Квадратичные формы

Квадратичная форма

Краткий план:

- Определение квадратичной формы.

Краткий план:

- Определение квадратичной формы.
- Определённость формы.

Квадратичная форма

Определение

Многочлен от нескольких переменных $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, который содержит только слагаемые вида x_i^2 и $x_i x_j$ квадратичной формой.

Квадратичная форма

Определение

Многочлен от нескольких переменных $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, который содержит только слагаемые вида x_i^2 и $x_i x_j$ квадратичной формой.

Функция $f(x, y) = x^2 + 6xy - 7y^2$ — квадратичная форма.

Квадратичная форма

Определение

Многочлен от нескольких переменных $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, который содержит только слагаемые вида x_i^2 и $x_i x_j$ квадратичной формой.

Функция $f(x, y) = x^2 + 6xy - 7y^2$ — квадратичная форма.

Функция $f(x, y, z) = x^2 + 6xz - 8xy + 3z + 9$ — не квадратичная форма.

Зачем нужны квадратичные формы?

Многие функции хорошо аппроксимируются суммой вида

$$f(x, y) \approx 6 + 2x + 4y + 7x^2 + 8xy - 9y^2$$

Зачем нужны квадратичные формы?

Многие функции хорошо аппроксимируются суммой вида

$$f(x, y) \approx 6 + 2x + 4y + 7x^2 + 8xy - 9y^2$$

Свойства квадратичной формы позволяют понять свойства многих функций!

Квадратичная форма и матрицы

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & \color{red}{-1} & \color{blue}{-3} \\ \color{red}{-1} & 7 & 2 \\ \color{blue}{-3} & 2 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

Квадратичная форма и матрицы

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3 \\ -1 & 7 & 2 \\ -3 & 2 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$= 5x_1^2 + 7x_2^2 + 11x_3^2 - 2x_1x_2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3$$

Квадратичная форма и матрицы

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3 \\ -1 & 7 & 2 \\ -3 & 2 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$= 5x_1^2 + 7x_2^2 + 11x_3^2 - 2x_1x_2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3$$

Утверждение

Любая квадратичная форма $f(\mathbf{x})$ может быть записана в виде

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x},$$

где A — симметричная матрица, $A^T = A$.

Квадратичные формы в нуле

Утверждение

Любая квадратичная форма f равна 0 в точке $\mathbf{0}$,

$$f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}^T \cdot A \cdot \mathbf{0} = 0.$$

Квадратичные формы в нуле

Утверждение

Любая квадратичная форма f равна 0 в точке $\mathbf{0}$,

$$f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}^T \cdot A \cdot \mathbf{0} = 0.$$

Нас будет интересовать знак формы $f(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

Положительно определённая форма

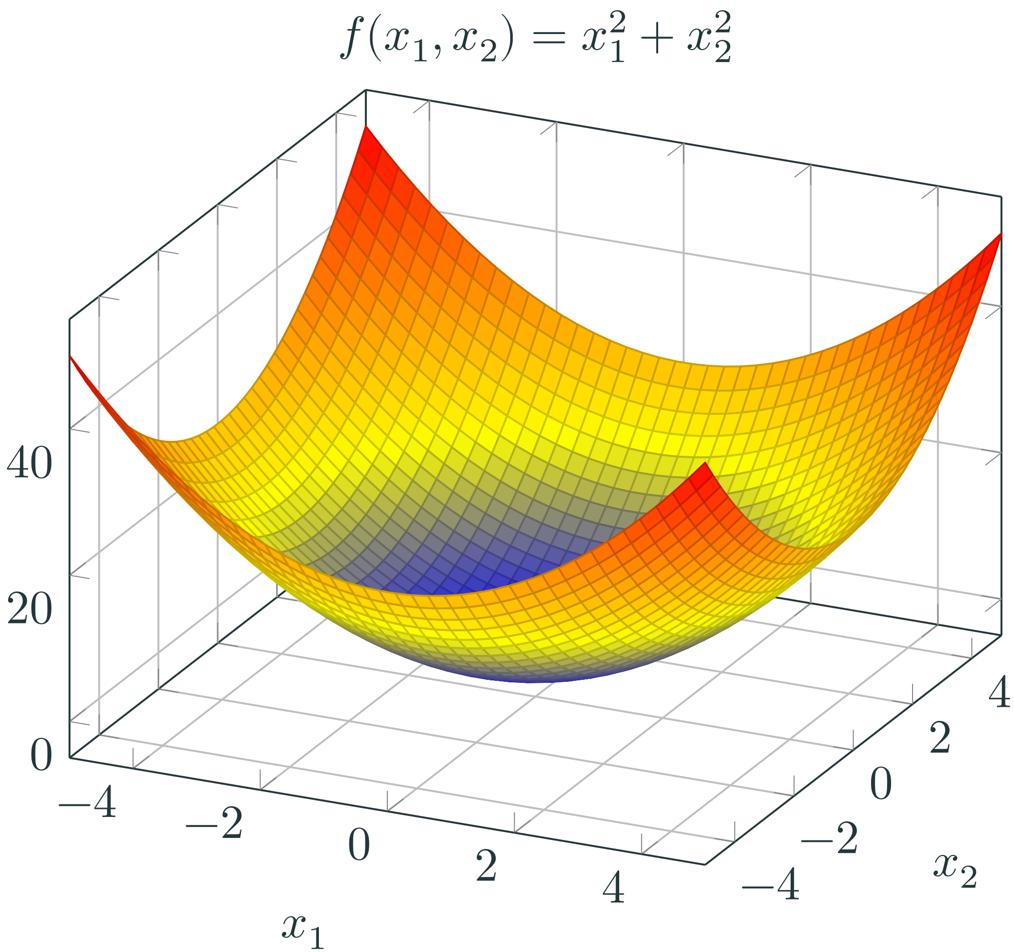
Определение

Форма f называется положительно определённой, если $f(\mathbf{x}) > 0$ при $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

Положительно определённая форма

Определение

Форма f называется положительно определённой, если $f(\mathbf{x}) > 0$ при $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.



Отрицательно определённая форма

Определение

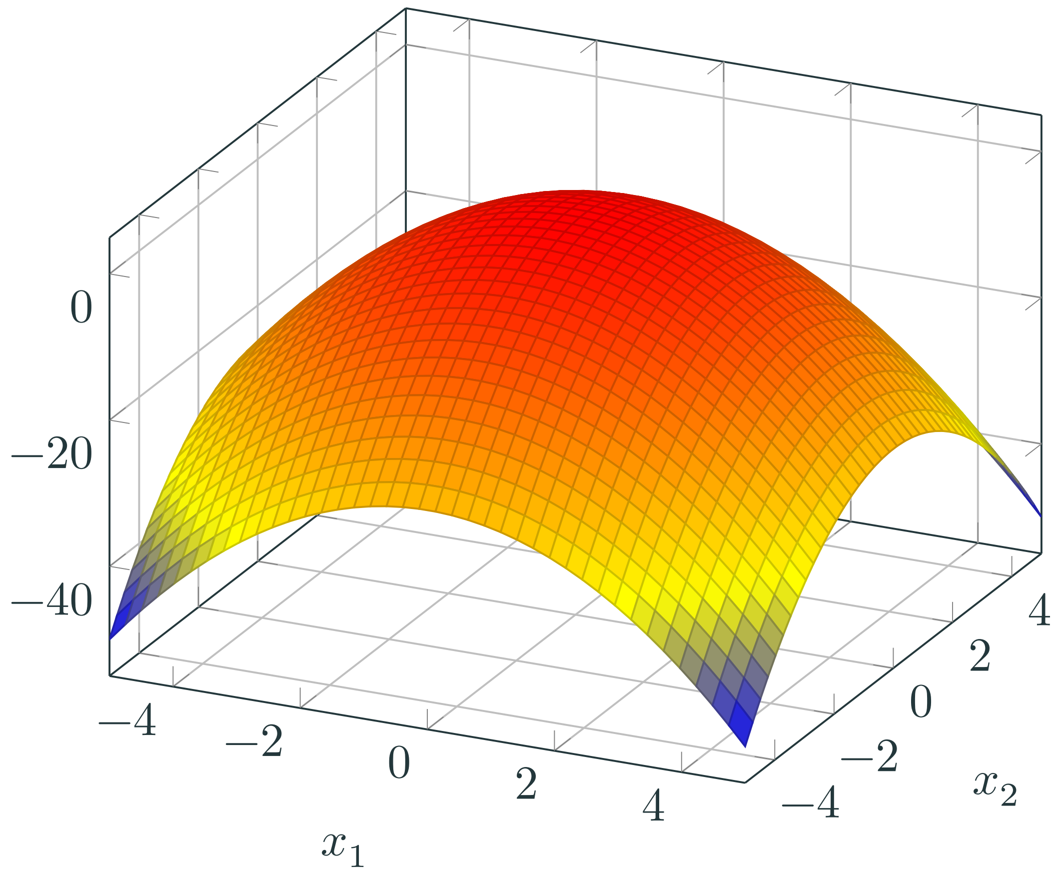
Форма f называется отрицательно определённой, если $f(\mathbf{x}) < 0$ при $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

Отрицательно определённая форма

Определение

Форма f называется отрицательно определённой, если $f(\mathbf{x}) < 0$ при $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

$f(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2$



Положительно полуопределённая форма

Определение

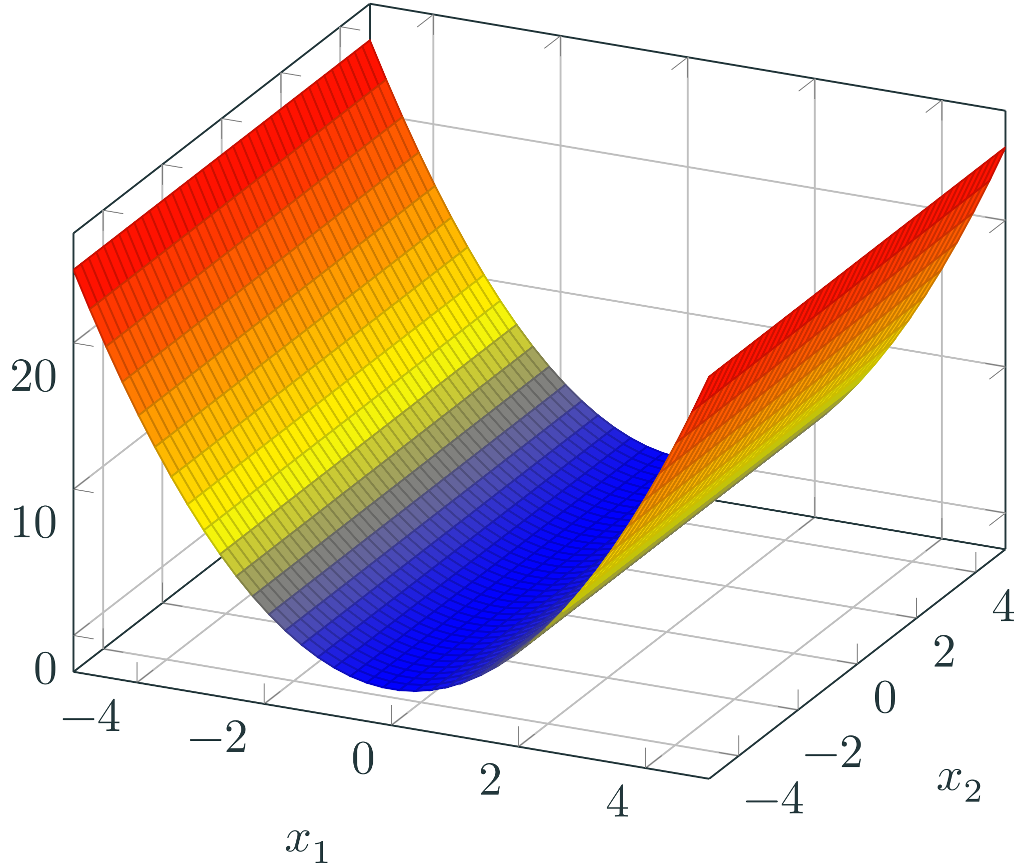
Форма f называется положительно полуопределённой или неотрицательно определённой, если $f(\mathbf{x}) \geq 0$.

Положительно полуопределённая форма

Определение

Форма f называется положительно полуопределённой или неотрицательно определённой, если $f(\mathbf{x}) \geq 0$.

$f(x_1, x_2) = x_1^2$



Отрицательно полуопределённая форма

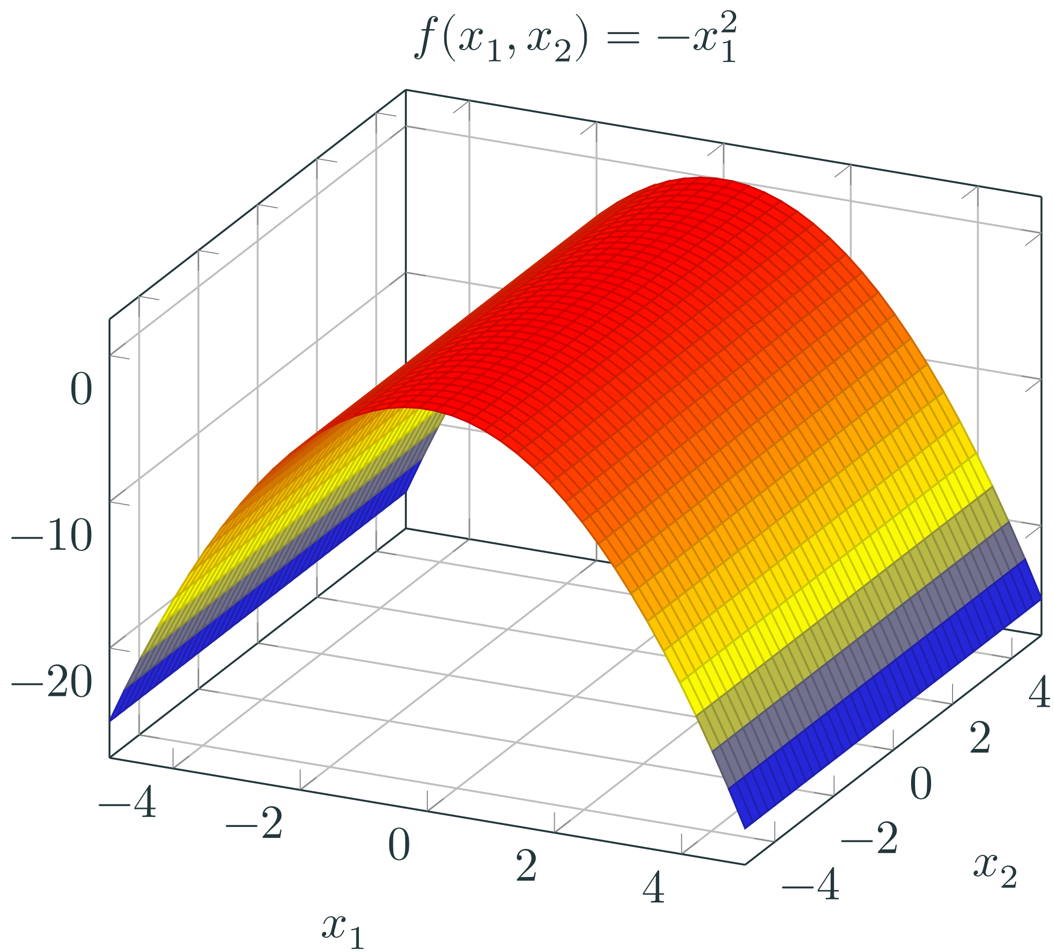
Определение

Форма f называется отрицательно полуопределённой или неположительно определённой, если $f(\mathbf{x}) \leq 0$.

Отрицательно полуопределённая форма

Определение

Форма f называется отрицательно полуопределённой или неположительно определённой, если $f(\mathbf{x}) \leq 0$.



Неопределённая форма

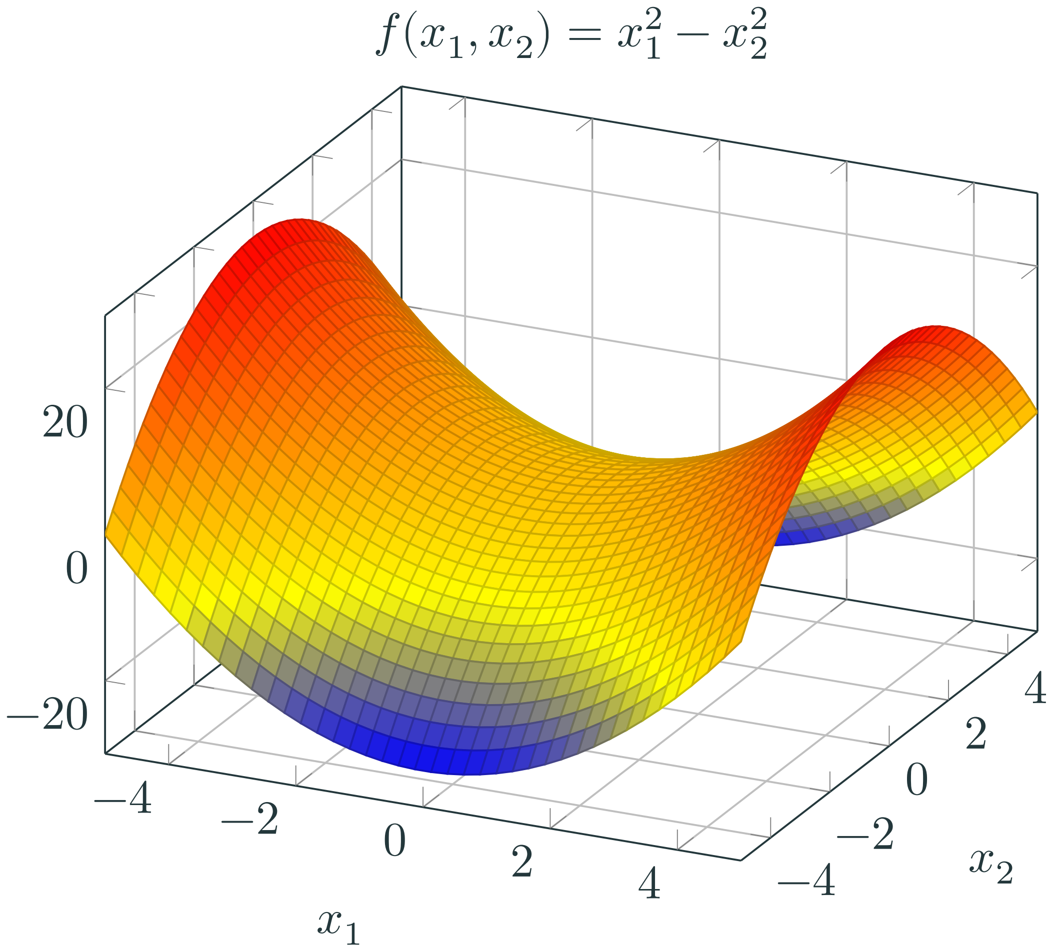
Определение

Форма f называется неопределённой, если она принимает и положительные и отрицательные значения.

Неопределённая форма

Определение

Форма f называется неопределённой, если она принимает и положительные и отрицательные значения.



Когда форма равна нулю?

Утверждение

Если форма f равна 0 в точке $\mathbf{x}$, то она равна нулю и в любой точке $t\mathbf{x}$.

Когда форма равна нулю?

Утверждение

Если форма f равна 0 в точке $\mathbf{x}$, то она равна нулю и в любой точке $t\mathbf{x}$.

Доказательство

$$f(t\mathbf{x}) = t\mathbf{x}^T \cdot A \cdot t\mathbf{x} = t^2\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 0$$

Когда форма равна нулю?

Утверждение

Если форма f равна 0 в точке $\mathbf{x}$, то она равна нулю и в любой точке $t\mathbf{x}$.

Доказательство

$$f(t\mathbf{x}) = t\mathbf{x}^T \cdot A \cdot t\mathbf{x} = t^2\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 0$$

Квадратичная форма возможно равна нулю на прямых, проходящих через $\mathbf{0}$.

Метод полных квадратов

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)

Диагонализация квадратичной формы

Краткий план:

- Симметричная матрица и собственные числа.

Краткий план:

- Симметричная матрица и собственные числа.
- Диагонализация квадратичной формы.

Всегда диагонализуема!

Утверждение

Если A — симметричная матрица, $A^T = A$, то у неё всегда найдётся ровно n действительных собственных чисел λ_i

Всегда диагонализуема!

Утверждение

Если A — симметричная матрица, $A^T = A$, то у неё всегда найдётся ровно n действительных собственных чисел λ_i и ровно n линейно независимых ортогональных собственных векторов.

Всегда диагонализуема!

Утверждение

Если A — симметричная матрица, $A^T = A$, то у неё всегда найдётся ровно n действительных собственных чисел λ_i и ровно n линейно независимых ортогональных собственных векторов.

Следствие

У симметричной A можно найти n ортогональных собственных векторов единичной длины.

Симметричная матрица A всегда диагонализуема!

Чем хороши ортогональные векторы?

Векторы $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ — ортогональные и единичной длины.

$$P = \begin{pmatrix} | & & | \\ \mathbf{v}_1 & \ldots & \mathbf{v}_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

Чем хороши ортогональные векторы?

Векторы $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ — ортогональные и единичной длины.

$$P = \begin{pmatrix} | & & | \\ \mathbf{v}_1 & \ldots & \mathbf{v}_n \\ | & & | \end{pmatrix} \qquad P^T = \begin{pmatrix} \text{---} & \mathbf{v}_1 & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & \mathbf{v}_n & \text{---} \end{pmatrix}$$

Чем хороши ортогональные векторы?

Векторы $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ — ортогональные и единичной длины.

$$P = \begin{pmatrix} | & & | \\ \mathbf{v}_1 & \ldots & \mathbf{v}_n \\ | & & | \end{pmatrix} \qquad P^T = \begin{pmatrix} \text{---} & \mathbf{v}_1 & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & \mathbf{v}_n & \text{---} \end{pmatrix}$$

$$P^T P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} = \mathsf{I}$$

Чем хороши ортогональные векторы?

Векторы $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ — ортогональные и единичной длины.

$$P = \begin{pmatrix} | & & | \\ \mathbf{v}_1 & \ldots & \mathbf{v}_n \\ | & & | \end{pmatrix} \qquad P^T = \begin{pmatrix} \text{---} & \mathbf{v}_1 & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & \mathbf{v}_n & \text{---} \end{pmatrix}$$

$$P^T P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} = \mathsf{I}$$

$$P^T = P^{-1}$$

Диагонализация формы

Утверждение

Квадратичная форма $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ с симметричной A представима в виде

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T PDP^{-1}\mathbf{x},$$

где D — диагональная матрица из собственных чисел матрицы A, а P — матрица из линейно независимых собственных векторов матрицы A.

Диагонализация формы

Утверждение

Квадратичная форма $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ с симметричной A представима в виде

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T PDP^{-1}\mathbf{x},$$

где D — диагональная матрица из собственных чисел матрицы A, а P — матрица из линейно независимых собственных векторов матрицы A.

Утверждение

Всегда можно выбрать ортогональные собственные векторы A единичной длины, при этом представление примет вид:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T PDP^T\mathbf{x} = (P^T\mathbf{x})^T D(P^T\mathbf{x}),$$

Диагонализация формы

Утвеждение

Всегда можно выбрать ортогональные собственные векторы единичной длины, при этом представление примет вид:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T PDP^T\mathbf{x} = (P^T\mathbf{x})^T D(P^T\mathbf{x}),$$

где D — диагональная матрица из собственных чисел матрицы A, а P — матрица из собственных векторов матрицы A.

Диагонализация формы

Утвеждение

Всегда можно выбрать ортогональные собственные векторы единичной длины, при этом представление примет вид:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P D P^T \mathbf{x} = (P^T\mathbf{x})^T D (P^T\mathbf{x}),$$

где D — диагональная матрица из собственных чисел матрицы A, а P — матрица из собственных векторов матрицы A.

$$f(\mathbf{x}) = (P^T\mathbf{x})^T D (P^T\mathbf{x}) = \mathbf{y}^T D \mathbf{y} =$$

$$= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$$

Диагонализация формы

Утвеждение

Всегда можно выбрать ортогональные собственные векторы единичной длины, при этом представление примет вид:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T PDP^T\mathbf{x} = (P^T\mathbf{x})^T D(P^T\mathbf{x}),$$

где D — диагональная матрица из собственных чисел матрицы A, а P — матрица из собственных векторов матрицы A.

$$f(\mathbf{x}) = (P^T\mathbf{x})^T D(P^T\mathbf{x}) = \mathbf{y}^T D\mathbf{y} =$$

$$= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$$

Это просто удачная замена переменных $\mathbf{y} = P^T\mathbf{x}$!

Определённость формы

Пример, $f(\mathbf{x}) = 5y_1^2 + 6y_2^2 - 9y_3^2$.

Определённость формы

Пример, $f(\mathbf{x}) = 5y_1^2 + 6y_2^2 - 9y_3^2$.

Квадратичная форма f неопределена.

Определённость формы

Пример, $f(\mathbf{x}) = 5y_1^2 + 6y_2^2 - 9y_3^2$.

Квадратичная форма f неопределена.

Утверждение

Квадратичная форма

$$f(\mathbf{x}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$$

является…

Определённость формы

Пример, $f(\mathbf{x}) = 5y_1^2 + 6y_2^2 - 9y_3^2$.

Квадратичная форма f неопределена.

Утверждение

Квадратичная форма

$$f(\mathbf{x}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + ... + \lambda_n y_n^2$$

является…

положительно определённой, если все $\lambda_i > 0$.

Определённость формы

Пример, $f(\mathbf{x}) = 5y_1^2 + 6y_2^2 - 9y_3^2$.

Квадратичная форма f неопределена.

Утверждение

Квадратичная форма

$$f(\mathbf{x}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + ... + \lambda_n y_n^2$$

является…

положительно определённой, если все $\lambda_i > 0$.

отрицательно определённой, если все $\lambda_i < 0$.

Определённость формы

Пример, $f(\mathbf{x}) = 5y_1^2 + 6y_2^2 - 9y_3^2$.

Квадратичная форма f неопределена.

Утверждение

Квадратичная форма

$$f(\mathbf{x}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$$

является…

положительно определённой, если все $\lambda_i > 0$.

отрицательно определённой, если все $\lambda_i < 0$.

положительно полуопределённой, если все $\lambda_i \geq 0$.

Определённость формы

Пример, $f(\mathbf{x}) = 5y_1^2 + 6y_2^2 - 9y_3^2$.

Квадратичная форма f неопределена.

Утверждение

Квадратичная форма

$$f(\mathbf{x}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$$

является…

положительно определённой, если все $\lambda_i > 0$.

отрицательно определённой, если все $\lambda_i < 0$.

положительно полуопределённой, если все $\lambda_i \geq 0$.

отрицательно полуопределённой, если все $\lambda_i \leq 0$.

Определённость формы

Пример, $f(\mathbf{x}) = 5y_1^2 + 6y_2^2 - 9y_3^2$.

Квадратичная форма f неопределена.

Утверждение

Квадратичная форма

$$f(\mathbf{x}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + ... + \lambda_n y_n^2$$

является…

положительно определённой, если все $\lambda_i > 0$.

отрицательно определённой, если все $\lambda_i < 0$.

положительно полуопределённой, если все $\lambda_i \geq 0$.

отрицательно полуопределённой, если все $\lambda_i \leq 0$.

неопределённой, если найдётся $\lambda_i > 0$ и $\lambda_j < 0$.

Кусочек доказательства

Утверждение

Для симметричной матрицы A, $A^T = A$, собственные вектора, соответствующие разным λ, ортогональны.

Кусочек доказательства

Утверждение

Для симметричной матрицы A, $A^T = A$, собственные вектора, соответствующие разным λ, ортогональны.

Доказательство

К примеру, $A\mathbf{x} = 5\mathbf{x}$ и $A\mathbf{y} = 7\mathbf{y}$.

Кусочек доказательства

Утверждение

Для симметричной матрицы A, $A^T = A$, собственные вектора, соответствующие разным λ, ортогональны.

Доказательство

К примеру, $A\mathbf{x} = 5\mathbf{x}$ и $A\mathbf{y} = 7\mathbf{y}$.

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \langle 5\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = 5\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$$

Кусочек доказательства

Утверждение

Для симметричной матрицы A, $A^T = A$, собственные вектора, соответствующие разным λ, ортогональны.

Доказательство

К примеру, $A\mathbf{x} = 5\mathbf{x}$ и $A\mathbf{y} = 7\mathbf{y}$.

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \langle 5\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = 5\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$$
$$\langle \mathbf{x}, A\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, 7\mathbf{y}\rangle = 7\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$$

Кусочек доказательства

Утверждение

Для симметричной матрицы A, $A^T = A$, собственные вектора, соответствующие разным λ, ортогональны.

Доказательство

К примеру, $A\mathbf{x} = 5\mathbf{x}$ и $A\mathbf{y} = 7\mathbf{y}$.

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \langle 5\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = 5\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$$
$$\langle \mathbf{x}, A\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, 7\mathbf{y}\rangle = 7\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$$
$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, A^T\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, A\mathbf{y}\rangle$$

Кусочек доказательства

Утверждение

Для симметричной матрицы A, $A^T = A$, собственные вектора, соответствующие разным λ, ортогональны.

Доказательство

К примеру, $A\mathbf{x} = 5\mathbf{x}$ и $A\mathbf{y} = 7\mathbf{y}$.

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle 5\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 5\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$$
$$\langle \mathbf{x}, A\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, 7\mathbf{y} \rangle = 7\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$$
$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, A^T\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, A\mathbf{y} \rangle$$

Равенство возможно, только если $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$:

$$5\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 7\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$$

Критерий Сильвестра

Краткий план:

- Критерий Сильвестра.

Краткий план:

- Критерий Сильвестра.
- Расширенный критерий Сильвестра.

Обозначение

Будем вычёркивать из матрицы A строки и столбцы с одинаковыми номерами.

Обозначение

Будем вычёркивать из матрицы A строки и столбцы с одинаковыми номерами.

Скажем, оставим в матрице A только 1-ю, 3-ю и 5-ю строки и 1-й, 3-й и 5-й столбцы.

Обозначение

Будем вычёркивать из матрицы A строки и столбцы с одинаковыми номерами.

Скажем, оставим в матрице A только 1-ю, 3-ю и 5-ю строки и 1-й, 3-й и 5-й столбцы.

Определитель полученной подматрицы обозначим m_{135}.

Обозначение

Будем вычёркивать из матрицы A строки и столбцы с одинаковыми номерами.

Скажем, оставим в матрице A только 1-ю, 3-ю и 5-ю строки и 1-й, 3-й и 5-й столбцы.

Определитель полученной подматрицы обозначим m_{135}.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 6 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 9 & 5 \\ -1 & 1 & 5 & 8 \end{pmatrix}, \quad m_{24} = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 47.$$

Критерий Сильвестра

Утверждение

Симметричная матрица A является положительно определённой, если и только если

$m_1 > 0$, $m_{12} > 0$, $m_{123} > 0$, $m_{1234} > 0$, $\ldots$

Критерий Сильвестра

Утверждение

Симметричная матрица A является положительно определённой, если и только если

$m_1 > 0, m_{12} > 0, m_{123} > 0, m_{1234} > 0, \ldots$

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

$$m_1 = 5,\ m_{12} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 26,\ m_{123} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 9 \end{vmatrix} = 184$$

Наблюдение

Утверждение

Если помножить на (-1) все элементы матрицы A размера $n \times n$, то определитель матрица $A\ldots$

Наблюдение

Утверждение

Если помножить на (-1) все элементы матрицы A размера $n \times n$, то определитель матрица $A\ldots$

поменяет знак, если n — нечётное;

Наблюдение

Утверждение

Если помножить на (-1) все элементы матрицы A размера $n \times n$, то определитель матрица $A\ldots$

поменяет знак, если n — нечётное;

сохранит знак, если n — чётное.

Критерий Сильвестра

Утверждение

Симметричная матрица A является отрицательно определённой, если и только если

$m_1 < 0$, $m_{12} > 0$, $m_{123} < 0$, $m_{1234} > 0$, $\ldots$

Критерий Сильвестра

Утверждение

Симметричная матрица A является отрицательно определённой, если и только если

$m_1 < 0, m_{12} > 0, m_{123} < 0, m_{1234} > 0, \ldots$

Пример.

$$B = \begin{pmatrix} -5 & -2 & -3 \\ -2 & -6 & -2 \\ -3 & -2 & -9 \end{pmatrix}$$

$$m_1 = -5,\ m_{12} = \begin{vmatrix} -5 & -2 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} = 26,\ m_{123} = \begin{vmatrix} -5 & -2 & -3 \\ -2 & -6 & -2 \\ -3 & -2 & -9 \end{vmatrix} = -184$$

Расширенный критерий Сильвестра: пример

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)

Ортогонализация Грамма-Шмидта: пример

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)

Бонус: задача про переливание красок

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)