Векторы и операторы

Линейный оператор: определение и примеры

Краткий план:

- Определение линейного оператора.

Краткий план:

- Определение линейного оператора.
- Примеры линейных операторов.

Краткий план:

- Определение линейного оператора.
- Примеры линейных операторов.
- Как из двух операторов сделать новый оператор?

Линейный оператор

Идея линейности:

Результат действия не изменится,

если поменять местами действие L и

- растягивание вектора, например, $\mathsf{L}(42a) = 42\,\mathsf{L}(a)$;

Линейный оператор

Идея линейности:

Результат действия не изменится,

если поменять местами действие L и

- растягивание вектора, например, $\mathsf{L}(42a) = 42\,\mathsf{L}(a)$;
- усреднение двух векторов, $\mathsf{L}(0.5a + 0.5b) = 0.5\,\mathsf{L}(a) + 0.5\,\mathsf{L}(b)$.

Стандартное определение линейности

Определение

Линейный оператор L из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^k$.

- Для любого числа t и вектора $a \in \mathbb{R}^n$: $\mathsf{L}(ta) = t\,\mathsf{L}(a)$.

Стандартное определение линейности

Определение

Линейный оператор L из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^k$.

- Для любого числа t и вектора $a \in \mathbb{R}^n$: $\mathsf{L}(ta) = t\,\mathsf{L}(a)$.
- Для любых двух векторов a и b из $\mathbb{R}^n$: $L(a + b) = \mathsf{L}(a) + \mathsf{L}(b)$.

Стандартное определение линейности

Определение

Линейный оператор L из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^k$.

- Для любого числа t и вектора $a \in \mathbb{R}^n$: $\mathsf{L}(ta) = t\,\mathsf{L}(a)$.
- Для любых двух векторов a и b из $\mathbb{R}^n$:
  $L(a + b) = \mathsf{L}(a) + \mathsf{L}(b)$.

Стандартное определение линейности

Определение

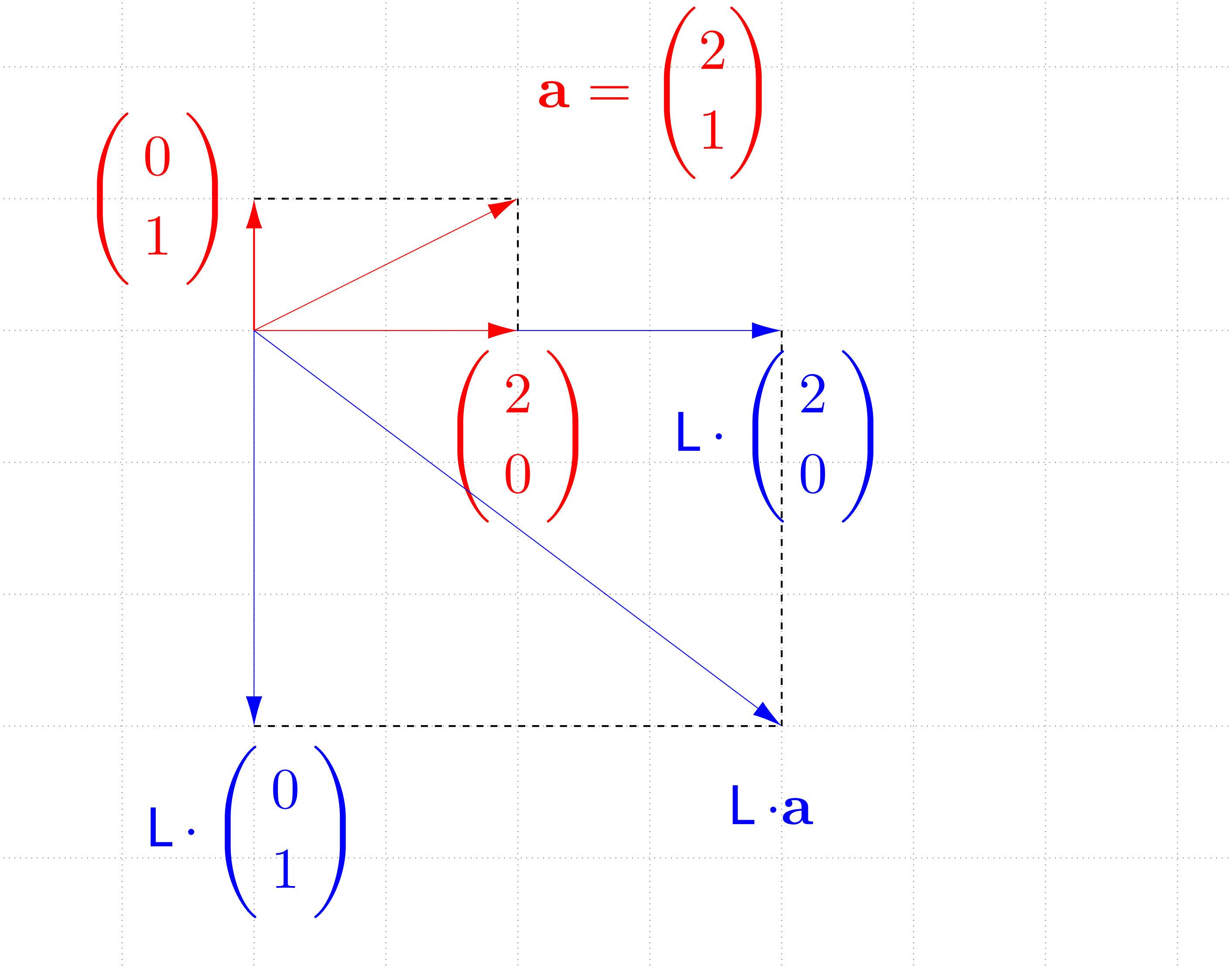
Линейный оператор L из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^k$.

- Для любого числа t и вектора $a \in \mathbb{R}^n$: $\mathsf{L}(ta) = t\,\mathsf{L}(a)$.
- Для любых двух векторов a и b из $\mathbb{R}^n$: $L(a+b) = \mathsf{L}(a) + \mathsf{L}(b)$.

Вместо скобок часто пишут знак умножения,

$\mathsf{L}(a) \equiv \mathsf{L} \cdot a \equiv \mathsf{L}\, a$.

Линейный оператор



Растягивание координат

Обобщаем умножение вектора на число!

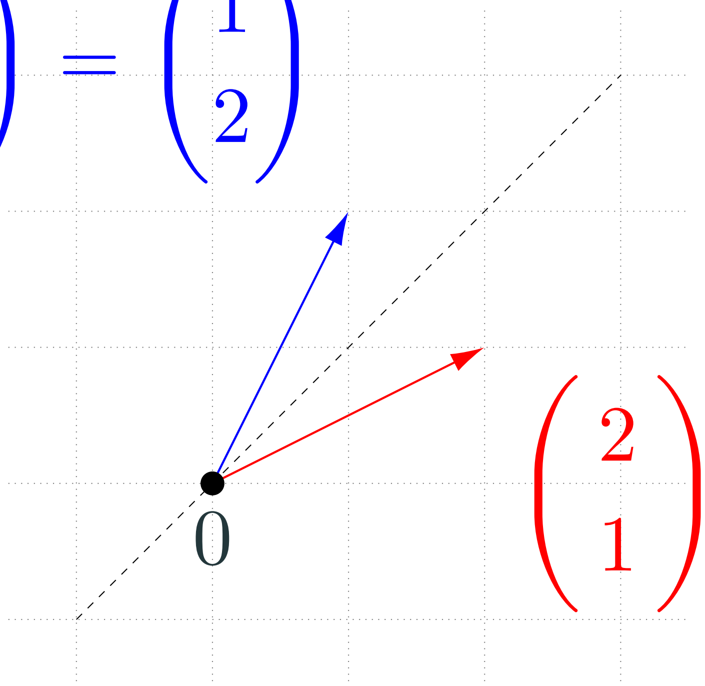
$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$$

Перестановка координат вектора

$$L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

Пример. Отражение относительно $x_1 = x_2$:

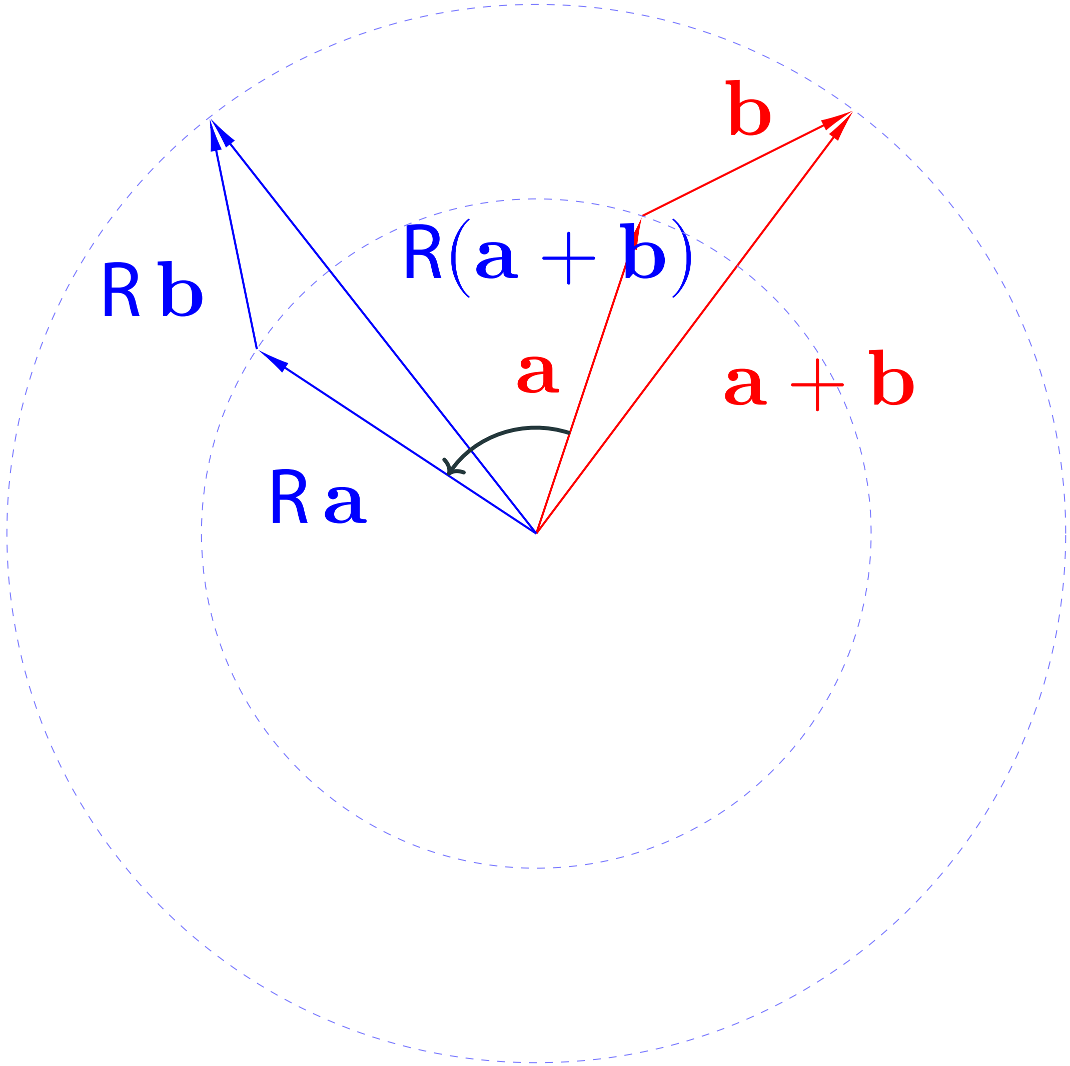
$$\mathsf{L} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$



Первый поворот

Поворот на 30° против часовой стрелки

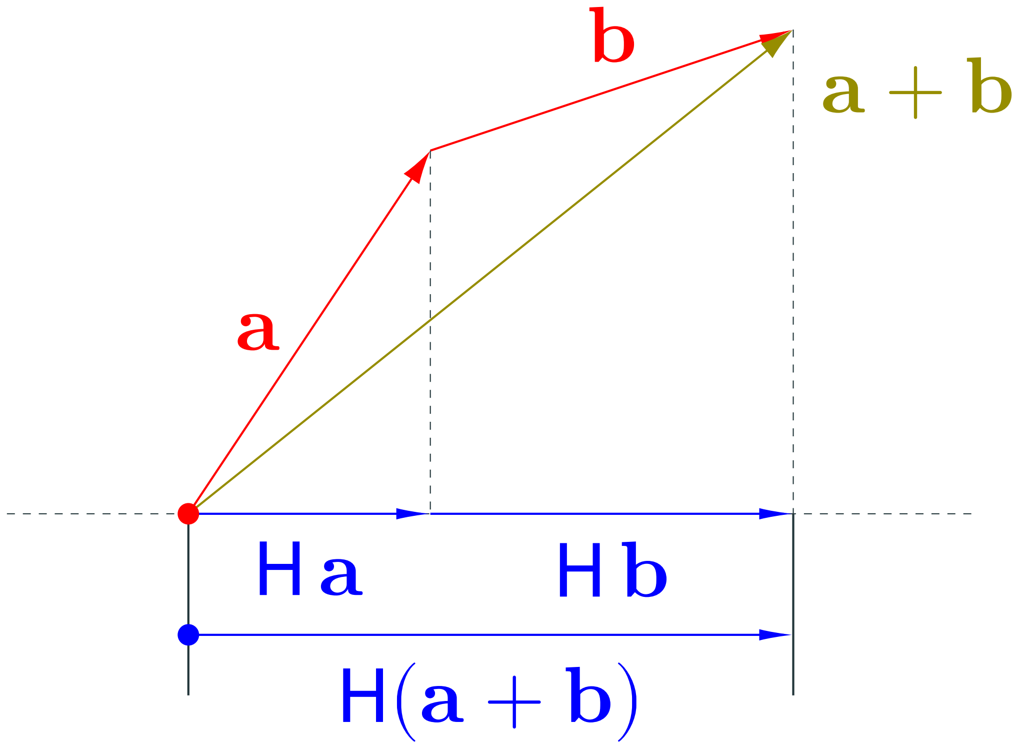
Оператор $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$



Первая проекция

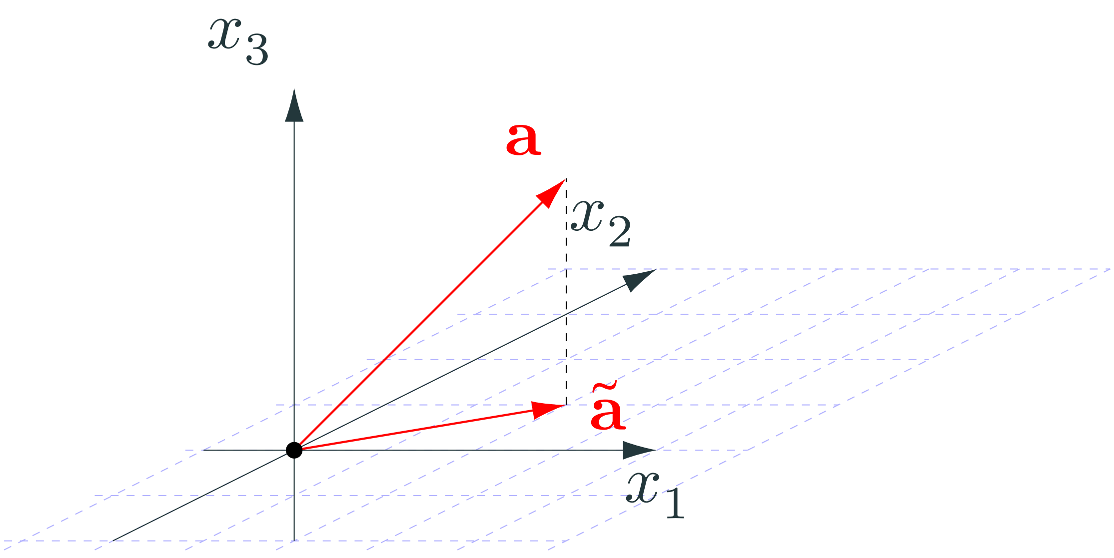
Проекция на прямую $x_1 + 2x_2 = 0$

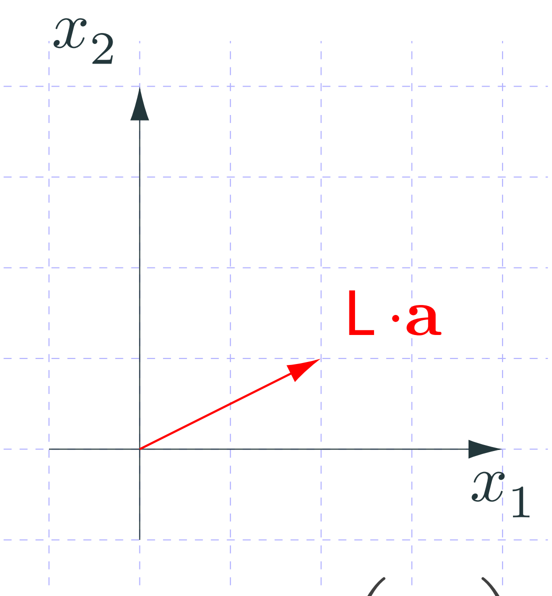
Оператор $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$



Обрезка компонент вектора

Уменьшаем размерность, $\mathsf{L} : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

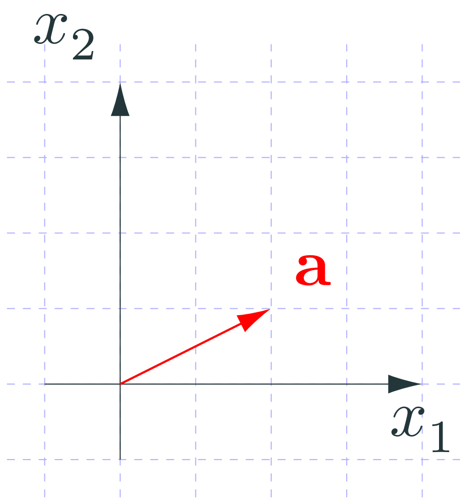




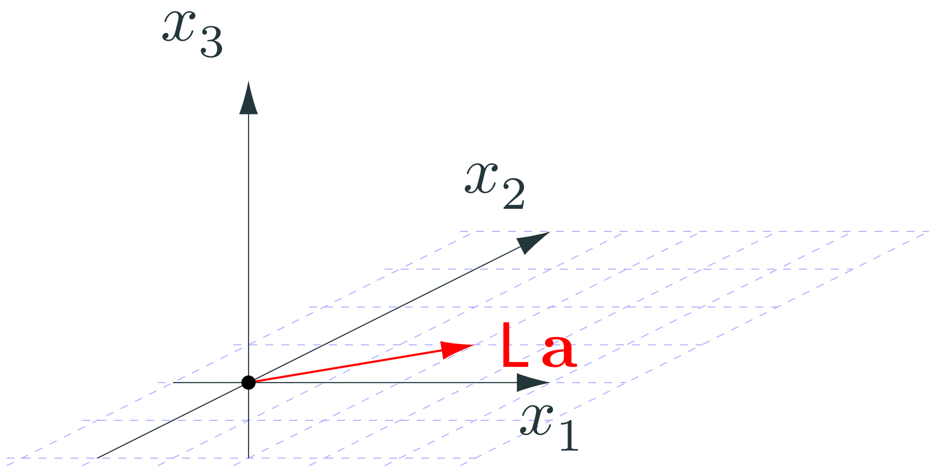
$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad \tilde{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathsf{L}\,\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Дописывание нулей

Увеличиваем размерность пространства, $\mathsf{L}:\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\0\end{pmatrix}$



$$\mathbf{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$$



$$\mathsf{L}\,\mathbf{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\0\end{pmatrix}$$

Ничегонеделание

Определение

Единичный оператор, I, не меняет ни один вектор:

$$I(\mathbf{a}) = \mathbf{a}.$$

Композиция линейных операторов

Делай раз, делай два!

- Если последовательно применить два линейных оператора, то получится линейный оператор, $\mathsf{L}_2(\mathsf{L}_1(\mathbf{a})) = \mathsf{L}(\mathbf{a})$.

Композиция линейных операторов

Делай раз, делай два!

- Если последовательно применить два линейных оператора, то получится линейный оператор, $\mathsf{L}_2(\mathsf{L}_1(\mathbf{a})) = \mathsf{L}(\mathbf{a})$.
- Важно: $\mathsf{L}_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $\mathsf{L}_2 : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$.

Композиция линейных операторов

Делай раз, делай два!

- Если последовательно применить два линейных оператора, то получится линейный оператор, $\mathsf{L}_2(\mathsf{L}_1(\mathbf{a})) = \mathsf{L}(\mathbf{a})$.
- Важно: $\mathsf{L}_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $\mathsf{L}_2 : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$.
- Доказательство

Композиция линейных операторов

Делай раз, делай два!

- Если последовательно применить два линейных оператора, то получится линейный оператор, $\mathsf{L}_2(\mathsf{L}_1(\mathbf{a})) = \mathsf{L}(\mathbf{a})$.
- Важно: $\mathsf{L}_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $\mathsf{L}_2 : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$.
- Доказательство
  - $\mathsf{L}_2(\mathsf{L}_1(t\mathbf{a})) = \mathsf{L}_2(t\,\mathsf{L}_1(\mathbf{a})) = t\,\mathsf{L}_2(\mathsf{L}_1(\mathbf{a}))$

Композиция линейных операторов

Делай раз, делай два!

- Если последовательно применить два линейных оператора, то получится линейный оператор, $\mathsf{L}_2(\mathsf{L}_1(\mathbf{a})) = \mathsf{L}(\mathbf{a})$.
- Важно: $\mathsf{L}_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $\mathsf{L}_2 : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$.
- Доказательство
  - $\mathsf{L}_2(\mathsf{L}_1(t\mathbf{a})) = \mathsf{L}_2(t\,\mathsf{L}_1(\mathbf{a})) = t\,\mathsf{L}_2(\mathsf{L}_1(\mathbf{a}))$
  - $\mathsf{L}_2(\mathsf{L}_1(\mathbf{a}+\mathbf{b})) = \mathsf{L}_2(\mathsf{L}_1(\mathbf{a}) + \mathsf{L}_1(\mathbf{b})) = \mathsf{L}_2(\mathsf{L}_1(\mathbf{a})) + \mathsf{L}_2(\mathsf{L}_1(\mathbf{b}))$

Композиция линейных операторов

Делай раз, делай два!

- Если последовательно применить два линейных оператора, то получится линейный оператор, $\mathsf{L}_2(\mathsf{L}_1(\mathbf{a})) = \mathsf{L}(\mathbf{a})$.
- Важно: $\mathsf{L}_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $\mathsf{L}_2 : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$.
- Доказательство
  - $\mathsf{L}_2(\mathsf{L}_1(t\mathbf{a})) = \mathsf{L}_2(t\,\mathsf{L}_1(\mathbf{a})) = t\,\mathsf{L}_2(\mathsf{L}_1(\mathbf{a}))$
  - $\mathsf{L}_2(\mathsf{L}_1(\mathbf{a}+\mathbf{b})) = \mathsf{L}_2(\mathsf{L}_1(\mathbf{a}) + \mathsf{L}_1(\mathbf{b})) = \mathsf{L}_2(\mathsf{L}_1(\mathbf{a})) + \mathsf{L}_2(\mathsf{L}_1(\mathbf{b}))$
- Композицию также называют умножением.

Сумма линейных операторов

- Если сложить результаты двух линейных операторов, то получится линейный линейный оператор, $\mathsf{L}_1(\mathbf{a}) + \mathsf{L}_2(\mathbf{a}) = \mathsf{L}(\mathbf{a})$.

Сумма линейных операторов

- Если сложить результаты двух линейных операторов, то получится линейный линейный оператор, $\mathsf{L}_1(\mathbf{a}) + \mathsf{L}_2(\mathbf{a}) = \mathsf{L}(\mathbf{a})$.
- Важно: $\mathsf{L}_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $\mathsf{L}_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$.

Сумма линейных операторов

- Если сложить результаты двух линейных операторов, то получится линейный линейный оператор, $\mathsf{L}_1(\mathbf{a}) + \mathsf{L}_2(\mathbf{a}) = \mathsf{L}(\mathbf{a})$.
- Важно: $\mathsf{L}_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $\mathsf{L}_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$.
- Доказательство

Сумма линейных операторов

- Если сложить результаты двух линейных операторов, то получится линейный линейный оператор, $\mathsf{L}_1(\mathbf{a}) + \mathsf{L}_2(\mathbf{a}) = \mathsf{L}(\mathbf{a})$.
- Важно: $\mathsf{L}_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $\mathsf{L}_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$.
- Доказательство
  - $\mathsf{L}_1(t\mathbf{a}) + \mathsf{L}_2(t\mathbf{a}) = t\,\mathsf{L}_1(\mathbf{a}) + t\,\mathsf{L}_2(\mathbf{a}) = t(\mathsf{L}_1(\mathbf{a}) + \mathsf{L}_2(\mathbf{a}))$

Сумма линейных операторов

- Если сложить результаты двух линейных операторов, то получится линейный линейный оператор, $\mathsf{L}_1(\mathbf{a}) + \mathsf{L}_2(\mathbf{a}) = \mathsf{L}(\mathbf{a})$.
- Важно: $\mathsf{L}_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $\mathsf{L}_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$.
- Доказательство
  - $\mathsf{L}_1(t\mathbf{a}) + \mathsf{L}_2(t\mathbf{a}) = t\,\mathsf{L}_1(\mathbf{a}) + t\,\mathsf{L}_2(\mathbf{a}) = t(\mathsf{L}_1(\mathbf{a}) + \mathsf{L}_2(\mathbf{a}))$
  - $\mathsf{L}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \mathsf{L}_1(\mathbf{a}+\mathbf{b}) + \mathsf{L}_2(\mathbf{a}+\mathbf{b}) =$ $\mathsf{L}_1(\mathbf{a}) + \mathsf{L}_2(\mathbf{a}) + \mathsf{L}_1(\mathbf{b}) + \mathsf{L}_2(\mathbf{b}) = \mathsf{L}(\mathbf{a}) + \mathsf{L}(\mathbf{b})$