

# Определитель и обратная матрица

**Идея определителя**

# Краткий план:

- Определитель на плоскости;

# Краткий план:

- Определитель на плоскости;
- Определитель в пространстве.

# Идея определителя

Рассмотрим оператор преобразования плоскости,  
 $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

Пара векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  переходит в пару векторов  $L \mathbf{a}$ ,  $L \mathbf{b}$ .

# Идея определителя

Рассмотрим оператор преобразования плоскости,  
 $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

Пара векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  переходит в пару векторов  $L \mathbf{a}$ ,  $L \mathbf{b}$ .

Как меняется площадь параллелограмма образованного двумя векторами?

# Идея определителя

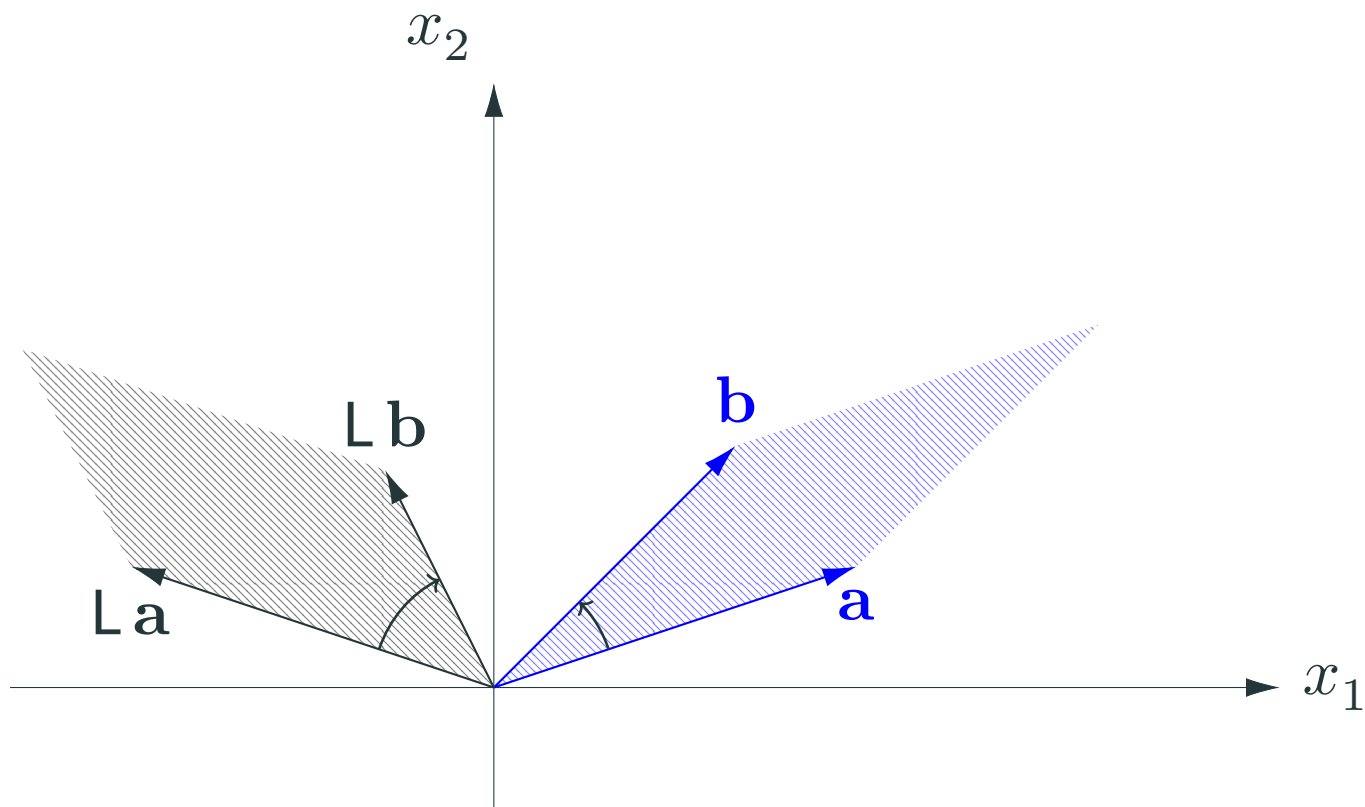
Рассмотрим оператор преобразования плоскости,  
 $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

Пара векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  переходит в пару векторов  $L \mathbf{a}$ ,  $L \mathbf{b}$ .

Как меняется площадь параллелограмма образованного двумя векторами?

Меняется ли направление поворота от первого вектора ко второму?

# Идея определителя на картинке





# Ориентированная площадь

## Определение

Возьмём площадь параллелограмма со сторонами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ . Если поворот от первого вектора ко второму идёт по часовой стрелке, то дополнительно домножим площадь на  $(-1)$ .

Полученное число назовём **ориентированной площадью** параллелограмма и обозначим  $S(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ .

# Ориентированная площадь

## Определение

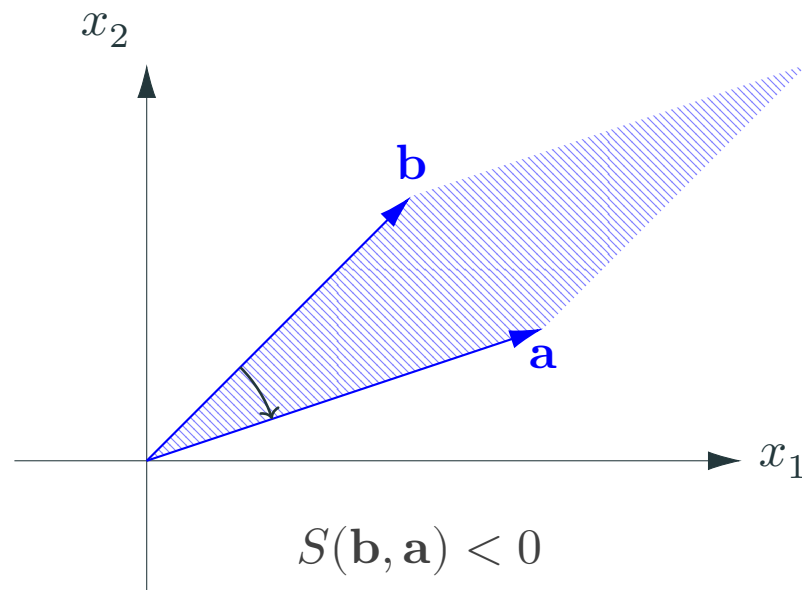
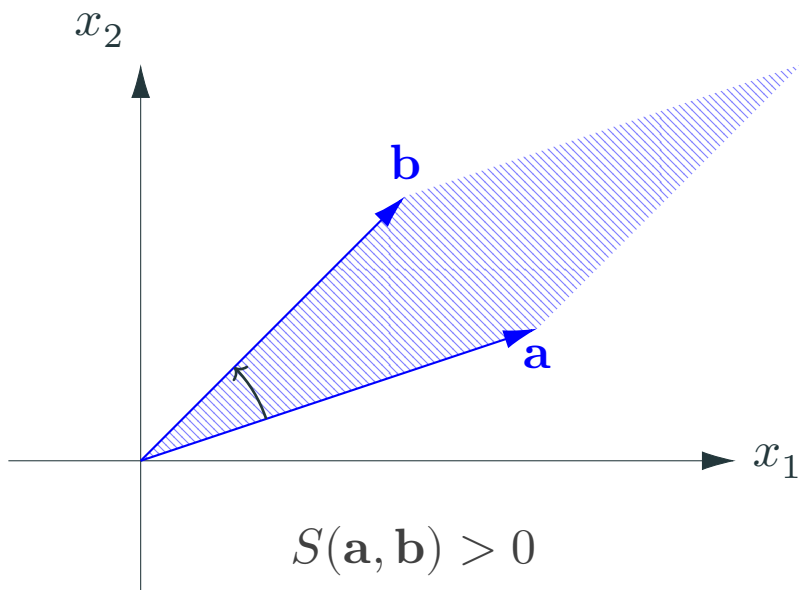
Возьмём площадь параллелограмма со сторонами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ . Если поворот от первого вектора ко второму идёт по часовой стрелке, то дополнительно домножим площадь на  $(-1)$ .

Полученное число назовём **ориентированной площадью** параллелограмма и обозначим  $S(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ .

Важен порядок векторов:

$$S(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -S(\mathbf{b}, \mathbf{a}).$$

# Ориентированная площадь



# Идея определителя

## Определение

Возьмём любые два вектора  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , для которых  $S(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \neq 0$ .

**Определитель** оператора  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  показывает во сколько раз изменяется ориентированная площадь

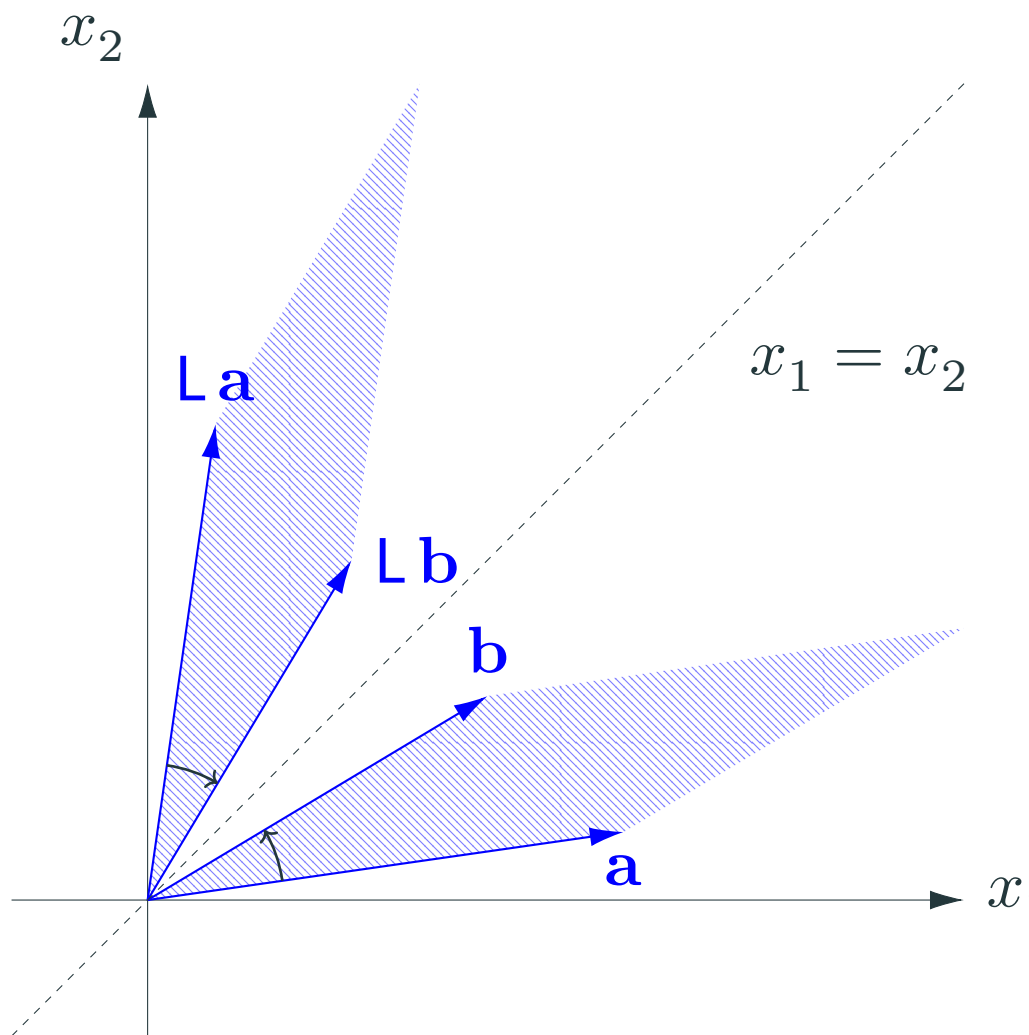
$$\det L = \frac{S(L \mathbf{a}, L \mathbf{b})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b})}$$

# Определитель отражения

Оператор  $L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$  отражает относительно  
 $x_1 = x_2$ .

# Определитель отражения

Оператор  $L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$  отражает относительно  $x_1 = x_2$ .



# Определитель отражения

Оператор  $L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$  отражает относительно  
 $x_1 = x_2$ .

# Определитель отражения

Оператор  $L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$  отражает относительно  $x_1 = x_2$ .

Площадь параллелограмма не изменяется.

Меняется направление поворота от первого вектора ко второму.



# Определитель отражения

Оператор  $L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$  отражает относительно  $x_1 = x_2$ .

Площадь параллелограмма не изменяется.

Меняется направление поворота от первого вектора ко второму.

$$\det L = \frac{S(L \mathbf{a}, L \mathbf{b})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b})} = -1$$

# Определитель растягивания компонент

Рассмотрим оператор  $L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$ .

# Определитель растягивания компонент

Рассмотрим оператор  $L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$ .

Одна сторона растягивается в два раза, вторая — в три раза.

Меняется направление поворота от первого вектора ко второму.

# Определитель растягивания компонент

Рассмотрим оператор  $L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$ .

Одна сторона растягивается в два раза, вторая — в три раза.

Меняется направление поворота от первого вектора ко второму.

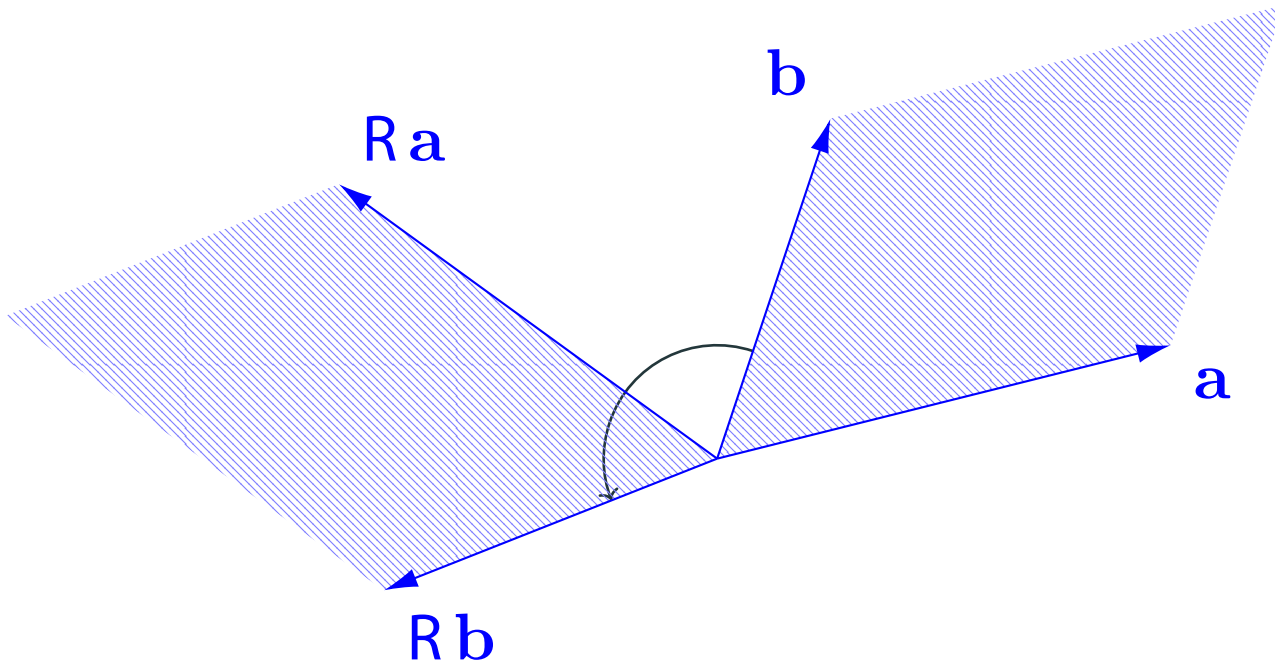
$$\det L = \frac{S(L \mathbf{a}, L \mathbf{b})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b})} = (-1) \cdot 2 \cdot 3 = -6$$

# Определитель поворота

Оператор  $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  вращает плоскость.

# Определитель поворота

Оператор  $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  вращает плоскость.



# Определитель поворота

Оператор  $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  вращает плоскость.

# Определитель поворота

Оператор  $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  вращает плоскость.

При вращении не изменяется площадь параллелограмма.

При вращении не изменяется направление поворота от первого вектора ко второму.



# Определитель поворота

Оператор  $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  вращает плоскость.

При вращении не изменяется площадь параллелограмма.

При вращении не изменяется направление поворота от первого вектора ко второму.

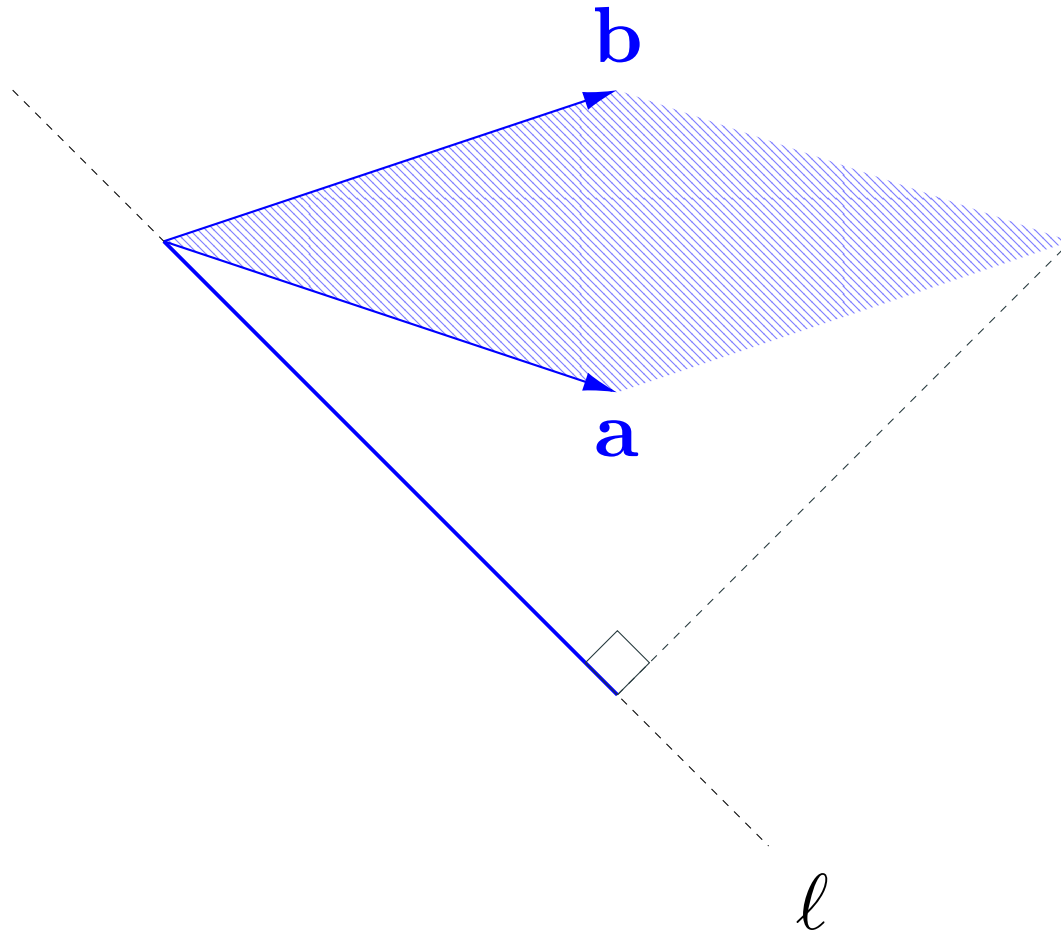
$$\det R = \frac{S(R\mathbf{a}, R\mathbf{b})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b})} = 1$$

# Определитель проекции

Оператор  $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  проецирует векторы на прямую  $\ell$ .

# Определитель проекции

Оператор  $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  проецирует векторы на прямую  $\ell$ .



# Определитель проекции

Оператор  $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  проецирует векторы на прямую  $\ell$ .

# Определитель проекции

Оператор  $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  проецирует векторы на прямую  $\ell$ .  
При проекции любой параллелограмм «складывается» в отрезок нулевой площади.

$$\det H = \frac{S(H\mathbf{a}, H\mathbf{b})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b})} = 0$$

# Чем прекрасна ориентированная площадь?

## Утверждение

Ориентированная площадь  $S(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  линейна по каждому аргументу:

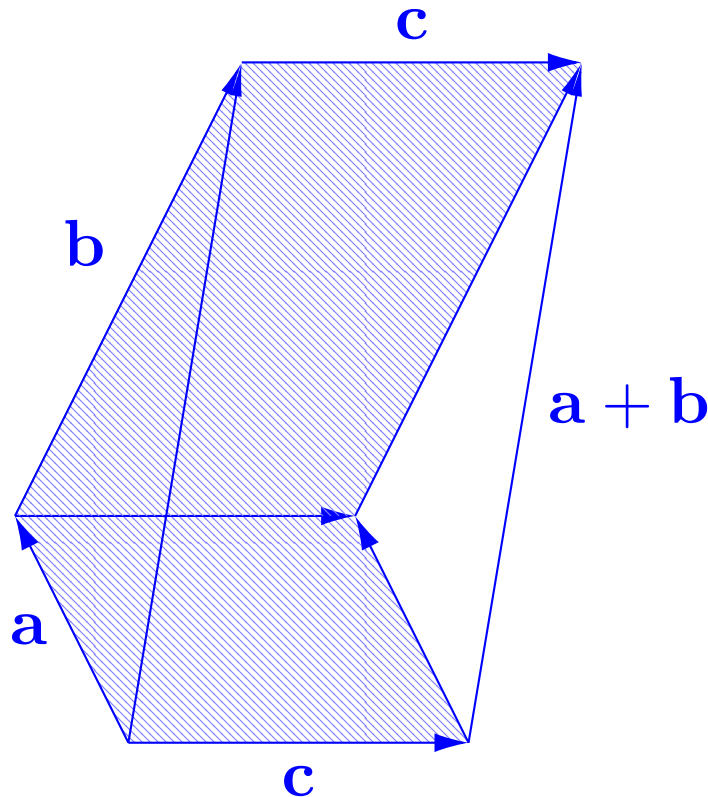
$$S(\lambda \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \lambda S(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \quad S(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}) = S(\mathbf{a}, \mathbf{c}) + S(\mathbf{b}, \mathbf{c})$$

# Чем прекрасна ориентированная площадь?

## Утверждение

Ориентированная площадь  $S(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  линейна по каждому аргументу:

$$S(\lambda \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \lambda S(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \quad S(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}) = S(\mathbf{a}, \mathbf{c}) + S(\mathbf{b}, \mathbf{c})$$



# Корректность идеи определителя

Величина  $\det L = \frac{S(L\mathbf{a}, L\mathbf{b})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b})}$  не зависит от выбора  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ !



# Корректность идеи определителя

Величина  $\det L = \frac{S(L \mathbf{a}, L \mathbf{b})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b})}$  не зависит от выбора  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ !

## Идея доказательства

Обозначим  $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

# Корректность идеи определителя

Величина  $\det L = \frac{S(L \mathbf{a}, L \mathbf{b})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b})}$  не зависит от выбора  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ !

## Идея доказательства

Обозначим  $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Возьмём  $\mathbf{a} = 5\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2$ . Найдём  $S(L \mathbf{a}, L \mathbf{e}_2)/S(\mathbf{a}, \mathbf{e}_2)$ :

# Корректность идеи определителя

Величина  $\det L = \frac{S(L \mathbf{a}, L \mathbf{b})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b})}$  не зависит от выбора  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ !

## Идея доказательства

Обозначим  $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Возьмём  $\mathbf{a} = 5\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2$ . Найдём  $S(L \mathbf{a}, L \mathbf{e}_2)/S(\mathbf{a}, \mathbf{e}_2)$ :

$$\frac{S(L(5\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2), L \mathbf{e}_2)}{S(5\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2)} = \frac{S(L 5\mathbf{e}_1, L \mathbf{e}_2) + S(L 7\mathbf{e}_2, L \mathbf{e}_2)}{S(5\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + S(7\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2)} =$$

# Корректность идеи определителя

Величина  $\det L = \frac{S(L \mathbf{a}, L \mathbf{b})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b})}$  не зависит от выбора  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ !

## Идея доказательства

Обозначим  $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Возьмём  $\mathbf{a} = 5\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2$ . Найдём  $S(L \mathbf{a}, L \mathbf{e}_2)/S(\mathbf{a}, \mathbf{e}_2)$ :

$$\begin{aligned} \frac{S(L(5\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2), L \mathbf{e}_2)}{S(5\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2)} &= \frac{S(L 5\mathbf{e}_1, L \mathbf{e}_2) + S(L 7\mathbf{e}_2, L \mathbf{e}_2)}{S(5\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + S(7\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2)} = \\ &= \frac{5S(L \mathbf{e}_1, L \mathbf{e}_2) + 0}{5S(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + 0} = \frac{S(L \mathbf{e}_1, L \mathbf{e}_2)}{S(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)} \end{aligned}$$

# Ещё один взгляд на определитель

Обозначим  $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

# Ещё один взгляд на определитель

Обозначим  $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

## Определение

Преобразуем параллелограмм, образованный векторами  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$ , с помощью оператора  $L$ .

Определитель линейного оператора  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  равен ориентированной площади полученного параллелограмма.

$$\det L = S(L \mathbf{e}_1, L \mathbf{e}_2)$$

# Определитель в пространстве

Идея: заменим ориентированную площадь параллелограмма  $S(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  на ориентированный объём параллелепипеда  $S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ .

# Определитель в пространстве

Идея: заменим ориентированную площадь параллелограмма  $S(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  на ориентированный объём параллелепипеда  $S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ .

## Определение

Возьмём любые три вектора  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$ , для которых  $S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \neq 0$ .

**Определитель** оператора  $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  показывает во сколько раз изменяется ориентированный объём

$$\det L = \frac{S(L \mathbf{a}, L \mathbf{b}, L \mathbf{c})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}$$



**А что такое ориентированный объём?**

# А что такое ориентированный объём?

Обозначим  $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

# А что такое ориентированный объём?

Обозначим  $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

## Определение

Рассмотрим параллелепипед, образованный  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$ .

# А что такое ориентированный объём?

Обозначим  $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

## Определение

Рассмотрим параллелепипед, образованный  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$ .

С помощью поворота:

Совместим вектор  $\mathbf{e}_1$  с вектором  $\mathbf{a}$ ;

Затем вектор  $\mathbf{e}_2$  «положим» в плоскость  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ .

# А что такое ориентированный объём?

$$\text{Обозначим } \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

## Определение

Рассмотрим параллелепипед, образованный  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$ .

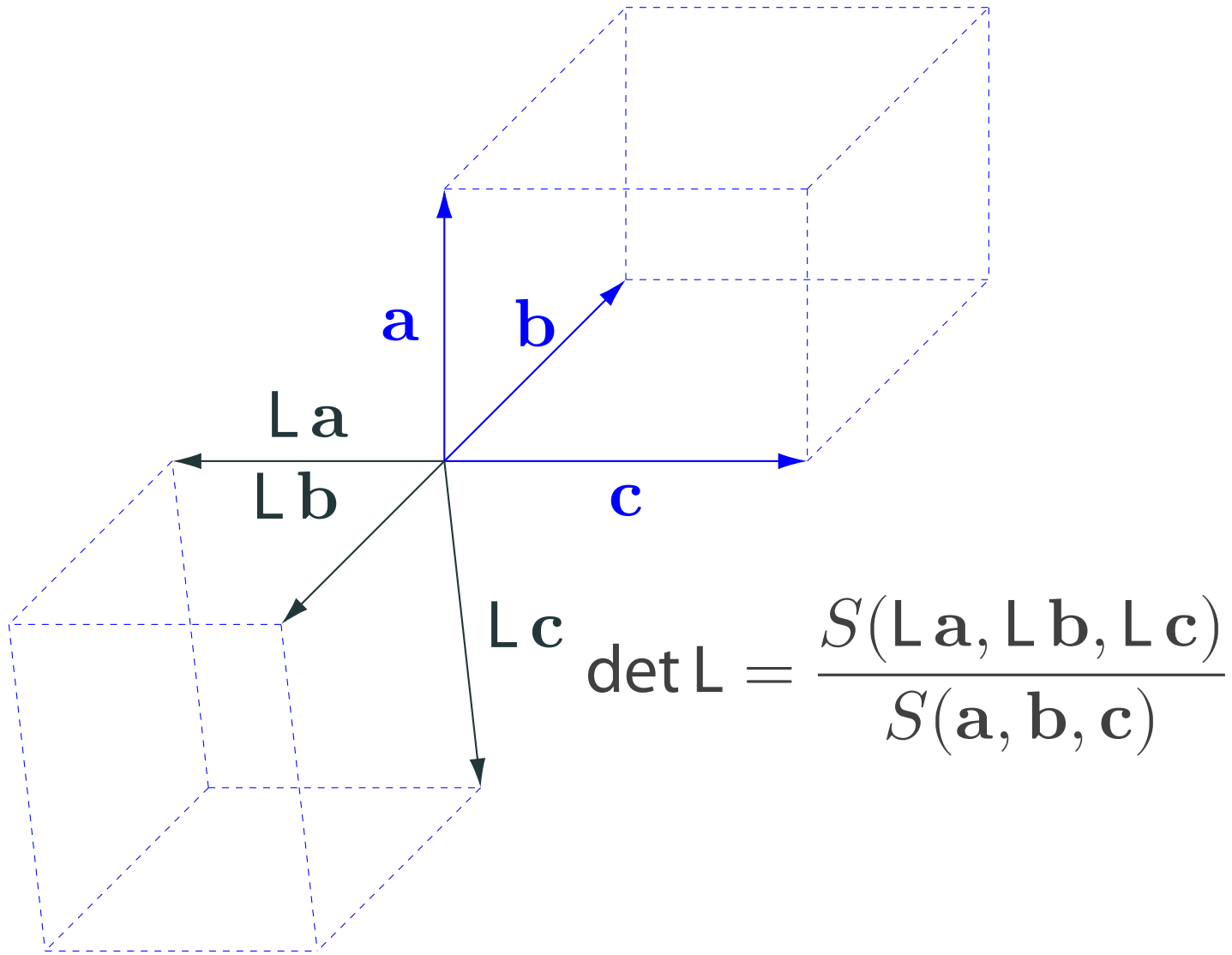
С помощью поворота:

Совместим вектор  $\mathbf{e}_1$  с вектором  $\mathbf{a}$ ;

Затем вектор  $\mathbf{e}_2$  «положим» в плоскость  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ .

**Ориентированный объём**  $S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$  объявим отрицательным, если векторы  $\mathbf{e}_3$  и  $\mathbf{c}$  смотрят в разные полупространства.

# Определитель в пространстве



# Определитель растягивания компонент

Рассмотрим оператор  $L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2a_1 \\ 3a_2 \\ -5a_3 \end{pmatrix}.$

# Определитель растягивания компонент

Рассмотрим оператор  $L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2a_1 \\ 3a_2 \\ -5a_3 \end{pmatrix}$ .

Одна сторона растягивается в два раза, вторая — в три раза, третья — в пять.

Первые два вектора не изменяют направления при преобразовании.

Третий вектор меняет полупространство, в котором он лежит относительно первых двух.



# Определитель растягивания компонент

Рассмотрим оператор  $L : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2a_1 \\ 3a_2 \\ -5a_3 \end{pmatrix}$ .

Одна сторона растягивается в два раза, вторая — в три раза, третья — в пять.

Первые два вектора не изменяют направления при преобразовании.

Третий вектор меняет полупространство, в котором он лежит относительно первых двух.

$$\det L = \frac{S(L \mathbf{a}, L \mathbf{b}, L \mathbf{c})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})} = (-1) \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = -30$$

# Определитель проекции

Оператор  $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  проецирует векторы на плоскость  $\alpha$ .

# Определитель проекции

Оператор  $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  проецирует векторы на плоскость  $\alpha$ .  
Любой параллелепипед «схлопывается» в плоскую фигуру нулевого объёма.

# Определитель проекции

Оператор  $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  проецирует векторы на плоскость  $\alpha$ .  
Любой параллелепипед «схлопывается» в плоскую фигуру нулевого объёма.

$$\det H = \frac{S(H\mathbf{a}, H\mathbf{b}, H\mathbf{c})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})} = 0$$

# Свойства определителя

# Краткий план:

- Ориентированный объём в  $\mathbb{R}^n$ ;

# Краткий план:

- Ориентированный объём в  $\mathbb{R}^n$ ;
- Свойства определителя;

# Краткий план:

- Ориентированный объём в  $\mathbb{R}^n$ ;
- Свойства определителя;
- Явная формула для определителя.



# Формализация ориентированного объёма

Вектор  $e_i$  содержит на  $i$ -м месте единицу, а на остальных — нули.

# Формализация ориентированного объёма

Вектор  $e_i$  содержит на  $i$ -м месте единицу, а на остальных — нули.

1. Верный гипер-объём базового гипер-кубика:

$$S(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1$$

# Формализация ориентированного объёма

Вектор  $\mathbf{e}_i$  содержит на  $i$ -м месте единицу, а на остальных — нули.

1. Верный гипер-объём базового гипер-кубика:

$$S(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) = 1$$

2. Линейность по каждому аргументу:

$$S(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n) = S(\mathbf{a}, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n) + S(\mathbf{b}, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n)$$

$$S(\lambda \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n) = \lambda S(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n)$$

# Формализация ориентированного объёма

Вектор  $\mathbf{e}_i$  содержит на  $i$ -м месте единицу, а на остальных — нули.

1. Верный гипер-объём базового гипер-кубика:

$$S(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) = 1$$

2. Линейность по каждому аргументу:

$$S(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n) = S(\mathbf{a}, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n) + S(\mathbf{b}, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n)$$

$$S(\lambda \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n) = \lambda S(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n)$$

3. Антисимметричность:

$$S(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n) = -S(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n)$$

# Определитель во всей $n$ -мерности

## Определение

Возьмём векторы  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ , для которых  $S(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \neq 0$ .

**Определитель** оператора  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  показывает во сколько раз изменяется ориентированный гипер-объём произвольного параллелепипеда:

$$\det L = \frac{S(L \mathbf{v}_1, \dots, L \mathbf{v}_n)}{S(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)}$$

# Определитель во всей $n$ -мерности

## Определение

Возьмём векторы  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ , для которых  $S(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \neq 0$ .

**Определитель** оператора  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  показывает во сколько раз изменяется ориентированный гипер-объём произвольного параллелепипеда:

$$\det L = \frac{S(L \mathbf{v}_1, \dots, L \mathbf{v}_n)}{S(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)}$$

## Определение

**Определитель** оператора  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  показывает во сколько раз изменяется ориентированный гипер-объём базового гипер-кубика:

$$\det L = S(L \mathbf{e}_1, \dots, L \mathbf{e}_n)$$

# Определитель матрицы

## Определение

Определителем матрицы называется определитель соответствующего линейного оператора.

# Определитель матрицы

## Определение

Определителем матрицы называется определитель соответствующего линейного оператора.

В матрице  $L$   $i$ -й столбец равен  $L e_i$ , поэтому

$$\det L = S(\operatorname{col}_1 L, \operatorname{col}_2 L, \dots, \operatorname{col}_n L)$$



# Определитель матрицы

## Определение

Определителем матрицы называется определитель соответствующего линейного оператора.

В матрице  $L$   $i$ -й столбец равен  $L e_i$ , поэтому

$$\det L = S(\text{col}_1 L, \text{col}_2 L, \dots, \text{col}_n L)$$

## Утверждение

Определитель матрицы можно считать по строкам:

$$\det L = S(\text{row}_1 L, \text{row}_2 L, \dots, \text{row}_n L)$$

Определитель обозначают  $\det L$  или  $|L|$ .

# Быстрые признаки равенства нулю

1. Если среди векторов есть два одинаковых, то гипер-объём параллелепипеда равен нулю.

$$S(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n) = 0$$

# Быстрые признаки равенства нулю

1. Если среди векторов есть два одинаковых, то гипер-объём параллелепипеда равен нулю.

$$S(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n) = 0$$

2. Если среди векторов есть один нулевой, то гипер-объём параллелепипеда равен нулю.

$$S(\mathbf{0}, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n) = 0$$

# Принцип Кавальери

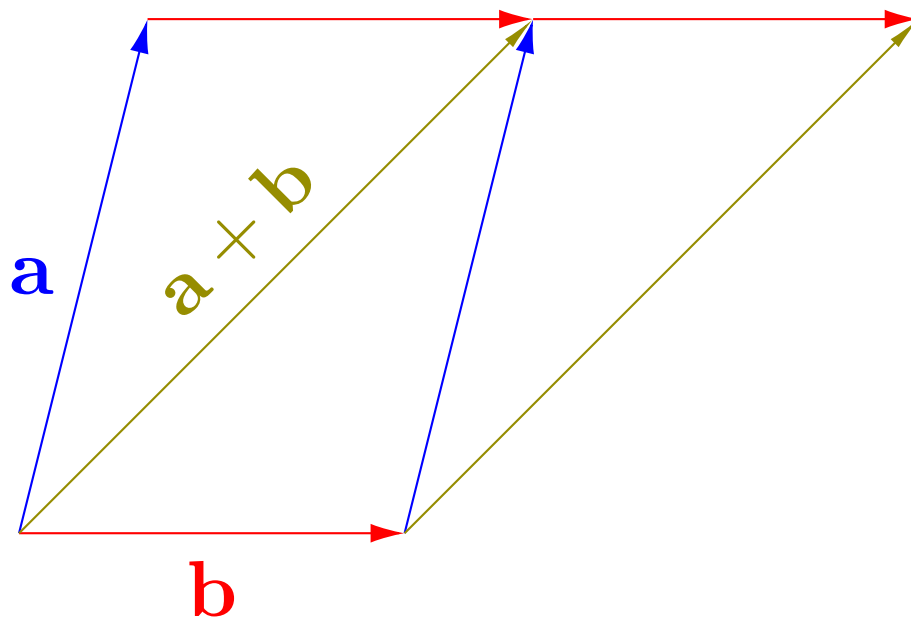
«Скашивание» параллелепипеда вбок не изменяет гипер-объём:

$$S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n) = S(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{b}, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n)$$

# Принцип Кавальери

«Скашивание» параллелепипеда вбок не изменяет гипер-объём:

$$S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n) = S(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{b}, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n)$$



# Принцип Кавальери на матрице

Единственным ненулевым элементом столбца можно «скосить» всю строку:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} =$$

# Принцип Кавальери на матрице

Единственным ненулевым элементом столбца можно «скосить» всю строку:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} =$$

# Принцип Кавальери на матрице

Единственным ненулевым элементом столбца можно «СКОСИТЬ» всю строку:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix}$$



# Принцип Кавальери на матрице

Единственным ненулевым элементом столбца можно «СКОСИТЬ» всю строку:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix}$$

Единственным ненулевым элементом строки можно «СКОСИТЬ» весь столбец:

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix} =$$

# Принцип Кавальери на матрице

Единственным ненулевым элементом столбца можно «СКОСИТЬ» всю строку:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix}$$

Единственным ненулевым элементом строки можно «СКОСИТЬ» весь столбец:

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix} =$$

# Принцип Кавальери на матрице

Единственным ненулевым элементом столбца можно «СКОСИТЬ» всю строку:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix}$$

Единственным ненулевым элементом строки можно «СКОСИТЬ» весь столбец:

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix}$$

# Определитель и ранг

## Утверждение

Для матрицы  $L$  размера  $n \times n$  четыре свойства эквиваленты:

1. Определитель равен нулю,  $\det L = 0$ .

# Определитель и ранг

## Утверждение

Для матрицы  $L$  размера  $n \times n$  четыре свойства эквиваленты:

1. Определитель равен нулю,  $\det L = 0$ .
2. Столбцы матрицы линейно зависимы.

# Определитель и ранг

## Утверждение

Для матрицы  $L$  размера  $n \times n$  четыре свойства эквиваленты:

1. Определитель равен нулю,  $\det L = 0$ .
2. Столбцы матрицы линейно зависимы.
3. Строки матрицы линейно зависимы.

# Определитель и ранг

## Утверждение

Для матрицы  $L$  размера  $n \times n$  четыре свойства эквиваленты:

1. Определитель равен нулю,  $\det L = 0$ .
2. Столбцы матрицы линейно зависимы.
3. Строки матрицы линейно зависимы.
4. Ранг матрицы меньше числа столбцов,  $\text{rank } L < n$ .

# Определитель композиции

## Утверждение

Определитель композиции  $A$  и  $B$  равен произведению определителей:

$$\det(AB) = \det A \det B$$



# Определитель композиции

## Утверждение

Определитель композиции  $A$  и  $B$  равен произведению определителей:

$$\det(AB) = \det A \det B$$

## Следствие

$$\det A \det A^{-1} = \det(A \cdot A^{-1}) = \det I = 1$$

# Спокойствие, только спокойствие!

## Утверждение

Свойства нормировки, линейности по аргументам и антисимметричности однозначно определяют функцию гипер-объёма  $S(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ .

# Спокойствие, только спокойствие!

## Утверждение

Свойства нормировки, линейности по аргументам и антисимметричности однозначно определяют функцию гипер-объёма  $S(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ .

## Утверждение

Отношение гипер-объёмов  $\det L = \frac{S(L \mathbf{v}_1, \dots, L \mathbf{v}_n)}{S(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)}$  не зависит от выбора  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ .

# Формула с перестановками

## Определение

**Перестановкой** называют последовательность из  $n$  чисел, в которой каждое число от 1 до  $n$  встречается ровно один раз.

# Формула с перестановками

## Определение

**Перестановкой** называют последовательность из  $n$  чисел, в которой каждое число от 1 до  $n$  встречается ровно один раз.

Примеры:  $(12345)$ ,  $(32145)$ ,  $(21354)$ .

# Формула с перестановками

## Определение

**Перестановкой** называют последовательность из  $n$  чисел, в которой каждое число от 1 до  $n$  встречается ровно один раз.

Примеры:  $(12345)$ ,  $(32145)$ ,  $(21354)$ .

## Определение

Перестановку называют **чётной**, если требуется чётное число смен местами двух чисел, чтобы привести перестановку к  $(1234 \dots n)$ .

Если  $\sigma$  — чётная перестановка, то пишут  $\text{sign } \sigma = 1$ , для нечётной пишут  $\text{sign } \sigma = -1$ .

# Формула с перестановками

## Определение

**Перестановкой** называют последовательность из  $n$  чисел, в которой каждое число от 1 до  $n$  встречается ровно один раз.

Примеры:  $(12345)$ ,  $(32145)$ ,  $(21354)$ .

## Определение

Перестановку называют **чётной**, если требуется чётное число смен местами двух чисел, чтобы привести перестановку к  $(1234 \dots n)$ .

Если  $\sigma$  — чётная перестановка, то пишут  $\text{sign } \sigma = 1$ , для нечётной пишут  $\text{sign } \sigma = -1$ .

Примеры:

$$\text{sign}(12345) = 1, \text{sign}(32145) = -1, \text{sign}(21354) = 1.$$

# Расстановка ладей!

Рассмотрим квадратную матрицу.

Перестановку  $\sigma$  будем трактовать как инструкцию, какой элемент взять из очередной строки матрицы.

$$(3124) \sim \begin{pmatrix} . & . & * & . \\ * & . & . & . \\ . & * & . & . \\ . & . & . & * \end{pmatrix}$$



# Расстановка ладей!

Рассмотрим квадратную матрицу.

Перестановку  $\sigma$  будем трактовать как инструкцию, какой элемент взять из очередной строки матрицы.

$$(3124) \sim \begin{pmatrix} . & . & * & . \\ * & . & . & . \\ . & * & . & . \\ . & . & . & * \end{pmatrix}$$

С помощью  $p(\sigma)$  обозначим произведение этих элементов.

Например,  $p(3124) = a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{44}$ .

# Явная формула

## Утверждение

Трёх свойствам определителя (нормировке, линейности, антисимметричности) удовлетворяет единственная функция

$$\det L = \sum_{\sigma} \text{sign}(\sigma) \cdot p(\sigma).$$

Перестановку  $\sigma$  трактуем как инструкцию, какой элемент взять из очередной строки матрицы.

С помощью  $p(\sigma)$  обозначено произведение этих элементов.

# Иллюстрация для $2 \times 2$

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} =$$

# Иллюстрация для $2 \times 2$

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix}_{\text{sign}(12)=1} - \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}_{\text{sign}(21)=-1} =$$

# Иллюстрация для $2 \times 2$

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \underset{\text{sign}(12)=1}{\begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix}} - \underset{\text{sign}(21)=-1}{\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}} = ad - bc$$

# Иллюстрация для $3 \times 3$

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} =$$

# Иллюстрация для $3 \times 3$

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \\ = + \begin{pmatrix} a & & \\ & e & \\ & & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & & c \\ d & & \\ & h & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & b & \\ & & f \\ g & & \end{pmatrix} \\ \text{sign}(123)=1 \quad \text{sign}(312)=1 \quad \text{sign}(231)=1 \\ - \begin{pmatrix} & & c \\ & e & \\ g & & \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} & b & \\ d & & \\ & & i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & & \\ & & f \\ & h & \end{pmatrix} = \\ \text{sign}(321)=-1 \quad \text{sign}(213)=-1 \quad \text{sign}(132)=-1 \end{aligned}$$

# Иллюстрация для $3 \times 3$

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} &= \\ &= + \begin{pmatrix} a & & \\ & e & \\ & & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & & c \\ d & & \\ & h & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & b & \\ & & f \\ g & & \end{pmatrix} \\ &\quad \text{sign}(123)=1 \quad \text{sign}(312)=1 \quad \text{sign}(231)=1 \\ &- \begin{pmatrix} & & c \\ & e & \\ g & & \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} & b & \\ d & & \\ & & i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & & \\ & & f \\ & h & \end{pmatrix} = \\ &\quad \text{sign}(321)=-1 \quad \text{sign}(213)=-1 \quad \text{sign}(132)=-1 \\ &= aei + cdh + bfg - ceg - bdi - afh \end{aligned}$$



# Вычисление определителя

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)

# Определитель и транспонирование

# Краткий план:

- Транспонирование матрицы;

# Краткий план:

- Транспонирование матрицы;
- Определитель и транспонирование;

# Краткий план:

- Транспонирование матрицы;
- Определитель и транспонирование;
- Разложение определителя по строке.

# Конструктивный подход к транспонированию

Определение транспонирования оператора основано на свойстве

$$\langle L \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, L^T \mathbf{b} \rangle.$$

# Конструктивный подход к транспонированию

Определение транспонирования оператора основано на свойстве

$$\langle L \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, L^T \mathbf{b} \rangle.$$

Возьмём, к примеру,  $\mathbf{a} = \mathbf{e}_2$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{e}_3$ :

$$\langle \text{col}_2 L, \mathbf{e}_3 \rangle = \langle \mathbf{e}_2, \text{col}_3 L^T \rangle$$

# Конструктивный подход к транспонированию

Определение транспонирования оператора основано на свойстве

$$\langle L \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, L^T \mathbf{b} \rangle.$$

Возьмём, к примеру,  $\mathbf{a} = \mathbf{e}_2$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{e}_3$ :

$$\langle \text{col}_2 L, \mathbf{e}_3 \rangle = \langle \mathbf{e}_2, \text{col}_3 L^T \rangle$$

$$L_{32} = L_{23}^T$$



# Конструктивный подход к транспонированию

Определение транспонирования оператора основано на свойстве

$$\langle L \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, L^T \mathbf{b} \rangle.$$

Возьмём, к примеру,  $\mathbf{a} = \mathbf{e}_2$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{e}_3$ :

$$\langle \text{col}_2 L, \mathbf{e}_3 \rangle = \langle \mathbf{e}_2, \text{col}_3 L^T \rangle$$

$$L_{32} = L_{23}^T$$

Транспонирование меняет местами строки и столбцы матрицы!

# Транспонирование матрицы

Пример:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

# Транспонирование матрицы

Пример:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

$$L^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

# Транспонирование матрицы

Пример:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

$$L^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

Заметим, что  $L^{TT} = L$ .

# Транспонирование и определитель

Явная формула определителя:

$$\det L = \sum_{\sigma} \text{sign}(\sigma) p(\sigma)$$

# Транспонирование и определитель

Явная формула определителя:

$$\det L = \sum_{\sigma} \text{sign}(\sigma) p(\sigma)$$

Перестановка диктует, какой элемент выбрать в каждой строке:

$$(3124) \sim \begin{pmatrix} . & . & * & . \\ * & . & . & . \\ . & * & . & . \\ . & . & . & * \end{pmatrix}$$

# Транспонирование и определитель

Явная формула определителя:

$$\det L = \sum_{\sigma} \text{sign}(\sigma) p(\sigma)$$

Перестановка диктует, какой элемент выбрать в каждой строке:

$$(3124) \sim \begin{pmatrix} . & . & * & . \\ * & . & . & . \\ . & * & . & . \\ . & . & . & * \end{pmatrix}$$

## Утверждение

Если в матрице выбран один элемент в каждой строке и в каждом столбце, то при транспонировании это свойство сохраняется.

# Транспонирование и определитель

## Утверждение

Чётности перестановок, кодирующих координаты элементов по строкам и по столбцам, одинаковые.

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & a & \cdot \\ b & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & c & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & d \end{pmatrix}$$

$$(\text{col}_1 \leftrightarrow \text{col}_3) \sim (\text{row}_1 \leftrightarrow \text{row}_2)$$



# Транспонирование и определитель

## Утверждение

Чётности перестановок, кодирующих координаты элементов по строкам и по столбцам, одинаковые.

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & a & \cdot \\ b & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & c & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & d \end{pmatrix}$$

$$(\text{col}_1 \leftrightarrow \text{col}_3) \sim (\text{row}_1 \leftrightarrow \text{row}_2)$$

$$\text{sign}(3124) = \text{sign}(2314)$$

# Транспонирование и определитель

Перестановка  $\sigma$  выбирает элемент в каждой строке:

$$\det L = \sum_{\sigma} \text{sign}(\sigma) p(\sigma)$$

Перестановка  $\sigma$  выбирает элемент в каждом столбце:

$$\det L^T = \sum_{\sigma} \text{sign}(\sigma) p^T(\sigma)$$

# Транспонирование и определитель

Перестановка  $\sigma$  выбирает элемент в каждой строке:

$$\det L = \sum_{\sigma} \text{sign}(\sigma) p(\sigma)$$

Перестановка  $\sigma$  выбирает элемент в каждом столбце:

$$\det L^T = \sum_{\sigma} \text{sign}(\sigma) p^T(\sigma)$$

**Утверждение**

$$\det L = \det L^T$$

# Рецепт разложения по столбцу

Возьмём аддитивность:

$$\begin{vmatrix} -1 & \color{red}{2} & 3 \\ 4 & \color{red}{5} & 6 \\ 7 & \color{red}{8} & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & \color{red}{2} & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & \color{red}{5} & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & \color{red}{8} & 9 \end{vmatrix}$$

# Рецепт разложения по столбцу

Возьмём аддитивность:

$$\begin{vmatrix} -1 & \color{red}{2} & 3 \\ 4 & \color{red}{5} & 6 \\ 7 & \color{red}{8} & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & \color{red}{2} & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & \color{red}{5} & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & \color{red}{8} & 9 \end{vmatrix}$$

Добавим немного принципа Кавальери:

$$\begin{vmatrix} -1 & \color{red}{2} & 3 \\ 4 & \color{red}{5} & 6 \\ 7 & \color{red}{8} & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \color{blue}{0} & \color{red}{2} & \color{blue}{0} \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ \color{blue}{0} & \color{red}{5} & \color{blue}{0} \\ 7 & 0 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ \color{blue}{0} & \color{red}{8} & \color{blue}{0} \end{vmatrix}$$

# Рецепт разложения по столбцу

Возьмём аддитивность:

$$\begin{vmatrix} -1 & \color{red}{2} & 3 \\ 4 & \color{red}{5} & 6 \\ 7 & \color{red}{8} & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & \color{red}{2} & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & \color{red}{5} & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & \color{red}{8} & 9 \end{vmatrix}$$

Добавим немного принципа Кавальери:

$$\begin{vmatrix} -1 & \color{red}{2} & 3 \\ 4 & \color{red}{5} & 6 \\ 7 & \color{red}{8} & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \color{blue}{0} & \color{red}{2} & \color{blue}{0} \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ \color{blue}{0} & \color{red}{5} & \color{blue}{0} \\ 7 & 0 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ \color{blue}{0} & \color{red}{8} & \color{blue}{0} \end{vmatrix}$$

Взболтаем и переставим столбцы:

$$\begin{vmatrix} -1 & \color{red}{2} & 3 \\ 4 & \color{red}{5} & 6 \\ 7 & \color{red}{8} & 9 \end{vmatrix} = (-1)^1 \begin{vmatrix} \color{red}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 7 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^2 \begin{vmatrix} \color{red}{5} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^3 \begin{vmatrix} \color{red}{8} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

# Рецепт разложения по столбцу

Взболтаем и переставим столбцы:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = (-1)^1 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 7 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^2 \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^3 \begin{vmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

# Рецепт разложения по столбцу

Взболтаем и переставим столбцы:

$$\begin{vmatrix} -1 & \color{red}{2} & 3 \\ 4 & \color{red}{5} & 6 \\ 7 & \color{red}{8} & 9 \end{vmatrix} = (-1)^1 \begin{vmatrix} \color{red}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 7 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^2 \begin{vmatrix} \color{red}{5} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^3 \begin{vmatrix} \color{red}{8} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

Снизим размерность:

$$\begin{vmatrix} -1 & \color{red}{2} & 3 \\ 4 & \color{red}{5} & 6 \\ 7 & \color{red}{8} & 9 \end{vmatrix} = (-1)^1 \color{red}{2} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^2 \color{red}{5} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^3 \color{red}{8} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$$



# Разложение по столбцу

Выберем любой столбец и «пробежимся» вдоль него!

$$\begin{vmatrix} * & a_{12} & * \\ * & a_{22} & * \\ * & a_{32} & * \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12}^{\times} + (-1)^{2+2} a_{22} \det A_{22}^{\times} + (-1)^{3+2} a_{32} \det A_{32}^{\times}$$

Матрица  $A_{ij}^{\times}$  получается из исходной  $A$  вычеркиванием строки  $i$  и столбца  $j$ .

# Разложение по столбцу

Выберем любой столбец и «пробежимся» вдоль него!

$$\begin{vmatrix} * & a_{12} & * \\ * & a_{22} & * \\ * & a_{32} & * \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12}^{\times} + (-1)^{2+2} a_{22} \det A_{22}^{\times} + (-1)^{3+2} a_{32} \det A_{32}^{\times}$$

Матрица  $A_{ij}^{\times}$  получается из исходной  $A$  вычеркиванием строки  $i$  и столбца  $j$ .

## Утверждение

$$\det L = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}^{\times},$$

# Разложение по строке

Можно раскладывать и по строке  $i$ :

## Утверждение

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}^{\times},$$

## Определение

**Алгебраическим дополнением** элемента  $a_{ij}$  матрицы  $A$  называют величину

$$(-1)^{i+j} \det A_{ij}^{\times},$$

Матрица  $A_{ij}^{\times}$  получается из исходной  $A$  вычеркиванием строки  $i$  и столбца  $j$ .

# Метод Гаусса

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)

# Метод Крамера

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)

# Метод Крамера и нахождение обратной матрицы

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)

## **Поиск обратной матрицы: итоги**

# Краткий план:

- Метод Гаусса;



# Краткий план:

- Метод Гаусса;
- Метод Крамера;

# Краткий план:

- Метод Гаусса;
- Метод Крамера;
- Критерий наличия обратной матрицы.

# Как поймать двух зайцев?

Если нужно решить две системы уравнений,  $Ax = b$  и  $Ay = c$ , то можно решать их одновременно!

# Как поймать двух зайцев?

Если нужно решить две системы уравнений,  $Ax = b$  и  $Ay = c$ , то можно решать их одновременно!

Вместо двух систем

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & 1 & 17 \end{array} \right), \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 7 & 1 & 6 \end{array} \right)$$

# Как поймать двух зайцев?

Если нужно решить две системы уравнений,  $Ax = b$  и  $Ay = c$ , то можно решать их одновременно!

Вместо двух систем

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & 1 & 17 \end{array} \right), \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 7 & 1 & 6 \end{array} \right)$$

решаем систему с двойной правой частью:

$$\left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 3 & 10 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 7 & 1 & 17 & 6 \end{array} \right).$$

# Как поймать двух зайцев?

Решаем систему с двойной правой частью:

$$\left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 3 & 10 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 7 & 1 & 17 & 6 \end{array} \right)$$

# Как поймать двух зайцев?

Решаем систему с двойной правой частью:

$$\left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 3 & 10 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 7 & 1 & 17 & 6 \end{array} \right)$$

Приводим левую часть к виду единичной матрицы используя гауссовские преобразования:

- перестановку строк;
- домножение строки на ненулевое число;
- прибавление одной строки к другой с любым весом.

# Как поймать двух зайцев?

Решаем систему с двойной правой частью:

$$\left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 3 & 10 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 7 & 1 & 17 & 6 \end{array} \right)$$

Приводим левую часть к виду единичной матрицы используя гауссовские преобразования:

- перестановку строк;
- домножение строки на ненулевое число;
- прибавление одной строки к другой с любым весом.

$$\left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right)$$



# Как поймать двух зайцев?

Решаем систему с двойной правой частью:

$$\left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 3 & 10 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 7 & 1 & 17 & 6 \end{array} \right)$$

Приводим левую часть к виду единичной матрицы используя гауссовские преобразования:

- перестановку строк;
- домножение строки на ненулевое число;
- прибавление одной строки к другой с любым весом.

$$\left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right) \quad \text{Видим ответ: } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

# Метод Гаусса

Для нахождения обратной матрицы для  $A$  нужно решить систему  $A \cdot B = I$ .

Для примера

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 6 \\ 6 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

# Метод Гаусса

Для нахождения обратной матрицы для  $A$  нужно решить систему  $A \cdot B = I$ .

Для примера

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 6 \\ 6 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Приписываем справа единичную матрицу  $I$ :

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

# Метод Гаусса

Приписываем справа единичную матрицу I:

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Если  $\det A \neq 0$ , то с помощью гауссовских преобразований получаем единичную слева:

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

# Метод Гаусса

Приписываем справа единичную матрицу I:

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Если  $\det A \neq 0$ , то с помощью гауссовских преобразований получаем единичную слева:

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Решение системы, матрицу  $A^{-1}$ , читаем справа:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Метод Крамера

Рассмотрим систему  $Ax = b$  из  $n$  уравнений с  $n$  неизвестными.

# Метод Крамера

Рассмотрим систему  $Ax = b$  из  $n$  уравнений с  $n$  неизвестными.

## Утверждение

Если  $\det A \neq 0$ , то решение системы единственно и

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A},$$

где матрица  $A_i$  получена из матрицы  $A$  заменой  $i$ -го столбца на правую часть  $b$ .

# Метод Крамера для обратной матрицы

Матрица  $A$  имеет размер  $n \times n$ .



# Метод Крамера для обратной матрицы

Матрица  $A$  имеет размер  $n \times n$ .

## Утверждение

Если  $\det A \neq 0$ , то матрица  $B = A^{-1}$  существует и

$$b_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \det(A_{ji}^{\times})}{\det A},$$

где матрица  $A_{ji}^{\times}$  получена из матрицы  $A$  вычёркиванием строки  $j$  и столбца  $i$ .

# Метод Крамера для обратной матрицы

Матрица  $A$  имеет размер  $n \times n$ .

## Утверждение

Если  $\det A \neq 0$ , то матрица  $B = A^{-1}$  существует и

$$b_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \det(A_{ji}^{\times})}{\det A},$$

где матрица  $A_{ji}^{\times}$  получена из матрицы  $A$  вычёркиванием строки  $j$  и столбца  $i$ .

Напомним, что  $(-1)^{i+j} \det(A_{ji}^{\times})$  называется **алгебраическим дополнением** к  $a_{ji}$ .

# Метод Крамера для обратной матрицы

Хотим обратить матрицу  $A$ .

1. Находим определитель  $\det A$ . Если  $\det A = 0$ , то матрица  $A$  не обратимая.

# Метод Крамера для обратной матрицы

Хотим обратить матрицу  $A$ .

1. Находим определитель  $\det A$ . Если  $\det A = 0$ , то матрица  $A$  не обратимая.
2. Для каждого элемента  $A$  находим алгебраическое дополнение  $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij}^\times)$ . Помещаем все дополнения в матрицу  $C$ .

# Метод Крамера для обратной матрицы

Хотим обратить матрицу  $A$ .

1. Находим определитель  $\det A$ . Если  $\det A = 0$ , то матрица  $A$  не обратимая.
2. Для каждого элемента  $A$  находим алгебраическое дополнение  $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij}^\times)$ . Помещаем все дополнения в матрицу  $C$ .
3. Транспонируем матрицу и получаем **присоединённую матрицу**  $\operatorname{adj} A = C^T$ .

# Метод Крамера для обратной матрицы

Хотим обратить матрицу  $A$ .

1. Находим определитель  $\det A$ . Если  $\det A = 0$ , то матрица  $A$  не обратимая.
2. Для каждого элемента  $A$  находим алгебраическое дополнение  $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij}^\times)$ . Помещаем все дополнения в матрицу  $C$ .
3. Транспонируем матрицу и получаем **присоединённую матрицу**  $\operatorname{adj} A = C^T$ .
4. Делим матрицу  $\operatorname{adj} A$  на  $\det A$  и получаем  $A^{-1} = \operatorname{adj} A / \det A$ .

# Вырожденные и невырожденные матрицы

Матрица  $A$  размера  $n \times n$  называется **вырожденной**, если:

1.  $\det A = 0$ ;

# Вырожденные и невырожденные матрицы

Матрица  $A$  размера  $n \times n$  называется **вырожденной**, если:

1.  $\det A = 0$ ;
2. Система  $Ax = 0$  имеет бесконечное количество решений;



# Вырожденные и невырожденные матрицы

Матрица  $A$  размера  $n \times n$  называется **вырожденной**, если:

1.  $\det A = 0$ ;
2. Система  $Ax = 0$  имеет бесконечное количество решений;
3.  $\text{rank } A < n$ ;

# Вырожденные и невырожденные матрицы

Матрица  $A$  размера  $n \times n$  называется **вырожденной**, если:

1.  $\det A = 0$ ;
2. Система  $Ax = 0$  имеет бесконечное количество решений;
3.  $\text{rank } A < n$ ;
4.  $A^{-1}$  не существует;

# Вырожденные и невырожденные матрицы

Матрица  $A$  размера  $n \times n$  называется **вырожденной**, если:

1.  $\det A = 0$ ;
2. Система  $Ax = 0$  имеет бесконечное количество решений;
3.  $\text{rank } A < n$ ;
4.  $A^{-1}$  не существует;

Матрица  $A$  размера  $n \times n$  называется **невырожденной**, если:

1.  $\det A \neq 0$ ;

# Вырожденные и невырожденные матрицы

Матрица  $A$  размера  $n \times n$  называется **вырожденной**, если:

1.  $\det A = 0$ ;
2. Система  $Ax = 0$  имеет бесконечное количество решений;
3.  $\text{rank } A < n$ ;
4.  $A^{-1}$  не существует;

Матрица  $A$  размера  $n \times n$  называется **невырожденной**, если:

1.  $\det A \neq 0$ ;
2. Система  $Ax = b$  имеет единственное решение;

# Вырожденные и невырожденные матрицы

Матрица  $A$  размера  $n \times n$  называется **вырожденной**, если:

1.  $\det A = 0$ ;
2. Система  $Ax = 0$  имеет бесконечное количество решений;
3.  $\text{rank } A < n$ ;
4.  $A^{-1}$  не существует;

Матрица  $A$  размера  $n \times n$  называется **невырожденной**, если:

1.  $\det A \neq 0$ ;
2. Система  $Ax = b$  имеет единственное решение;
3.  $\text{rank } A = n$ ;

# Вырожденные и невырожденные матрицы

Матрица  $A$  размера  $n \times n$  называется **вырожденной**, если:

1.  $\det A = 0$ ;
2. Система  $Ax = 0$  имеет бесконечное количество решений;
3.  $\text{rank } A < n$ ;
4.  $A^{-1}$  не существует;

Матрица  $A$  размера  $n \times n$  называется **невырожденной**, если:

1.  $\det A \neq 0$ ;
2. Система  $Ax = b$  имеет единственное решение;
3.  $\text{rank } A = n$ ;
4.  $A^{-1}$  существует;

# Комплексные числа

бонусное видео! Это видеофрагмент с доской, слайдов  
здесь нет :)