Analysis I

Leon Auspurg - lauspurg@ethz.ch

Version: September 19, 2023

Template by Micha Bosshart

1 Funktionen

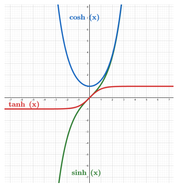
1.1 Folgen, Reihen und Konvergenz 38-41, 51-53

- **Wichtige Begriffe: Folgen**
  - *Explizit* (z.B. $a_n = 2n+1$)
  - *Rekursiv* (z.B. $a_n = a_{n-1} + 2$)
  - *Beschränkt*: Wenn es $r, s \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $r \leq a_n \leq s$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt (zu einem Grenzwert)
  - *Monoton wachsend*: Falls $a_{n-1} \leq a_n \ \forall\ n$ [$<$ strikt]
  - *Monoton fallend*: Falls $a_{n-1} \geq a_n \ \forall\ n$ [$>$ strikt]
  - *Konvergent*: Strebt gegen einen Grenzwert a, falls $b_n = a_n - a$ eine Nullfolge (Grenzwert = 0) ist
  - *Divergent*: Strebt gegen keinen Grenzwert
- **Satz:** Monoton + Beschränkt ⇒ konvergent ⇒ beschränkt
- **Satz:** Wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, ist die Folge a_n eine Nullfolge, d.h. $a_n \longrightarrow 0$
- **Allgemeine harmonische Reihe**:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \begin{cases} \text{konvergiert für} & s > 1 \\ \text{divergiert für} & s \leq 1 \end{cases}$$
- **Geometrische Reihe**

  konvergiert für $|q| < 1$ gegen: $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$

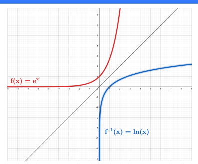
1.2 Funktionen 54-62/65-66

→ **Gerade**
$f(x) = f(-x)$
→ **Ungerade**
$f(-x) = -f(x)$
→ Monoton wachsend
$x_1 \leq x_2 \rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
→ Monoton fallend
$x_1 \geq x_2 \rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$



1.2.1 Exponentialfunktion & Logarithmusfunktion 58

- e^x
→ strikt monoton wachsend
→ $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, $\mathbb{W} = \mathbb{R}^+$
→ $e^{a+ib} = e^a(\cos(b) + i\sin(b))$
- $\ln(x)$
→ strikt monoton wachsend
→ $\mathbb{D} = \mathbb{R}^+$, $\mathbb{W} = \mathbb{R}$



1.2.2 Funktionstransformationen 55

1.3 Grenzwerte 61-62

- Wenn $\lim_{x\to x_0} f(x)$ und $\lim_{x\to x_0} g(x)$ existieren und $a \in \mathbb{R}$, dann gilt: (Achtung, für $a = \pm\infty$ nicht! Da $\pm\infty \notin \mathbb{R}$)
- **Tipps:**
  1. Wurzeln: Erweitern nach 3. binomischer Formel
  2. Beträge: $\lim_{x\to a^+}$ und $\lim_{x\to a^-}$ unterscheiden
  3. Rationale Funktionen:
     (A1) Höchste Potenz kürzen ($\lim \rightarrow \infty$)
     (A2) Kleinste Potenz kürzen ($\lim \rightarrow 0$)
     (B) Bernoulli-Hôpital
     (C) Partialbruchzerlegung (→ Integration)
     (D) Substiution (Grenzen anpassen)
     (E) Einschnürungssatz (Sandwich)

(B) **Bernoulli-Hôpital**

→ Wenn man durch Einsetzen von x_0 in $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ den Bruch $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ erhält (oder in diese Form überführen kann), dann gilt:

- $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

1.4 Stetigkeit 61-62

- **Satz:** f stetig a.d.S. $\xi \in \mathbb{D}(f) \Leftrightarrow \lim_{x\to\xi^-} f(x) = f(\xi) = \lim_{x\to\xi^+} f(x)$

1.5 Zwischenwertsatz 62

- **Satz:** Ist $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so nimmt $f(x)$ jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

1.6 Die inverse Funktion 54

- *Injektiv:* für jedes y *höchstens* ein x
- *Surjektiv:* für jedes y *mindestens* ein x
- *Bijektiv*/**Invertierbar**: für jedes y *genau* ein x
  → injektiv und surjektiv
- Invertieren einer Funktion: (Spiegelung an y = x)
  1. Bijektivität überprüfen
  2. $y = f(x)$ nach x auflösen
  3. Achte auf Definitons- und Wertebereich!!!
  4. (x und y vertauschen)
- Beachte: $\mathbb{D}_f = \mathbb{W}_f^{-1}$ und $\mathbb{W}_f = \mathbb{D}_f^{-1}$

$$\boxed{\begin{array}{ll} f^{-1}(f(x)) = x, & (f^{-1}(x))^{-1} = f(x) \\ (f^{-1}(x))' = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}, & f'(x) = \dfrac{1}{(f^{-1})' \cdot f(x)} \end{array}}$$

1.7 Asymptoten 57/66

- g(x) ∼ f(x) ⇔ $\lim_{x\to\infty} (f(x) - g(x)) = 0$
- **Vorgehen:**
  - Zählergrad ¡ Nennergrad
    x-Achse = Asymptote
  - Zählergrad = Nennergrad [$\rightarrow x^n ausklammern$]
    x-parallel $\lim_{x\to\infty} f(x)$
  - Zählergrad ≥ Nennergrad + 1
    Polyndiv. zb $\frac{0.5(x-1)^2}{x+1} = \mathbf{0.5x - 1.5} + \frac{2}{x+1}$
    Rest vernachlässigen (bei $\lim_{x\to\infty} = 0$)
  - Vertikale Asymptoten (entstehen bei Polstellen)
    Nullstellen des Nenners
  - lineare: $m = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right)$, $b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx)$

1.8 Grössenordnungen von Funktionen

- $f(x) = o(g(x)) \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$
  "$g(x)$ wächst *wesentlich* schneller als $f(x)$"
- $f(x) = \mathcal{O}(g(x)) \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq A,\ A \in \mathbb{R}$
  "$g(x)$ wächst *nicht wesentlich* schneller als $f(x)$"
  → $e^x >> x^k >> ln(x)$ (für $x \to \infty$ und $k > 0$)

2 Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$ 18-19

- Imaginäre Einheit: $i^2 = -1$
- Komplexe Zahl: $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$
  polar: $z = r \cdot (\cos\phi + i\sin\phi)$
  exponentiell: $z = r \cdot e^{i\phi}$, $-\pi < \phi < \pi$
- Komplex konjugierte: $\bar{z} = a - ib = r \cdot e^{i(-\phi)}$
- Betrag von z: $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$
- Re(z): $a = \dfrac{z + \bar{z}}{2} = r \cdot \cos\phi$
- Im(z): $b = \dfrac{z - \bar{z}}{2i} = r \cdot \sin\phi$

Umwandlungen:

Quadrant	arg(z) = ϕ
I. & IV.	$\arctan(\frac{y}{x})$
II. & III.	$\arctan(\frac{y}{x}) + \pi$

- Division: Bruch mit Konjugierten des Nenners erweitern:
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+ib}{c+id} \cdot \frac{c-id}{c-id} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$
- Eulersche Identität: $e^{\pi i} = -1$

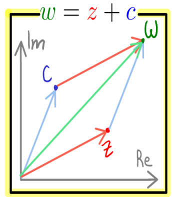
2.1 Komplexes Potenzieren (Hilfsgleichung)

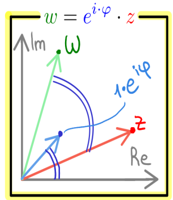
Formel de Moivre:
$(\cos(\varphi) + i \cdot sin(\varphi))^n = cos(n\cdot\varphi) + i \cdot sin(n \cdot \varphi)$

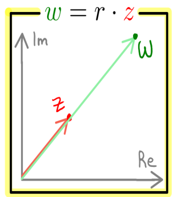
2.2 Komplexes Wurzelziehen 19

- Beispiel: $z^n = c, c \in \mathbb{C} -> n$ Lösungen:
$$z_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\left(\frac{\phi + 2k\pi}{n}\right)}, \quad k = 0, 1, ..., n-1$$
- Bsp: $z^5 = c \rightarrow \sqrt[5]{|c|} \cdot e^{\left(\frac{\phi+2k\pi}{5}\right)}$, $k = 0, 1, .., 4$

2.3 Komplexe Operationen Graphisch







2.3.1 Polynome und ihre Nullstellen 21

- **Tipps: Bsp.** $z \rightarrow p$, $\quad p(z) = c_0 + c_1 z + ... + c_n z^n$
  1. p hat mind. 1 Nullstelle falls Grad $p \geq 1$
  2. Ein Polynom von Grad n hat max. n Nullstellen.
  3. Wenn z Nst., dann ist auch $\bar{z}$ eine Nullstellen.
  4. Die Anzahl nicht reeler Nullstellen ist immer gerade.

3 Differentialrechnung 62-65

3.1 Differentialquotient 62

- Differenzenquotient: $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
- Differentialquotient: $\frac{df}{dx}(x_0) := \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$
  f bei x_0 diff'bar ⇔ Differentialquotient existiert a.d.S x_0
- **Satz:** f a.d.S. x_0 diff'bar ⇒ f a.d.S. x_0 stetig

Funktion	Ableitung
Summenregel	
$f(x) = u(x) \pm v(x)$	$f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$
Faktorregel	
$f(x) = c \cdot u(x)$	$f'(x) = c \cdot u'(x)$
Produktregel	
$f(x) = u(x) \cdot v(x)$	$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
Quotientenregel	
$f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$	$f'(x) = \dfrac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}$
Kettenregel	
$f(x) = u(v(x))$	$f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

3.2 Linearisieren, Fehlerrechnung 64/(77/78)

- Lin. Ersatzfkt.: f(x_0) ≈ $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
  Stützpunkt + Steigung · horiz. Abstand zu x_0
- Abs. Fehler: $|\Delta f| = |f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)| \approx |df|$
- Rel. Fehler: $\left|\frac{\Delta f}{f(x_0)}\right| \approx \left|\frac{df}{f(x_0)}\right|$ (mit $df = f'(x) \cdot dx$)

3.3 Mittelwertsatz der Differentialrechnung 64

- **Satz von Rolle**
  Sei $f(x)$ eine diff'bare Funktion mit $f(x_1) = f(x_2)$ für $x_1 < x_2$, dann gibt es mindestens ein ξ mit $x_1 < \xi < x_2$ mit $f'(\xi) = 0$
- **Mittelwertsatz der Differentialrechnung**
  Sei $f(x)$ eine im Intervall $[x_1, x_2]$ definierte diff'bare Funktion. Dann gibt es (mind.) ein ξ, $x_1 < \xi < x_2$ mit $f'(\xi) \cdot (x_2 - x_1) = f(x_2) - f(x_1)$
  Interpr.: Es gibt einen Punkt mit durchschnittlicher Steigung

3.4 Extremalwerte- und aufgaben 65-66

	f'	f''	f'''	Extrwert?
Hochpunkt	$\overset{\star}{=} 0$	$\overset{\blacklozenge}{<} 0$	-	👍
Tiefunkt	$\overset{\star}{=} 0$	$\overset{\blacklozenge}{>} 0$	-	👍
Sattelpunkt	$\overset{\star}{=} 0$	$\overset{\star}{=} 0$	$\overset{\blacklozenge}{\neq} 0$	👎
Wendepunkt	-	$\overset{\star}{=} 0$	$\overset{\blacklozenge}{\neq} 0$	👎

★ = notwendige Bedingung, (★ + ♦) = hinreichende Bedingung

- **Randextrema** und Stellen mit **undefinierter Ableitung** ebenfalls überprüfen!!
- Lokales Maximum: $f(x_0) \geq f(x)$ mit $x_0 \in [a, b]$
- Globales Maximum: $f(x_0) \geq f(x)\ \forall x \in \mathbb{D}_f$

3.5 Die zweite und höhere Ableitungen 62-66

- **Konvex** (∪) wenn: $f''(x) \geq 0$
- **Konkav** (∩) wenn: $f''(x) \leq 0$
- **Satz:** f n-fach diff'bar, $f'(x) = f''(x) = ... = f^{(n-1)}(x) = 0$ und $f^{(n)}(x) \neq 0$ für ein $x \in \mathbb{D}_f$ und
  - n gerade ⇒ x: lokale Extremalstelle
  - n ungerade ⇒ x: Wendepunkt

3.6 Ebene Kurven 66-69

3.6.1 Darstellung von ebenen Kurven 66-67

- **Ebene Kurve**: 1D Teilmenge der Ebene $\mathbb{R}^2$.

  - Parameterdarstellung $\overrightarrow{r} = (x(t), y(t))$
  - Implizite Darstellung $f(x, y) = 0$
  - Explizite Darstellung $y = f(x)$

3.6.2 Parameter → Implizit

- Eliminiere t (trig. Identitäten/nach t auflösen)

$$x(t) = x_0 + R\cos t \rightarrow \frac{x - x_0}{R} = \cos t$$

$$y(t) = y_0 + R\sin t \rightarrow \frac{y - y_0}{R} = \sin t$$

$$1 = \cos^2 t + \sin^2 t = \left(\frac{x - x_0}{R}\right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{R}\right)^2$$

$$R^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$$

3.6.3 Implizit → Explizit

- nach y (oder x) auflösen, in mehrere Funktionen teilen

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

$$y(x) = y_0 \pm \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2}$$

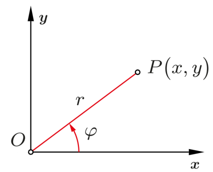
3.6.4 Explizit → Parameter

- Für einzelne Abschnitte: $\overrightarrow{r}(t) = (t, f(t))$, eventuell t mit etwas besserem ersetzen.

- nach y auflösen, in mehrere Funktionen teilen:

$$f(x) = ax^2 \rightarrow \overrightarrow{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ at^2 \end{pmatrix}$$

3.6.5 Polarkoordinaten 113



$$x = r\cos\varphi \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$y = r\sin\varphi, \quad \cos\varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{r}$$

$$\underline{r}(\varphi) = (r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi)$$

3.6.6 Steigung, Tangenten- & Normalenvektor 66-67

	m	$\vec{t}$	$\vec{n}$
Explizit	$f'(x_0)$	$\begin{pmatrix} 1 \\ f'(x_0) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -f'(x_0) \\ 1 \end{pmatrix}$
Parameter	$\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$	$\begin{pmatrix} \dot{x}(t_0) \\ \dot{y}(t_0) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\dot{y}(t_0) \\ \dot{x}(t_0) \end{pmatrix}$

3.6.7 Tangentengleichung an Punkt x_0 66-67

$$t(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Stützpunkt + Steigung · horiz. Abstand zu x_0

$$t(\varphi_0) = \underline{r}(\varphi_0) + s \cdot \underline{\dot{r}}(\varphi_0)$$

3.6.8 Normalengleichung an Punkt x_0 66-67

$$n(x_0) = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

3.6.9 Krümmung 65-67

$$\kappa(t) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\kappa(x) = \frac{f''(x)}{(1 + f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\kappa(\varphi) = \frac{(f(\varphi))^2 + 2(f'(\varphi))^2 - f(\varphi)f''(\varphi)}{[(f(\varphi))^2 + (f'(\varphi))^2]^{3/2}}$$

→ polar, im Punkt $\vec{r}(\varphi) = f(\varphi) \cdot (\cos\varphi, \sin\varphi)$

$$\kappa(x, y) = -\frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_x^2F_{yy}}{\left(F_x^2 + F_y^2\right)^{3/2}}$$

- Linkskurve ⇔ $\kappa(t) > 0$, Verstärkung: $\kappa \uparrow$
- Rechtskurve ⇔ $\kappa(t) < 0$, Verstärkung: $\kappa \downarrow$
- Kreis: $\kappa(t) = \frac{1}{r}$ • Ellipse: $\kappa(0) = \frac{a}{b^2} / k(\frac{\pi}{2}) = \frac{b}{a^2}$

3.6.10 Krümmungskreis und Evolute 66-67

- **Radius** des Krümmungskreises: $\rho = \frac{1}{|\kappa(t)|}$
- **Evolute** (Mittelpunkte der Krümmungskreise)

$$\boxed{\vec{E}(t) = \vec{r}(t) + \frac{1}{\kappa(t)} \cdot \frac{\vec{n}(t)}{|\vec{n}(t)|}}$$

- Parameter: $\vec{E}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\dot{y} \\ \dot{x} \end{pmatrix} \cdot \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{y}\ddot{x} - \dot{y}\ddot{x}}$
- Explizit: $\vec{E}(t) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -f'(x) \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1 + (f'(x))^2}{f''(x)}$

- Man kann sich $|\vec{r}(t) - \vec{E}(t)|$ als den Radius vorstellen.

4 Integralrechnung 70-76

4.1 Das bestimmte Integral 70

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$ a & b: Grenzen, $f(x)$: Integrand, x: Variable

→ Basics & Integrationsregeln: 70-71

4.2 Der Hauptsatz der Infinitesimalrechnung 70-71

- **Mittelwertsatz der Infinitesimalrechnung: 70**
- **HS:** f stetig, $F_a(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, $[a, b] \in \mathbb{D}_f$
  ⇒ Für $x \in [a, b]$ ist $F_a'(x) = f(x)$
- $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$
- Einige Integrationsregeln:
  - $\int (f(x) \pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x$
  - $\int c \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = c \cdot \int f(x)\,\mathrm{d}x$
  - $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$
  - $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$

4.3 Das Integrieren 71-72

$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$$

4.3.1 Integrationsmethode: Partielle Integration 71

$$\int f' \cdot g\,\mathrm{d}x = f \cdot g - \int f \cdot g'\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b f' \cdot g\,\mathrm{d}x = [f \cdot g]_a^b - \int_a^b f \cdot g'\,\mathrm{d}x$$

- **Tipps:**
  - Nach dem Integral auflösen
  - 2 mal partiell integrieren, dann auflösen
  - Multiplizieren mit 1 ist oft hilfreich

4.3.2 Integrationsmethode: Substitution 71

→ Wichtig: neue Funktion u muss injektiv sein! (oder zumindest der betroffene Teil → Symmetrie anwenden)

$$\int_a^b u'(x) \cdot f'(u(x))\,\mathrm{d}x = \int_{u(a)}^{u(b)} f(z)\,\mathrm{d}z, \text{ wobei } z = u(x)$$

4.4 Partialbruchzerlegung

- Grad Zähler ≥ Grad Nenner → Polynomdiv. & PartBruchZerl.
  einfach: $\frac{1}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$
  doppelt: $\frac{1}{(x+1)^2(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-2}$
  komplex: $\frac{1}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x+1}$

- Bsp: $\int_a^b \frac{5x^2+2x+1}{x^3+x} \rightarrow \int_a^b \frac{A}{x} + \frac{B+Cx}{x^2+1}$

→ Koeffizientenvergleich: $5x^2 + 2x + 1 = A(x^2 + 1) + Bx + Cx^2$

$\rightarrow x^2(A + C) + x(B) + 1(A) \rightarrow A = 1, B = 2, C = 4$

4.5 Weitere Beispiele/Tricks 71-74

- $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C$
- Wurzelintegrale: Quadratisches Ergänzen & Trigonometrie

4.6 Uneigentliche Integrale 72

- Existiert der Grenzwert ($\neq \pm\infty$) so sagt man das Integral **konvergiert**

Es sind **3 Fälle** zu unterscheiden:

- 1. Integrationsgrenze(n) ist/sind gleich $\pm\infty$
  ⇒ *Integral in einem Limes gegen* $\pm\infty$ *schreiben*
  $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\xi \to \infty} \int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x$

- 2. Zu integrierende Funktion an einer Grenze nicht definiert
  ⇒ *Integral in Limes gegen diese Grenze schreiben*
  Für $(a, b]$: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\xi \to a^+} \int_\xi^b f(x)\,\mathrm{d}x$

- 3. Das Integral verläuft über eine Stelle, an der die Funktion nicht definiert ist (oft eine Polstelle)
  ⇒ *Das Integral an den Polstellen aufteilen. Beide Teile müssen in einem Limes gegen dieser Polstelle berechnet werden. (Linker Grenzwert und rechter Grenzwert*

- Bsp: $I_\alpha := \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha + x^{2\alpha}} dx$: divergiert für $\alpha > \frac{1}{2}$

(Grösster Term im Nenner: Exponent > 1 Integral konvergiert)

4.7 Flächenberechnung 75-76

- Fläche zwischen Kurve und **x-Achse:**

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$I = \int_{t_1}^{t_2} y \cdot \dot{x}\,\mathrm{d}t$$

- Fläche zwischen Kurve und **y-Achse:**

$$I = \int_{y_1}^{y_2} f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y = \int_{x_1}^{x_2} x \cdot f'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$I = \int_{t_1}^{t_2} x \cdot \dot{y}\,\mathrm{d}t$$

- **Sekorfläche** zwischen Ursprung, A und B:

"links der Kurve" ⇔ $I_S > 0$

"rechts der Kurve" ⇔ $I_S < 0$

$$I_S = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} x\dot{y} - \dot{x}y\,\mathrm{d}t \text{ (param.)}$$

$$I_S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \text{ (polar)}$$

- (**Sekorfläche** einer geschlossenen Kurve:)

$I_S = \left|\int_{t_1}^{t_2} x\dot{y}\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_{t_1}^{t_2} y\dot{x}, \mathrm{d}t\right|$, falls $\dot{x} > 0$ für $t \in [t_1, t_2]$

4.8 Bogenlänge 2D (in 3D: analog mit $+\dot{z}^2$) 75

$$S = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{r}(t)|\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$polar := \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,\mathrm{d}\varphi$$

- Bei trigonometrischen Funktionen mit Beträgen rechnen!

4.9 Volumenberechnung 75

- Rotationskörper um **x-Achse**:

$$V = \pi\int_{t_1}^{t_2} y^2\dot{x}\,\mathrm{d}t = \pi\int_{x_1}^{x_2} f(x)^2\,\mathrm{d}x$$

- Rotationskörper um **y-Achse**:

$$V = \pi\int_{t_1}^{t_2} x^2\dot{y}\,\mathrm{d}t = \pi\int_{x_1}^{x_2} x^2 f'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \pi\int_{y_1}^{y_2} (f^{-1}(y))^2\,\mathrm{d}y$$

- Wenn "Streifen" ∥ um **y-Achse** (shell):

$$V = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} x\dot{x}y\,\mathrm{d}t$$

$= 2\pi\int_{x_1}^{x_2} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$, (Radius($x$) · Höhe($x$), um x-Achse: überall y statt x, also $y \cdot f(y)dy$ und Integrationsgrenzen angepasst, y_1 bzw. y_2)

4.10 Oberflächenberechnung von Rotationskörpern

- Oberfläche um **x-Achse:**:

$$M = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$M = 2\pi\int_{x_1}^{x_2} f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x$$

- Oberfläche um **y-Achse:**:

$$M = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} x(t)\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$M = 2\pi\int_{x_1}^{x_2} x\sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x$$

4.11 Flächenmittelpunkt und Schwerpunkt 76

$$x_s \cdot \int_a^b G(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b x \cdot G(x)\,\mathrm{d}x$$

$$y_s \cdot \int_c^d H(y)\,\mathrm{d}y = \int_c^d y \cdot H(y)\,\mathrm{d}y$$

- $G(x)$ und $H(y)$ beschreiben die Masse an einer x- oder y-Stelle.
- Für den Schwerpunkt im Raum: zusätzlich z-Koordinate
- $G(x)$ usw. messen Flächeninhalte statt Intervalllängen.

4.12 Trägheitsmoment 76

$\Theta_x = \rho \int_c^d y^2 \cdot H(y)\,\mathrm{d}y$, $\Theta_y = \rho \int_a^b x^2 \cdot G(x)\,\mathrm{d}x$

- $\rho = 1 \rightarrow$ Flächenträgheitsmoment J
- Spezialfall: Rotation eines Graphen $f(x)$ um x-Achse:

$$\Theta_x = \frac{1}{2}\pi\rho\int_a^b (f(x))^4\,\mathrm{d}x$$

- pol. Flächenträgheitsmoment $J_p = \int_A r^2\,\mathrm{d}A = J_x + J_y$
  $\rightarrow \int_A r^3\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$ bzw. $\int_A x^2 + y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

5 Potenzreihen 77-80

- **Potenzreihe**: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$
- **Konvergenzradius** ($|x| = \rho$ (Rand) individuell betrachten)

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$$

$\rightarrow$ bei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ist ρ ein Intervall mit Mittelpunkt 0

$\rightarrow$ für $|x| < \rho$ darf +, -, ·, abgeleitet & integriert werden

- Verschiebung Mittelpunkt zu x_0: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$

  $\rightarrow$ **Konvergenzbereich**: (od. [$x_0 - \rho, x_0 + \rho$) od.]

  $\rightarrow$ Reihe konvergiert für $|x - x_0| < \rho$

5.1 Taylorpolynom und Taylorreihe von f 77-78

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot(x - x_0)^k$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot(x - x_0)^k$$

x_0: Entwicklungspunkt (Mittelpunkt)

5.2 Bestimmung der Potenzreihe 77-80

- Vorgehen:
  1. Prüfen, ob Funktion gerade oder ungerade:
     f ist gerade $\rightarrow$ ungerade a verschwinden
     f ist ungerade $\rightarrow$ gerade a verschwinden

  2.1 Taylor-Polynom (für einfache Ableitungen)
  $\rightarrow$ berechnen & als Summe aufschreiben

  2.2 Koeffizientenvergleich, Bsp:
  - Ziel: Pot.reihe v. $\frac{\sin(2x)}{e^x} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$
  $\rightarrow | \cdot e^x$, ausmultiplizieren, ordnen
  $\rightarrow$ Koeffizienten vergleichen

  2.3 Bekannte Potenzreihe umformen

5.3 Entwickeln einer Funktion in eine Potenzreihe

Bsp.: Entwickle $f(x) = \frac{3}{-x-6}$ a.d.S. $x = -3$ & berechne ρ.

1) Schreibe die Funktion in die Form $a \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{x-(-3)}{b}\right)}$ um.

2) $\Rightarrow$ geometrische Reihe mit Vorfaktor a = -1 und b = -3

3) $\rho = 3$ ($= |b|$) & $f(x) = \frac{3}{-x-6} = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{-3^n}\cdot(x+3)^n$

5.4 Weitere Potenzreihen Tabelle: 79-80

- $\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad x \in \mathbb{R}$
- $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad x \in \mathbb{R}$
- $\ln(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \cdots$
  $= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n$ für $0 < x \le 2$

6 Anhang

6.1 Trigonometrische Beziehungen 97-100

6.1.1 Trigonometrische Werte 97

Bogenmass	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
Gradmass	0°	30°	45°	60°	90°	180°
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan(\alpha)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0

6.1.2 Identitäten (Identitäten mit $e^{\cdots}$ in 1.2.2)

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ • $1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

6.1.3 Additionstheoreme 99

- $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1 \Rightarrow \sin(x) = \sqrt{1 - \cos(x)^2}$
- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta)$
- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$
- $\sin(\arccos(x)) = \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}$
- $\cos(x) = 2\cos(\frac{x}{2})^2 - 1 = \cos(\frac{x}{2})^2 - \sin(\frac{x}{2})^2$
- $\tan(a \pm b) = \frac{\tan(a)\pm\tan(b)}{1\mp\tan(a)\tan(b)}$
- $\cot(a \pm b) = \frac{\cot(a)\cot(b)\mp 1}{\cot(a)\pm\cot(b)}$

6.1.4 Reduktionsformeln 99

- $\sin(-x) = -\sin(x)$ • $\cos(-x) = \cos(x)$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \cos(x)$ • $\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp\sin(x)$
- $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$ • $\cos(\pi \pm x) = -\cos(x)$
- $\sin(2\pi + x) = \sin(x)$ • $\cos(2\pi + x) = \cos(x)$
- $\tan(a) \pm \tan(b) = \frac{\sin(a\pm b)}{\cos(a)\cos(b)}$

6.1.5 Summen

- $\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
- $\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
- $\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
- $\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
- $\cos(a) - \sin(a) = \sqrt{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4} - a\right) = \sqrt{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4} + a\right)$

6.1.6 Produkte

- $\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$
- $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$
- $\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$

6.1.7 2a, 3a, a/2

2a

- $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a) = \frac{2\tan(a)}{1+\tan^2(a)}$
- $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = \frac{1-\tan^2(a)}{1+\tan^2(a)}$
  $= 1 - 2\sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1$
- $\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$

3a

- $\sin(3a) = 3\sin(a) - 4\sin^3(a)$
- $\cos(3a) = 4\cos^3(a) - 3\cos(a)$

$\frac{a}{2}$

- $\sin\left(\frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\cdot(1 - \cos(a))}$
- $\cos\left(\frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\cdot(1 + \cos(a))}$
- $\tan\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1-\cos a}{\sin a} = \frac{\sin a}{1+\cos a}$

6.1.8 Potenzen der Winkelfunktionen 74

Potenzen

- $\sin^2(a) = \frac{1}{2}\cdot(1 - \cos(2a))$
- $\sin^3(a) = \frac{1}{4}\cdot(3\sin(a) - \sin(3a))$
- $\sin^4(a) = \frac{1}{8}\cdot(\cos(4a) - 4\cos(2a) + 3)$
- $\cos^2(a) = \frac{1}{2}\cdot(1 + \cos(2a))$
- $\cos^3(a) = \frac{1}{4}\cdot(3\cos(a) + \cos(3a))$
- $\cos^4(a) = \frac{1}{8}\cdot(\cos(4a) + 4\cos(2a) + 3)$

Potenzen^n bei Integration

- $\int_0^{\pi/2} \sin^n\,\mathrm{d}x = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}\,\mathrm{d}x - \left(\frac{1}{n}\cos x \sin^{n-1} x\right)$
- $\int_0^{\pi/2} \cos^n\,\mathrm{d}x = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \cos^{n-2}\,\mathrm{d}x - \left(\frac{1}{n}\sin x \cos^{n-1} x\right)$

  $n \ge 2,\ r, s \in \mathbb{Z}$ (für beide, sin und cos)
- Grüner Teil fällt beim bestimmten Integrieren weg!
- $\int_0^{\pi/2}$: $n = 1 : 1, n = 2 : \frac{\pi}{4}, n = 3 : \frac{2}{3}, n = 4 : \frac{3\pi}{16}$
- Achtung: $\int_0^{\pi/2} \sin^2(2x)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\mathrm{d}x$

6.2 Hyperbolische Beziehungen

6.2.1 Allgemeines

- $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$
- $\cosh(x) + \sinh(x) = e^x$
- $\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$
- $\tanh(a \pm b) = \frac{1}{\coth(a\pm b)} = \frac{\tanh(a)\pm\tanh(b)}{1\pm\tanh(a)\tanh(b)}$

6.2.2 2a und 3a

Alles gleich wie für sin und cos (FotaBe 99),
$\rightarrow$ sin $\hat{=}$ sinh, cos $\hat{=}$ cosh, tan $\hat{=}$ tanh

6.2.3 Summen

- $\sinh(a) + \sinh(b) = 2\sinh\left(\frac{a+b}{2}\right)\cosh\left(\frac{a-b}{2}\right)$
- $\sinh(a) - \sinh(b) = 2\cosh\left(\frac{a+b}{2}\right)\sinh\left(\frac{a-b}{2}\right)$
- $\cosh(a) + \cosh(b) = 2\cosh\left(\frac{a+b}{2}\right)\cosh\left(\frac{a-b}{2}\right)$
- $\cosh(a) - \cosh(b) = 2\sinh\left(\frac{a+b}{2}\right)\sinh\left(\frac{a-b}{2}\right)$
- $\tanh(a) \pm \tanh(b) = \frac{\sinh(a\pm b)}{\cosh(a)\cosh(b)}$

6.2.4 Produkte

- $\sinh(a)\sinh(b) = \frac{1}{2}\cdot[\cosh(a+b) - \cosh(a-b)]$
- $\cosh(a)\cosh(b) = \frac{1}{2}\cdot[\cosh(a+b) + \cosh(a-b)]$
- $\sinh(a)\cosh(b) = \frac{1}{2}\cdot[\sinh(a+b) + \sinh(a-b)]$
- $\tanh(a)\tanh(b) = \frac{\tanh(a)+\tanh(b)}{\coth(a)+\coth(b)}$

6.2.5 a/2

- $\sinh\left(\frac{a}{2}\right) = \sqrt{\frac{\cosh(a)-1}{2}}, \quad x \ge 0$
- $\cosh\left(\frac{a}{2}\right) = \sqrt{\frac{\cosh(a)+1}{2}}$
- $\sinh\left(\frac{a}{2}\right) = -\sqrt{\frac{\cosh(a)-1}{2}}, \quad x \le 0$

6.2.6 Potenzen

- $\sinh^2(a) = \frac{1}{2}\cdot(\cosh(2a) - 1)$
- $\sinh^3(a) = \frac{1}{4}\cdot(\sinh(3a) - 3\sinh(a))$
- $\sinh^4(a) = \frac{1}{8}\cdot(\cosh(4a) - 4\cosh(2a) + 3)$
- $\cosh^2(a) = \frac{1}{2}\cdot(\cosh(2a) + 1)$
- $\cosh^3(a) = \frac{1}{4}\cdot(\cosh(3a) + 3\cosh(a))$
- $\cosh^4(a) = \frac{1}{8}\cdot(\cosh(4a) + 4\cosh(2a) + 3)$

6.2.7 Formel von Moivre

- $(\cosh(a) \pm \sinh(a))^n = \cosh(na) \pm \sinh(na), \quad n \ge 2$

6.2.8 Trigonometrische & Hyperbelfunktionen 58-60

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \arcsin(x) : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \arccos(x) : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

$$\tan(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)}, \arctan(x) : \mathbb{R} \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1}$$

6.3 Wichtige Ebene Kurven (FoTaBe enthält: ↓) 68-69

Spiralen, Zykloide, Kardiodide, Asteroide, Evolvente eines Kreises, Kettenlinie, Taraktirx, Brachistochrone, Herz, Kartesisches Blatt

6.3.1 Kreis

$$\text{P: } \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x_0 + R\cdot\cos t \\ y_0 + R\cdot\sin t \end{pmatrix}$$

$$\text{I: } (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

6.3.2 Ellipse

$$\text{P: } \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x_0 + a\cdot\cos t \\ y_0 + b\cdot\sin t \end{pmatrix}$$

$$\text{I: } \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

6.3.3 Zykloide

$$\text{P: } \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} at - b\cdot\sin t \\ a - b\cdot\cos t \end{pmatrix}$$

6.3.4 Zwiebelkurve $0 \leq t \leq 2\pi$

P: $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin 2t \end{pmatrix}$

6.3.5 Hyperbel (Steigung der Asyptoten: $\pm\frac{b}{a}$)

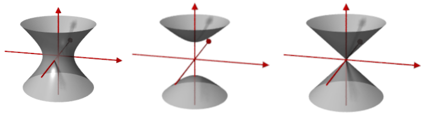
P: $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x_0 + a \cdot \cosh t \\ y_0 + b \cdot \sinh t \end{pmatrix}$

I: $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$

6.3.6 Hyperboloid

P: $\vec{x}(s,t) = \begin{pmatrix} a \cdot \sqrt{s^2+d}\ \cos t \\ b \cdot \sqrt{s^2+d}\ \sin t \\ c \cdot s \end{pmatrix}$

I: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = d\ ,\ a,b,c > 0.$

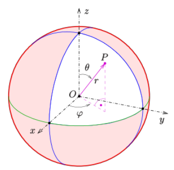


einschalig	zweischalig	Doppelkegel
d=1	d=-1	d=0

6.3.7 Kugel

P: $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R \cdot \cos\varphi \cdot \sin\theta \\ R \cdot \sin\varphi \cdot \sin\theta \\ R \cdot \cos\theta \end{pmatrix}$

I: $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$



6.3.8 Zylinder

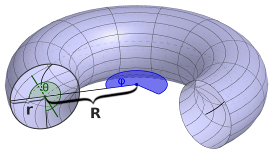
P: $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R \cdot \cos t \\ R \cdot \sin t \\ z \end{pmatrix}$

6.3.9 Helix

P: $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ a\sin(t) \\ bt + c \end{pmatrix}$

6.3.10 Torus

P: $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\,(R + r\cos(\theta)) \\ \sin(\varphi)\,(R + r\cos(\theta)) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix}$



6.3.11 Koordinatentransformationen 113/114

	Kartesisch	Zylindrisch	Sphärisch
x	x	$\rho\cos\varphi$	$r\sin\theta\cos\psi$
y	y	$\rho\sin\varphi$	$r\sin\theta\sin\psi$
z	z	z	$r\cos\theta$
ρ	$\sqrt{x^2+y^2}$	ρ	$r\sin\theta$
φ	$\arctan\frac{y}{x}$	φ	ψ
z	z	z	$r\cos\theta$
r	$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$	$\sqrt{\rho^2+z^2}$	r
θ	$\arccos\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$	$\arctan\frac{\rho}{z}$	θ
ψ	$\arctan\frac{y}{x}$	φ	ψ

6.4 Häufige Integrale (Erinnerung: $+C$!) 72

Basic

- $\int k dx = kx + C$
- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$
- $\int \frac{1}{x^n} = \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + C, n \neq 1$
- $\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{ln(a)} + C$
- $\int e^x dx = e^x + C$
- $\int \log_a(x) dx = x\log_a(x) - x\log_a(e) + C$

Logarithmisch

- $\int \ln(ax) dx = x\ln(ax) - x$
- $\int x\ln(ax) dx = \frac{x^2}{4}(2\ln(ax) - 1) + C$
- $\int \frac{\ln(ax)}{x} dx = \frac{1}{2}(\ln(ax)^2 + \text{C}$

Exponential

- $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$
- $\int xe^x dx = (x-1)e^x + C$
- $\int xe^{ax} dx = \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}\right)e^{ax} + C$

Rationale Funktionen

- $\int \frac{1}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$
- $\int (x+a)^n dx = \frac{(x+a)^{n+1}}{n+1},\ n \neq -1 + C$
- $\int x(x+a)^n dx = \frac{(x+a)^{n+1}((n+1)x-a)}{(n+1)(n+2)} + C$
- $\int \frac{ax+b}{cx+d} dx = \frac{ax}{c} - \frac{ad-bc}{c^2}\ln|cx+d| + C$
- $\int \frac{1}{(x+a)^2} dx = -\frac{1}{x+a} + C$
- $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$
- $\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$
- $\int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\arctan\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right) + C$
- $\int \frac{1}{(x-a)(x-b)} dx = \frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{x-a}{x-b}\right| + C$
- $\int \frac{x}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{2}\ln|a^2+x^2| + C$
- $\int \frac{x^2}{a^2+x^2} dx = x - a\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$
- $\int \frac{x^3}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}a^2\ln|a^2+x^2| + C$
- $\int \frac{x}{(x+a)^2} dx = \frac{a}{a+x} + \ln|a+x| + C$
- $\int \frac{x}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{2a}\ln|ax^2+bx+c| - \frac{b}{a\sqrt{4ac-b^2}}\arctan\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right) + C$

Wurzeln

- $\int \sqrt{x-a} dx = \frac{2}{3}(x-a)^{\frac{3}{2}} + C$
- $\int \sqrt{ax+b} dx = \left(\frac{2b}{3a} + \frac{2x}{3}\right)\sqrt{ax+b} + C$
- $\int \sqrt{x^2+a} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a} + \frac{a}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a}| + C$
- $\int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$
- $\int x\sqrt{x-a} dx = \frac{2}{3}a(x-a)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}(x-a)^{\frac{5}{2}} + C$
- $\int x\sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{3}(x^2 \pm a^2)^{\frac{3}{2}} + C$
- $\int (ax+b)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{5a}(ax+b)^{\frac{5}{2}} + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x \pm a}} dx = 2\sqrt{x \pm a} + C$
- $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \sqrt{x^2 \pm a^2} + C$

Trigonometrisch Basic

- $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$
- $\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$
- $\int \tan(x) dx = -\ln|\cos(x)|$

Trigonometrisch Ar

- $\int \text{arsinh}(x)\, dx = x\,\text{arsinh}(x) - \sqrt{x^2+1} + C$
- $\int \text{arcosh}(x)\, dx = x\,\text{arcosh}(x) - \sqrt{x^2-1} + C$
- $\int \text{artanh}\ dx = x\,\text{artanh}(x) + \frac{1}{2}\ln(1-x^2) + C$

Trigonometrisch ^{2}

- $\int \sin^2(x) dx = \frac{1}{2}(x - \sin(x)\cos(x) + C$
- $\int \cos^2(x) dx = \frac{1}{2}(x + \sin(x)\cos(x) + C$
- $\int \tan^2(x) dx = \tan(x) - x + C$

Trigonometrisch $\frac{1}{\ldots}$

- $\int \frac{1}{\sin(x)} dx = \ln\left|\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}\right| + C$
- $\int \frac{1}{\cos(x)} dx = \ln\left|\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\right| + C$
- $\int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = -\cot(x) + C$
- $\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan(x) + C$
- $\int \frac{1}{1+\sin(x)} dx = \frac{-\cos(x)}{1+\sin(x)} + C$
- $\int \frac{1}{1+\cos(x)} dx = \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} + C$
- $\int \frac{1}{1-\sin(x)} dx = \frac{\cos(x)}{1-\sin(x)} + C$
- $\int \frac{1}{1-\cos(x)} dx = \frac{-\sin(x)}{1-\cos(x)} + C$

Trigonometrisch mit $\ldots(ax)$ und $x\cdot \ldots(ax)$

- $\int \sin(ax) dx = -\frac{1}{a}\cos(ax) + C$
- $\int \cos(ax) dx = \frac{1}{a}\sin(ax) + C$
- $\int \tan(ax) dx = -\frac{1}{a}\ln(\cos(ax)) + C$
- $\int x\sin(ax) dx = -\frac{1}{a}x\cos(ax) + \frac{1}{a^2}\sin(ax) + C$
- $\int x\cos(ax) dx = \frac{1}{a}x\sin(ax) + \frac{1}{a^2}\cos(ax) + C$

Hyperbolisch

- $\int \sinh(x) dx = \cosh(x) + C$
- $\int \cosh(x) dx = \sinh(x) + C$
- $\int \tanh(x) dx = \ln(\cosh(x)) + C$
- $\int \text{arcsinh}(x) dx = x\,\text{arcsinh}(x) - \sqrt{x^2+1} + C$
- $\int \text{arccosh}(x) dx = x\,\text{arccosh}(x) - \sqrt{x^2-1} + C$
- $\int \text{arctanh}(x) dx = x\,\text{arctanh}(x) + \frac{1}{2}\ln(1-x^2) + C$

Andere trigonometrische

- $\int x\sin(ax) dx = -\frac{1}{a}x\cos(ax) + \frac{1}{a^2}\sin(ax) + C$
- $\int x\cos(ax) dx = \frac{1}{a}x\sin(ax) + \frac{1}{a^2}\cos(ax) + C$
- $\int e^{bx}\sin(ax) dx = \frac{1}{a^2+b^2}e^{bx}(b\sin(ax) - a\cos(ax)) + C$
- $\int e^{bx}\cos(ax) dx = \frac{1}{a^2+b^2}e^{bx}(a\sin(ax) + b\cos(ax)) + C$

6.5 Sonstiges

6.5.1 Binomische Formeln

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$$

Pascalsches Dreieck: 43

6.5.2 Kosinussatz

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma$$

6.5.3 Regeln Grenzwerte

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \pm g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x)$$
$$\lim_{x\to x_0} c\cdot f(x) = c \lim_{x\to x_0} f(x)$$
$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$$
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)},\ \lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$$
$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = \lim_{y\to y_0} f(y)$$
$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = f(x_0)^{g(x_0)}$$
$$\lim_{x\to x_0} \sqrt{f} - g = \lim_{x\to x_0} \sqrt{f} - g \cdot \frac{\sqrt{f}+g}{\sqrt{f}+g}$$
$$\lim_{x\to x_0} f^g = \lim_{x\to x_0} e^{g\ln(f)}$$

6.6 Substitutionen

Integral	Substitution	Bemerkuug
$f(ax+b)$	$n = ax+b$	–
$f(g(x))g'(x)$	$g(x) = t$	$= \int f(u)du$
$f(x, \sqrt{ax+b})$	$x = \frac{u^2-b}{a}$	fürt $\geqslant 0$
$f\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)$	$x = a\cdot\sin u$	$\sqrt{a^2-x^2} = a\cdot\cos u$

7 Quellenverzeichnis

- Analysis I & II bei Dr. Andreas Steiger (ETH Zürich)
- U. Stammbach: Analysis I/II
- LaTex Template von Micha Bosshart
- Analysis Zusammenfassungen von Mario Millhäuser, Gregory Richard, miflury, Micha Bosshart und Marc Bischof
- Formeln, Tabellen, Begriffe vom Orell Füssli Verlag
- Bild Kreuzprodukt: Wikipedia - Kreuzprodukt
- Bilder Hyperboloid: Mathepedia - Hyperboloid

8 Copyright

8.1 Versionen

- 24. September 2022: Upload, 1. Version
- 16. November 2022: neu: Copyright und Versionen, kleine Layout-Änderungen, (keine Formel wurde geändert)
- 18. Dezember 2022: Korrektur:
  Abschnitt: 6.4 Häufige Integralle: Trigonometrisch Ar
  Was? Korrektur der Formeln für die Integrale von hyperbolischen Umkehrfunktionen
- 04. April 2023: Abschnitt 11.1.8: Korrektur Formel $\cos^3$ und $\cos^4$

9 Bemerkungen

Diese ZF wurde von mir erstellt und basiert auf der Vorlesung Analysis I für Maschineningenieurswissenschaften an der ETH Zürich.
Aufgrund des neuen Curriculum habe ich auf Anfrage von mehreren Leuten meine ZF von Analysis I und II auf eine 4-Seiten ZF für Analysis I gekürzt. Am Ende habe ich noch etwas Platz übrig gelassen, damit man dort z.B. schwierige Integrale hinschreiben kann.
Die orangen Zahlen sind die jeweiligen Seiten im FoTaBe zu diesen Themen. Ich habe sie mit Hilfe von anderen ZF optimiert und versucht die ZF so zu gestalten, dass sie möglichst gut auf den Stoff der Vorlesung und die Basisprüfung abgestimmt ist.
Ich empfehle, die ZF von Anfang an immer bei den Übungen zu verwenden und laufend mit Notizen zu ergänzen.
Es möglich, dass die Zusammenfassung noch Fehler enthält. Ich übernehme keine Haftung für diese. Falls ihr einen Fehler entdeckt oder Fragen/Verbesserungsvorschläge habt, könnt ihr euch gerne bei mir melden. Viel Erfolg bei den Prüfungen!
Version: September 19, 2023

Leon Auspurg
lauspurg@ethz.ch