

Матричная запись

Линейная комбинация и независимость

Краткий план:

- Линейная комбинация векторов;

Краткий план:

- Линейная комбинация векторов;
- Зависимые и независимые наборы векторов.

Линейная комбинация

Определение

Вектор \mathbf{c} называется **линейной комбинацией** векторов $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$, если его можно представить в виде их суммы с некоторыми действительными весами α_i :

$$\mathbf{c} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k$$

Линейная комбинация

Определение

Вектор \mathbf{c} называется **линейной комбинацией** векторов $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$, если его можно представить в виде их суммы с некоторыми действительными весами α_i :

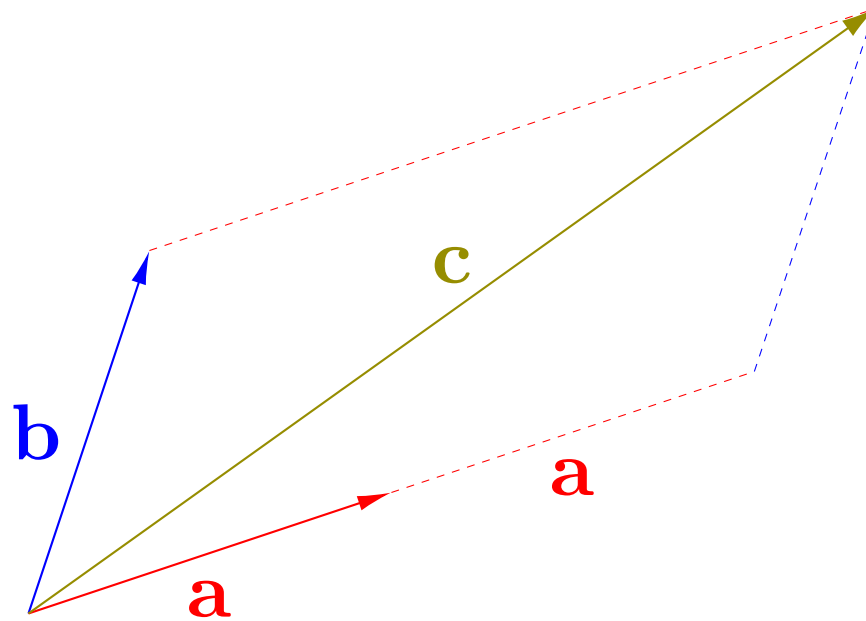
$$\mathbf{c} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k$$

Пример. Вектор $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ — это линейная комбинация векторов $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Линейная комбинация: геометрия

$$c = 2 \cdot a + 1 \cdot b$$



Любой вектор — линейная комбинация

Любой вектор $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ — линейная комбинация векторов $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Любой вектор — линейная комбинация

Любой вектор $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ — линейная комбинация векторов $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Аналогично, любой вектор $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ представим в виде:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Линейная зависимость

Определение

Набор A из двух и более векторов называется **линейно зависимым**, если хотя бы один вектор является линейной комбинацией остальных.

Набор $A = \{0\}$ из одного нулевого вектора также называется **линейно зависимым**.

Линейная зависимость: геометрия



Набор $\{a, b, c\}$ — линейно зависим.

Набор $\{a, b, d\}$ — линейно независим.

Линейная зависимость: примеры

Набор $A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ — линейно независимый.

Линейная зависимость: примеры

Набор $A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ — линейно независимый.

Набор $A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ — линейно зависимый:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Линейная зависимость: дубль два

Эквивалентное определение

Набор векторов $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ называется **линейно зависимым**, если можно найти такие веса $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, что

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0},$$

и при этом хотя бы одно из чисел α_i отлично от 0.

Линейная зависимость: дубль два

Эквивалентное определение

Набор векторов $A = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ называется **линейно зависимым**, если можно найти такие веса $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, что

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k = 0,$$

и при этом хотя бы одно из чисел α_i отлично от 0.

Доказательство эквивалентности

Вектор с ненулевым коэффициентом α_i перед ним можно выразить через остальные.

Линейная зависимость: дубль два

Эквивалентное определение

Набор векторов $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ называется **линейно зависимым**, если можно найти такие веса $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, что

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0},$$

и при этом хотя бы одно из чисел α_i отлично от 0.

Доказательство эквивалентности

Вектор с ненулевым коэффициентом α_i перед ним можно выразить через остальные.

Если вектор \mathbf{v}_2 выражен через \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_3 , $\mathbf{v}_2 = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_3 \mathbf{v}_3$, то искомая нулевая линейная комбинация имеет вид:

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + (-1) \mathbf{v}_2 + \alpha_3 \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}.$$

Линейная оболочка

Краткий план:

- Линейная оболочка векторов;

Краткий план:

- Линейная оболочка векторов;
- Базис линейной оболочки векторов;

Краткий план:

- Линейная оболочка векторов;
- Базис линейной оболочки векторов;
- Размерность линейной оболочки векторов.

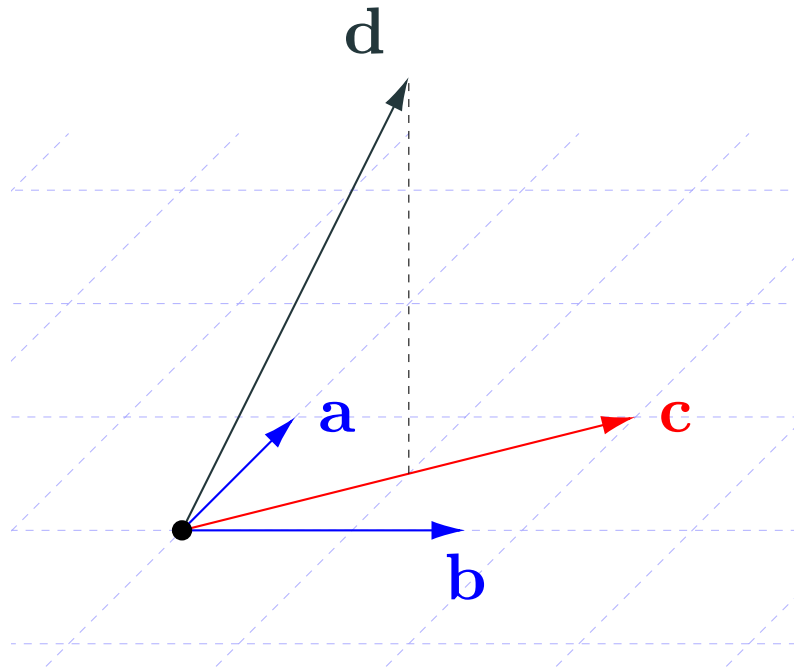
Линейная оболочка

Определение

Множество векторов M , содержащее все возможные линейные комбинации векторов $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$, называется их **линейной оболочкой**,

$$M = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$$

Линейная оболочка векторов: картинка



Вектор **c** лежит в плоскости $\text{Span}\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$.

Вектор **d** не лежит в плоскости $\text{Span}\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$.

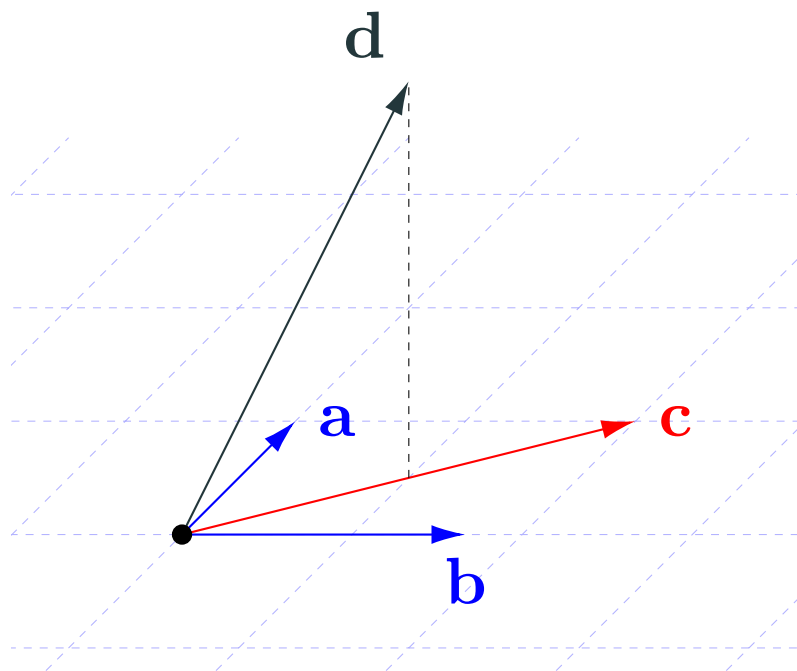
Базис линейной оболочки

Определение

Набор векторов $A = \{v_1, v_2, \dots, v_d\}$ называется **базисом линейной оболочки** $\text{Span}\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, если:

- $\text{Span}\{v_1, v_2, \dots, v_d\} = \text{Span}\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$;
- Набор векторов A линейно независим.

Базис линейной оболочки: картинка



Для линейной оболочки $\text{Span}\{a, b, c\}$ базисами будут $A_1 = \{a, b\}$, $A_2 = \{b, 2c\}$, $A_3 = \{3a, 5c\}$.

Базис оболочки: примеры

Рассмотрим линейную оболочку

$$M = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

Базис оболочки: примеры

Рассмотрим линейную оболочку

$$M = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

Набор $A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ — базис для M .

Базис оболочки: примеры

Рассмотрим линейную оболочку

$$M = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{Набор } A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \text{ — базис для } M.$$

$$\text{Набор } A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix} \right\} \text{ — базис для } M.$$

Свойства базиса линейной оболочки

Утверждение

Если набор векторов $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ линейно независим, то он сам является базисом своей линейной оболочки $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$.

Свойства базиса линейной оболочки

Утверждение

Если набор векторов $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ линейно независим, то он сам является базисом своей линейной оболочки $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$.

Утверждение

Если наборы векторов A и B — являются базисами для линейной оболочки M , то наборы A и B содержат одинаковое количество векторов.

Свойства базиса линейной оболочки

Утверждение

Если набор векторов $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ линейно независим, то он сам является базисом своей линейной оболочки $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$.

Утверждение

Если наборы векторов A и B — являются базисами для линейной оболочки M , то наборы A и B содержат одинаковое количество векторов.

Утверждение

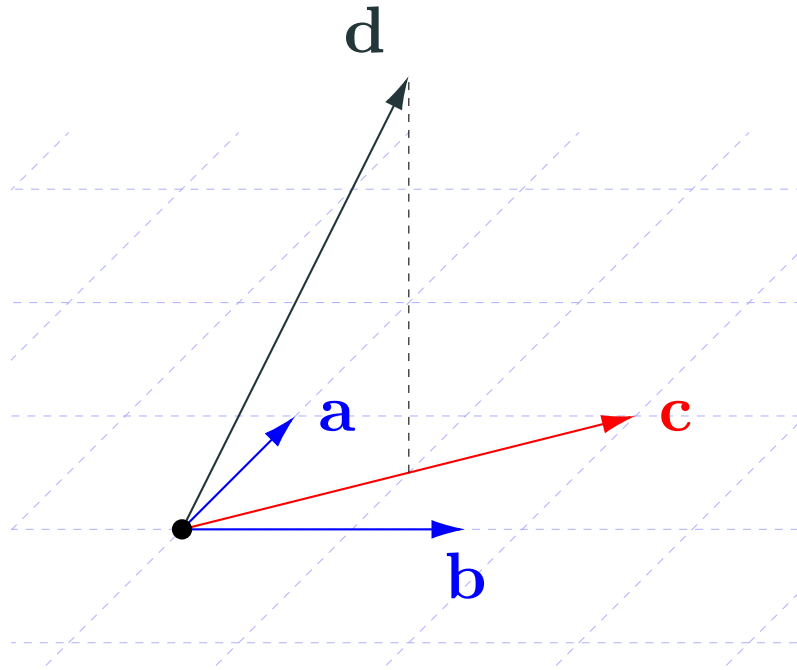
Если набор A содержит k векторов, то базис линейной оболочки $\text{Span } A$ содержит k элементов или меньше.

Размерность линейной оболочки

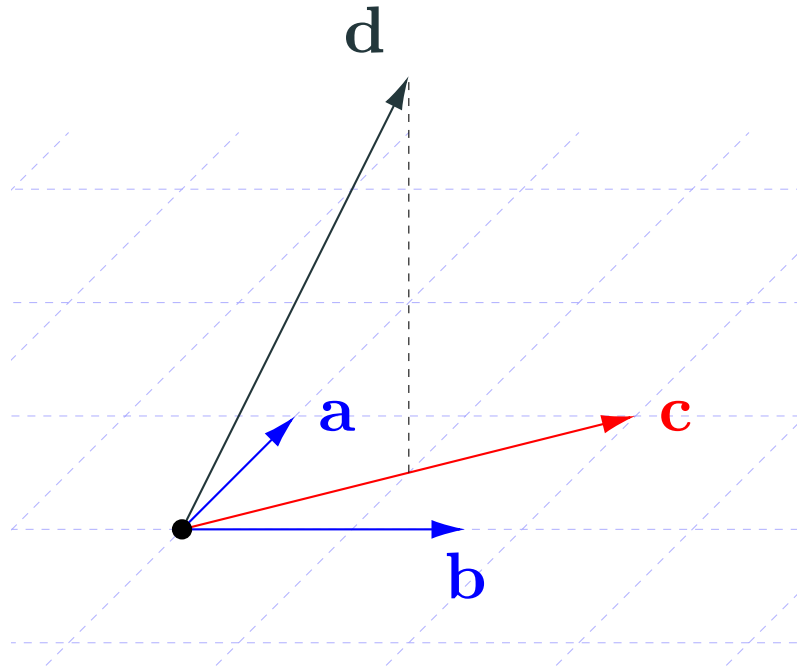
Определение

Если базис линейной оболочки M содержит d элементов, то число d называется размерностью линейной оболочки M .

Размерность линейной оболочки: картинка

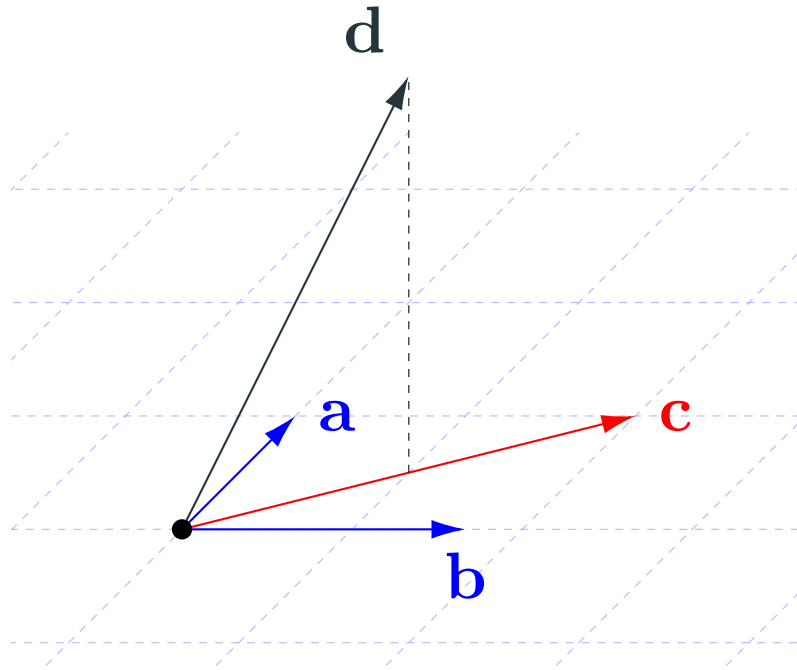


Размерность линейной оболочки: картинка



Размерность $\text{Span}\{a, b, c\}$ равна 2.

Размерность линейной оболочки: картинка



Размерность $\text{Span}\{a, b, c\}$ равна 2.

Размерность $\text{Span}\{a, b, d\}$ равна 3.

Пространство \mathbb{R}^n

Определение

Пространство \mathbb{R}^n — множество всех возможных векторов из n чисел.

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1 \in \mathbb{R}, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

Пространство \mathbb{R}^n

Определение

Пространство \mathbb{R}^n — множество всех возможных векторов из n чисел.

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1 \in \mathbb{R}, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Пространство \mathbb{R}^n

Определение

Пространство \mathbb{R}^n — множество всех возможных векторов из n чисел.

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1 \in \mathbb{R}, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Размерность \mathbb{R}^n равна n .

Линейное пространство

Краткий план:

- Векторное пространство;

Краткий план:

- Векторное пространство;
- Базис векторного пространства;

Краткий план:

- Векторное пространство;
- Базис векторного пространства;
- Размерность векторного пространства.

Векторное пространство

Определение

Множество V произвольных объектов называется **конечномерным векторным пространством**, если:

- множество V можно взаимно однозначно сопоставить пространству \mathbb{R}^n ;

Векторное пространство

Определение

Множество V произвольных объектов называется **конечномерным векторным пространством**, если:

- множество V можно взаимно однозначно сопоставить пространству \mathbb{R}^n ;
- определено сложение двух объектов a и b из V , и оно соответствует сложению столбцов из \mathbb{R}^n ;

Векторное пространство

Определение

Множество V произвольных объектов называется **конечномерным векторным пространством**, если:

- множество V можно взаимно однозначно сопоставить пространству \mathbb{R}^n ;
- определено сложение двух объектов a и b из V , и оно соответствует сложению столбцов из \mathbb{R}^n ;
- определено умножение объекта a из V на число $\lambda \in \mathbb{R}^n$, и оно соответствует умножению столбца \mathbb{R}^n на λ .

Векторное пространство

Определение

Множество V произвольных объектов называется **конечномерным векторным пространством**, если:

- множество V можно взаимно однозначно сопоставить пространству \mathbb{R}^n ;
- определено сложение двух объектов a и b из V , и оно соответствует сложению столбцов из \mathbb{R}^n ;
- определено умножение объекта a из V на число $\lambda \in \mathbb{R}^n$, и оно соответствует умножению столбца \mathbb{R}^n на λ .

Векторное пространство

Определение

Множество V произвольных объектов называется **конечномерным векторным пространством**, если:

- множество V можно взаимно однозначно сопоставить пространству \mathbb{R}^n ;
- определено сложение двух объектов a и b из V , и оно соответствует сложению столбцов из \mathbb{R}^n ;
- определено умножение объекта a из V на число $\lambda \in \mathbb{R}^n$, и оно соответствует умножению столбца \mathbb{R}^n на λ .

Элементы векторного пространства называют векторами.

Векторное пространство

Определение

Множество V произвольных объектов называется **конечномерным векторным пространством**, если:

- множество V можно взаимно однозначно сопоставить пространству \mathbb{R}^n ;
- определено сложение двух объектов a и b из V , и оно соответствует сложению столбцов из \mathbb{R}^n ;
- определено умножение объекта a из V на число $\lambda \in \mathbb{R}^n$, и оно соответствует умножению столбца \mathbb{R}^n на λ .

Элементы векторного пространства называют векторами.
Векторное пространство также называют **линейным**.

Многочлены

Множество V всех многочленов от t степени не выше трёх:

$$V = \{at^3 + bt^2 + ct + d \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}^n\}$$

Многочлены

Множество V всех многочленов от t степени не выше трёх:

$$V = \{at^3 + bt^2 + ct + d \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}^n\}$$

Взаимно однозначное сопоставление:

$$5t^3 + 6t^2 - 3t + 2 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Многочлены

Множество V всех многочленов от t степени не выше трёх:

$$V = \{at^3 + bt^2 + ct + d \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}^n\}$$

Взаимно однозначное сопоставление:

$$5t^3 + 6t^2 - 3t + 2 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Сложение двух многочленов и умножение многочлена на число соответствуют операциям над столбцами чисел.

Пример векторного пространства

Множество V всех функций $f(t)$ равных нулю вне двух данных точек:

$$V = \{f \mid f(t) = 0 \text{ для всех } t \neq \pm 1\}$$

Пример векторного пространства

Множество V всех функций $f(t)$ равных нулю вне двух данных точек:

$$V = \{f \mid f(t) = 0 \text{ для всех } t \neq \pm 1\}$$

Взаимно однозначное сопоставление:

$$f \leftrightarrow \begin{pmatrix} f(-1) \\ f(1) \end{pmatrix}.$$

Пример векторного пространства

Множество V всех функций $f(t)$ равных нулю вне двух данных точек:

$$V = \{f \mid f(t) = 0 \text{ для всех } t \neq \pm 1\}$$

Взаимно однозначное сопоставление:

$$f \leftrightarrow \begin{pmatrix} f(-1) \\ f(1) \end{pmatrix}.$$

Сложение двух таких функций и умножение число соответствуют операциям над столбцами чисел.

Аналогия с \mathbb{R}^n

Определение

Вектор \mathbf{c} называется **линейной комбинацией** векторов $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$, если его можно представить в виде их суммы с некоторыми действительными весами α_i :

$$\mathbf{c} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k$$

Аналогия с \mathbb{R}^n

Определение

Вектор \mathbf{c} называется **линейной комбинацией** векторов $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$, если его можно представить в виде их суммы с некоторыми действительными весами α_i :

$$\mathbf{c} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k$$

Определение

Множество векторов M , содержащее все возможные линейные комбинации векторов $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$, называется их **линейной оболочкой**,

$$M = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$$

Аналогия с \mathbb{R}^n

Определение

Вектор \mathbf{c} называется **линейной комбинацией** векторов $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$, если его можно представить в виде их суммы с некоторыми действительными весами α_i :

$$\mathbf{c} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k$$

Определение

Множество векторов M , содержащее все возможные линейные комбинации векторов $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$, называется их **линейной оболочкой**,

$$M = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$$

Полностью аналогично определяются линейно зависимые и независимые наборы векторов.

Базис и размерность пространства

Определение

Базисом векторного пространства V называется любой набор $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, такой что

- $V = \text{Span}\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$;
- векторы $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ линейно независимы.

Базис и размерность пространства

Определение

Базисом векторного пространства V называется любой набор $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, такой что

- $V = \text{Span}\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$;
- векторы $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ линейно независимы.

Определение

Число векторов в базисе, n , называют **размерностью** пространства V , $\dim V = n$.

Продолжаем аналогию

Пространство V взаимнооднозначно сопоставлено с \mathbb{R}^n и при этом сложение в V соответствует сложению в \mathbb{R}^n , а умножение на число в V соответствует умножению на число в \mathbb{R}^n .

Утверждение

Линейная независимость в V соответствует линейной независимости в \mathbb{R}^n .

Базис в V соответствует базису в \mathbb{R}^n .

Размерность V равна размерности \mathbb{R}^n , $\dim V = \dim \mathbb{R}^n = n$.

Формальности

Мы слишком привыкли к свойствам чисел!

Формальности

Мы слишком привыкли к свойствам чисел!

Эквивалентное определение

Множество V называется **векторным пространством**, если выполнено восемь свойств...

Восемь аксиом: сложение

1. При сложении можно расставлять скобки как хочешь (ассоциативность):

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

2. При сложении можно путать лево и право (коммутативность):

$$a + b = b + a$$

3. Существует нулевой вектор 0:

$$a + 0 = a$$

4. Для любого вектора a найдется противоположный вектор $-a$:

$$a + (-a) = 0$$

Восемь аксиом: умножение

5. Умножение вектора на число **совместимо** с умножением чисел:

$$\lambda_1(\lambda_2 \mathbf{a}) = (\lambda_1 \lambda_2) \mathbf{a}$$

6. Умножение на **единицу** не меняет вектор:

$$1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$$

7. Раскрывать скобки можно (**дистрибутивность умножения**):

$$\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}$$

8. Раскрывать скобки можно по всякому (**дистрибутивность умножения**):

$$(\lambda_1 + \lambda_2) \mathbf{a} = \lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{a}$$

Умножение матрицы на вектор

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)

Умножение матрицы на матрицу

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)

Три взгляда на умножение матриц

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)

Решение системы уравнений методом Гаусса

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)

Задача о шахматной доске

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)