Определитель и обратная матрица

Идея определителя

Краткий план:

- Определитель на плоскости;

Краткий план:

- Определитель на плоскости;
- Определитель в пространстве.

Идея определителя

Рассмотрим оператор преобразования плоскости,
$\mathsf{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Пара векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ переходит в пару векторов $\mathsf{L}\,\mathbf{a}$, $\mathsf{L}\,\mathbf{b}$.

Идея определителя

Рассмотрим оператор преобразования плоскости, $\mathsf{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Пара векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ переходит в пару векторов $\mathsf{L}\,\mathbf{a}$, $\mathsf{L}\,\mathbf{b}$.

Как меняется площадь параллелограмма образованного двумя векторами?

Идея определителя

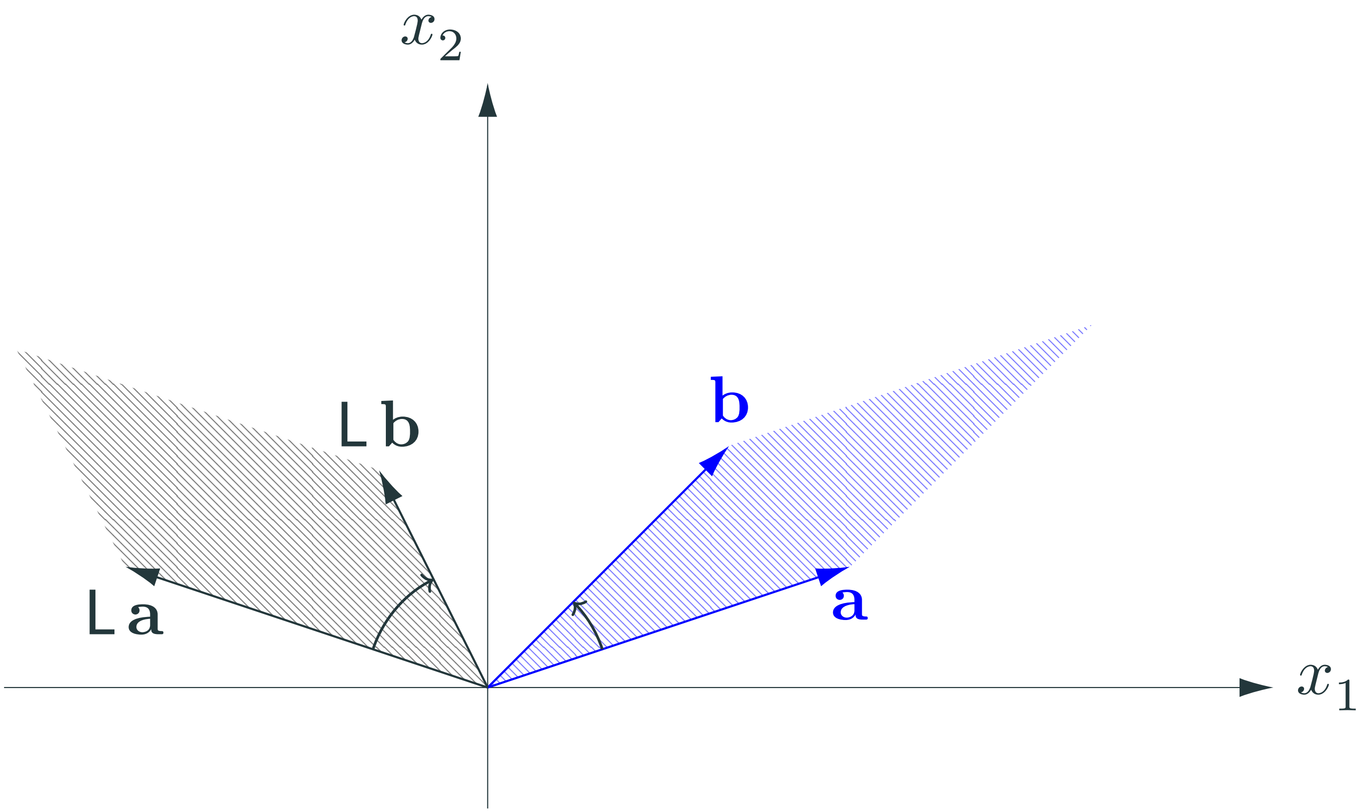
Рассмотрим оператор преобразования плоскости, $\mathsf{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Пара векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ переходит в пару векторов $\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{b}$.

Как меняется площадь параллелограмма образованного двумя векторами?

Меняется ли направление поворота от первого вектора ко второму?

Идея определителя на картинке



Ориентированная площадь

Определение

Возьмём площадь параллелограмма со сторонами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Если поворот от первого вектора ко второму идёт по часовой стрелке, то дополнительно домножим площадь на (-1).

Полученное число назовём ориентированной площадью параллелограмма и обозначим $S(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Ориентированная площадь

Определение

Возьмём площадь параллелограмма со сторонами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

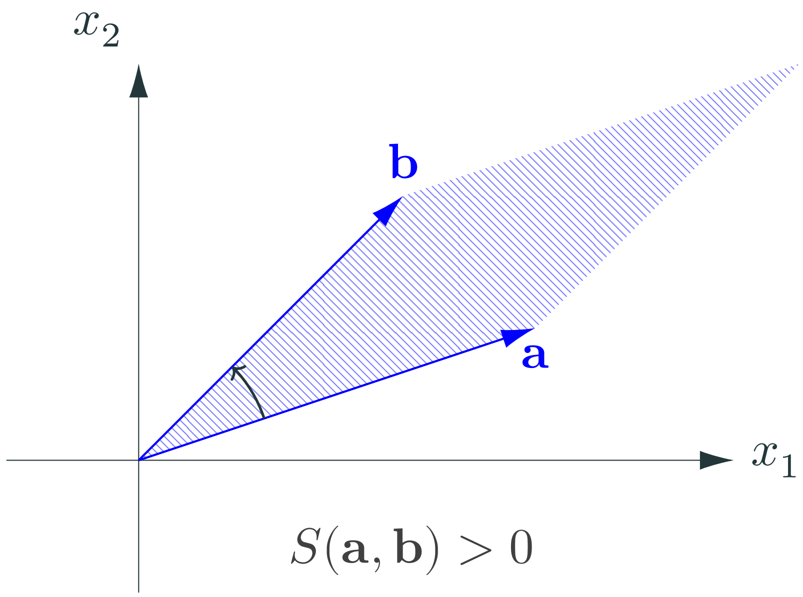
Если поворот от первого вектора ко второму идёт по часовой стрелке, то дополнительно домножим площадь на (-1).

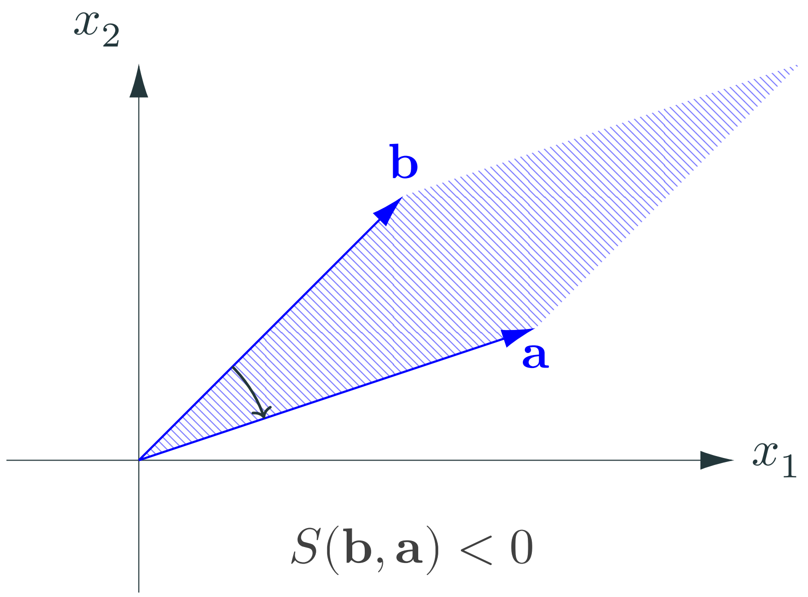
Полученное число назовём ориентированной площадью параллелограмма и обозначим $S(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Важен порядок векторов:

$$S(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -S(\mathbf{b}, \mathbf{a}).$$

Ориентированная площадь





Идея определителя

Определение

Возьмём любые два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, для которых $S(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \neq 0$.

Определитель оператора $\mathsf{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ показывает во сколько раз изменяется ориентированная площадь

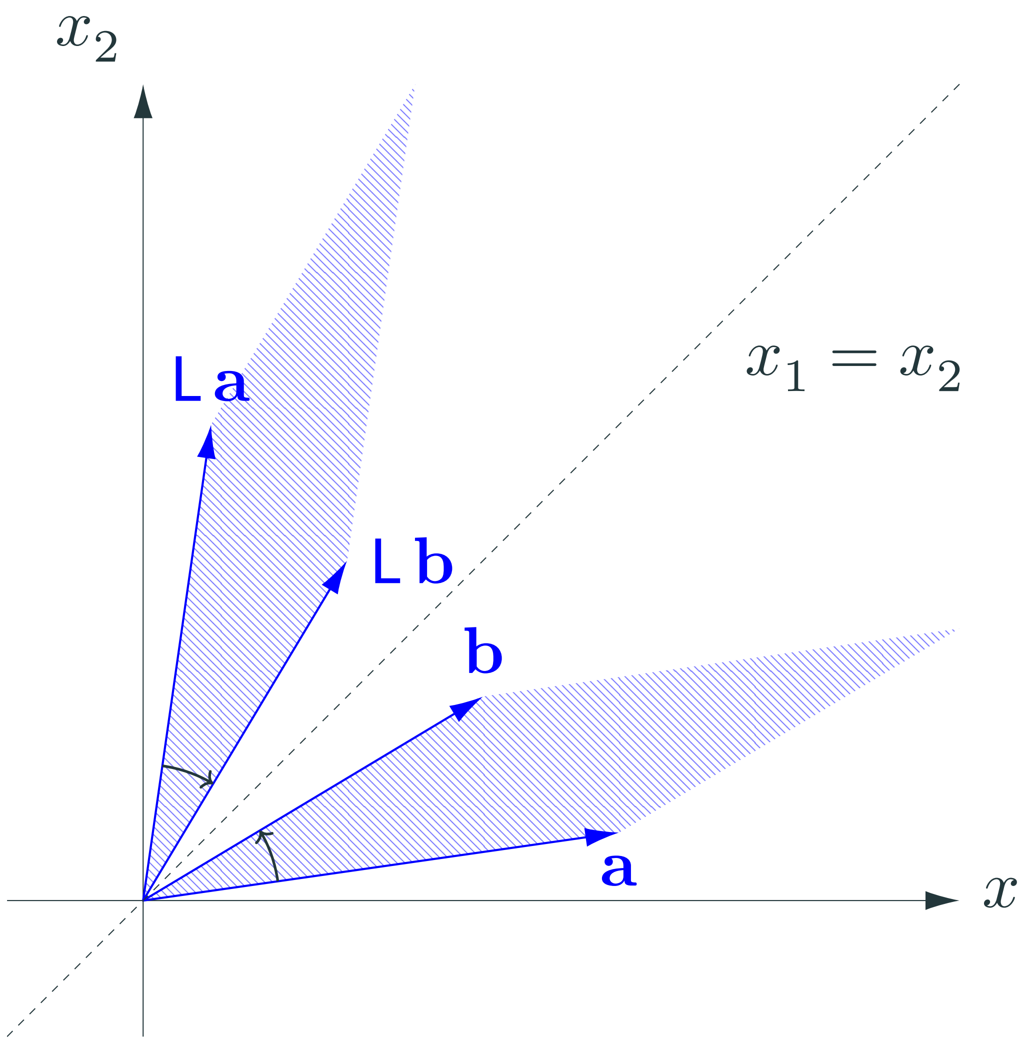
$$\det \mathsf{L} = \frac{S(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{a})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b})}$$

Определитель отражения

Оператор L : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$ отражает относительно $x_1 = x_2$.

Определитель отражения

Оператор L : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$ отражает относительно $x_1 = x_2$.



Определитель отражения

Оператор L : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$ отражает относительно $x_1 = x_2$.

Определитель отражения

Оператор L : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$ отражает относительно $x_1 = x_2$.

Площадь параллелограмма не изменяется.

Меняется направление поворота от первого вектора ко второму.

Определитель отражения

Оператор $\mathsf{L}:\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$ отражает относительно $x_1 = x_2$.

Площадь параллелограмма не изменяется.

Меняется направление поворота от первого вектора ко второму.

$$\det \mathsf{L} = \frac{S(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{b})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b})} = -1$$

Определитель растягивания компонент

Рассмотрим оператор L : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$.

Определитель растягивания компонент

Рассмотрим оператор L : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$.

Одна сторона растягивается в два раза, вторая — в три раза.

Меняется направление поворота от первого вектора ко второму.

Определитель растягивания компонент

Рассмотрим оператор L : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -3a_2 \end{pmatrix}$.

Одна сторона растягивается в два раза, вторая — в три раза.

Меняется направление поворота от первого вектора ко второму.

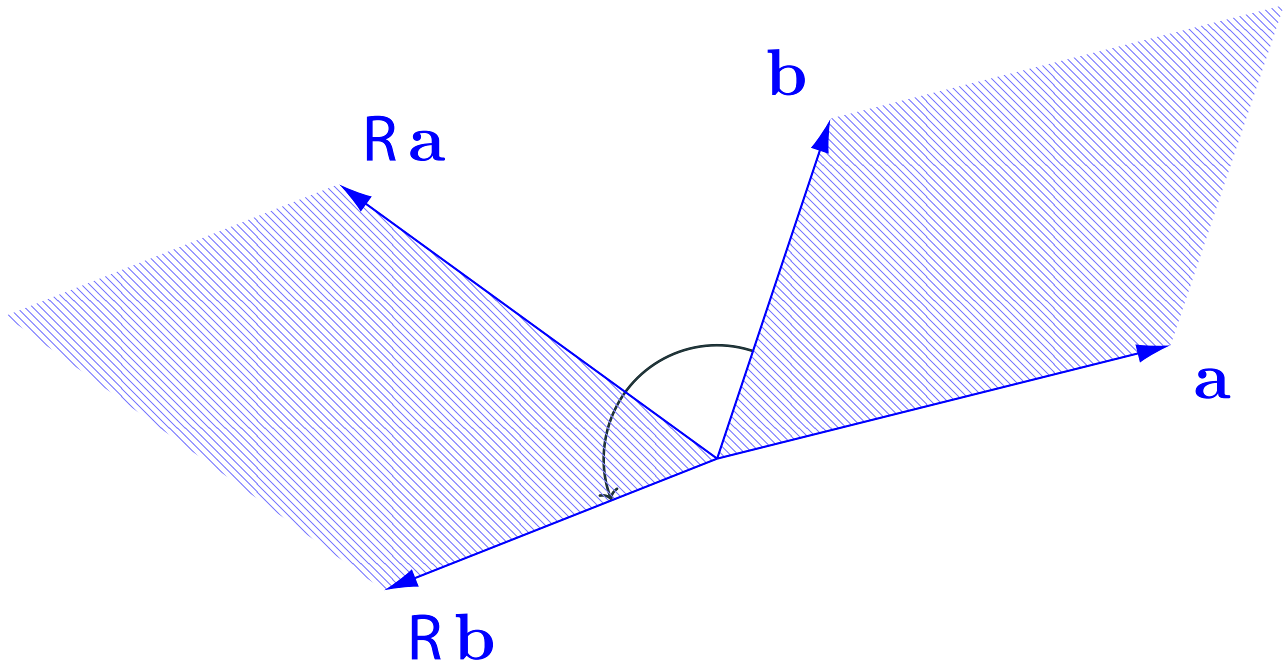
$$\det \mathsf{L} = \frac{S(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{b})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b})} = (-1) \cdot 2 \cdot 3 = -6$$

Определитель поворота

Оператор $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ вращает плоскость.

Определитель поворота

Оператор R : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ вращает плоскость.



Определитель поворота

Оператор R $: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ вращает плоскость.

Определитель поворота

Оператор $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ вращает плоскость.

При вращении не изменяется площадь параллелограмма.

При вращении не изменяется направление поворота от первого вектора ко второму.

Определитель поворота

Оператор $\mathrm{R} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ вращает плоскость.

При вращении не изменяется площадь параллелограмма.

При вращении не изменяется направление поворота от первого вектора ко второму.

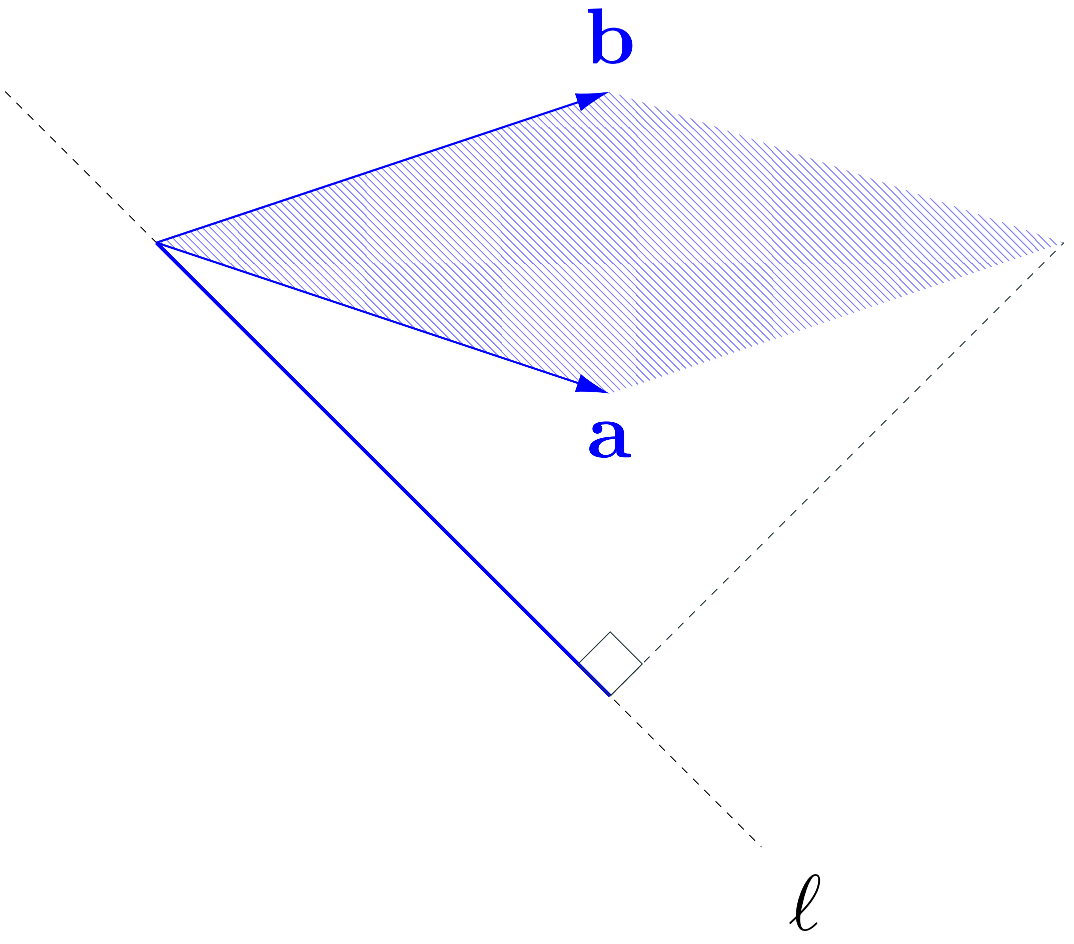
$$\det \mathrm{R} = \frac{S(\mathrm{R}\mathbf{a}, \mathrm{R}\mathbf{b})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b})} = 1$$

Определитель проекции

Оператор H $: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ проецирует векторы на прямую ℓ.

Определитель проекции

Оператор H : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ проецирует векторы на прямую ℓ.



Определитель проекции

Оператор H $: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ проецирует векторы на прямую ℓ.

Определитель проекции

Оператор $\mathsf{H} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ проецирует векторы на прямую ℓ.

При проекции любой параллелограмм «складывается» в отрезок нулевой площади.

$$\det \mathsf{H} = \frac{S(\mathsf{H}\mathbf{a}, \mathsf{H}\mathbf{b})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b})} = 0$$

Чем прекрасна ориентированная площадь?

Утверждение

Ориентированная площадь $S(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ линейна по каждому аргументу:

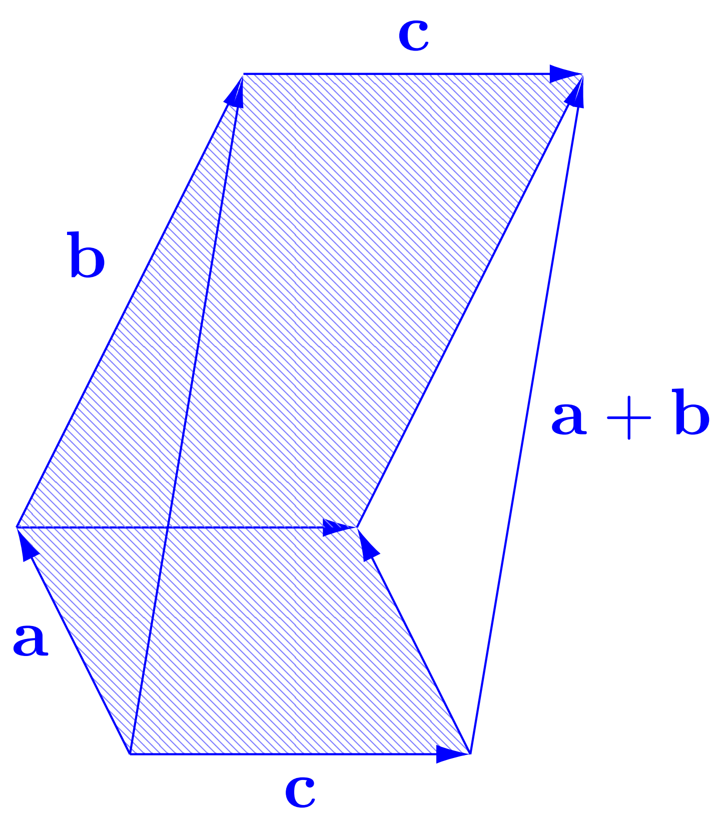
$$S(\lambda\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \lambda S(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \qquad S(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}) = S(\mathbf{a}, \mathbf{c}) + S(\mathbf{b}, \mathbf{c})$$

Чем прекрасна ориентированная площадь?

Утверждение

Ориентированная площадь $S(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ линейна по каждому аргументу:

$$S(\lambda\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \lambda S(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \quad S(\mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{c}) = S(\mathbf{a}, \mathbf{c}) + S(\mathbf{b}, \mathbf{c})$$



Корректность идеи определителя

Величина $\det \mathsf{L} = \frac{S(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{b})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b})}$ не зависит от выбора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$!

Корректность идеи определителя

Величина $\det \mathsf{L} = \frac{S(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{b})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b})}$ не зависит от выбора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$!

Идея доказательства

Обозначим $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Корректность идеи определителя

Величина $\det \mathsf{L} = \frac{S(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{b})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b})}$ не зависит от выбора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$!

Идея доказательства

Обозначим $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Возьмём $\mathbf{a} = 5\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2$. Найдём $S(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{e}_2)/S(\mathbf{a}, \mathbf{e}_2)$:

Корректность идеи определителя

Величина $\det \mathsf{L} = \frac{S(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{b})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b})}$ не зависит от выбора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$!

Идея доказательства

Обозначим $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Возьмём $\mathbf{a} = 5\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2$. Найдём $S(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{e}_2)/S(\mathbf{a}, \mathbf{e}_2)$:

$$\frac{S(\mathsf{L}(5\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2), \mathsf{L}\,\mathbf{e}_2)}{S(5\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2)} = \frac{S(\mathsf{L}\,5\mathbf{e}_1, \mathsf{L}\,\mathbf{e}_2) + S(\mathsf{L}\,7\mathbf{e}_2, \mathsf{L}\,\mathbf{e}_2)}{S(5\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + S(7\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2)} =$$

Корректность идеи определителя

Величина $\det \mathsf{L} = \frac{S(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{b})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b})}$ не зависит от выбора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$!

Идея доказательства

Обозначим $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Возьмём $\mathbf{a} = 5\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2$. Найдём $S(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{e}_2)/S(\mathbf{a}, \mathbf{e}_2)$:

$$\frac{S(\mathsf{L}(5\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2), \mathsf{L}\,\mathbf{e}_2)}{S(5\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2)} = \frac{S(\mathsf{L}\,5\mathbf{e}_1, \mathsf{L}\,\mathbf{e}_2) + S(\mathsf{L}\,7\mathbf{e}_2, \mathsf{L}\,\mathbf{e}_2)}{S(5\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + S(7\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2)} =$$

$$= \frac{5S(\mathsf{L}\,\mathbf{e}_1, \mathsf{L}\,\mathbf{e}_2) + 0}{5S(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + 0} = \frac{S(\mathsf{L}\,\mathbf{e}_1, \mathsf{L}\,\mathbf{e}_2)}{S(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)}$$

Ещё один взгляд на определитель

Обозначим $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Ещё один взгляд на определитель

Обозначим $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Определение

Преобразуем параллелограмм, образованный векторами $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, с помощью оператора L.

Определитель линейного оператора $\mathsf{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ равен ориентированной площади полученного параллелограмма.

$$\det \mathsf{L} = S(\mathsf{L}\,\mathbf{e}_1, \mathsf{L}\,\mathbf{e}_2)$$

Определитель в пространстве

Идея: заменим ориентированную площадь параллелограмма $S(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ на ориентированный объём параллелепипеда $S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$.

Определитель в пространстве

Идея: заменим ориентированную площадь параллелограмма $S(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ на ориентированный объём параллелепипеда $S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$.

Определение

Возьмём любые три вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, для которых $S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \neq 0$.

Определитель оператора $\mathsf{L} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ показывает во сколько раз изменяется ориентированный объём

$$\det \mathsf{L} = \frac{S(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{c})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}$$

А что такое ориентированный объём?

А что такое ориентированный объём?

Обозначим $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

А что такое ориентированный объём?

Обозначим $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Определение

Рассмотрим параллелепипед, образованный $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$.

А что такое ориентированный объём?

Обозначим $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Определение

Рассмотрим параллелепипед, образованный $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$.

С помощью поворота:

Совместим вектор $\mathbf{e}_1$ с вектором $\mathbf{a}$;

Затем вектор $\mathbf{e}_2$ «положим» в плоскость $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$.

А что такое ориентированный объём?

Обозначим $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Определение

Рассмотрим параллелепипед, образованный $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$.

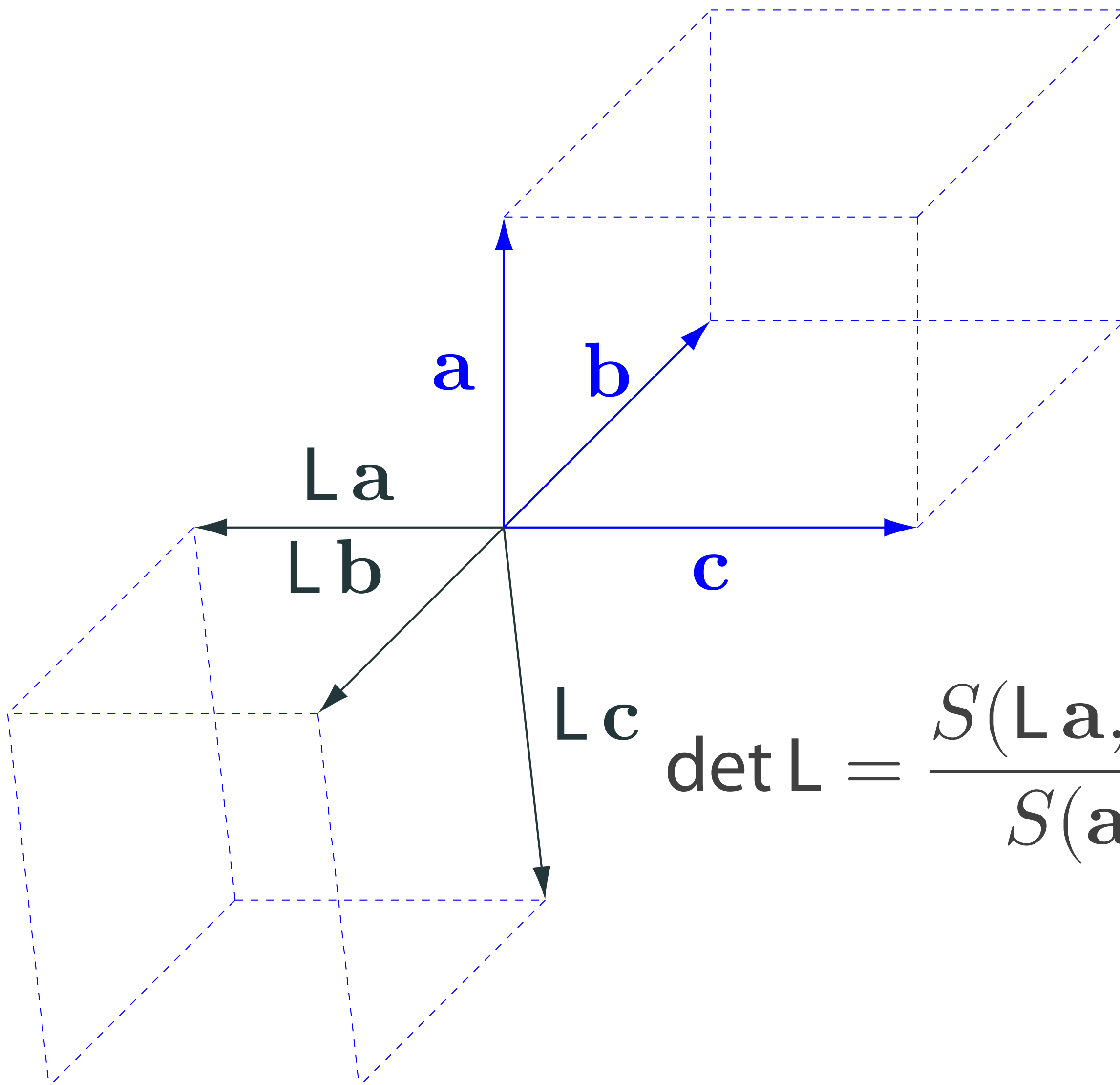
С помощью поворота:

Совместим вектор $\mathbf{e}_1$ с вектором $\mathbf{a}$;

Затем вектор $\mathbf{e}_2$ «положим» в плоскость $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$.

Ориентированный объём $S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ объявим отрицательным, если векторы $\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{c}$ смотрят в разные полупространства.

Определитель в пространстве



$$\det \mathsf{L} = \frac{S(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{b}, \mathsf{L}\,\mathbf{c})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}$$

Определитель растягивания компонент

Рассмотрим оператор L $: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2a_1 \\ 3a_2 \\ -5a_3 \end{pmatrix}.$

Определитель растягивания компонент

Рассмотрим оператор L : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2a_1 \\ 3a_2 \\ -5a_3 \end{pmatrix}$.

Одна сторона растягивается в два раза, вторая — в три раза, третья — в пять.

Первые два вектора не изменяют направления при преобразовании.

Третий вектор меняет полупространство, в котором он лежит относительно первых двух.

Определитель растягивания компонент

Рассмотрим оператор L : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2a_1 \\ 3a_2 \\ -5a_3 \end{pmatrix}$.

Одна сторона растягивается в два раза, вторая — в три раза, третья — в пять.

Первые два вектора не изменяют направления при преобразовании.

Третий вектор меняет полупространство, в котором он лежит относительно первых двух.

$$\det \mathsf{L} = \frac{S(\mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathsf{L}\,\mathbf{b}, \mathsf{L}\,\mathbf{c})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})} = (-1) \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = -30$$

Определитель проекции

Оператор H $: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ проецирует векторы на плоскость α.

Определитель проекции

Оператор H $: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ проецирует векторы на плоскость α.

Любой параллелепипед «схлопывается» в плоскую фигуру нулевого объёма.

Определитель проекции

Оператор $\mathrm{H} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ проецирует векторы на плоскость α.

Любой параллелепипед «схлопывается» в плоскую фигуру нулевого объёма.

$$\det \mathrm{H} = \frac{S(\mathrm{H}\mathbf{a}, \mathrm{H}\mathbf{b}, \mathrm{H}\mathbf{c})}{S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})} = 0$$

Свойства определителя

Краткий план:

- Ориентированный объём в $\mathbb{R}^n$;

Краткий план:

- Ориентированный объём в $\mathbb{R}^n$;
- Свойства определителя;

Краткий план:

- Ориентированный объём в $\mathbb{R}^n$;
- Свойства определителя;
- Явная формула для определителя.

Формализация ориентированного объёма

Вектор $\mathbf{e}_i$ содержит на i-м месте единицу, а на остальных — нули.

Формализация ориентированного объёма

Вектор $\mathbf{e}_i$ содержит на i-м месте единицу, а на остальных — нули.

1. Верный гипер-объём базового гипер-кубика:

$$S(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n) = 1$$

Формализация ориентированного объёма

Вектор $\mathbf{e}_i$ содержит на i-м месте единицу, а на остальных — нули.

1. Верный гипер-объём базового гипер-кубика:

$$S(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) = 1$$

2. Линейность по каждому аргументу:

$$S(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n) = S(\mathbf{a}, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n) +$$
$$+ S(\mathbf{b}, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n)$$
$$S(\lambda \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n) = \lambda S(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n)$$

Формализация ориентированного объёма

Вектор $\mathbf{e}_i$ содержит на i-м месте единицу, а на остальных — нули.

1. Верный гипер-объём базового гипер-кубика:

$$S(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) = 1$$

2. Линейность по каждому аргументу:

$$S(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n) = S(\mathbf{a}, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n) + \\ + S(\mathbf{b}, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n)$$

$$S(\lambda\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n) = \lambda S(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n)$$

3. Антисимметричность:

$$S(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n) = -S(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n)$$

Определитель во всей n-мерности

Определение

Возьмём векторы $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$, для которых $S(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) \neq 0$.

Определитель оператора $\mathsf{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ показывает во сколько раз изменяется ориентированный гипер-объём произвольного параллелепипеда:

$$\det \mathsf{L} = \frac{S(\mathsf{L}\,\mathbf{v}_1, \ldots, \mathsf{L}\,\mathbf{v}_n)}{S(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)}$$

Определитель во всей n-мерности

Определение

Возьмём векторы $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$, для которых $S(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) \neq 0$.

Определитель оператора $\mathsf{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ показывает во сколько раз изменяется ориентированный гипер-объём произвольного параллелепипеда:

$$\det \mathsf{L} = \frac{S(\mathsf{L}\,\mathbf{v}_1, \ldots, \mathsf{L}\,\mathbf{v}_n)}{S(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)}$$

Определение

Определитель оператора $\mathsf{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ показывает во сколько раз изменяется ориентированный гипер-объём базового гипер-кубика:

$$\det \mathsf{L} = S(\mathsf{L}\,\mathbf{e}_1, \ldots, \mathsf{L}\,\mathbf{e}_n)$$

Определитель матрицы

Определение

Определителем матрицы называется определитель соответствующего линейного оператора.

Определитель матрицы

Определение

Определителем матрицы называется определитель соответствующего линейного оператора.

В матрице L i-й столбец равен $\mathsf{L}\,\mathbf{e}_i$, поэтому

$$\det \mathsf{L} = S(\operatorname{col}_1 \mathsf{L}, \operatorname{col}_2 \mathsf{L}, \ldots, \operatorname{col}_n \mathsf{L})$$

Определитель матрицы

Определение

Определителем матрицы называется определитель соответствующего линейного оператора.

В матрице L i-й столбец равен L $\mathbf{e}_i$, поэтому

$$\det \mathsf{L} = S(\mathrm{col}_1 \mathsf{L}, \mathrm{col}_2 \mathsf{L}, \dots, \mathrm{col}_n \mathsf{L})$$

Утверждение

Определитель матрицы можно считать по строкам:

$$\det \mathsf{L} = S(\mathrm{row}_1 \mathsf{L}, \mathrm{row}_2 \mathsf{L}, \dots, \mathrm{row}_n \mathsf{L})$$

Определитель обозначают det L или $|\,\mathsf{L}\,|$.

Быстрые признаки равенства нулю

1. Если среди векторов есть два одинаковых, то гипер-объём параллелепипеда равен нулю.

$$S(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_n) = 0$$

Быстрые признаки равенства нулю

1. Если среди векторов есть два одинаковых, то гипер-объём параллелепипеда равен нулю.

$$S(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n) = 0$$

2. Если среди векторов есть один нулевой, то гипер-объём параллелепипеда равен нулю.

$$S(\mathbf{0}, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n) = 0$$

Принцип Кавальери

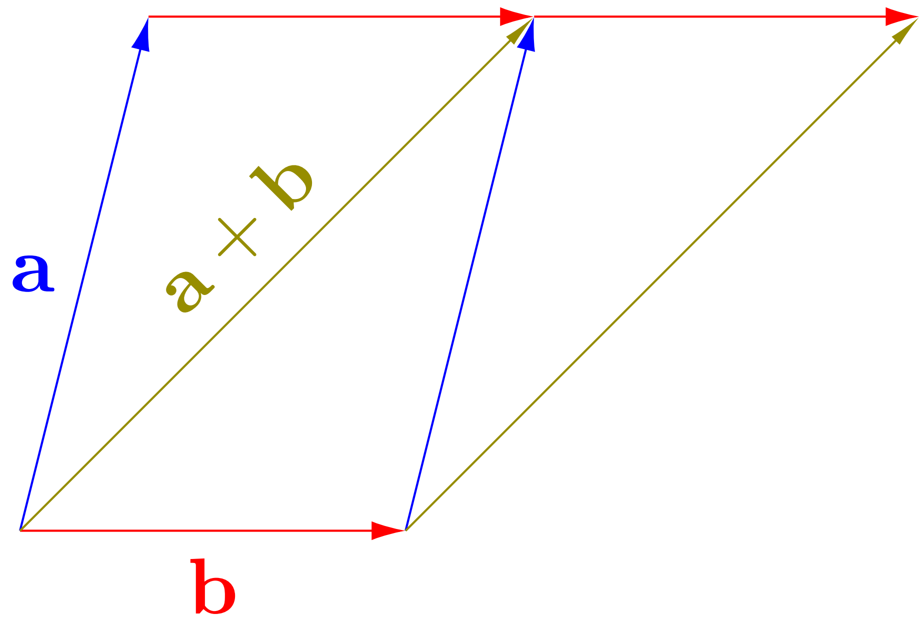
«Скашивание» параллелепипеда вбок не изменяет гипер-объём:

$$S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_n) = S(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{b}, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_n)$$

Принцип Кавальери

«Скашивание» параллелепипеда вбок не изменяет гипер-объём:

$$S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_n) = S(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{b}, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_n)$$



Принцип Кавальери на матрице

Единственным ненулевым элементом столбца можно «скосить» всю строку:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ {\color{red}4} & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} =$$

Принцип Кавальери на матрице

Единственным ненулевым элементом столбца можно «скосить» всю строку:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ \color{red}{4} & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ \color{red}{4} & \color{blue}{0} & 7 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} =$$

Принцип Кавальери на матрице

Единственным ненулевым элементом столбца можно «скосить» всю строку:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix}$$

Принцип Кавальери на матрице

Единственным ненулевым элементом столбца можно «скосить» всю строку:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ {\color{red}4} & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ {\color{red}4} & {\color{blue}0} & 7 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ {\color{red}4} & {\color{blue}0} & {\color{blue}0} \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix}$$

Единственным ненулевым элементом строки можно «скосить» весь столбец:

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & -2 \\ {\color{red}4} & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix} =$$

Принцип Кавальери на матрице

Единственным ненулевым элементом столбца можно «скосить» всю строку:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ \color{red}{4} & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ \color{red}{4} & \color{blue}{0} & 7 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ \color{red}{4} & \color{blue}{0} & \color{blue}{0} \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix}$$

Единственным ненулевым элементом строки можно «скосить» весь столбец:

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & -2 \\ \color{red}{4} & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \color{blue}{0} & 3 & -2 \\ \color{red}{4} & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix} =$$

Принцип Кавальери на матрице

Единственным ненулевым элементом столбца можно «скосить» всю строку:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ {\color{red}4} & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ {\color{red}4} & {\color{blue}0} & 7 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ {\color{red}4} & {\color{blue}0} & {\color{blue}0} \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix}$$

Единственным ненулевым элементом строки можно «скосить» весь столбец:

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & -2 \\ {\color{red}4} & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} {\color{blue}0} & 3 & -2 \\ {\color{red}4} & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} {\color{blue}0} & 3 & -2 \\ {\color{red}4} & 0 & 0 \\ {\color{blue}0} & 1 & -5 \end{vmatrix}$$

Определитель и ранг

Утверждение

Для матрицы L размера $n \times n$ четыре свойства эквиваленты:

1. Определитель равен нулю, $\det \mathrm{L} = 0$.

Определитель и ранг

Утверждение

Для матрицы L размера $n \times n$ четыре свойства эквиваленты:

1. Определитель равен нулю, $\det \mathrm{L} = 0$.
2. Столбцы матрицы линейно зависимы.

Определитель и ранг

Утверждение

Для матрицы L размера $n \times n$ четыре свойства эквиваленты:

1. Определитель равен нулю, $\det \mathrm{L} = 0$.
2. Столбцы матрицы линейно зависимы.
3. Строки матрицы линейно зависимы.

Определитель и ранг

Утверждение

Для матрицы L размера $n \times n$ четыре свойства эквиваленты:

1. Определитель равен нулю, $\det \mathrm{L} = 0$.
2. Столбцы матрицы линейно зависимы.
3. Строки матрицы линейно зависимы.
4. Ранг матрицы меньше числа столбцов, $\operatorname{rank} \mathrm{L} < n$.

Определитель композиции

Утверждение

Определитель композиции A и B равен произведению определителей:

$$\det(AB) = \det A \det B$$

Определитель композиции

Утверждение

Определитель композиции A и B равен произведению определителей:

$$\det(AB) = \det A \det B$$

Следствие

$$\det A \det A^{-1} = \det(A \cdot A^{-1}) = \det \mathrm{I} = 1$$

Спокойствие, только спокойствие!

Утверждение

Свойства нормировки, линейности по аргументам и антисимметричности однозначно определяют функцию гипер-объёма $S(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$.

Спокойствие, только спокойствие!

Утверждение

Свойства нормировки, линейности по аргументам и антисимметричности однозначно определяют функцию гипер-объёма $S(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$.

Утверждение

Отношение гипер-объёмов $\det \mathsf{L} = \frac{S(\mathsf{L}\,\mathbf{v}_1,\ldots,\mathsf{L}\,\mathbf{v}_n)}{S(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)}$ не зависит от выбора $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$.

Формула с перестановками

Определение

Перестановкой называют последовательность из n чисел, в которой каждое число от 1 до n встречается ровно один раз.

Формула с перестановками

Определение

Перестановкой называют последовательность из n чисел, в которой каждое число от 1 до n встречается ровно один раз.

Примеры: (12345), (32145), (21354).

Формула с перестановками

Определение

Перестановкой называют последовательность из n чисел, в которой каждое число от 1 до n встречается ровно один раз.

Примеры: (12345), (32145), (21354).

Определение

Перестановку называют чётной, если требуется чётное число смен местами двух чисел, чтобы привести перестановку к $(1234\ldots n)$.

Если σ — чётная перестановка, то пишут $\operatorname{sign}\sigma = 1$, для нечётной пишут $\operatorname{sign}\sigma = -1$.

Формула с перестановками

Определение

Перестановкой называют последовательность из n чисел, в которой каждое число от 1 до n встречается ровно один раз.

Примеры: (12345), (32145), (21354).

Определение

Перестановку называют чётной, если требуется чётное число смен местами двух чисел, чтобы привести перестановку к $(1234\dots n)$.

Если σ — чётная перестановка, то пишут $\operatorname{sign}\sigma = 1$, для нечётной пишут $\operatorname{sign}\sigma = -1$.

Примеры:

$\operatorname{sign}(12345) = 1$, $\operatorname{sign}(32145) = -1$, $\operatorname{sign}(21354) = 1$.

Расстановка ладей!

Рассмотрим квадратную матрицу.

Перестановку σ будем трактовать как инструкцию, какой элемент взять из очередной строки матрицы.

$$(3124) \sim \begin{pmatrix} . & . & * & . \\ * & . & . & . \\ . & * & . & . \\ . & . & . & * \end{pmatrix}$$

Расстановка ладей!

Рассмотрим квадратную матрицу.

Перестановку σ будем трактовать как инструкцию, какой элемент взять из очередной строки матрицы.

$$(3124) \sim \begin{pmatrix} . & . & * & . \\ * & . & . & . \\ . & * & . & . \\ . & . & . & * \end{pmatrix}$$

С помощью $p(\sigma)$ обозначим произведение этих элементов.

Например, $p(3124) = a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{44}$.

Явная формула

Утверждение

Трём свойствам определителя (нормировке, линейности, антисимметричности) удовлетворяет единственная функция

$$\operatorname{det} \mathsf{L} = \sum_{\sigma} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot p(\sigma).$$

Перестановку σ трактуем как инструкцию, какой элемент взять из очередной строки матрицы.

С помощью $p(\sigma)$ обозначено произведение этих элементов.

Иллюстрация для 2×2

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} =$$

Иллюстрация для 2×2

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & \\ & d \end{pmatrix}}_{\mathrm{sign}(12)=1} - \underbrace{\begin{pmatrix} & b \\ c & \end{pmatrix}}_{\mathrm{sign}(21)=-1} =$$

Иллюстрация для 2×2

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & \\ & d \end{pmatrix}}_{\text{sign}(12)=1} - \underbrace{\begin{pmatrix} & b \\ c & \end{pmatrix}}_{\text{sign}(21)=-1} = ad - bc$$

Иллюстрация для 3×3

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} =$$

Иллюстрация для 3×3

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} =$$

$$= + \underbrace{\begin{pmatrix} a & & \\ & e & \\ & & i \end{pmatrix}}_{\text{sign}(123)=1} + \underbrace{\begin{pmatrix} & & c \\ d & & \\ & h & \end{pmatrix}}_{\text{sign}(312)=1} + \underbrace{\begin{pmatrix} & b & \\ & & f \\ g & & \end{pmatrix}}_{\text{sign}(231)=1}$$

$$- \underbrace{\begin{pmatrix} & & c \\ & e & \\ g & & \end{pmatrix}}_{\text{sign}(321)=-1} - \underbrace{\begin{pmatrix} & b & \\ d & & \\ & & i \end{pmatrix}}_{\text{sign}(213)=-1} - \underbrace{\begin{pmatrix} a & & \\ & & f \\ & h & \end{pmatrix}}_{\text{sign}(132)=-1} =$$

Иллюстрация для 3×3

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} =$$

$$= + \underbrace{\begin{pmatrix} a & & \\ & e & \\ & & i \end{pmatrix}}_{\textsf{sign}(123)=1} + \underbrace{\begin{pmatrix} & & c \\ d & & \\ & h & \end{pmatrix}}_{\textsf{sign}(312)=1} + \underbrace{\begin{pmatrix} & b & \\ & & f \\ g & & \end{pmatrix}}_{\textsf{sign}(231)=1}$$

$$- \underbrace{\begin{pmatrix} & & c \\ & e & \\ g & & \end{pmatrix}}_{\textsf{sign}(321)=-1} - \underbrace{\begin{pmatrix} & b & \\ d & & \\ & & i \end{pmatrix}}_{\textsf{sign}(213)=-1} - \underbrace{\begin{pmatrix} a & & \\ & & f \\ & h & \end{pmatrix}}_{\textsf{sign}(132)=-1} =$$

$$= aei + cdh + bfg - ceg - bdi - afh$$

Вычисление определителя

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)

Определитель и транспонирование

Краткий план:

- Транспонирование матрицы;

Краткий план:

- Транспонирование матрицы;
- Определитель и транспонирование;

Краткий план:

- Транспонирование матрицы;
- Определитель и транспонирование;
- Разложение определителя по строке.

Конструктивный подход к транспонированию

Определение транспонирования оператора основано на свойстве

$$\langle \mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle = \langle \mathbf{a}, \mathsf{L}^T\,\mathbf{b}\rangle.$$

Конструктивный подход к транспонированию

Определение транспонирования оператора основано на свойстве

$$\langle \mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathsf{L}^T\,\mathbf{b} \rangle.$$

Возьмём, к примеру, $\mathbf{a} = \mathbf{e}_2$ и $\mathbf{b} = \mathbf{e}_3$:

$$\langle \mathsf{col}_2\,\mathsf{L}, \mathbf{e}_3 \rangle = \langle \mathbf{e}_2, \mathsf{col}_3\,\mathsf{L}^T \rangle$$

Конструктивный подход к транспонированию

Определение транспонирования оператора основано на свойстве

$$\langle \mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle = \langle \mathbf{a}, \mathsf{L}^T\,\mathbf{b}\rangle.$$

Возьмём, к примеру, $\mathbf{a} = \mathbf{e}_2$ и $\mathbf{b} = \mathbf{e}_3$:

$$\langle \mathsf{col}_2\,\mathsf{L}, \mathbf{e}_3\rangle = \langle \mathbf{e}_2, \mathsf{col}_3\,\mathsf{L}^T\rangle$$

$$\mathsf{L}_{32} = \mathsf{L}^T_{23}$$

Конструктивный подход к транспонированию

Определение транспонирования оператора основано на свойстве

$$\langle \mathsf{L}\,\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathsf{L}^T\,\mathbf{b} \rangle.$$

Возьмём, к примеру, $\mathbf{a} = \mathbf{e}_2$ и $\mathbf{b} = \mathbf{e}_3$:

$$\langle \mathrm{col}_2\,\mathsf{L}, \mathbf{e}_3 \rangle = \langle \mathbf{e}_2, \mathrm{col}_3\,\mathsf{L}^T \rangle$$

$$\mathsf{L}_{32} = \mathsf{L}^T_{23}$$

Транспонирование меняет местами строки и столбцы матрицы!

Транспонирование матрицы

Пример:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

Транспонирование матрицы

Пример:

$$\mathsf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\mathsf{L}^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

Транспонирование матрицы

Пример:

$$\mathsf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\mathsf{L}^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

Заметим, что $\mathsf{L}^{TT} = \mathsf{L}$.

Транспонирование и определитель

Явная формула определителя:

$$\det \mathsf{L} = \sum_{\sigma} \mathsf{sign}(\sigma) p(\sigma)$$

Транспонирование и определитель

Явная формула определителя:

$$\det \mathsf{L} = \sum_{\sigma} \mathsf{sign}(\sigma) p(\sigma)$$

Перестановка диктует, какой элемент выбрать в каждой строке:

$$(3124) \sim \begin{pmatrix} . & . & * & . \\ * & . & . & . \\ . & * & . & . \\ . & . & . & * \end{pmatrix}$$

Транспонирование и определитель

Явная формула определителя:

$$\det L = \sum_{\sigma} \operatorname{sign}(\sigma) p(\sigma)$$

Перестановка диктует, какой элемент выбрать в каждой строке:

$$(3124) \sim \begin{pmatrix} . & . & * & . \\ * & . & . & . \\ . & * & . & . \\ . & . & . & * \end{pmatrix}$$

Утверждение

Если в матрице выбран один элемент в каждой строке и в каждом столбце, то при транспонировании это свойство сохраняется.

Транспонирование и определитель

Утверждение

Чётности перестановок, кодирующих координаты элементов по строкам и по столбцам, одинаковые.

$$\begin{pmatrix} . & . & \color{red}{a} & . \\ \color{red}{b} & . & . & . \\ . & c & . & . \\ . & . & . & d \end{pmatrix}$$

$$(\mathrm{col}_1 \leftrightarrow \mathrm{col}_3) \sim (\mathrm{row}_1 \leftrightarrow \mathrm{row}_2)$$

Транспонирование и определитель

Утверждение

Чётности перестановок, кодирующих координаты элементов по строкам и по столбцам, одинаковые.

$$\begin{pmatrix} . & . & \color{red}{a} & . \\ \color{red}{b} & . & . & . \\ . & c & . & . \\ . & . & . & d \end{pmatrix}$$

$$(\mathsf{col}_1 \leftrightarrow \mathsf{col}_3) \sim (\mathsf{row}_1 \leftrightarrow \mathsf{row}_2)$$

$$\mathsf{sign}(3124) = \mathsf{sign}(2314)$$

Транспонирование и определитель

Перестановка σ выбирает элемент в каждой строке:

$$\det \mathsf{L} = \sum_{\sigma} \mathsf{sign}(\sigma) p(\sigma)$$

Перестановка σ выбирает элемент в каждом столбце:

$$\det \mathsf{L}^T = \sum_{\sigma} \mathsf{sign}(\sigma) p^T(\sigma)$$

Транспонирование и определитель

Перестановка σ выбирает элемент в каждой строке:

$$\det \mathsf{L} = \sum_{\sigma} \operatorname{sign}(\sigma) p(\sigma)$$

Перестановка σ выбирает элемент в каждом столбце:

$$\det \mathsf{L}^T = \sum_{\sigma} \operatorname{sign}(\sigma) p^T(\sigma)$$

Утверждение

$$\det \mathsf{L} = \det \mathsf{L}^T$$

Рецепт разложения по столбцу

Возьмём аддитивность:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Рецепт разложения по столбцу

Возьмём аддитивность:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Добавим немного принципа Кавальери:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 7 & 0 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 0 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

Рецепт разложения по столбцу

Возьмём аддитивность:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Добавим немного принципа Кавальери:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 7 & 0 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 0 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

Взболтаем и переставим столбцы:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = (-1)^1 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 7 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^2 \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^3 \begin{vmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

Рецепт разложения по столбцу

Взболтаем и переставим столбцы:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = (-1)^1 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 7 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^2 \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^3 \begin{vmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

Рецепт разложения по столбцу

Взболтаем и переставим столбцы:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = (-1)^1 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 7 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^2 \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^3 \begin{vmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

Снизим размерность:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = (-1)^1 2 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^2 5 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^3 8 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$$

Разложение по столбцу

Выберем любой столбец и «пробежимся» вдоль него!

$$\begin{vmatrix} * & a_{12} & * \\ * & a_{22} & * \\ * & a_{32} & * \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12}^{\times} + (-1)^{2+2} a_{22} \det A_{22}^{\times} + (-1)^{3+2} a_{32} \det A_{32}^{\times}$$

Матрица $A_{ij}^{\times}$ получается из исходной A вычеркиванием строки i и столбца j.

Разложение по столбцу

Выберем любой столбец и «пробежимся» вдоль него!

$$\begin{vmatrix} * & a_{12} & * \\ * & a_{22} & * \\ * & a_{32} & * \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+2} a_{12} \det A^{\times}_{12} + (-1)^{2+2} a_{22} \det A^{\times}_{22} + (-1)^{3+2} a_{32} \det A^{\times}_{32}$$

Матрица $A^{\times}_{ij}$ получается из исходной A вычеркиванием строки i и столбца j.

Утверждение

$$\det \mathsf{L} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A^{\times}_{ij},$$

Разложение по строке

Можно раскладывать и по строке i:

Утверждение

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}^{\times},$$

Определение

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} матрицы A называют величину

$$(-1)^{i+j} \det A_{ij}^{\times},$$

Матрица $A_{ij}^{\times}$ получается из исходной A вычеркиванием строки i и столбца j.

Метод Гаусса

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)

Метод Крамера

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)

Метод Крамера и нахождение обратной матрицы

Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)

Поиск обратной матрицы: итоги

Краткий план:

- Метод Гаусса;

Краткий план:

- Метод Гаусса;
- Метод Крамера;

Краткий план:

- Метод Гаусса;
- Метод Крамера;
- Критерий наличия обратной матрицы.

Как поймать двух зайцев?

Если нужно решить две системы уравнений, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ и $A\mathbf{y} = \mathbf{c}$, то можно решать их одновременно!

Как поймать двух зайцев?

Если нужно решить две системы уравнений, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ и $A\mathbf{y} = \mathbf{c}$, то можно решать их одновременно!

Вместо двух систем

$$\left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 3 & 3 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & 1 & 17 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 3 & 3 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 7 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

Как поймать двух зайцев?

Если нужно решить две системы уравнений, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ и $A\mathbf{y} = \mathbf{c}$, то можно решать их одновременно!

Вместо двух систем

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & 1 & 17 \end{array}\right), \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 7 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

решаем систему с двойной правой частью:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 3 & 10 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 7 & 1 & 17 & 6 \end{array}\right).$$

Как поймать двух зайцев?

Решаем систему с двойной правой частью:

$$\left(\begin{array}{rrr|rr} 1 & 3 & 3 & 10 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 7 & 1 & 17 & 6 \end{array}\right)$$

Как поймать двух зайцев?

Решаем систему с двойной правой частью:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 3 & 10 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 7 & 1 & 17 & 6 \end{array}\right)$$

Приводим левую часть к виду единичной матрицы используя гауссовские преобразования:

- перестановку строк;
- домножение строки на ненулевое число;
- прибавление одной строки к другой с любым весом.

Как поймать двух зайцев?

Решаем систему с двойной правой частью:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 3 & 10 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 7 & 1 & 17 & 6 \end{array}\right)$$

Приводим левую часть к виду единичной матрицы используя гауссовские преобразования:

- перестановку строк;
- домножение строки на ненулевое число;
- прибавление одной строки к другой с любым весом.

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Как поймать двух зайцев?

Решаем систему с двойной правой частью:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 3 & 10 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 7 & 1 & 17 & 6 \end{array}\right)$$

Приводим левую часть к виду единичной матрицы используя гауссовские преобразования:

- перестановку строк;
- домножение строки на ненулевое число;
- прибавление одной строки к другой с любым весом.

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Видим ответ: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Метод Гаусса

Для нахождения обратной матрицы для A нужно решить систему $A \cdot B = \mathrm{I}$.

Для примера

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 6 \\ 6 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Метод Гаусса

Для нахождения обратной матрицы для A нужно решить систему $A \cdot B = \mathrm{I}$.

Для примера

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 6 \\ 6 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Приписываем справа единичную матрицу I:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Метод Гаусса

Приписываем справа единичную матрицу I:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Если det $A \neq 0$, то с помощью гауссовских преобразований получаем единичную слева:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Метод Гаусса

Приписываем справа единичную матрицу I:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Если $\det A \neq 0$, то с помощью гауссовских преобразований получаем единичную слева:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Решение системы, матрицу A^{-1}, читаем справа:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Метод Крамера

Рассмотрим систему $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ из n уравнений с n неизвестными.

Метод Крамера

Рассмотрим систему $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ из n уравнений с n неизвестными.

Утверждение

Если $\det A \neq 0$, то решение системы единственно и

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A},$$

где матрица A_i получена из матрицы A заменой i-го столбца на правую часть $\mathbf{b}$.

Метод Крамера для обратной матрицы

Матрица A имеет размер $n \times n$.

Метод Крамера для обратной матрицы

Матрица A имеет размер $n \times n$.

Утверждение

Если $\det A \neq 0$, то матрица $B = A^{-1}$ существует и

$$b_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \det\left(A_{ji}^{\times}\right)}{\det A},$$

где матрица $A_{ji}^{\times}$ получена из матрицы A вычёркиванием строки j и столбца i.

Метод Крамера для обратной матрицы

Матрица A имеет размер $n \times n$.

Утверждение

Если $\det A \neq 0$, то матрица $B = A^{-1}$ существует и

$$b_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \det\left(A_{ji}^{\times}\right)}{\det A},$$

где матрица $A_{ji}^{\times}$ получена из матрицы A вычёркиванием строки j и столбца i.

Напомним, что $(-1)^{i+j} \det\left(A_{ji}^{\times}\right)$ называется алгебраическим дополнением к a_{ji}.

Метод Крамера для обратной матрицы

Хотим обратить матрицу A.

1. Находим определитель $\det A$. Если $\det A = 0$, то матрица A не обратимая.

Метод Крамера для обратной матрицы

Хотим обратить матрицу A.

1. Находим определитель $\det A$. Если $\det A = 0$, то матрица A не обратимая.
2. Для каждого элемента A находим алгебраическое дополнение $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det\left(A_{ij}^{\times}\right)$. Помещаем все дополнения в матрицу C.

Метод Крамера для обратной матрицы

Хотим обратить матрицу A.

1. Находим определитель $\det A$. Если $\det A = 0$, то матрица A не обратимая.
2. Для каждого элемента A находим алгебраическое дополнение $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det\left(A_{ij}^{\times}\right)$. Помещаем все дополнения в матрицу C.
3. Транспонируем матрицу и получаем присоединённую матрицу $\operatorname{adj} A = C^T$.

Метод Крамера для обратной матрицы

Хотим обратить матрицу A.

1. Находим определитель $\det A$. Если $\det A = 0$, то матрица A не обратимая.
2. Для каждого элемента A находим алгебраическое дополнение $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det\left(A_{ij}^{\times}\right)$. Помещаем все дополнения в матрицу C.
3. Транспонируем матрицу и получаем присоединённую матрицу $\operatorname{adj} A = C^T$.
4. Делим матрицу $\operatorname{adj} A$ на $\det A$ и получаем $A^{-1} = \operatorname{adj} A / \det A$.

Вырожденные и невырожденные матрицы

Матрица A размера $n \times n$ называется вырожденной, если:

1. $\det A = 0$;

Вырожденные и невырожденные матрицы

Матрица A размера $n \times n$ называется вырожденной, если:

1. $\det A = 0$;
2. Система $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ имеет бесконечное количество решений;

Вырожденные и невырожденные матрицы

Матрица A размера $n \times n$ называется вырожденной, если:

1. $\det A = 0$;
2. Система $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ имеет бесконечное количество решений;
3. $\operatorname{rank} A < n$;

Вырожденные и невырожденные матрицы

Матрица A размера $n \times n$ называется вырожденной, если:

1. $\det A = 0$;
2. Система $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ имеет бесконечное количество решений;
3. $\operatorname{rank} A < n$;
4. A^{-1} не существует;

Вырожденные и невырожденные матрицы

Матрица A размера $n \times n$ называется вырожденной, если:

1. $\det A = 0$;
2. Система $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ имеет бесконечное количество решений;
3. $\operatorname{rank} A < n$;
4. A^{-1} не существует;

Матрица A размера $n \times n$ называется невырожденной, если:

1. $\det A \neq 0$;

Вырожденные и невырожденные матрицы

Матрица A размера $n \times n$ называется вырожденной, если:

1. $\det A = 0$;
2. Система $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ имеет бесконечное количество решений;
3. $\operatorname{rank} A < n$;
4. A^{-1} не существует;

Матрица A размера $n \times n$ называется невырожденной, если:

1. $\det A \neq 0$;
2. Система $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ имеет единственное решение;

Вырожденные и невырожденные матрицы

Матрица A размера $n \times n$ называется вырожденной, если:

1. $\det A = 0$;
2. Система $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ имеет бесконечное количество решений;
3. $\operatorname{rank} A < n$;
4. A^{-1} не существует;

Матрица A размера $n \times n$ называется невырожденной, если:

1. $\det A \neq 0$;
2. Система $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ имеет единственное решение;
3. $\operatorname{rank} A = n$;

Вырожденные и невырожденные матрицы

Матрица A размера $n \times n$ называется вырожденной, если:

1. $\det A = 0$;
2. Система $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ имеет бесконечное количество решений;
3. $\operatorname{rank} A < n$;
4. A^{-1} не существует;

Матрица A размера $n \times n$ называется невырожденной, если:

1. $\det A \neq 0$;
2. Система $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ имеет единственное решение;
3. $\operatorname{rank} A = n$;
4. A^{-1} существует;

LU-разложение

Краткий план:

- Гауссовские преобразования: другой взгляд;

Краткий план:

- Гауссовские преобразования: другой взгляд;
- LU-разложение;

Краткий план:

- Гауссовские преобразования: другой взгляд;
- LU-разложение;
- Применение LU-разложения.

Треугольные матрицы

Определение

Квадратная матрица называется верхнетреугольной, если ниже диагонали у неё стоят нулевые числа, например,

$$\mathsf{U} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Треугольные матрицы

Определение

Квадратная матрица называется верхнетреугольной, если ниже диагонали у неё стоят нулевые числа, например,

$$\mathrm{U} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

При перемножении верхнетреугольных матриц получается верхнетреугольная.

Треугольные матрицы

Определение

Квадратная матрица называется верхнетреугольной, если ниже диагонали у неё стоят нулевые числа, например,

$$\mathrm{U} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

При перемножении верхнетреугольных матриц получается верхнетреугольная. Определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов.

Треугольные матрицы

Определение

Квадратная матрица называется нижнетреугольной, если ниже диагонали у неё стоят нулевые числа, например,

$$\mathsf{L} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Треугольные матрицы

Определение

Квадратная матрица называется нижнетреугольной, если ниже диагонали у неё стоят нулевые числа, например,

$$\mathsf{L} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

При перемножении нижнетреугольных матриц получается нижнетреугольная.

Треугольные матрицы

Определение

Квадратная матрица называется нижнетреугольной, если ниже диагонали у неё стоят нулевые числа, например,

$$\mathsf{L} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

При перемножении нижнетреугольных матриц получается нижнетреугольная. Определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов.

Гауссовские преобразования

Рассмотрим систему уравнений в матричном виде:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & 1 & 17 \end{array}\right)$$

Гауссовские преобразования

Рассмотрим систему уравнений в матричном виде:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & 1 & 17 \end{array}\right)$$

Гауссовские преобразования уравнений системы:

1. Домножение строки на ненулевое число;
2. Перестановка двух строк местами;
3. Прибавление к одной строки другой строки, домноженной на произвольное λ.

Гауссовские преобразования

Рассмотрим систему уравнений в матричном виде:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & 1 & 17 \end{array}\right)$$

Гауссовские преобразования уравнений системы:

1. Домножение строки на ненулевое число;
2. Перестановка двух строк местами;
3. Прибавление к одной строки другой строки, домноженной на произвольное λ.

Каждое из этих действий можно закодировать умножением на матрицу!

Домножение строки как матрица

Домножим вторую строка матрицы A на 7:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \color{red}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} =$$

Домножение строки как матрица

Домножим вторую строка матрицы A на 7:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 7d & 7e & 7f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Левая матрица задаёт веса строк для правой матрицы!

Перестановка строк как матрица

Переставим первую и вторую строки матрицы A:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} =$$

Перестановка строк как матрица

Переставим первую и вторую строки матрицы A:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Левая матрица задаёт веса строк для правой матрицы!

Прибавление строки как матрица

Из второй строки вычтем первую строку с весом 4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ {\color{red}-4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} =$$

Прибавление строки как матрица

Из второй строки вычтем первую строку с весом 4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d - 4a & e - 4b & f - 4c \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Левая матрица задаёт веса строк для правой матрицы!

Прибавление строки как матрица

Из второй строки вычтем первую строку с весом 4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d - 4a & e - 4b & f - 4c \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Левая матрица задаёт веса строк для правой матрицы!

Прибавлению строки к другой строке ниже соответствует нижнетреугольная матрица.

Вычитание — антоним прибавления

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Вычитание — антоним прибавления

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Левая матрица отвечает за вычитание первой строки из второй с весом 4.

Вычитание — антоним прибавления

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Левая матрица отвечает за вычитание первой строки из второй с весом 4. Левая матрица отвечает за прибавление первой строки ко второй с весом 4.

Переход к треугольной матрице

С помощью метода Гаусса мы приводим квадратную матрицу к ступенчатому верхнетреугольному виду:

$$A \xrightarrow{g_1} A_1 \xrightarrow{g_2} A_2 \xrightarrow{g_3} \ldots A_{k-1} \xrightarrow{g_k} \mathsf{U}$$

Переход к треугольной матрице

С помощью метода Гаусса мы приводим квадратную матрицу к ступенчатому верхнетреугольному виду:

$$A \xrightarrow{g_1} A_1 \xrightarrow{g_2} A_2 \xrightarrow{g_3} \ldots A_{k-1} \xrightarrow{g_k} \mathsf{U}$$

В матричном виде:

$$\mathsf{U} = G_k \cdot G_{k-1} \cdot \ldots \cdot G_2 \cdot G_1 A$$

Уменьшим список разрешённых действий!

Алгоритм приведения к ступенчатому виду

1. Выберем первое уравнение так, чтобы в нём была переменная x_1.
2. Вычитаем первое уравнение из остальных так, чтобы в них пропала переменная x_1.
3. Зафиксируем первое уравнение и работаем с остальными.

Уменьшим список разрешённых действий!

Алгоритм приведения к ступенчатому виду

1. Выберем первое уравнение так, чтобы в нём была переменная x_1.
2. Вычитаем первое уравнение из остальных так, чтобы в них пропала переменная x_1.
3. Зафиксируем первое уравнение и работаем с остальными.

Выводы:

- Можно обойтись без домножения строк на число.

Уменьшим список разрешённых действий!

Алгоритм приведения к ступенчатому виду

1. Выберем первое уравнение так, чтобы в нём была переменная x_1.
2. Вычитаем первое уравнение из остальных так, чтобы в них пропала переменная x_1.
3. Зафиксируем первое уравнение и работаем с остальными.

Выводы:

- Можно обойтись без домножения строк на число.
- Все перестановки строк можно сделать в начале.

LU-разложение

С помощью метода Гаусса мы приводим квадратную матрицу к ступенчатому верхнетреугольному виду:

$$A \xrightarrow{p} A_1 \xrightarrow{\ell_1} A_2 \xrightarrow{\ell_2} \ldots A_{k-1} \xrightarrow{\ell_k} \mathsf{U}$$

LU-разложение

С помощью метода Гаусса мы приводим квадратную матрицу к ступенчатому верхнетреугольному виду:

$$A \xrightarrow{p} A_1 \xrightarrow{\ell_1} A_2 \xrightarrow{\ell_2} \dots A_{k-1} \xrightarrow{\ell_k} \mathsf{U}$$

В матричном виде:

$$\mathsf{U} = \mathsf{L}_k \cdot \mathsf{L}_{k-1} \cdot \dots \cdot \mathsf{L}_2 \cdot \mathsf{L}_1 \cdot \mathsf{P} \cdot A.$$

LU-разложение

С помощью метода Гаусса мы приводим квадратную матрицу к ступенчатому верхнетреугольному виду:

$$A \xrightarrow{p} A_1 \xrightarrow{\ell_1} A_2 \xrightarrow{\ell_2} \dots A_{k-1} \xrightarrow{\ell_k} \mathsf{U}$$

В матричном виде:

$$\mathsf{U} = \mathsf{L}_k \cdot \mathsf{L}_{k-1} \cdot \dots \cdot \mathsf{L}_2 \cdot \mathsf{L}_1 \cdot \mathsf{P} \cdot A.$$

Отменим действия L_i.

$$\mathsf{L}_1^{-1} \cdot \mathsf{L}_2^{-1} \cdot \dots \cdot \mathsf{L}_k^{-1} \cdot \mathsf{L}_k^{-1} \cdot \mathsf{U} = \mathsf{P} \cdot A.$$

LU-разложение

С помощью метода Гаусса мы приводим квадратную матрицу к ступенчатому верхнетреугольному виду:

$$A \xrightarrow{p} A_1 \xrightarrow{\ell_1} A_2 \xrightarrow{\ell_2} \ldots A_{k-1} \xrightarrow{\ell_k} \mathsf{U}$$

В матричном виде:

$$\mathsf{U} = \mathsf{L}_k \cdot \mathsf{L}_{k-1} \cdot \ldots \cdot \mathsf{L}_2 \cdot \mathsf{L}_1 \cdot \mathsf{P} \cdot A.$$

Отменим действия L_i.

$$\mathsf{L}_1^{-1} \cdot \mathsf{L}_2^{-1} \cdot \ldots \cdot \mathsf{L}_k^{-1} \cdot \mathsf{L}_k^{-1} \cdot \mathsf{U} = \mathsf{P} \cdot A.$$

Гауссовские преобразования эквивалентны разложению

$$\mathsf{L} \cdot \mathsf{U} = \mathsf{P} \cdot A.$$

Зачем нужно LU-разложение?

Если LU-разложение матрицы A получено, то можно очень быстро

- найти определитель матрицы A;
- решить любую систему $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Зачем нужно LU-разложение?

Если LU-разложение матрицы A получено, то можно очень быстро

- найти определитель матрицы A;
- решить любую систему $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -4 & 1 & 8 \\ 6 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

Зачем нужно LU-разложение?

Если LU-разложение матрицы A получено, то можно очень быстро

- найти определитель матрицы A;
- решить любую систему $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -4 & 1 & 8 \\ 6 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-2) \cdot (-1) \cdot 1 = 2$$

Резюме

- Определитель измеряет изменение площади и объёма.

Резюме

- Определитель измеряет изменение площади и объёма.
- Свойства определителя.

Резюме

- Определитель измеряет изменение площади и объёма.
- Свойства определителя.
- Обращение матрицы методом Гаусса.

Резюме

- Определитель измеряет изменение площади и объёма.
- Свойства определителя.
- Обращение матрицы методом Гаусса.
- Обращение матрицы методом Крамера.

Резюме

- Определитель измеряет изменение площади и объёма.
- Свойства определителя.
- Обращение матрицы методом Гаусса.
- Обращение матрицы методом Крамера.
- Метод Гаусса как LU-разложение.

Резюме

- Определитель измеряет изменение площади и объёма.
- Свойства определителя.
- Обращение матрицы методом Гаусса.
- Обращение матрицы методом Крамера.
- Метод Гаусса как LU-разложение.
- Бонус: комплексные числа.

Резюме

- Определитель измеряет изменение площади и объёма.
- Свойства определителя.
- Обращение матрицы методом Гаусса.
- Обращение матрицы методом Крамера.
- Метод Гаусса как LU-разложение.
- Бонус: комплексные числа.

Резюме

- Определитель измеряет изменение площади и объёма.
- Свойства определителя.
- Обращение матрицы методом Гаусса.
- Обращение матрицы методом Крамера.
- Метод Гаусса как LU-разложение.
- Бонус: комплексные числа.

Следующая лекция: Спектральное разложение и диагонализация.

Комплексные числа

бонусное видео! Это видеофрагмент с доской, слайдов здесь нет :)