Квадратичные формы

Квадратичная форма

Краткий план:

- Определение квадратичной формы.

Краткий план:

- Определение квадратичной формы.
- Определённость формы.

Квадратичная форма

Определение

Многочлен от нескольких переменных $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, который содержит только слагаемые вида x_i^2 и $x_i x_j$ квадратичной формой.

Квадратичная форма

Определение

Многочлен от нескольких переменных $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, который содержит только слагаемые вида x_i^2 и $x_i x_j$ **квадратичной формой**.

Функция $f(x, y) = x^2 + 6xy - 7y^2$ — квадратичная форма.

Квадратичная форма

Определение

Многочлен от нескольких переменных $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, который содержит только слагаемые вида x_i^2 и $x_i x_j$ квадратичной формой.

Функция $f(x, y) = x^2 + 6xy - 7y^2$ — квадратичная форма.

Функция $f(x, y, z) = x^2 + 6xz - 8xy + 3z + 9$ — не квадратичная форма.

Зачем нужны квадратичные формы?

Многие функции хорошо аппроксимируются суммой вида

$$f(x, y) \approx 6 + 2x + 4y + 7x^2 + 8xy - 9y^2$$

Зачем нужны квадратичные формы?

Многие функции хорошо аппроксимируются суммой вида

$$f(x,y) \approx 6 + 2x + 4y + 7x^2 + 8xy - 9y^2$$

Свойства квадратичной формы позволяют понять свойства многих функций!

Квадратичная форма и матрицы

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3 \\ -1 & 7 & 2 \\ -3 & 2 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

Квадратичная форма и матрицы

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3 \\ -1 & 7 & 2 \\ -3 & 2 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$= 5x_1^2 + 7x_2^2 + 11x_3^2 - 2x_1x_2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3$$

Квадратичная форма и матрицы

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3 \\ -1 & 7 & 2 \\ -3 & 2 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$= 5x_1^2 + 7x_2^2 + 11x_3^2 - 2x_1x_2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3$$

Утверждение

Любая квадратичная форма $f(\mathbf{x})$ может быть записана в виде

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x},$$

где A — симметричная матрица, $A^T = A$.

Квадратичные формы в нуле

Утверждение

Любая квадратичная форма f равна 0 в точке $\mathbf{0}$,

$$f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}^T A \mathbf{0} = 0.$$

Квадратичные формы в нуле

Утверждение

Любая квадратичная форма f равна 0 в точке $\mathbf{0}$,

$$f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}^T A \mathbf{0} = 0.$$

Нас будет интересовать знак квадратичной формы $f(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

Положительно определённая форма

Определение

Форма f называется положительно определённой, если $f(\mathbf{x}) > 0$ при $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

Метод полных квадратов

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)

Расширенный критерий Сильвестра: пример

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)

Ортогонализация Грамма-Шмидта: пример

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)

Бонус: задача про переливание красок

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)