

Матричная запись

Линейная комбинация и независимость

Краткий план:

- Линейная комбинация векторов;

Краткий план:

- Линейная комбинация векторов;
- Зависимые и независимые наборы векторов.

Линейная комбинация

Определение

Вектор \mathbf{c} называется **линейной комбинацией** векторов $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$, если его можно представить в виде их суммы с некоторыми действительными весами α_i :

$$\mathbf{c} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k$$

Линейная комбинация

Определение

Вектор \mathbf{c} называется **линейной комбинацией** векторов $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$, если его можно представить в виде их суммы с некоторыми действительными весами α_i :

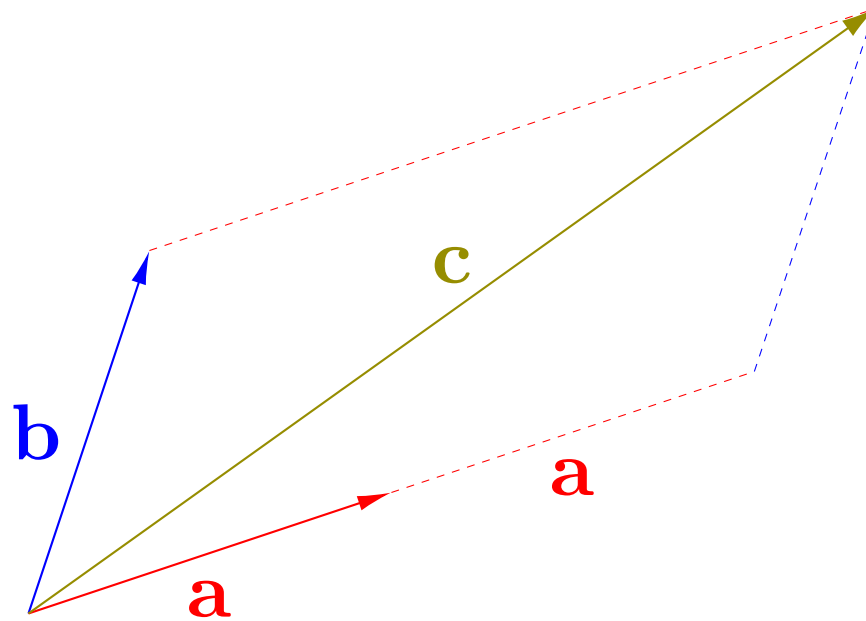
$$\mathbf{c} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k$$

Пример. Вектор $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ — это линейная комбинация векторов $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Линейная комбинация: геометрия

$$c = 2 \cdot a + 1 \cdot b$$



Любой вектор — линейная комбинация

Любой вектор $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ — линейная комбинация векторов $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Любой вектор — линейная комбинация

Любой вектор $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ — линейная комбинация векторов $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Аналогично, любой вектор $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ представим в виде:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Линейная зависимость

Определение

Набор A из двух и более векторов называется **линейно зависимым**, если хотя бы один вектор является линейной комбинацией остальных.

Набор $A = \{0\}$ из одного нулевого вектора также называется **линейно зависимым**.

Линейная зависимость: геометрия



Набор $\{a, b, c\}$ — линейно зависим.

Набор $\{a, b, d\}$ — линейно независим.

Линейная зависимость: примеры

Набор $A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ — линейно независимый.

Линейная зависимость: примеры

Набор $A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ — линейно независимый.

Набор $A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ — линейно зависимый:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Линейная зависимость: дубль два

Эквивалентное определение

Набор векторов $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ называется **линейно зависимым**, если можно найти такие веса $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, что

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0},$$

и при этом хотя бы одно из чисел α_i отлично от 0.

Линейная зависимость: дубль два

Эквивалентное определение

Набор векторов $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ называется **линейно зависимым**, если можно найти такие веса $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, что

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0},$$

и при этом хотя бы одно из чисел α_i отлично от 0.

Доказательство эквивалентности

Вектор с ненулевым коэффициентом α_i перед ним можно выразить через остальные.

Линейная зависимость: дубль два

Эквивалентное определение

Набор векторов $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ называется **линейно зависимым**, если можно найти такие веса $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, что

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0},$$

и при этом хотя бы одно из чисел α_i отлично от 0.

Доказательство эквивалентности

Вектор с ненулевым коэффициентом α_i перед ним можно выразить через остальные.

Если вектор \mathbf{v}_2 выражен через \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_3 , $\mathbf{v}_2 = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_3 \mathbf{v}_3$, то искомая нулевая линейная комбинация имеет вид:

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + (-1) \mathbf{v}_2 + \alpha_3 \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}.$$

Линейная оболочка

Краткий план:

- Линейная оболочка векторов;

Краткий план:

- Линейная оболочка векторов;
- Базис линейной оболочки векторов;

Краткий план:

- Линейная оболочка векторов;
- Базис линейной оболочки векторов;
- Размерность линейной оболочки векторов.

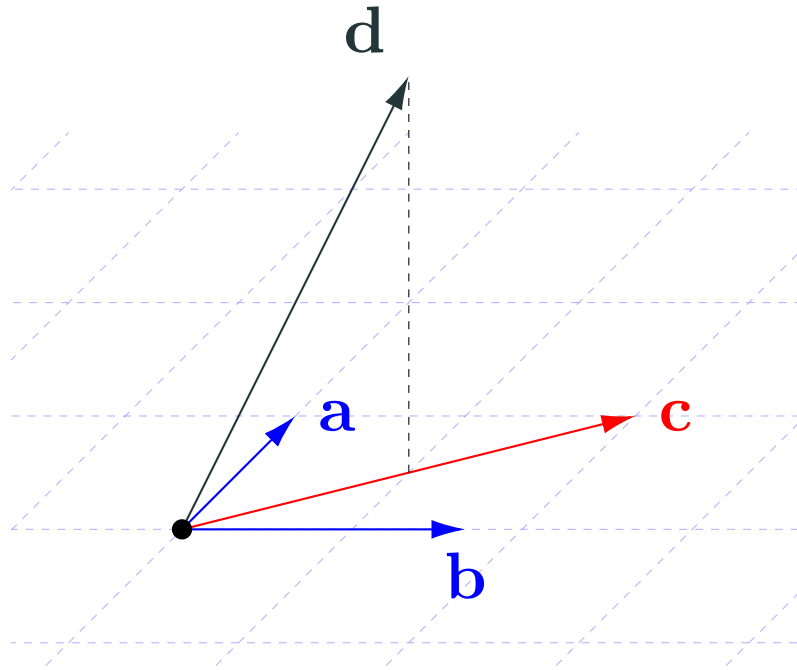
Линейная оболочка

Определение

Множество векторов V , содержащее все возможные линейные комбинации векторов $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$, называется их **линейной оболочкой**,

$$V = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$$

Линейная оболочка векторов: картинка



Вектор **c** лежит в плоскости $\text{Span}\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$.

Вектор **d** не лежит в плоскости $\text{Span}\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$.

Линейная зависимость

Определение

Набор A из двух и более векторов называется **линейно зависимым**, если хотя бы один вектор является линейной комбинацией остальных.

Набор $A = \{0\}$ из одного нулевого вектора также называется **линейно зависимым**.

Линейная зависимость: примеры

Набор $A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ — линейно независимый.

Линейная зависимость: примеры

Набор $A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ — линейно независимый.

Набор $A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ — линейно зависимый:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Линейная зависимость: дубль два

Эквивалентное определение

Набор векторов $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ называется **линейно зависимым**, если можно найти такие веса $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, что

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0},$$

и при этом хотя бы одно из чисел α_i отлично от 0.

Линейная зависимость: дубль два

Эквивалентное определение

Набор векторов $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ называется **линейно зависимым**, если можно найти такие веса $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, что

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0},$$

и при этом хотя бы одно из чисел α_i отлично от 0.

Доказательство эквивалентности

Вектор с ненулевым коэффициентом α_i перед ним можно выразить через остальные.

Линейная зависимость: дубль два

Эквивалентное определение

Набор векторов $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ называется **линейно зависимым**, если можно найти такие веса $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, что

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0},$$

и при этом хотя бы одно из чисел α_i отлично от 0.

Доказательство эквивалентности

Вектор с ненулевым коэффициентом α_i перед ним можно выразить через остальные.

Если вектор \mathbf{v}_2 выражен через \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_3 , $\mathbf{v}_2 = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_3 \mathbf{v}_3$, то искомая нулевая линейная комбинация имеет вид:

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + (-1) \mathbf{v}_2 + \alpha_3 \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}.$$