Université Ibn Tofail
Faculté des sciences
Départment de Mathéematiques

Projet de Fin d'études pour l'obtention du diplôme de licence fondamental en science mathématique applique

sous le théme :

Théorème de point fixe et application

réalisé par :
LAATABI Mohamed Najib

Encadré par :
Monsieur SRHIR Ahmed

Année Universitaire : 2021-2022

Table des matières

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer mes remerciements à tous les membres de la Faculté Des science Ibn Tofail.

je remercie tout particulièrement mon encadrant de mémoire de fin d'étude Monsieur **SRHIR Ahmed**, qui m'a apporté une aide continuelle et efficace tout au long de mon travail. Il m'a donné beaucoup d'intonation et des propositions pour guider mon mémoire et il a montré en tout temps une disponibilité et a répondu à toutes mes questions .

Je présente aussi mes profonds respects et mes reconnaissances à tous les professeurs de la faculté qui nous ont fourni tous les renseignements nécessaires et qui n'ont épargné aucun effort pour que cette étude se déroule dans les meilleures conditions.

Aussi, je veux remercier ma famille, mes parents, mon frère qui m'ont soutenu pendant cette année de formation, et sans eux je n'aurais pas pu aller au bout de mon travail.

À vous tous, merci !

Introduction générale :

Dans ce mémoire, on étudie quelques théorèmes du point fixe de Banach, Brouwer et Schauder et quelques-unes de leurs applications. Etant donnés un ensemble M et une application $T : M \to M$, on s'intéresse à donner des conditions suffisantes sur T et M pour que T ait un point fixe. Ces résultats théoriques nous permettent de résoudre certains problèmes comme par exemple trouver les zéros d'un polynême, ou prouver que certaines équations différentielles admettent des solutions sans les déterminer explicitement.

Le théorème de l'application contractante prouvé par Banach en 1922 dit qu'une contraction d'un espace métrique complet dans lui-même admet un point fixe unique. De plus, il fournit un algorithme d'approximation du point fixe comme limite d'une suite itérée. Mais d'une part, montrer que la fonction est contractante peut entraîner de laborieux calculs, d'autre part, les conditions sur la fonction et l'espace étudiés restreignent le nombre de cas auxquels on peut appliquer le théorème.

Le théorème du point fixe de Brouwer est un résultat de topologie algébrique, sous sa forme la plus simple, ce théorème exige uniquement la continuité de l'application d'un intervalle fermé borné dans lui-même. Et de façon plus générale, l'application continue doit être définie dans un convexe compact d'un espace euclidien dans lui-même.

Le théorème du point fixe de Schauder établi en 1930, est une généralisation du théorème du point fixe de Brouwer et affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique. Il n'est donc pas nécessaire d'établir des estimées sur la fonction, mais simplement sa continuité. Ceci nous donne la possibilité de traiter plus de cas qu'avec le théorème de Banach (par exemple, l'identité).

Ce travail est réparti en trois parties :
la premier partie est dédié à rappeler quelques définitions et propretés que vous utiliserez pour expliquer et simplifier ce sujet (définition de l'espace métrique, les suites et la continuité des fonctions ...).

Dans la deuxième partie nous discuterons théorème de point fixe de Banach et leurs applications par exemple de chercher l'existence et l'unicité des solutions d'une équation différentielle (problème de Cauchy-lipschitz) et aussi pour démontrer théorème d'inversion locale.

Enfin on étudie le théorème du point fixe de Brouwer-schauder pour les fonctions qui n'est pas lipschitzien par exemple de démontre l'existence des solutions d'un problème de Cauchy.

Chapitre 1

Rappel sur l'espace métrique et l'espace de Banach

1.1 Espace métrique :

La notion d'espace métrique sert é étendre la notion de limite, une des notions les plus importantes des mathématiques, á des espaces plus généraux que $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^n$.Dans $\mathbb{R}$ on dit que x_n tend vers x si $|x_n - x|$ tend vers 0 (ce qu'on précise avec des $\forall\epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$,...).Sur un ensemble E,on va associer á chaque couple (x,y) d'éléments de E un nombre positive $d(x,y) \geq 0$ (la distance de x á y),d obéissant á certains axiomes.On dira que x_n tend vers x si $d(x_n, x)$ tend vers 0. On appellera le couple (E,d) un espace métrique.

Définition* 1.1.1.** *Une* ***distance *ou (**métrique**) sur ensemble E est une application*

$$\begin{array}{rccc} d & : & E\times E & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & & (x,y) & \mapsto & d(x,y) \end{array}$$

vérifaint, pour tout x,y et z, les trois axiomes suivants :
(i) ***Séparation*** *:* $d(x,y) = 0$ *si et seulement si* $x = y$
(ii) ***Symétrie*** *:* $d(x,y) = d(y,y)$
(iii) ***Inégalité triangulaire*** *:* $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$
Le couple (E,d) *forme d'un ensemble E et d'une distance* d *est appelé espace métrique.*

***Exemple* 1.1.2.** *(a) L'application :* $(x,y) \mapsto |x-y|$ *define une distance sur* $\mathbb{R}$ *appelée distance usuelle et* $\mathbb{R}$ *muni de cette distance est un espace métrique.*
(b) L'application : $(z,z') \mapsto |z-z'|$ *,définit une distance sur*$\mathbb{C}$*. Ainsi* $\mathbb{C}$ *muni de cette distance est un espace métrique.*
(c) Pour $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ *et* $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$*, les application suivants :*
(i) $d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$
(ii)$d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}$
(iii)$d_\infty(x,y) = \max_{i\in\{1,2,...,n\}} |x_i - y_i|$
définissent des distance sur $\mathbb{R}^n$

La distance d_2 s'appelle ***distance euclidienne*** *.*
(d)on peut définir une distance ,dit ***discrète****, sur un ensemble non vide $\mathbb{E}$,*
en posant, pour(x,y) $\in \mathbb{E}$:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & si\ x = y \\ 1 & si\ x \neq y \end{cases}$$

(e) Sur $C([a;b],\mathbb{R}) = \{f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}/f$ est continue $\}$ où $a < b$ sont des réel, on définit une distance comme suit :

$$\forall f,g \in C([a;b],\mathbb{R}) : d_\infty(f,g) = \sup_{x\in[a;b]} |f(x) - f(y)|$$

cette distance est appélée ***distance de la convergence uniforme****.*

Proposition 1.1.3. *Soit (E,d) un espace métrique. Alors :*
*1) $\forall(x,y,z) \in E^3, |d(x,y) - d(y,z)| \leqslant d(x,z)$ (**inégalité triangulaire renversèe**).*
2) $\forall\,(x_1,\ldots,x_n) \in E^n, d\,(x_1,x_n) \leqslant d\,(x_1,x_2) + \ldots + d\,(x_{n-1},x_n)$.
3) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^\star, \lambda\ d$ est une distance sur E.

Démonstration 1.1.4. *1) D'après l'inégalité triangulaire, on a pour tout*
$(x,y,z) \in E^3$

$$d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(y,z)\ \text{ et } d(y,z) \leqslant d(x,y) + d(x,z)$$

D'oú pour tout $(x,y,z) \in E^3$, on a

$$d(x,y) - d(y,z) \leqslant d(x,z)\ \text{ et } -d(x,z) \leqslant d(x,y) - d(y,z)$$

2) Par récurrence sur n :

Définition 1.1.5. *Soit E un ensemble et d et d' deux distance sur E. On dit que d et d' sont équivalentes s'il existe deux constante $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que*

$$\forall(x,y) \in E^2, \alpha d(x,y) \leqslant d'(x,y) \leqslant \beta d(x,y)$$

Exemple 1.1.6. *Les distance d_1, d_2 et d_∞ sur $\mathbb{R}^n$ sont deux à deux éqivalentes. En effet, on a*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \frac{1}{n}\|x\|_1 \leqslant \|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant \sqrt{n}\|x\|_2 \leqslant n\|x\|_\infty$$

$\forall x,y \in \mathbb{R}^n, \|x-y\|_1 = d_1(x,y),\ \|x-y\|_2 = d_2(x,y),\ \|x-y\|_\infty = d_\infty(x,y)$
D'où

$$\forall(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \frac{1}{n}d_1(x,y) \leqslant d_\infty(x,y) \leqslant d_1(x,y)\ \text{ et } d_\infty(x,y) \leqslant d_2(x,y) \leqslant \sqrt{n}d_\infty(x,y)$$

Définition 1.1.7. *(distance induite) Soit (E,d) un espace métrique et $A \subseteq E$ une partie de E. Alors l'application $d_{|A\times A} : A \times A \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est distance sur A. C'est la distance induite sur A par d et on note d_A*

Définition 1.1.8. *Soit (E_1,d_1) ....(E_n,d_n) des espace métrique. Alors l'application*

$$d_\infty : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}^+, (x,y) \longmapsto d_\infty(x,y) = \max\{d_1\,(x_1,y_1), \ldots, d_n\,(x_n,y_n)\}$$

est une distance sur $E = E_1 \times .... \times E_n$. C'est la distance produit
On peut aussi définir sur E les distance $d_1(x,y) = \sum_{i=1}^n d_i\,(x_i,y_i)$ et $d_2 = (x,y) = \left(\sum_{i=1}^n d_i\,(x_i,y_i)^2\right)^{1/2}$.

1.2 Topologie des espace métrique

***Définition* 1.2.1.** *Soit (E,d) un espace métrique,$a \in E$ et $r>0$. On appelle boule ouverte (resp.fermée) de centre a et de rayon r, la partie défine par*

$$B(a,r)=\{x\in E \mid d(x,a)<r\} \text{ (resp. } B_f(a,r)=\{x\in E\mid d(x,a)\leqslant r\}\Big)$$

***Exemple* 1.2.2.** *1)Soit l'espace métrique $\mathbb{R}$ muni de sa distance usuelle, $a\in\mathbb{R}$ et $r>0$. Alors on a*

$$B(a,r)=]a-r,a+r\Big[\text{ et } B_f(a,r)=[a-r,a+r].$$

2) Soit l'espace métrique $\left(\mathbb{R}^2,d_1\right),a\in\mathbb{R}^2$ et $r>0$. Alors $B(a,r)=L(a,r)$
3) Soit l'espace métrique$\left(\mathbb{R}^2,d_2\right),a\in\mathbb{R}^2$ et $r>0$. Alors $B(a,r)=D(a,r)$
4) Soit l'espace métrique$\left(\mathbb{R}^2,d_\infty\right),a\in\mathbb{R}^2$ et $r>0$. Alors $B(a,r)=C(a,r)$

***Remarque* 1.2.3.** *Soit (E,d) est un espace métrique, $a\in E$ et $r>0$. 1) On appelle sphère de centre a et de rayon r, la partie de E définie par $S=\{x\in E\mid d(x,a)=r\}$*
2) Pour $0<r<r'$; on a $B(a,r)\subset B(a,r')$.

***Définition* 1.2.4.** *Soit (E,d) un espace métrique et $O\subseteq E$ une partie de E. On dit que O est un ouvert si*

$$\forall x\in O,\exists r>0 \text{ tel que } B(x,r)\subset O$$

***Exemple* 1.2.5.** *1)Soit (E,d) un espace métrique. Alors tout boule ouverte est un ouverte. En effet, soit $a\in E$ et $r>0$. soit $x\in B(a,r)$. Posons $\rho=r-d(a,x)$.par définition, on a $d(a,x)<r$. Donc $\rho>0$. Soit $y\in B(x,\rho)$. Donc $d(x,y)<\rho$. i.e. $d(x,y)<r-d(a,x)$. D'où $d(a,x)+d(x,y)<r$. D'après l'inégalité triangulaire ; on a $d(a,y)<r$. Par suite, $B(x;r)\subset B(a,r)$ et $B(a,r)$ est un ouverte.*

***Définition* 1.2.6.** *Soient (E,d) un espace métrique et $F\subseteq E$ une partie de E. On dit que F est un fermé de E si son complémentaire $E\backslash F$ est un ouvert de E.*

***Exemple* 1.2.7.** *Soit (E,d) un espace métrique. Alors*
1) L'ensembe vide $\emptyset$ et E sont des fermés de E.
2) Toute boule fermée de E est un fermé. En effet, soient $a\in E$ et $r>0$. Soit $x\in E\backslash B_f(a,r)$. On a donc $d(x,a)>r$. On pose $\rho=d(x,a)-r$. Alors $\rho>0$. Montrons que $B(x,\rho)\subset E\backslash B_f(a,r)$. Soit $y\in B(x,\rho)$. Donc $d(x,y)<\rho$. D'où $d(x,y)<d(x,a)-r$. D'après l'inégalité triangulaire renversée, il vient que $r<d(x,a)-d(x,y)\leqslant d(a,y)$. D'où le résultat.

***Définition* 1.2.8.** *Soient (E,d) un espace métrique, $V\subset E$ une partie de E et $a\in E$. On dit que V est un voisinage de a s'il existe un ouvert O de E tel que $a\in O\subset V$.*

1.3 Suites dans les espaces métriques

(E,d) désigne un espace métrique. Une suite de E est la donnée d'une application $u:\mathbb{N}\to E$. la fonction u est notée (u_n) et les suites sont notées $(a_n),(b_n),..,(x_n),\ldots$

1.3.1 Convergence :

***Définition* 1.3.1.** *(Convergence de suites)*
Une suite (x_n) *de* (E,d) *est dite convergente vers* $\ell \in E$ *si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, d(x_n, \ell) \leqslant \varepsilon$$

qui est équvalent à

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, x_n \in B(\ell, \varepsilon)$$

Une suite qui n'est convergente vers aucun $\ell \in E$ *est dite divergente.*
On appelle cet élément de E la limite de la suite (x_n)*. Notations :* $x_n \to \ell$ *ou* $\lim_{n\to+\infty} x_n = \ell$*.*

***Théorème* 1.3.2.** *(unicité de la limite)*

Si (x_n) *est une suite convergente vers* ℓ *et vers* ℓ'*, alors* $\ell = \ell'$*.*

***Démonstration* 1.3.3.** *Supposons que* $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ *admettent deux limites* $l, l' \in E$*. Soit* $\varepsilon > 0$*. Comme* $l = \lim_{n\to+\infty} x_n$*, on a*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant n_0 \Longrightarrow d(x_n, l) < \varepsilon/2)$$

De même $l' = \lim_{n\to+\infty} x_n$*, donc*

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant n_1 \Longrightarrow d(x_n, l') < \varepsilon/2).$$

Posons $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$*. Comme* $n_2 \geqslant n_0$ *et* $n_2 \geqslant n_1$*, on a* $d\left(x_{n_2}, l\right) < \varepsilon/2\Big)$ *et* $d\left(x_{n_2}, l'\right) < \varepsilon/2\Big)$*.*
L'inégalité triangulaire permet de déduire que

$$\forall \varepsilon > 0, d(l, l') < \varepsilon.$$

Ce qui montre que $l = l'$*.*

1.3.2 Suites extraites ou sous-suites :

***Définition* 1.3.4.** *(sous-suites)*
Soient (E,d) *un espace métrique et* $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ *une suite de* E*. On appelle suite extraite (ou sous-suite) de* $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ *toute suite de E de la forme* $\left\{x_{\varphi(n)}\right\}$*, avec* $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *est strictement croissante. Il est clair que toute suite extraite d'une suite extraite de* (x_n) *est aussi une suite extraite de* (x_n)*.*

***Proposition* 1.3.5.** *Soit* (E,d) *un espace métrique et* $(x_n) \subset E$ *tel que* $x_n \to \ell$*. Alors toute sous-suite* $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ *de* (x_n) *converge vers* ℓ*.*

***Démonstration* 1.3.6.** *Soit* $\left\{x_{\varphi(n)}\right\}_{n\geqslant 0}$ *une suite extraite de* E*. Puisque* $l = \lim_{n\to+\infty} x_n$*, on a*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant n_0 \Longrightarrow d(x_n, l) < \varepsilon)$$

Comme l'application $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *est strictement croissante, il vient que*

$$\begin{aligned}\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 &\Longrightarrow \varphi(n) \geqslant \varphi(n_0) \\ &\Longrightarrow \varphi(n) \geqslant n_0 \\ &\Longrightarrow d\left(x_{\varphi(n)}, l\right) < \varepsilon\end{aligned}$$

Ce qui montre que $l = \lim_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)}$*.*

1.3.3 Suites de Cauchy :

***Définition* 1.3.7.** *Soit (E,d) un espace métrique. On dit que la suite (x_n) de points de X est une suite de Cauchy (Augustin Louis Cauchy, Mathématicien français, 1789-1857) dans (E,d) si*

$$\forall \varepsilon > 0; \exists n_0 \text{ tel que } \forall n; m \geqslant n_0 d(x_n; x_m) < \varepsilon$$

***Remarque* 1.3.8.** *1. La définition est équivalente à*

$$\forall \varepsilon > 0; \exists n_0 \text{ tel que } \forall n \geqslant n_0, \forall p \geqslant 0 \quad d\left(x_n; x_{n+p}\right) < \varepsilon$$

***Exemple* 1.3.9.** *1. Dans $\mathbb{R}$, la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ est de Cauchy. Ce n'est pas le cas de la suite $(x_n = n)$.*
2. Si E est discret, les suites de Cauchy dans (E,d) sont les suites stationnaires.
3. Toute suite convergente est de Cauchy. En effet, si $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$, alors, à partir d'un certain rang

$$d(x_n; x_m) \leqslant d(x_n; a) + d(a; x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

***Définition* 1.3.10.** *(Densité)*

Soit (E,d) un espace métrique. On dira que $F \subset E$ est dense dans E si $\bar{F} = E$.

***Exemple* 1.3.11.**

$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ muni de sa distance standard.

1.4 Espaces métriques complets :

***Définition* 1.4.1.** *Soient (E,d) un espace métrique. On dit que E est complet si toute suite de Cauchy de E est convergente dans E.*

***Exemple* 1.4.2.** *Les espaces métriques $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ et $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ sont complets.*
2) L'espace métrique $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ n'est pas complet.

***Remarque* 1.4.3.** *Soient (E,d) un espace métrique et $A \subseteq E$ une partie de E. On dit que A est compléte si l'espace métrique (A, d_A) est complet.*

***Proposition* 1.4.4.** *Soient (E,d) un espace métrique et $A \subseteq E$ une partie E. Si A est compléte. Alors A est un fermé de E.*

***Démonstration* 1.4.5.** *Soit $x \in \bar{A}$. Alors il existe $\{x_n\}_{n\geqslant 0} \subset A$ tel que $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$. Donc $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ est une suite de Cauchy de A. Or A est compléte. Donc $\lim_{n\to+\infty} x_n = y$, avec $y \in A$. L'unicté de la limite implique $x = y \in A$.*

***Exemple* 1.4.6.** *Les parties $]a,b],]a,b[$, et $]a,+\infty[$ de $\mathbb{R}$ ne sont pas complétes*

***Proposition* 1.4.7.** *Soient (E,d) un espace métrique complet et A une partie de E.. Si A est fermée. Alors A est compléte.*

***Démonstration* 1.4.8.** *Soit $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ une suite de Cauchy de A. Donc $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ est une suite de Cauchy de E qui est complet. Donc $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ converge vers $x \in \bar{A} = A$ car A est fermée.*

***Remarque* 1.4.9.** *Dans un espace métrique complet, les parties complétes sont exactement les parties fermées.*

1.5 Espace de Banach :

Dans touts la suite on note $\mathbb{K} = \mathbb{R} ou \mathbb{C}$

1.5.1 Espace vectoriel normé :

***Définition* 1.5.1.** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K}$-e.v. en abrégé). Une norme sur E est une application $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}_+$ vérifiant les propriétés suivantes :*
i) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ (Homogénéité).
ii) $\forall x, y \in E, \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Inégalité triangulaire).
iii) $\forall x \in E, \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$ (Séparation).

Le couple $(E, \|\cdot\|)$ est alors appelé espace vectoriel normé (evn, en abrégé). Une semi-norme est une application de E vers $\mathbb{R}_+$ qui vérifie les propriétés (H) et (T).

***Exemple* 1.5.2.** *La valeur absolue est une norme sur $\mathbb{K}$. 2. Plus généralement, les applications suivantes définissent des normes sur $\mathbb{K}^n$, appelées normes standards de $\mathbb{K}^n$:*

$$\|X\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$
$$\|X\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}$$
$$\|X\|_\infty = \sup_{1 \leq k \leq n} |x_k|$$

où $X = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$.
3. Soient X un ensemble non vide et soit $E = \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ l'espace des fonctions définies sur X à valeurs dans $\mathbb{K}$ et qui sont bornées. L'application

$$f \mapsto \|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

définit une norme sur X, dite norme de la convergence uniforme sur X.

1.5.2 Topologie des espaces normés :

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-evn. Alors l'application

$$\begin{aligned} d : \quad & E \times E \to \mathbb{R}_+ \\ & (x, y) \mapsto \|x - y\| \end{aligned}$$

est une distance sur E, c'est-à-dire qu'elle vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \forall (x,y) \in E^2, & d(x,y) = 0 \;\Rightarrow\; x = y, & \text{(Séparation).} \\ \forall (x,y) \in E^2, & d(x,y) \;=\; d(y,x), & \text{(symétrie).} \\ \forall (x,y,z) \in E^3, & d(x,z) \;\leq\; d(x,y) + d(y,z), & \text{(Inégalité triangulaire).} \end{cases}$$

est une distance sur E, c'est-à-dire qu'elle vérifie les propriétés suivantes : d s'appelle la distance induite par la norme $\|.\|$. Un espace normé est donc automatiquement un espace métrique. La topologie associée à la distance d est appelée topologie de la norme :

1.5.3 Norme équivalente :

Deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur un même $\mathbb{K}$-espace vectoriel E sont équivalentes s'il existe deux réels $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que :

$$\forall x \in E, \alpha\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \beta\|x\|_2.$$

On définit ainsi une relation d'équivalence (réflexive, symétrique et transitive) sur l'ensemble des normes définies sur un même $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

***Théorème* 1.5.3.** *(l'équivalence des norme)*
Dans un espace normé de dimension finie E , toutes les normes sont équivalentes.

1.5.4 Espace de Banach :

***Définition* 1.5.4.** *On appelle espace de Banach tout espace vectoriel normé complet (c'est-à-dire tout suite de Cauchy convergente dans cette espace).*

***Exemple* 1.5.5.** *1). L'espace* $(\mathbb{K}^n, \|.\|)$ *est un espace de Banach.*
2). L'espace $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{K})$ *des fonctions numériques continues sur* $[0,1]$ *muni de la norme* $\|\cdot\|_\infty$ *est un espace de Banach.*
En génerale tout espace vectorielle normé $(E, \|.\|_E)$ *de dimension fine et de Banach si le corps de E est de Banach.*

1.6 Fonctions définies sur un espace métrique :

1.6.1 Limites et continuités :

***Définition* 1.6.1.** *Soient* $(E,d),(F,d')$ *deux espaces métriques, D une partie de* $E, a \in \bar{D}$
$f : D \subset E \longrightarrow F$ *une fonction et* $l \in F$*. On dit que* $f(x)$ *tend vers* l *quand* x *tend vers* a *suivant D (ou* f *a pour limite* l *en* a *) si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, (d(x,a) < \delta \Longrightarrow d'(f(x),l) < \varepsilon)$$

La définition se traduit de la façon suivante : pour tout $\varepsilon > 0$ *(arbitrairement petit), il existe* $\delta > 0$ *tel que, si la distance de* x *à* a *est inférieure á* δ*, alors la distance de* $f(x)$ *à* l *est inférieure à* ε*.*

***Remarque* 1.6.2.** *Avec les boules, la définition 1.6.1 est équivalente à :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } B(a,\delta) \cap D \subset f^{-1}(B'(l,\varepsilon))$$

***Théorème* 1.6.3.** *(Unicité de limite)*
Si f admet une limite l en a. Alors cette limite est nécessairement unique. De plus, on a $l \in \overline{f(D)}$*. On dit alors que l est la limite de fen a. On note alors* $\lim_{\substack{x \to a \\ x \in D}} f(x) = l$*.*

***Démonstration* 1.6.4.** *Supposons que* f *admettent deux limites* $l, l' \in F$*. Soit* $\varepsilon > 0$*. Comme* $l = \lim_{x \to a} f(x)$*, on a*

$$\exists \delta_0 > 0, \forall x \in D, \left(d(x,a) < \delta_0 \Longrightarrow d'(f(x),l) < \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

De mme $l' = \lim_{x\to a} f(x)$*, donc*

$$\exists \delta_1 > 0, \forall x \in D, \left(d(x,a) < \delta_1 \Longrightarrow d'(f(x),l') < \frac{\varepsilon}{2} \right)$$

Posons $\delta_2 = \min\{\delta_0, \delta_1\}$*. Soit* $x_0 \in D \cap B(a,\delta_2)$*. Comme* $\delta_2 \leqslant \delta_0$ *et* $\delta_2 \leqslant \delta_1$*, on a* $d(x_0,a) < \delta_0$ *et* $d(x_0,a) < \delta_1$*. D'où* $d'(f(x_0),l) < \varepsilon/2$ *et* $d'(f(x_0),l) < \varepsilon/2$*. L'inégalité triangulaire permet de déduire que*

$$\forall \varepsilon > 0, d(l,l') < \varepsilon$$

Ce qui montre que $l = l'$*.*

***Théorème* 1.6.5.** *(caractérisation séquentielle de la limite).*
Soient $(E,d),(F,d')$ *deux espaces métriques,* D *une partie de* $E, a \in \bar{D}, f : D \to F$ *une fonction et* $l \in F$*. Alors* $l = \lim_{x\to a} f(x)$ *si, et seulement si pour toute suite* $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ *de* D *qui converge vers a, la suite* $\{f(x_n)\}_{n\geqslant 0}$ *converge vers* l*.*

***Démonstration* 1.6.6.** $\Longrightarrow$ *) Supposons que* $\lim_{x\to a} f(x) = l$*. Soit* $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ *une suite de* D *telle que* $\lim_{x\to+\infty} x_n = a$*. Montrons que* $\lim_{x\to a} f(x) = l$*. Soit* $\varepsilon > 0$*. Puisque* $l = \lim_{x\to a} f(x)$*, on a*

$$\exists \delta > 0, \forall x \in D, (d(x,a) < \delta \Longrightarrow d'(f(x),l) < \varepsilon)$$

Puisque $a = \lim_{n\to+\infty} x_n$*, on a aussi*

$$\begin{aligned}\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} (n \geqslant n_0 &\Longrightarrow d(x_n,a) < \delta \\ &\Longrightarrow d'(f(x_n),l) < \varepsilon\end{aligned}$$

D'où $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l$*.*
$\Longleftarrow$*) Supposons par l'absurde que* l *n'est pas la limite de* f *en* a*. Donc*

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in D \text{ tel que } (d(x,a) < \delta \text{ et } d'(f(x),l) > \varepsilon).$$

On en déduit que

$$\exists \varepsilon > 0, \forall n \geqslant 0, \exists x_n \in D \text{ tel que } (d(x_n,a) < 1/n \text{ et } d'(f(x_n),l) > \varepsilon)$$

Il vient que $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$ *et* $\{f(x_n)\}_{n\geqslant 0}$ *ne converge pas vers* l*. Contradiction.*

***Définition* 1.6.7.** *Soient* $(E,d),(F,d')$ *deux espaces métriques,* $D \subseteq E$ *un ouvert de* $E, a \in D$ *et* $f : D \longrightarrow F$ *une fonction.*
1) On dit que f *est continue en* a *si* $\lim_{x\to a} f(x)$ *existe, i.e. si* $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$*, ce qui signifie que*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, (d(x,a) < \delta \Longrightarrow d'(f(x),f(a)) < \varepsilon)$$

2) On dit que f *est continue sur* D *si* f *est continue en tout point de* D*.*

***Exemple* 1.6.8.** *Soient* (E,d) *et* (F,d') *deux espaces métriques.*
1) Toute fonction constante est continue.
2) L'application identité $\mathrm{Id}_E : E \longrightarrow E, x \longmapsto x$ *est continue sur* E*.*

***Définition* 1.6.9.** *(fonction lipschitzienne)*
Soit $f : (E,d) \to (E',d')$ *une application.*
- On dit que f *est lipschitzienne s'il existe* $k > 0$ *tel que* $\forall x,y \in E$ *on a*

$$d'(f(x),f(y)) \leqslant k d(x,y)$$

On appelle la plus petite constante $k \in R^+$ *qui vérifie cette propriété la constante de Lipschitz.*
- On dit que $f : (E,d) \to (E,d)$ *est contractante s'il existe* $k < 1$ *telle que*

$$\forall x,y \in E \text{ on a } d(f(x),f(y)) \leqslant k d(x,y)$$

Chapitre 2

Théorème de point fixe de Banach Picard :

Le théorème du point fixe de Banach, connu aussi sous le nom du principe de contraction de Banach ou théorème du point fixe de Picard, est apparu pour la première fois en 1922 dans le cadre de la résolution d'une équation intégrale. Notons que ce théorème est une abstraction de la méthode classique des approximations successives introduite par Liouville (en 1837) et développée par la suite par Picard (en 1890). A cause de sa simplicité et de son utilité, ce théorème est largement utilisé dans plusieurs branches de l'analyse mathématique, en particulier, dans la branche des équations différentielles. Le théorème du point fixe de Banach a connu de diverses généralisations dans différents espaces.

2.1 Théorème de point fixe de Banach :

***Définition* 2.1.1.** *Soit* (E,d) *un espace métrique, et* $f: E \longrightarrow E$ *une application, on dit qu'un point* $x \in E$ *fixe de* f *si* $f(x) = x$.

***Théorème* 2.1.2.** *(Principe de contraction de Banach)*
Soit (E,d) *un espace métrique complet et* $f: E \longrightarrow E$ *une application contractante. Alors*
1. f *posséde un unique point fixe.(i.e) l'équation* $f(x) = x$*, a une solution unique dans* E.
2. Toute suite $(x_n) \subset E$ *qui satisfait* $x_{n+1} = f(x_n)$ *converge vers* $x \in E$.

***Démonstration* 2.1.3.** *- Existence.*
Considérons la suite (x_n) *définie par*

$$x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \cdots, x_{n+1} = f(x_n), \cdots$$

La suite (x_n) *est une suite de Cauchy. En effet, nous avons*

$$\begin{array}{rcl} d(x_{n+1}, x_n) & = & d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq kd(x_n, x_{n-1}) \\ d(x_n, x_{n-1}) & \leq & kd(x_{n-1}, x_{n-2}) \\ \vdots & & \vdots \\ d(x_2, x_1) & \leq & kd(x_1, x_0) \end{array}$$

on multiplie membre à membre, on a

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq k^n d(x_1, x_0)$$

Soit $p \geq 1$, *alors*

$$\begin{aligned} d\left(x_{n+p}, x_n\right) &\leq d\left(x_{n+p}, x_{n+p-1}\right) + \cdots + d\left(x_{n+1}, x_n\right) \\ &\leq \left[k^{n+p-1} + \cdots + k^n\right] d\left(x_1, x_0\right) \end{aligned}$$

Entre crochets, on a une progression géométrique de raison k, *dont on connaît la somme, ce qui donne*

$$\begin{aligned} d\left(x_{n+p}, x_n\right) &\leq \frac{k^n\left(1-k^p\right)}{1-k} d\left(x_1, x_0\right) \\ &\leq \frac{k^n}{1-k} d\left(x_1, x_0\right) \end{aligned}$$

Comme $k<1$, *la série est convergente et* $d\left(x_{n+p}, x_n\right) \longrightarrow 0$ *quand* $n \longrightarrow \infty$, *donc la suite est de Cauchy.*

La suite (x_n) *est de Cauchy dans* X *complet* (x_n) *converge vers* a *et avec* $x_n = f(x_{n-1})$, *quand* $x \longrightarrow a$, *on obtient* $a = f(a)$ *(car* f *est continue), c'est-à-dire que* a *est un point fixe pour* f.
- Unicité. Soit a' *un point fixe quelconque de* f. *On a*

$$d\left(a, a'\right) = d\left(f(a), f\left(a'\right)\right) \leq k d\left(a, a'\right)$$

(car f *est contractante), et donc* $(1-k) d\left(a, a'\right) \leq 0$. *Comme* $k<1$, *alors* $1-k>0$ *et donc* $d\left(a, a'\right) \leq 0$ *qui n'est possible que si* $a = a'$.

***Remarque* 2.1.4.** *Les hypothèses du théorème du point fixe de Banach sont réellement nécessaire si nous en négligeons seulement une, alors il se peut que le point fixe n'existe pas.*
1.) Si $k=1$ *le théorème est faux ; il n'y a ni existence, ni unicité. A titre d'exemples :*
-Considérer dans $X=\mathbb{R}$ *et la fonction* $f(x)=x+1$. *Alors*

$$d(f(x), f(y)) = |f(x)-f(y)| = |x-y| = d(x, y)$$

et il n'existe pas de point fixe.
-Si on considére $X=\mathbb{R}$ *et la fonction* $f(x)=x$, *alors tous les points sont fixes.*

2.) Le théorème est faux si (X, d) *est non complet. A titre de contre exemple, considérer* $X =]0,1[$ *et* $f(x)=\frac{x}{2}$.
3. f *n'est pas contractante :* $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ *sur* $X=\mathbb{R}$ *or :* $f: X \longrightarrow X$, *et* X *est un fermé de* $\mathbb{R}$ *est* $\mathbb{R}$ *complet donc* X *est complet. mais :* $\sup_{x\in X}|f'(x)| = 1$ *donc* f *n'est pas contractante.*
4) $f(x)=\frac{\sin(x)}{2}$ *sur* $X = \left]0, \frac{\Pi}{4}\right]$ *or :* $f\left(\left]0, \frac{\Pi}{4}\right]\right) = \left]0, \frac{\sqrt{2}}{4}\right] \subset \left]0, \frac{\Pi}{4}\right]$ *et* $\sup_{x\in X}|f'(x)| = \frac{1}{2} < 1$ *donc :* f *est contractante. mais :* X *n'est pas fermé dans* R *donc pas complet.*

2.1.1 Théorème du point fixe pour une application dont une itérée est contractante :

***Théorème* 2.1.5.** *Soient* X *un espace métrique complet et* $f: X \longrightarrow X$ *une application dont une itérée* f^N *est contractante* $\forall N \in \mathbb{N}^*$.
Alors f *admet un unique point fixe* α *et* $\forall x \in E$, $\lim_{n\to+\infty} f^n(x) = \alpha$.

***Démonstration* 2.1.6.** *En appliquant le théorème de contraction de Banach à f^N, on obtient que f^N possède un unique point fixe α et $\lim_{n\to+\infty} f^n(x) = \alpha$ $x \in X$. Mais on a :*

$$f^N(f(\alpha)) = f^{N+1}(\alpha) = f\left(f^N(\alpha)\right) = f(\alpha)$$

ce qui entraine que $f(\alpha)$ est aussi point fixe de f^N, donc : $f(\alpha) = \alpha$. Ce point fixe de f est unique, car tout point fixe de f est aussi point fixe de f^N.

2.1.2 La version locale du théorème de Banach :

Il se peut que f ne soit pas une contraction sur tout l'espace X mais juste dans le voisinage d'un point donné. Dans ce cas on a le résultat suivant :

***Théorème* 2.1.7.** *Soit (X,d) un espace métrique complet et soit*

$$B(x_0,r) = \{x \in X : d(x,x_0) < r\} \qquad ou \qquad x_0 \in X \qquad et \qquad r > 0$$

Supposons que $f : B(x_0,r) \longrightarrow X$ est contractante de constante de contraction k, avec $d(f(x_0),x_0) < (1-k)r$ Alors f admet un unique point fixe dans $B(x_0,r)$.

***Démonstration* 2.1.8.** *Il existe r_0 avec $0 \le r_0 \le r$, tel que $d(f(x_0),x_0) \le \underline{(1-k)r_0}$ On montre que $f : \overline{B(x_0,r_0)} \longrightarrow \overline{B(x_0,r_0)}$. Soit $x \in \overline{B(x_0,r_0)}$ alors :*

$$\begin{aligned} d(f(x),x_0) &\le d(f(x),f(x_0)) + d(f(x_0),x_0) \\ &\le kd(x,x_0) + (1-k)r_0 \\ &\le kr_0 + (1-k)r_0 \\ &\le r_0 \end{aligned}$$

Donc l'application $f : \overline{B(x_0,r_0)} \longrightarrow \overline{B(x_0,r_0)}$ est contractante avec $\overline{B(x_0,r_0)}$ est un espace complet. Par suite, l'application du théorème de contraction de Banach à f assure qu'elle admet un unique point fixe dans $B(x_0,r)$.

Nous allons examiner brièvement le comportement d'une application de contraction définie de $\overline{B_r} = \overline{B(0,r)}$ (La boule fermée de rayon r et de centre 0) à valeurs dans un espace de Banach E.

2.1.3 Théorème de point fixe à paramètre λ :

***Théorème* 2.1.9.** *Soit (T,τ) un espace topologique et (X,d) un espace métrique complété et $k \in\,]0;1[$ considérer l'application f continue*

$$\begin{aligned} f \quad : \quad T\times X &\longrightarrow X \\ (\lambda,x) &\longrightarrow f(\lambda,x) \end{aligned}$$

où pour chaque $\lambda \in T$

$$\begin{aligned} G_\lambda \quad : \quad X &\longrightarrow X \\ x &\longrightarrow \quad G_\lambda = f(\lambda,x) \end{aligned}$$

et G_λ contractante de rapport $k \in [1;0[$ alors :
G_λ posséde un point fixe note $\varphi(\lambda)$ et l'application

$$\varphi \quad : \quad T \longrightarrow X \\ \lambda \qquad \longrightarrow \varphi(\lambda)$$

et continue.

Démonstration 2.1.10. *Pour $\lambda \in T$ fixé*

$$G_\lambda : X \longrightarrow X$$
$$x \longrightarrow G_\lambda = f(\lambda, x)$$

G_λ posséde un unique point fixe $\varphi(\lambda)$(d'aprés la théorème 2.0.1) c'est-à-dire :

$$G_\lambda(\varphi(\lambda)) = \varphi(\lambda)$$
$$\Leftrightarrow f(\lambda, \varphi(\lambda)) = \varphi(\lambda)$$

Cas particulier
Si $T = (Y, \delta)$ un espace métrique (Topologique)

$$\varphi : (Y, \delta) \longrightarrow X$$
$$\lambda \longrightarrow \varphi(\lambda)$$

Soit $\lambda_0 \in Y$
Montrons que φ continue en λ_0
C'est-à-dire soit $\varepsilon > 0$ cherchons $\alpha > 0$ telle que :
$\delta(\lambda, \lambda_0) < \alpha \Rightarrow d(\varphi(\lambda), \varphi(\lambda_0)) < \varepsilon$.
On a

$$\begin{aligned} d\Big(\varphi(\lambda), \varphi(\lambda_0)) &= d(G_\lambda(\varphi(\lambda)), G_{\lambda_0}(\varphi(\lambda_0))\Big) \\ &= d(f(\lambda; \varphi(\lambda)), f(\lambda_0, \varphi(\lambda_0))) \\ &\leqslant d(f(\lambda; \varphi(\lambda)), f(\lambda_0, \varphi(\lambda))) + d(f(\lambda_0, \varphi(\lambda)), f(\lambda_0, \varphi(\lambda_0))) \end{aligned}$$

f continue sur $Y \times X$ en particulier f est continue en $(\lambda_0, .)$ alors
$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha_1 > 0$ *telle que :*

$$\delta(\lambda, \lambda_0) < \alpha_1 \Rightarrow d(f(\lambda; \varphi(\lambda)), f(\lambda_0, \varphi(\lambda))) < \frac{\varepsilon}{2}$$

de même f est continue en $(., \varphi(\lambda_0))$ alors
$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha_2 > 0$ *telle que :*

$$d(\varphi(\lambda), \varphi(\lambda_0)) < \alpha_2 \Rightarrow d(f(\lambda_0, \varphi(\lambda)), f(\lambda_0, \varphi(\lambda_0))) < \frac{\varepsilon}{2}$$

alors $\forall, \varepsilon > 0 \exists \alpha_1 > 0$ telle que
$\delta(\lambda, \lambda_0) < \alpha_1 \Rightarrow d(\varphi(\lambda), \varphi(\lambda_0)) < \varepsilon$
Ceci implique que φ continue en λ_0

Chapitre 3

Application du théorème de point fixe de Banach-Picard

3.1 Théorème de Cauchy Lipschitz :

Ce théorème est une application du théorème 2.0.1. En effet, nous verrons qu'une façon de le démontrer est d'appliquer le théorème précédent avec E un ensemble de fonctions et φ une application bien choisie.
Soient U un ouvert de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m$ et $f : U \to \mathbb{R}^m$ une application continue. On introduit le problème de Cauchy (C) suivant :
Etant donné $(t_0, y_0) \in U$, trouver une solution $y : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ de l'équation différentielle

$$(E)\ \ y' = f(t,y), (t,y) \in U$$

telle que $t_0 \in I$ et $y(t_0) = y_0$.

***Définition* 3.1.1.** *f est localement Lipschitzienne par rapport à la variable y sur U si $\forall (r_0, y_0) \in U$, il existe un voisinage V de (r_0, y_0) dans U et une constante $k = k(V)$ telle que $\forall (t, y_1), (t, y_2) \in V$, on ait $\left\|f(t,y_1) - f(t,y_2)\right\| \leq k\left\|y_1 - y_2\right\|$.*

***Théorème* 3.1.2.** *(de Cauchy-Lipschitz). Soit Ω un ouvert de $\mathbb{K}^n$ et I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On suppose que*
-F est continue de $I\times\Omega$ dans $\mathbb{K}^n$
-il existe une fonction L intégrable sur tout sous intervalle fermé borné de I telle que

$$\forall t \in I, \forall (x,y) \in \Omega^2, \|F(t,x) - F(t,y)\| \leq L(t)\|x-y\|.$$

Alors pour tout point (t_0, x_0) de $I\times\Omega$, il existe un intervalle ouvert $J \subset I$ contenant t_0 et une fonction $\phi : J \longrightarrow \Omega$ de classe C^1 vérifiant (E) sur J et telle que $\phi(t_0) = x_0$

Cette solution est unique au sens suivant : s'il existe une autre fonction ψ de classe C^1 sur un sous-intervalle J' des I contenant t_0, vérifiant (S) sur J' et telle que $\psi(t_0) = x_0$ alors $\psi \equiv \phi$ sur $J \cap J'$.

***Démonstration* 3.1.3.** *Vu les hypothèses sur F.il est équivalent de montrer qu'il existe une unique fonction ϕ continue sur un intervalle J contenant t_0 et telle que*

$$\phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(t', \phi(t'))\,dt' \text{ pour tout } t \in J \tag{3.1}$$

Soit $r_0 > 0$ tel que la boule fermée $\bar{B}(x_0, r_0)$ de centre x_0 et de rayon r_0 soit incluse dans Ω et J, un intervalle ouvert contenant t_0. On choisit J de longueur suffisamment petite pour que

$$\int_J \|F(t,x_0)\|\, dt \leq \frac{r_0}{2} \qquad et \qquad \int_J L(t) dt \leq \frac{1}{2}$$

On considère une fonction $\phi \in \mathcal{C}\left(J; \bar{B}(x_0, r_0)\right)$. Alors

$$\psi : \begin{cases} J \to E \\ t \mapsto x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} F(t', \phi(t'))\, dt' \end{cases}$$

est une fonction continue sur J et à valeurs dans $\bar{B}(x_0, r_0)$. En effet, pour tout $t \in J$, on a

$$\begin{aligned} \left\|\psi(t) - x_0\right\| &\leq \int_J \|F(t, \phi(t))\| dt \\ &\leq \int_J \left\|F(t,\phi(t)) - F(t, x_0)\right\| dt + \int_J \|F(t,x_0)\|\, dt \\ &\leq r_0 \int_J L(t) dt + \int_J \|F(t,x_0)\|\, dt \\ &\leq r_0. \end{aligned}$$

Il en résulte que l'on peut définir la suite $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{C}\left(J; \bar{B}(x_0, r_0)\right)$ par

$$\phi_0(t) \equiv x_0 \qquad et \qquad \phi_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(t', \phi_n(t'))\, dt' \tag{3.2}$$

Démontrons que la suite $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathcal{C}\left(J; \bar{B}(x_0, r_0)\right)$. Pour cela, on écrit que si

$$\rho_n \overset{déf}{=} \sup_{t\in J, p\in\mathbb{N}} \left\|\phi_{n+p}(t) - \phi_n(t)\right\|$$

alors on a

$$\begin{aligned} \rho_{n+1} &\leq \sup_{p\in\mathbb{N}} \int_J \left\|F\left(t, \phi_{n+p}(t)\right) - F(t, \phi_n(t))\right\| dt \\ &\leq \sup_{p\in\mathbb{N}} \int_J L(t) \left\|\phi_{n+p}(t) - \phi_n(t)\right\| dt \\ &\leq \rho_n \int_J L(t) dt \\ &\leq \frac{1}{2}\rho_n. \end{aligned}$$

En conséquence la suite $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. La suite $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc de Cauchy dans l'espace complet $\mathcal{C}\left(J; \bar{B}(x_0, r_0)\right)$. Elle converge donc uniformément vers une fonction ϕ qui appartient aussi à $\mathcal{C}\left(J; \bar{B}(r_0, x_0)\right)$. Par passage à la limite dans (3.2), on trouve que ϕ est solution de (3.1).

Reste à prouver l'unicité. Considérons donc deux solutions ϕ et ψ de (3.1) définies sur deux intervalles ouverts J et J' et telles que $\phi(t_0)=\psi(t_0)$. On a pour tout $(t,t_1)\in(J\cap J')^2$,

$$\psi(t)-\phi(t)=\int_{t_1}^{t}(F(\tau,\psi(\tau))-F(\tau,\phi(\tau)))d\tau \tag{3.3}$$

Si $\int_{J\cap J'}L(t)<1$, une adaptation immédiate de la preuve de la convergence de la suite $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ permet d'obtenir $\psi\equiv\phi$ sur $J\cap J'$, mais on peut en fait fort bien se passer de cette condition sur J. En effet, soit $K=\{t\in J\cap J' \mid \phi(t)=\psi(t)$ sur $[t_0,t]\cup[t,t_0]\}$. L'ensemble K est un sous-intervalle de $J\cap J'$ par construction. Cet intervalle n'est pas vide car contient t_0. Soit t_+la borne supérieure de K. Supposons par l'absurde que $t_+<\sup J\cap J'$. Alors $\phi-\psi\equiv 0$ sur $[t_0,t_+[$ et donc sur $[t_0,t_+]$aussi par continuité de $\phi-\psi$. Donc $t_+\in K$. Soit $\varepsilon>0$ tel que :

$$]t_+-\varepsilon,t_++\varepsilon\Big[\subset J\cap J' \quad et \quad \int_{t_+-\varepsilon}^{t_++\varepsilon}L(t)dt\leq\frac{1}{2}.$$

De (3.3), on tire

$$\sup_{|t-t_+|<\varepsilon}\|\psi(t)-\phi(t)\|\leq\frac{1}{2}\sup_{|t-t_+|<\varepsilon}\|\psi(t)-\phi(t)\|.$$

Donc $]t_+-\varepsilon,t_++\varepsilon[\subset K$. Cela contredit la définition de t_+. Donc $t_+=\sup J\cap J'$. Un raisonnement analogue est valable pour la borne inférieure. Donc $K=J\cap J'$. Autrement dit $\psi\equiv\phi$ sur $J\cap J'$.

***Définition* 3.1.4.** *Soient E,F deux espaces de Banach, $U\subset E$ ouvert, $a\in U, f:U\to F$ une application. On dit que f est différentiable en a s 'il existe $\varphi\in\mathcal{L}_c(E,F)$ (i.e. φ est linéaire et continue) telle que*

$$f(a+h)=f(a)+\varphi(h)+o(\|h\|) \text{ lorsque } h\to 0$$

Si φ existe, elle est unique et est appellée la différentielle de f en a et est notée df_a. Si f est différentiable en tout point de U, on dit que f est différentiable sur U.
Alors l'application $df:U\to\mathcal{L}_c(E,F):a\mapsto df_a$ est appellée l'application différentielle de f. Si df est continue, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^1(U)$.

Soient E et F deux espace vectorielle de même dimension fine.
-$U\subset E$ ouverte
-$V\subset F$ ouverte

***Définition* 3.1.5.** *Soient E et F deux evn. Soient $U\subset E$ et $V\subset F$ deux ouverts. Une application $f:U\longrightarrow V$ est un difféomorphisme de classe C^1 sur U vers V si :*
- f est une bijection de U sur V.
- f et f^{-1} sont toutes les deux de classe C^1.

Rappel :
Si I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et

$$f:I\longrightarrow\mathbb{R}$$

une fonction de classe C^1 avec $f'(t)\neq 0$ pour tout $t\in I$ alors $J=f(I)$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f:I\longrightarrow J$ est un difféomorphisme avec

$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

En effet f' est continue et ne s'annule jamais, d'après le théorème des valeurs intermèdiaires f' garde un signe constant sur I. Par suite f est strictement monotone et donc $J = f(I)$ est un intervalle ouvert et $f : I \longrightarrow J$ est une bijection et $f^{-1} : J \longrightarrow I$ est continue. Si $x, y \in J$ avec $f(t) = x$ et $f(s) = y$ on a

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(x)}{y - x} = \frac{1}{\frac{f(s)-f(t)}{s-t}}$$

Ce qui entraine que f^{-1} est dérivable et on a la formule de $\left(f^{-1}\right)'$ qui est continue aussi et donc f^{-1} est de classe C^1 sur J.

3.2 Théorème d'inversion local :

3.2.1 Formule de la différentielle de l'inverse :

On a la formule de la différentielle de l'inverse qui généralise celle d'une variable.

***Proposition* 3.2.1.** *Soient E et F deux evn. Si $f : U \longrightarrow V$ est un difféomorphisme d'un ouvert $U \subset E$ sur un ouvert $V \subset F$ alors pour tout $p \in U$ la différentielle $df(p) : E \longrightarrow F$ est inversible et*

$$d\left(f^{-1}\right)(q) = (df(p))^{-1}$$

où $f(p) = q$.

***Démonstration* 3.2.2.** *On a*

$$f^{-1} \circ f = Id_E|_U \ \text{ et } f \circ f^{-1} = Id_F|_V$$

Puisque Id_E et Id_F sont linéaires continues, en prenant la différentielle des deux identités, on a pour tout $p \in U$ et $q \in V$
$Id_F = d(Id_V)(q) = d(f \circ f^{-1})(q)$
$\Leftrightarrow Id_F = d\,f(f^{-1}(q)) \circ d\,f^{-1}(q)$ ***(d'aprés la différentielle de la composition)***
Si $q = f(p)$
$\Leftrightarrow Id_F = d\,f(p) \circ d\,f^{-1}(q)$
De même on obtient :
$Id_E = d\,f^{-1}(f(p)) \circ d\,f(p)$
Alors :

$$df^{-1}(f(p)) \circ df(p) = Id_E \ \text{ et } df\left(f^{-1}(q)\right) \circ df^{-1}(q) = Id_F$$

Ainsi :

$$d\left(f^{-1}\right)(q) = (df(p))^{-1}$$

3.2.2 Théorème d'inversion local :

***Théorème* 3.2.3.** *Soient :*
- E, F deux espaces de Banach
- $U \subset E$ ouvert

- $f : U \to F$ une application de classe $\mathcal{C}^1$
- $a \in U$ tel que df_a soit continu et inversible (et donc df_a^{-1} est continue)
Alors, il existe un voisinage ouvert V de a et un voisinage ouvert W de $f(a)$ tels que :
1. la restriction $f_{|V}$ de f à V est une bijection de V sur W
2. l'application inverse $g : W \to V$ est continue
3. g est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\forall x \in W, dg_{f(x)} = df_x^{-1}$

Démonstration 3.2.4. *On munit $\mathcal{L}_c(E,F)$ de la norme $\|u\| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|$. Quitte à remplacer f par la fonction $x \mapsto df_x^{-1}[f(a+x) - f(a)]$, on peut se ramener au cas où $a = 0$ $f(a) = 0$, et $df_0 = df_a = Id_E$ (et donc $E = F$).*

Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, il existe $r > 0$ tel que $B(0,r) \subset U$ et $\|df_x - df_0\| = \|df_x - Id_E\| \leq \frac{1}{2}$ pour tout $x \in B(0,r)$. On désigne $u := Id_E - df_x$, donc $df_x = Id_E - u$ avec $\|u\| \leq \frac{1}{2}$. Alors, df_x est un isomorphisme continu qui, vérifie $df_x^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$, et donc

$$\left\|df_x^{-1}\right\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|u\|^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n+1}-1}{2^n} = 2$$

1. On va montrer que la restriction de f à un voisinage ouvert de 0 dans $B(0,r)$ est une bijection sur $B\left(0, \frac{r}{2}\right)$. Soit $y \in B\left(0, \frac{r}{2}\right)$. On considère la fonction

$$\begin{aligned} h : &B_f(0,r) \to E \\ &x \mapsto y + x - f(x) \end{aligned}$$

Il est clair que h est de classe $\mathcal{C}^1$: de plus, $\forall x \in B(0,r), \|dh_x\| = \|Id_E - df_x\| \leq \frac{1}{2}$. Donc, d'après le Théorème des Accroisements Finis,

$$\forall x, x' \in B_f(0,r), \quad \left\|h(x) - h(x')\right\| \leq \frac{1}{2}\left\|x - x'\right\| \ (1)$$

En particulier, pour $x' = 0$, on a $\|x - f(x)\| = \|h(x) - h(0)\| \leq \frac{1}{2}\|x\|$, donc

$$\forall x \in B(0,r), \quad \|h(x)\| \leq \|y\| + \|x - f(x)\| \leq \|y\| + \frac{1}{2}\|x\| < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$$

Ainsi, h est une fonction de $B_f(0,r)$ dans $B(0,r) \subset B(0,1)$. Comme de plus h est $\frac{1}{2}-$ Lipschitzienne d'après (1), d' après le théorème 2.0.1,$\exists! x \in B_f(0,r)$ tel que $h(x) = x$, c'est-à-dire tel que $f(x) = y$. Comme $x = h(x)$ et que h est à valeurs dans $B(0,r)$, on en déduit que $x \in B(0,r)$. Alors, pour tout $y \in B\left(0, \frac{r}{2}\right), \exists! x \in B(0,r)$ tel que $f(x) = y$. On éfinit $V := f^{-1}\left(B\left(0, \frac{r}{2}\right)\right) \cap B(0,r)$. V est un voisinage de 0 car $f(0) = 0$ et f est continue sur $B(0,r)$. En notant $W := B\left(0, \frac{r}{2}\right)$, on a alors $f_{|V} : V \to W$ est une bijection.
2. On note $g : W \to V$ l'application inverse. On utilise nouvel h, cette fois-ci avec $y = 0$, et donc $\forall x \in U, x = h(x) + f(x)$. Alors, $\forall x, x' \in B(0,r)$,

$$\left\|x - x'\right\| \leq \left\|h(x) - h(x')\right\| + \left\|f(x) - f(x')\right\| \leq \frac{1}{2}\left\|x - x'\right\| + \left\|f(x) - f(x')\right\|$$

Donc, $\|x - x'\| \leq 2\|f(x) - f(x')\|$. On en déduit que $\forall y, y' \in W$,

$$\left\|g(y) - g(y')\right\| \leq 2\left\|f(g(y)) - f(g(y'))\right\| = 2\left\|y - y'\right\| \ (2)$$

g est donc Lipschitzienne et par conséquent continue.
3. On fixe $x \in V$ et on pose $y = f(x) \in W$. Il existe $r' > 0$ tel que $B(y, r') \subset W$, et pour tout $w \in B(0, r')$, on pose $v = g(y+w) - g(y)$. Donc, d'après (2), $\|v\| \leq 2\|w\|$, et

$$\begin{aligned}\Delta(w) &= g(y+w) - g(y) - df_x^{-1}(w)\\ &= v - df_x^{-1}[f(x+v) - f(x)]\\ &= -df_x^{-1}\left[f(x+v) - f(x) - df_x(v)\right]\end{aligned}$$

Comme $\left\|df_x^{-1}\right\| \leq 2$, on obtient $\|\Delta(w)\| \leq 2\,\|f(x+v) - f(x) - df_x(v)\| = 2\|v\|\varepsilon(v)$ avec $\lim_{v\to 0}\varepsilon(v) = 0$. Donc. $\|\Delta(w)\| \leq 4\|w\|\varepsilon(g(y+w) - g(y)) = 4\|w\|\varepsilon'(w)$. Comme g est continue, $\lim_{w\to 0}\varepsilon'(w) = 0$. Alors, $\|\Delta(w)\| = o(\|w\|)$. Donc, g est différentiable en y et $dg_y = df_x^{-1}$. Enfin, comme df_x^{-1} est continue (car f est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $L \in GL(E) \mapsto L^{-1} \in GL(E)$ est continue), la fonction $dg : y \mapsto dg_y$ est continue. Ainsi, g est de classe $\mathcal{C}^1$

Chapitre 4

Théorème du point fixe de type Brouwer-Schauder :

Dans ce chapitre, nous allons actuellement présenter les théorèmes du point fixe pour une application continue dans les espaces de Banach en dimension finie et infinie. En particulier, nous présentons les théorèmes de Brouwer et Schauder.

4.1 Théorème de Brouwer :

***Théorème* 4.1.1.** *Soit K une partie non vide, compacte et convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : K \to K$ une fonction continue. Il existe $x \in K$ tel que $f(x) = x$.*

***Remarque* 4.1.2.** *Les parties convexes et compactes de $\mathbb{R}$ sont les segments. Le théorème de Brouwer prend donc dans le cas $n = 1$ la forme particulière suivante :*

***Théorème* 4.1.3.** *Si $f : [a,b] \to [a,b]$ est continue, alors il existe $x \in [a,b]$ tel que $f(x) = x$.*

***Démonstration* 4.1.4.** *Si f est continue de $[a,b]$ dans lui-même, la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ est continue, prend en a la valeur $f(a) - a \geq 0$ et en b la valeur $f(b) - b \leq 0$. Alors par le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction g s'annule en un point x_0, qui est un point fixe de f.*

***Théorème* 4.1.5.** *Toute application T continue d'une boule fermèe d'un espace euclidien dans elle-même admet un point fixe.*

Il peut encore être un peu plus général, en considérant toute partie convexe compact d'un espace euclidien :

***Théorème* 4.1.6.** *Toute application T continue d'un convex compact K d'un espace euclidien à valeur dans K admet un point fixe.*

Nous allons donner un résultat de Brouwer qu'on ou ra besoin dans la démonstration du théorème de Schauder.

***Définition* 4.1.7.** *On dit qu'un espace topologique a la propriété du point fixe si toute application continue $T : E \to E$ possède un point fixe.*

On note par B_n la boule unité fermée de E^n, et on a le résultat suivant :

***Théorème* 4.1.8.** *La boule B_n a la propriété du point fixe pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Schauder a généralisè le résultat de Brouwer en dimension infinie.

4.2 Le Théorème de Schauder :

Ce théorème prolonge le résultat du théorème de Brouwer pour montrer l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur un convexe compact dans un espace de Banach

***Théorème* 4.2.1.** *(Schauder).*
Soient E un espace de Banach et $K \subset E$ convexe et compact. Alors toute application continue $f : K \to K$ possède un point fixe.

***Démonstration* 4.2.2.** *Soit $f : K \mapsto K$ une application continue. Comme K est compact, f est uniformément continue ; donc, si on fixe $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x, y \in K$, on ait $\|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon$, dès que $\|x - y\| \leq \delta$. De plus, il existe un ensemble fini des points $\left\{x_1, \ldots, x_p\right\} \subset K$ tel que les boules ouvertes de rayon δ centrées aux x_i recouvrent K ; i.e. $K \subset \bigcup_{1 \leq j \leq p} B\left(x_j, \delta\right)$. Si on désigne $L := \mathrm{Vect}\left(f\left(x_j\right)\right)_{1 \leq j \leq p}$, alors L est de dimension finie, et $K^* := K \cap L$ est compact convexe de dimension finie.*
Pour $1 \leq j \leq p$, on définit la fonction continue $\psi_j : E \to \mathbb{R}$ par

$$\psi_j(x) = \begin{cases} 0 & si \ \left\|x - x_j\right\| \geq \delta \\ 1 - \frac{\left\|x - x_j\right\|}{\delta} & sinon \end{cases}$$

et on voit que ψ_j est strictement positive sur $B\left(x_j, \delta\right)$ et nulle dehors.
On pose alors, pour $x \in K, g(x) := \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(x) f\left(x_j\right)$.$g$ est continue (car elle est la somme des fonctions continues), et prend ses valeurs dans K^* (car $g(x)$ est un barycentre des $f\left(x_j\right)$). Donc, si on prend la restriction $g_{|K^*} : K^* \to K^*$, par le théorème 5.1.8, g possède un point fixe $y \in K^*$. De plus,

$$\begin{aligned} f(y) - y = f(y) - g(y) &= \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y) f(y) - \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y) f\left(x_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y) \left(f(y) - f\left(x_j\right)\right) \end{aligned}$$

Or si $\varphi_j(y) \neq 0$ alors $\left\|y - x_j\right\| < \delta$, et donc $\left\|f(y) - f\left(x_j\right)\right\| < \varepsilon$. Donc, on a, pour tout j, $\left\|\varphi_j(y)\left(f(y) - f\left(x_j\right)\right)\right\| \leq \varepsilon \varphi_j(y)$, et donc

$$\|f(y) - y\| \leq \sum_{j=1}^{p} \left\|\varphi_j(y)\left(f(y) - f\left(x_j\right)\right)\right\| \leq \sum_{j=1}^{p} \varepsilon \varphi_j(y) = \varepsilon$$

Donc, pour tout entier m, on peut trouver un point $y_m \in K$ tel que $\left\|f\left(y_m\right) - y_m\right\| < 2^{-m}$. Et puisque K est compact, de la suite $(y_m)_{m \in \mathbb{Z}}$ on peut extraire une sous-suite $\left(y_{m_k}\right)$ qui converge vers un point $y^* \in K$. Alors f étant continue, la suite $\left(f\left(y_{m_k}\right)\right)$ converge vers $f\left(y^*\right)$, et on conclut que $f\left(y^*\right) = y^*$, i.e. y^* est un point fixe de f sur K.

Chapitre 5

Application du théorème se point fixe de Brower-Schauder :

5.1 Cauchy-Arzela :

***Théorème* 5.1.1.** *Soient :*
E un espace normé de dimension finie,
U un ouvert de $\mathbb{R}\times E$*, F une fonction continue de U dans E, et* (t_0,x_0) *un point de U*
Alors l'équation différentielle $x' = F(t,x)$ *a une solution au voisinage de* (t_0,x_0)*, i.e. Il existe un nombre* $\rho > 0$ *et une fonction* $f : [t_0-\rho, t_0+\rho] \to E$ *de classe* $\mathcal{C}^1$ *avec* $f(t_0) = x_0$*, telle que pour tout* $t \in [t_0-\rho, t_0+\rho]$*,*
1. $(t, f(t)) \in U$
2. $f'(t) = F(t, f(t))$

***Démonstration* 5.1.2.** *Soit* $M > \|F(t_0,x_0)\|$*. Quitte à remplacer U par l'ensemble ouvert* $\{(t,x) \in U : \|F(t,x)\| < M\}$*, on peut supposer que F est majorée en norme par M sur U. Il existe donc* $r > 0$ *et* $h > 0$ *tels que* $U \supset [t_0-h, t_0+h] \times B_f(x_0,r)$*, et on choisit* $\rho = \min\left(h, \frac{r}{M}\right) > 0$*.*

On considère l'ensemble K des fonctions M-Lipschitziennes de l'intervalle $J = [t_0-\rho, t_0+\rho]$ *dans E qui valent* x_0 *en* t_0*, que l'on munit de la norme uniforme. Si f et g sont dans K et* $s \in [0,1]$*, alors* $sf + (1-s)g \in K$*, donc K est convexe. Si* $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *est une suite de Cauchy de K pour la norme uniforme, alors d'après le théorème 5.1.8 , il existe une fonction continue* $f : J \to E$ *telle que* f_i *converge uniformément vers f. On a alors* $f(t_0) = \lim_{i\to+\infty} f_i(t_0) = x_0$ *et* $\forall t,t' \in J, \|f(t) - f(t')\| = \lim_{i\to+\infty} \|f_i(t) - f_i(t')\| \leq M|t-t'|$*, et donc* $f \in K$*. On en déduit que K est fermé pour la norme uniforme dans* $\mathcal{C}^0(J,E)$*. De plus, pour tout* $t \in J$ *et tout* $f \in K$*, on a*

$$\|f(t) - x_0\| = \|f(t) - f(t_0)\| \leq M|t-t_0| \leq M\rho \leq r$$

ce qui montre que $K(t) = \{f(t) : f \in K\}$ *est contenu dans la boule* $B_f(x_0,r)$*, et donc* $K(t)$ *est relativement compact. Et puisque K est uniformément équicontinu, K est compact.*
On peut alors définir une application $\Phi : K \to \mathcal{C}^1(J,E)$*, en posant*

$$\Phi(f)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, f(s))\mathrm{d}s$$

En effet, si $f \in K$*, alors* $f(s) \in B_f(x_0,r)$ *pour tout* $s \in J$*, ce qui montre que la fonction* $s \mapsto F(s, f(s))$ *est bien définie et continue sur J, à valeurs dans E, et possède une primitive* $\Phi(f)$ *de classe* $\mathcal{C}^1$*,* *valant* x_0 *en* t_0. *Puisque la fonction* $g := \Phi(f)$ *vérifie* $g'(t) = F(t, f(t))$, *on a que* $\|g'(t)\| \leq M$, *c'est-à-dire que* g *est* M*-Lipschitzienne sur* J. *De plus,* $g(t_0) = x_0$. *Donc,* $\Phi(K) \subset K$. *Enfin, comme* F *est uniformément continue sur le compact* $J \times B_f(x_0, r)$, *pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* $\delta > 0$ *tel que pour tout* (s, x) *et* (s', x') *appartenant à* $J \times B_f(x_0, r)$, *on ait* $\max(|s - s'|, \|x - x'\|) < \delta \Rightarrow \|F(s, x) - F(s', x')\| < \frac{\varepsilon}{\rho}$.

Alors, si f *et* f_1 *appartiennent à* K *et si* $\|f - f_1\| < \delta$, *on a* $\forall s \in J, \|F(s, f(s)) - F(s, f_1(s))\| < \frac{\varepsilon}{\rho}$. *Donc,*

$$\begin{aligned}
\|\Phi(f)(t) - \Phi(f_1)(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} F(s, f(s)) - F(s, f_1(s))\,\mathrm{d}s \right\| \\
&\leq |t - t_0| \sup_{s \in J} \|F(s, f(s)) - F(s, f_1(s))\| \\
&\leq \rho \frac{\varepsilon}{\rho} = \varepsilon
\end{aligned}$$

pour tout $t \in J$. *Ceci montre que* $\|\Phi(f) - \Phi(f_1)\| \leq \varepsilon$, *i.e.* $\Phi : K \to K$ *est une application continue. Donc, d'après le Théorème 5.2.1 , il existe un point fixe* $f \in K$ *de* Φ, *c'est-à-dire que* f *est une solution au probléme de Cauchy.*

5.2 Cauchy-Peano :

***Théorème* 5.2.1.** *Soit* I *un intervalle non vide de* R, U *un ouvert de* $R^n, (t_0, x_0) \in I \times U$ *et* $f : I \times U \longrightarrow R^n$ *une application continue.*
Alors le problème de Cauchy.

$$x' = f(t, x) \quad \text{et} \quad x(t_0) = x_0$$

admet au moins une solution locale.

***Démonstration* 5.2.2.** *Soit* $r, M > 0$ *tel que :*

$$\overline{B(x_0, r)}, \quad J = \left[t_0 - \frac{r}{M}, t_0 + \frac{r}{M}\right] \subset I$$

et

$$\sup_{(t,x) \in J \times \overline{B(x_0, r)}} \|f(t, x)\| \leq M$$

On note alors :

$$A = \left\{ f : J \longrightarrow \overline{B(x_0, r)} \quad M\text{-lipschitzienneavec } : f(t_0) = x_0 \right\}$$

et pour $x \in A$ *et* $t \in J$.

$$x^*(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\mathrm{d}s$$

Le problème de Cauchy revient à trouver un solution locale de l'équation intégrale :

$$x^*(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\mathrm{d}s$$

i.e à chercher un point fixe de l'opérateur :

$$\begin{aligned}
T : A &\longrightarrow A \\
x &\longrightarrow \Theta
\end{aligned}$$

si $x \in A$ *et* $t \in J$ *alors :*

$$\|x^*(t) - x_0(t)\| = \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, x(s)) \mathrm{d}s \right\| \leq M |t - t_0| r$$

et si $u, v \in J$ *alors :*

$$\|x^*(u) - x^*(v)\| = \left\| \int_{u}^{v} f(s, x(s)) \mathrm{d}s \right\| \leq M |t - t_0|$$

donc $\mathbf{\Theta} \in A$*.(i.e) L opérateur* T *est bien défini. On vérifie aisément que* A *est convexe et, au moyen du Théorème* d *'Ascoli, on vérifie que* A *est compact.*
Il reste donc à montrer que T *est continue.*
Soit $x, y \in A$ *et* $\epsilon > 0$*, puisque* f *est uniformément continue sur* $J \times \overline{B(x_0, r)}$*, il existe* $\eta > 0$ *tel que :*

$$\|x - y\| \leq \eta \Longrightarrow \|f(t, x) - f(t, y)\| \leq \frac{\epsilon}{r}$$

On en déduit que si $\|x - y\| \leq \eta$ *on a alors :*

$$\left\|x^*(t) - y^*(t)\right\| \leq \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, x(s)) - f(s, y(s)) \mathrm{d}s \right\| ds \leq \epsilon$$

(i.e) T *est continue.*

conclusion :

La théorie du point fixe est d'une importance capitale dans l'étude de l'existence de solution pour les équations d'opérateurs non linéaires.

De nombreux théorèmes d'existence sont obtenus à partir des théorèmes de Banach et Schauder, en transformant le problème d'existence en un problème de point fixe. Mais celui de Brouwer est particulièrement célèbre.

Le théorème de Banach ne s'appuie pas sur les propriétés topologiques du domaine de définition mais sur le fait que la fonction étudiée soit contractante. Le résultat de Brouwer est l'un des théorèmes-clef caractérisant la topologie d'un espace euclidien. Il intervient pour établir des résultats fins sur les équations différentielles ; il est présent dans la géométrie différentielle. Il apparait dans diverses branches, comme la théorie des jeux.

Ce théorème est généralisé en 1930 aux espaces de Banach. Cette généralisation est due à Schauder. Ce théorème affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique, mais qui nous permet de résoudre plusieurs problèmes.

Bibliographie

[1] J-P.Demailly.*Analyse numérique et équation différentilles ; collection* Grenoble Sciences presses universitaires de Grenoble,Grenoble (1987).

[2] J.Saint Raymond. *Topologie, calcul différentiel et variable complexe ;* Calvage et Mounet, Paris (2007).

[3] Abdelhaq El Jai. *Eléments de topologie et espaces métriques,* Presses Universitaires de Perpignan, 2007.

[4] Saïd Asserda. *Fonctions de plusieurs variables réelles,* Université Ibn Tofail Faculté des sciences Kénitra 26 septembre (2014).