Квадратичные формы

Метод полных квадратов

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)

Диагонализация квадратичной формы

Краткий план:

- Симметричная матрица и собственные числа.

Краткий план:

- Симметричная матрица и собственные числа.
- Диагонализация квадратичной формы.

Всегда диагонализуема!

Утверждение

Если A — симметричная матрица, $A^T = A$, то у неё всегда найдётся ровно n действительных собственных чисел λ_i

Всегда диагонализуема!

Утверждение

Если A — симметричная матрица, $A^T = A$, то у неё всегда найдётся ровно n действительных собственных чисел λ_i и ровно n линейно независимых ортогональных собственных векторов.

Всегда диагонализуема!

Утверждение

Если A — симметричная матрица, $A^T = A$, то у неё всегда найдётся ровно n действительных собственных чисел λ_i и ровно n линейно независимых ортогональных собственных векторов.

Следствие

У симметричной A можно найти n ортогональных собственных векторов единичной длины.

Симметричная матрица A всегда диагонализуема!

Чем хороши ортогональные векторы?

Векторы $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ — ортогональные и единичной длины.

$$P = \begin{pmatrix} | & & | \\ \mathbf{v}_1 & \ldots & \mathbf{v}_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

Чем хороши ортогональные векторы?

Векторы $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ — ортогональные и единичной длины.

$$P = \begin{pmatrix} | & & | \\ \mathbf{v}_1 & \ldots & \mathbf{v}_n \\ | & & | \end{pmatrix} \qquad P^T = \begin{pmatrix} \text{---} & \mathbf{v}_1 & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & \mathbf{v}_n & \text{---} \end{pmatrix}$$

Чем хороши ортогональные векторы?

Векторы $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ — ортогональные и единичной длины.

$$P = \begin{pmatrix} | & & | \\ \mathbf{v}_1 & \ldots & \mathbf{v}_n \\ | & & | \end{pmatrix} \qquad P^T = \begin{pmatrix} \text{---} & \mathbf{v}_1 & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & \mathbf{v}_n & \text{---} \end{pmatrix}$$

$$P^T P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} = \mathsf{I}$$

Чем хороши ортогональные векторы?

Векторы $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ — ортогональные и единичной длины.

$$P = \begin{pmatrix} | & & | \\ \mathbf{v}_1 & \ldots & \mathbf{v}_n \\ | & & | \end{pmatrix} \qquad P^T = \begin{pmatrix} \text{---} & \mathbf{v}_1 & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & \mathbf{v}_n & \text{---} \end{pmatrix}$$

$$P^T P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} = \mathsf{I}$$

$$P^T = P^{-1}$$

Диагонализация формы

Утверждение

Квадратичная форма $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ с симметричной A представима в виде

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T PDP^{-1}\mathbf{x},$$

где D — диагональная матрица из собственных чисел матрицы A, а P — матрица из линейно независимых собственных векторов матрицы A.

Диагонализация формы

Утвеждение

Квадратичная форма $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ с симметричной A представима в виде

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T PDP^{-1}\mathbf{x},$$

где D — диагональная матрица из собственных чисел матрицы A, а P — матрица из линейно независимых собственных векторов матрицы A.

Утвеждение

Всегда можно выбрать ортогональные собственные векторы A единичной длины, при этом представление примет вид:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T PDP^T\mathbf{x} = (P^T\mathbf{x})^T D(P^T\mathbf{x}),$$

Диагонализация формы

Утвеждение

Всегда можно выбрать ортогональные собственные векторы единичной длины, при этом представление примет вид:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T PDP^T\mathbf{x} = (P^T\mathbf{x})^T D(P^T\mathbf{x}),$$

где D — диагональная матрица из собственных чисел матрицы A, а P — матрица из собственных векторов матрицы A.

Диагонализация формы

Утвеждение

Всегда можно выбрать ортогональные собственные векторы единичной длины, при этом представление примет вид:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T PDP^T\mathbf{x} = (P^T\mathbf{x})^T D(P^T\mathbf{x}),$$

где D — диагональная матрица из собственных чисел матрицы A, а P — матрица из собственных векторов матрицы A.

$$f(\mathbf{x}) = (P^T\mathbf{x})^T D(P^T\mathbf{x}) = \mathbf{y}^T D\mathbf{y} =$$
$$= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$$

Диагонализация формы

Утвеждение

Всегда можно выбрать ортогональные собственные векторы единичной длины, при этом представление примет вид:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T PDP^T\mathbf{x} = (P^T\mathbf{x})^T D(P^T\mathbf{x}),$$

где D — диагональная матрица из собственных чисел матрицы A, а P — матрица из собственных векторов матрицы A.

$$f(\mathbf{x}) = (P^T\mathbf{x})^T D(P^T\mathbf{x}) = \mathbf{y}^T D\mathbf{y} =$$

$$= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$$

Это просто удачная замена переменных $\mathbf{y} = P^T\mathbf{x}$!

Определённость формы

Пример, $f(\mathbf{x}) = 5y_1^2 + 6y_2^2 - 9y_3^2$.

Определённость формы

Пример, $f(\mathbf{x}) = 5y_1^2 + 6y_2^2 - 9y_3^2$.

Квадратичная форма f неопределена.

Определённость формы

Пример, $f(\mathbf{x}) = 5y_1^2 + 6y_2^2 - 9y_3^2$.

Квадратичная форма f неопределена.

Утверждение

Квадратичная форма

$$f(\mathbf{x}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + ... + \lambda_n y_n^2$$

является…

Определённость формы

Пример, $f(\mathbf{x}) = 5y_1^2 + 6y_2^2 - 9y_3^2$.

Квадратичная форма f неопределена.

Утверждение

Квадратичная форма

$$f(\mathbf{x}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$$

является…

положительно определённой, если все $\lambda_i > 0$.

Определённость формы

Пример, $f(\mathbf{x}) = 5y_1^2 + 6y_2^2 - 9y_3^2$.

Квадратичная форма f неопределена.

Утверждение

Квадратичная форма

$$f(\mathbf{x}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + ... + \lambda_n y_n^2$$

является…

положительно определённой, если все $\lambda_i > 0$.

отрицательно определённой, если все $\lambda_i < 0$.

Определённость формы

Пример, $f(\mathbf{x}) = 5y_1^2 + 6y_2^2 - 9y_3^2$.

Квадратичная форма f неопределена.

Утверждение

Квадратичная форма

$$f(\mathbf{x}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$$

является…

положительно определённой, если все $\lambda_i > 0$.

отрицательно определённой, если все $\lambda_i < 0$.

положительно полуопределённой, если все $\lambda_i \geq 0$.

Определённость формы

Пример, $f(\mathbf{x}) = 5y_1^2 + 6y_2^2 - 9y_3^2$.

Квадратичная форма f неопределена.

Утверждение

Квадратичная форма

$$f(\mathbf{x}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$$

является…

положительно определённой, если все $\lambda_i > 0$.

отрицательно определённой, если все $\lambda_i < 0$.

положительно полуопределённой, если все $\lambda_i \geq 0$.

отрицательно полуопределённой, если все $\lambda_i \leq 0$.

Определённость формы

Пример, $f(\mathbf{x}) = 5y_1^2 + 6y_2^2 - 9y_3^2$.

Квадратичная форма f неопределена.

Утверждение

Квадратичная форма

$$f(\mathbf{x}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$$

является…

положительно определённой, если все $\lambda_i > 0$.

отрицательно определённой, если все $\lambda_i < 0$.

положительно полуопределённой, если все $\lambda_i \geq 0$.

отрицательно полуопределённой, если все $\lambda_i \leq 0$.

неопределённой, если найдётся $\lambda_i > 0$ и $\lambda_j < 0$.

Кусочек доказательства

Утверждение

Для симметричной матрицы A, $A^T = A$, собственные вектора, соответствующие разным λ, ортогональны.

Кусочек доказательства

Утверждение

Для симметричной матрицы A, $A^T = A$, собственные вектора, соответствующие разным λ, ортогональны.

Доказательство

К примеру, $A\mathbf{x} = 5\mathbf{x}$ и $A\mathbf{y} = 7\mathbf{y}$.

Кусочек доказательства

Утверждение

Для симметричной матрицы A, $A^T = A$, собственные вектора, соответствующие разным λ, ортогональны.

Доказательство

К примеру, $A\mathbf{x} = 5\mathbf{x}$ и $A\mathbf{y} = 7\mathbf{y}$.

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \langle 5\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = 5\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$$

Кусочек доказательства

Утверждение

Для симметричной матрицы A, $A^T = A$, собственные вектора, соответствующие разным λ, ортогональны.

Доказательство

К примеру, $A\mathbf{x} = 5\mathbf{x}$ и $A\mathbf{y} = 7\mathbf{y}$.

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \langle 5\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = 5\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$$
$$\langle \mathbf{x}, A\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, 7\mathbf{y}\rangle = 7\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$$

Кусочек доказательства

Утверждение

Для симметричной матрицы A, $A^T = A$, собственные вектора, соответствующие разным λ, ортогональны.

Доказательство

К примеру, $A\mathbf{x} = 5\mathbf{x}$ и $A\mathbf{y} = 7\mathbf{y}$.

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \langle 5\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = 5\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$$
$$\langle \mathbf{x}, A\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, 7\mathbf{y}\rangle = 7\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$$
$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, A^T\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, A\mathbf{y}\rangle$$

Кусочек доказательства

Утверждение

Для симметричной матрицы A, $A^T = A$, собственные вектора, соответствующие разным λ, ортогональны.

Доказательство

К примеру, $A\mathbf{x} = 5\mathbf{x}$ и $A\mathbf{y} = 7\mathbf{y}$.

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \langle 5\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = 5\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$$
$$\langle \mathbf{x}, A\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, 7\mathbf{y}\rangle = 7\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$$
$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, A^T\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, A\mathbf{y}\rangle$$

Равенство возможно, только если $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$:

$$5\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = 7\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$$

Критерий Сильвестра

Краткий план:

- Критерий Сильвестра.

Краткий план:

- Критерий Сильвестра.
- Расширенный критерий Сильвестра.

Обозначение

Будем вычёркивать из матрицы A строки и столбцы так, чтобы остались строки и столбцы с одинаковыми номерами.

Обозначение

Будем вычёркивать из матрицы A строки и столбцы так, чтобы остались строки и столбцы с одинаковыми номерами.

Скажем, оставим в матрице A только 2-ю и 4-ю строки и 2-й и 4-й столбцы.

Обозначение

Будем вычёркивать из матрицы A строки и столбцы так, чтобы остались строки и столбцы с одинаковыми номерами.

Скажем, оставим в матрице A только 2-ю и 4-ю строки и 2-й и 4-й столбцы.

Определитель полученной подматрицы обозначим m_{24}.

Обозначение

Будем вычёркивать из матрицы A строки и столбцы так, чтобы остались строки и столбцы с одинаковыми номерами.

Скажем, оставим в матрице A только 2-ю и 4-ю строки и 2-й и 4-й столбцы.

Определитель полученной подматрицы обозначим m_{24}.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 6 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 9 & 5 \\ -1 & 1 & 5 & 8 \end{pmatrix}, \quad m_{24} = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 47.$$

Названия миноров

Определения

В матрице A вычеркнули несколько строк и столбцов так, что остались строки и столбцы с одинаковыми номерами.

Определитель полученной подматрицы называется **главным минором**.

Названия миноров

Определения

В матрице A вычеркнули несколько строк и столбцов так, что остались строки и столбцы с одинаковыми номерами.

Определитель полученной подматрицы называется *главным минором*.

Определения

В матрице A вычеркнули несколько строк и столбцов так, что остались строки и столбцы с номерами $1, 2, \ldots, k$.

Определитель полученной подматрицы называется *угловым минором*.

Названия миноров

Определения

В матрице A вычеркнули несколько строк и столбцов так, что остались строки и столбцы с одинаковыми номерами.

Определитель полученной подматрицы называется главным минором.

Определения

В матрице A вычеркнули несколько строк и столбцов так, что остались строки и столбцы с номерами $1, 2, \ldots, k$.

Определитель полученной подматрицы называется угловым минором.

Определение

Порядком минора называется число строк (или столбцов) в соответствующей подматрице.

Критерий Сильвестра

Утверждение

Симметричная матрица A является положительно определённой, если и только если

$m_1 > 0, m_{12} > 0, m_{123} > 0, m_{1234} > 0, \ldots$

Критерий Сильвестра

Утверждение

Симметричная матрица A является положительно определённой, если и только если

$m_1 > 0, m_{12} > 0, m_{123} > 0, m_{1234} > 0, \ldots$

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

$$m_1 = 5,\ m_{12} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 26,\ m_{123} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 9 \end{vmatrix} = 184$$

Наблюдение

Утверждение

Если помножить на (-1) все элементы матрицы A размера $n \times n$, то определитель матрица $A\ldots$

Наблюдение

Утверждение

Если помножить на (-1) все элементы матрицы A размера $n \times n$, то определитель матрица A…

поменяет знак, если n — нечётное;

Наблюдение

Утверждение

Если помножить на (-1) все элементы матрицы A размера $n \times n$, то определитель матрица $A\ldots$

поменяет знак, если n — нечётное;

сохранит знак, если n — чётное.

Наблюдение

Утверждение

Если помножить на (-1) все элементы матрицы A размера $n \times n$, то определитель матрица A…

поменяет знак, если n — нечётное;

сохранит знак, если n — чётное.

Легко получим критерий отрицательной определённости!

Критерий Сильвестра

Утверждение

Симметричная матрица A является отрицательно определённой, если и только если

$m_1 < 0$, $m_{12} > 0$, $m_{123} < 0$, $m_{1234} > 0$, …

Критерий Сильвестра

Утверждение

Симметричная матрица A является отрицательно определённой, если и только если

$m_1 < 0$, $m_{12} > 0$, $m_{123} < 0$, $m_{1234} > 0$, …

Пример.

$$B = \begin{pmatrix} -5 & -2 & -3 \\ -2 & -6 & -2 \\ -3 & -2 & -9 \end{pmatrix}$$

$$m_1 = -5,\ m_{12} = \begin{vmatrix} -5 & -2 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} = 26,\ m_{123} = \begin{vmatrix} -5 & -2 & -3 \\ -2 & -6 & -2 \\ -3 & -2 & -9 \end{vmatrix} = -184$$

Расширенный критерий

Утверждение

Симметричная матрица A является положительно полуопределённой, если и только если (для всех i, j, k, $\ldots$)

$m_i \geq 0$, $m_{ij} \geq 0$, $m_{ijk} \geq 0$, $m_{ijkl} \geq 0$, $\ldots$

Расширенный критерий

Утверждение

Симметричная матрица A является положительно полуопределённой, если и только если (для всех i, j, k, $\ldots$)

$m_i \geq 0$, $m_{ij} \geq 0$, $m_{ijk} \geq 0$, $m_{ijkl} \geq 0$, $\ldots$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$m_1 = 4,\ m_2 = 9,\ m_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

Расширенный критерий

Утверждение

Симметричная матрица A является отрицательно полуопределённой, если и только если (для всех i, j, k, $\ldots$)

$m_i \leq 0$, $m_{ij} \geq 0$, $m_{ijk} \leq 0$, $m_{ijkl} \geq 0$, $\ldots$

Расширенный критерий

Утверждение

Симметричная матрица A является отрицательно полуопределённой, если и только если (для всех i, j, k, $\ldots$)

$m_i \leq 0$, $m_{ij} \geq 0$, $m_{ijk} \leq 0$, $m_{ijkl} \geq 0$, $\ldots$

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}$$

$$m_1 = -4,\ m_2 = -9,\ m_{12} = \begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 6 & -9 \end{vmatrix} = 0$$

Резюме для положительной формы

Утверждение

Квадратичная форма $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ является положительно определённой, если

Резюме для положительной формы

Утверждение

Квадратичная форма $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ является положительно определённой, если

1. В любой точке $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ она положительна, $f(\mathbf{x}) > 0$.

Резюме для положительной формы

Утверждение

Квадратичная форма $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ является положительно определённой, если

1. В любой точке $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ она положительна, $f(\mathbf{x}) > 0$.
2. Все собственные числа матрицы A положительны, $\lambda_i > 0$.

Резюме для положительной формы

Утверждение

Квадратичная форма $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ является положительно определённой, если

1. В любой точке $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ она положительна, $f(\mathbf{x}) > 0$.
2. Все собственные числа матрицы A положительны, $\lambda_i > 0$.
3. Все угловые миноры матрицы A положительны, $m_{12\ldots k} > 0$.

Резюме для отрицательной формы

Утверждение

Квадратичная форма $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ является отрицательно определённой, если

Резюме для отрицательной формы

Утверждение

Квадратичная форма $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ является отрицательно определённой, если

1. В любой точке $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ она отрицательна, $f(\mathbf{x}) > 0$.

Резюме для отрицательной формы

Утверждение

Квадратичная форма $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ является отрицательно определённой, если

1. В любой точке $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ она отрицательна, $f(\mathbf{x}) > 0$.
2. Все собственные числа матрицы A отрицательны, $\lambda_i > 0$.

Резюме для отрицательной формы

Утверждение

Квадратичная форма $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ является отрицательно определённой, если

1. В любой точке $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ она отрицательна, $f(\mathbf{x}) > 0$.
2. Все собственные числа матрицы A отрицательны, $\lambda_i > 0$.
3. Нечётные угловые миноры матрицы A отрицательны, а чётные — положительны.

Резюме для полуопределённости

Утверждение

Квадратичная форма $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ является положительно полуопределённой (неотрицательно определённой), если

Резюме для полуопределённости

Утверждение

Квадратичная форма $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ является положительно полуопределённой (неотрицательно определённой), если

1. В любой точке $\mathbf{x}$ она неотрицательна, $f(\mathbf{x}) \geq 0$.

Резюме для полуопределённости

Утверждение

Квадратичная форма $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ является положительно полуопределённой (неотрицательно определённой), если

1. В любой точке $\mathbf{x}$ она неотрицательна, $f(\mathbf{x}) \geq 0$.
2. Все собственные числа матрицы A неотрицательны, $\lambda_i \geq 0$.

Резюме для полуопределённости

Утверждение

Квадратичная форма $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ является положительно полуопределённой (неотрицательно определённой), если

1. В любой точке $\mathbf{x}$ она неотрицательна, $f(\mathbf{x}) \geq 0$.
2. Все собственные числа матрицы A неотрицательны, $\lambda_i \geq 0$.
3. Все главные миноры матрицы A неотрицательны.

Резюме для полуопределённости

Утверждение

Квадратичная форма $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ является отрицательно полуопределённой (неположительно определённой), если

Резюме для полуопределённости

Утверждение

Квадратичная форма $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ является отрицательно полуопределённой (неположительно определённой), если

1. В любой точке $\mathbf{x}$ она неположительна, $f(\mathbf{x}) \leq 0$.

Резюме для полуопределённости

Утверждение

Квадратичная форма $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ является отрицательно полуопределённой (неположительно определённой), если

1. В любой точке $\mathbf{x}$ она неположительна, $f(\mathbf{x}) \leq 0$.
2. Все собственные числа матрицы A неположительны, $\lambda_i \leq 0$.

Резюме для полуопределённости

Утверждение

Квадратичная форма $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ является отрицательно полуопределённой (неположительно определённой), если

1. В любой точке $\mathbf{x}$ она неположительна, $f(\mathbf{x}) \leq 0$.
2. Все собственные числа матрицы A неположительны, $\lambda_i \leq 0$.
3. Нечётные главные миноры матрицы A неположительны, а чётные — неотрицательны.

Расширенный критерий Сильвестра: пример

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)

Матрица Грамма

Краткий план:

- Матрица Грама.

Краткий план:

- Матрица Грама.
- Матрица Грама и проекция.

Краткий план:

- Матрица Грама.
- Матрица Грама и проекция.
- Ортогональный базис.

Матрица Грама

Определение

Возьмём векторы $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, …, $\mathbf{x}_k$ из $\mathbb{R}^n$. Матрица их попарных скалярных произведений называется матрицей Грама,

$$M = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 \rangle & \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle & \ldots & \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_k \rangle \\ \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1 \rangle & \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2 \rangle & \ldots & \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_k \rangle \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \langle \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_1 \rangle & \langle \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_2 \rangle & \ldots & \langle \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k \rangle \end{pmatrix} = X^T X$$

Матрица Грама

Определение

Возьмём векторы $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, …, $\mathbf{x}_k$ из $\mathbb{R}^n$. Матрица их попарных скалярных произведений называется матрицей Грама,

$$M = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 \rangle & \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle & \ldots & \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_k \rangle \\ \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1 \rangle & \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2 \rangle & \ldots & \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_k \rangle \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \langle \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_1 \rangle & \langle \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_2 \rangle & \ldots & \langle \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k \rangle \end{pmatrix} = X^T X$$

А определитель этой матрицы называется определителем Грама, $G = \det M$.

Свойства матрицы Грама

Утверждение

Векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ линейно независимы если и только если определитель Грама отличен от нуля, $G \neq 0$.

Свойства матрицы Грама

Утверждение

Векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ линейно независимы если и только если определитель Грама отличен от нуля, $G \neq 0$.

Утверждение

Матрица Грама положительно полуопределена.

Свойства матрицы Грама

Утверждение

Векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ линейно независимы если и только если определитель Грама отличен от нуля, $G \neq 0$.

Утверждение

Матрица Грама положительно полуопределена.

Утверждение

Если $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ лежат в $\mathbb{R}^n$, то определитель Грама G равен квадрату объёма параллелепипеда, образованного векторами $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$.

Положительная полуопределённость

Утверждение

Матрица Грама положительно полуопределена.

Положительная полуопределённость

Утверждение

Матрица Грама положительно полуопределена.

Доказательство

$$\mathbf{v}^T M \mathbf{v} = \sum_{ij} v_i v_j \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle = \sum_{ij} \langle v_i \mathbf{x}_i, v_j \mathbf{x}_j \rangle =$$

Положительная полуопределённость

Утверждение

Матрица Грама положительно полуопределена.

Доказательство

$$\mathbf{v}^T M \mathbf{v} = \sum_{ij} v_i v_j \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle = \sum_{ij} \langle v_i \mathbf{x}_i, v_j \mathbf{x}_j \rangle =$$

$$= \langle \sum_i v_i \mathbf{x}_i, \sum_j v_j \mathbf{x}_j \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle \geq 0$$

Поиск проекции

Хотим найти проекцию $\hat{\mathbf{y}}$ вектора $\mathbf{y}$ на $\mathrm{Span}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k\}$.

Поиск проекции

Хотим найти проекцию $\hat{\mathbf{y}}$ вектора $\mathbf{y}$ на Span$\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k\}$.

Проекция $\hat{\mathbf{y}}$ — линейная комбинация $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$,

$$\hat{\mathbf{y}} = v_1\mathbf{x}_1 + \ldots + v_k\mathbf{x}_k = X\mathbf{v}$$

Поиск проекции

Хотим найти проекцию $\hat{\mathbf{y}}$ вектора $\mathbf{y}$ на Span$\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k\}$.

Проекция $\hat{\mathbf{y}}$ — линейная комбинация $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$,

$$\hat{\mathbf{y}} = v_1\mathbf{x}_1 + \ldots + v_k\mathbf{x}_k = X\mathbf{v}$$

Условия первого порядка:

$$X^T X\mathbf{v} = X^T y$$

Поиск проекции

Хотим найти проекцию $\hat{\mathbf{y}}$ вектора $\mathbf{y}$ на Span$\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k\}$.

Проекция $\hat{\mathbf{y}}$ — линейная комбинация $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$,

$$\hat{\mathbf{y}} = v_1\mathbf{x}_1 + \dots + v_k\mathbf{x}_k = X\mathbf{v}$$

Условия первого порядка:

$$X^T X\mathbf{v} = X^T y \text{ или } M\mathbf{v} = X^T y$$

Поиск проекции

Хотим найти проекцию $\hat{\mathbf{y}}$ вектора $\mathbf{y}$ на Span$\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k\}$.

Проекция $\hat{\mathbf{y}}$ — линейная комбинация $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$,

$$\hat{\mathbf{y}} = v_1\mathbf{x}_1 + \ldots + v_k\mathbf{x}_k = X\mathbf{v}$$

Условия первого порядка:

$$X^T X\mathbf{v} = X^T y \text{ или } M\mathbf{v} = X^T y$$

$$\mathbf{v} = M^{-1}X^T y.$$

Ортогональные вектора

Утверждение

Если векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ ортогональны, то их матрица Грама — диагональная.

$$M = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 \rangle & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2 \rangle & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \langle \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k \rangle \end{pmatrix}$$

Ортогонализация Грамма-Шмидта: пример

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)

Бонус: задача про переливание красок

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)