = X\mathbf{v}$$

# Поиск проекции

Хотим найти проекцию $\hat{\mathbf{y}}$ вектора $\mathbf{y}$ на Span$\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k\}$.

Проекция $\hat{\mathbf{y}}$ — линейная комбинация $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$,

$$\hat{\mathbf{y}} = v_1\mathbf{x}_1 + \ldots + v_k\mathbf{x}_k = X\mathbf{v}$$

Условия первого порядка:

$$X^T X\mathbf{v} = X^T y$$

# Поиск проекции

Хотим найти проекцию $\hat{\mathbf{y}}$ вектора $\mathbf{y}$ на Span$\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k\}$.

Проекция $\hat{\mathbf{y}}$ — линейная комбинация $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$,

$$\hat{\mathbf{y}} = v_1\mathbf{x}_1 + \dots + v_k\mathbf{x}_k = X\mathbf{v}$$

Условия первого порядка:

$$X^T X\mathbf{v} = X^T y \text{ или } M\mathbf{v} = X^T y$$

# Поиск проекции

Хотим найти проекцию $\hat{\mathbf{y}}$ вектора $\mathbf{y}$ на Span$\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k\}$.

Проекция $\hat{\mathbf{y}}$ — линейная комбинация $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$,

$$\hat{\mathbf{y}} = v_1\mathbf{x}_1 + \ldots + v_k\mathbf{x}_k = X\mathbf{v}$$

Условия первого порядка:

$$X^T X\mathbf{v} = X^T y \text{ или } M\mathbf{v} = X^T y$$

$$\mathbf{v} = M^{-1}X^T y.$$

# Ортогональные вектора

**Утверждение**

Если векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ ортогональны, то их матрица Грама — диагональная.

$$M = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 \rangle & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2 \rangle & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \langle \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k \rangle \end{pmatrix}$$

# Ортогонализация Грамма-Шмидта: пример

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)

# Ортогонализация Грама-Шмидта

# Краткий план:

- Ортогонализация.

# Краткий план:

- Ортогонализация.
- $QR$-разложение.

# Ортогонализация Грама-Шмидта

**Постановка задачи**

Исходя из стартового независимого набора векторов

$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$

получить новый набор векторов $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_k\}$

со свойствами:

# Ортогонализация Грама-Шмидта

**Постановка задачи**

Исходя из стартового независимого набора векторов

$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$

получить новый набор векторов $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_k\}$

со свойствами:

$\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_k$ — ортогональны;

$\mathrm{Span}\, \mathbf{v}_1 = \mathrm{Span}\, \mathbf{f}_1;$

# Ортогонализация Грама-Шмидта

**Постановка задачи**

Исходя из стартового независимого набора векторов

$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$

получить новый набор векторов $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_k\}$

со свойствами:

$\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_k$ — ортогональны;

$\text{Span}\, \mathbf{v}_1 = \text{Span}\, \mathbf{f}_1$;

$\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \text{Span}\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$;

# Ортогонализация Грама-Шмидта

**Постановка задачи**

Исходя из стартового независимого набора векторов

$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$

получить новый набор векторов $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_k\}$

со свойствами:

$\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_k$ — ортогональны;

$\operatorname{Span} \mathbf{v}_1 = \operatorname{Span} \mathbf{f}_1;$

$\operatorname{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \operatorname{Span}\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\};$

$\operatorname{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \operatorname{Span}\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\};$

$\dots$

# Ортогонализация Грама-Шмидта

**Обозначение**

С помощью $H_p(\mathbf{v})$ обозначим проекцию $\mathbf{v}$ на Span$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p\}$ = Span$\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_p\}$.

# Ортогонализация Грама-Шмидта

**Обозначение**

С помощью $H_p(\mathbf{v})$ обозначим проекцию $\mathbf{v}$ на Span$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p\}$ = Span$\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_p\}$.

**Алгоритм**

1. $\mathbf{f}_1 = \mathbf{v}_1$;

# Ортогонализация Грама-Шмидта

## Обозначение

С помощью $H_p(\mathbf{v})$ обозначим проекцию $\mathbf{v}$ на $\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p\} = \mathrm{Span}\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_p\}$.

## Алгоритм

1. $\mathbf{f}_1 = \mathbf{v}_1$;
2. $\mathbf{f}_2 = \mathbf{v}_2 - H_1(\mathbf{v}_2)$;

# Ортогонализация Грама-Шмидта

**Обозначение**

С помощью $H_p(\mathbf{v})$ обозначим проекцию $\mathbf{v}$ на Span$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p\}$ = Span$\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_p\}$.

**Алгоритм**

1. $\mathbf{f}_1 = \mathbf{v}_1$;
2. $\mathbf{f}_2 = \mathbf{v}_2 - H_1(\mathbf{v}_2)$;
3. $\mathbf{f}_3 = \mathbf{v}_3 - H_2(\mathbf{v}_3)$;

# Ортогонализация Грама-Шмидта

**Обозначение**

С помощью $H_p(\mathbf{v})$ обозначим проекцию $\mathbf{v}$ на Span$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p\}$ = Span$\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_p\}$.

**Алгоритм**

1. $\mathbf{f}_1 = \mathbf{v}_1$;
2. $\mathbf{f}_2 = \mathbf{v}_2 - H_1(\mathbf{v}_2)$;
3. $\mathbf{f}_3 = \mathbf{v}_3 - H_2(\mathbf{v}_3)$;
4. $\dots$

# Ортогонализация Грама-Шмидта

**Обозначение**

С помощью $H_p(\mathbf{v})$ обозначим проекцию $\mathbf{v}$ на Span$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p\}$ = Span$\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_p\}$.

**Алгоритм**

1. $\mathbf{f}_1 = \mathbf{v}_1$;
2. $\mathbf{f}_2 = \mathbf{v}_2 - H_1(\mathbf{v}_2)$;
3. $\mathbf{f}_3 = \mathbf{v}_3 - H_2(\mathbf{v}_3)$;
4. …

Если нужно получить ортогональные вектора $\mathbf{q}_i$ единичной длины, то дополнительно масштабируют $\mathbf{q}_i = \mathbf{f}_i / \|\mathbf{f}_i\|$.

# Проецировать бывает легко!

Хотим найти проекцию $H_p(\mathbf{v}_{p+1})$ вектора $\mathbf{v}_{p+1}$ на Span$\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_p\}$.

Проекция $H_p(\mathbf{v}_{p+1})$ — линейная комбинация $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_p$,

$$H_p(\mathbf{v}_{p+1}) = \alpha_1 \mathbf{f}_1 + \dots + \alpha_p \mathbf{f}_p = F\alpha$$

# Проецировать бывает легко!

Хотим найти проекцию $H_p(\mathbf{v}_{p+1})$ вектора $\mathbf{v}_{p+1}$ на $\operatorname{Span}\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_p\}$.

Проекция $H_p(\mathbf{v}_{p+1})$ — линейная комбинация $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_p$,

$$H_p(\mathbf{v}_{p+1}) = \alpha_1 \mathbf{f}_1 + \ldots + \alpha_p \mathbf{f}_p = F\alpha$$

$$\alpha = (F^T F)^{-1} F^T \mathbf{v}_{p+1}$$

# Проецировать бывает легко!

Хотим найти проекцию $H_p(\mathbf{v}_{p+1})$ вектора $\mathbf{v}_{p+1}$ на Span$\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_p\}$.

Проекция $H_p(\mathbf{v}_{p+1})$ — линейная комбинация $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_p$,

$$H_p(\mathbf{v}_{p+1}) = \alpha_1 \mathbf{f}_1 + \ldots + \alpha_p \mathbf{f}_p = F\alpha$$

$$\alpha = (F^T F)^{-1} F^T \mathbf{v}_{p+1}$$

Столбцы матрицы $F$ ортогональны, поэтому проецировать очень легко!

$$\alpha = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{v}_{p+1}, \mathbf{f}_1 \rangle / \langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1 \rangle \\ \langle \mathbf{v}_{p+1}, \mathbf{f}_2 \rangle / \langle \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_2 \rangle \\ \ldots \\ \langle \mathbf{v}_{p+1}, \mathbf{f}_p \rangle / \langle \mathbf{f}_p, \mathbf{f}_p \rangle \end{pmatrix}$$

# Ортогонализация Грама-Шмидта

**Алгоритм**

1. $\mathbf{f}_1 = \mathbf{v}_1;$

# Ортогонализация Грама-Шмидта

**Алгоритм**

1. $\mathbf{f}_1 = \mathbf{v}_1;$
2. $\mathbf{f}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{f}_1 \rangle}{\langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1 \rangle} \mathbf{f}_1;$

# Ортогонализация Грама-Шмидта

**Алгоритм**

1. $\mathbf{f}_1 = \mathbf{v}_1$;
2. $\mathbf{f}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{f}_1 \rangle}{\langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1 \rangle}\mathbf{f}_1$;
3. $\mathbf{f}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{f}_1 \rangle}{\langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1 \rangle}\mathbf{f}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{f}_2 \rangle}{\langle \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_2 \rangle}\mathbf{f}_2$;

# Ортогонализация Грама-Шмидта

**Алгоритм**

1. $\mathbf{f}_1 = \mathbf{v}_1$;
2. $\mathbf{f}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{f}_1 \rangle}{\langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1 \rangle} \mathbf{f}_1$;
3. $\mathbf{f}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{f}_1 \rangle}{\langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1 \rangle} \mathbf{f}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{f}_2 \rangle}{\langle \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_2 \rangle} \mathbf{f}_2$;
4. $\ldots$

# Ортогонализация Грама-Шмидта

**Алгоритм**

1. $\mathbf{f}_1 = \mathbf{v}_1$;
2. $\mathbf{f}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{f}_1 \rangle}{\langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1 \rangle}\mathbf{f}_1$;
3. $\mathbf{f}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{f}_1 \rangle}{\langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1 \rangle}\mathbf{f}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{f}_2 \rangle}{\langle \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_2 \rangle}\mathbf{f}_2$;
4. $\dots$

Если нужно получить ортогональные вектора $\mathbf{q}_i$ единичной длины, то дополнительно масштабируют $\mathbf{q}_i = \mathbf{f}_i / \|\mathbf{f}_i\|$.

# Подметим особенность!

**Утверждение**

В процедуре Грама-Шмидта:

Вектор $\mathbf{f}_i$ является линейной комбинацией $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_i$.

# Подметим особенность!

**Утверждение**

В процедуре Грама-Шмидта:

Вектор $\mathbf{f}_i$ является линейной комбинацией $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_i$.

Вектор $\mathbf{v}_i$ является линейной комбинацией $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_i$.

# Подметим особенность!

**Утверждение**

В процедуре Грама-Шмидта:

Вектор $\mathbf{f}_i$ является линейной комбинацией $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_i$.

Вектор $\mathbf{v}_i$ является линейной комбинацией $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_i$.

# Подметим особенность!

**Утверждение**

В процедуре Грама-Шмидта:

Вектор $\mathbf{f}_i$ является линейной комбинацией $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_i$.

Вектор $\mathbf{v}_i$ является линейной комбинацией $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_i$.

На лаконичном языке матриц:

$$F = VU = \begin{pmatrix} | & & | \\ \mathbf{v}_1 & \ldots & \mathbf{v}_k \\ | & & | \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \ldots & u_{1k} \\ 0 & u_{22} & \ldots & u_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & u_{kk} \end{pmatrix},$$

# Подметим особенность!

**Утверждение**

В процедуре Грама-Шмидта:

Вектор $\mathbf{f}_i$ является линейной комбинацией $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_i$.

Вектор $\mathbf{v}_i$ является линейной комбинацией $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_i$.

На лаконичном языке матриц:

$$F = VU = \begin{pmatrix} | & & | \\ \mathbf{v}_1 & \ldots & \mathbf{v}_k \\ | & & | \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \ldots & u_{1k} \\ 0 & u_{22} & \ldots & u_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & u_{kk} \end{pmatrix},$$

Матрица $U$ — верхнетреугольная обратимая.

# Осталось поделить на длину

Деление столбцов матрицы $F$ на длину можно реализовать с помощью диагональной матрицы $D$:

# Осталось поделить на длину

Деление столбцов матрицы $F$ на длину можно реализовать с помощью диагональной матрицы $D$:

$$Q = FD = \begin{pmatrix} | & & | \\ \mathbf{f}_1 & \ldots & \mathbf{f}_k \\ | & & | \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\|\mathbf{f}_1\| & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1/\|\mathbf{f}_2\| & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1/\|\mathbf{f}_k\| \end{pmatrix}$$

# Осталось поделить на длину

Деление столбцов матрицы $F$ на длину можно реализовать с помощью диагональной матрицы $D$:

$$Q = FD = \begin{pmatrix} | & & | \\ \mathbf{f}_1 & \ldots & \mathbf{f}_k \\ | & & | \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\|\mathbf{f}_1\| & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1/\|\mathbf{f}_2\| & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1/\|\mathbf{f}_k\| \end{pmatrix}$$

$$Q = FD = VUD$$
$$V = Q(UD)^{-1} = QR$$

Матрица $R$ — верхнетреугольная обратимая.

# $QR$-разложение

**Утверждение**

Любая квадратная матрица $V$ может быть представлена в виде
$$V = QR,$$
где матрица $Q$ ортогональная, $Q^T Q = \mathrm{I}$, а матрица $R$ — верхнетреугольная.

# $QR$-разложение

**Утверждение**

Любая квадратная матрица $V$ может быть представлена в виде

$$V = QR,$$

где матрица $Q$ ортогональная, $Q^T Q = \mathrm{I}$, а матрица $R$ — верхнетреугольная.

Утверждение верно, даже если $V$ — необратимая матрица.

В этом случае матрица $R$ также будет необратимой.

# Резюме

- Квадратичная форма.

# Резюме

- Квадратичная форма.
- Определённость квадратичной формы.

# Резюме

- Квадратичная форма.
- Определённость квадратичной формы.
- Метод полных квадратов, собственные числа и критерий Сильвестра.

# Резюме

- Квадратичная форма.
- Определённость квадратичной формы.
- Метод полных квадратов, собственные числа и критерий Сильвестра.
- Матрица Грама.

# Резюме

- Квадратичная форма.
- Определённость квадратичной формы.
- Метод полных квадратов, собственные числа и критерий Сильвестра.
- Матрица Грама.
- Ортогонализация Грама-Шмидта.

# Резюме

- Квадратичная форма.
- Определённость квадратичной формы.
- Метод полных квадратов, собственные числа и критерий Сильвестра.
- Матрица Грама.
- Ортогонализация Грама-Шмидта.
- $QR$-разложение.

# Резюме

- Квадратичная форма.
- Определённость квадратичной формы.
- Метод полных квадратов, собственные числа и критерий Сильвестра.
- Матрица Грама.
- Ортогонализация Грама-Шмидта.
- $QR$-разложение.
- Бонусное видео: задача о переливании красок.

# Резюме

- Квадратичная форма.
- Определённость квадратичной формы.
- Метод полных квадратов, собственные числа и критерий Сильвестра.
- Матрица Грама.
- Ортогонализация Грама-Шмидта.
- $QR$-разложение.
- Бонусное видео: задача о переливании красок.

# Резюме

- Квадратичная форма.
- Определённость квадратичной формы.
- Метод полных квадратов, собственные числа и критерий Сильвестра.
- Матрица Грама.
- Ортогонализация Грама-Шмидта.
- $QR$-разложение.
- Бонусное видео: задача о переливании красок.

Следующая лекция: сингулярное разложение.

# Бонус: задача про переливание красок

**Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)**