Векторы и операторы

название лекции

Вектор: длина и скалярное произведение

название видеофрагмента

Краткое напутствие

Зачем нужна линейная алгебра?

- Линейная алгебра прекрасна сама по себе!

Краткое напутствие

Зачем нужна линейная алгебра?

- Линейная алгебра прекрасна сама по себе!
- Работает «под капотом» практически всех методов машинного обучения.

Краткий план:

- Вектор — это столбец чисел.

Краткий план:

- Вектор — это столбец чисел.
- Сложение двух векторов и умножение на число.

Краткий план:

- Вектор — это столбец чисел.
- Сложение двух векторов и умножение на число.
- Расстояние и косинус угла между векторами.

Вектор

- Рабочее определение.

  Вектор — столбец из нескольких чисел.

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 3 \\ -3.45 \end{pmatrix}$$

Вектор

- Рабочее определение.
  Вектор — столбец из нескольких чисел.

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 3 \\ -3.45 \end{pmatrix}$$

- Идея вектора. Вектор — всё, что можно описать столбцом из нескольких чисел.

Вектор

- Рабочее определение.
  Вектор — столбец из нескольких чисел.

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 3 \\ -3.45 \end{pmatrix}$$

- Идея вектора. Вектор — всё, что можно описать столбцом из нескольких чисел.
- Мы не пишем стрелочку над вектором.

Пространство $\mathbb{R}^n$

- Определение. Пространство $\mathbb{R}^n$:
  Множество всех возможных векторов из n чисел.

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| x_1 \in \mathbb{R}, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

Пространство $\mathbb{R}^n$

- Определение. Пространство $\mathbb{R}^n$:
  Множество всех возможных векторов из n чисел.

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| x_1 \in \mathbb{R}, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

- Определение. Размерность пространства $\mathbb{R}^n$:
  Количество чисел в каждом векторе, n.

Длина вектора

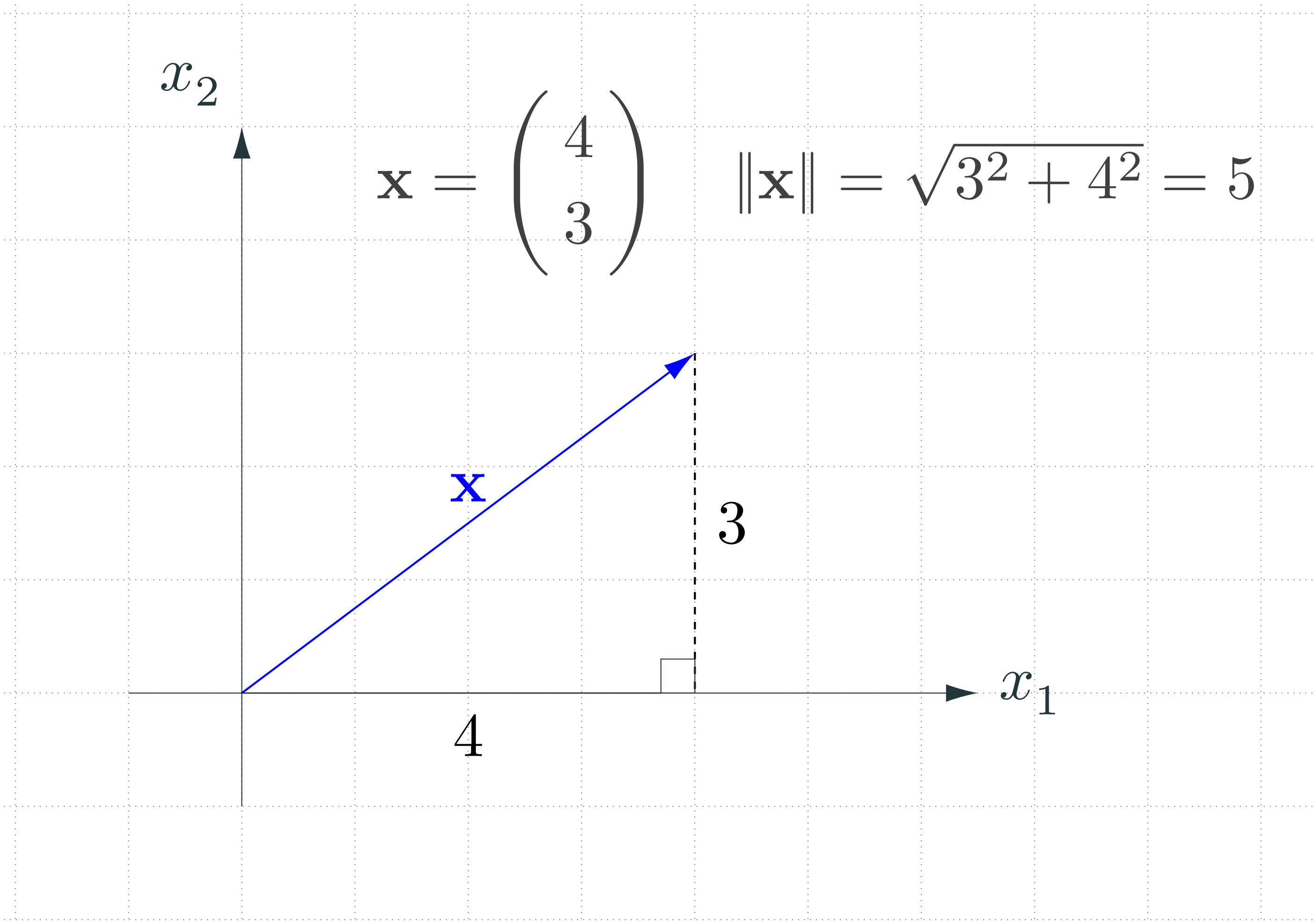
Евклид, около 300 лет до н.э.

wikipedia.org / общественное достояние

Определение.

Евклидова длина или норма вектора

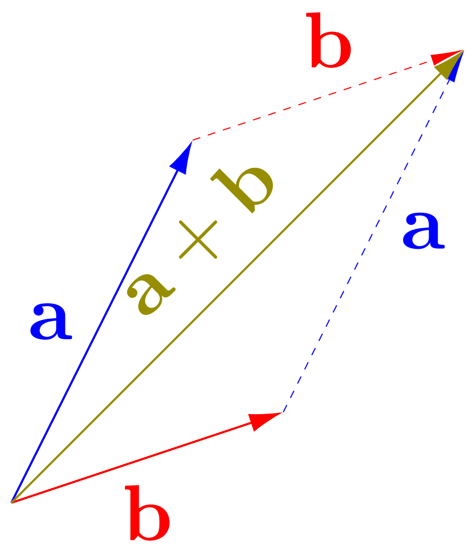
$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}.$$


x_2
$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$
$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$
$\mathbf{x}$
3
x_1
4

Сложение и вычитание двух векторов

Определение. Сложение и вычитание двух векторов выполняем поэлементно:

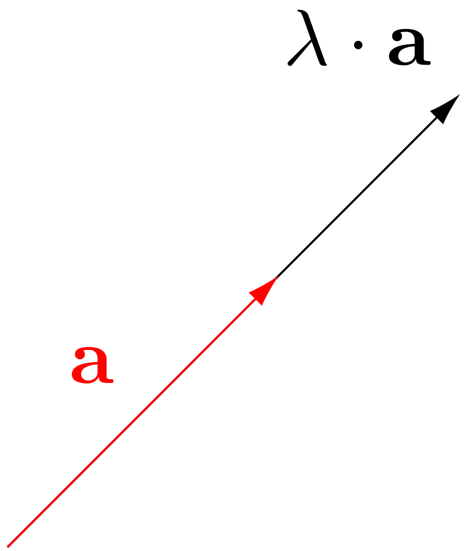
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3.5 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Умножение вектора на число

Определение. Умножение вектора на число выполняем поэлеметно:

$$4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3.5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \\ -4 \end{pmatrix}$$

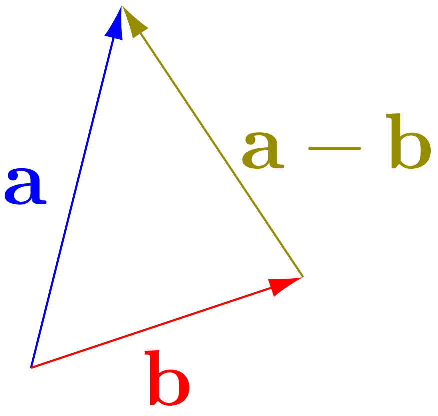


Расстояние между векторами

Определение. Евклидово расстояние между векторами

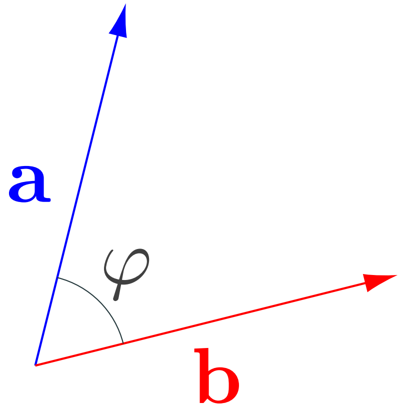
$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \ldots + (a_n - b_n)^2}$$

- по определению, $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \geq 0$.
- также говорят Евклидова метрика



Скалярное произведение и угол

- Определение. Скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$: $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n$.

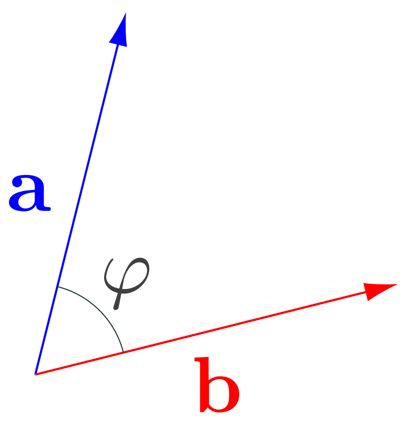


Угол определён, если $\|\mathbf{a}\| > 0$ и $\|\mathbf{b}\| > 0$.

Скалярное произведение и угол

- Определение. Скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$:
  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n$.
- Определение. Косинус угла и угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$:

$$\cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|} \quad \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \arccos \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}$$

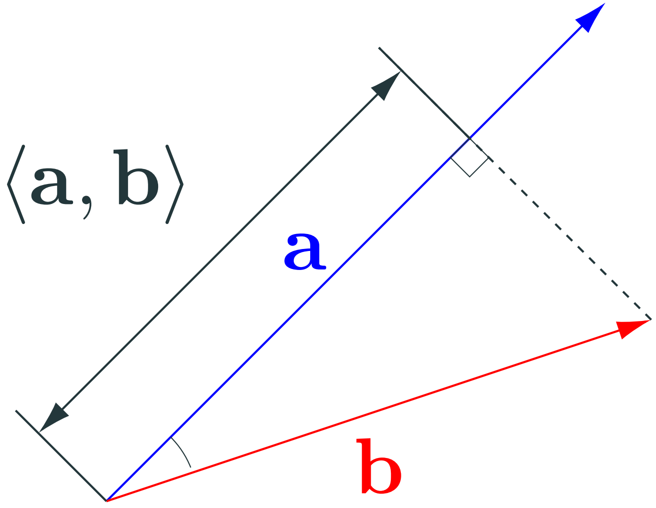


Угол определён, если $\|\mathbf{a}\| > 0$ и $\|\mathbf{b}\| > 0$.

Скалярное произведение и проекция

Если вектор $\mathbf{a}$ имеет единичную длину, $\|\mathbf{a}\| = 1$, то

$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{b}\| \cos \phi$ — длина* проекции b на a.



Свойства скалярного произведения

- Скалярное вектора на себя равно квадрату длины
  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = \|\mathbf{a}\|^2$

Свойства скалярного произведения

- Скалярное вектора на себя равно квадрату длины
  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = \|\mathbf{a}\|^2$
- Линейность по каждому аргументу
  $\langle \lambda \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \lambda \mathbf{b} \rangle = \lambda \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$
  $\langle \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$

Свойства скалярного произведения

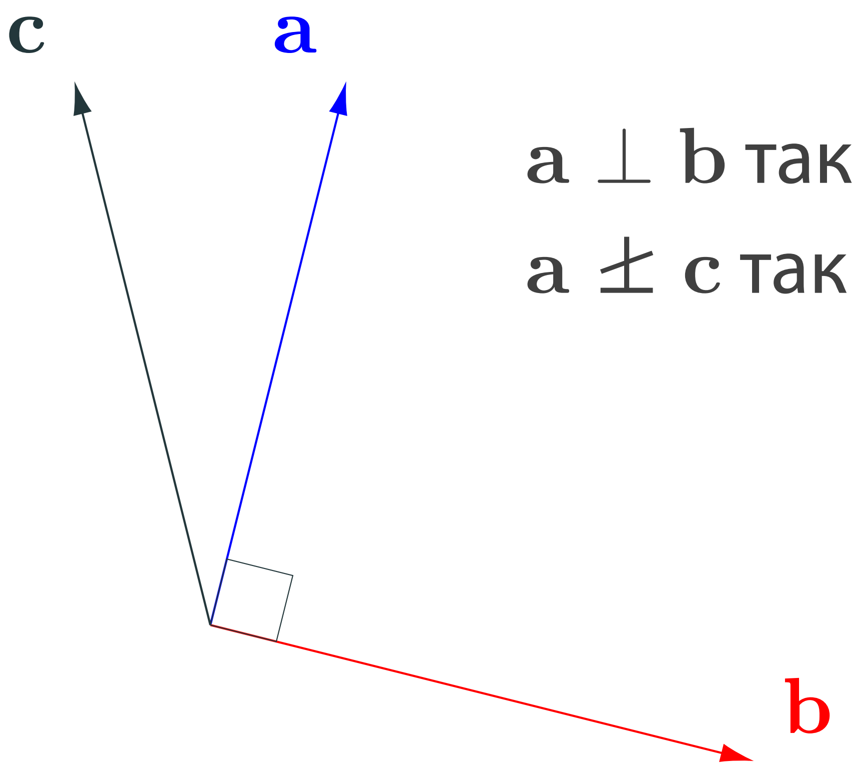
- Скалярное вектора на себя равно квадрату длины
  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = \|\mathbf{a}\|^2$
- Линейность по каждому аргументу
  $\langle \lambda\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \lambda\mathbf{b} \rangle = \lambda\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$
  $\langle \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$
- Симметричность
  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle$

Ортогональность векторов

Определение. Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ ортогональны, $a \perp b$, если

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0$$

Также говорят «перпендикулярны».



$\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ так как $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0$

$\mathbf{a} \not\perp \mathbf{c}$ так как $\langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \neq 0$

Прямая, порожденная вектором, гиперплоскость

название видеофрагмента

Краткий план:

- Да будет больше разных расстояний!

Краткий план:

- Да будет больше разных расстояний!
- Делаем из вектора прямую и гиперплоскость.

Краткий план:

- Да будет больше разных расстояний!
- Делаем из вектора прямую и гиперплоскость.
- Ядерные функции из скалярного произведения.

Больше метрик в студию!

Манхэттэнская метрика

Расстояние по Майкопски:

$$d(a, b) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + ... + |a_n - b_n|$$

У нас и у них

TODO:
Рядом картинки Манхэттэна и Майкопа

Ещё больше метрик!

Метрика Минковского

$$d_p(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i|^p \right)^{1/p}$$

Частные случаи метрики Минковского

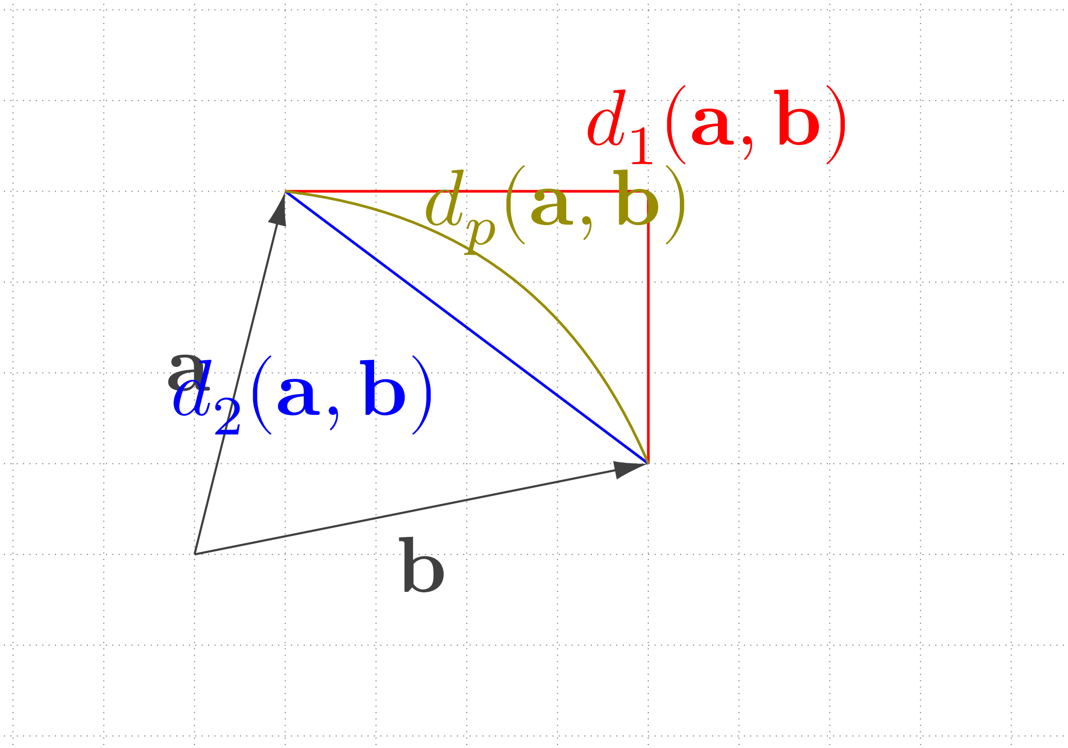
Евклидова метрика, $p = 2$

$$d_2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + ... + (a_n - b_n)^2}$$

Манхэттэнская метрика, $p = 1$

$$d_1(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + ... + |a_n - b_n|$$

Частные случаи метрики Минковского



Вектор порождает прямую

Прямая порождённая вектором a, $\mathrm{Lin} a$

множество векторов, получаемых при домножении вектора a на произвольное число,

$$\mathrm{Lin}\mathbf{a} = \{t \cdot \mathbf{a} | t \in \mathbb{R}\}$$

TODO: картинка прямой порожденной вектором

Вектор задаёт гиперплоскость

Вектор $\mathbf{a}$ фиксирован, например, $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$.

TODO: две картинки рядом

$\langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle = 0$ и $\langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle = 1$

Ядерные функции

Векторная функция f фиксирована, например,

$$f : \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 \\ v_1^2 + v_2^2 \end{pmatrix}$$

Ядерная функция, ядро K

Скалярное произведение в спрямляющем пространстве:

$K(a, b) = \langle f(a), f(b) \rangle$.

Спрямляющее пространство:

TODO: картинка с исходным и спрямляющим пространством

Линейный оператор: определение и примеры

название видеофрагмента

Вывод формулы поворота

название видеофрагмента

видеофрагмент с прозрачной доской

Вывод формулы проекции

название видеофрагмента

видеофрагмент с прозрачной доской

Композиция операторов, ортогональный оператор

название видеофрагмента

Транспонирование оператора

название видеофрагмента

Обращение оператора

название видеофрагмента

Собственные векторы и собственные числа

название видеофрагмента

Игра Ним

название видеофрагмента

это видео является бонусным, поэтому ничего нет страшного, что с ним выходит много видео, или оно будет долгое

В начале фрагмента идёт слайд с правилами затем видеофрагмент с прозрачной доской

Игра Ним

- Есть три кучки с камнями: 3, 5 и 8 камней;
- Два игрока ходят по очереди;
- За ход:

  игрок выбирает одну кучку;

  берёт из неё положительное число камней;
- Выигрывает берущий последний камень.

Какой ход сделать первому игроку?

видео с доской

Краткое содержание:

закодируем каждую кучку двоичным вектором

стоимость позиции — сумма этих двух векторов

финальная позиция имеет стоимость ноль

любой ход из нулевой позиции ведёт в положительную

Из положительной позиции можно попасть в нулевую

С помощью нижней единички убиваем остальные

Выигрышный ход: взять 2 камня из кучки в 8 камней