

# **Спектральное разложение**

# Собственные числа и векторы

# Краткий план:

- Собственные числа и собственные векторы матрицы.

# Краткий план:

- Собственные числа и собственные векторы матрицы.
- Характеристический многочлен.

# Краткий план:

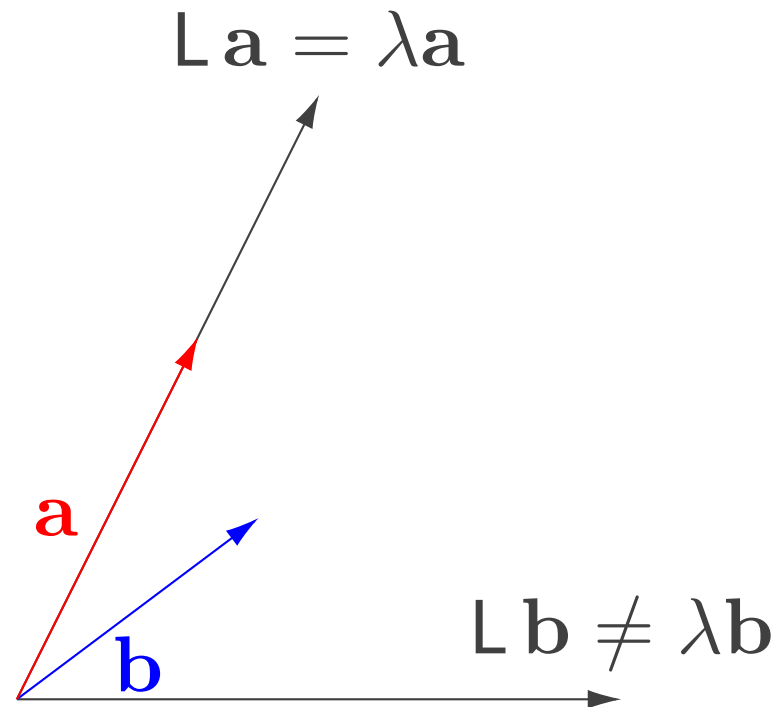
- Собственные числа и собственные векторы матрицы.
- Характеристический многочлен.
- Алгебраическая кратность.

# От оператора к матрице

## Определение

Если для оператора  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  найдётся такой ненулевой вектор  $\mathbf{v}$ , что  $L \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v}$ , где  $\lambda \in \mathbb{R}$ , то:

- вектор  $\mathbf{v}$  называется **собственным вектором**;
- число  $\lambda$  называется **собственным числом**.



# Собственные числа и векторы матрицы

## Определение

Собственными числами и собственными векторами матрицы размера  $n \times n$  называются собственные числа и векторы соответствующего линейного оператора.

# Собственные числа и векторы матрицы

## Определение

Собственными числами и собственными векторами матрицы размера  $n \times n$  называются собственные числа и векторы соответствующего линейного оператора.

Для абстрактного векторного пространства  $V$  матрица  $L_{ee}$  линейного оператора  $L : V \rightarrow V$  зависит от выбора базиса  $e$ . При этом выбор базиса  $e$  никак не влияет на собственные числа и собственные векторы.



# Количество собственных векторов

Из уравнения  $L v = \lambda v$  находим вектор  $v$  и число  $\lambda$ .

# Количество собственных векторов

Из уравнения  $L v = \lambda v$  находим вектор  $v$  и число  $\lambda$ .

Если найдётся один собственный вектор  $v \neq 0$ , то любой вектор  $v' = c \cdot v$  также будет собственным:

# Количество собственных векторов

Из уравнения  $L v = \lambda v$  находим вектор  $v$  и число  $\lambda$ .

Если найдётся один собственный вектор  $v \neq 0$ , то любой вектор  $v' = c \cdot v$  также будет собственным:

$$L v' = L c v = c L v = c \lambda v = \lambda v'.$$

# Количество собственных векторов

Из уравнения  $L \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$  находим вектор  $\mathbf{v}$  и число  $\lambda$ .

Если найдётся один собственный вектор  $\mathbf{v} \neq 0$ , то любой вектор  $\mathbf{v}' = c \cdot \mathbf{v}$  также будет собственным:

$$L \mathbf{v}' = L c \mathbf{v} = c L \mathbf{v} = c \lambda \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}'.$$

Система уравнений  $L \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$  должна иметь бесконечное количество решений!

# Как найти собственные числа?

Перепишем систему  $L \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$  в виде  $(L - \lambda I) \mathbf{v} = \mathbf{0}$ .

# Как найти собственные числа?

Перепишем систему  $L \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$  в виде  $(L - \lambda I) \mathbf{v} = \mathbf{0}$ .

Система имеет бесконечное количество решений, если и только если  $\det(L - \lambda I) = 0$ .

# Как найти собственные числа?

Перепишем систему  $L \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$  в виде  $(L - \lambda I) \mathbf{v} = \mathbf{0}$ .

Система имеет бесконечное количество решений, если и только если  $\det(L - \lambda I) = 0$ .

## Алгоритм

1. Из уравнения  $\det(L - \lambda I) = 0$  находим собственные числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ .

# Как найти собственные числа?

Перепишем систему  $L \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$  в виде  $(L - \lambda I) \mathbf{v} = \mathbf{0}$ .

Система имеет бесконечное количество решений, если и только если  $\det(L - \lambda I) = 0$ .

## Алгоритм

1. Из уравнения  $\det(L - \lambda I) = 0$  находим собственные числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ .
2. Для каждого  $\lambda_i$  решаем систему  $\det(L - \lambda_i I) \mathbf{v} = \mathbf{0}$  относительно  $\mathbf{v}$ , то есть находим все собственные векторы.



# Характеристический многочлен

## Определение

Многочлен  $\text{char}_L(\lambda) = \det(L - \lambda I)$  называется  
характеристическим многочленом линейного оператора  $L$ .

# Характеристический многочлен

## Определение

Многочлен  $\text{char}_L(\lambda) = \det(L - \lambda I)$  называется **характеристическим многочленом** линейного оператора  $L$ .

Характеристическим многочленом матрицы называется характеристический многочлен соответствующего линейного оператора.

# Характеристический многочлен: пример

Рассмотрим матрицу  $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ .

# Характеристический многочлен: пример

Рассмотрим матрицу  $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ .

$$\text{char}_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 6 & 0 \\ 6 & 4 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 7 - \lambda \end{vmatrix} =$$

# Характеристический многочлен: пример

Рассмотрим матрицу  $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ .

$$\begin{aligned} \text{char}_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 6 & 0 \\ 6 & 4 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 7 - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= (7 - \lambda) \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 6 \\ 6 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (7 - \lambda)((4 - \lambda)^2 - 36) = \end{aligned}$$

# Характеристический многочлен: пример

Рассмотрим матрицу  $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ .

$$\begin{aligned} \text{char}_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 6 & 0 \\ 6 & 4 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 7 - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= (7 - \lambda) \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 6 \\ 6 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (7 - \lambda)((4 - \lambda)^2 - 36) = \\ &= -(\lambda - 7)(\lambda + 2)(\lambda - 10) = -\lambda^3 + 15\lambda^2 - 36\lambda - 140 \end{aligned}$$

# Характеристический многочлен

По характеристическому многочлену можно найти:

# Характеристический многочлен

По характеристическому многочлену можно найти:

1. Собственные числа из уравнения  $\text{char}_A(\lambda) = 0$ .

$$\text{char}_A(\lambda) = -(\lambda - 7)(\lambda + 2)(\lambda - 10)$$

$$\lambda_1 = 7, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 10.$$



# Характеристический многочлен

По характеристическому многочлену можно найти:

1. Собственные числа из уравнения  $\text{char}_A(\lambda) = 0$ .

$$\text{char}_A(\lambda) = -(\lambda - 7)(\lambda + 2)(\lambda - 10)$$

$$\lambda_1 = 7, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 10.$$

2. Определитель  $\det A$  из равенства  $\text{char}_A(0) = \det(A - 0I)$ .

$$\text{char}_A(\lambda) = -\lambda^3 + 15\lambda^2 - 36\lambda - 140$$

$$\det A = \text{char}_A(0) = -140.$$

# Алгебраическая кратность

## Утверждение

По основной теореме алгебры любой многочлен  $f$  с действительными коэффициентами можно единственным образом представить в виде:

$$f(x) = (x - x_1)^{k_1} \dots (x - x_p)^{k_p} g(x),$$

где  $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{R}$  — различные корни многочлена  $f$ , а многочлен  $g$  действительных корней не имеет.

# Алгебраическая кратность

## Утверждение

По основной теореме алгебры любой многочлен  $f$  с действительными коэффициентами можно единственным образом представить в виде:

$$f(x) = (x - x_1)^{k_1} \dots (x - x_p)^{k_p} g(x),$$

где  $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{R}$  — различные корни многочлена  $f$ , а многочлен  $g$  действительных корней не имеет.

## Определение

Число  $k_i$  называется **алгебраической кратностью** корня  $x_i$ .

# Алгебраическая кратность: пример

Если  $\text{char}_A(\lambda) = -(\lambda - 7)^2(\lambda + 3)$ , то собственное число  $\lambda = 7$  имеет алгебраическую кратность 2, а собственное число  $\lambda = -3$  имеет алгебраическую кратность 1.

# Алгебраическая кратность: пример

Если  $\text{char}_A(\lambda) = -(\lambda - 7)^2(\lambda + 3)$ , то собственное число  $\lambda = 7$  имеет алгебраическую кратность 2, а собственное число  $\lambda = -3$  имеет алгебраическую кратность 1.

Если  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , то сумма алгебраических кратностей  $k_i$  действительных собственных чисел  $\lambda_i \in \mathbb{R}$  не превосходит  $n$ :

$$\sum_{i=1}^p k_i \leq n.$$

# Теорема Гамильтона-Кэли

## Утверждение

Если подставить матрицу  $A$  в характеристический многочлен  $\text{char}_A(\lambda)$ , то получится матрица из нулей,

$$\text{char}_A(A) = 0;$$

# Теорема Гамильтона-Кэли

## Утверждение

Если подставить матрицу  $A$  в характеристический многочлен  $\text{char}_A(\lambda)$ , то получится матрица из нулей,

$$\text{char}_A(A) = \mathbf{0};$$

Пример. Если  $\text{char}_A(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 8$ , то  $A^2 - 3A + 8I = \mathbf{0}$  и  $A^2 = 3A - 8I$ .

# Нахождение собственных чисел и векторов

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)



# Диагонализация матрицы

# Краткий план:

- Собственные векторы как линейное пространство.

# Краткий план:

- Собственные векторы как линейное пространство.
- Геометрическая кратность собственного вектора.

# Краткий план:

- Собственные векторы как линейное пространство.
- Геометрическая кратность собственного вектора.
- Диагонализация матрицы.

# Множество собственных векторов

Оператор  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  имеет собственное число  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Рассмотрим множество  $\text{Eig}_\lambda$  — множество всех собственных векторов, растягивающихся в  $\lambda$  раз, дополненное нулевым вектором  $\mathbf{0}$ :

$$\text{Eig}_\lambda L = \{\mathbf{v} \mid L \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}\}.$$

# Множество собственных векторов

Оператор  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  имеет собственное число  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Рассмотрим множество  $\text{Eig}_\lambda$  — множество всех собственных векторов, растягивающихся в  $\lambda$  раз, дополненное нулевым вектором  $0$ :

$$\text{Eig}_\lambda L = \{\mathbf{v} \mid L \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}\}.$$

## Утверждение

Множество  $\text{Eig}_\lambda L$  является векторным пространством:

# Множество собственных векторов

Оператор  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  имеет собственное число  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Рассмотрим множество  $\text{Eig}_\lambda$  — множество всех собственных векторов, растягивающихся в  $\lambda$  раз, дополненное нулевым вектором  $0$ :

$$\text{Eig}_\lambda L = \{ \mathbf{v} \mid L \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} \}.$$

## Утверждение

Множество  $\text{Eig}_\lambda L$  является векторным пространством:

Если вектор  $\mathbf{v}$  растягивается в  $\lambda$  раз, то и вектор  $t\mathbf{v}$  растягивается в  $\lambda$  раз.

# Множество собственных векторов

Оператор  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  имеет собственное число  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Рассмотрим множество  $\text{Eig}_\lambda$  — множество всех собственных векторов, растягивающихся в  $\lambda$  раз, дополненное нулевым вектором  $0$ :

$$\text{Eig}_\lambda L = \{ \mathbf{v} \mid L \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} \}.$$

## Утверждение

Множество  $\text{Eig}_\lambda L$  является векторным пространством:

Если вектор  $\mathbf{v}$  растягивается в  $\lambda$  раз, то и вектор  $t\mathbf{v}$  растягивается в  $\lambda$  раз.

Если векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  растягиваются в  $\lambda$  раз, то и их сумма  $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$  растягивается в  $\lambda$  раз.



# Геометрическая кратность

## Определение

Размерность пространства  $\text{Eig}_\lambda L$  называется  
геометрической кратностью собственного числа  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

# Геометрическая кратность

## Определение

Размерность пространства  $\text{Eig}_\lambda L$  называется **геометрической кратностью** собственного числа  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

## Эквивалентное определение

Максимальное количество линейно независимых собственных векторов, соответствующих собственному числу  $\lambda \in \mathbb{R}$  называют его **геометрической кратностью**.

# Разные кратности связаны!

## Утверждение

Геометрическая кратность собственного числа  $\lambda \in \mathbb{R}$  не превосходит его алгебраической кратности и не меньше единицы.

# Разные кратности связаны!

## Утверждение

Геометрическая кратность собственного числа  $\lambda \in \mathbb{R}$  не превосходит его алгебраической кратности и не меньше единицы.

Пример. У матрицы  $A$  характеристический многочлен равен  $\text{char}_A(\lambda) = -(\lambda - 7)(\lambda - 9)^2$ .

# Разные кратности связаны!

## Утверждение

Геометрическая кратность собственного числа  $\lambda \in \mathbb{R}$  не превосходит его алгебраической кратности и не меньше единицы.

Пример. У матрицы  $A$  характеристический многочлен равен  $\text{char}_A(\lambda) = -(\lambda - 7)(\lambda - 9)^2$ .

Числу  $\lambda = 7$  соответствует ровно один линейно независимый собственный вектор.

# Разные кратности связаны!

## Утверждение

Геометрическая кратность собственного числа  $\lambda \in \mathbb{R}$  не превосходит его алгебраической кратности и не меньше единицы.

Пример. У матрицы  $A$  характеристический многочлен равен  $\text{char}_A(\lambda) = -(\lambda - 7)(\lambda - 9)^2$ .

Числу  $\lambda = 7$  соответствует ровно один линейно независимый собственный вектор.

Числу  $\lambda = 9$  соответствуют один или два линейно независимых собственных вектора.

# Независимость собственных векторов

## Утверждение

Если векторы набора  $A = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  относятся к различным собственным числам, то набор  $A$  линейно независимый.

# Независимость собственных векторов

## Утверждение

Если векторы набора  $A = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  относятся к различным собственным числам, то набор  $A$  линейно независимый.

## Идея доказательства

Пусть вектора  $v_1, v_2$  и  $v_3$  растягиваются в 2, 3 и 8 раз соответственно, и  $v_3 = 7v_1 - 4v_2$ .



# Независимость собственных векторов

## Утверждение

Если векторы набора  $A = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  относятся к различным собственным числам, то набор  $A$  линейно независимый.

## Идея доказательства

Пусть вектора  $v_1, v_2$  и  $v_3$  растягиваются в 2, 3 и 8 раз соответственно, и  $v_3 = 7v_1 - 4v_2$ .

Домножим  $A$  на обе части равенства,  $8v_3 = 2 \cdot 7v_1 - 3 \cdot 4v_2$ .

# Независимость собственных векторов

## Утверждение

Если векторы набора  $A = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  относятся к различным собственным числам, то набор  $A$  линейно независимый.

## Идея доказательства

Пусть вектора  $v_1, v_2$  и  $v_3$  растягиваются в 2, 3 и 8 раз соответственно, и  $v_3 = 7v_1 - 4v_2$ .

Домножим  $A$  на обе части равенства,  $8v_3 = 2 \cdot 7v_1 - 3 \cdot 4v_2$ .

Поделим на большее собственное число,

$$v_3 = \frac{2}{8} \cdot 7v_1 - \frac{3}{8} \cdot 4v_2.$$

# Независимость собственных векторов

## Утверждение

Если векторы набора  $A = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  относятся к различным собственным числам, то набор  $A$  линейно независимый.

## Идея доказательства

Пусть вектора  $v_1, v_2$  и  $v_3$  растягиваются в 2, 3 и 8 раз соответственно, и  $v_3 = 7v_1 - 4v_2$ .

Домножим  $A$  на обе части равенства,  $8v_3 = 2 \cdot 7v_1 - 3 \cdot 4v_2$ .

Поделим на большее собственное число,

$$v_3 = \frac{2}{8} \cdot 7v_1 - \frac{3}{8} \cdot 4v_2.$$

Повторим бесконечно много раз,  $v_3 = 0$ . Противоречие.

# Базис из собственных векторов

Векторы отвечающие различным собственным числам независимы.

# Базис из собственных векторов

Векторы отвечающие различным собственным числам независимы.

В каждом пространстве  $\text{Eig}_{\lambda_i} L$  найдётся базис из  $\gamma_i = \dim \text{Eig}_{\lambda_i} L$  собственных векторов.

# Базис из собственных векторов

Векторы отвечающие различным собственным числам независимы.

В каждом пространстве  $\text{Eig}_{\lambda_i} L$  найдётся базис из  $\gamma_i = \dim \text{Eig}_{\lambda_i} L$  собственных векторов.

## Утверждение

Если  $\sum_i \gamma_i = n$ , то в  $\mathbb{R}^n$  существует базис из  $n$  векторов, являющихся собственными векторами оператора  $L$ .

# Диагонализация: обозначения

Допустим, у оператора  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  нашлось  $n$  линейно независимых собственных векторов  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ , которым соответствуют собственные числа  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ .

# Диагонализация: обозначения

Допустим, у оператора  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  нашлось  $n$  линейно независимых собственных векторов  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ , которым соответствуют собственные числа  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ .

Запишем все собственные векторы в матрицу  $P$  столбцами друг за другом.

А в матрицу  $D$  поместим все собственные числа на главную диагональ.

$$P = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \vdots & \mathbf{v}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$



# Диагонализация: мне повезёт!

## Утверждение

Если у оператора  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  нашлось  $n$  линейно независимых собственных векторов  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ , то  $L$  представим в виде

$$L = PDP^{-1}.$$

# Диагонализация: мне повезёт!

## Утверждение

Если у оператора  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  нашлось  $n$  линейно независимых собственных векторов  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ , то  $L$  представим в виде

$$L = PDP^{-1}.$$

## Доказательство

Заметим, что  $P\mathbf{e}_i = \mathbf{v}_i$ , и  $L P\mathbf{e}_i = \lambda_i P\mathbf{e}_i$ .

# Диагонализация: мне повезёт!

## Утверждение

Если у оператора  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  нашлось  $n$  линейно независимых собственных векторов  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ , то  $L$  представим в виде

$$L = PDP^{-1}.$$

## Доказательство

Заметим, что  $P\mathbf{e}_i = \mathbf{v}_i$ , и  $L P\mathbf{e}_i = \lambda_i P\mathbf{e}_i$ .

Домножаем на  $P^{-1}$  и получаем  $P^{-1} L P\mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i$ .

# Диагонализация: мне повезёт!

## Утверждение

Если у оператора  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  нашлось  $n$  линейно независимых собственных векторов  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ , то  $L$  представим в виде

$$L = PDP^{-1}.$$

## Доказательство

Заметим, что  $P\mathbf{e}_i = \mathbf{v}_i$ , и  $L P\mathbf{e}_i = \lambda_i P\mathbf{e}_i$ .

Домножаем на  $P^{-1}$  и получаем  $P^{-1} L P\mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i$ .

Диагональная матрица растягивает базисные вектора,  
 $P^{-1} L P\mathbf{e}_i = D\mathbf{e}_i$ .

# Диагонализация: мне повезёт!

## Утверждение

Если у оператора  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  нашлось  $n$  линейно независимых собственных векторов  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ , то  $L$  представим в виде

$$L = PDP^{-1}.$$

## Доказательство

Заметим, что  $P\mathbf{e}_i = \mathbf{v}_i$ , и  $L P\mathbf{e}_i = \lambda_i P\mathbf{e}_i$ .

Домножаем на  $P^{-1}$  и получаем  $P^{-1} L P\mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i$ .

Диагональная матрица растягивает базисные вектора,  
 $P^{-1} L P\mathbf{e}_i = D\mathbf{e}_i$ .

$$D = P^{-1} L P, \text{ или } L = PDP^{-1}$$

# Диагонализация матрицы

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)

# След матрицы

# Краткий план:

- Сумма диагональных элементов.



# Краткий план:

- Сумма диагональных элементов.
- Свойства следа.

# След квадратной матрицы

## Определение

Следом квадратной матрицы  $L$  называют сумму её диагональных элементов.

$$\text{tr } L = \ell_{11} + \ell_{22} + \dots + \ell_{nn}$$

# След квадратной матрицы

## Определение

Следом квадратной матрицы  $L$  называют сумму её диагональных элементов.

$$\operatorname{tr} L = \ell_{11} + \ell_{22} + \dots + \ell_{nn}$$

Пример.  $\operatorname{tr} \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} = 4 + 1 = 5.$

# Основное свойство следа

## Утверждение

Если матрицы  $A$  и  $B$  имеют размер  $n \times k$ , то

$$\operatorname{tr} A^T B = \sum_{ij} a_{ij} b_{ij} = \operatorname{tr} B^T A$$

# Основное свойство следа

## Утверждение

Если матрицы  $A$  и  $B$  имеют размер  $n \times k$ , то

$$\operatorname{tr} A^T B = \sum_{ij} a_{ij} b_{ij} = \operatorname{tr} B^T A$$

Пример.  $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$ .

$$\operatorname{tr} A^T B = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4$$

# Основное свойство следа

## Утверждение

Если матрицы  $A$  и  $B$  имеют размер  $n \times k$ , то

$$\operatorname{tr} A^T B = \sum_{ij} a_{ij} b_{ij} = \operatorname{tr} B^T A$$

# Основное свойство следа

## Утверждение

Если матрицы  $A$  и  $B$  имеют размер  $n \times k$ , то

$$\operatorname{tr} A^T B = \sum_{ij} a_{ij} b_{ij} = \operatorname{tr} B^T A$$

## Доказательство

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} A^T B &= \sum_i \langle \operatorname{row}_i A^T, \operatorname{col}_i B \rangle = \\ &= \sum_i \langle \operatorname{col}_i A, \operatorname{col}_i B \rangle = \sum_{ij} a_{ij} b_{ij} \end{aligned}$$

# И ещё немного свойств

Если  $A$  имеет размер  $n \times k$ , а  $B$  — размер  $k \times n$ , то:

$$\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$$



# И ещё немного свойств

Если  $A$  имеет размер  $n \times k$ , а  $B$  — размер  $k \times n$ , то:

$$\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$$

След — линейный оператор, превращающий матрицы размера  $n \times n$  в числа!

# И ещё немного свойств

Если  $A$  имеет размер  $n \times k$ , а  $B$  — размер  $k \times n$ , то:

$$\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$$

След — линейный оператор, превращающий матрицы размера  $n \times n$  в числа!

$$\operatorname{tr} \lambda A = \lambda \operatorname{tr} A$$

$$\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$$

# Зачем нужен след?

# Зачем нужен след?

Элегантно позволяет записывать сложные выражения.

$$\sum_{ij} a_{ij}^2 = \text{tr } A^T A$$

# Зачем нужен след?

Элегантно позволяет записывать сложные выражения.

$$\sum_{ij} a_{ij}^2 = \text{tr } A^T A$$

Упрощает теоретические выкладки.

# Вокруг собственных чисел

# Краткий план:

- Реинкарнация теоремы Виета.

# Краткий план:

- Реинкарнация теоремы Виета.
- Обратимость и собственные числа.



# Краткий план:

- Реинкарнация теоремы Виета.
- Обратимость и собственные числа.
- Собственные числа проектора.

# Характеристический многочлен и след

Рассмотрим пример характеристического многочлена:

$$\text{char}_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 5 & 6 \\ 1 & 2 - \lambda & 2 \\ 4 & 3 & 7 - \lambda \end{vmatrix} =$$

# Характеристический многочлен и след

Рассмотрим пример характеристического многочлена:

$$\text{char}_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 5 & 6 \\ 1 & 2 - \lambda & 2 \\ 4 & 3 & 7 - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (4 - \lambda)(2 - \lambda)(7 - \lambda) + \dots = -\lambda^3 + \lambda^2(4 + 2 + 7) + \dots$$

# Характеристический многочлен и след

Рассмотрим пример характеристического многочлена:

$$\text{char}_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 5 & 6 \\ 1 & 2 - \lambda & 2 \\ 4 & 3 & 7 - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (4 - \lambda)(2 - \lambda)(7 - \lambda) + \dots = -\lambda^3 + \lambda^2(4 + 2 + 7) + \dots$$

$$= -\lambda^3 + \text{tr } A \cdot \lambda^2 + \dots$$

# Характеристический многочлен и след

## Утверждение

В характеристическом многочлене  $\text{char}_A(\lambda)$  матрицы  $A$  размера  $n \times n$  перед  $\lambda^{n-1}$  стоит  $(-1)^{n-1} \text{tr } A$ :

$$\text{char}_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \text{tr } A \lambda^{n-1} + \dots$$

# Характеристический многочлен и след

## Утверждение

В характеристическом многочлене  $\text{char}_A(\lambda)$  матрицы  $A$  размера  $n \times n$  перед  $\lambda^{n-1}$  стоит  $(-1)^{n-1} \text{tr } A$ :

$$\text{char}_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \text{tr } A \lambda^{n-1} + \dots$$

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{char}_A(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 3$$

# Характеристический многочлен и след

## Утверждение

В характеристическом многочлене  $\text{char}_A(\lambda)$  матрицы  $A$  размера  $n \times n$  перед  $\lambda^{n-1}$  стоит  $(-1)^{n-1} \text{tr } A$ :

$$\text{char}_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \text{tr } A \lambda^{n-1} + \dots$$

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{char}_A(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 3$$

Пример.

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}, \text{char}_B(\lambda) = -\lambda^3 + 13\lambda^2 + \dots$$

# Реинкарнация теоремы Виета

## Утверждение

Если у матрицы  $A$  размера  $n \times n$  ровно  $n$  действительных собственных чисел  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , то



# Реинкарнация теоремы Виета

## Утверждение

Если у матрицы  $A$  размера  $n \times n$  ровно  $n$  действительных собственных чисел  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , то

$$\text{char}_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdot \dots \cdot (\lambda_n - \lambda)$$

# Реинкарнация теоремы Виета

## Утверждение

Если у матрицы  $A$  размера  $n \times n$  ровно  $n$  действительных собственных чисел  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , то

$$\text{char}_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdot \dots \cdot (\lambda_n - \lambda)$$

## Следствия

$$\det A = \prod_{i=1}^n \lambda_i;$$

# Реинкарнация теоремы Виета

## Утверждение

Если у матрицы  $A$  размера  $n \times n$  ровно  $n$  действительных собственных чисел  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , то

$$\text{char}_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdot \dots \cdot (\lambda_n - \lambda)$$

## Следствия

$$\det A = \prod_{i=1}^n \lambda_i;$$

$$\text{tr } A = \sum_{i=1}^n \lambda_i;$$

# Пополним критерий вырожденности!

Матрица  $A$  размера  $n \times n$  называется **вырожденной**, если:

1.  $\det A = 0$ ;
2. Система  $Ax = 0$  имеет бесконечное количество решений;
3. Система  $Ax = b$  имеет ноль или бесконечное количество решений;
4.  $\text{rank } A < n$ ;
5. Столбцы  $A$  линейно зависимы;
6. Строки  $A$  линейно зависимы;
7.  $A^{-1}$  не существует;
8. У матрицы  $A$  есть  $\lambda = 0$ .

# Собственные числа проектора

Оператор  $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  проецирует  $\mathbb{R}^n$  на некоторую линейную оболочку  $M$ .

# Собственные числа проектора

Оператор  $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  проецирует  $\mathbb{R}^n$  на некоторую линейную оболочку  $M$ .

## Утверждение

Собственные числа проектора  $H$  равны 0 или 1.

# Собственные числа проектора

Оператор  $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  проецирует  $\mathbb{R}^n$  на некоторую линейную оболочку  $M$ .

## Утверждение

Собственные числа проектора  $H$  равны 0 или 1.

Собственными векторами с  $\lambda = 0$  будут векторы, ортогональные  $M$ .

# Собственные числа проектора

Оператор  $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  проецирует  $\mathbb{R}^n$  на некоторую линейную оболочку  $M$ .

## Утверждение

Собственные числа проектора  $H$  равны 0 или 1.

Собственными векторами с  $\lambda = 0$  будут векторы, ортогональные  $M$ .

Собственными векторами с  $\lambda = 1$  будут векторы из  $M$ .



# Собственные числа проектора

Оператор  $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  проецирует  $\mathbb{R}^n$  на некоторую линейную оболочку  $M$ .

## Утверждение

Собственные числа проектора  $H$  равны 0 или 1.

Собственными векторами с  $\lambda = 0$  будут векторы, ортогональные  $M$ .

Собственными векторами с  $\lambda = 1$  будут векторы из  $M$ .

У проектора ровно  $n$  линейно независимых собственных векторов.

# Ранг и след проектора

Оператор  $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  проецирует  $\mathbb{R}^n$  на некоторую линейную оболочку  $M$ .

# Ранг и след проектора

Оператор  $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  проецирует  $\mathbb{R}^n$  на некоторую линейную оболочку  $M$ .

Ранг проектора — число элементов в базисе  $M$ .

# Ранг и след проектора

Оператор  $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  проецирует  $\mathbb{R}^n$  на некоторую линейную оболочку  $M$ .

Ранг проектора — число элементов в базисе  $M$ .

След проектора — кратность собственного числа  $\lambda = 1$ :

$$\operatorname{tr} H = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$$

# Ранг и след проектора

Оператор  $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  проецирует  $\mathbb{R}^n$  на некоторую линейную оболочку  $M$ .

Ранг проектора — число элементов в базисе  $M$ .

След проектора — кратность собственного числа  $\lambda = 1$ :

$$\operatorname{tr} H = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$$

## Утверждение

Для проектора  $H$  след и ранг равны размерности множества, на которое проецирует  $H$ ,

$$\operatorname{rank} H = \operatorname{tr} H.$$

# Комплексные собственные числа

# Краткий план:

- Комплексные числа.

# Краткий план:

- Комплексные числа.
- Основная теорема алгебры.



# Комплексные числа как мистика

Множество  $\mathbb{C}$  вида

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

с естественным сложением и умножением по правилу  $i^2 = -1$  называется множеством **комплексных чисел**.

# Комплексные числа как мистика

Множество  $\mathbb{C}$  вида

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

с естественным сложением и умножением по правилу  $i^2 = -1$  называется множеством **комплексных чисел**.

Пример.

$$(5 + 6i) + (2 + i) = 7 + 7i$$

# Комплексные числа как мистика

Множество  $\mathbb{C}$  вида

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

с естественным сложением и умножением по правилу  $i^2 = -1$  называется множеством **комплексных чисел**.

Пример.

$$(5 + 6i) + (2 + i) = 7 + 7i$$

$$(5 + 6i)(2 + i) = 10 + 17i + 6i^2 = 10 - 6 + 17i = 4 + 17i$$

# Комплексные числа как мистика

Множество  $\mathbb{C}$  вида

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

с естественным сложением и умножением по правилу  $i^2 = -1$  называется множеством **комплексных чисел**.

Пример.

$$(5 + 6i) + (2 + i) = 7 + 7i$$

$$(5 + 6i)(2 + i) = 10 + 17i + 6i^2 = 10 - 6 + 17i = 4 + 17i$$

$$\frac{5 + 6i}{2 - i} = \frac{(5 + 6i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{4 + 17i}{4 - i^2} = \frac{4}{5} + \frac{17}{5}i$$

# Комплексные числа как операторы

## Идея

Комплексное число  $a + bi$  — способ записывать повороты плоскости, растяжения плоскости и композиции этих действий.

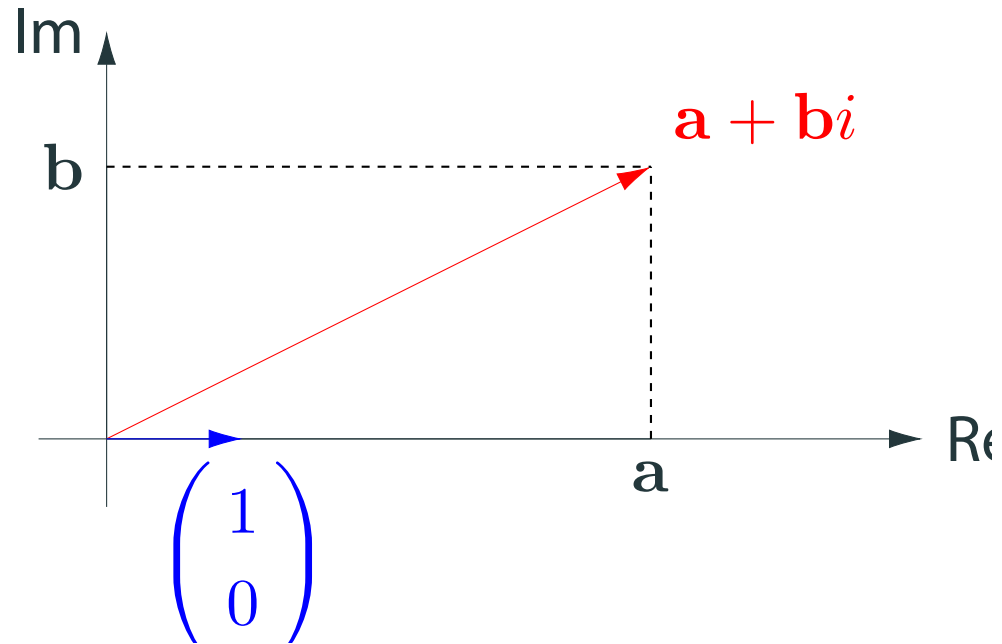
# Комплексные числа как операторы

## Идея

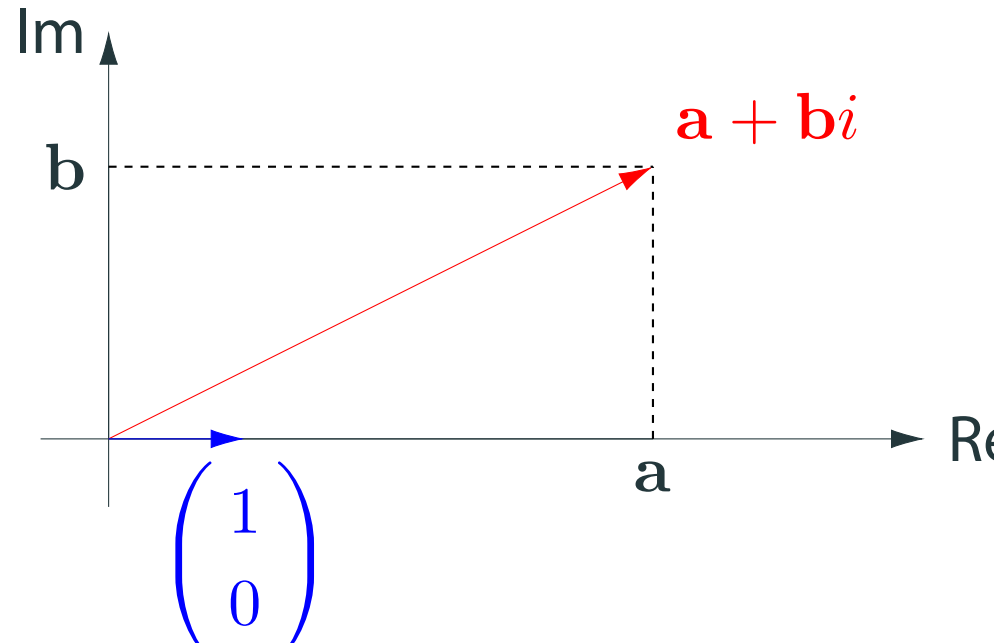
Комплексное число  $a + bi$  — способ записывать повороты плоскости, растяжения плоскости и композиции этих действий.

$a + bi \leftrightarrow$  преобразование плоскости!

# Комплексные числа как операторы



# Комплексные числа как операторы



Число  $a + bi$  кодирует преобразование плоскости

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$



# Никакой мистики!

Поворот на  $90^\circ$ :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 0 + 1 \cdot i = i$$

# Никакой мистики!

Поворот на  $90^\circ$ :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 0 + 1 \cdot i = i$$

Растягивание в 7 раз:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 7 + 0 \cdot i = 7$$

# Никакой мистики!

Поворот на  $90^\circ$ :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow 0 + 1 \cdot i = i$$

Растягивание в 7 раз:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow 7 + 0 \cdot i = 7$$

Растягивание в  $\sqrt{2}$  раз и вращение на  $45^\circ$ :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow 1 + 1 \cdot i = 1 + i$$

# Никакой мистики!

Поворот на  $90^\circ$ :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 0 + 1 \cdot i = i$$

Два поворота подряд на  $90^\circ$ :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -1 + 0i = -1$$

# Никакой мистики!

Поворот на  $90^\circ$ :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 0 + 1 \cdot i = i$$

Два поворота подряд на  $90^\circ$ :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -1 + 0i = -1$$

Если повернуться на  $90^\circ$ , а затем повернуться ещё на  $90^\circ$ , то развернёшься в обратную сторону,  $i \cdot i = -1$ .

# Комплексные числа как операторы

## Определение

Множество  $\mathbb{C}$  преобразований плоскости, включающее повороты плоскости, растяжения плоскости в произвольное количество раз и композиции этих двух действий, называется множеством **комплексных чисел**.

# Комплексные числа как операторы

## Определение

Множество  $\mathbb{C}$  преобразований плоскости, включающее повороты плоскости, растяжения плоскости в произвольное количество раз и композиции этих двух действий, называется множеством **комплексных чисел**.

Растягивание в 7 раз  $\leftrightarrow 7$ .

# Комплексные числа как операторы

## Определение

Множество  $\mathbb{C}$  преобразований плоскости, включающее повороты плоскости, растяжения плоскости в произвольное количество раз и композиции этих двух действий, называется множеством **комплексных чисел**.

Растягивание в 7 раз  $\leftrightarrow 7$ .

Поворот на  $90^\circ \leftrightarrow i$ .



# Комплексные числа как операторы

## Определение

Множество  $\mathbb{C}$  преобразований плоскости, включающее повороты плоскости, растяжения плоскости в произвольное количество раз и композиции этих двух действий, называется множеством **комплексных чисел**.

Растягивание в 7 раз  $\leftrightarrow 7$ .

Поворот на  $90^\circ \leftrightarrow i$ .

Для  $z \in \mathbb{C}$  определяют:

Модуль  $|z|$  — во сколько раз изменяется длина вектора.

Аргумент  $\arg z$  — на сколько изменяется угол вектора.

# Основная теорема алгебры

## Утверждение

Любой многочлен  $f(z)$  степени  $n$  имеет ровно  $n$  корней, если считать корни  $z \in \mathbb{C}$  с учётом алгебраической кратности.

# Основная теорема алгебры

## Утверждение

Любой многочлен  $f(z)$  степени  $n$  имеет ровно  $n$  корней, если считать корни  $z \in \mathbb{C}$  с учётом алгебраической кратности.

$$f(z) = a(z - z_1)(z - z_2) \cdot \dots \cdot (z - z_n)$$

# Основная теорема алгебры

## Утверждение

Любой многочлен  $f(z)$  степени  $n$  имеет ровно  $n$  корней, если считать корни  $z \in \mathbb{C}$  с учётом алгебраической кратности.

$$f(z) = a(z - z_1)(z - z_2) \cdot \dots \cdot (z - z_n)$$

## Следствие

У любой квадратной матрицы размера  $n \times n$  найдётся ровно  $n$  комплексных собственных чисел  $\lambda \in \mathbb{C}$  с учётом алгебраической кратности.

# След линейного оператора

## Определение

**Следом** линейного оператора  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  называют сумму всех его комплексных собственных чисел  $\lambda_i \in \mathbb{C}$ ,

$$\operatorname{tr} L = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n.$$

# След линейного оператора

## Определение

**Следом** линейного оператора  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  называют сумму всех его комплексных собственных чисел  $\lambda_i \in \mathbb{C}$ ,

$$\operatorname{tr} L = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n.$$

Пример. Если  $\operatorname{char}_A(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda - 5)^2$ , то  $\operatorname{tr} A = 1 + 5 + 5 = 11$ .

# След линейного оператора

## Определение

**Следом** линейного оператора  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  называют сумму всех его комплексных собственных чисел  $\lambda_i \in \mathbb{C}$ ,

$$\operatorname{tr} L = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n.$$

Пример. Если  $\operatorname{char}_A(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda - 5)^2$ , то  
 $\operatorname{tr} A = 1 + 5 + 5 = 11$ .

Пример. Если  $\operatorname{char}_A(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda - 2 + 3i)(\lambda - 2 - 3i)$ , то  
 $\operatorname{tr} A = 1 + (2 - 3i) + (2 + 3i) = 5$ .

# Определитель линейного оператора

## Утверждение

Определитель линейного оператора  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  равен произведению всех его комплексных собственных чисел  $\lambda_i \in \mathbb{C}$ ,

$$\det L = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n.$$



# Нахождение проектора

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)

# Прогнозирование с помощью мнк

Это скринкаст, слайдов здесь нет :)

## **Бонус: задача про Чабана и 101 овцу**

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)