Матричная запись

Линейная комбинация и независимость

Краткий план:

- Линейная комбинация векторов;

Краткий план:

- Линейная комбинация векторов;
- Зависимые и независимые наборы векторов.

Линейная комбинация

Определение

Вектор $\mathbf{c}$ называется линейной комбинацией векторов $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, …, $\mathbf{v}_k$, если его можно представить в виде их суммы с некоторыми действительными весами α_i:

$$\mathbf{c} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_k\mathbf{v}_k$$

Линейная комбинация

Определение

Вектор $\mathbf{c}$ называется линейной комбинацией векторов $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, …, $\mathbf{v}_k$, если его можно представить в виде их суммы с некоторыми действительными весами α_i:

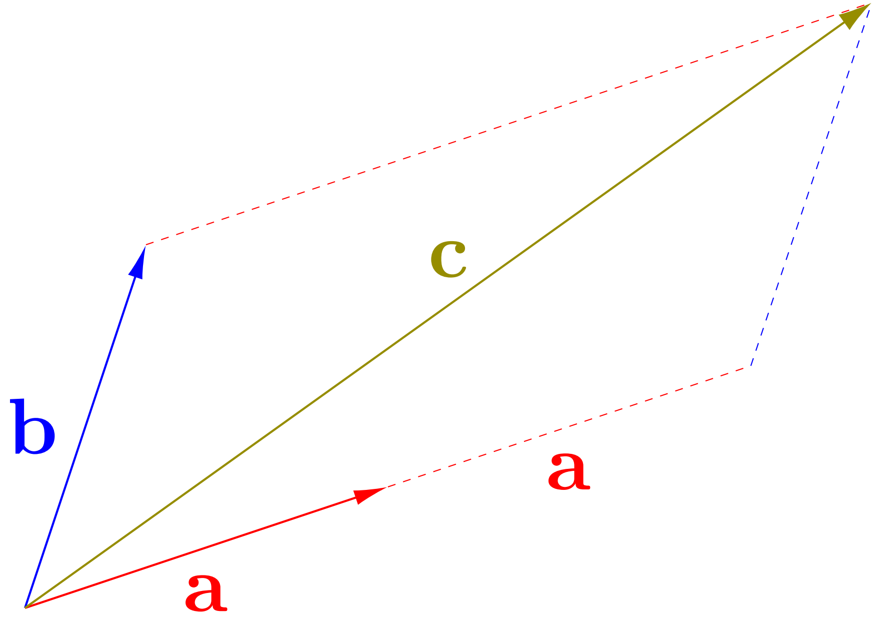
$$\mathbf{c} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_k \mathbf{v}_k$$

Пример. Вектор $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ — это линейная комбинация векторов $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Линейная комбинация: геометрия

$$\mathbf{c} = 2 \cdot \mathbf{a} + 1 \cdot \mathbf{b}$$



Любой вектор — линейная комбинация

Любой вектор $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ — линейная комбинация векторов $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Любой вектор — линейная комбинация

Любой вектор $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ — линейная комбинация векторов $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Аналогично, любой вектор $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ представим в виде:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

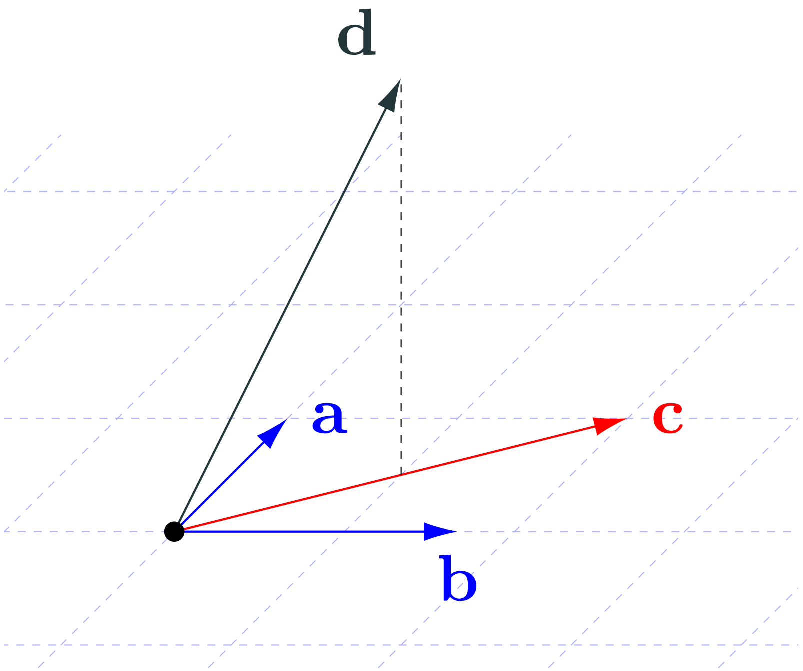
Линейная зависимость

Определение

Набор A из двух и более векторов называется линейно зависимым, если хотя бы один вектор является линейной комбинацией остальных.

Набор $A = \{\mathbf{0}\}$ из одного нулевого вектора также называется линейно зависимым.

Линейная зависимость: геометрия



Набор $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ — линейно зависим.

Набор $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}\}$ — линейно независим.

Линейная зависимость: примеры

Набор $A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ — линейно независимый.

Линейная зависимость: примеры

Набор $A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ — линейно независимый.

Набор $A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ — линейно зависимый:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Линейная зависимость: дубль два

Эквивалентное пределение

Набор векторов $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ называется линейно зависимым, если можно найти такие веса $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, что

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0},$$

и при этом хотя бы одно из чисел α_i отлично от 0.

Линейная зависимость: дубль два

Эквивалентное пределение

Набор векторов $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ называется линейно зависимым, если можно найти такие веса $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, что

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0},$$

и при этом хотя бы одно из чисел α_i отлично от 0.

Доказательство эквивалентности

Вектор с ненулевым коэффициентом α_i перед ним можно выразить через остальные.

Линейная зависимость: дубль два

Эквивалентное пределение

Набор векторов $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ называется линейно зависимым, если можно найти такие веса $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, что

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0},$$

и при этом хотя бы одно из чисел α_i отлично от 0.

Доказательство эквивалентности

Вектор с ненулевым коэффициентом α_i перед ним можно выразить через остальные.

Если вектор $\mathbf{v}_2$ выражен через $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_2 = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_3\mathbf{v}_3$, то искомая нулевая линейная комбинация имеет вид: $\alpha_1\mathbf{v}_1 + (-1)\mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$.

Линейная оболочка

Краткий план:

- Линейная оболочка векторов;

Краткий план:

- Линейная оболочка векторов;
- Базис линейной оболочки векторов;

Краткий план:

- Линейная оболочка векторов;
- Базис линейной оболочки векторов;
- Размерность линейной оболочки векторов.

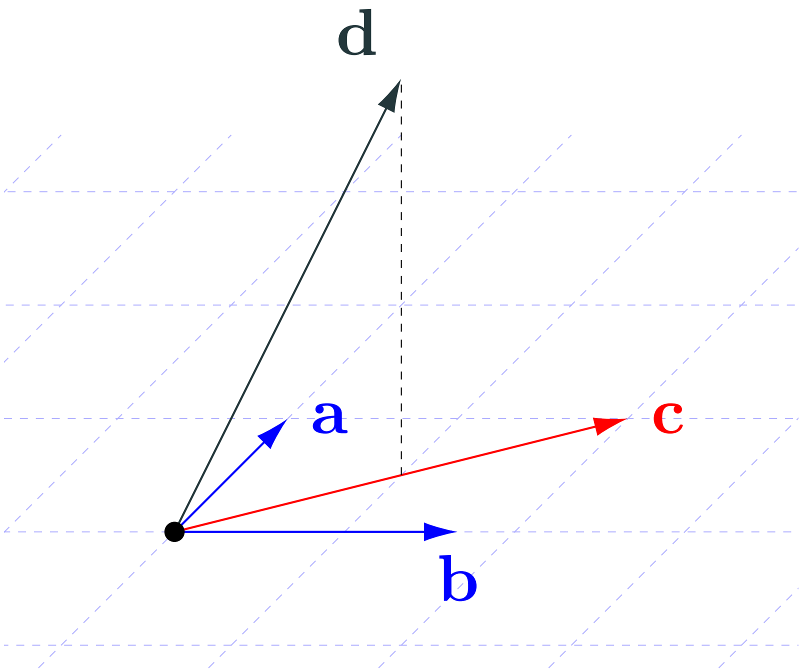
Линейная оболочка

Определение

Множество векторов V, содержащее все возможные линейные комбинации векторов $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$, называется их линейной оболочкой,

$$V = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$$

Линейная оболочка векторов: картинка



Вектор $\mathbf{c}$ лежит в плоскости $\text{Span}\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$.

Вектор $\mathbf{d}$ не лежит в плоскости $\text{Span}\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$.

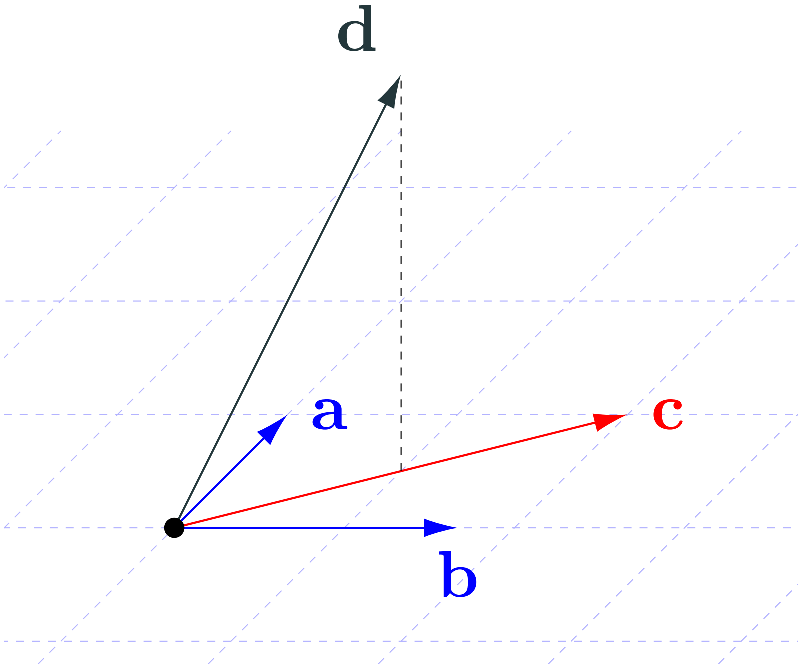
Базис линейной оболочки

Определение

Набор векторов $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_d\}$ незывается базисом линейной оболочки Span$\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k\}$, если:

- Span$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_d\}$ = Span$\{\mathbf{x}_{,} \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k\}$;
- Набор векторов A линейно независим.

Базис линейной оболочки: картинка



Для линейной оболочки Span$\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ базисами будут $A_1 = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$, $A_2 = \{\mathbf{b}, 2\mathbf{c}\}$, $A_3 = \{3\mathbf{a}, 5\mathbf{c}\}$.

Базис оболочки: примеры

Рассмотрим линейную оболочку

$$V = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

Базис оболочки: примеры

Рассмотрим линейную оболочку

$$V = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

Набор $A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ — базис для V.

Базис оболочки: примеры

Рассмотрим линейную оболочку

$$V = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

Набор $A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ — базис для V.

Набор $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$ — базис для V.

Свойства базиса линейной оболочки

Утверждение

Если набор векторов $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ линейно независим, то он сам является базисом своей линейной оболочки $\operatorname{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$.

Свойства базиса линейной оболочки

Утверждение

Если набор векторов $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ линейно независим, то он сам является базисом своей линейной оболочки Span$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$.

Утверждение

Если наборы векторов A и B — являются базисами для линейной оболочки V, то наборы A и B содержат одинаковое количество векторов.

Свойства базиса линейной оболочки

Утверждение

Если набор векторов $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ линейно независим, то он сам является базисом своей линейной оболочки Span$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$.

Утверждение

Если наборы векторов A и B — являются базисами для линейной оболочки V, то наборы A и B содержат одинаковое количество векторов.

Утверждение

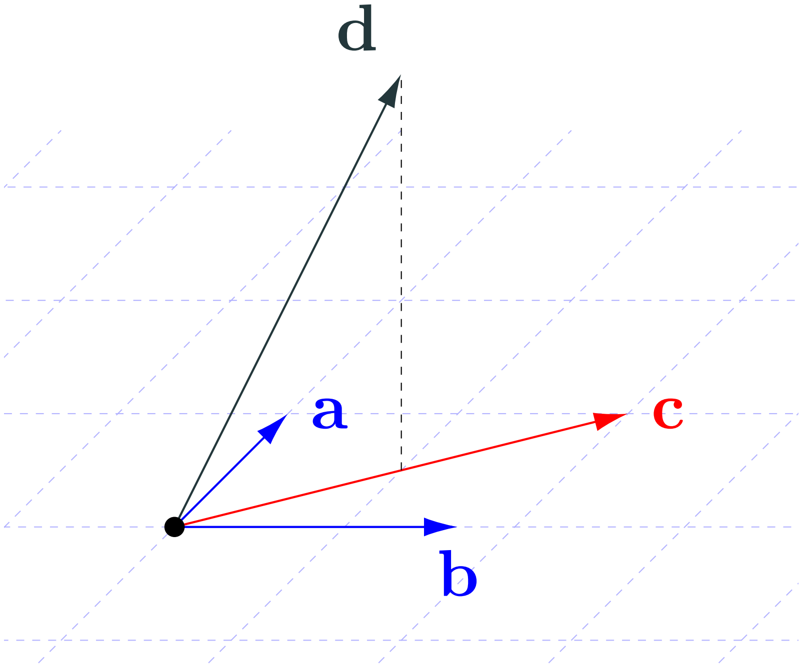
Если набор A содержит k векторов, то базис линейной оболочки Span A содержит k элементов или меньше.

Размерность линейной оболочки

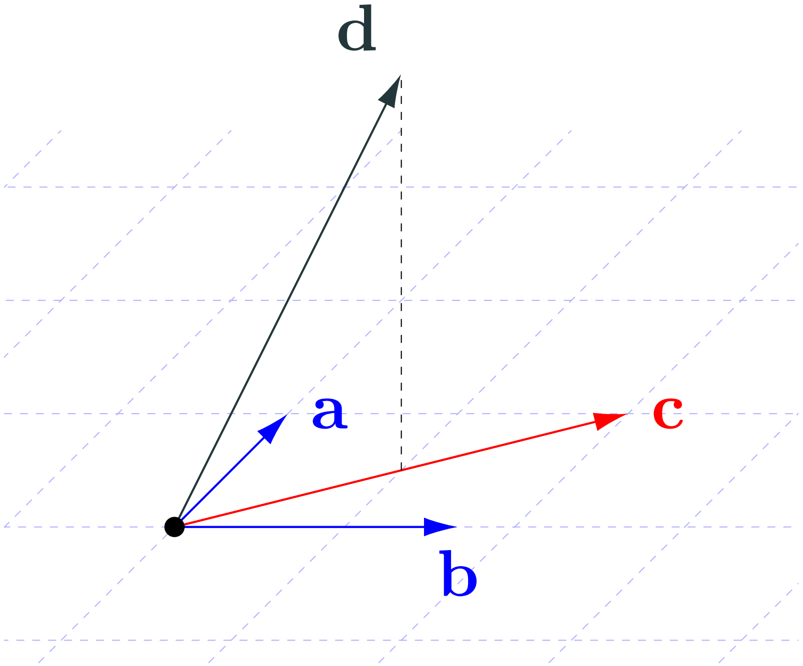
Определение

Если базис линейной оболочки V содержит d элементов, то число d называется размерностью линейной оболочки V.

Размерность линейной оболочки: картинка

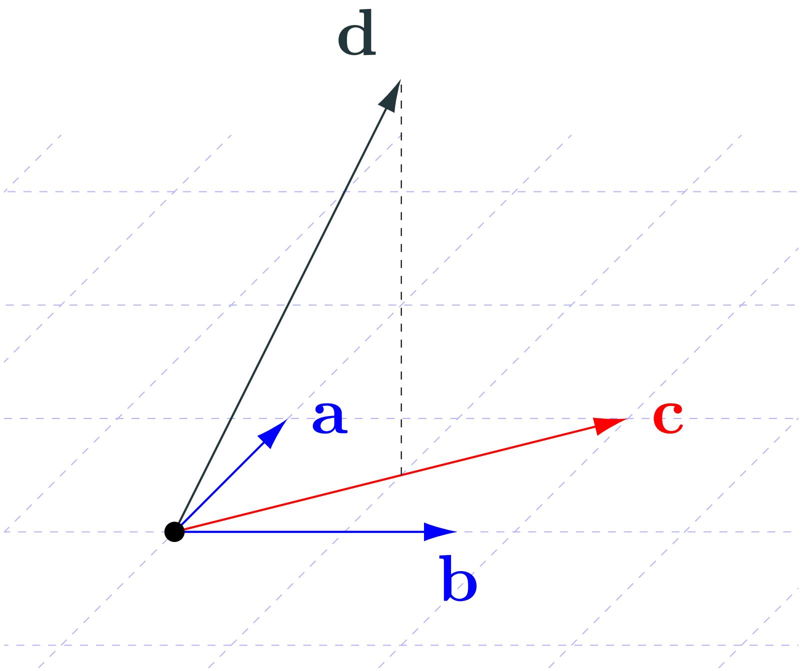


Размерность линейной оболочки: картинка



Размерность $\mathrm{Span}\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ равна 2.

Размерность линейной оболочки: картинка



Размерность Span$\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ равна 2.

Размерность Span$\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}\}$ равна 3.

Умножение матрицы на вектор

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)

Умножение матрицы на матрицу

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)

Три взгляда на умножение матриц

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)

Решение системы уравнений методом Гаусса

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)

Задача о шахматной доске

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)