Domaine Sciences et Technologies
MASTER 1 INFORMATIQUE

Aspects probabilistes pour l'informatique : TP 1
Code UE: SINB19AL

Année 2020-21

Monte Carlo

L'objectif de ce TP est d'implémenter et tester la méthode Monte Carlo sur différents exemples.

Question 1 (Estimation de $\pi = 3,141592653589793\ldots$)

Il existe plusieurs méthodes pour estimer π, nous allons ici nous servir du fait que l'aire d'un cercle de rayon r est $\pi \cdot r^2$. Ainsi l'aire d'un quart de cercle est $\pi \cdot r^2/4$. De plus l'équation d'un cercle de rayon r centré en 0 est $x^2 + y^2 = r^2$. Ce qui signifie que l'équation définissant le quart supérieur droit d'un cercle centré en 0 et de rayon r est : $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, et donc l'aire sous la courbe entre 0 et r de cette fonction est l'aire d'un quart de cercle, ce qui nous permet d'estimer π.

(a) Écrire un programme estimant π par la méthode Monte-Carlo, en utilisant la première méthode donnée dans le cours (Monte-Carlo simple pour $\int_a^b \phi$).
 — Pour combien de valeurs de x, prises aléatoirement, l'approximation de π sera-t-elle précise à 10 décimales ? Réaliser l'expérience.

(b) Implémenter maintenant la seconde méthode Monte-Carlo présentée dans le cours en prenant au hasard des points dans le carré de côté r.
 — Que se passe-t-il pour cette seconde méthode lorsque l'on prend un carré de côté $10r$? Comparer avec les résultats de la question précédente.
 — Pour combien de points, pris aléatoirement, l'approximation de π sera-t-elle précise à 10 décimales ? Réaliser l'expérience.

(c) Comparer les deux méthodes.

(d) (Optionnel) Effectuer l'estimation de π avec la méthode de l'Aiguille de Buffon. Cette méthode consiste à lâcher aléatoirement et indépendamment des aiguilles de longueur l sur un sol fait de bandes parallèles de largeur l et de compter le nombre d'aiguilles qui sont à l'intersection de deux bandes. (Pour réaliser cette méthode, il faut d'abord réfléchir à comment tirer au hasard un segment de longueur l de façon uniforme).

(e) (Optionnel) Comparer les trois méthodes.

Question 2 (Estimation de $e = 2,718281828459045\ldots$)

(a) Écrire une fonction qui retourne le plus petit n tel que $\sum_{i=1}^{n} r_i > 1$ où les r_i sont des nombres tirés aléatoirement entre 0 et 1. Réaliser N fois l'expérience et calculer la moyenne $\frac{\sum_{i=1}^{N} n_i}{N}$. Cette moyenne est une estimation de e.

(b) Combien d'expériences doivent être réaliser pour obtenir une approximation de e à 10 décimales ?

(c) Écrire une fonction qui retourne le plus petit m tel que

$$r_1 > r_2 > \cdots > r_{m-1} \leq r_m.$$

Réaliser M expériences et calculer moyenne $\frac{\sum_{i=1}^{M} m_i}{M}$ qui donne une estimation de e.

(d) Comparer les deux method.

Question 3 (Estimation de l'aire d'un polygone P).

(a) Dessiner un polygone simple P à l'intérieur d'un carré et ordonner la liste de ses sommets dans une liste circulaire.

(b) Écrire une fonction qui étant donné un point $p = (x_p, y_p)$ calcule si p est à l'intérieur du polygone P où bien en dehors.

(c) Utiliser la fonction de la question précédente pour implémenter une méthode Monte-Carlo qui calcule une approximation de l'aire du polygone P.

(d) Utiliser la *formule en lacet*

$$A(P) = \frac{1}{2}[x_1y_2 + x_2y_3 + \ldots + x_{n-1}y_n + x_ny_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - \ldots - x_ny_{n-1} - x_1y_n]$$

pour calculer l'aire exacte d'un polygone simple P à n sommets $p_1 = (x_1, y_1)$, $p_2 = (x_2, y_2), \ldots, p_{n-1} = (x_{n-1}, y_{n-1})$, $p_n = (x_n, y_n)$. Comparer les deux résultats.

(e) (optionnel) Réalisez la méthode Monte Carlo pour un polygone à trous. La formule en lacet utilisée précédemment ne fonctionne plus dans ce cas. Comment calculer l'aire exacte d'un polygone à trous ?